Suite I - Die StrukturGebende

Teil 3: Essays 13-21

Komposition. $x \circ y$**. Einschränkung von** x **auf** D**.**

$E\cap$**Verschiebung von** x**. Wert** $y(x)$ **von** y **in** x**.**

EinschränkungsSatz. (Keine) Funktion. IdentitätsSatz

Funktionen. (Universelle) Nullfunktion. zo**.** zo_E**.**

(Universelle) Identität. id**.** id_E**.** $f : D \to B$**.** $y[\{.\}]$**.**

AuswahlAxiom.

Andreas Unterreiter

13. September 2011

$x[x^{-1}[E]]$. $x^{-1}[x[E]]$. $(x^{-1})^{-1}$ ist die größte, in x enthaltene Relation. $(x^{-1})^{-1}[x^{-1}[E]]$.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 15/04/11**

13-1. Es folgen jeweils zwei Aussagen darüber, zwischen welchen Klassen sich $x[x^{-1}[E]]$ und $x^{-1}[x[E]]$ befinden. Interessanter Weise sind die Resultate für beliebige Klassen und nicht etwa nur für Relationen gültig. Die in allen vier Aussagen auftretenden "Doppel-Inklusionen" beinhalten klarer Weise zwei Aussagen, etwa in c), wo "$E \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$" sowohl "$E \subseteq x[x^{-1}[E]]$" als auch "$x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$" bedeutet. Via a) befindet sich $x[x^{-1}[E]]$ stets zwischen den Klassen $E \cap \mathsf{ran}\, x$ und $\mathsf{ran}\, x$. In b) wird ganz ähnlich gezeigt, dass sich $x^{-1}[x[E]]$ stets zwischen $E \cap \mathsf{dom}\, x$ und $\mathsf{dom}\, x$ befindet. In c) und d) werden diese Aussagen auf die nahe liegenden Fälle $E \subseteq \mathsf{ran}\, x$ und $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ spezialisiert. Aus diesem Grund ist die Beweis-Reihenfolge a) - c) - b) - d):

<u>13-1(Satz)</u>

a) $E \cap \mathsf{ran}\, x \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

b) $E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

c) *Aus* "$E \subseteq \mathsf{ran}\, x$" *folgt* "$E \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$".

d) *Aus* "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$E \subseteq x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$".

Beweis **13-1** a)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in E \cap \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in E \cap \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in E) \wedge (\alpha \in \mathsf{ran}\, x)$.

3: Aus 2 "$\ldots \alpha \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x$.

4: Aus 3 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus 2 "$\alpha \in E \ldots$"
folgt via **11-22**: $\Omega \in x^{-1}[E]$.

5: Aus 3 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus 4 "$\Omega \in x^{-1}[E]$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[x^{-1}[E]]$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in E \cap \mathsf{ran}\, x) \Rightarrow (\alpha \in x[x^{-1}[E]])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} E \cap \mathsf{ran}\, x \subseteq x[x^{-1}[E]] \text{"}}$

1.2: Via **8-10** gilt: $x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus A1 gleich "$E \cap \mathsf{ran}\, x \subseteq x[x^{-1}[E]]$" und
aus 1.2 "$x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $E \cap \mathsf{ran}\, x \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

c) VS gleich $E \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

1.1: Aus VS gleich "$E \subseteq \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{ran}\, x = E$.

1.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $E \cap \mathsf{ran}\, x \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus 1.1 "$E \cap \mathsf{ran}\, x = E$" und
aus 1.2 "$E \cap \mathsf{ran}\, x \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $E \subseteq x[x^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

<u>Beweis **13-1**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" folgt via **2-2**:	$(\alpha \in E) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, x)$.
`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **7-2**:	$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x$.
`4:` Aus `3` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" und aus `2.2` "$\alpha \in E \ldots$" folgt via **8-8**:	$\Omega \in x[E]$.
`5:` Aus `3` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" und aus `4` "$\Omega \in x[E]$" folgt via **11-22**:	$\alpha \in x^{-1}[x[E]]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \cap \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[x[E]])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]] \text{”}}$

`1.2:` Via **11-19** gilt: $x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `A1` gleich "$E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]]$" und
aus `1.2` "$x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`d)` `VS` gleich $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{dom}\, x = E$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.1` "$E \cap \mathsf{dom}\, x = E$" und
aus `1.2` "$E \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $E \subseteq x^{-1}[x[E]] \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

$\square$

13-2. Gemäß **13-1** ist im Fall $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ die Klasse E eine *TeilKlasse* von $x^{-1}[x[E]]$. Nun wird eine zusätzliche Bedingung, die die *Gleichung* $E = x^{-1}[x[E]]$ garantiert, angegeben. Ein korrespondierendes Resultat für $x[x^{-1}[E]]$ ist in **13-5** zu finden. Scheinbar tritt bei den Voraussetzungen von **13-2** und **13-5** - "x injektiv" versus "x^{-1} injektiv *und* x Relation" - ein Symmetriebruch in Bezug auf $x[x^{-1}[E]]$ und $x^{-1}[x[E]]$ auf. Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass die zu "x Relation" in **13-5** korrespondierende Forderung "x^{-1} Relation" via **11-7** stets gilt, also auch nicht zusätzlich gefordert werden muss:

13-2(Satz)

Es gelte:

→) x *injektiv.*

→) $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

Dann folgt "$E = x^{-1}[x[E]]$".

Beweis **13-2**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x^{-1}[x[E]]$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in x^{-1}[x[E]]$"
folgt via **11-21**: $\exists \Omega : (\Omega \in x[E]) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in x[E] \ldots$"
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$.

4: Aus →) "x injektiv",
aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" und
aus 3 "$\ldots (\Psi, \Omega) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \Psi$.

5: Aus 4 "$\alpha = \Psi$" und
aus 3 "$\ldots \Psi \in E \ldots$"
folgt: $\alpha \in E$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}[x[E]]) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}x^{-1}[x[E]] \subseteq E\text{”}}$

1.2: Aus →) "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **13-1**: $E \subseteq x^{-1}[x[E]]$.

2: Aus 1.2 "$E \subseteq x^{-1}[x[E]]$" und
aus A1 gleich "$x^{-1}[x[E]] \subseteq E$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E = x^{-1}[x[E]]$.

□

13-3. Im folgenden Satz wird via `abc)` gesagt, dass $(x^{-1})^{-1}$ die größte in x enthaltene Relation ist. Konsequenter Weise ist gemäß `de)` eine Klasse x genau dann eine Relation, wenn $x = (x^{-1})^{-1}$ gilt. Die Aussage "$(x^{-1})^{-1} \subseteq x$" wird in `f)` mit "$(x^{-1})^{-1} = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$" präzisiert. Ausserdem gilt $((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$ und $(((x^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}$:

13-3(Satz)

`a)` *$(x^{-1})^{-1}$ Relation.*

`b)` *$(x^{-1})^{-1} \subseteq x$.*

`c)` *Aus "r Relation" und "$r \subseteq x$" folgt "$r \subseteq (x^{-1})^{-1}$".*

`d)` *Aus "x Relation" folgt "$x = (x^{-1})^{-1}$".*

`e)` *Aus "$x = (x^{-1})^{-1}$" folgt "x Relation".*

`f)` *$(x^{-1})^{-1} = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.*

`g)` *$((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$.*

`h)` *$(((x^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}$.*

Beweis **13-3** `a)` Via **11-7** gilt: $(x^{-1})^{-1}$ Relation.

`b)`

`Thema1` $\alpha \in (x^{-1})^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in (x^{-1})^{-1}$"
folgt via **11-2**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x^{-1})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in x^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in x$.

`4:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `3` "$(\Psi, \Omega) \in x$"
folgt: $\alpha \in x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x^{-1})^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(x^{-1})^{-1} \subseteq x$.

<u>Beweis **13-3**</u> `c)` `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (r \subseteq x)$.

`Thema1` $\alpha \in r$.

`2:` Aus `VS` gleich "r Relation…" und
aus `Thema1`"$\alpha \in r$"
folgt via **10-2**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `Thema1`"$\alpha \in r$"
folgt: $(\Omega, \Psi) \in r$.

`4:` Aus `3`"$(\Omega, \Psi) \in r$" und
aus `VS` gleich "$\ldots r \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $(\Omega, \Psi) \in x$.

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \Psi) \in x$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in (x^{-1})^{-1}$.

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `6`"$(\Omega, \Psi) \in (x^{-1})^{-1}$"
folgt: $\alpha \in (x^{-1})^{-1}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\alpha \in (x^{-1})^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $r \subseteq (x^{-1})^{-1}$.

<u>Beweis **13-3**</u> `d)` `VS` gleich x Relation.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "x Relation" und
aus `1`"$x \subseteq x$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \subseteq (x^{-1})^{-1}$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(x^{-1})^{-1} \subseteq x$.

`3:` Aus `2.1`"$x \subseteq (x^{-1})^{-1}$" und
aus `2.2`"$(x^{-1})^{-1} \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = (x^{-1})^{-1}$.

`e)` `VS` gleich $x = (x^{-1})^{-1}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^{-1})^{-1}$ Relation.

`2:` Aus `VS` gleich "$x = (x^{-1})^{-1}$" und
aus `1`"$(x^{-1})^{-1}$ Relation"
folgt: x Relation.

`f)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^{-1})^{-1}$ Relation.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(x^{-1})^{-1} \subseteq x$.

`1.3:` $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \overset{\textbf{2-7}}{\subseteq} x$.

`1.4:` $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \overset{\textbf{2-7}}{\subseteq} \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(x^{-1})^{-1}$ Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $(x^{-1})^{-1} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.4`"$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \ldots \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-1(Def)**: $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ Relation.

`3.1:` Aus `1.2`"$(x^{-1})^{-1} \subseteq x$" und
aus `2.1`"$(x^{-1})^{-1} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-12**: $(x^{-1})^{-1} \subseteq x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`3.2:` Aus `1.3`"$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \ldots \subseteq x$" und
aus `2.2`"$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ Relation"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (x^{-1})^{-1}$.

`4:` Aus `3.1`"$(x^{-1})^{-1} \subseteq x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$" und
aus `3.2`"$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq (x^{-1})^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x^{-1})^{-1} = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Beweis **13-3** g)

`Thema1.1` $\alpha \in ((x^{-1})^{-1})^{-1}$.

2: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in ((x^{-1})^{-1})^{-1}$”
folgt via **11-3**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in (x^{-1})^{-1}).$$

3: Aus 2“$\ldots (\Omega, \Psi) \in (x^{-1})^{-1}$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in x$.

4: Aus 3“$(\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$.

5: Aus 2“$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$” und
aus 4“$(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$”
folgt: $\alpha \in x^{-1}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in ((x^{-1})^{-1})^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$((x^{-1})^{-1})^{-1} \subseteq x^{-1}$”

`Thema1.2` $\alpha \in x^{-1}$.

2: Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x^{-1}$”
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

3: Aus 2“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in (x^{-1})^{-1}$.

4: Aus 3“$(\Omega, \Psi) \in (x^{-1})^{-1}$”
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in ((x^{-1})^{-1})^{-1}$.

5: Aus 2“$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$” und
aus 4“$(\Psi, \Omega) \in ((x^{-1})^{-1})^{-1}$”
folgt: $\alpha \in ((x^{-1})^{-1})^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in ((x^{-1})^{-1})^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$x^{-1} \subseteq ((x^{-1})^{-1})^{-1}$”

...

Beweis **13-3** `g)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$((x^{-1})^{-1})^{-1} \subseteq x^{-1}$" und
aus `A2` gleich "$x^{-1} \subseteq ((x^{-1})^{-1})^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$.

`h)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x^{-1})^{-1}$ Relation.

`2:` Aus `1` "$(x^{-1})^{-1}$ Relation"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(x^{-1})^{-1} = (((x^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(((x^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}$.

□

13-4. Es folgt ein Hilfsresulat zum Beweis von **13-5**:

13-4(Satz)

Es gelte:

→) x^{-1} *injektiv.*

→) $E \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

Dann folgt "$E = (x^{-1})^{-1}[x^{-1}[E]]$".

Beweis **13-4**

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

2: Aus →) "$E \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $E \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

3: Aus →) "x^{-1} injektiv" und
aus 2 "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$"
folgt via **13-2**: $E = (x^{-1})^{-1}[x^{-1}[E]]$.

□

13-5. Wie im folgenden Satz gesagt, sind außer der via **13-1** erwarteten Voraussetzung “$E \subseteq \mathsf{ran}\, r$” *zwei* weitere Voraussetzungen an r erforderlich, um $E = r[r^{-1}[E]]$ zu erreichen. Interessanter Weise stellen sich diese beiden Voraussetzungen später als äquivalent zu “r Funktion” heraus. Ein korrespondierendes Resultat für “$E = r^{-1}[r[E]]$” ist in **13-2** zu finden:

13-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *r Relation.*

$\rightarrow)$ *r^{-1} injektiv.*

$\rightarrow)$ *$E \subseteq \mathsf{ran}\, r$.*

Dann folgt “$E = r[r^{-1}[E]]$”.

Beweis **13-5**

1: Aus `VS` gleich “r Relation”
folgt via **13-3**: $r = (r^{-1})^{-1}$.

2: Aus $\rightarrow)$“r^{-1} injektiv” und
aus $\rightarrow)$“$E \subseteq \mathsf{ran}\, r$”
folgt via **13-4**: $E = (r^{-1})^{-1}[r^{-1}[E]]$.

3: Aus 1“$r = (r^{-1})^{-1}$” und
aus 2“$E = (r^{-1})^{-1}[r^{-1}[E]]$”
folgt: $E = r[r^{-1}[E]]$.

□

Komposition. $x \circ y$.

Ersterstellung: 11/10/05 **Letzte Änderung: 15/04/11**

14-1. Die **Kompositon von** x **und** y besteht aus jenen geordneten Paaren (λ,μ), zu denen es Ω gibt, so dass einerseits $(\lambda,\Omega)\in y$ und andererseits $(\Omega,\mu)\in x$ gilt. Via **ElementAxiom** und **PaarAxiom I** ergibt sich hier, dass λ,μ,Ω Mengen sind. Bemerkenswerter Weise wird die Komposition von x und y mit "$x\circ y$" abgekürzt, doch wenn für Mengen λ,μ die Menge (λ,μ) in $x\circ y$ liegt, so gelten für die soeben als existent geforderte Klasse Ω die Aussagen $(\lambda,\Omega)\in y$ und $(\Omega,\mu)\in x$ - und hier wird die Reihenfolge von x und y umgedreht. Dies ist auch aus der Notation des Klassenterms ersichtlich, wonach $x\circ y=\mathtt{14.0}(y,x)$:

14-1(Definition)

1) $x\circ y$

$$= \mathtt{14.0}(y,x) = \{(\lambda,\mu) : (\exists\Omega : ((\lambda,\Omega)\in y)\wedge((\Omega,\mu)\in x))\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Upsilon,\Psi : ((\Omega,\Upsilon)\in y)\wedge((\Upsilon,\Psi)\in x)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Komposition von** x **und** y" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x\circ y.$$

14-2. Fast schon erwartet gelten die folgenden Aussagen:

14-2(Satz)

a) *$x \circ y$ Komposition von x und y.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Komposition von x und y"
und "$\mathfrak{D}$ Komposition von x und y"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **14-2** a)

Aus "$x \circ y = x \circ y$"
folgt via **14-1**: $x \circ y$ ist die Komposition von x und y.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ Komposition von x und y) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Komposition von x und y).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Komposition von x und $y \ldots$"
folgt via **14-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x \circ y$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Komposition von x und y"
folgt via **14-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x \circ y$.

2: Aus 1.1"$\mathfrak{C} = x \circ y$" und
aus 1.2"$\mathfrak{D} = x \circ y$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

14-3. Der erste Schritt zur Bewältigung der Definition der Komposition von x und y besteht darin, eine definitionsangepasste, notwendige Bedingung für "$w \in x \circ y$" anzugeben:

14-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in x \circ y$.

Dann gibt es Ω, Υ, Ψ, *so dass gilt:*

`e.1)` Ω *Menge.*

`e.2)` Υ *Menge.*

`e.3)` Ψ *Menge.*

`e.4)` $(\Omega, \Upsilon) \in y$.

`e.5)` $(\Upsilon, \Psi) \in x$.

`e.6)` $w = (\Omega, \Psi)$.

Beweis **14-3**

1: Aus →) “$w \in x \circ y$” und
aus “$x \circ y = \{\omega : (\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in y) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$”
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in y) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

2: Aus 1“$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in y) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$”
folgt: $\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in y) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

3.1: Aus 2“$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in y \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: (Ω, Υ) Menge.

3.2: Aus 2“$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: (Υ, Ψ) Menge.

4.1: Aus 3.1“(Ω, Υ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Upsilon$ Menge$)$.

4.2: Aus 3.2“(Υ, Ψ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Upsilon$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

5: Aus 2“$\exists \Omega, \Upsilon, \Psi \ldots$”,
aus 4.1“Ω Menge…”,
aus 4.1“$\ldots \Upsilon$ Menge”,
aus 4.2“$\ldots \Psi$ Menge”,
aus 2“$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in y \ldots$”,
aus 2“$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in x \ldots$” und
aus 2“$\ldots w = (\Omega, \Psi)$”
folgt:

$$\begin{aligned} &\exists \Omega, \Upsilon, \Psi: \\ &\Omega \text{ Menge} \\ \wedge\ &\Upsilon \text{ Menge} \\ \wedge\ &\Psi \text{ Menge} \\ \wedge\ &(\Omega, \Upsilon) \in y \\ \wedge\ &(\Upsilon, \Psi) \in x \\ \wedge\ &w = (\Omega, \Psi). \end{aligned}$$

□

14-4. Nachdem in **14-3** die Definition der Verknüpfung im Hinblick auf das "Element-Sein" einer ansonsten beliebigen Klasse entwirrt wird, geht es im folgenden Satz um die etwas einfacher zu behandelnde Frage, welche definitionsangepassten, notwendigen Bedingungen aus $(p, q) \in x \circ y$ folgen:

14-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $(p, q) \in x \circ y$.

Dann folgt gibt es Ω, *so dass gilt:*

`e.1)` Ω *Menge.*

`e.2)` $(p, \Omega) \in y$.

`e.3)` $(\Omega, q) \in x$.

<u>Beweis **14-4**</u>

`1:` Aus $\rightarrow)$ "$(p, q) \in x \circ y$"
folgt via **14-3**: $\exists \Psi, \Omega, \Upsilon : (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Upsilon \text{ Menge})$
$\wedge((\Psi, \Omega) \in y) \wedge ((\Omega, \Upsilon) \in x) \wedge ((p, q) = (\Psi, \Upsilon))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (p, q) = (\Psi, \Upsilon)$",
aus `1`"$\ldots \Psi$ Menge…" und
aus `1`"$\ldots \Upsilon$ Menge…"
folgt via **IGP**: $(p = \Psi) \wedge (q = \Upsilon)$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Psi \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \Omega) = (\Psi, \Omega)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots q = \Upsilon$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, q) = (\Omega, \Upsilon)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$(p, \Omega) = (\Psi, \Omega)$" und
aus `1`"$\ldots (\Psi, \Omega) \in y \ldots$"
folgt: $(p, \Omega) \in y$.

`4.2:` Aus `3.2`"$(\Omega, q) = (\Omega, \Upsilon)$" und
aus `1`"$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in x \ldots$"
folgt: $(\Omega, q) \in x$.

`5:` Aus `1`"$\exists \ldots \Omega \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega$ Menge…",
aus `4.1`"$(p, \Omega) \in y$" und
aus `4.2`"$(\Omega, q) \in x$"
folgt:

$$\exists \Omega : \Omega \text{ Menge} \wedge (p, \Omega) \in y \wedge (\Omega, q) \in x.$$

□

14-5. Mit dem folgenden Satz wird eine hinreichende Bedingung dafür gegeben, dass ein geordnetes Paar von Mengen in der Komposition von zwei Klassen ist und die erste Komponente des geordneten Paares Element des Definitions-Bereichs der Komposition ist und die zweite Komponente des geordneten Paares Element des Bild-Bereichs der Komposition ist:

14-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $(p, w) \in y$.

$\rightarrow\!)$ $(w, q) \in x$.

Dann folgt:

a) $(p, q) \in x \circ y$.

b) $p \in \mathsf{dom}\,(x \circ y)$.

c) $q \in \mathsf{ran}\,(x \circ y)$.

Beweis **14-5**

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ “ $(p, w) \in y$ ”
folgt: $\exists p : (p, w) \in y$.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ “ $(p, w) \in y$ ”
folgt: $\exists w : (p, w) \in y$.

1.3: Aus $\rightarrow\!)$ “ $(w, q) \in x$ ”
folgt: $\exists q : (w, q) \in x$.

1.4: Aus $\rightarrow\!)$ “ $(p, w) \in y$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (p, w) Menge.

1.5: Aus $\rightarrow\!)$ “ $(w, q) \in x$ ”
folgt via **ElementAxiom**: (w, q) Menge.

...

<u>Beweis</u> **14-5** ...

`2.1:` Aus `1.1`“$\exists p\ldots$”,
aus `1.2`“$\exists w\ldots$”,
aus `1.3`“$\exists q\ldots$”,
aus →)“$(p,w)\in y$”,
aus →)“$(w,q)\in x$” und
aus “$(p,q)=(p,q)$”
folgt: $\exists p,w,q:((p,w)\in y)\wedge((w,q)\in x)\wedge((p,q)=(p,q))$.

`2.2:` Aus `1.4`“(p,w) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: p Menge.

`2.3:` Aus `1.5`“(w,q) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: q Menge.

`3:` Aus `2.2`“p Menge” und
aus `2.3`“q Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (p,q) Menge.

`4:` Aus `2.1`“$\exists p,w,q:((p,w)\in y)\wedge((w,q)\in x)\wedge((p,q)=(p,q))$” und
aus `3`“(p,q) Menge”
folgt:
$$(p,q)\in\{\omega:(\exists\Omega,\Upsilon,\Psi:((\Omega,\Upsilon)\in y)\wedge((\Upsilon,\Psi)\in x)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}.$$

`5.a):` Aus 4
“$(p,q)\in\{\omega:(\exists\Omega,\Upsilon,\Psi:((\Omega,\Upsilon)\in y)\wedge((\Upsilon,\Psi)\in x)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi))\}$” und
aus “$\{\omega:(\exists\Omega,\Upsilon,\Psi:((\Omega,\Upsilon)\in y)\wedge((\Upsilon,\Psi)\in x)\wedge(\omega=(\Omega,\Psi)))\}=x\circ y$”
folgt: $(p,q)\in x\circ y$.

`6.b):` Aus `5.a)`“$(p,q)\in x\circ y$”
folgt via **7-5**: $p\in\mathsf{dom}\,(x\circ y)$.

`6.c):` Aus `5.a)`“$(p,q)\in x\circ y$”
folgt via **7-5**: $q\in\mathsf{dom}\,(x\circ y)$.

□

14-6. Mit dem folgenden Satz wird eine bis auf Weiteres ausreichende Diskussion des Definitions- und des Bild-Bereichs von Kompositionen gegeben:

14-6(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = y^{-1}[\mathsf{dom}\,x]$.

b) $\mathsf{dom}\,(x \circ y) \subseteq \mathsf{dom}\,y$.

c) *Aus* “$\mathsf{ran}\,y \subseteq \mathsf{dom}\,x$” *folgt* “$\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\,y$”.

d) $\mathsf{ran}\,(x \circ y) = x[\mathsf{ran}\,y]$.

e) $\mathsf{ran}\,(x \circ y) \subseteq \mathsf{ran}\,x$.

f) *Aus* “$\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,y$” *folgt* “$\mathsf{ran}\,(x \circ y) = \mathsf{ran}\,x$”.

Beweis **14-6** a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \circ y)$.

2: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \circ y)$”
folgt via **7-2**: $\exists\Omega : (\alpha, \Omega) \in x \circ y)$.

3: Aus 2“$\ldots (\alpha, \Omega) \in x \circ y$”
folgt via **14-4**: $\exists\Psi : ((\alpha, \Psi) \in y) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$.

4: Aus 3“$\ldots (\Psi, \Omega) \in x$”
folgt via **7-5**: $\Psi \in \mathsf{dom}\,x$.

5: Aus 3“$\ldots (\alpha, \Psi) \in y \ldots$” und
aus 4“$\Psi \in \mathsf{dom}\,x$”
folgt via **11-22**: $\alpha \in y^{-1}[\mathsf{dom}\,x]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(x \circ y)) \Rightarrow (\alpha \in y^{-1}[\mathsf{dom}\,x])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{dom}\,(x \circ y) \subseteq y^{-1}[\mathsf{dom}\,x]$”

Beweis **14-6** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$.
`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$” folgt via **11-21**:	$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\alpha, \Omega) \in y)$.
`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$” folgt via **7-2**:	$\exists \Psi : (\Omega, \Psi) \in x$.
`4:` Aus `2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in y$” und aus `3`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$” folgt via **14-5**:	$(\alpha, \Psi) \in x \circ y$.
`5:` Aus `4`“$(\alpha, \Psi) \in x \circ y$” folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \circ y)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \circ y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}y^{-1}[\mathsf{dom}\, x] \subseteq \mathsf{dom}\, (x \circ y)\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\, (x \circ y) \subseteq y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$” und
aus `A2` gleich “$y^{-1}[\mathsf{dom}\, x] \subseteq \mathsf{dom}\, (x \circ y)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, (x \circ y) = y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$.

`b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{dom}\, (x \circ y) = y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$.

`1.2:` Via **11-19** gilt: $y^{-1}[\mathsf{dom}\, x] \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{dom}\, (x \circ y) = y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$” und
aus `1.2`“$y^{-1}[\mathsf{dom}\, x] \subseteq \mathsf{dom}\, y$”
folgt: $\mathsf{dom}\, (x \circ y) \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

<u>Beweis **14-6**</u> `c)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, y$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, y) \wedge ((\alpha, \Omega) \in y)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\, y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{ran}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `3`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **7-2**: $\exists \Psi : (\Omega, \Psi) \in x$.

`5:` Aus `2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in y$” und
aus `4`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **14-5**: $(\alpha, \Psi) \in x \circ y$.

`6:` Aus `5`“$(\alpha, \Psi) \in x \circ y$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \circ y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, (x \circ y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$\mathsf{dom}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, (x \circ y)$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\, (x \circ y) \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus `1.2`“$\mathsf{dom}\, (x \circ y) \subseteq \mathsf{dom}\, y$” und
aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, (x \circ y)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, (x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

<u>Beweis **14-6**</u> `d)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \circ y)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \circ y)$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in x \circ y$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \circ y$"
folgt via **14-4**: $\exists \Psi : ((\Omega, \Psi) \in y) \wedge ((\Psi, \alpha) \in x)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in y \ldots$"
folgt via **7-5**: $\Psi \in \mathsf{ran}\, y$.

`5:` Aus `3` "$\ldots (\Psi, \alpha) \in x$" und
aus `4` "$\Psi \in \mathsf{ran}\, y$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[\mathsf{ran}\, y]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \circ y)) \Rightarrow (\alpha \in x[\mathsf{ran}\, y])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{ran}\,(x \circ y) \subseteq x[\mathsf{ran}\, y]$"

Beweis **14-6** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x[\mathsf{ran}\, y]$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in x[\mathsf{ran}\, y]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, y) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\, y \ldots$"
folgt via **7-4**: $\exists \Psi : (\Psi, \Omega) \in y$.

`4:` Aus `3` "$\ldots (\Psi, \Omega) \in y$" und
aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **14-5**: $(\Psi, \alpha) \in x \circ y$.

`5:` Aus `4` "$(\Psi, \alpha) \in x \circ y$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \circ y)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[\mathsf{ran}\, y]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(x \circ y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}x[\mathsf{ran}\, y] \subseteq \mathsf{ran}\,(x \circ y)\text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(x \circ y) \subseteq x[\mathsf{ran}\, y]$" und
aus `A2` gleich "$x[\mathsf{ran}\, y] \subseteq \mathsf{ran}\,(x \circ y)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(x \circ y) = x[\mathsf{ran}\, y]$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,(x \circ y) = x[\mathsf{ran}\, y]$.

`1.2:` Via **8-10** gilt: $x[\mathsf{ran}\, y] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1.1` "$\mathsf{ran}\,(x \circ y) = x[\mathsf{ran}\, y]$" und
aus `1.2` "$x[\mathsf{ran}\, y] \subseteq \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(x \circ y) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

Beweis **14-6** `f)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

`Thema1.1`	$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, x$" folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.
`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$" und aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, y$" folgt via **0-4**:	$\Omega \in \mathsf{ran}\, y$.
`4:` Aus `3` "$\Omega \in \mathsf{ran}\, y$" folgt via **7-4**:	$\exists \Psi : (\Psi, \Omega) \in y$.
`5:` Aus `4` "$\ldots (\Psi, \Omega) \in y$" und aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" folgt via **14-5**:	$(\Psi, \alpha) \in x \circ y$.
`6:` Aus `5` "$(\Psi, \alpha) \in x \circ y$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\, (x \circ y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, (x \circ y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, (x \circ y)$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{ran}\, (x \circ y) \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`2:` Aus `1.2` "$\mathsf{ran}\, (x \circ y) \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, (x \circ y)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, (x \circ y) = \mathsf{ran}\, x$.

$\square$

14-7. Der folgenden Satz resultiert aus einer Kombination von **14-6** und **11-7**. Gemäß ab) ist der Definitions-Bereich von $x \circ x^{-1}$ gleich dem Bild-Bereich von $x \circ x^{-1}$ und beide sind gleich dem Bild-Bereich von x. In Analogie ist via cd) der Definitions-Bereich von $x^{-1} \circ x$ gleich dem Bild-Bereich von $x^{-1} \circ x$ und beide sind gleich dem Definitions-Bereich von x:

14-7(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \circ x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

b) $\mathsf{ran}\,(x \circ x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

c) $\mathsf{dom}\,(x^{-1} \circ x) = \mathsf{dom}\,x$.

d) $\mathsf{ran}\,(x^{-1} \circ x) = \mathsf{dom}\,x$.

Beweis **14-7** a)

1.1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

1.2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$.

1.3: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

2: Aus 1.2 “$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$” und
aus 1.3 “$\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,x$”
folgt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus 2 “$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{dom}\,x$”
folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(x \circ x^{-1}) = \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

4: Aus 3 “$\mathsf{dom}\,(x \circ x^{-1}) = \mathsf{dom}\,(x^{-1})$” und
aus 1.1 “$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(x \circ x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

b)

1.1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$.

1.2: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

2: Aus 1.1 “$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$” und
aus 1.2 “$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{ran}\,(x^{-1})$”
folgt: $\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,(x^{-1})$.

3: Aus 2 “$\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,(x^{-1})$”
folgt via **14-6**: $\mathsf{ran}\,(x \circ x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$.

<u>Beweis</u> **14-7** `c)`

`1.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x.$

`1.2:` Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1}).$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$” und
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$”
folgt: $\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1}).$

`3:` Aus `2`“$\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$”
folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(x^{-1} \circ x) = \mathsf{dom}\,x.$

`d)`

`1.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x.$

`1.2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x.$

`1.3:` Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,x.$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\,x$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,x$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{ran}\,x.$

`3:` Aus `2`“$\mathsf{dom}\,(x^{-1}) \subseteq \mathsf{ran}\,x$”
folgt via **14-6**: $\mathsf{ran}\,(x^{-1} \circ x) = \mathsf{ran}\,(x^{-1}).$

`4:` Aus `1.2`“$\mathsf{ran}\,(x^{-1}) = \mathsf{dom}\,x$” und
aus `3`“$\mathsf{ran}\,(x^{-1} \circ x) = \mathsf{ran}\,(x^{-1})$”
folgt: $\mathsf{ran}\,(x^{-1} \circ x) = \mathsf{dom}\,x.$

$\square$

14-8. Im folgenden Satz sind fünf wichtige Eigenschaften der Komposition fest gehalten. Wie schon in **14-3** angedeutet, ist die Komposition stets eine Relation, siehe `a)`. Die Aussage von `b)` kann als "Assoziativ-Gesetz der Komposition" bezeichnet werden. Interessanter Weise gilt dieses für beliebige Klassen x, y, z. In `c)` wird beschrieben, wie sich die Komposition unter "Anwendung der Inversion" verhält. Gemäß `d)` ist das Bild einer Klasse E unter der Komposition von x und y gleich dem Bild des Bildes von E unter y unter x. In `e)` wird `d)` mit `c)` kombiniert und es wird eine zu `d)` korrespondierende Aussage für Urbilder erhalten:

14-8(Satz)

`a)` $x \circ y$ *Relation.*

`b)` $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

`c)` $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

`d)` $(x \circ y)[E] = x[y[E]]$.

`e)` $(x \circ y)^{-1}[E] = y^{-1}[x^{-1}[E]]$.

Beweis **14-8** `a)`

`Thema1` $\alpha \in x \circ y$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in x \circ y$"
folgt via **14-3**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ y) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $x \circ y$ Relation.

Beweis **14-8** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (x \circ y) \circ z.$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (x \circ y) \circ z$"
folgt via **14-3**:
$\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in z) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x \circ y) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$

`3:` Aus `2`"$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in x \circ y \ldots$"
folgt via **14-4**: $\exists \Phi : ((\Upsilon, \Phi) \in y) \wedge ((\Phi, \Psi) \in x).$

`4:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in z \ldots$" und
aus `3`"$\ldots (\Upsilon, \Phi) \in y \ldots$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in y \circ z.$

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \Phi) \in y \circ z$" und
aus `3`"$\ldots (\Phi, \Psi) \in x$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Psi) \in x \circ (y \circ z).$

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `5`"$(\Omega, \Psi) \in x \circ (y \circ z)$"
folgt: $\alpha \in x \circ (y \circ z).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \circ y) \circ z) \Rightarrow (\alpha \in x \circ (y \circ z)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \circ y) \circ z \subseteq x \circ (y \circ z)$"

<u>Beweis **14-8**</u> `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x \circ (y \circ z)$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in x \circ (y \circ z)$"
folgt via **14-3**:
$\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in y \circ z) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in y \circ z \ldots$"
folgt via **14-4**: $\exists \Phi : ((\Omega, \Phi) \in z) \wedge ((\Phi, \Upsilon) \in y)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots (\Phi, \Upsilon) \in y$" und
aus `2` "$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in x \ldots$"
folgt via **14-5**: $(\Phi, \Psi) \in x \circ y$.

`5:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \Phi) \in z \ldots$" und
aus `4` "$(\Phi, \Psi) \in x \circ y$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Psi) \in (x \circ y) \circ z$.

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `5` "$(\Omega, \Psi) \in (x \circ y) \circ z$"
folgt: $\alpha \in (x \circ y) \circ z$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ (y \circ z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \circ y) \circ z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"} x \circ (y \circ z) \subseteq (x \circ y) \circ z \text{"}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(x \circ y) \circ z \subseteq x \circ (y \circ z)$" und
aus `A2` gleich "$x \circ (y \circ z) \subseteq (x \circ y) \circ z$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

<u>Beweis</u> **<u>14-8</u>** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (x \circ y)^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in (x \circ y)^{-1}$”
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x \circ y)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x \circ y$”
folgt via **14-4**: $\exists \Upsilon : ((\Omega, \Upsilon) \in y) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x)$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in y \ldots$”
folgt via **11-4**: $(\Upsilon, \Omega) \in y^{-1}$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in x$”
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Upsilon) \in x^{-1}$.

`5:` Aus `4.2`“$(\Psi, \Upsilon) \in x^{-1}$” und
aus `4.1`“$(\Upsilon, \Omega) \in y^{-1}$”
folgt via **14-5**: $(\Psi, \Omega) \in y^{-1} \circ x^{-1}$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$” und
aus `5`“$(\Psi, \Omega) \in y^{-1} \circ x^{-1}$”
folgt: $\alpha \in y^{-1} \circ x^{-1}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \circ y)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in y^{-1} \circ x^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$(x \circ y)^{-1} \subseteq y^{-1} \circ x^{-1}$”

<u>Beweis **14-8**</u> `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in y^{-1} \circ x^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in y^{-1} \circ x^{-1}$"
folgt via **14-3**:
$\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : ((\Omega, \Upsilon) \in x^{-1}) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in y^{-1}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3.1:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in x^{-1} \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\Upsilon, \Omega) \in x$.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in y^{-1} \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Upsilon) \in y$.

`4:` Aus `3.2` "$(\Psi, \Upsilon) \in y$" und
aus `3.1` "$(\Upsilon, \Omega) \in x$"
folgt via **14-5**: $(\Psi, \Omega) \in x \circ y$.

`5:` Aus `4` "$(\Psi, \Omega) \in x \circ y$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in (x \circ y)^{-1}$.

`6:` Aus `1` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `5` "$(\Omega, \Psi) \in (x \circ y)^{-1}$"
folgt: $\alpha \in (x \circ y)^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in y^{-1} \circ x^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in (x \circ y)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$y^{-1} \circ x^{-1} \subseteq (x \circ y)^{-1}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(x \circ y)^{-1} \subseteq y^{-1} \circ x^{-1}$" und
aus `A2` gleich "$y^{-1} \circ x^{-1} \subseteq (x \circ y)^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom** $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

<u>Beweis **14-8**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in (x \circ y)[E]$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \circ y)[E]$" folgt via **8-7**:	$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x \circ y)$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in x \circ y$" folgt via **14-4**:	$\exists \Psi : ((\Omega, \Psi) \in y) \wedge ((\Psi, \alpha) \in x)$.
`4:` Aus `3` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in y \ldots$" und aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" folgt via **8-8**:	$\Psi \in y[E]$.
`5:` Aus `3` "$\ldots (\Psi, \alpha) \in x$" und aus `4` "$\Psi \in y[E]$" folgt via **8-8**:	$\alpha \in x[y[E]]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \circ y)[E]) \Rightarrow (\alpha \in x[y[E]])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \circ y)[E] \subseteq x[y[E]]$"

<u>Beweis</u> **14-8** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x[y[E]]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“ $\alpha \in x[y[E]]$ ”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in y[E]) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2`“ $\ldots \Omega \in y[E] \ldots$ ”
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge ((\Psi, \Omega) \in y)$.

`4:` Aus `3`“ $\ldots (\Psi, \Omega) \in y$ ” und
aus `2`“ $\ldots (\Omega, \alpha) \in x$ ”
folgt via **14-5**: $(\Psi, \alpha) \in x \circ y$.

`5:` Aus `4`“ $(\Psi, \alpha) \in x \circ y$ ” und
aus `3`“ $\ldots \Psi \in E \ldots$ ”
folgt via **8-8**: $\alpha \in (x \circ y)[E]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[y[E]]) \Rightarrow (\alpha \in (x \circ y)[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} x[y[E]] \subseteq (x \circ y)[E] \text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “ $(x \circ y)[E] \subseteq x[y[E]]$ ” und
aus `A2` gleich “ $x[y[E]] \subseteq (x \circ y)[E]$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \circ y)[E] = x[y[E]]$.

`e)`

`1:` $(x \circ y)^{-1}[E] \stackrel{\text{c)}}{=} (y^{-1} \circ x^{-1})[E] \stackrel{\text{d)}}{=} y^{-1}[x^{-1}[E]]$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \circ y)^{-1}[E] = y^{-1}[x^{-1}[E]]$.

□

14-9. Die Komposition injektiver Klassen ist injektiv:

14-9(Satz)

Aus "x injektiv" und "y injektiv" folgt "$x \circ y$ injektiv".

Beweis **14-9** `VS` gleich $(x \text{ injektiv}) \wedge (y \text{ injektiv})$.

`Thema1` $((\alpha, \beta) \in x \circ y) \wedge ((\gamma, \beta) \in x \circ y)$.

`2.1`: Aus `Thema1` "$(\alpha, \beta) \in x \circ y \ldots$"
folgt via **14-4**: $\exists \Omega : ((\alpha, \Omega) \in y) \wedge ((\Omega, \beta) \in x)$.

`2.2`: Aus `Thema1` "$\ldots (\gamma, \beta) \in x \circ y$"
folgt via **14-4**: $\exists \Psi : ((\gamma, \Psi) \in y) \wedge ((\Psi, \beta) \in x)$.

`3`: Aus `VS` gleich "x injektiv…",
aus `2.1` "$\ldots (\Omega, \beta) \in x$" und
aus `2.2` "$\ldots (\Psi, \beta) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $\Omega = \Psi$.

`4`: Aus `3` "$\Omega = \Psi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Psi)$.

`5`: Aus `2.1` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in y \ldots$" und
aus `4` "$(\alpha, \Omega) = (\alpha, \Psi)$"
folgt: $(\alpha, \Psi) \in y$.

`6`: Aus `VS` gleich "$\ldots y$ injektiv",
aus `5` "$(\alpha, \Psi) \in y$" und
aus `2.2` "$\ldots (\gamma, \Psi) \in y \ldots$"
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x \circ y) \wedge ((\gamma, \beta) \in x \circ y)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: $x \circ y$ injektiv.

□

Einschränkung von x auf D.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 16/04/11**

15-1. Mit der folgenden Definition wird erstmals einer speziellen, mit herkömmlichen "klassentheoretischen Manipulationen" gewonnenen Klasse ein eigener Name gegeben. Auf eine Symbolik zur Kennzeichnung der **Einschränkung von** x **auf** D wird verzichtet. Bemerkenswerter Weise Einschränkung von x auf D für ansonsten beliebige Klassen x (und D) definiert:

15-1(Definition)

"$\mathfrak{E}$ **Einschränkung von** x **auf** D" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{E} = x \cap (D \times \mathcal{U}).$$

15-2. In erwarteter Weise ist $x \cap (D \times \mathcal{U})$ die Einschränkung von x auf D und Es gibt genau eine Einschränkung von x auf D:

15-2(Satz)

`a)` *$x \cap (D \times \mathcal{U})$ Einschränkung von x auf D.*

`b)` *Aus "$\mathfrak{E}$ Einschränkung von x auf D"
und "$\mathfrak{D}$ Einschränkung von x auf D"
folgt "$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **15-2** `a)`

Aus "$x \cap (D \times \mathcal{U}) = x \cap (D \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: $x \cap (D \times \mathcal{U})$ Einschränkung von x auf D.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{E}$ Einschränkung von x auf D) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Einschränkung von x auf D).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{E}$ Einschränkung von x auf $D \ldots$"
folgt via **15-1(Def)**: $\mathfrak{E} = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{E} = x \cap (D \times \mathcal{U})$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = x \cap (D \times \mathcal{U})$"
folgt: $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$.

□

15-3. Die Einschränkung von x auf D ist eine Relation und eine TeilKlasse von x:

<u>**15-3(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *e Einschränkung von x auf D.*

Dann folgt:

a) *e Relation.*

b) $e \subseteq x$.

c) *e Einschränkung von x auf $D \cap \mathsf{dom}\, x$.*

<u>Beweis **15-3**</u> a)

1: Aus $\rightarrow)$ "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

2: $e \stackrel{1}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{2-7}}{\subseteq} D \times \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$e \ldots \subseteq D \times \mathcal{U}$"
folgt via **10-12**: e Relation.

b)

1: Aus $\rightarrow)$ "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

2: $e \stackrel{1}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{2-7}}{\subseteq} x$.

3: Aus 2
folgt: $e \subseteq x$.

<u>Beweis **15-3** `c)`</u>

`1.1:` Aus →) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $D \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq D$.

`2:` Aus `1.2` "$D \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq D$"
folgt via **6-7**: $(D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U} \subseteq D \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$(D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U} \subseteq D \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-15**: $((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}) \cap x \subseteq (D \times \mathcal{U}) \cap x$.

`4:`
$$x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}) \cap x \overset{3}{\subseteq} (D \times \mathcal{U}) \cap x \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}) \subseteq x \cap (D \times \mathcal{U}) \text{"}}$

...

<u>Beweis</u> **15-3** `c)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in x \cap (D \times \mathcal{U})$.

2: Aus Thema1.3“$\alpha \in x \cap (D \times \mathcal{U})$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in D \times \mathcal{U})$.

3: Aus 2“$\ldots \alpha \in D \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-5**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

4: Aus 2“$\alpha \in x \ldots$” und
aus 3“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in x$.

5: Aus 4“$(\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

6: Aus 3“$\ldots \Omega \in D \ldots$” und
aus 5“$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in D \cap \mathsf{dom}\, x$.

7: Aus 6“$\Omega \in D \cap \mathsf{dom}\, x$” und
aus 3“$\ldots \Psi \in \mathcal{U} \ldots$”
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in (D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$.

8: Aus 3“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus 7“$(\Omega, \Psi) \in (D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$”
folgt: $\alpha \in (D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$.

9: Aus 2“$\alpha \in x \ldots$” und
aus 8“$\alpha \in (D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$.

Ergo Thema1.3: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap (D \times \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \in x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}x \cap (D \times \mathcal{U}) \subseteq x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})\text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **15-3** `c)`

...

`2:` Aus `A1` gleich "$x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}) \subseteq x \cap (D \times \mathcal{U})$" und
aus `A2` gleich "$x \cap (D \times \mathcal{U}) \subseteq x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \cap (D \times \mathcal{U}) = x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$.

`3:` Aus `1.1`"$e = x \cap (D \times \mathcal{U})$" und
aus `2`"$x \cap (D \times \mathcal{U}) = x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$"
folgt: $e = x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$.

`4:` Aus `3`"$e = x \cap ((D \cap \mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: e Einschränkung von x auf $D \cap \mathsf{dom}\, x$.

$\square$

15-4. Im folgenden Satz werden einigen Eigenschaften von Klassen, die Elemente der Einschränkung von x auf D sind, ausgesagt:

<u>15-4(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von x auf D.*

$\rightarrow$) $w \in e$.

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

`e.1)` $\Omega \in D$.

`e.2)` Ψ *Menge.*

`e.3)` $w = (\Omega, \Psi)$.

`e.4)` $(\Omega, \Psi) \in x$.

<u>Beweis **15-4**</u>

`1`: Aus →) “ e Einschränkung von x auf D ”
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`2`: Aus →) “ $w \in e$ ” und
aus `1` “ $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$ ”
folgt: $w \in x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`3`: Aus `2` “ $w \in x \cap (D \times \mathcal{U})$ ”
folgt via **2-2**: $(w \in x) \wedge (w \in D \times \mathcal{U})$.

`4`: Aus `3` “ $\ldots w \in D \times \mathcal{U}$ ”
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in \mathcal{U}) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`5`: Aus `4` “ $\ldots \Psi \in \mathcal{U} \ldots$ ”
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`6`: Aus `3` “ $w \in x \ldots$ ” und
aus `4` “ $\ldots w = (\Omega, \Psi)$ ”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in x$.

`7`: Aus `4` “ $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \ldots$ ”,
aus `5` “ Ψ Menge ”,
aus `4` “ $\ldots w = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus `6` “ $(\Omega, \Psi) \in x$ ”
folgt: $\exists \Omega, \Psi$:

$\Omega \in D$

$\wedge \quad \Psi$ Menge

$\wedge \quad w = (\Omega, \Psi)$

$\wedge \quad (\Omega, \Psi) \in x$.

$\square$

15-5. In **15-5** wird ein Kriterium dafür angegeben, dass ein geordnetes Paar ein Element der Einschränkung von x auf D ist:

15-5(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ *e Einschränkung von x auf D.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $(p, q) \in e$.

`ii)` *"$p \in D$" und "$(p, q) \in x$".*

Beweis **15-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p, q) \in e$.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$"e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in e$" und
aus `1`"$e = x \cap (D \times \mathcal{U})$"
folgt: $(p, q) \in x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2`"$(p, q) \in x \cap (D \times \mathcal{U})$"
folgt via **2-2**: $((p, q) \in x) \wedge ((p, q) \in D \times \mathcal{U})$.

`4:` Aus `3`"$\ldots (p, q) \in D \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-6**: $(p \in D) \wedge (q \in \mathcal{U})$.

`5:` Aus `4`"$p \in D \ldots$" und
aus `3`"$(p, q) \in x \ldots$"
folgt: $(p \in D) \wedge ((p, q) \in x)$.

<u>Beweis</u> **15-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in D) \wedge ((p,q) \in x)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`2`: Aus `1`"(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: q Menge.

`3`: Aus `2`"q Menge"
folgt via **0-19**: $q \in \mathcal{U}$.

`4`: Aus `VS` gleich "$p \in D \ldots$" und
aus `3`"$q \in \mathcal{U}$"
folgt via **6-6**: $(p,q) \in D \times \mathcal{U}$.

`5`: Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in x$" und
aus `4`"$(p,q) \in D \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-2**: $(p,q) \in x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`6`: Aus →) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`7`: Aus `3`"$(p,q) \in x \cap (D \times \mathcal{U})$" und
aus `4`"$e = x \cap (D \times \mathcal{U})$"
folgt: $(p,q) \in e$.

□

15-6. In `ad)` werden Definitions- und Bild-Bereich der Einschränkung e von x auf D klassentheoretisch umschrieben. Aussagen `bc)` sind zwar einfache Folgerungen aus `a)` und auch `e)` ist eine direkte Folgerung aus `d)`, jedoch lassen diese Aussagen die Einschränkung von x auf D in deutlicherem Licht erscheinen und können später wenig umständlich zitiert werden. Darum werden diese Aussagen in die Essays aufgenommen. In `f)` wird klar gemacht, dass die binäre KlassenDifferenz von D und $\mathsf{dom}\, e$ gleich der binären KlassenDifferenz von D und $\mathsf{dom}\, x$ ist. Von ähnlicher Bauart ist die Aussage von `g)`, wonach die binäre KlassenDifferenz von $\mathsf{dom}\, x$ und D gleich der binären KlassenDifferenz von $\mathsf{dom}\, x$ und $\mathsf{dom}\, e$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - b) - c) - e) - f) - g)`:

15-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *e Einschränkung von x auf D.*

Dann folgt:

`a)` $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$.

`b)` $\mathsf{dom}\, e \subseteq D$.

`c)` $\mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`d)` $\mathsf{ran}\, e = x[D]$.

`e)` $\mathsf{ran}\, e \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`f)` $D \setminus \mathsf{dom}\, x = D \setminus \mathsf{dom}\, e$.

`g)` $(\mathsf{dom}\, x) \setminus D = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \mathsf{dom}\, e$.

Beweis **15-6** `a)`

`1:` Aus $\rightarrow)$ "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`2:` $\mathsf{dom}\, e \stackrel{1}{=} \mathsf{dom}\,(x \cap (D \times \mathcal{U})) \stackrel{\mathbf{7-24}}{\subseteq} D \cap \mathsf{dom}\, x$.

`3.1:` Aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\, e \subseteq D \cap \mathsf{dom}\, x$.

...

Beweis **15-6** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `Thema3.2`"$\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in D) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, x)$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x$.

`6:` Aus $\rightarrow\!)$"e Einschränkung von x auf D",
aus `4`"$\alpha \in D \ldots$" und
aus `5`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$"
folgt via **15-5**: $(\alpha, \Omega) \in e$.

`7:` Aus `6`"$(\alpha, \Omega) \in e$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, e$.

ergo `Thema3.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, e)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} D \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, e \text{"}}$

`4:` Aus `3.1`"$\mathsf{dom}\, e \subseteq D \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A1` gleich "$D \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$.

Beweis **15-6** `d)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, e.$

2: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, e$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in e.$

3: Aus →)"e Einschränkung von x auf D" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in e$"
folgt via **15-5**: $(\Omega \in D) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x).$

4: Aus 3"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$" und
aus 3"$\Omega \in D \ldots$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[D].$

ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, e) \Rightarrow (\alpha \in x[D]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 "$\mathsf{ran}\, e \subseteq x[D]$"

`Thema1.2` $\alpha \in x[D].$

2: Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x[D]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x).$

3: Aus →)"e Einschränkung von x auf D",
aus 2"$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **15-5**: $(\Omega, \alpha) \in e.$

4: Aus 3"$(\Omega, \alpha) \in e$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, e.$

ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[D]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, e).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 "$x[D] \subseteq \mathsf{ran}\, e$"

2: Aus A1 gleich "$\mathsf{ran}\, e \subseteq x[D]$" und
aus A2 gleich "$x[D] \subseteq \mathsf{ran}\, e$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, e = x[D].$

<u>Beweis **15-6**</u> `b)`

`1:` Aus →) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Via **2-7** gilt: $D \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq D$.

`3:` Aus 1 "$\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus 2 "$D \cap \mathsf{dom}\, x \subseteq D$"
folgt: $\mathsf{dom}\, e \subseteq D$.

`ce)`

`1:` Aus →) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-3**: $e \subseteq x$.

`2.c):` Aus 1 "$e \subseteq x$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2.e):` Aus 1 "$e \subseteq x$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\, e \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`f)`

`1:` Aus →) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$.

`2:` $$D \setminus \mathsf{dom}\, e \stackrel{1}{=} D \setminus (D \cap \mathsf{dom}\, x) \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} D \setminus \mathsf{dom}\, x.$$

`3:` Aus 2 "$D \setminus \mathsf{dom}\, e = \ldots = D \setminus \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $D \setminus \mathsf{dom}\, x = D \setminus \mathsf{dom}\, e$.

`g)`

`1:` Aus →) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$.

`2:` $$(\mathsf{dom}\, x) \setminus \mathsf{dom}\, e \stackrel{1}{=} (\mathsf{dom}\, x) \setminus (D \cap \mathsf{dom}\, x) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (\mathsf{dom}\, x) \setminus ((\mathsf{dom}\, x) \cap D) \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} (\mathsf{dom}\, x) \setminus D.$$

`3:` Aus 2 "$(\mathsf{dom}\, x) \setminus \mathsf{dom}\, e = \ldots = (\mathsf{dom}\, x) \setminus D$"
folgt: $(\mathsf{dom}\, x) \setminus D = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \mathsf{dom}\, e$.

□

15-7. Mit dem folgenden Satz wird eine ziemlich vollständige Charakterisierung all jener Klassen Ω gegeben, für die $x \cap (D \times \Omega)$ die Einschränkung von x auf D ist:

15-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` *e Einschränkung von x auf D.*

`ii)` $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`iii)` $\exists \Omega$: $(e = x \cap (D \times \Omega)) \wedge (\mathsf{ran}\, x \subseteq \Omega)$.

`iv)` $e = x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

Beweis **15-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich e Einschränkung von x auf D.

Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`1`: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \mathcal{U}$.

`2`: Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathcal{U}$.

`3`: Aus `2`"$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathcal{U}$" und
aus `1`"$\ldots \Omega = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{ran}\, x \subseteq \Omega$.

`4`: Aus `VS` gleich "$e = x \cap (D \times \mathcal{U})$" und
aus `1`"$\ldots \Omega = \mathcal{U}$"
folgt: $e = x \cap (D \times \Omega)$.

`5`: Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (e = x \cap (D \times \Omega)) \wedge (\mathsf{ran}\, x \subseteq \Omega)$.

<u>Beweis **15-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\exists\Omega : (e = x \cap (D \times \Omega)) \wedge (\mathsf{ran}\, x \subseteq \Omega)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, x \subseteq \Omega$"
folgt via **6-7**: $D \times \mathsf{ran}\, x \subseteq D \times \Omega$.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $e = x \cap (D \times \Omega)$.

`2:` Aus `1.1`"$D \times \mathsf{ran}\, x \subseteq D \times \Omega$"
folgt via **2-15**: $(D \times \mathsf{ran}\, x) \cap x \subseteq (D \times \Omega) \cap x$.

`3:` $x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (D \times \mathsf{ran}\, x) \cap x \stackrel{2}{\subseteq} (D \times \Omega) \cap x \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap (D \times \Omega) \stackrel{1.2}{=} e$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x) \subseteq e \text{”}}$

...

Beweis **15-7** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $(e = x \cap (D \times \Omega)) \wedge (\mathsf{ran}\, x \subseteq \Omega)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in e$.

2: Aus Thema1.3 "$\alpha \in e$" und
aus VS gleich "$e = x \cap (D \times \Omega) \ldots$"
folgt: $\alpha \in x \cap (D \times \Omega)$.

3: Aus 2 "$\alpha \in x \cap (D \times \Omega)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in D \times \Omega)$.

4: Aus 3 "$\ldots \alpha \in D \times \Omega$"
folgt via **6-5**:
$\exists \Psi, \Upsilon : (\Psi \in D) \wedge (\Upsilon \in \Omega) \wedge (\alpha = (\Psi, \Upsilon))$.

5: Aus 3 "$\alpha \in x \ldots$" und
aus 4 "$\ldots \alpha = (\Psi, \Upsilon)$"
folgt: $(\Psi, \Upsilon) \in x$.

6: Aus 5 "$(\Psi, \Upsilon) \in x$"
folgt via **7-5**: $\Upsilon \in \mathsf{ran}\, x$.

7: Aus 4 "$\ldots \Psi \in D \ldots$" und
aus 6 "$\Upsilon \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **6-6**: $(\Psi, \Upsilon) \in D \times \mathsf{ran}\, x$.

8: Aus 4 "$\ldots \alpha = (\Psi, \Upsilon)$" und
aus 7 "$(\Psi, \Upsilon) \in D \times \mathsf{ran}\, x$"
folgt: $\alpha \in D \times \mathsf{ran}\, x$.

9: Aus 3 "$\alpha \in x \ldots$" und
aus 8 "$\alpha \in D \times \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

Ergo Thema1.3: $\forall \alpha : (\alpha \in e) \Rightarrow (\alpha \in x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} e \subseteq x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x) \text{”}}$

1.4: Aus A2 gleich "$e \subseteq x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$" und
aus A1 gleich "$x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x) \subseteq e$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $e = x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

Beweis **15-7** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $e = x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

1.1: Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathcal{U}$.

2: Aus 1.1 "$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **6-7**: $D \times \mathsf{ran}\, x \subseteq D \times \mathcal{U}$.

3: Aus 2 "$D \times \mathsf{ran}\, x \subseteq D \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-15**: $(D \times \mathsf{ran}\, x) \cap x \subseteq (D \times \mathcal{U}) \cap x$.

4: $$e \stackrel{\texttt{VS}}{=} x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x) \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} (D \times \mathsf{ran}\, x) \cap x \stackrel{3}{\subseteq} (D \times \mathcal{U}) \cap x \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}).$$

5: Aus 4
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} e \subseteq x \cap (D \times \mathcal{U}) \text{”}}$

...

Beweis **15-7** $\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $e = x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x \cap (D \times \mathcal{U})$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in D \times \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha \in D \times \mathcal{U}$”
folgt via **6-5**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus `2`“$\alpha \in x \ldots$” und
aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in x$.

`5:` Aus `4`“$(\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **7-5**: $\Psi \in \mathsf{ran}\, x$.

`6:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in D \ldots$” und
aus `5`“$\Psi \in \mathsf{ran}\, x$”
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in D \times \mathsf{ran}\, x$.

`7:` Aus `3`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `6`“$(\Omega, \Psi) \in D \times \mathsf{ran}\, x$”
folgt: $\alpha \in D \times \mathsf{ran}\, x$.

`8:` Aus `2`“$\alpha \in x \ldots$” und
aus `7`“$\alpha \in D \times \mathsf{ran}\, x$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

`9:` Aus `8`“$\alpha \in x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$” und
aus `VS` gleich “$e = x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$”
folgt: $\alpha \in e$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap (D \times \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \in e)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}x \cap (D \times \mathcal{U}) \subseteq e\text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **15-7** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $e = x \cap (D \times \mathsf{ran}\, x)$.

...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq x \cap (D \times \mathcal{U})$" und
aus `A2` gleich "$x \cap (D \times \mathcal{U}) \subseteq e$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1.3`"$e = x \cap (D \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: e Einschränkung von x auf D.

□

15-8. $(x^{-1})^{-1}$ ist die Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$:

<u>**15-8(Satz)**</u>

$$(x^{-1})^{-1} \textit{ Einschränkung von } x \textit{ auf } \mathcal{U}.$$

<u>Beweis **15-8**</u>

1: Via **13-3** gilt: $(x^{-1})^{-1} = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

2: Aus 1 " $(x^{-1})^{-1} = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ "
folgt via **15-1(Def)**: $(x^{-1})^{-1}$ Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$.

□

15-9. Nun wird die Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$ betrachtet. Es erhebt sich die Frage, ob diese Einschränkung gleich x ist. Dass dies nicht immer der Fall sein kann, folgt aus **15-3**, wonach die Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$ eine Relation ist, so dass x nur dann gleich der Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$ sein kann, wenn E eine Relation ist. Es liegt der Verdacht nahe, dass die Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$ *genau dann* gleich x ist, wenn x eine Relation ist. Dies ist in der Tat der Fall und interessanter Weise - und in Ähnlichkeit zu **15-7** - genau dann der Fall, wenn x gleich der Einschränkung von x auf $\mathsf{dom}\, x$ ist oder wenn es eine $\mathsf{dom}\, x$ umfassende Klasse Ω gibt, so dass x die Einschränkung von x auf Ω ist und dies ist - über **15-7** hinausgehend - der Fall, wenn es Ω gibt, so dass x gleich der Einschränkung von x auf Ω ist:

15-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Einschränkung von* x *auf* $\mathcal{U}$.

`ii)` x *Relation.*

`iii)` x *Einschränkung von* x *auf* $\mathsf{dom}\, x$.

`iv)` $\exists \Omega : (x$ *Einschränkung von* x *auf* $\Omega) \wedge (\mathsf{dom}\, x \subseteq \Omega)$

`v)` $\exists \Omega$*:* x *Einschränkung von* x *auf* Ω.

<u>Beweis **15-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$.

Aus `VS` gleich "x Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$"
folgt via **15-3**: x Relation.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich x Relation.

`1:` Aus `VS` gleich "x Relation"
folgt via **10-4**: $x \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$.

`2:` Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **6-7**: $(\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$.

`4:` Aus `1`"$x \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x)$" und
aus `3`"$(\mathsf{dom}\, x) \times (\mathsf{ran}\, x) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4`"$x \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $x \cap ((\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U}) = x$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x = x \cap ((\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$.

`7:` Aus `6`"$x = x \cap ((\mathsf{dom}\, x) \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: x Einschränkung von x auf $\mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich x Einschränkung von x auf $\mathsf{dom}\, x$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{dom}\, x$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $\mathsf{dom}\, x = \Omega$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "x Einschränkung von x auf $\mathsf{dom}\, x$" und
aus `1`"$\ldots \Omega = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: x Einschränkung von x auf Ω.

`3:` Aus `2.1`"$\mathsf{dom}\, x = \Omega$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, x \subseteq \Omega$.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2`"x Einschränkung von x auf Ω" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\, x \subseteq \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (x \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } \Omega) \wedge (\mathsf{dom}\, x \subseteq \Omega)$.

Beweis **15-9** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$

`VS` gleich $(\exists\Omega: x \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } \Omega) \wedge (\mathsf{dom}\, x \subseteq \Omega)$.

Aus `VS`
folgt: $\exists\Omega: x \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } \Omega$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\exists\Omega: x \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } \Omega$..

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Einschränkung von x auf Ω"
folgt via **15-1(Def)**: $x = x \cap (\Omega \times \mathcal{U})$.

`2:` Via **6-12** gilt: $\Omega \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-15**: $(\Omega \times \mathcal{U}) \cap x \subseteq (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \cap x$.

`4:` $x \cap (\Omega \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (\Omega \times \mathcal{U}) \cap x \overset{3}{\subseteq} (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \cap x \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`5.1:` Aus `1`"$x = x \cap (\Omega \times \mathcal{U})$" und
aus `3`"$x \cap (\Omega \times \mathcal{U}) \ldots \subseteq \ldots x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"
folgt: $x \subseteq x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`5.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq x$.

`6:` Aus `5.1`"$x \subseteq x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$" und
aus `5.2`"$x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`7:` Aus `6`"$x = x \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**: x Einschränkung von x auf $\mathcal{U}$.

□

15-10. Es folgen zwei Aussagen über Bild und Urbild einer Klasse unter der Einschränkung von x auf D. Beim Beweis von b) werden in einer Umformungskette erstmals mehr als ein Klasseninklusionssymbol - in der Tat: zwei - verwendet und es wird aus dieser Kette eine Klasseninklusion gefolgert. Diese Vorgehensweise ist durch **0-6** gedeckt, wonach das "TeilKlassen-Sein transitiv" ist:

15-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von x auf D.*

Dann folgt:

a) $e[C] = x[D \cap C]$.

b) $e^{-1}[C] = D \cap (x^{-1}[C])$.

Beweis **15-10** a)

1.1: Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e = D \cap \mathsf{dom}\, x$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-3**: $e \subseteq x$.

2: Aus 1.2 "$e \subseteq x$"
folgt via **8-9**: $e[(C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, x] \subseteq x[(C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, x]$.

3: $e[C] \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} e[C \cap \mathsf{dom}\, e] \stackrel{1.1}{=} e[C \cap (D \cap \mathsf{dom}\, x)] \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} e[(C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, x]$
$\stackrel{2}{\subseteq} x[(C \cap D) \cap \mathsf{dom}\, x] \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} x[C \cap D] \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} x[D \cap C]$.

4: Aus 3
folgt: A1 | "$e[C] \subseteq x[D \cap C]$"

...

Beweis **15-10** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in x[D \cap C]$.

`2:` Aus `1.3`"$\alpha \in x[D \cap C]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in D \cap u) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in D \cap C \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in D) \wedge (\Omega \in C)$.

`4:` Aus →)"e Einschränkung von x auf D",
aus `3`"$\Omega \in D \ldots$" und
aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **15-5**: $(\Omega, \alpha) \in e$.

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \alpha) \in e$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in C$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in e[C]$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[D \cap C]) \Rightarrow (\alpha \in e[C])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x[D \cap C] \subseteq e[C]$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$e[C] \subseteq x[D \cap C]$" und
aus `A2` gleich "$x[D \cap C] \subseteq e[C]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $e[C] = x[D \cap C]$.

`b)`

`1.1:` Aus →)"e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

`1.2:` Via **12-14** gilt: $(D \times \mathcal{U})^{-1}[C] \subseteq D$.

`2:` Aus `1.2`"$(D \times \mathcal{U})^{-1}[C] \subseteq D$"
folgt via **2-15**: $((D \times \mathcal{U})^{-1}[C]) \cap (x^{-1}[C]) \subseteq D \cap (x^{-1}[D])$.

`3:` $e^{-1}[C] \stackrel{1.1}{=} (x \cap (D \times \mathcal{U}))^{-1}[C] \stackrel{\mathbf{12-2}}{\subseteq} (x^{-1}[C]) \cap ((D \times \mathcal{U})^{-1}[C])$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} ((D \times \mathcal{U})^{-1}[C]) \cap (x^{-1}[C]) \stackrel{2}{\subseteq} D \cap (x^{-1}[C])$.

`4:` Aus `3`
folgt: `A1` | "$e^{-1}[C] \subseteq D \cap (x^{-1}[C])$"

...

<u>Beweis</u> **15-10** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in D \cap (x^{-1}[C])$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in D \cap (x^{-1}[C])$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in D) \wedge (\alpha \in x^{-1}[C])$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in x^{-1}[C]$"
folgt via **11-21**: $\exists \Omega : (\Omega \in C) \wedge ((\alpha, \Omega) \in x)$.

`4:` Aus →) "e Einschränkung von x auf D",
aus `2` "$\alpha \in D \ldots$" und
aus `3` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$"
folgt via **15-5**: $(\alpha, \Omega) \in e$.

`5:` Aus `4` "$(\alpha, \Omega) \in e$" und
aus `3` "$\ldots \Omega \in C \ldots$"
folgt via **11-22**: $\alpha \in e^{-1}[C]$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in D \cap (x^{-1}[C])) \Rightarrow (\alpha \in e^{-1}[C])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$D \cap (x^{-1}[C]) \subseteq e^{-1}[C]$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$e^{-1}[C] \subseteq D \cap (x^{-1}[C])$" und
aus `A2` gleich "$D \cap (x^{-1}[C]) \subseteq e^{-1}[C]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $e^{-1}[C] = D \cap (x^{-1}[C])$.

□

15-11. Je größer die Klasse, desto größer Einschränkung auf eine feste Klasse:

15-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) e *Einschränkung von* x *auf* D.

$\rightarrow$) E *Einschränkung von* X *auf* D.

$\rightarrow$) $x \subseteq X$.

Dann folgt "$e \subseteq E$".

Beweis **15-11**

1.1: Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "E Einschränkung von X auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $E = X \cap (D \times \mathcal{U})$.

2: Aus $\rightarrow$) "$x \subseteq X$"
folgt via **2-15**: $x \cap (D \times \mathcal{U}) \subseteq X \cap (D \times \mathcal{U})$.

3: $e \overset{1.1}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}) \overset{2}{\subseteq} X \cap (D \times \mathcal{U}) \overset{1.2}{=} E$.

4: Aus 3
folgt: $e \subseteq E$.

$\square$

15-12. Je größer die Klasse, auf die eingeschränkt wird, desto größer ist die Einschränkung einer festen Klasse auf diese Klassen:

15-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von x auf D.*

$\rightarrow$) *E Einschränkung von x auf C.*

$\rightarrow$) *$D \subseteq C$.*

Dann folgt "$e \subseteq E$".

Beweis **15-12**

1.1: Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "E Einschränkung von x auf C"
folgt via **15-1(Def)**: $E = x \cap (C \times \mathcal{U})$.

2: Aus $\rightarrow$) "$D \subseteq C$"
folgt via **6-7**: $D \times \mathcal{U} \subseteq C \times \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$D \times \mathcal{U} \subseteq C \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-15**: $(D \times \mathcal{U}) \cap x \subseteq (C \times \mathcal{U}) \cap x$.

4: $e \overset{1.1}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}) \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} (D \times \mathcal{U}) \cap x \overset{3}{\subseteq} (C \times \mathcal{U}) \cap x \overset{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap (C \times \mathcal{U}) \overset{1.2}{=} E$.

5: Aus 4
folgt: $e \subseteq E$.

$\square$

15-13. Je größer die Klasse und je größer die Klasse, auf die eingeschränkt wird, desto größer Einschränkung:

15-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) e *Einschränkung von* x *auf* D.

$\rightarrow$) E *Einschränkung von* X *auf* C.

$\rightarrow$) $x \subseteq X$.

$\rightarrow$) $D \subseteq C$.

Dann folgt "$e \subseteq E$".

Beweis **15-13**

1: Es gilt: $\exists\Omega$: Ω Einschränkung von X auf D.

2: Aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von x auf D",
aus 1"...Ω Einschränkung von X auf D" und
aus $\rightarrow$) "$x \subseteq X$"
folgt via **15-11**: $e \subseteq \Omega$.

3: Aus 1"...Ω Einschränkung von X auf D",
aus $\rightarrow$) "E Einschränkung von X auf C" und
aus $\rightarrow$) "$D \subseteq C$"
folgt via **15-12**: $\Omega \subseteq E$.

4: Aus 2"$e \subseteq \Omega$" und
aus 3"$\Omega \subseteq E$"
folgt via **0-6**: $e \subseteq E$.

□

15-14. Wird die Einschränkung einer Klasse auf eine Klasse nochmals auf z eingeschränkt, so ist diese Einschränkung eine Teilklasse der Einschränkung der ursprünglichen Klasse auf z:

<u>15-14(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von x auf D.*

$\rightarrow$) *c Einschränkung von x auf C.*

$\rightarrow$) *ee Einschränkung von c auf D.*

Dann folgt "$ee \subseteq e$".

<u>Beweis **15-14**</u>

1: Aus $\rightarrow$) "c Einschränkung von x auf C"
folgt via **15-3**: $c \subseteq x$.

2: Aus $\rightarrow$) "ee Einschränkung von c auf D",
aus $\rightarrow$) "e Einschränkung von x auf D" und
aus 1 "$c \subseteq x$"
folgt via **15-11**: $ee \subseteq e$.

□

15-15. In Ergänzung zu **15-14** gilt der folgende Satz, wonach nach Einschränkung auf C mit nachfolgender Einschränkung auf D im Fall $D \subseteq C$ die Einschränkung auf D erhalten wird:

15-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *e Einschränkung von x auf D.*

$\rightarrow$) *c Einschränkung von x auf C.*

$\rightarrow$) *ee Einschränkung von c auf D.*

$\rightarrow$) *$D \subseteq C$.*

Dann folgt "$ee = e$".

Beweis **15-15**

1.1: Aus $\rightarrow$)"e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $e = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"c Einschränkung von x auf C"
folgt via **15-1(Def)**: $c = x \cap (C \times \mathcal{U})$.

1.3: Aus $\rightarrow$)"ee Einschränkung von c auf D"
folgt via **15-1(Def)**: $ee = c \cap (D \times \mathcal{U})$.

2: Aus $\rightarrow$)"$D \subseteq C$"
folgt via **6-7**: $D \times \mathcal{U} \subseteq C \times \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$D \times \mathcal{U} \subseteq C \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $(D \times \mathcal{U}) \cap (C \times \mathcal{U}) = D \times \mathcal{U}$.

4: $ee \stackrel{1.3}{=} c \cap (D \times \mathcal{U}) \stackrel{1.2}{=} (x \cap (C \times \mathcal{U})) \cap (D \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} x \cap ((C \times \mathcal{U}) \cap (D \times \mathcal{U}))$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} x \cap ((D \times \mathcal{U}) \cap (C \times \mathcal{U})) \stackrel{3}{=} x \cap (D \times \mathcal{U}) \stackrel{1.1}{=} e.$

5: Aus 4
folgt: $ee = e$.

$\square$

15-16. Die Einschränkung einer injektiven Klasse ist injektiv:

<u>15-16(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *e Einschränkung von x auf D.*

$\rightarrow)$ *x injektiv.*

Dann folgt "e injektiv".

<u>Beweis **15-16**</u>

1: Aus $\rightarrow)$ "e Einschränkung von x auf D"
folgt via **15-3**: $e \subseteq x$.

2: Aus 1 "$e \subseteq x$" und
aus $\rightarrow)$ "x injektiv"
folgt via **8-4**: e injektiv.

□

$E\cap$**Verschiebung von** x.

Ersterstellung: 16/09/05 **Letzte Änderung: 16/04/11**

16-1. Die Definition der $E\cap$**Verschiebung von** x ist **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996, entnommen, auch wenn diese Klasse dort mit keinem speziellen Namen versehen ist. Dass die $E\cap$Verschiebung von x an dieser frühen Stelle in den Essays auftritt, ist dem nicht geradlinigen Entstehungsweg der Essays zu verdanken. Die ersten Versionen der Essays waren von der Erwartung getragen, möglichst schnell das Buch von **H. Federer** in die hier verwendete, eigene Sprache zu übertragen. Die Klassen $\mathsf{16.1}, \mathsf{2}, \mathsf{3}, \mathsf{4}(E,x)$ spielen bei der Untersuchung von $E\cap$Verschiebungen eine Rolle:

16-1(Definition)

1) $\mathsf{16.0}(E,x) = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$
$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Psi : ((E\cap\Omega,\Psi)\in x)\wedge(\omega = (\Omega,\Psi)))\}.$$

2) "**$\mathfrak{C}$ ist** $E\cap$**Verschiebung von** x" genau dann, wenn gilt:
$$\mathfrak{C} = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}.$$

3) $\mathsf{16.1}(E,x) = \{\omega : E\cap\omega\in x\}$.

4) $\mathsf{16.2}(E,x) = \{\omega : E\cap\omega\in \mathsf{dom}\, x\}$.

5) $\mathsf{16.3}(E,x) = \{\omega : E\cap\omega\in \mathcal{P}(x)\}$.

6) $\mathsf{16.4}(E,x) = \{\omega : E\cap\omega\subseteq x\}$.

16-2. Wie auch an anderer Stelle so werden auch in diesem Essay unmittelbare Folgerungen aus der eingangs gegebenen Definition fest gehalten:

16-2(Satz)

a) $\{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$ *ist* $E\cap$*Verschiebung von* x.

b) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *ist* $E\cap$*Verschiebung von* x*"*
aus "$\mathfrak{D}$ *ist* $E\cap$*Verschiebung von* x*"*
folgt "$\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$*".*

16-1(Def) $\{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$.

Beweis **16-2** a)

Aus "$\{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\} = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$"
folgt via **16-1**: $\{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$ ist die $E\cap$Verschiebung von x.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ ist $E\cap$Verschiebung von x) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ ist $E\cap$Verschiebung von x)..

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ ist $E\cap$Verschiebung von $x\ldots$"
folgt via **16-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$.

2: Aus 1.1"$\mathfrak{C} = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$" und
aus 1.2"$\mathfrak{D} = \{(\lambda,\mu) : (E\cap\lambda,\mu)\in x\}$"
folgt: $\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$.

□

16-3. Die $E\cap$Verschiebung von x wird mit dem folgenden Satz, in dem Notwendiges über Elemente der $E\cap$Verschiebung von x gesagt wird, wesentlich vertrauter. Zum ersten Mal wird in den Essays eine via KlassenKlammer definierte Klasse nicht im Satz, sondern nur im Beweis verwendet. Entsprechend erfolgt der Verweis auf die korrespondierende Definition nicht im Satz sondern nach Beginn des Beweises:

16-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) V *ist* $E\cap$*Verschiebung von* x.

$\rightarrow$) $w \in V$.

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

`e.1)` Ω *Menge.*

`e.2)` Ψ *Menge.*

`e.3)` $w = (\Omega, \Psi)$.

`e.4)` $(E \cap \Omega, \Psi) \in x$.

Beweis **16-3**

16-1(Def) $\{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$.

`1:` Aus →) “V ist $E\cap$Verschiebung von x”
folgt via **16-1(Def)**: $V = \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$.

`2:` Aus →) “$w \in V$” und
aus `1` “$V = \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$”
folgt: $w \in \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$.

`3:` Aus `2` “$w \in \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$” und
aus “$\{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$”
folgt:
$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`4:` Aus `3` “$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \in x) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`5:` Aus →) “$w \in V$”
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`6:` Aus `5` “w Menge” und
aus `3` “$\ldots w = (\Omega, \Psi)$”
folgt: (Ω, Ψ) Menge.

`7:` Aus `6` “(Ω, Ψ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

`8:` Aus `4` “$\exists \Omega, \Psi \ldots$”,
aus `7` “Ω Menge$\ldots$”,
aus `7` “$\ldots \Psi$ Menge”,
aus `4` “$\ldots w = (\Omega, \Psi)$” und
aus `4` “$\ldots (E \cap \Omega, \Psi) \in x \ldots$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi$:

Ω Menge

$\wedge \quad \Psi$ Menge

$\wedge \quad w = (\Omega, \Psi)$

$\wedge \quad (E \cap \Omega, \Psi) \in x$.

□

16-4. Es folgt ein Kriterium für das "Element-Sein" eines geordneten Paares in der $E\cap$Verschiebung von x:

<u>**16-4(Satz)**</u>

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *V ist $E\cap$Verschiebung von x.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $(p,q)\in V$.

`ii)` *"p Menge" und "$(E\cap p,q)\in x$".*

<u>Beweis **16-4**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p,q)\in V$.

`1:` Aus $\rightarrow$)"V ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus `VS` gleich "$(p,q)\in V$"
folgt via **16-3**:
$$\exists\Omega,\Psi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge ((p,q)=(\Omega,\Psi)) \wedge ((E\cap\Omega,\Psi)\in x).$$

`2:` Aus `1`"$\ldots (p,q)=(\Omega,\Psi)\ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt via **IGP**: $(p=\Omega)\wedge(q=\Psi)\wedge(p \text{ Menge})\wedge(q \text{ Menge})$.

`3:` Aus `2`"$p=\Omega\ldots$"
folgt: $E\cap p = E\cap\Omega$.

`4:` Aus `3`"$E\cap p=E\cap\Omega$" und
aus `2`"$\ldots q=\Psi\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E\cap p,q)=(E\cap\Omega,\Psi)$.

`5:` Aus `4`"$(E\cap p,q)=(E\cap\Omega,\Psi)$" und
aus `1`"$\ldots (E\cap\Omega,\Psi)\in x$"
folgt: $(E\cap p,q)\in x$.

`6:` Aus `2`"$\ldots p$ Menge$\ldots$" und
aus `5`"$(E\cap p,q)\in x$"
folgt: $(p \text{ Menge})\wedge((E\cap p,q)\in x)$.

Beweis **16-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge ((E \cap p, q) \in x)$.

`1.1:` Aus →) "V ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-1(Def)**: $V = \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E \cap p, q) \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $(E \cap p, q)$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E \cap p, q) \in x$" und
aus "$(p, q) = (p, q)$"
folgt: $\exists p, q : ((E \cap p, q) \in x) \wedge ((p, q) = (p, q))$.

`2:` Aus `1.2`"$(E \cap p, q)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: q Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "p Menge$\ldots$" und
aus `2`"q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`4:` Aus `1.3`"$\exists p, q : ((E \cap p, q) \in x) \wedge ((p, q) = (p, q))$" und
aus `2`"(p, q) Menge"
folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`5:` Aus `4`"$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : ((E \cap \Omega, \Psi) \in x) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi))\}$
$= \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$"
folgt:
$(p, q) \in \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$.

`6:` Aus `5`"$(p, q) \in \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$" und
aus `1.1`"$V = \{(\lambda, \mu) : (E \cap \lambda, \mu) \in x\}$"
folgt: $(p, q) \in V$.

□

16-5. In a) wird fest gestellt, dass die $E\cap$Verschiebung von x eine Relation ist. Der Definitions-Bereich der $E\cap$Verschiebung von x ist gemäß b) gleich der Klasse aller ω, für die $E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x$. In c) wird der Bild-Bereich der $E\cap$Verschiebung von x als das Bild von $\mathcal{P}(E)$ unter x spezifiziert:

16-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *V ist $E\cap$Verschiebung von x.*

Dann folgt:

a) *V Relation.*

b) $\mathsf{dom}\, V = \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.

c) $\mathsf{ran}\, V = x[\mathcal{P}(E)]$.

16-1(Def) $\{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **16-5** a)

`Thema1` $\alpha \in V$.

Aus $\rightarrow$) "V ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus `Thema1` "$\alpha \in V$"
folgt via **16-3**:

$$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in V) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: V Relation.

Beweis **16-5** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, V.$

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, V$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `2.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, V$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in V.$

`3:` Aus →)"V ist $E\cap$Verschiebung von x" und
aus `2.2`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in V$"
folgt via **16-4**: $(E \cap \alpha, \Omega) \in x.$

`4:` Aus `3`"$(E \cap \alpha, \Omega) \in x$"
folgt via **7-5**: $E \cap \alpha \in \mathsf{dom}\, x.$

`5:` Aus `4`"$E \cap \alpha \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, V) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\, V \subseteq \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$"

...

Beweis **16-5** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.
`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$" folgt:	$E \cap \alpha \in \mathsf{dom}\, x$.
`3:` Aus `2.2`"$E \cap \alpha \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **7-2**:	$\exists \Omega : (E \cap \alpha, \Omega) \in x$.
`4:` Aus →)"V ist $E\cap$Verschiebung von x", aus `2.1`"α Menge" und aus `3`"$\ldots (E \cap \alpha, \Omega) \in x$" folgt via **16-4**:	$(\alpha, \Omega) \in V$.
`5:` Aus `4`"$(\alpha, \Omega) \in V$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, V$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, V)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \mathsf{dom}\, V$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\, V \subseteq \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \mathsf{dom}\, V$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, V = \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **16-5** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, V$.

`2:` Aus `1.2`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, V$"
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in V$.

`3:` Aus →) "V ist $E \cap$Verschiebung von x" und
aus `2`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in V$"
folgt via **16-4**: $(E \cap \Omega, \alpha) \in x$.

`4.1:` Aus `3`"$(E \cap \Omega, \alpha) \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $(E \cap \Omega, \alpha)$ Menge.

`4.2:` Via **2-7** gilt: $E \cap \Omega \subseteq E$.

`5:` Aus `4.1`"$(E \cap \Omega, \alpha)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $E \cap \Omega$ Menge.

`6:` Aus `4.2`"$E \cap \Omega \subseteq E$" und
aus `5`"$E \cap \Omega$ Menge"
folgt via **0-26**: $E \cap \Omega \in \mathcal{P}(E)$.

`7:` Aus `3`"$(E \cap \Omega, \alpha) \in x$" und
aus `6`"$E \cap \Omega \in \mathcal{P}(E)$"
folgt via **8-8**: $\alpha \in x[\mathcal{P}(E)]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, V) \Rightarrow (\alpha \in x[\mathcal{P}(E)])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}\mathsf{ran}\, V \subseteq x[\mathcal{P}(E)]\text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **16-5** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x[\mathcal{P}(E)]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x[\mathcal{P}(E)]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{P}(E)) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathcal{P}(E) \ldots$”
folgt via **0-26**: $(\Omega \subseteq E) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

`4:` Aus `3`“$\Omega \subseteq E \ldots$”
folgt via **2-10**: $E \cap \Omega = \Omega$.

`5:` Aus `4`“$E \cap \Omega = \Omega$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(E \cap \Omega, \alpha) = (\Omega, \alpha)$.

`6:` Aus `5`“$(E \cap \Omega, \alpha) = (\Omega, \alpha)$” und
aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$”
folgt: $(E \cap \Omega, \alpha) \in x$.

`7:` Aus →)“V ist $E\cap$Verschiebung von x”,
aus `3`“$\ldots \Omega$ Menge” und
aus `6`“$(E \cap \Omega, \alpha) \in x$”
folgt via **16-4**: $(\Omega, \alpha) \in V$.

`8:` Aus `7`“$(\Omega, \alpha) \in V$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, V$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[\mathcal{P}(E)]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, V)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$x[\mathcal{P}(E)] \subseteq \mathsf{ran}\, V$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\, V \subseteq x[\mathcal{P}(E)]$” und
aus `A2` gleich “$x[\mathcal{P}(E)] \subseteq \mathsf{ran}\, V$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, V = x[\mathcal{P}(E)]$.

□

16-6. Gemäß `a)` sind $\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$ und $\{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$ gleiche Klassen. Interessanter Weise folgt aus $E \subseteq x$ die Gleichung $\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} = \mathcal{U}$, siehe `b)`. Via `c)` gilt im Speziellen $\{\omega : x \cap \omega \subseteq x\} = \mathcal{U}$:

16-6(Satz)

`a)` $\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} = \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$.

`b)` *Aus* "$E \subseteq x$" *folgt* "$\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} = \mathcal{U}$".

`c)` $\{\omega : x \cap \omega \subseteq x\} = \mathcal{U}$.

16-1(Def) $\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$ *und* $\{\omega : x \cap \omega \subseteq x\}$.

16-1(Def) $\{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$.

Beweis **16-6** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$"
folgt: $E \cap \alpha \subseteq x$.

`3:` Aus `2.1`"α Menge"
folgt via **2-24**: $E \cap \alpha$ Menge.

`4:` Aus `2.2`"$E \cap \alpha \subseteq x$" und
aus `3`"$E \cap \alpha$ Menge"
folgt via **0-26**: $E \cap \alpha \in \mathcal{P}(x)$.

`5:` Aus `4`"$E \cap \alpha \in \mathcal{P}(x)$" und
aus `2.1`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} \subseteq \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$"

...

<u>Beweis **16-6**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$.
`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$" folgt:	$E \cap \alpha \in \mathcal{P}(x)$.
`3:` Aus `2.2`"$E \cap \alpha \in \mathcal{P}(x)$" folgt via **0-26**:	$E \cap \alpha \subseteq x$.
`4:` Aus `3`"$E \cap \alpha \subseteq x$" und aus `2.1`"$\alpha$ Menge" folgt:	$\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\} \subseteq \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} \subseteq \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\} \subseteq \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} = \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(x)\}$.

Beweis **16-6** `b)` `VS` gleich $E \subseteq x$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3:` Aus `2`“α Menge”
folgt via **2-24**: $E \cap \alpha$ Menge.

`4:` Via **2-7** gilt: $E \cap \alpha \subseteq E$.

`5:` Aus `4`“$E \cap \alpha \subseteq E$” und
aus `VS` gleich “$E \subseteq x$”
folgt via **0-6**: $E \cap \alpha \subseteq x$.

`6:` Aus `5`“$E \cap \alpha \subseteq x$” und
aus `2`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \text{ Menge}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : E \cap \omega \subseteq x\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{\omega : E \cap \omega \subseteq x\} = \mathcal{U}$.

`c)`

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`“$x \subseteq x$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{\omega : x \cap \omega \subseteq x\} = \mathcal{U}$.

□

16-7. Die $E\cap$Verschiebung von x ist im Fall $\mathsf{dom}\,x = \mathcal{P}(D)$ mit $E \subseteq D$ eine Unmenge. Genauer gilt der folgende Satz:

16-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) V *ist* $E\cap$*Verschiebung von* x.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,x = \mathcal{P}(D)$.

$\rightarrow$) $E \subseteq D$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,V = \mathcal{U}$.

b) V *Unmenge.*

Beweis **16-7**

16-1(Def) $\{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.

16-1(Def) $\{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(D)\}$.

16-1(Def) $\{\omega : E \cap \omega \subseteq D\}$.

1: Aus →) "V ist $E\cap$Verschiebung von x"
folgt via **16-5**: $\mathsf{dom}\, V = \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{dom}\, V = \{\omega : E \cap \omega \in \mathsf{dom}\, x\}$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, x = \mathcal{P}(D)$"
folgt: $\mathsf{dom}\, V = \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(D)\}$.

3: $\mathsf{dom}\, V \stackrel{2}{=} \{\omega : E \cap \omega \in \mathcal{P}(D)\} \stackrel{\mathbf{16-6}}{=} \{\omega : E \cap \omega \subseteq D\}$.

4: Aus →) "$E \subseteq D$"
folgt via **16-7**: $\{\omega : E \cap \omega \subseteq D\} = \mathcal{U}$.

5.a): Aus 3 "$\mathsf{dom}\, V = \ldots = \{\omega : E \cap \omega \subseteq D\}$" und
aus 4 "$\{\omega : E \cap \omega \subseteq D\} = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, V = \mathcal{U}$.

6.b): Aus 5.a) "$\mathsf{dom}\, V = \mathcal{U}$"
folgt via **7-9**: V Unmenge.

□

Der Wert von x in p. $x(p)$.
EinschränkungsSatz. ES.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 16/04/11**

17-1. Die für den **Wert von** x **in** p verwendete Notation $x(p)$ ist eine von den in den Essays am häufigsten gebrauchten Abkürzungen und wird mit folgender Definition in das LebensWerk eingebracht:

17-1(Definition)

1) $x(p) = \bigcap x[\{p\}]$.

2) "$\mathfrak{C}$ **Wert von** x **in** p" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = x(p).$$

17-2. Wie im folgenden Satz unter anderem gesagt, ist $x(p)$ der Wert von x in p:

17-2(Satz)

`a)` *$x(p)$ Wert von x in p.*

`b)` *Aus "$\mathfrak{C}$ Wert von x in p" und "$\mathfrak{D}$ Wert von x in p" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **17-2** `a)`

Aus "$x(p) = x(p)$"
folgt via **17-1(Def)**: $x(p)$ Wert von x in p.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Wert von x in p) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Wert von x in p).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Wert von x in $p \ldots$"
folgt via **17-1(Def)**: $\mathfrak{C} = x(p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Wert von x in p"
folgt via **17-1(Def)**: $\mathfrak{D} = x(p)$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = x(p)$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = x(p)$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

17-3. Die bei der Definition des Wertes von x in p vorkommende Klasse $x[\{p\}]$ lässt sich via **9-9** durch eine etwas ansprechendere Klasse ersetzen, siehe `a)`. Falls p eine Unmenge ist, dann ist via `b)` der Wert von x in p gleich dem Universum. Via logischer Re-Formulierung von `b)` ergibt sich, dass aus $p(x) \neq \mathcal{U}$ folgt, dass x eine Menge ist, siehe `c)`. Die gleiche Schlussfolgerung ergibt sich auch aus der via $0\mathcal{U}$**Axiom** restriktiveren Forderung "$p(x)$ Menge", siehe `d)`:

17-3(Satz)

`a)` $x(p) = \bigcap\{\omega : (p, \omega) \in x\}$.

`b)` *Aus "p Unmenge" folgt "$x(p) = \mathcal{U}$".*

`c)` *Aus "$x(p) \neq \mathcal{U}$" folgt "p Menge".*

`d)` *Aus "$x(p)$ Menge" folgt "p Menge".*

9-16(Def) $\{\omega : (p, \omega) \in x\}$.

Beweis **17-3** `a)`

`1:` $x(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{\mathbf{9-18}}{=} \bigcap\{\omega : (p, \omega) \in x\}.$

`2:` Aus `1`
folgt: $x(p) = \bigcap\{\omega : (p, \omega) \in x\}.$

`b)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **0-1**: $p \notin \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `1`"$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **9-20**: $x[\{p\}] = 0.$

`3:` $x(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{2}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}.$

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p) = \mathcal{U}.$

`c)` `VS` gleich $x(p) \neq \mathcal{U}.$

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x(p) = \mathcal{U}.$

`3:` Es gilt `2`"$x(p) = \mathcal{U}$".
Es gilt `VS` gleich "$x(p) \neq \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: p Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p Menge.

`d)` `VS` gleich $x(p)$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$x(p)$ Menge"
folgt via **0-17**: $x(p) \neq \mathcal{U}.$

`2:` Aus `1`"$x(p) \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: p Menge.

□

17-4. Gemäß folgendem Kriterium ist $p \notin \mathsf{dom}\, x$ genau dann, wenn $x(p) = \mathcal{U}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x(p)$ eine Unmenge ist. Interessanter Weise ist somit der Wert von x in p entweder eine Menge oder gleich dem Universum und es ist *nicht möglich*, dass der Wert von x in p gleich einer Unmenge$\neq \mathcal{U}$ ist:

17-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`ii)` $x(p) = \mathcal{U}$.

`iii)` $x(p)$ *Unmenge.*

Beweis **17-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **9-20**: $x[\{p\}] = 0$.

`2:` $x(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{1}{=} \bigcap 0 \stackrel{1-14}{=} \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2
folgt: $x(p) = \mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x(p) = \mathcal{U}$.

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Konvention** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `VS` gleich "$x(p) = \mathcal{U}$" und
aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt: $x(p)$ Unmenge.

Beweis **17-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x(p)$ Unmenge.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$p \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **9-19**: $0 \neq x[\{p\}]$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq x[\{p\}]$”
folgt via **1-17**: $\bigcap x[\{p\}]$ Menge.

`4:` Aus “$x(p) = \bigcap x[\{p\}]$” und
aus `3`“$\bigcap x[\{p\}]$ Menge”
folgt: $x(p)$ Menge.

`5:` Es gilt `4`“$x(p)$ Menge”.
Es gilt `VS` gleich “$x(p)$ Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

$\square$

17-5. In “positiver Re-Formulierung” von **17-4** ergibt sich, dass $p \in \mathsf{dom}\, x$ genau dann der Fall ist, wenn $x(p) \neq \mathcal{U}$ gilt und dies ist genau dann der Fall, wenn $x(p)$ eine Menge ist:

17-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`ii)` $x(p) \neq \mathcal{U}$.

`iii)` $x(p)$ *Menge.*

Beweis **17-5**

1: Via **17-4** gilt: $(p \notin \mathsf{dom}\, x) \Leftrightarrow (x(p) = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (x(p) \text{ Unmenge})$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(p \notin \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (\neg(x(p) = \mathcal{U})) \Leftrightarrow (\neg(x(p) \text{ Unmenge}))$.

3: Aus 2 folgt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \Leftrightarrow (x(p) \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (x(p) \text{ Menge})$.

□

17-6. Wie aus den in **1-15** dargelegten Eigenschaften des zurchschnitts folgt, werden durch zurchschnittsbildung aus kleineren Klassen grössere Klassen. Dies hat im Hinblick auf den Wert von x in p mehrere Konsequenzen, die in Form alternativer Voraussetzungen zum gleichen Resultat führen:

17-6(Satz)

Es gelte:

→)

$x[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$.

oder

$x \subseteq y$.

oder

$\{\omega : (p,\omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p,\omega) \in y\}$.

Dann folgt "$y(p) \subseteq x(p)$".

9-16(Def) $\{\omega : (p,\omega) \in x\}$ *und* $\{\omega : (p,\omega) \in y\}$.

<u>Beweis **17-6**</u>

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(x[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]) \vee (x \subseteq y) \vee (\{\omega : (p,\omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p,\omega) \in y\}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$" folgt via **1-15**: $\bigcap y[\{p\}] \subseteq \bigcap x[\{p\}]$.

`3:` $y(p) \stackrel{\textbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap y[\{p\}] \stackrel{2}{\subseteq} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{\textbf{17-1(Def)}}{=} x(p)$.

`4:` Aus `3` folgt: $y(p) \subseteq x(p)$.

`1.2.Fall` $x \subseteq y$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \subseteq y$" folgt via **8-9**: $x[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$.

`3:` Aus `2` "$x[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$" folgt via **1-15**: $\bigcap y[\{p\}] \subseteq \bigcap x[\{p\}]$.

`4:` $y(p) \stackrel{\textbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap y[\{p\}] \stackrel{3}{\subseteq} \bigcap x[\{p\}] \stackrel{\textbf{17-1(Def)}}{=} x(p)$.

`5:` Aus `4` folgt: $y(p) \subseteq x(p)$.

`1.3.Fall` $\{\omega : (p,\omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p,\omega) \in y\})$.

`2:` Aus `1.3.Fall` "$\{\omega : (p,\omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p,\omega) \in y\})$" folgt via **1-15**: $\bigcap\{\omega : (p,\omega) \in y\} \subseteq \bigcap\{\omega : (p,\omega) \in x\}$.

`3:` $y(p) \stackrel{\textbf{17-3}}{=} \bigcap\{\omega : (p,\omega) \in y\} \stackrel{2}{\subseteq} \bigcap\{\omega : (p,\omega) \in x\} \stackrel{\textbf{17-3}}{=} x(p)$.

`4:` Aus `3` folgt: $y(p) \subseteq x(p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $y(p) \subseteq x(p)$.

□

17-7. Gemäß a) ist der Wert von 0 in p gleich $\mathcal{U}$. Auch ist via b) der Wert von p in $\mathcal{U}$ gleich $\mathcal{U}$. Falls p eine Menge ist, dann Wert von $\mathcal{U}$ in p gleich der leeren Menge, siehe c). In Spezialisierung eines Resultats aus **17-3** für das Universum gilt für jede Unmenge p laut d) die Gleichung $\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}$:

17-7(Satz)

a) $0(p) = \mathcal{U}$.

b) $x(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

c) *Aus "p Menge" folgt "$\mathcal{U}(p) = 0$".*

d) *Aus "p Unmenge" folgt "$\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}$".*

<u>Beweis **17-7**</u> `a)`

`1.1:` Via **0-19** gilt: $p \notin 0$.

`1.2:` Via **7-11** gilt: $\mathsf{dom}\, 0 = 0$.

`2:` Aus `1.1`“$p \notin 0$” und
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\, 0 = 0$”
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\, 0$.

`3:` Aus `2`“$p \notin \mathsf{dom}\, 0$”
folgt via **17-4**: $0(p) = \mathcal{U}$.

`b)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via **17-3**: $x(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

`c)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “p Menge”
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`2:` Aus `1`“$0 \neq \{p\}$”
folgt via **8-12**: $\mathcal{U}[\{p\}] = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathcal{U}(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap \mathcal{U}[\{p\}] \stackrel{2}{=} \bigcap \mathcal{U} \stackrel{1-14}{=} 0.$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathcal{U}(p) = 0$.

`d)` `VS` gleich p Unmenge.

Aus `VS` gleich “p Unmenge”
folgt via **17-3**: $\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}$.

□

17-8. Im **ES: EinschränkungsSatz** werden die Werte von x in Beziehung zu den Werten der Einschränkung von x auf D gesetzt. Jede der vier Aussagen geht unter anderem von "e Einschränkung von x auf D" aus. In a) wird gesagt, dass jede Klasse $p \in \mathsf{dom}\, e$ auch Element von $\mathsf{dom}\, x$ ist - dies ist im Wesentlichen seit **15-6** bekannt - und dass in diesem Fall $e(p) = x(p)$ mit Mengen $e(p), x(p)$ gilt. Via b) gilt auch für $p \in D$ die Gleichung $e(p) = x(p)$, jedoch wird hier nichts weiter über die "Mengen-Eigenschaft" dieser beiden Werte gesagt. Im Allgemeinen ist dies auch nicht möglich, denn während via a) zumindest für $p \in D \cap \mathsf{dom}\, e$ die Werte $e(p), x(p)$ Mengen sind, gilt für $p \in D \setminus \mathsf{dom}\, e \stackrel{\mathbf{15-6}}{=} D \setminus \mathsf{dom}\, x$ via c) die Aussage $e(p) = x(p) = \mathcal{U}$ mit der Unmenge $\mathcal{U}$. Via d) stellt sich die Aussage von c) als Spezialfall von $p \notin \mathsf{dom}\, x$ heraus, da bereits aus dieser Voraussetzung die Gleichungen $e(p) = x(p) = \mathcal{U}$ folgen. In e) wird mit $(\mathsf{dom}\, x) \setminus D \stackrel{\mathbf{15-6}}{=} (\mathsf{dom}\, x) \setminus \mathsf{dom}\, e$ jene Klasse charakterisiert, in deren Elementen p die Werte $e(p)$ und $x(p)$ *nicht* gleich sind. Genauer gesagt gilt für alle $p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus D$ die Gleichung $e(p) = \mathcal{U}$ und außerdem ist $x(p)$ eine Menge, so dass $e(p) \neq x(p)$ folgt. Die Beweis-Reihenfolge ist a) - d) - c) - b) - e) - f):

17-8(Satz) (ES: EinschränkungsSatz)

Aus "e Einschränkung von x auf D" und ...

a) ... *und* "$p \in \mathsf{dom}\, e$"
folgt "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
und "$e(p) = x(p)$" *und* "$e(p)$ *Menge*" *und* "$x(p)$ *Menge*".

b) ... *und* "$p \in D$" *folgt* "$e(p) = x(p)$".

c) ... *und* "$p \in D \setminus \mathsf{dom}\, e$" *folgt* "$e(p) = x(p)$"
und "$e(p) = \mathcal{U}$" *und* "$x(p) = \mathcal{U}$".

d) ... *und* "$p \notin \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$e(p) = x(p)$"
und "$e(p) = \mathcal{U}$" *und* "$x(p) = \mathcal{U}$".

e) ... *und* "$p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus D$" *folgt* "$e(p) \neq x(p)$"
und "$e(p) = \mathcal{U}$" *und* "$x(p)$ *Menge*".

f) ... *und* "$p \in D \setminus (\mathsf{dom}\, x)$" *folgt* "$e(p) = x(p)$"
und "$e(p) = \mathcal{U}$" *und* "$x(p) = \mathcal{U}$".

Beweis **17-8**

9-16(Def) $\{\omega : (p,\omega) \in x\}$ und $\{\omega : (p,\omega) \in e\}$.

`a)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, e)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D\dots$"
folgt via **15-3**: $e \subseteq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D\dots$"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\dots p \in \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (p,\Omega) \in e$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\dots p \in \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **17-5**: $e(p)$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$e \subseteq x$"
folgt via **17-6**: $x(p) \subseteq e(p)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\dots p \in \mathsf{dom}\, e$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D\dots$" und
aus `1.3`"$\dots (p,\Omega) \in e$"
folgt via **15-5**: $p \in D$.

$\dots$

<u>Beweis **17-8**</u> `a)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, e)$.

...

`Thema2.4` $\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$.

`3.1:` Aus `Thema2.4`“$\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.2:` Aus `Thema2.4`“$\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}$”
folgt: $(p, \alpha) \in x$.

`4:` Aus `VS` gleich “e Einschränkung von x auf $D \ldots$”,
aus `2.3`“$p \in D$” und
aus `3.2`“$(p, \alpha) \in x$”
folgt via **15-5**: $(p, \alpha) \in e$.

`5:` Aus `4`“$(p, \alpha) \in e$” und
aus `3.1`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in e\}$.

Ergo `Thema2.4`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (p, \omega) \in e\})$.

Konseupenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\{\omega : (p, \omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p, \omega) \in e\}$”

`2.5:` Aus `A1` gleich “$\{\omega : (p, \omega) \in x\} \subseteq \{\omega : (p, \omega) \in e\}$”
folgt via **17-6**: $e(p) \subseteq x(p)$.

`3.1:` Aus `A1` gleich “$p \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **17-5**: $x(p)$ Menge.

`3.2:` Aus `2.5`“$e(p) \subseteq x(p)$” und
aus `2.1`“$x(p) \subseteq e(p)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $e(p) = x(p)$.

`4:` Aus `2.2`“$p \in \mathsf{dom}\, x$”,
aus `3.2`“$e(p) = x(p)$”,
aus `1.4`“$e(p)$ Menge” und
aus `3.1`“$x(p)$ Menge”
folgt:

$$p \in \mathsf{dom}\, x$$
$$\wedge \quad e(p) = x(p)$$
$$\wedge \quad e(p) \text{ Menge}$$
$$\wedge \quad x(p) \text{ Menge}.$$

<u>Beweis **17-8**</u> `d)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D \ldots$"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, x$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathsf{dom}\, e$.

`3.1:` Aus `2`"$p \notin \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **17-4**: $e(p) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1`"$e(p) = \mathcal{U}$" und
aus `3.2`"$x(p) = \mathcal{U}$"
folgt:

$$e(p) = x(p) \wedge e(p) = \mathcal{U} \wedge x(p) = \mathcal{U}.$$

`c)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \in D \setminus \mathsf{dom}\, e)$.

`1:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D \ldots$"
folgt via **15-6**: $D \setminus \mathsf{dom}\, x = D \setminus \mathsf{dom}\, e$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in D \setminus \mathsf{dom}\, e$" und
aus `1`"$D \setminus \mathsf{dom}\, x = D \setminus \mathsf{dom}\, e$"
folgt: $p \in D \setminus \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `2`"$p \in D \setminus \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **5-3**: $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D \ldots$" und
aus `3`"$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:

$$e(p) = x(p) \wedge e(p) = \mathcal{U} \wedge x(p) = \mathcal{U}.$$

<u>Beweis **17-8**</u> `b)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \in D)$.

`1:` es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, e) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, e)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\, e$.

Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf D ..." und
aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\, e$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $e(p) = x(p)$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, e$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in D$" und
aus `1.2.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **5-3**: $p \in D \setminus \mathsf{dom}\, e$.

`3:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D\ldots$" und
aus `2` "$p \in D \setminus \mathsf{dom}\, e$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $e(p) = x(p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $e(p) = x(p)$.

<u>Beweis **17-8**</u> `e)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in (\mathsf{dom}\, x) \setminus D$"
folgt via **5-3**: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (p \notin D)$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **17-5**: $x(p)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D \ldots$"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, e \subseteq D$.

`4:` Aus `1`"$\ldots p \notin D$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\, e \subseteq D$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathsf{dom}\, e$.

`5:` Aus `4`"$p \notin \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **17-4**: $e(p) = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `2`"$x(p)$ Menge"
folgt via **0-17**: $x(p) \neq \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6`"$x(p) \neq \mathcal{U}$" und
aus `5`"$e(p) = \mathcal{U}$"
folgt: $x(p) \neq e(p)$.

`8:` Aus `7`"$x(p) \neq e(p)$",
aus `5`"$e(p) = \mathcal{U}$" und
aus `2`"$x(p)$ Menge"
folgt:

$$e(p) \neq x(p) \wedge e(p) = \mathcal{U} \wedge x(p) \text{ Menge.}$$

`f)` `VS` gleich $(e \text{ Einschränkung von } x \text{ auf } D) \wedge (p \in D \setminus \mathsf{dom}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in D \setminus \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **5-3**: $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "e Einschränkung von x auf $D \ldots$" und
aus `1`"$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:

$$e(p) = x(p) \wedge e(p) = \mathcal{U} \wedge x(p) = \mathcal{U}.$$

□

f **Funktion**. 0 Funktion.
IdentitätsSatz Funktionen. **ISF**.
Keine Funktion. $\mathcal{U}$ keine Funktion.

Ersterstellung: 12/09/05 **Letzte Änderung: 18/04/11**

18-1. In der folgenden Definition wird die Klasse aller Werte von x in Elementen von E und die Klasse aller Werte von x in Elementen von $\mathsf{dom}\, x$ in die Essays eingeführt:

18-1(Definition)

1) $\mathsf{18.0}(E, x) = \{x(\lambda) : \lambda \in E\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}$.

2) $\mathsf{18.1}(x) = \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}.$$

18-2. In a) qerden definitions-nahe Eigenschaften von Elementen aus $\{x(\lambda) : \lambda \in E\}$ hergeleitet. In b) qird ähnlich mit $\{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$ verfahren:

18-2(Satz)

a) *Aus* "$q \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$"

folgt "$\exists \Omega : (q = x(\Omega)) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x)$".

b) *Aus* "$q \in \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$"

folgt "$\exists \Omega : (q = x(\Omega)) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, x)$".

18-1(Def) $\{x(\lambda) : \lambda \in E\}$ *und* $\{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-2** `a)` `VS` gleich $q \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$q \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$q \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$" und
aus "$\{x(\lambda) : \lambda \in E\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}$"
folgt: $q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$q \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (q = x(\Omega))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots q = x(\Omega)$" und
aus `1.1`"q Menge"
folgt: $x(\Omega)$ Menge.

`4:` Aus `3`"$x(\Omega)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`6:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots q = x(\Omega)$" und
aus `5`"$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $\exists \Omega$:

$$q = x(\Omega)$$

$$\wedge \quad \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x.$$

`b)` `VS` gleich $q \in \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \in \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (q = x(\Omega)) \wedge (\Omega \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x))$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega : q = x(\Omega) \ldots$" und
aus `2`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $\exists \Omega$:

$$q = x(\Omega)$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, x.$$

$\square$

18-3. In `a)` wird eine hinreichende Bedingungen für $x(p) \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$ formuliert. Ähnlich ist in `b)` Hinreichendes für $x(p) \in \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$ zu finden:

18-3(Satz)

`a)` *Aus* "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$x(p) \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$".

`b)` *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$x(p) \in \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$".

18-1(Def) $\{x(\lambda) : \lambda \in E\}$ *und* $\{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-3** `a)` `VS` gleich $p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $(p \in E) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

`2.1:` Aus `1`"$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-5**: $x(p)$ Menge.

`3:` Aus `2.1`"$\exists p : p \in E$" und
aus "$x(p) = x(p)$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge (x(p) = x(p))$.

`4:` Aus `3`"$\exists p : (p \in E) \wedge (x(p) = x(p))$" und
aus `2.2`"$x(p)$ Menge"
folgt: $x(p) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}$.

`5:` Aus `4`"$x(p) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x(\Omega)))\} = \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt: $x(p) \in \{x(\lambda) : \lambda \in E\}$.

`b)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $p \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$.

`2:` Aus `1`"$p \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x(p) \in \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

□

18-4. Mit der folgenden Definition werden vier KlassenTerme in die Essaxs eingeführt, deren gemeinsames Merkmal darin besteht, dass sie aus geordneten Paaren der Form $(\lambda, x(\lambda))$ oder $(x(\lambda), \lambda)$ bestehen:

18-4(Definition)

1) $\mathsf{18.2}(E, x) = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$

$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}.$

2) $\mathsf{18.3}(x) = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$

$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}.$

3) $\mathsf{18.4}(E, x) = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$

$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}.$

4) $\mathsf{18.5}(x) = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$

$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}.$

18-5. Im folgenden Satz werden definitions-nahe Eigenschaften von Elementen w aus $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ formuliert. Im Speziellen gibt es zu jedem derartigen w ein Ω aus $E \cap \mathsf{dom}\, x$ mit $w = (\Omega, x(\Omega))$. Dass hier "$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" an Stelle von "$\Omega \in E$" auftritt liegt an der aus **ElementAxiom** und **PaarAxiom I** resultierenden Aussage "$x(\Omega)$ Menge" :

18-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

e.1) $w = (\Omega, x(\Omega))$.

e.2) $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Beweis **18-5**

`1.1:` Aus →) “ $w \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ ”
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus →) “ $w \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ ” und
aus “ $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$”
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$.

`2:` Aus `1.2` “ $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$ ”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (\Omega, x(\Omega)))$.

`3:` Aus `2` “ $\ldots w = (\Omega, x(\Omega))$ ” und
aus `1.1` “ w Menge ”
folgt: $(\Omega, x(\Omega))$ Menge.

`4:` Aus `3` “ $(\Omega, x(\Omega))$ Menge ”
folgt via **PaarAxiom I**: $x(\Omega)$ Menge.

`5:` Aus `4` “ $x(\Omega)$ Menge ”
folgt via **17-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`6:` Aus `2` “ $\ldots \Omega \in E \ldots$ ” und
aus `5` “ $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$ ”
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`7:` Aus `2` “ $\exists \Omega \ldots$ ”,
aus `2` “ $\ldots w = (\Omega, x(\Omega))$ ” und
aus `6` “ $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$ ”
folgt: $\exists \Omega$:

$$w = (\Omega, x(\Omega))$$

$$\wedge \quad \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x.$$

□

18-6. In Spezialisierung von **18-5** auf geordnete Paare werden Eigenschaften geordneter Paare, die Element von $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ sind, angegeben:

18-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $(p,q) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Dann folgt:

a) $p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

b) $q = x(p)$.

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Beweis **18-6**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$(p,q) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$(p,q) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-5**: $\exists \Omega : ((p,q) = (\Omega, x(\Omega))) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x)$.

2: Aus 1.2 "$\ldots (p,q) = (\Omega, x(\Omega)) \ldots$" und
aus 1.1 "(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = x(\Omega))$.

3.a): Aus 2 "$p = \Omega \ldots$" und
aus 1.2 "$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

3.b): Aus 2 "$\ldots q = x(\Omega)$" und
aus 2 "$p = \Omega \ldots$"
folgt: $q = x(p)$.

$\square$

18-7. "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" ist hinreichend für $(p, x(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$. Konsequenter Weise ist $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$:

18-7(Satz)

a) *Aus* "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$(p, x(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$".

b) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ *und* $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-7** a) VS gleich $p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $(p \in E) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

2.1: Aus 1"$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

2.2: Aus 1"$\ldots p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-5**: $x(p)$ Menge.

3.1: Aus 1.1"p Menge" und
aus 2.2"$x(p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, x(p))$ Menge.

3.2: Aus 2.1"$\exists p : p \in E$" und
aus "$(p, x(p)) = (p, x(p))$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((p, x(p)) = (p, x(p)))$.

4: Aus 3.2"$\exists p : (p \in E) \wedge ((p, x(p)) = (p, x(p)))$" und
aus 3.1"$(p, x(p))$ Menge"
folgt: $(p, x(p)) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$.

5: Aus 4"$(p, x(p)) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt: $(p, x(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Beweis **18-7** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$”
folgt via **18-5**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, x(\Omega))) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$” und
aus `3`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `4`“$\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, x(\Omega)) \ldots$” und
aus `5`“$(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$”
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1`	“$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$”

...

Beweis **18-7** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$"
folgt via **18-5**:
$$\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, x(\Omega))) \wedge (\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x).$$

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `3` "$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}.$$

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, x(\Omega)) \ldots$" und
aus `4` "$(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.2`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2`	"$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}.$$

□

18-8. Im folgenden Satz werden definitions-nahe Eigenschaften von Elementen w aus $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$ formuliert. Im Speziellen gibt es zu jedem derartigen w ein Ω aus $\mathsf{dom}\, x$ mit $w = (\Omega, x(\Omega))$:

18-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

e.1) $w = (\Omega, x(\Omega))$.

e.2) $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-8**

1: Aus $\rightarrow$) "$w \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$" und
aus "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$"
folgt:
$$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}.$$

2: Aus 1"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (\omega = (\Omega, x(\Omega))))\}$"
folgt:
$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (w = (\Omega, x(\Omega))).$$

3: Aus 2"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\ldots w = (\Omega, x(\Omega))$" und
aus 2"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt:
$$\exists \Omega: \quad w = (\Omega, x(\Omega)) \quad \wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, x.$$

$\square$

18-9. In Spezialisierung von **18-8** auf geordnete Paare werden Eigenschaften geordneter Paare, die Element von $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$ sind, angegeben:

18-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $(p, q) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Dann folgt:

a) $p \in \mathsf{dom}\, x$.

b) $q = x(p)$.

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-9**

1.1: Aus $\rightarrow$)"$(p, q) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$(p, q) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$"
folgt via **18-8**: $\exists \Omega : ((p, q) = (\Omega, x(\Omega))) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, x)$.

2: Aus 1.2"$\ldots (p, q) = (\Omega, x(\Omega)) \ldots$" und
aus 1.1"(p, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = x(\Omega))$.

3.a): Aus 2"$p = \Omega \ldots$" und
aus 1.2"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

3.b): Aus 2"$\ldots q = x(\Omega)$" und
aus 2"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $q = x(p)$.

□

18-10. In Ähnlichkeit zu **18-7** ist laut folgendem Satz "$p \in \mathsf{dom}\, x$" hinreichend für $(p, x(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$:

18-10(Satz)

Aus "$p \in \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$(p, x(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$".

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-10** `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1`: Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $p \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$.

`2`: Aus `1` "$p \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$"
folgt via **18-7**: $(p, x(p)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}$.

□

18-11. Im folgenden Satz werden definitions-nahe Eigenschaften von Elementen w aus $\{(x(\lambda),\lambda) : \lambda \in E\}$ formuliert. Im Speziellen gibt es zu jedem derartigen w ein Ω aus $E \cap \mathsf{dom}\, x$ mit $w = (x(\Omega),\Omega)$. Dass hier "$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" an Stelle von "$\Omega \in E$" auftritt liegt an der aus **ElementAxiom** und **PaarAxiom I** resultierenden Aussage "$x(\Omega)$ Menge" :

18-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \{(x(\lambda),\lambda) : \lambda \in E\}$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

e.1) $w = (x(\Omega),\Omega)$.

e.2) $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

18-4(Def) $\{(x(\lambda),\lambda) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **18-11**</u>

`1.1:` Aus →) "$w \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus →) "$w \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$" und
aus "$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}$.

`2:` Aus `1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x(\Omega)\text{ Menge}) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (x(\Omega), \Omega))$.

`3:` Aus `1.1`"w Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (x(\Omega), \Omega)$"
folgt: $(x(\Omega), \Omega)$ Menge.

`4:` Aus `3`"$(x(\Omega), \Omega)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $x(\Omega)$ Menge.

`5:` Aus `4`"$x(\Omega)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`6:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `5`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`7:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots w = (x(\Omega), \Omega)$" und
aus `4`"$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $\exists \Omega$:

$$w = (x(\Omega), \Omega)$$

$$\wedge \quad \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x.$$

□

18-12. In Spezialisierung von **18-11** auf geordnete Paare werden Eigenschaften geordneter Paare, die Element von $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$ sind, angegeben:

18-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $(p, q) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

Dann folgt:

a) $p = x(q)$.

b) $q \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

18-4(Def) $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

Beweis **18-12**

1.1: Aus $\rightarrow$)"$(p, q) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$(p, q) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-11**: $\exists \Omega : ((p, q) = (x(\Omega), \Omega)) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x)$.

2: Aus 1.2"$(p, q) = (x(\Omega), \Omega)$" und
aus 1.1"(p, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = x(\Omega)) \wedge (q = \Omega)$.

3.a): Aus 2"$p = x(\Omega) \ldots$" und
aus 2"$\ldots q = \Omega$"
folgt: $p = x(q)$.

3.b): Aus 2"$\ldots q = \Omega$" und
aus 1.2"$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $q \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

□

18-13. "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" ist hinreichend für $(x(p), p) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$. Konsequenter Weise ist $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$:

18-13(Satz)

a) *Aus* "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$(x(p), p) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$".

b) $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

18-4(Def) $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$ *und* $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

Beweis **18-13** a) VS gleich $p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $(p \in E) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

2.1: Aus 1.2"$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

2.2: Aus 1.2"$\ldots p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-5**: $x(p)$ Menge.

3.1: Aus 2.2"$x(p)$ Menge" und
aus 1.1"p Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x(p), p)$ Menge.

3.2: Aus 2.1"$\exists p : p \in E$" und
aus "$(x(p), p) = (x(p), p)$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((x(p), p) = (x(p), p))$.

4: Aus 3.2"$\exists p : (p \in E) \wedge ((x(p), p) = (x(p), p))$" und
aus 3.1"$(x(p), p)$ Menge"
folgt: $(x(p), p) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}$.

5: Aus 4"$(x(p), p) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (x(\Omega), \Omega)))\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt: $(x(p), p) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **18-13**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-11**: $\exists \Omega : (\alpha = (x(\Omega), \Omega)) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `3` "$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `4` "$\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(x(\Omega), \Omega) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (x(\Omega), \Omega) \ldots$" und
aus `5` "$(x(\Omega), \Omega) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$"
folgt: $\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

Ergo `Thema1.1`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\texttt{A1} \;\Big|\; \text{“}\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} \subseteq \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}\text{”}}$$

...

Beweis **18-13** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$”
folgt via **18-11**:
$$\exists \Omega : (\alpha = (x(\Omega), \Omega)) \wedge (\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x).$$

`3:` Aus `2`“...$\Omega \in (E \cap \mathsf{dom}\, x) \cap \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `3`“$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(x(\Omega), \Omega) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}.$$

`5:` Aus `2`“...$\alpha = (x(\Omega), \Omega)$...” und
aus `4`“$(x(\Omega), \Omega) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$”
folgt: $\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.2`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2` | “$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} \subseteq \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}$” und
aus `A2` gleich “$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\} \subseteq \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E \cap \mathsf{dom}\, x\}.$$

$\square$

18-14. Im folgenden Satz werden definitions-nahe Eigenschaften von Elementen w aus $\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$ formuliert. Im Speziellen gibt es zu jedem derartigen w ein Ω aus $\mathsf{dom}\,x$ mit $w=(x(\Omega),\Omega)$:

18-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w\in\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

e.1) $w=(x(\Omega),\Omega)$.

e.2) $\Omega\in\mathsf{dom}\,x$.

18-4(Def) $\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$.

Beweis **18-14**

1: Aus $\rightarrow$)“$w\in\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$” und
aus “$\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$
$=\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\omega=(x(\Omega),\Omega)))\}$”
folgt:
$$w\in\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\omega=(x(\Omega),\Omega)))\}.$$

2: Aus 1“$w\in\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(\omega=(x(\Omega),\Omega)))\}$”
folgt: $\exists\Omega:(\Omega\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(w=(x(\Omega),\Omega))$.

3: Aus 2“$\exists\Omega\ldots$”,
aus 2“$\ldots w=(x(\Omega),\Omega)$” und
aus 2“$\ldots\Omega\in\mathsf{dom}\,x\ldots$”
folgt: $\exists\Omega$:
$$w=(x(\Omega),\Omega)$$
$$\wedge\quad\Omega\in\mathsf{dom}\,x.$$

□

18-15. In Spezialisierung von **18-14** auf geordnete Paare werden Eigenschaften geordneter Paare, die Element von $\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$ sind, angegeben:

18-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $(p,q)\in\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$.

Dann folgt:

a) $p=x(q)$.

b) $q\in\mathsf{dom}\,x$.

18-4(Def) $\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$.

Beweis **18-15**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$(p,q)\in\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$(p,q)\in\{(x(\lambda),\lambda):\lambda\in\mathsf{dom}\,x\}$"
folgt via **18-14**: $\exists\Omega:((p,q)=(x(\Omega),\Omega))\wedge(\Omega\in\mathsf{dom}\,x)$.

2: Aus 1.2"$\ldots(p,q)=(x(\Omega),\Omega)\ldots$" und
aus 1.1"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p=x(\Omega))\wedge(q=\Omega)$.

3.a): Aus 2"$p=x(\Omega)\ldots$" und
aus 2"$\ldots q=\Omega$"
folgt: $p=x(q)$.

3.b): Aus 2"$\ldots q=\Omega$" und
aus 1.2"$\ldots\Omega\in\mathsf{dom}\,x$"
folgt: $q\in\mathsf{dom}\,x$.

□

18-16. In Ähnlichkeit zu **18-13** ist laut folgendem Satz “$p \in \mathsf{dom}\,x$” hinreichend für $(x(p), p) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$:

18-16(Satz)

Aus “$p \in \mathsf{dom}\,x$” *folgt* “$(x(p), p) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$”.

18-4(Def) $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

Beweis **18-16** `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,x$.

1: Aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{dom}\,x$” und
aus `VS` gleich “$p \in \mathsf{dom}\,x$”
folgt via **2-2**: $p \in (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,x)$.

2: Aus 1“$p \in (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,x)$”
folgt via **18-13**: $(x(p), p) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\,x\}$.

□

18-17. Gemäß folgenden Satzes sind $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ und $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$ Relationen und die eine Klasse ist die Relation invers Eur anderen Klasse:

18-17(Satz)

a) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ *Relation.*

b) $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$ *Relation.*

c) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

d) $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}^{-1} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ *und* $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **18-17**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$”
folgt via **18-5**: $\exists \Omega : \alpha = (\Omega, x(\Omega))$.

`3:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = x(\Omega)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Psi = x(\Omega)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, x(\Omega))$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, x(\Omega))$” und
aus `4`“$(\Omega, \Psi) = (\Omega, x(\Omega))$”
folgt: $\alpha = (\Omega, \Psi)$.

`6:` Aus `2`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `3`“$\exists \Psi \ldots$” und
aus `5`“$\alpha = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ Relation.

<u>Beweis</u> **18-17** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-11**: $\exists \Omega : \alpha = (x(\Omega), \Omega)$.

`3:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = x(\Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Psi = x(\Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (x(\Omega), \Omega)$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (x(\Omega), \Omega)$" und
aus `4`"$(\Psi, \Omega) = (x(\Omega), \Omega)$"
folgt: $\alpha = (\Psi, \Omega)$.

`6:` Aus `3`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `5`"$\alpha = (\Psi, \Omega)$"
folgt: $\exists \Psi, \Omega : \alpha = (\Psi, \Omega)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\exists \Psi, \Omega : \alpha = (\Psi, \Omega))$.

Konsequenz via **10-3**: $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$ Relation.

<u>Beweis **18-17**</u> `c)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$"
folgt via **11-3**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}).$$

`3:` Aus `2` "$(\Omega, \Psi) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-6**: $(\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x) \wedge (\Psi = x(\Omega))$.

`4.1:` Aus `3` "$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **18-13**: $(x(\Omega), \Omega) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Psi = x(\Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (x(\Omega), \Omega)$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `4.2` "$(\Psi, \Omega) = (x(\Omega), \Omega)$"
folgt: $\alpha = (x(\Omega), \Omega)$.

`6:` Aus `5` "$\alpha = (x(\Omega), \Omega)$" und
aus `4.1` "$(x(\Omega), \Omega) \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt: $\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1} \subseteq \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"

...

Beweis **18-17** `c)` ...

`Thema1.2`	$\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-11**:
$$\exists \Omega : (\alpha = (x(\Omega), \Omega)) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x).$$

`3:` Aus `2`"... $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, x$ ..."
folgt via **18-7**: $(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

`4:` Aus `3`"$(\Omega, x(\Omega)) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt via **11-4**: $(x(\Omega), \Omega) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$.

`5:` Aus `2`"... $\alpha = (x(\Omega), \Omega)$ ..." und
aus `4`"$(x(\Omega), \Omega) \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$"
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1} \subseteq \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\} \subseteq \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}.$$

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ Relation.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1.1`"$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$ Relation"
folgt via **13-3**: $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = (\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1})^{-1}$.

`3:` Aus `2`"$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = (\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1})^{-1}$" und
aus `1.2`"$\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}^{-1} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}$" "
folgt: $\{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}^{-1}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in E\}^{-1} = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

□

18-18. Mit der folgenden Definition betritt mit dem Begriff der Funktion eines der wichtigsten Konzepte die Essays.
Es fallen Ähnlichkeiten der Definition von "injektiv" und der Definition von "Funktion" auf. Diese Ähnlichkeiten ergeben in der Tat ein Kriterium für "f Funktion", in dem "injektiv" vorkommt. Genaueres hierzu in **18-19**.
Im zweiten Teil der Definition wird gesagt, was es heißt, keine Funktion zu sein. Untersuchungen zum Thema "f keine Funktion" erfolgen am Ende des Essays:

18-18(Definition)

1) "f **Funktion**" genau dann, wenn gilt:

$$f \text{ Relation.}$$
$$\wedge$$
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in f) \wedge ((\alpha, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\beta = \gamma).$$

2) "f **keine Funktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(f \text{ Funktion}).$$

18-19. f ist genau dann eine Funktion, wenn f eine Relation ist und wenn f^{-1} injektiv ist:

18-19(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *f Funktion.*

`ii)` *"f Relation" und "f^{-1} injektiv".*

Beweis **18-19** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: `A1` "f Relation"

`Thema1.2` $((\alpha, \beta) \in f^{-1}) \wedge ((\gamma, \beta) \in f^{-1})$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \in f^{-1} \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\beta, \alpha) \in f$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\gamma, \beta) \in f^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\beta, \gamma) \in f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion",
aus `2.1`"$(\beta, \alpha) \in f$" und
aus `2.2`"$(\beta, \gamma) \in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in f^{-1}) \wedge ((\gamma, \beta) \in f^{-1})) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: `A2` "f^{-1} injektiv"

`1.3:` Aus `A1` gleich "f Relation" und
aus `A2` gleich "f^{-1} injektiv"
folgt: $(f \text{ Relation}) \wedge (f^{-1} \text{ injektiv})$.

Beweis **18-19** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(f \text{ Relation}) \wedge (f^{-1} \text{ injektiv})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $((\alpha,\beta) \in f) \wedge ((\alpha,\gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha,\beta) \in f \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\beta,\alpha) \in f^{-1}$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha,\gamma) \in f$"
folgt via **11-4**: $(\gamma,\alpha) \in f^{-1}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots f^{-1}$ injektiv",
aus `2.1`"$(\beta,\alpha) \in f^{-1}$" und
aus `2.2`"$(\gamma,\alpha) \in f^{-1}$"
folgt via **8-1(Def)**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha,\beta,\gamma : (((\alpha,\beta) \in f) \wedge ((\alpha,\gamma) \in f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Relation..." und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha,\beta,\gamma : (((\alpha,\beta) \in f) \wedge ((\alpha,\gamma) \in f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: f Funktion.

$\square$

18-20. Mit dem folgenden Satz werden Folgerungen aus "$(x,y) \in f$" mit einer Funktion f gezogen. Gemäß `d)` ist dann $f[\{x\}]$ die "einelementige Menge" Singelton y und hieraus ergibt sich schnell Aussage `a)`, wonach $y = f(x)$ gelten muss. Als weitere Folgerungen stellen sich $(x,y) = (x, f(x))$ und $(x, f(x)) \in f$, siehe `bc)`, ein. Die Beweis-Reihenfolge ist `d) - a) - b) - c)`:

18-20(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $(x,y) \in f$.

Dann folgt:

`a)` $y = f(x)$.

`b)` $(x,y) = (x, f(x))$.

`c)` $(x, f(x)) \in f$.

`d)` $f[\{x\}] = \{y\}$.

Beweis **18-20**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in f[\{x\}]$.

`2.1`: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in f[\{x\}]$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2`: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in f[\{x\}]$"
folgt via **9-15**: $(x, \alpha) \in f$.

`3`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus `2.2` "$(x, \alpha) \in f$" und
aus $\rightarrow$) "$(x, y) \in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\alpha = y$.

`4`: Aus `3` "$\alpha = y$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{y\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f[\{x\}]) \Rightarrow (\alpha \in \{y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$f[\{x\}] \subseteq \{y\}$"

`1.2`: Aus $\rightarrow$) "$(x, y) \in f$"
folgt via **9-15**: `A2` | "$\{y\} \subseteq f[\{x\}]$"

`1.d)`: Aus `A1` gleich "$f[\{x\}] \subseteq \{y\}$" und
aus `A2` gleich "$\{y\} \subseteq f[\{x\}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f[\{x\}] = \{y\}$.

`2`: Aus $\rightarrow$) "$(x, y) \in f$"
folgt via **ElementAxiom**: (x, y) Menge.

`3`: Aus `2` "(x, y) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: y Menge.

`4`: Aus `3` "y Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap \{y\} = y$.

`5`: $$f(x) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap f[\{x\}] \stackrel{\text{1.d)}}{=} \bigcap \{y\} \stackrel{4}{=} y.$$

...

<u>Beweis **18-20**</u> ...

...

`6.a):` Aus `5` "$f(x) = \ldots = y$"
folgt: $y = f(x)$.

`7:` Aus `5` "$f(x) = \ldots = y$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, f(x)) = (x, y)$.

`8.b):` Aus `7`
folgt: $(x, y) = (x, f(x))$.

`8.c):` Aus `7` "$(x, f(x)) = (x, y)$" und
aus →) "$(x, y) \in f$"
folgt: $(x, f(x)) \in f$.

□

18-21. Mit dem folgenden Satz werden Aussagen über Elemente des Bildes und des Urbildes von Singeltons unter einer Funktion f getroffen:

18-21(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$y \in f[\{x\}]$" folgt "$y = f(x)$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$x \in f^{-1}[\{y\}]$" folgt "$f(x) = y$".*

Beweis **18-21** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (y \in f[\{x\}])$.

1: Aus VS gleich "$\ldots y \in f[\{x\}]$"
folgt via **9-15**: $(x, y) \in f$.

2: Aus VS gleich "f Funktion…" und
aus 1 "$(x, y) \in f$"
folgt via **18-20**: $y = f(x)$.

b) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in f^{-1}[\{y\}])$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \in f^{-1}[\{y\}]$"
folgt via **12-7**: $(x, y) \in f$.

2: Aus VS gleich "f Funktion …" und
aus 1 "$(x, y) \in f$"
folgt via **18-20**: $y = f(x)$.

3: Aus 2
folgt: $f(x) = y$.

□

18-22. Wenn f eine Funktion ist und wenn $x \in \mathsf{dom}\, f$ gilt, dann folgt $(x, f(x)) \in f$ - siehe `a)` - und $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$, siehe `b)`:

<u>18-22(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) $x \in \mathsf{dom}\, f$.

Dann folgt:

`a)` $(x, f(x)) \in f$.

`b)` $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

<u>Beweis **18-22**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (x, \Omega) \in f$.

`2.a):` Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus `1` "$\ldots (x, \Omega) \in f$"
folgt via **18-20**: $(x, f(x)) \in f$.

`3.b):` Aus `2.a)` "$(x, f(x)) \in f$"
folgt via **7-5**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

$\square$

18-23. Es wird eine hinreichende Bedingung dafür gegeben, dass eine Klasse E eine TeilKlasse des Bild-Bereichs einer Funktion ist:

18-23(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : \alpha = f(\Omega))$.

Dann folgt "$E \subseteq \mathsf{ran}\, f$".

Beweis **18-23**

`Thema1` $\beta \in E$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\beta \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\beta \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : \alpha = f(\Omega))$"
folgt: $\exists \Psi : \beta = f(\Psi)$.

`3:` Aus `2.2` "$\ldots \beta = f(\Psi)$" und
aus `2.1` "β Menge"
folgt: $f(\Psi)$ Menge.

`4:` Aus `3` "$f(\Psi)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\Psi \in \mathsf{dom}\, f$.

`5:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `4` "$\Psi \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(\Psi) \in \mathsf{ran}\, f$.

`6:` Aus `2.2` "$\ldots \beta = f(\Psi)$" und
aus `5` "$f(\Psi) \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $\beta \in \mathsf{ran}\, f$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{ran}\, f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

□

18-24. Falls $y \in \mathsf{ran}\, f$, so gibt es via **7-7** eine Menge $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$, so dass $(\Omega, y) \in f$. Darüber hinaus gehend folgt aus $y \in \mathsf{ran}\, f$ für *Funktionen* f die Gleichung $y = f(\Omega)$:

18-24(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $y \in \mathsf{ran}\, f$.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` $y = f(\Omega)$.

`e.2)` $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`e.3)` $(\Omega, y) \in f$.

Beweis **18-24**

1: Aus $\rightarrow$)"$y \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\Omega, y) \in f)$.

2: Aus $\rightarrow$)"f Funktion" und
aus 1"$\ldots (\Omega, y) \in f$"
folgt via **18-20**: $y = f(\Omega)$.

3: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$y = f(\Omega)$",
aus 1"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, y \ldots$" und
aus 1"$\ldots (\Omega, y) \in f$"
folgt: $\exists \Omega$:

$$y = f(\Omega)$$
$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, y$$
$$\wedge \quad (\Omega, y) \in f.$$

$\square$

18-25. Falls w Element einer Funktion f ist, dann gibt es $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$ mit $w = (\Omega, f(\Omega))$:

18-25(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $w \in f$.

Dann gibt es Ω, *so dass gilt:*

e.1) $w = (\Omega, f(\Omega))$.

e.2) $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

<u>Beweis **18-25**</u>

1: Aus →) “ f Funktion ”
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

2: Aus 1“ f Relation ” und
aus →) “ $w \in f$ ”
folgt via **10-2**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Psi \in \mathsf{ran}\, f) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

3: Aus →) “ $w \in f$ ” und
aus 2“ $\ldots w = (\Omega, \Psi)$ ”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in f$.

4: Aus →) “ f Funktion ” und
aus 3“ $(\Omega, \Psi) \in f$ ”
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

5: Aus 4“ $\Psi = f(\Omega)$ ”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, f(\Omega))$.

6: Aus 2“ $\ldots w = (\Omega, \Psi)$ ” und
aus 5“ $(\Omega, \Psi) = (\Omega, f(\Omega))$ ”
folgt: $w = (\Omega, f(\Omega))$.

7: Aus 2“ $\exists \Omega \ldots$ ” ,
aus 6“ $w = (\Omega, f(\Omega))$ ” und
aus 2“ $\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ”
folgt: $\exists \Omega$:

$$w = (\Omega, f(\Omega))$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, f.$$

$\square$

18-26. Im nun vielleicht wichtigsten Satz über Funktionen wird in a) gesagt, dass der Bild-Bereich einer Funktion f genau aus den Mengen $f(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathsf{dom}\, f$ besteht. Gemäß b) ist jede Funktion f gleich der Klasse der geordneten Paare $(\lambda, f(\lambda))$ mit $\lambda \in \mathsf{dom}\, f$. Hieraus folgt unter Einsatz von **18-17**, dass die Relation invers zu einer Funktion f gleich $\{(f(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ ist. In **18-54** wird b) verschärft:

18-26(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *f Funktion.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{ran}\, f = \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

b) $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

c) $f^{-1} = \{(f(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

18-1(Def) $\{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ *und* $\{(f(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

<u>Beweis</u> **<u>18-26</u>** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, f$.

`2:` Aus →) " f Funktion " und
aus `Thema1.1` " $\alpha \in \mathsf{ran}\, f$ "
folgt via **18-24**: $\exists \Omega : (\alpha = f(\Omega)) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus 2 " $\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$ "
folgt via **18-3**: $f(\Omega) \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`4:` Aus 2 " $\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$ " und
aus 3 " $f(\Omega) \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ "
folgt: $\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` " $\mathsf{ran}\, f \subseteq \{f(x) : x \in \mathsf{dom}\, f\}$ "

`Thema1.2` $\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`2:` Aus `Thema1.2` " $\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ "
folgt via **18-2**: $\exists \Omega : (\alpha = f(\Omega)) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus →) " f Funktion " und
aus 2 " $\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$ "
folgt via **18-22**: $f(\Omega) \in \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus 2 " $\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$ " und
aus 3 " $f(\Omega) \in \mathsf{ran}\, f$ "
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\, f$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` " $\{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\} \subseteq \mathsf{ran}\, f$ "

`1.3:` Aus `A1` gleich " $\mathsf{ran}\, f \subseteq \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ " und
aus `A2` gleich " $\{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\} \subseteq \mathsf{ran}\, f$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\, f = \{f(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

<u>Beweis **18-26**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in f$.

`2`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in f$"
folgt via **18-25**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, f(\Omega))) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3`: Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-10**: $(\Omega, f(\Omega)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`4`: Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, f(\Omega)) \ldots$" und
aus `3`"$(\Omega, f(\Omega)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} f \subseteq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\} \text{”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`2`: Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt via **18-8**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, f(\Omega))) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\Omega, f(\Omega)) \in f$.

`4`: Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, f(\Omega)) \ldots$" und
aus `3`"$(\Omega, f(\Omega)) \in f$"
folgt: $\alpha \in f$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}) \Rightarrow (\alpha \in f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\} \subseteq f \text{”}}$

`1.3`: Aus `A1` gleich "$f \subseteq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\} \subseteq f$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

<u>Beweis</u> **18-26** `c)`

`1:` Aus $\rightarrow)$ "f Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`2:` $$f^{-1} \stackrel{1}{=} \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}^{-1} \stackrel{\mathbf{18-17}}{=} \{(f(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $f^{-1} = \{(f(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

□

18-27. Es folgen drei hinreichende Bedingungen dafür, dass für eine Funktion f der Wert von f in x im Bild von E unter f ist:

18-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$)

"$x \in E$" *und* "$f(x)$ *Menge*".

oder

$x \in E \cap \mathsf{dom}\, f$.

oder

"$x \in E$" *und* "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$".

Dann folgt "$f(x) \in f[E]$".

Beweis **18-27**

`1.1`: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$(x \in E) \wedge (f(x) \text{ Menge} \\ \vee \\ x \in E \cap \mathsf{dom}\, f \\ \vee \\ (x \in E) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f).$$

...

Beweis **18-27** ...

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $(x \in E) \wedge (f(x)$ Menge$)$.

2: Aus `1.1.1.Fall`"... $f(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus `1.1.1.Fall`"$x \in E$ ..." und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $(x \in E) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1.2.Fall` $x \in E \cap \mathsf{dom}\, f$.

Aus `1.1.2.Fall`"$x \in E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $(x \in E) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1.3.Fall` $(x \in E) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

2: Aus `1.1.3.Fall`"$x \in E$ ..." und
aus `1.1.3.Fall`"... $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus `1.1.3.Fall`"$x \in E$ ..." und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $(x \in E) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

A1	"$(x \in E) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$"

1.2: Aus →) "f Funktion" und
aus A1 gleich "... $x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

2: Aus 1.2"$(x, f(x)) \in f$" und
aus A1 gleich "$x \in E$ ..." und
folgt via **8-8**: $f(x) \in f[E]$.

□

18-28. Aus “$q \in f[E]$” folgt via **8-7**, dass es $\Omega \in E$ gibt, so dass $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$ und $(\Omega, q) \in f[E]$. Falls f zusätzlich eine Funktion ist, dann kommt der folgende Satz zur Anwendung und es gilt zusätzlich $q = f(\Omega)$:

18-28(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $q \in f[E]$.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` $q = f(\Omega)$.

`e.2)` $\Omega \in E$.

`e.3)` $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`e.4)` $(\Omega, q) \in f$.

<u>Beweis **18-28**</u>

1.1: Aus →) “$q \in f[E]$”
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

1.2: Aus →) “$q \in f[E]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\Omega, q) \in f)$.

2: Aus →) “f Funktion” und
aus 1.2 “$\ldots (\Omega, q) \in f$”
folgt via **18-20**: $q = f(\Omega)$.

3: Aus 1.2 “$\exists \Omega \ldots$”,
aus 2 “$q = f(\Omega)$”,
aus 1.2 “$\ldots \Omega \in E \ldots$”,
aus 1.2 “$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$” und
aus 1.2 “$\ldots (\Omega, q) \in f$”
folgt: $\exists \Omega$:

$$q = f(\Omega)$$

$$\wedge \quad \Omega \in E$$

$$\wedge \quad \Omega \in \mathsf{dom}\, f$$

$$\wedge \quad (\Omega, q) \in f.$$

□

18-29. Im folgenden Satz ist für Funktionen f ein Kriterium sowohl für $f(x) \in E$ *als auch* für $x \in f^{-1}[E]$ zu finden. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `i)`:

18-29(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äqvivalent:*

`i)` $f(x) \in E$.

`ii)` $x \in f^{-1}[E]$.

`iii)` "$f(x) \in E$" *und* "$x \in \mathsf{dom}\, f$".

`iv)` $x \in f^{-1}[E] \cap \mathsf{dom}\, f$.

<u>Beweis **18-29**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $f(x) \in E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f(x) \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $f(x)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$f(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "$f(x) \in E$" und
aus `2`
folgt: $(f(x) \in E) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(f(x) \in E) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus →)"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`2:` Aus `1`"$(x, f(x)) \in f$" und
aus `VS` gleich "$f(x) \in E \ldots$"
folgt via **11-22**: $x \in f^{-1}[E]$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $(x \in f^{-1}[E]) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \in f^{-1}[E]) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, f)$.

Aus `VS`
folgt: $x \in f^{-1}[E]$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in f^{-1}[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in f^{-1}[E]$"
folgt via **11-21**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((x, \Omega) \in f)$.

`2:` Aus →)"f Funktion" und
aus `1`"$\ldots (x, \Omega) \in f$"
folgt via **18-20**: $\Omega = f(x)$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `2`"$\Omega = f(x)$"
folgt: $f(x) \in E$.

□

18-30. Mit **18-1** und mit der folgenden Definition wird **18-31** vorbereitet. In **18-31** werden Bilder und Urbilder von Klassen unter Funktionen untersucht:

18-30(Definition)

$$\mathsf{18.6}(x, E) = \{\omega : x(\omega) \in E\}.$$

18-31. Bilder und Urbilder von Klassen unter einer Funktion können auf besonders einfache und einprägsame Art dargestellt werden. Dies geschieht im folgenden Satz:

18-31(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

Dann folgt:

a) $f[E] = \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$.

b) $f^{-1}[E] = \{\omega : f(\omega) \in E\}$.

18-1(Def) $\{f(\lambda) : \lambda \in E\}$.

18-30(Def) $\{\omega : f(\omega) \in E\}$.

Beweis **18-31** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in f[E]$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `Thema1.1` "$\alpha \in f[E]$"
folgt via **18-28**:

$$\exists \Omega : (\alpha = f(\Omega)) \wedge (\Omega \in E) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f).$$

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `3` "$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-3**: $f(\Omega) \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$" und
aus `4` "$f(\Omega) \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt: $\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f[E]) \Rightarrow (\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$f[E] \subseteq \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$"

<u>Beweis</u> **18-31** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-2**: $\exists \Omega : (\alpha = f(\Omega)) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus →) "f Funktion" und
aus 2"$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(\Omega) \in f[E]$.

`4:` Aus 2"$\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$" und
aus 3"$f(\Omega) \in f[E]$"
folgt: $\alpha \in f[E]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{f(\lambda) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in f[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{f(\lambda) : \lambda \in E\} \subseteq f[E]$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$f[E] \subseteq \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$" und
aus `A2` gleich "$\{f(\lambda) : \lambda \in E\} \subseteq f[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f[E] = \{f(\lambda) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **18-31** `b)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in f^{-1}[E]$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in f^{-1}[E]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus →)“f Funktion” und
aus `Thema1.1`“$\alpha \in f^{-1}[E]$”
folgt via **18-29**: $f(\alpha) \in E$.

`3:` Aus `2.2`“$f(\alpha) \in E$” und
aus `2.1`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : f(\omega) \in E\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[E]) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : f(\omega) \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$f^{-1}[E] \subseteq \{\omega : f(\omega) \in E\}$”

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : f(\omega) \in E)\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : f(\omega) \in E\}$”
folgt: $f(\alpha) \in E$.

`3:` Aus →)“f Funktion” und
aus `2`“$f(\alpha) \in E$”
folgt via **18-29**: $\alpha \in f^{-1}[E]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : f(\omega) \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in f^{-1}[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\{\omega : f(\omega) \in E\} \subseteq f^{-1}[E]$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$f^{-1}[E] \subseteq \{\omega : f(\omega) \in E\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega : f(\omega) \in E\} \subseteq f^{-1}[E])$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f^{-1}[E] = \{\omega : f(\omega) \in E\}$.

□

18-32. Mit dem folgenden Satz wird eine hinreichende Bedingung dafür gegeben, dass das Bild einer Klasse unter einer Funktion eine TeilKlasse einer weiteren Klasse ist:

18-32(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

Dann folgt "$f[E] \subseteq C$".

Beweis **18-32**

`Thema1` $\alpha \in f[E]$.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1` "$\alpha \in f[E]$"
folgt via **18-28**: $\exists\Omega : (\alpha = f(\Omega)) \wedge (\Omega \in E)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E$" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$"
folgt: $f(\Omega) \in C$.

4: Aus 2 "$\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$" und
aus 3 "$f(\Omega) \in C$"
folgt: $\alpha \in C$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in f[E]) \Rightarrow (\alpha \in C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $f[E] \subseteq C$.

□

18-33. Mit dem folgenden Satz wird **13-1**a) auf Funktionen spezialisiert und dabei stellt sich heraus, dass aus einer "TeilKlassen-Aussage" von **13-1**a) für Funktionen eine Gleichung wird. Aussage b) ist im Hinblick auf **18-19** und **13-5** nicht überraschend:

18-33(Satz)

a) *Aus "f Funktion" folgt "$f[f^{-1}[E]] = E \cap \mathsf{ran}\, f$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{ran}\, f$" folgt "$f[f^{-1}[E]] = E$".*

Beweis **18-33** `a)` `VS` gleich f Funktion.

> $\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in f[f^{-1}[E]]$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
> aus `Thema1.1`"$\alpha \in f[f^{-1}[E]]$"
> folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\alpha = f(\Omega)) \wedge (\Omega \in f^{-1}[E])$.
>
> `3:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
> aus `2`"$\ldots \Omega \in f^{-1}[E]$"
> folgt via **18-29**: $f(\Omega) \in E$.
>
> `4:` Aus `2`"$\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$" und
> aus `3`"$f(\Omega) \in E$"
> folgt: $\alpha \in E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f[f^{-1}[E]]) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}f[f^{-1}[E]] \subseteq E\text{”}}$

`1.2:` Via **8-10** gilt: $f[f^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

`2.1:` Aus `A1` gleich "$f[f^{-1}[E]] \subseteq E$" und
aus `1.2`"$f[f^{-1}[E]] \subseteq \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **2-12**: $f[f^{-1}[E]] \subseteq E \cap \mathsf{ran}\, f$.

`2.2:` Via **13-1** gilt: $E \cap \mathsf{ran}\, f \subseteq f[f^{-1}[E]]$.

`3:` Aus `2.1`"$f[f^{-1}[E]] \subseteq E \cap \mathsf{ran}\, f$" und
aus `2.2`"$E \cap \mathsf{ran}\, f \subseteq f[f^{-1}[E]]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f[f^{-1}[E]] = E \cap \mathsf{ran}\, f$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{ran}\, f)$.

`1.1:` Aus $\longrightarrow$)"f Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f[f^{-1}[E]] = E \cap \mathsf{ran}\, f$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{ran}\, f = E$.

`2:` Aus `1.1`"$f[f^{-1}][E] = E \cap \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1.2`"$E \cap \mathsf{ran}\, f = E$"
folgt: $f[f^{-1}[E]] = E$.

□

18-34. Sätze **18-19** und **9-21** können einfach zu Folgerungen aus "f Funktion" kombiniert werden:

18-34(Satz)

Aus "f Funktion" und ...

a) ... *und* "$E \cap e = 0$" *folgt* "$(f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e]) = 0$".

b) ... *und* "$0 \neq (f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e])$" *folgt* "$0 \neq E \cap e$".

c) ... *und* "$q \neq w$" *folgt* "$(f^{-1}[\{q\}]) \cap (f^{-1}[\{w\}]) = 0$".

d) ... *und* "$0 \neq (f^{-1}[\{q\}]) \cap (f^{-1}[\{w\}])$" *folgt* "$q = w$".

Beweis **18-34** `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \cap e = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

`2:` Aus `1`"f^{-1} injektiv" und
aus `VS` gleich "… $E \cap e = 0$"
folgt via **9-21**: $(f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e]) = 0$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (0 \neq (f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e]))$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

`2:` Aus `1`"f^{-1} injektiv" und
aus `VS` gleich "… $0 \neq (f^{-1}[E]) \cap (f^{-1}[e])$"
folgt via **9-21**: $0 \neq E \cap e$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \neq w)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

`2:` Aus `1`"f^{-1} injektiv" und
aus `VS` gleich "… $q \neq w$"
folgt via **9-21**: $(f^{-1}[\{q\}]) \cap (f^{-1}[\{w\}]) = 0$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (0 \neq (f^{-1}[\{q\}]) \cap (f^{-1}[\{w\}]))$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

`2:` Aus `1`"f^{-1} injektiv" und
aus `VS` gleich "… $0 \neq (f^{-1}[\{q\}]) \cap (f^{-1}[\{w\}])$"
folgt via **9-21**: $q = w$.

□

18-35. In Umkehrung von **18-34** via **18-19** und **9-22** ergeben sich hinreichende Bedingungen für “ f Funktion” :

18-35(Satz)

a) *Aus “r Relation” und*
“$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0)$”

folgt “r Funktion”.

b) *Aus “r Relation” und*
“$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}])))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$”

folgt “r Funktion”.

Beweis **18-35** a)
VS gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0))$.

1: Aus VS gleich “$\ldots \forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow ((r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]) = 0)$”
folgt via **9-22**: r^{-1} injektiv.

2: Aus VS gleich “r Relation …” und
aus 1“r^{-1} injektiv”
folgt via **18-19**: r Funktion.

b)
VS gleich $(r \text{ Relation})$
$\wedge(\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}])))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$.

1: Aus VS gleich
“$\ldots \forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, r) \wedge (0 \neq (r^{-1}[\{\alpha\}]) \cap (r^{-1}[\{\beta\}]))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$”
folgt via **9-22**: r^{-1} injektiv.

2: Aus VS gleich “r Relation …” und
aus 1“r^{-1} injektiv”
folgt via **18-19**: r Funktion.

□

18-36. Jede TeilKlasse einer Funktion ist eine Funktion:

18-36(Satz)

Aus "f Funktion" und "$g \subseteq f$" folgt "g Funktion".

Beweis **18-36** `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (g \subseteq f)$.

`1`: Aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2`: Aus `1`"f Relation"
und aus `VS` gleich "$\ldots g \subseteq f$"
folgt via **10-6**: g Relation.

`Thema3.1` $((\alpha, \beta) \in g) \wedge ((\alpha, \gamma) \in g)$.

`4.1`: Aus `Thema3.1`"$(\alpha, \beta) \ldots \in g$" und
aus `VS` gleich "$\ldots g \subseteq f$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, \beta) \in f$.

`4.2`: Aus `Thema3.1`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in g$" und
aus `VS` gleich "$\ldots g \subseteq f$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, \gamma) \in f$.

`5`: Aus `VS` gleich "f Funktion...",
aus `4.1`"$(\alpha, \beta) \in f$" und
aus `4.2`"$(\alpha, \gamma) \in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in g) \wedge ((\alpha, \gamma) \in g)) \Rightarrow (\beta = \gamma))$"

`3.2`: Aus `2`"g Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in g) \wedge ((\alpha, \gamma) \in g)) \Rightarrow (\beta = \gamma))$"
folgt via **18-18(Def)**: g Funktion.

$\square$

18-37. Da via **18-36** jede TeilKlasse einer Funktion eine Funktion ist und da $f \cap g \subseteq f$ und $f \setminus g \subseteq f$ gilt, ist das folgende Resultat nicht überraschend:

18-37(Satz)

a) *Aus "f Funktion" folgt "$f \cap g$ Funktion" und "$g \cap f$ Funktion".*

b) *Aus "f Funktion" folgt "$f \setminus g$ Funktion".*

Beweis **18-37** a) VS gleich f Funktion.

1.1: Via **2-7** gilt: $f \cap g \subseteq f$.

1.2: Via **2-7** gilt: $g \cap f \subseteq f$.

2.1: Aus VS gleich "f Funktion" und
aus 1.1 "$f \cap g \subseteq f$"
folgt via **18-36**: $f \cap g$ Funktion.

2.2: Aus VS gleich "f Funktion" und
aus 1.2 "$g \cap f \subseteq f$"
folgt via **18-36**: $g \cap f$ Funktion.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(f \cap g \text{ Funktion}) \wedge (g \cap f \text{ Funktion})$.

b) VS gleich f Funktion.

1: Via **5-5** gilt: $f \setminus g \subseteq f$.

2: Aus VS gleich "f Funktion" und
aus 1 "$f \setminus g \subseteq f$"
folgt via **18-36**: $f \setminus g$ Funktion.

□

18-38. Da der Durschnitt einer nicht leeren Klasse TeilKlasse jedes Elements dieser Klasse ist und da jede TeilKlasse einer Funktion eine Funktion ist, ist der Durchschnitt einer Klasse, die mindestens eine Funktion als Element hat, eine Funktion:

18-38(Satz)

Aus "f Funktion" und "$f \in X$" folgt "$\bigcap X$ Funktion".

Beweis **18-38** `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \in X)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f \in X$"
folgt via **1-15**: $\bigcap X \subseteq f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `1`"$\bigcap X \subseteq f$"
folgt via **18-36**: X Funktion.

□

18-39. Mit dem folgenden Satz wird sicher gestellt, dass die Vereinigung einer Klasse von Funktionen eine Klasse ist, wenn durch die Vereinigung bezüglich des Werts der Vereinigung keine Mehrdeutigen generiert werden:

18-39(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in F) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in F) \wedge (\beta \in F) \wedge (\gamma \in (\mathsf{dom}\,\alpha) \cap (\mathsf{dom}\,\beta)))$
$\Rightarrow (\alpha(\gamma) = \beta(\gamma))$.

Dann folgt "$\bigcup F$ Funktion".

Beweis **18-39**

`Thema1.1` $\delta \in F$.

2: Aus `Thema1.1` "$\delta \in F$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in F) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$"
folgt: δ Funktion.

3: Aus 2 "δ Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: δ Relation.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\delta : (\delta \in F) \Rightarrow (\delta$ Relation$)$.

Konsequenz via **10-9**: `A1` "$\bigcup F$ Relation"

Beweis **18-39** . . .

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $((\epsilon, \zeta) \in \bigcup F) \wedge ((\epsilon, \eta) \in \bigcup F)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\epsilon, \zeta) \in \bigcup F \ldots$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : ((\epsilon, \zeta) \in \Omega) \wedge (\Omega \in F)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\epsilon, \eta) \in \bigcup F$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : ((\epsilon, \eta) \in \Psi) \wedge (\Psi \in F)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega \in F$" und
aus →)"$\forall \alpha : (\alpha \in F) \Rightarrow (\alpha$ Funktion)"
folgt: Ω Funktion.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \Psi \in F$" und
aus →)"$\forall \alpha : (\alpha \in F) \Rightarrow (\alpha$ Funktion)"
folgt: Ψ Funktion.

`3.3:` Aus `2.1`"$\ldots (\epsilon, \zeta) \in \Omega \ldots$"
folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, \Omega$.

`3.4:` Aus `2.2`"$\ldots (\epsilon, \eta) \in \Psi \ldots$"
folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, \Psi$.

`4:` Aus `3.3`"$\epsilon \in \mathsf{dom}\, \Omega$" und
aus `3.4`"$\epsilon \in \mathsf{dom}\, \Psi$"
folgt via **2-2**: $\epsilon \in (\mathsf{dom}\, \Omega) \cap (\mathsf{dom}\, \Psi)$.

`5:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega \in F$",
aus `2.2`"$\ldots \Psi \in F$" und
aus `4`"$\epsilon \in (\mathsf{dom}\, \Omega) \cap (\mathsf{dom}\, \Psi)$" folgt:
$$(\Omega \in F) \wedge (\Psi \in F) \wedge (\epsilon \in (\mathsf{dom}\, \Omega) \cap (\mathsf{dom}\, \Psi)).$$

`6:` Aus `5`"$(\Omega \in F) \wedge (\Psi \in F) \wedge (\epsilon \in (\mathsf{dom}\, \Omega) \cap (\mathsf{dom}\, \Psi))$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in F) \wedge (\beta \in F)$
$\wedge (\gamma \in (\mathsf{dom}\, \alpha) \cap (\mathsf{dom}\, \beta))$
$\Rightarrow (\alpha(\gamma) = \beta(\gamma)))$"
folgt: $\Omega(\epsilon) = \Psi(\epsilon)$.

. . .

. . .

Beweis **18-39** . . .

`Thema1.2` $(\epsilon, \zeta), (\epsilon, \eta) \in \bigcup F$.

. . .

`7.1`: Aus `3.1` "Ω Funktion" und
aus `2.1` "$\ldots (\epsilon, \zeta) \in \Omega \ldots$"
folgt via **18-20**: $\zeta = \Omega(\epsilon)$.

`7.2`: Aus `3.2` "Ψ Funktion" und
aus `2.2` "$\ldots (\epsilon, \eta) \in \Psi \ldots$"
folgt via **18-20**: $\eta = \Psi(\epsilon)$.

`8`: $\zeta \overset{7.1}{=} \Omega(\epsilon) \overset{6}{=} \Psi(\epsilon) \overset{7.2}{=} \eta$.

`9`: Aus `8`
folgt: $\zeta = \eta$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \epsilon, \zeta, \eta : (((\epsilon, \zeta) \in \bigcup F) \wedge ((\epsilon, \eta) \in \bigcup F)) \Rightarrow (\zeta = \eta))$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "$\bigcup F$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \epsilon, \zeta, \eta : (((\epsilon, \zeta) \in \bigcup F) \wedge ((\epsilon, \eta) \in \bigcup F)) \Rightarrow (\zeta = \eta))$"
folgt via **18-18(Def)**: $\bigcup F$ Funktion.

□

18-40. Als Spezialfall von **18-39** wird hier fest gestellt, dass die Vereinigung einer Klasse von Funktionen eine Funktion ist, wenn alle Elemente dieser Klassen paarweise disjunkte Definitions-Bereiche haben:

18-40(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in F) \Rightarrow (\alpha \textit{ Funktion})$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in F) \wedge (\beta \in F) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\, \alpha) \cap (\mathsf{dom}\, \beta) = 0)$.

Dann folgt "$\bigcup F$ Funktion".

Beweis **18-40**

`Thema1.1` $(\delta \in F) \wedge (\epsilon \in F) \wedge (\zeta \in (\mathsf{dom}\,\delta) \cap (\mathsf{dom}\,\epsilon))$.

2: Es gilt: $(\delta = \epsilon) \vee (\delta \neq \epsilon)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\delta = \epsilon$.

Aus `2.1.Fall` "$\delta = \epsilon$"
folgt: $\delta(\zeta) = \epsilon(\zeta)$.

`2.2.Fall` $\delta \neq \epsilon$.

3: Aus `Thema1.1` "$\delta \in F \ldots$",
aus `Thema1.1` "$\ldots \epsilon \in F \ldots$" und
aus `2.2.Fall` "$\delta \neq \epsilon$"
folgt: $(\delta \in F) \wedge (\epsilon \in F) \wedge (\delta \neq \epsilon)$.

4: Aus 3 "$(\delta \in F) \wedge (\epsilon \in F) \wedge (\delta \neq \epsilon)$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in F) \wedge (\beta \in F) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha) \cap (\mathsf{dom}\,\beta) = 0)$"
folgt: $(\mathsf{dom}\,\delta) \cap (\mathsf{dom}\,\epsilon) = 0$.

5: Aus `Thema1.1` "$\ldots \zeta \in (\mathsf{dom}\,\delta) \cap (\mathsf{dom}\,\epsilon)$" und
aus 4 "$(\mathsf{dom}\,\delta) \cap (\mathsf{dom}\,\epsilon) = 0$"
folgt: $\zeta \in 0$.

6: Es gilt 5 "$\zeta \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\zeta \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\delta(\zeta) = \epsilon(\zeta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\delta(\zeta) = \epsilon(\zeta)$.

Ergo `Thema1.1`:

A1	"$\forall \delta, \epsilon, \zeta : ((\delta \in F) \wedge (\epsilon \in F) \wedge (\zeta \in (\mathsf{dom}\,\delta) \cap (\mathsf{dom}\,\epsilon))) \Rightarrow (\delta(\zeta) = \epsilon(\zeta))$"

1.2: Aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in F) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$" und
aus A1 gleich "$\forall \delta, \epsilon, \zeta : ((\delta \in F) \wedge (\epsilon \in F) \wedge (\zeta \in (\mathsf{dom}\,\delta) \cap (\mathsf{dom}\,\epsilon))) \Rightarrow (\delta(\zeta) = \epsilon(\zeta))$"
folgt via **18-39**: $\bigcup F$ Funktion.

□

18-41. Im folgenden Satz wird sicher gestellt, dass die binäre Vereinigung zweier Funktionen eine Funktion ist, wenn diese beiden Funktionen in Elementen des binären Durchschnitts der Definitions-Bereiche gleiche Werte annehmen. **18-41** ist *kein* Spezialfall von **18-39**, da die hier beteiligten Funktionen auch Unmengen sein können, während die in **18-39** auftretenden Funktionen aus F stets *Mengen* sind:

18-41(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ g *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$.

Dann folgt "$f \cup g$ Funktion".

<u>Beweis **18-41**</u>

`1.1:` Aus →) "f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`1.2:` Aus →) "g Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: g Relation.

`2:` Aus `1.1` "f Relation" und
aus `1.2` "g Relation"
folgt via **10-8**: `A1` | "$f \cup g$ Relation"

`Thema1.3` $((\beta, \gamma) \in f \cup g) \wedge ((\beta, \delta) \in f \cup g)$.

`2.1:` Aus `Thema1.3` "$(\beta, \gamma) \in f \cup g \ldots$"
folgt via **2-2**: $((\beta, \gamma) \in f) \vee ((\beta, \gamma) \in g)$.

`2.2:` Aus `Thema1.3` "$\ldots (\beta, \delta) \in f \cup g$"
folgt via **2-2**: $((\beta, \delta) \in f) \vee ((\beta, \delta) \in g)$.

`3:` Aus `2.1` "$((\beta, \gamma) \in f) \vee ((\beta, \gamma) \in g)$" und
aus `2.2` "$((\beta, \delta) \in f) \vee ((\beta, \delta) \in g)$"
folgt:

$$((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in f)$$
$$\vee$$
$$((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)$$
$$\vee$$
$$((\beta, \gamma) \in g) \wedge ((\beta, \delta) \in f)$$
$$\vee$$
$$((\beta, \gamma) \in g) \wedge ((\beta, \delta) \in g).$$

...

...

Beweis **18-41** ...

`Thema1.3` $((\beta,\gamma)\in f\cup g)\wedge((\beta,\delta)\in f\cup g)$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $((\beta,\gamma)\in f)\wedge((\beta,\delta)\in f)$.

Aus →) “ f Funktion ” ,
aus `3.1.Fall` “$(\beta,\gamma)\in f\ldots$” und
aus `3.1.Fall` “$\ldots(\beta,\delta)\in f$”
folgt via **18-18(Def)**: $\gamma=\delta$.

...

...

Beweis **18-41** ...

`Thema1.3` $((\beta, \gamma) \in f \cup g) \wedge ((\beta, \delta) \in f \cup g)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$(\beta, \gamma) \in f \ldots$"
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `3.2.Fall`"$(\beta, \gamma) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`4.3:` Aus `3.2.Fall`"$\ldots (\beta, \delta) \in g$"
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

`4.4:` Aus →) "g Funktion" und
aus `3.2.Fall`"$\ldots (\beta, \delta) \in g$"
folgt via **18-20**: $\delta = g(\beta)$.

`5:` Aus `4.1`"$\beta \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `4.3`"$\beta \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **2-2**: $\beta \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`6:` Aus `5`"$\beta \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$" und
aus →)"$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g))$
$\Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
folgt: $f(\beta) = g(\beta)$.

`7:` Aus `4.2`"$\gamma = f(\beta)$",
aus `4.4`"$\delta = g(\beta)$" und
aus `6`"$f(\beta) = g(\beta)$"
folgt: $\gamma = \delta$.

...

...

Beweis **18-41** ...

`Thema1.3` $((\beta,\gamma) \in f \cup g) \wedge ((\beta,\delta) \in f \cup g)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $((\beta,\gamma) \in g) \wedge ((\beta,\delta) \in f)$.

`4.1:` Aus `3.3.Fall`“$(\beta,\gamma) \in g \dots$”
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

`4.2:` Aus →)“g Funktion” und
aus `3.3.Fall`“$(\beta,\gamma) \in g \dots$”
folgt via **18-20**: $\gamma = g(\beta)$.

`4.3:` Aus `3.3.Fall`“$\dots (\beta,\delta) \in f$”
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.4:` Aus →)“f Funktion” und
aus `3.3.Fall`“$\dots (\beta,\delta) \in f$”
folgt via **18-20**: $\delta = f(\beta)$.

`5:` Aus `4.3`“$\beta \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus `4.1`“$\beta \in \mathsf{dom}\, g$”
folgt via **2-2**: $\beta \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`6:` Aus `5`“$\beta \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$” und
aus →)“$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g))$
$\Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$”
folgt: $f(\beta) = g(\beta)$.

`7:` Aus `4.4`“$\delta = f(\beta)$”,
aus `4.2`“$\gamma = g(\beta)$” und
aus `6`“$f(\beta) = g(\beta)$”
folgt: $\delta = \gamma$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\gamma = \delta$.

...

...

Beweis **18-41** . . .

`Thema1.3` $((\beta,\gamma)\in f\cup g)\wedge((\beta,\delta)\in f\cup g)$.

. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`3.4.Fall` $((\beta,\gamma)\in g)\wedge((\beta,\delta)\in g)$.

Aus →) "g Funktion",
aus `3.4.Fall` "$(\beta,\gamma)\in g\ldots$" und
aus `3.4.Fall` "$\ldots(\beta,\delta)\in g$"
folgt via **18-18(Def)**: $\gamma=\delta$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\gamma=\delta$.

Ergo `Thema1.3`:

`A2`	"$\forall\beta,\gamma,\delta:(((\beta,\gamma)\in f\cup g)\wedge((\beta,\delta)\in f\cup g))\Rightarrow(\gamma=\delta)$"

`1.4`: Aus `A1` gleich "$f\cup g$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall\beta,\gamma,\delta:(((\beta,\gamma)\in f\cup g)\wedge((\beta,\delta)\in f\cup g))\Rightarrow(\gamma=\delta)$"
folgt via **18-18(Def)**: $f\cup g$ Funktion.

□

18-42. Im folgenden Satz wird **18-41** auf den Fall zweier Funktionen f, g, deren Definitions-Bereiche leeren binären Durchschnitt haben, spezialisiert. Anders als beim korrespondierenden Resultat **18-40** für den Durchschnitt einer Klasse von Funktionen wird hier nicht die Ungleichheit der involvierten Funktionen gefordert. Falls in **18-42** dennoch $f = g$ gilt, dann liefert die dritte Voraussetzung $\mathsf{dom}\, f = 0$, so dass nur mehr der triviale Fall $f = 0$ - es ist leicht zu sehen, dass die einzige Funktion mit leerem Definitions-Bereich die leere Menge ist - untersucht wird. Dieser Fall ist nicht weiter bemerkenswert, denn wenn $f = g$ gilt, dann ist wegen $f \cup g = f$ auch ohne Bezug auf **18-42** die Klasse $f \cup g$ eine Funktion:

18-42(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ g *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $(\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) = 0.$

Dann folgt "$f \cup g$ Funktion".

Beweis **18-42**

`Thema1.1` $\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g).$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$(\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) = 0$"
folgt: $\alpha \in 0.$

`3:` Es gilt 2 "$\alpha \in 0.$"
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $f(\alpha) = g(\alpha).$

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "g Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
folgt via **18-41**: $f \cup g$ Funktion.

□

18-43. Mit dem folgenden Satz wird Hinreichendes gesagt, damit eine Funktion eine TeilKlasse einer anderen Funktion ist. **18-41** hat auch vorbereitenden Charakter für **18-42**, wo im **ISF: IdentitätsSatz Funktionen** Bedingungen formuliert werden, die zur Gleichheit zweier Funktionen führen:

18-43(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) g *Funktion.*

→) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$.

Dann folgt "$f \subseteq g$".

<u>Beweis **18-43**</u>

`Thema1`		$\beta \in f$.
`2:`	Aus →) "f Funktion" und aus `Thema1` "$\beta \in f$" folgt via **18-25**:	$\exists \Omega : (\beta = (\Omega, f(\Omega))) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.
`3.1:`	Aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$" folgt via **17-5**:	$f(\Omega)$ Menge.
`3.2:`	Aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$" und aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$" folgt:	$f(\Omega) = g(\Omega)$.
`4:`	Aus `3.2` "$f(\Omega) = g(\Omega)$" folgt via **PaarAxiom I**:	$(\Omega, f(\Omega)) = (\Omega, g(\Omega))$.
`5.1:`	Aus `3.2` "$f(\Omega) = g(\Omega)$" und aus `3.1` "$f(\Omega)$ Menge" folgt:	$g(\Omega)$ Menge.
`5.2:`	Aus `2` "$\ldots \beta = (\Omega, f(\Omega)) \ldots$" und aus `4` "$(\Omega, f(\Omega)) = (\Omega, g(\Omega))$" folgt:	$\beta = (\Omega, g(\Omega))$.
`6:`	Aus `5.1` "$g(\Omega)$ Menge" folgt via **17-5**:	$\Omega \in \mathsf{dom}\, g$.
`7:`	Aus →) "g Funktion" und aus `6` "$\Omega \in \mathsf{dom}\, g$" folgt via **18-22**:	$(\Omega, g(\Omega)) \in g$.
`8:`	Aus `5.2` "$\beta = (\Omega, g(\Omega))$" und aus `7` "$(\Omega, g(\Omega)) \in g$" folgt:	$\beta \in g$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in f) \Rightarrow (\beta \in g)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $f \subseteq g$.

□

18-44. Im **ISF: IdentitätsSatz Funktionen** werden hinreichende Bedingungen dafür formuliert, dass zwei *Funktionen* gleich sind. Dass die Voraussetzung "f, g Funktionen" *nicht verzichtbar* ist, stellt sich am Ende des Essays in **18-57** heraus:

18-44(Satz) (ISF: IdentitätsSatz Funktionen)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) g *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$.

oder

$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

Dann folgt "$f = g$".

<u>Beweis **18-44**</u>

`1.1:` Nach $\rightarrow$) gilt: $(\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f) \vee (\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha)))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$.

`Thema2` $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

`3:` Aus `Thema2`“$\beta \in \mathsf{dom}\, g$” und
aus `1.1.1.Fall`“$\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$”
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `3`“$\beta \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus $\rightarrow$)“$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$”
folgt: $f(\beta) = g(\beta)$.

`5:` Aus `4`
folgt: $g(\beta) = f(\beta)$.

Ergo `Thema2`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\beta) = f(\beta))$.

Konsequenz: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

`1.1.2.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$”

`1.2:` Aus $\rightarrow$)“f Funktion”,
aus $\rightarrow$)“g Funktion” und
aus $\rightarrow$)“$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$”
folgt via **18-43**: $f \subseteq g$.

`1.3:` Aus $\rightarrow$)“g Funktion”,
aus $\rightarrow$)“f Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$”
folgt via **18-43**: $g \subseteq f$.

`2:` Aus `1.2`“$f \subseteq g$” und
aus `1.3`“$g \subseteq f$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = g$.

□

18-45. Falls f eine Funktion ist und falls $f(x) \in \mathsf{dom}\, g$, dann ist x Element des Definitions-Bereichs von $g \circ f$ - unabhängig davon, ob g eine Relation oder eine Funktion ist oder nicht:

18-45(Satz)

Aus "f *Funktion*" *und* "$f(x) \in \mathsf{dom}\, g$" *folgt* "$x \in \mathsf{dom}\,(g \circ f)$".

Beweis **18-45** `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(x) \in \mathsf{dom}\, g)$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots f(x) \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **ElementAxiom**: $f(x)$ Menge.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots f(x) \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (f(x), \Omega) \in g$.

`2`: Aus `1.1`"$f(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3`: Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4`: Aus `3`"$(x, f(x)) \in f$" und
aus `1.2`"$\ldots (f(x), \Omega) \in g$"
folgt via **14-5**: $x \in \mathsf{dom}\,(g \circ f)$.

$\square$

18-46. Die Verknüpfung zweier Funktionen f, g ist eine Funktion und es gilt $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *für alle* x:

18-46(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) g *Funktion.*

Dann folgt:

`a)` $f \circ g$ *Funktion.*

`b)` $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Beweis **18-46** `a)`

`1.1:` Via **14-8** gilt: $f \circ g$ Relation.

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"f Funktion"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

`1.3:` Aus $\rightarrow$)"g Funktoin"
folgt via **18-19**: g^{-1} injektiv.

`1.4:` Via **14-8** gilt: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

`2:` Aus `1.3`"g^{-1} injektiv" und
aus `1.2`"f^{-1} injektiv"
folgt via **14-9**: $g^{-1} \circ f^{-1}$ injektiv.

`3:` Aus `1.4`"$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$" und
aus `2`"$g^{-1} \circ f^{-1}$ injektiv"
folgt: $(f \circ g)^{-1}$ injektiv.

`4:` Aus `1.1`"$f \circ g$ Relation" und
aus `3`"$(f \circ g)^{-1}$ injektiv"
folgt via **18-19**: $f \circ g$ Funktion.

Beweis **18-46** `b)`

`1.1:` Aus →) "f Funktion" und
aus →) "g Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f \circ g$ Funktion.

`1.2:` Es gilt $(x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \vee (x \notin \mathsf{dom}\,(f \circ g))$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$.

`2.1:` Aus `1.2.1.Fall`"$x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`2.2:` Aus `1.2.1.Fall`"$x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (x, \Omega) \in f \circ g$.

`3.1:` Aus `1.1`"$f \circ g$ Funktion" und
aus `2.2`"$\ldots (x, \Omega) \in f \circ g$"
folgt via **18-20**: $\Omega = (f \circ g)(x)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots (x, \Omega) \in f \circ g$"
folgt via **14-4**: $\exists \Psi : ((x, \Psi) \in g) \wedge ((\Psi, \Omega) \in f)$.

`4.1:` Aus →) "g Funktion" und
aus `3.2`"$\ldots (x, \Psi) \in g \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = g(x)$.

`4.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `3.2`"$\ldots (\Psi, \Omega) \in f$"
folgt via **18-20**: $\Omega = f(\Psi)$.

`5:` Aus `4.2`"$\Omega = f(\Psi)$" und
aus `4.1`"$\Psi = g(x)$"
folgt: $\Omega = f(g(x))$.

`6:` Aus `3.1`"$\Omega = (f \circ g)(x)$" und
aus `5`"$\Omega = f(g(x))$"
folgt: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

...

<u>Beweis</u> **18-46** `b)` ...

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.2.Fall}}$ $x \notin \mathsf{dom}\,(f \circ g)$.

`2:` Aus `1.2.2.Fall`"$x \notin \mathsf{dom}\,(f \circ g)$"
folgt via **17-4**: $(f \circ g)(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Es gilt $(g(x) \notin \mathsf{dom}\,f) \vee (g(x) \in \mathsf{dom}\,f)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $g(x) \notin \mathsf{dom}\,f$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$g(x) \notin \mathsf{dom}\,f$"
folgt via **17-4**: $f(g(x)) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `2`"$(f \circ g)(x) = \mathcal{U}$" und
aus `4`"$f(g(x)) = \mathcal{U}$"
folgt: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $g(x) \in \mathsf{dom}\,f$.

`4:` Aus →) "g Funktion" und
aus `3.2.Fall`"$g(x) \in \mathsf{dom}\,f$"
folgt via **18-43**: $x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$.

`5:` Es gilt `1.2.2.Fall`"$x \notin \mathsf{dom}\,(f \circ g)$".
Es gilt `4`"$x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$".
Ex falso quodlibet folgt: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

□

18-47. Gemäß `a)` ist jede Einschränkung einer Funktion eine Funktion. Die Einschränkung einer Funktion f auf E ist $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$:

18-47(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *g Einschränkung von f auf E.*

Dann folgt:

`a)` *g Funktion.*

`b)` $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Beweis **18-47** `a)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "g Einschränkung von f auf E"
folgt via **15-3**: $g \subseteq f$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `1` "$g \subseteq f$"
folgt via **18-36**: g Funktion.

Beweis **18-47** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in g$.

`2:` Aus →) “g Einschränkung von f auf E” und
aus `Thema1.1`“$\alpha \in g$”
folgt via **15-4**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f).$$

`3.1:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in f$”
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`3.2:` Aus →) “f Funktion” und
aus `1`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in f$”
folgt via **18-22**: $\Psi = f(\Omega)$.

`4.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus `3.1`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\Psi = f(\Omega)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, f(\Omega))$.

`5.1:` Aus `4.1`“$\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-7**: $(\Omega, f(\Omega)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \Omega \in E\}$.

`5.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$” und
aus `4.2`“$(\Omega, \Psi) = (\Omega, f(\Omega))$”
folgt: $\alpha = (\Omega, f(\Omega))$.

`6:` Aus `5.2`“$\alpha = (\Omega, f(\Omega))$” und
aus `5.1`“$(\Omega, f(\Omega)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$”
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in g) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$g \subseteq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$”

...

Beweis **18-47** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$"
folgt via **18-5**: $\exists\Omega : (\alpha = (\Omega, f(\Omega)) \wedge (\Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in E) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

`4:` Aus →) "f Funktion" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\Omega, f(\Omega)) \in f$.

`5:` Aus →) "g Einschränkung von f auf E",
aus `3`"$\Omega \in E \ldots$" und
aus `4`"$(\Omega, f(\Omega)) \in f$"
folgt via **15-5**: $(\Omega, f(\Omega)) \in g$.

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, f(\Omega)) \ldots$" und
aus `5`"$(\Omega, f(\Omega)) \in g$"
folgt: $\alpha \in g$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in g)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\} \subseteq g$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$g \subseteq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\} \subseteq g$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in E\}$.

□

18-48. Es werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, dass eine *Funktion* g die Einschränkung einer *Funktion* f auf E ist. Dass auf die Voraussetzung "g Funktion" nicht verzichtet werden kann, zeigt sich am Ende dieses Essays in **18-58**:

18-48(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) g *Funktion.*

→) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

→) $\mathsf{dom}\, g = E \cap \mathsf{dom}\, f$.

Dann folgt "g Einschränkung von f auf E".

Beweis **18-48**

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega$: Ω Einschränkung von f auf E.

`2.1:` Aus →) "f Funktion" und
aus `1.1` "… Ω Einschränkung von f auf E"
folgt via **18-47**: `A1` | "Ω Funktion"

`2.2:` Aus `1` "… Ω Einschränkung von f auf E"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, \Omega = E \cap \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2.2` "$\mathsf{dom}\, \Omega = E \cap \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, g = E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt: `A2` | "$\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\, g$"

<u>Beweis **18-48**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\, g.$

`2.1:` Aus `Thema1.3`"$\beta \in \mathsf{dom}\, g$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$"
folgt: $g(\beta) = f(\beta).$

`2.2:` Aus `Thema1.3`"$\beta \in \mathsf{dom}\, g$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, g = E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f.$

`3:` Aus `2.2`"$\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $\beta \in E.$

`4:` Aus →) "Ω Einschränkung von f auf E" und
aus `3`"$\beta \in E$"
folgt via **ES**: $\Omega(\beta) = f(\beta).$

`5:` Aus `2.1`"$g(\beta) = f(\beta)$" und
aus `4`"$\Omega(\beta) = f(\beta)$"
folgt: $g(\beta) = \Omega(\beta).$

Ergo `Thema1.3`: `A3` "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\beta) = \Omega(\beta))$"

`1.4:` Aus →) "g Funktion",
aus `A1` gleich "Ω Funktion",
aus `A3` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\beta) = \Omega(\beta))$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\, \Omega = \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **ISF**: $g = \Omega.$

`2:` Aus `1.4`"$g = \Omega$" und
aus `1.1`"...Ω Einschränkung von f auf E"
folgt: g Einschränkung von f auf $E.$

□

18-49. Falls f, g Funktionen sind und falls für alle $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$ die Gleichung $g(\alpha) = f(\alpha)$ gilt, dann ist g die Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$:

18-49(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) g *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

Dann folgt "g Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$*".*

Beweis **18-49**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **17-5**: $g(\beta)$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\, g$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$"
folgt: $g(\beta) = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.1` "$g(\beta)$ Menge" und
aus `2.2` "$g(\beta) = f(\beta)$"
folgt: $f(\beta)$ Menge.

`4:` Aus `3` "$f(\beta)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-10**: $(\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, f) = \mathsf{dom}\, g$.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\, g = (\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus →) "f Funktion",
aus →) "g Funktion",
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$" und
aus `2` "$\mathsf{dom}\, g = (\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, f)$"
folgt via **18-48**: g Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$.

□

18-50. Jede TeilKlasse g einer Funktion f Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$:

18-50(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ $g \subseteq f$.

Dann folgt "g *Einschränkung von* f *auf* $\mathsf{dom}\, g$.

Beweis **18-50**

1: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion" und
aus $\rightarrow)$ "$g \subseteq f$"
folgt via **18-36**: g Funktion.

Thema2.1 $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$.

3: Aus 1 "g Funktion" und
aus Thema2.1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **18-22**: $(\alpha, g(\alpha)) \in g$.

4: Aus 3 "$(\alpha, g(\alpha)) \in g$" und
aus $\rightarrow)$ "$g \subseteq f$"
folgt via **0-4**: $(\alpha, g(\alpha)) \in f$.

5: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion" und
aus 4 "$(\alpha, g(\alpha)) \in f$"
folgt via **18-20**: $g(\alpha) = f(\alpha)$.

Ergo Thema2.1: A1 | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$"

2.2: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus 1 "g Funktion" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$"
folgt via **18-49**: g Einschränkung von f auf $\mathsf{dom}\, g$.

□

18-51. Die leere Menge ist eine Funktion. Das Universum ist keine Funktion:

18-51(Satz)

a) 0 *Funktion.*

b) $\mathcal{U}$ *keine Funktion.*

<u>Beweis **18-51**</u> `a)`

`1.1:` Via **10-30** gilt: 0 Relation.

> `Thema1.2` $((\alpha, \beta) \in 0) \wedge ((\alpha, \gamma) \in 0)$.
>
> Es gilt `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \in 0 \ldots$".
> Via **0-19** gilt "$(\alpha, \beta) \notin 0$".
> Ex falso quodlibet folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in 0) \wedge ((\alpha, \gamma) \in 0)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"0 Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in 0) \wedge ((\alpha, \gamma) \in 0)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: 0 Funktion.

`b)`

`1:` Es gilt: $(\mathcal{U}$ Funktion$) \vee (\neg(\mathcal{U}$ Funktion$))$.

`Fallunterscheidung`

> `1.1.Fall` $\mathcal{U}$ Funktion.
>
> `2:` Aus `1.1.Fall`"$\mathcal{U}$ Funktion"
> folgt via **18-18(Def)**: $\mathcal{U}$ Relation.
>
> `3:` Via **10-30** gilt: $\mathcal{U}$ keine Relation.
>
> `4:` Aus `3`"$\mathcal{U}$ keine Relation"
> folgt via **10-1(Def)**: $\neg(\mathcal{U}$ Relation$)$.
>
> `5:` Es gilt `2`"$\mathcal{U}$ Relation".
> Es gilt `4`"$\neg(\mathcal{U}$ Relation$)$".
> Ex falso quodlibet folgt: $\neg(\mathcal{U}$ Funktion$)$.

> `1.2.Fall` $\neg(\mathcal{U}$ Funktion$)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(\mathcal{U}$ Funktion$)$.

Konsequenz via **18-18(Def)**: $\mathcal{U}$ keine Funktion.

$\square$

18-52. Die zugegebener Maßen etwas holprige Beweisführung von **18-51**`b)` legt es nahe, bei Beweisen, dass eine Klasse *keine* Funktion ist, das lästige Zurückgehen auf die Definitionen von "f keine Funktion" und "f keine Relation" auf "$\neg(f$ Funktion)" und "$\neg(f$ Relation)" ein für alle Mal durch einen Satz abzukürzen. Aus diesem Anspruch resultiert das folgende Kriterium:

18-52(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *f keine Funktion.*

`ii)` *"f keine Relation"*

oder "$\exists\Omega,\Psi,\Upsilon : ((\Omega,\Psi)\in f)\wedge((\Omega,\Upsilon)\in f)\wedge(\Psi\neq\Upsilon)$".

Beweis **18-52**

`1:` Via **18-18(Def)** gilt:

$$f \text{ Funktion} \Leftrightarrow f \text{ Relation} \wedge \forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta)\in f)\wedge((\alpha,\gamma)\in f)\Rightarrow(\beta=\gamma).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$\neg(f \text{ Funktion}) \Leftrightarrow \neg(f \text{ Relation}) \vee \neg(\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta)\in f)\wedge((\alpha,\gamma)\in f)\Rightarrow(\beta=\gamma)).$$

`3:` Aus `2` folgt via **18-18(Def)**:

$$f \text{ keine Funktion} \Leftrightarrow \neg(f \text{ Relation}) \vee \neg(\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta)\in f)\wedge((\alpha,\gamma)\in f)\Rightarrow(\beta=\gamma)).$$

...

<u>Beweis</u> **18-52** ...

4: Aus 3
folgt:

$$f \text{ keine Funktion}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg(f \text{ Relation})$$
$$\vee$$
$$\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta) \in f) \wedge ((\alpha, \gamma) \in f) \Rightarrow (\beta = \gamma)).$$

5: Aus 4
folgt via **10-1(Def)**:

$$f \text{ keine Funktion}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f \text{ keine Relation}$$
$$\vee$$
$$\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta) \in f) \wedge ((\alpha, \gamma) \in f) \Rightarrow (\beta = \gamma)).$$

6: Aus 5
folgt:

$$f \text{ keine Funktion}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f \text{ keine Relation}$$
$$\vee$$
$$\exists \Omega, \Psi, \Upsilon : ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Upsilon) \in f) \wedge (\Psi \neq \Upsilon).$$

$\square$

18-53. Der folgende Satz hat hohes Täuschungspotential. Legen doch die Schlussfolgerungen nahe, dass es sich bei der Klasse f um eine Funktion handelt. Dass dies nicht unbedingt der Fall sein muss, liegt einerseits daran, dass für $\lambda \in \mathsf{dom}\, f$ nicht unbedingt $(\lambda, f(\lambda)) \in f$ - oder auch: $f(\lambda) \in \mathsf{ran}\, f$ - gelten muss und andererseits daran, dass auch wenn $f(\lambda) \in \mathsf{ran}\, f$ gilt, es durchaus μ mit $\mu \neq f(\lambda)$ geben kann, so dass auch $(\lambda, \mu) \in f$ gilt, so dass auch in diesem Fall f keine Funktion ist. Ungeachtet dieser Betrachtungen wird in **18-57** demonstriert, dass die Funktion $\{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\mathcal{U}\}$ *trotz* **18-53** ungleich $\mathcal{U}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

<u>18-53(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Dann folgt:

a) g *Funktion.*

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

c) $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$.

18-4(Def) $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

<u>Beweis</u> **18-53** `a)`

`1.1:` Via **18-17** gilt: $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ Relation.

`2:` Aus →) "$g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$" und
aus `1.1` "$\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ Relation"
folgt: `A1` | "g Relation"

`Thema1.2` $((\alpha, \beta) \in g) \wedge ((\alpha, \gamma) \in g)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$(\alpha, \beta) \in g \ldots$" und
aus →) "$g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt: $(\alpha, \beta) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \in g$" und
aus →) "$g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt: $(\alpha, \gamma) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(\alpha, \beta) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt via **18-9**: $\beta = f(\alpha)$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(\alpha, \gamma) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt via **18-9**: $\gamma = f(\alpha)$.

`4:` Aus `3.1` "$\beta = f(\alpha)$" und
aus `3.2` "$\gamma = f(\alpha)$"
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta) \in g) \wedge ((\alpha, \gamma) \in g) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "g Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta) \in g) \wedge ((\alpha, \gamma) \in g) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: g Funktion.

<u>Beweis **18-53** `c)`</u>

`Thema1.1` $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

2: Aus `Thema1.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\beta, \Omega) \in g$.

3: Aus 2 "$\ldots (\beta, \Omega) \in g$" und
aus →) "$g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt: $(\beta, \Omega) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

4: Aus 3 "$(\beta, \Omega) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt via **18-9**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

`Thema1.2` $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus `Thema1.2` "$\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-10**: $(\beta, f(\beta)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

3: Aus 2 "$(\beta, f(\beta)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$" und
aus →) "$g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt: $(\beta, f(\beta)) \in g$.

4: Aus 3 "$(\beta, f(\beta)) \in g$"
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, g)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$.

Beweis **18-53** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$.

`1.1:` Aus →) “ $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: g Funktion.

`1.2:` Aus →) “ $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `Thema1` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$ ” und
aus `1.2` “ $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt via **18-10**: $(\alpha, f(\alpha)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`4:` Aus `3` “ $(\alpha, f(\alpha)) \in \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ ” und
aus →) “ $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ ”
folgt: $(\alpha, f(\alpha)) \in g$.

`5:` Aus `1.1` “ g Funktion ” und
aus `4` “ $(\alpha, f(\alpha)) \in g$ ”
folgt via **18-20**: $f(\alpha) = g(\alpha)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $g(\alpha) = f(\alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

□

18-54. In Verschärfung von **18-26** ist f genau dann eine Funktion, wenn $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$:

18-54(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` f *Funktion.*

`ii)` $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Beweis **18-54** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f Funktion.

Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **18-26**: $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Aus `VS` gleich "$f = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$"
folgt via **18-53**: f Funktion.

□

18-55. Via Negation ergibt sich aus **18-54** das folgende Kriterium für “f ist keine Funktion” :

18-55(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) f *keine Funktion.*

ii) $f \neq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Beweis **18-55**

1: Via **18-54** gilt: $(f \text{ Funktion}) \Leftrightarrow (f = \{(\lambda, g(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\})$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(f \text{ Funktion})) \Leftrightarrow (\neg(f = \{(\lambda, g(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}))$.

3: Aus 2
folgt via **18-18(Def)**:
$(f \text{ keine Funktion}) \Leftrightarrow (\neg(f = \{(\lambda, g(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}))$.

4: Aus 3
folgt: $(f \text{ keine Funktion}) \Leftrightarrow (f \neq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\})$.

□

18-56. Aus **18-55** ergibt sich das folgende Kriterium für " f keine Funktion" :

18-56(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *keine Funktion.*

`ii)` $g \neq f$.

18-4(Def) $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

Beweis **18-56** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f keine Funktion.

`1`: Aus `VS` gleich " f keine Funktion "
folgt via **18-55**: $f \neq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`2`: Aus `1` " $f \neq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ " und
aus →) " $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ "
folgt: $g \neq f$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $g \neq f$.

`1`: Aus `VS` gleich " $g \neq f$ " und
aus `VS` gleich " $g = \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ "
folgt: $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\} \neq f$.

`2`: Aus `1`
folgt: $f \neq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$.

`3`: Aus `2` " $f \neq \{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\, f\}$ "
folgt via **18-55**: f keine Funktion.

□

18-57. Da das Universum keine Funktion ist gilt $\mathcal{U} \neq \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$. Nichtsdestotrotz erfüllen $f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$ und $\mathcal{U}$ alle bis auf eine - es gilt nämlich *nicht, dass* $\mathcal{U}$ *eine Funktion ist* - Voraussetzungen von **ISF**:

18-57(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$.

Dann folgt:

a) f *Funktion.*

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha))$.

c) $\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathsf{dom}\, f$.

d) $f \neq \mathcal{U}$.

18-4(Def) $\{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$.

Beweis **18-57**

1.a): Aus $\rightarrow$) "$f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$"
folgt via **18-53**: f Funktion.

1.b): Aus $\rightarrow$) "$f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$"
folgt via **18-53**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha))$.

1.1: Aus $\rightarrow$) "$f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$"
folgt via **18-53**: $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$.

1.2: Via **18-51** gilt: $\mathcal{U}$ keine Funktion.

2.c): Aus 1.1
folgt: $\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathsf{dom}\, f$.

2.d): Aus $\rightarrow$) "$f = \{(\lambda, x(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$" und
aus 1.2"$\mathcal{U}$ keine Funktion"
folgt via **18-56**: $f \neq \mathcal{U}$.

□

18-58. Mit dem folgenden Satz wird gezeigt, dass auf die Voraussetzung “g Funktion” in **18-49** *nicht* verzichtet werden kann:

18-58(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$.

Dann folgt:

a) f *Funktion.*

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}) \Rightarrow (\mathcal{U}(\alpha) = f(\alpha))$.

c) $\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, f$.

d) $\neg(\mathcal{U}$ *Einschränkung von* f *auf* $\mathcal{U})$.

18-4(Def) $\{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$.

Beweis **18-58**

`1.a):` Aus $\rightarrow)$ “$f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$”
folgt via **18-53**: f Funktion.

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ “$f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$”
folgt via **18-53**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha))$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ “$f = \{(\lambda, \mathcal{U}(\lambda)) : \lambda \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}\}$”
folgt via **18-53**: $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1.1` “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha))$” und
aus `1.2` “$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha))$.

`2.2:` $\mathsf{dom}\,\mathcal{U} \overset{1.2}{=} \mathsf{dom}\, f \overset{\mathbf{2-17}}{=} \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, f$.

`3.b):` Aus `2.1` “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha))$”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\mathcal{U}) \Rightarrow (\mathcal{U}(\alpha) = f(\alpha))$.

`3.c):` Aus `2.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, f$.

...

<u>Beweis **18-58**</u> ...

`3.1:` Es gilt: $\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U}$
$\vee$
$\neg(\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U}$

`4:` Aus `1.a)`"f Funktion" und
aus `3.1.1.Fall`"$\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U}$"
folgt via **18-47**: $\mathcal{U}$ Funktion.

`5:` Via **18-51** gilt: $\mathcal{U}$ keine Funktion.

`6:` Aus `5`"$\mathcal{U}$ keine Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: $\neg(\mathcal{U}$ Funktion$)$.

`7:` Es gilt `4`"$\mathcal{U}$ Funktion".
Es gilt `6`"$\neg(\mathcal{U}$ Funktion$)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U})$.

`3.1.2.Fall` $\neg(\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\neg(\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U})$"

`4.d):` Aus `A1`
folgt: $\neg(\mathcal{U}$ Einschränkung von f auf $\mathcal{U})$.

□

Funktion: injektiv.

Ersterstellung: 11/10/05 **Letzte Änderung: 18/04/11**

19-1. Im folgenden Satz wird die Beziehung zwischen Funktionen und Injektivität um eine weitere Facette bereichert: x ist genau dann injektiv, wenn x^{-1} eine Funktion ist. Interessanter Weise folgt aus "x^{-1} injektiv" nicht notwendiger Weise "x Funktion", sondern es müsste zusätzlich "x Relation" gefordert werden, siehe **18-19**:

19-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *x injektiv.*

`ii)` *x^{-1} Funktion.*

Beweis **19-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x injektiv.

`1.1:` Via **11-7** gilt: `A1` | "x^{-1} Relation"

`Thema1.2` $((\alpha, \beta) \in x^{-1}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x^{-1})$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \in x^{-1} \ldots$"
folgt via **11-4**: $(\beta, \alpha) \in x$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in x^{-1}$"
folgt via **11-4**: $(\gamma, \alpha) \in x$.

`3:` Aus `VS` gleich "x injektiv",
aus `2.1`"$(\beta, \alpha) \in x$" und
aus `2.2`"$(\gamma, \alpha) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x^{-1}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x^{-1})) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "x^{-1} Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x^{-1}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x^{-1})) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: x^{-1} Funktion.

<u>Beweis **19-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x^{-1} Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)$.

`2.1`: Aus `Thema1`“$(\alpha, \beta) \in x \ldots$”
folgt via **11-4**: $(\beta, \alpha) \in x^{-1}$.

`2.2`: Aus `Thema1`“$\ldots (\gamma, \beta) \in x$”
folgt via **11-4**: $(\beta, \gamma) \in x^{-1}$.

`3`: Aus `VS` gleich “x^{-1} Funktion”,
aus `2.1`“$(\beta, \alpha) \in x^{-1}$” und
aus `2.2`“$(\beta, \gamma) \in x^{-1}$”
folgt via **18-18(Def)**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: x injektiv.

□

19-2. Im folgenden Kriterium wird die Injektivität von Funktionen f in Beziehung zu Eigenschaften der Werte von f gesetzt. Die resultierenden Aussagen sind eventuell sogar vertrauter als die ursprüngliche, für beliebige Klassen gegebene Definition von "Injektivität" :

19-2(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *f Funktion*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *f injektiv.*

`ii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

`iii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta))$.

<u>Beweis **19-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f injektiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))$.

`2.1:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)) \in f$.

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(\beta, f(\beta)) \in f$.

`2.3:` Aus `Thema1` "$\ldots f(\alpha) = f(\beta)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\beta, f(\alpha)) = (\beta, f(\beta))$.

`3:` Aus `2.3` "$(\beta, f(\alpha)) = (\beta, f(\beta))$" und
aus `2.2` "$\ldots (\beta, f(\beta)) \in f$"
folgt: $(\beta, f(\alpha)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich "f injektiv",
aus `2.1` "$(\alpha, f(\alpha)) \in f$" und
aus `3` "$(\beta, f(\alpha)) \in f$"
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Beweis **19-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$

VS gleich $$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta).$$

1: Aus VS
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : (\neg((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta)))) \vee (\alpha = \beta).$$

2: Aus 1
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : (\neg((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f))) \vee (\neg(f(\alpha) = f(\beta))) \vee (\alpha = \beta).$$

3: Aus 2
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : (\neg((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f))) \vee (\alpha = \beta)) \vee (\neg(f(\alpha) = f(\beta))).$$

4: Aus 3
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : (\neg(\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f)) \vee (\neg(\alpha \neq \beta))) \vee (\neg(f(\alpha) = f(\beta))).$$

5: Aus 4
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : (\neg(\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f)) \vee (\neg(\alpha \neq \beta))) \vee (f(\alpha) \neq f(\beta)).$$

6: Aus 5
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : (\neg((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta))) \vee (f(\alpha) \neq f(\beta)).$$

7: Aus 6
folgt:
$$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)).$$

Beweis **19-2** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta))$.

`1:` Es gilt: $(\neg(f \text{ injektiv})) \vee (f \text{ injektiv})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\neg(f \text{ injektiv})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\neg(f$ injektiv)”
folgt via **8-1(Def)**: f nicht-injektiv.

`3:` Aus `2`“f nicht-injektiv”
folgt via **8-2**: $\exists\Omega,\Psi,\Phi : ((\Omega,\Psi) \in f) \wedge ((\Phi,\Psi) \in f) \wedge (\Omega \neq \Phi)$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots(\Omega,\Psi) \in f\ldots$”
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots(\Phi,\Psi) \in f\ldots$”
folgt via **7-5**: $\Phi \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.3:` Aus $\rightarrow$)“f Funktion” und
aus `3`“$\ldots(\Omega,\Psi) \in f\ldots$”
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`4.4:` Aus $\rightarrow$)“f Funktion” und
aus `3`“$\ldots(\Phi,\Psi) \in f\ldots$”
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Phi)$.

`5.1:` Aus `4.3`“$\Psi = f(\Omega)$” und
aus `4.4`“$\Psi = f(\Phi)$”
folgt: $f(\Omega) = f(\Phi)$.

`5.2:` Aus `4.1`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, f$”,
aus `4.2`“$\Phi \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus `3`“$\ldots\Omega \neq \Phi$”
folgt: $(\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Omega \neq \Phi)$.

`6:` Aus `5.2`“$(\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Phi \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\Omega \neq \Phi)$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha,\beta : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta))$”
folgt: $f(\Omega) \neq f(\Phi)$.

`7:` Es gilt `6`“$f(\Omega) \neq f(\Phi)$”.
Es gilt `5.1`“$f(\Omega) = f(\Phi)$”.
Ex falso quodlibet folgt: f injektiv.

`1.2.Fall` f injektiv.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: f injektiv.

$\square$

19-3. In **19-2** wird ein Kriterium präsentiert, in dem äquivalente Formulierungen zu "f ist injektiv" für Funktionen f gegeben werden. Durch Negation ergibt sich hieraus zunächst eine hinreichende Bedingungen dafür, dass eine Funktion *nicht-injektiv* ist:

19-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ $x \in \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow)$ $z \in \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow)$ $x \neq z$.

$\rightarrow)$ $f(x) = f(z)$.

Dann folgt "f nicht-injektiv".

Beweis **19-3**

1: Es gilt: $(f \text{ injektiv}) \vee (\neg(f \text{ injektiv}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` f injektiv.

2: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus `1.1.Fall` "f injektiv",
aus $\rightarrow)$ "$x\mathsf{dom}\, f$",
aus $\rightarrow)$ "$z \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus $\rightarrow)$ "$x \neq z$"
folgt via **19-2**: $f(x) \neq f(z)$.

3: Es gilt 2"$f(x) \neq f(z)$".
Es gilt $\rightarrow)$ "$f(x) = f(z)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f \text{ injektiv})$.

`1.2.Fall` $\neg(f \text{ injektiv})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f \text{ injektiv})$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: f nicht-injektiv.

□

19-4. Aus **19-2** folgt via Negation eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion nicht-injektiv ist:

19-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *nicht-injektiv.*

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

e.1) $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

e.2) $\Psi \in \mathsf{dom}\, f$.

e.3) $\Omega \neq \Psi$.

e.4) $f(\Omega) = f(\Psi)$.

<u>Beweis **19-4**</u>

1: Aus →) “ f nicht-injektiv ”
folgt via **8-1(Def)**: $\neg(f \text{ injektiv})$.

2: Aus →) “ f Funktion ” folgt via **19-2**: f injektiv

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow(f(\alpha)\neq f(\beta)).$$

3: Aus 2
folgt: $\neg(f \text{ injektiv})$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg(\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow(f(\alpha)\neq f(\beta))).$$

4: Aus 1 “ $\neg(f \text{ injektiv})$ ” und
aus 3
folgt:

$$\neg(\forall\alpha,\beta:((\alpha\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\beta\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\alpha\neq\beta))\Rightarrow(f(\alpha)\neq f(\beta))).$$

5: Aus 4
folgt:

$$\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\Psi\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(\Omega\neq\Psi)\wedge(\neg(f(\Omega)\neq f(\Psi)).$$

6: Aus 5 “ $\exists\Omega,\Psi\ldots$ ” ,
aus 5 “ $\ldots\Omega\in\mathsf{dom}\,f\ldots$ ” ,
aus 5 “ $\ldots\Psi\in\mathsf{dom}\,f\ldots$ ” ,
aus 5 “ $\ldots\Omega\neq\Psi\ldots$ ” und
aus 5 “ $\neg(f(\Omega)\neq f(\Psi))$ ”
folgt: $\exists\Omega,\Psi$:

$$\Omega\in\mathsf{dom}\,f$$

$$\wedge\quad\Psi\in\mathsf{dom}\,f$$

$$\wedge\quad\Omega\neq\Psi$$

$$\wedge\quad f(\Omega)=f(\Psi).$$

□

19-5. Gemäß des folgenden Satzes kann für injektive Funktionen jedes Element x aus $\mathsf{dom}\, f$ via f^{-1} aus $f(x)$ rekonstruiert werden:

19-5(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) f *injektiv.*

→) $x \in \mathsf{dom}\, f$.

Dann folgt "$x = f^{-1}(f(x))$".

<u>Beweis **19-5**</u>

`1.1:` Aus →) " f Funktion " und
aus →) " $x \in \mathsf{dom}\, f$ "
folgt via **18-22**: $((x, f(x)) \in f) \wedge (f(x) \in \mathsf{ran}\, f)$.

`1.2:` Aus →) " f injektiv "
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`1.3:` Aus →) " f Funktion "
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\, f = \mathsf{dom}\,(f^{-1})$.

`2.2:` Aus `1.3` " f Relation "
folgt via **13-3**: $f = (f^{-1})^{-1}$.

`3:` Aus `1.1` " $\ldots f(x) \in \mathsf{ran}\, f$ " und
aus `2.1` " $\mathsf{ran}\, f = \mathsf{dom}\,(f^{-1})$ "
folgt: $f(x) \in \mathsf{dom}\,(f^{-1})$.

`4:` Aus `1.2` " f^{-1} Funktion " und
aus `3` " $f(x) \in \mathsf{dom}\,(f^{-1})$ "
folgt via **18-22**: $(f(x), f^{-1}(f(x))) \in f^{-1}$.

`5:` Aus `4` " $(f(x), f^{-1}(f(x))) \in f^{-1}$ "
folgt via **11-4**: $(f^{-1}(f(x)), f(x)) \in (f^{-1})^{-1}$.

`6:` Aus `5` " $(f^{-1}(f(x)), f(x)) \in (f^{-1})^{-1}$ " und
aus `2.2` " $f = (f^{-1})^{-1}$ "
folgt: $(f^{-1}(f(x)), f(x)) \in f$.

`7:` Aus →) " f injektiv, "
aus `1.1` " $(x, f(x)) \in f \ldots$ " und
aus `6` " $(f^{-1}(f(x)), f(x)) \in f$ "
folgt via **8-1(Def)**: $x = f^{-1}(f(x))$.

□

19-6. Aus **19-5** wird durch "Abstraktion" der folgende Satz gewonnen:

19-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *injektiv.*

$\rightarrow$) $g = f^{-1}$.

Dann folgt:

a) g *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\, g = \mathsf{ran}\, f$.

c) $\mathsf{ran}\, g = \mathsf{dom}\, f$.

d) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\alpha = g(f(\alpha)))$.

Beweis **19-6**

1.1: Aus →) “ f injektiv ”
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

1.2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\,f$.

1.3: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\,f$.

> `Thema1.4` $\alpha \in \mathsf{dom}\,f$.
>
> Aus →) “ f Funktion ” ,
> aus →) “ f injektiv ” und
> aus `Thema1.4` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\,f$ ”
> folgt via **19-5**: $\alpha = f^{-1}(f(\alpha))$.

Ergo `Thema1.5`: `A1` | “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,f) \Rightarrow (\alpha = f^{-1}(f(\alpha)))$ ”

2.a): Aus →) “ $g = f^{-1}$ ” und
aus `1.1` “ f^{-1} Funktion ”
folgt: g Funktion.

2.b): Aus →) “ $g = f^{-1}$ ” und
aus `1.2` “ $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\,f$ ”
folgt: $\mathsf{dom}\,g = \mathsf{ran}\,f$.

2.c): Aus →) “ $g = f^{-1}$ ” und
aus `1.3` “ $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\,f$ ”
folgt: $\mathsf{ran}\,g = \mathsf{dom}\,f$.

2.d): Aus →) “ $g = f^{-1}$ ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,f) \Rightarrow (\alpha = f^{-1}(f(\alpha)))$ ”
folgt:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,f) \Rightarrow (\alpha = g(f(\alpha))).$$

□

19-7. In gewisser Hinsicht ist **19-7** die Umkehrung von **19-6**. Andererseits muss im Unterschied zu **19-6** die hier auftretende Klasse Ω keine Funktion sein:

19-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\exists\Omega : (\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\alpha = \Omega(f(\alpha))))$.

Dann folgt "f injektiv".

Beweis **19-7**

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\beta,\gamma)\in f)\wedge((\delta,\gamma)\in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$(\beta,\gamma)\in f\ldots$”
folgt via **7-5**: $\beta\in\mathsf{dom}\, f$.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots(\delta,\gamma)\in f$”
folgt via **7-5**: $\delta\in\mathsf{dom}\, f$.

`2.3:` Aus →)“f Funktion” und
aus `Thema1`“$(\beta,\gamma)\in f\ldots$”
folgt via **18-20**: $\gamma=f(\beta)$.

`2.4:` Aus →)“f Funktion” und
aus `Thema1`“$\ldots(\delta,\gamma)\in f$”
folgt via **18-20**: $\gamma=f(\delta)$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\beta\in\mathsf{dom}\, f$” und
aus →)“$\ldots\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{dom}\, f)\Rightarrow(\alpha=\Omega(f(\alpha)))$”
folgt: $\beta=\Omega(f(\beta))$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\delta\in\mathsf{dom}\, f$” und
aus →)“$\ldots\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{dom}\, f)\Rightarrow(\alpha=\Omega(f(\alpha)))$”
folgt: $\delta=\Omega(f(\delta))$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\beta=\Omega(f(\beta))$” und
aus `2.3`“$\gamma=f(\beta)$”
folgt: $\beta=\Omega(\gamma)$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\delta=\Omega(f(\delta))$” und
aus `2.4`“$\gamma=f(\delta)$”
folgt: $\delta=\Omega(\gamma)$.

`5:` Aus `4.1`“$\beta=\Omega(\gamma)$” und
aus `4.2`“$\delta=\Omega(\gamma)$”
folgt: $\beta=\delta$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta,\gamma,\delta:(((\beta,\gamma)\in f)\wedge((\delta,\gamma)\in f))\Rightarrow(\beta=\delta)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: f injektiv.

□

19-8. Im folgenden Satz wird, obwohl sich die Schlussfolgerung um "g" dreht, eher etwas über die Funktion f und somit Generelles über Funktionen ausgesagt:

19-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in g) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[\{\alpha\}])$.

Dann folgt "g injektiv".

Beweis **19-8**

`Thema1` $((\gamma, \delta) \in g) \wedge ((\epsilon, \delta) \in g)$.

`2.1`: Aus `Thema1` "$(\gamma, \delta) \in g \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in g) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[\{\alpha\}])$"
folgt: $\delta \in f^{-1}[\{\gamma\}])$.

`2.2`: Aus `Thema1` "$(\epsilon, \delta) \in g \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in g) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[\{\alpha\}])$"
folgt: $\delta \in f^{-1}[\{\epsilon\}])$.

`3`: Aus `2.1` "$\delta \in f^{-1}[\{\gamma\}]$" und
aus `2.2` "$\delta \in f^{-1}[\{\epsilon\}]$"
folgt via **2-2**: $\delta \in (f^{-1}[\{\gamma\}]) \cap (f^{-1}[\{\epsilon\}])$.

`4`: Aus `3` "$\delta \in (f^{-1}[\{\gamma\}]) \cap (f^{-1}[\{\epsilon\}])$"
folgt via **0-20**: $0 \neq (f^{-1}[\{\gamma\}]) \cap (f^{-1}[\{\epsilon\}])$.

`5`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `4` "$0 \neq (f^{-1}[\{\gamma\}]) \cap (f^{-1}[\{\epsilon\}])$"
folgt via **18-34**: $\gamma = \epsilon$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta, \epsilon : ((\gamma, \delta) \in g) \wedge (\epsilon, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma = \epsilon)$.

Konsequenz via **18-1(Def)**: g injektiv.

□

19-9. Es folgt die Modifikation von **19-8** für Funktionen. Genauer gesagt, falls f, g Funktionen sind, so dass für alle $\alpha \in \mathsf{dom}\, g$ die Aussage $g(\alpha) \in f^{-1}[\{\alpha\}]$ gilt, dann ist g injektiv:

19-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ g *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) \in f^{-1}[\{\alpha\}])$.

Dann folgt "g injektiv".

Beweis **19-9**

`Thema1.1` $(\beta, \gamma) \in g$.

`2.1:` Aus `Thema1.1` "$(\beta, \gamma) \in g$"
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, g$.

`2.2:` Aus $\rightarrow)$ "g Funktion"
und aus `Thema1.1` "$(\beta, \gamma) \in g$"
folgt via **18-20**: $\gamma = g(\beta)$.

`3:` Aus `2.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\, g$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\alpha) \in f^{-1}[\{\alpha\}])$"
folgt: $g(\beta) \in f^{-1}[\{\beta\}]$.

`4:` Aus `2.2` "$\gamma = g(\beta)$" und
aus `3` "$g(\beta) \in f^{-1}[\{\beta\}]$"
folgt: $\gamma \in f^{-1}[\{\beta\}]$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta, \gamma : ((\beta, \gamma) \in g) \Rightarrow (\gamma \in f^{-1}[\{\beta\}])$"

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "f Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta, \gamma : ((\beta, \gamma) \in g) \Rightarrow (\gamma \in f^{-1}[\{\beta\}])$"
folgt via **19-8**: g injektiv.

□

ENullfunktion. zo_E.
Universelle Nullfunktion. zo.
EIdentität. id_E.
Universelle Identität. id.

Ersterstellung: 11/10/05 **Letzte Änderung: 18/04/11**

20-1. 0 die bislang einzige Funktion, die in die Essays eingeführt wurde. Nun betritt mit den E**Nullfunktionen** eine neue Familie von Funktionen die Essays. Das Kürzel "zo" erinnert an das englische "zero" :

20-1(Definition)

1) zo_E

$$= \mathsf{20.0}(E) = \{(\lambda, 0) : \lambda \in E\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **ist** E**Nullfunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{zo}_E.$$

3) $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$.

4) "$\mathfrak{C}$ **universelle Nullfunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{zo}.$$

20-2. Nun wird unter anderem registriert, dass zo_E die ENullfunktion und zo die universelle Nullfunktion ist:

20-2(Satz)

a) zo_E *ist* E*Nullfunktion.*

b) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *ist* E*Nullfunktion" und "*$\mathfrak{D}$ *ist* E*Nullfunktion" folgt "*$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

c) zo *universelle Nullfunktion.*

d) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *universelle Nullfunktion" und "*$\mathfrak{D}$ *universelle Nullfunktion" folgt "*$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

<u>Beweis</u> **20-2** `a)`

Aus "$\mathsf{zo}_E = \mathsf{zo}_E$"
folgt via **20-1(Def)**: zo_E ist ENullfunktion.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ ist ENullfunktion) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ ist ENullfunktion).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ ist ENullfunktion…"
folgt via **20-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{zo}_E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ ist ENullfunktion"
folgt via **20-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{zo}_E$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \mathsf{zo}_E$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \mathsf{zo}_E$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)`

Aus "$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}$"
folgt via **20-1(Def)**: zo universelle Nullfunktion.

`d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ universelle Nullfunktion) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ universelle Nullfunktion).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ universelle Nullfunktion…"
folgt via **20-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{zo}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ universelle Nullfunktion"
folgt via **20-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{zo}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathfrak{C} = \mathsf{zo}$" und
aus `1.2`"$\mathfrak{D} = \mathsf{zo}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

20-3. Im folgenden Satz wird Hinreichendes und Notwendiges für das "Element-Sein" in Nullfunktionen formuliert:

20-3(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathsf{zo}_E$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = (\Omega, 0)) \wedge (\Omega \in E)$".

b) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$(p, 0) \in \mathsf{zo}_E$".

Beweis **20-3** `VS` gleich $w \in \mathsf{zo}_E$.

1: Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{zo}_E$" und
aus "$\mathsf{zo}_E = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\}$.

2: Aus 1"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (\Omega, 0))$.

3: Aus 2
folgt: $\exists \Omega : (w = (\Omega, 0)) \wedge (\Omega \in E)$.

b) `VS` gleich $p \in E$.

1.1: Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

2: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

3.1: Aus 1.2"$\exists p : p \in E$" und
aus "$(p, 0) = (p, 0)$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((p, 0) = (p, 0))$.

3.2: Aus 1.1"p Menge" und
aus 2"0 Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, 0)$ Menge.

4: Aus 3.1"$\exists p : (p \in E) \wedge ((p, 0) = (p, 0))$" und
aus 3.2"$(p, 0)$ Menge"
folgt: $(p, 0) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\}$.

5: Aus 4"$(p, 0) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, 0)))\} = \mathsf{zo}_E$"
folgt: $(p, 0) \in \mathsf{zo}_E$.

$\square$

20-4. Es folgt ein Kriterium für das "Element-Sein" geordneter Paare in Nullfunktionen:

20-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p,q) \in \mathsf{zo}_E$.

`ii)` *"$p \in E$" und "$q = 0$".*

Beweis **20-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p,q) \in \mathsf{zo}_E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{zo}_E$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{zo}_E$"
folgt via **20-3**: $\exists\Omega : ((p,q) = (\Omega, 0)) \wedge (\Omega \in E)$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, 0) \ldots$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = 0)$.

`3:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt: $p \in E$.

`4:` Aus `3`"$p \in E$" und
aus `2`"$\ldots q = 0$"
folgt: $(p \in E) \wedge (q = 0)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (q = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = 0$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,q) = (p,0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt via **20-3**: $(p,0) \in \mathsf{zo}_E$.

`3:` Aus `1`"$(p,q) = (p,0)$" und
aus `2`"$(p,0) \in \mathsf{zo}_E$"
folgt: $(p,q) \in \mathsf{zo}_E$.

□

20-5. Hier werden einige Funktions-, Definitions-Bereichs-, Bild-Bereichs- und Werte-Eigenschaften von Nullfunktionen angegeben. Die 0Nullfunktion spielt dabei eine Sonderrolle:

20-5(Satz)

a) zo_E *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$.

c) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$.

d) *Aus* "$0 \neq E$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}$".

e) *Aus* "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}$" *folgt* "$0 \neq E$".

f) *Aus* "$E = 0$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = 0$".

g) *Aus* "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = 0$" *folgt* "$E = 0$".

h) $\mathsf{zo}_0 = 0$.

i) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$\mathsf{zo}_E(p) = 0$".

j) *Aus* "$\mathsf{zo}_E(p) = 0$" *folgt* "$p \in E$".

Beweis **20-5** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathsf{zo}_E$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{zo}_E$” folgt via **20-3**:	$\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, 0)) \wedge (\Omega \in E)$.
`3:` Es gilt:	$\exists \Psi : \Psi = 0$.
`4:` Aus `3`“$\ldots \Psi = 0$” folgt via **PaarAxiom I**:	$(\Omega, 0) = (\Omega, \Psi)$.
`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, 0) \ldots$” und aus `4`“$(\Omega, 0) = (\Omega, \Psi)$” folgt:	$\alpha = (\Omega, \Psi)$.
`6:` Aus `2`“$\exists \Omega \ldots$”, aus `3`“$\exists \Psi \ldots$” und aus `5`“$\alpha = (\Omega, \Psi)$” folgt:	$\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{zo}_E) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: `A1` | “zo_E Relation”

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$((\alpha, \beta) \in \mathsf{zo}_E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{zo}_E)$.
`2.1:` Aus `1.2`“$(\alpha, \beta) \in \mathsf{zo}_E \ldots$” folgt via **20-4**:	$\beta = 0$.
`2.2:` Aus `1.2`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{zo}_E$” folgt via **20-4**:	$\gamma = 0$.
`3:` Aus `2.1`“$\beta = 0$” und aus `2.2`“$\gamma = 0$” folgt:	$\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \mathsf{zo}_E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”

Beweis **20-5** `a)` ...

`1.3:` Aus `A1` gleich "zo_E Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \mathsf{zo}_E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: zo_E Funktion.

`b)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$"
folgt via **7-2**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{zo}_E$.

`3:` Aus 2"$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{zo}_E$"
folgt via **20-4**: $\alpha \in E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq E$"

`Thema1.2` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E$"
folgt via **20-3**: $(\alpha, 0) \in \mathsf{zo}_E$.

`3:` Aus 2"$(\alpha, 0) \in \mathsf{zo}_E$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq E$" und
aus `A2` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$.

Beweis **20-5** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$.
`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$” folgt via **7-4**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{zo}_E$.
`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{zo}_E$” folgt via **20-4**:	$\alpha = 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\alpha = 0)$.

Konsequenz via **1-10**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$.

`d)` `VS` gleich $0 \neq E$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq E$” folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$	$\alpha \in \{0\}$.
`3:` Aus `Thema2.1`“$\alpha \in \{0\}$” folgt via **1-6**:	$\alpha = 0$.
`4:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in E$” und aus `3`“$\alpha = 0$” folgt via **20-4**:	$(\Omega, \alpha) \in \mathsf{zo}_E$.
`5:` Aus `4`“$(\Omega, \alpha) \in \mathsf{zo}_E$” folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\{0\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)\text{”}}$

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$.

`3:` Aus `2.2`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$” und aus `A1` gleich “$\{0\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$” folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}$.

<u>Beweis **20-5**</u> `e)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}$.

`1:` Via **1-5** gilt: $0 \in \{0\}$.

`2:` Aus `1`“$0 \in \{0\}$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}$”
folgt: $0 \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$.

`3:` Aus `2`“$0 \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, 0) \in \mathsf{zo}_E$.

`4:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, 0) \in \mathsf{zo}_E$”
folgt via **20-4**: $\Omega \in E$.

`5:` Aus `4`“$\Omega \in E$”
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`f)` `VS` gleich $E = 0$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$”
folgt via **7-4**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{zo}_E$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{zo}_E$”
folgt via **20-4**: $\Omega \in E$.

`4:` Aus `3`“$\Omega \in E$” und
aus `VS` gleich “$E = 0$”
folgt: $\Omega \in 0$.

`5:` Es gilt `4`“$\Omega \in 0$”.
Via **0-19** gilt “$\Omega \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = 0$.

Beweis **20-5** `g)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = 0.$

`1:` Es gilt: $(0 \neq E) \vee (E = 0).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E.$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}.$

`3:` Aus `2`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = \{0\}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) = 0$"
folgt: $\{0\} = 0.$

`4:` Es gilt `3`"$\{0\} = 0$".
Via **1-5** gilt "$0 \neq \{0\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E = 0.$

`1.2.Fall` $E = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E = 0.$

`h)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{zo}_0.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{zo}_0$"
folgt via **20-3**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, 0)) \wedge (\Omega \in 0).$

`3:` Es gilt `2`"$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{zo}_0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{zo}_0) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{zo}_0).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{zo}_0 = 0.$

<u>Beweis</u> **20-5** `i)` `VS` gleich $p \in E.$

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in E$”
folgt via **20-3**: $(p, 0) \in \mathsf{zo}_E.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: zo_E Funktion.

`3:` Aus `2`“zo_E Funktion” und
aus `1`“$(p, 0) \in \mathsf{zo}_E$”
folgt via **18-20**: $0 = \mathsf{zo}_E(p).$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{zo}_E(p) = 0.$

`j)` `VS` gleich $\mathsf{zo}_E(p) = 0.$

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{zo}_E(p) = 0$” und
aus `1`“0 Menge”
folgt: $\mathsf{zo}_E(p)$ Menge.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{zo}_E(p)$ Menge”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E).$

`4:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E.$

`5:` Aus `3`“$p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$” und
aus `4`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$”
folgt: $p \in E.$

□

20-6. Falls $E \subseteq e$, dann ist zo_E die Einschränkung von zo_e auf E. Via $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ folgt hieraus, dass zo_E die Einschränkung von zo auf E ist. zo_E ist genau dann eine (Un-)Menge, wenn E eine (Un-)Menge ist. zo ist eine Unmenge:

20-6(Satz)

a) *Aus "$E \subseteq e$" folgt "zo_E Einschränkung von zo_e auf E".*

b) zo_E *Einschränkung von* zo *auf E.*

c) *Aus "zo_E Menge" folgt "E Menge".*

d) *Aus "zo_E Unmenge" folgt "E Unmenge".*

e) *Aus "E Menge" folgt "zo_E Menge".*

f) *Aus "E Unmenge" folgt "zo_E Unmenge".*

g) zo *Unmenge.*

<u>Beweis **20-6**</u> `a)` `VS` gleich $E \subseteq e$.

`1.1:` Via **20-5** gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{zo}_e \text{ Funktion”}}$

`1.2:` Via **20-5** gilt: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{zo}_E \text{ Funktion”}}$

`1.3:` Via **20-5** gilt: $\boxed{\texttt{A3} \mid \text{“}\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E\text{”}}$

> `Thema1.4` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.
>
> `2:` Aus `Thema1.4` “$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$” und aus `A3` gleich “$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$” folgt: $\alpha \in E$.
>
> `3.1:` Aus `2` “$\alpha \in E$” folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_E(\alpha) = 0$.
>
> `3.2:` Aus `2` “$\alpha \in E$” und aus `VS` gleich “$E \subseteq e$” folgt via **0-4**: $\alpha \in e$.
>
> `4:` Aus `3.2` “$\alpha \in e$” folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_e(\alpha) = 0$.
>
> `5:` Aus `3.1` “$\mathsf{zo}_E(\alpha) = 0$” und aus `4` “$\mathsf{zo}_e(\alpha) = 0$” folgt: $\mathsf{zo}_E(\alpha) = \mathsf{zo}_e(\alpha)$.

Ergo `Thema1.4`: $\boxed{\texttt{A4} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\mathsf{zo}_E(\alpha) = \mathsf{zo}_e(\alpha))\text{”}}$

`1.5:` Aus `A1` gleich “zo_e Funktion”, aus `A2` gleich “zo_E Funktion” und aus `A4` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)) \Rightarrow (\mathsf{zo}_E(\alpha) = \mathsf{zo}_e(\alpha)))$” folgt via **18-49**: zo_E Einschränkung von zo_e auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.

`2:` Aus `1.5` “zo_E Einschränkung von zo_e auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$” und aus `A3` gleich “$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$” folgt: zo_E Einschränkung von zo_e auf E.

<u>Beweis **20-6**</u> `b)`

`1:` Via **0-18** gilt: $E \subseteq \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1`"$E \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
zo_E Einschränkung von $\mathsf{zo}_\mathcal{U}$ auf E

`2.2:` Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.2`"$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_\mathcal{U}$" und
aus `2.1`"zo_E Einschränkung von $\mathsf{zo}_\mathcal{U}$ auf E"
folgt: zo_E Einschränkung von zo auf E

`c)` `VS` gleich zo_E Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "zo_E Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$ Menge.

`2:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$ Menge" und
aus `2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$"
folgt: E Menge.

<u>Beweis **20-6**</u> `d)` `VS` gleich zo_E Unmenge.

`1:` Es gilt: $(E \text{ Menge}) \vee (E \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` E Menge.

`2.1:` Via **20-5** gilt: zo_E Funktion.

`2.2:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$.

`2.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$.

`3.1:` Aus `2.1`“zo_E Funktion”
folgt via **18-18**: zo_E Relation.

`3.2:` Aus `1.1.Fall`“E Menge” und
aus `2.2`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$ Menge.

`3.3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

`4:` Aus `2.3`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$” und
aus `3.3`“$\{0\}$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$ Menge.

`5:` Aus `3.1`“zo_E Relation”,
aus `3.2`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$ Menge” und
aus `4`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E)$ Menge”
folgt via **10-5**: zo_E Menge.

`6:` Es gilt `5`“zo_E Menge”.
Es gilt `VS` gleich “zo_E Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: E Unmenge.

`1.2.Fall` E Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: E Unmenge.

Beweis **20-6** `e)` `VS` gleich E Menge.

`1:` Es gilt: $(\mathsf{zo}_E \text{ Unmenge}) \vee (\mathsf{zo}_E \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` zo_E Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall` “zo_E Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: E Unmenge.

`3:` Es gilt `2`“E Unmenge”.
Es gilt `VS` gleich “E Menge”.
Ex falso quodlibet folgt: zo_E Menge.

`1.2.Fall` zo_E Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: zo_E Menge.

`f)` `VS` gleich E Unmenge.

`1:` Es gilt: $(\mathsf{zo}_E \text{ Menge}) \vee (\mathsf{zo}_E \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` zo_E Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` “zo_E Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: E Menge.

`3:` Es gilt `2`“E Menge”.
Es gilt `VS` gleich “E Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: zo_E Unmenge.

`1.2.Fall` zo_E Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: zo_E Unmenge.

<u>Beweis **20-6** g)</u>

1: Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$.

2: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

3: Aus 2"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen f): $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ Unmenge.

4: Aus 1"$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$" und
aus 3"$\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ Unmenge"
folgt: zo Unmenge.

□

20-7. Mit den E**Identitäten** betritt eine neue Familie von Funktionen die Essays. Das Kürzel "id" erinnert an das englische "identity" :

20-7(Definition)

1) id_E

$$= \mathsf{20.1}(E) = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in E\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **ist** E**Identität**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{id}_E.$$

3) $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

4) "$\mathfrak{C}$ **universelle Identität**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{id}.$$

20-8. Nun wird unter anderem registriert, dass id_E die EIdentität und id die universelle Identität ist:

20-8(Satz)

a) id_E *ist* E*Identität.*

b) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *ist* E*Identität" und "*$\mathfrak{D}$ *ist* E*Identität" folgt "*$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

c) id *universelle Identität.*

d) *Aus "*$\mathfrak{C}$ *universelle Identität" und "*$\mathfrak{D}$ *universelle Identität" folgt "*$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$*".*

Beweis **20-8** a)

Aus "$\mathsf{id}_E = \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-6(Def)**: id_E ist EIdentität.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ ist EIdentität) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ ist EIdentität).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ ist EIdentität…"
folgt via **20-7(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{id}_E$.

1.2: Aus VS gleich "…$\mathfrak{D}$ die EIdentität"
folgt via **20-7(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{id}_E$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = \mathsf{id}_E$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = \mathsf{id}_E$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

c)

Aus "$\mathsf{id} = \mathsf{id}$"
folgt via **20-6(Def)**: id universelle Identität.

d) VS gleich ($\mathfrak{C}$ universelle Identität) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ universelle Identität).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ universelle Identität…"
folgt via **20-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{id}$.

1.2: Aus VS gleich "…$\mathfrak{D}$ universelle Identität"
folgt via **20-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{id}$.

2: Aus 1.1 "$\mathfrak{C} = \mathsf{id}$" und
aus 1.2 "$\mathfrak{D} = \mathsf{id}$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

20-9. Im folgenden Satz wird Hinreichendes und Notwendiges für das "Element-Sein" in Identitäten formuliert:

<u>20-9(Satz)</u>

a) *Aus* "$w \in \mathsf{id}_E$" *folgt* "$\exists \Omega : (w = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in E)$".

b) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$(p, p) \in \mathsf{id}_E$".

<u>Beweis **20-9**</u> `VS` gleich $w \in \mathsf{id}_E$.

1: Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{id}_E$" und
aus "$\mathsf{id}_E = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\}$.

2: Aus 1"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (\Omega, \Omega))$.

3: Aus 2
folgt: $\exists \Omega : (w = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in E)$.

b) `VS` gleich $p \in E$.

1.1: Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

2.1: Aus 1.2"$\exists p : p \in E$" und
aus "$(p, p) = (p, p)$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((p, p) = (p, p))$.

2.2: Aus 1.1"p Menge" und
aus 1.1"p Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, p) Menge.

3: Aus 2.1"$\exists p : (p \in E) \wedge ((p, p) = (p, p))$" und
aus 2.2"(p, p) Menge"
folgt: $(p, p) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\}$.

5: Aus 4"$(p, p) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, \Omega)))\} = \mathsf{id}_E$"
folgt: $(p, p) \in \mathsf{id}_E$.

□

20-10. Es folgt ein Kriterium für das "Element-Sein" geordneter Paare in Identitäten:

20-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p, q) \in \mathsf{id}_E$.

`ii)` *"$p \in E$" und "$p = q$".*

`iii)` *"$q \in E$" und "$p = q$."*

Beweis **20-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p,q) \in \mathsf{id}_E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-9**: $\exists\Omega : ((p,q) = (\Omega,\Omega)) \wedge (\Omega \in E)$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega,\Omega) \ldots$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Omega)$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt: $p \in E$.

`3.2:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `3.2`"$\ldots q = \Omega$"
folgt: $p = q$.

`4:` Aus `3.1`"$p \in E$" und
aus `3.2`"$\ldots p = q$"
folgt: $(p \in E) \wedge (p = q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (p = q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p = q$"
folgt: $q \in E$.

`2:` Aus `1`"$q \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p = q$"
folgt: $(q \in E) \wedge (p = q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(q \in E) \wedge (p = q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,q) = (q,q)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$q \in E \ldots$"
folgt via **20-9**: $(q,q) \in \mathsf{id}_E$.

`3:` Aus `1`"$(p,q) = (q,q)$" und
aus `2`"$(q,q) \in \mathsf{id}_E$"
folgt: $(p,q) \in \mathsf{id}_E$.

$\square$

20-11. Hier werden einige Funktions-, Definitions-Bereichs-, Bild-Bereichs- und Werte-Eigenschaften von Identitäten angegeben:

20-11(Satz)

a) id_E *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

c) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

d) $\mathsf{id}_0 = 0$.

e) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$\mathsf{id}_E(p) = p$".

f) *Aus* "$\mathsf{id}_E(p) = p$" *folgt* "$p = \mathcal{U}$" *oder* "$p \in E$".

Beweis **20-11** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{id}_E.$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in E).$

`3:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = \Omega.$

`4:` Aus `3`"$\ldots \Psi = \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Omega).$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$" und
aus `4`"$(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Omega)$"
folgt: $\alpha = (\Omega, \Psi).$

`6:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\exists \Psi \ldots$" und
aus `5`"$\alpha = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_E) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\mathsf{id}_E \text{ Relation”}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $((\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_E).$

`2.1:` Aus `1.2`"$(\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_E \ldots$"
folgt via **20-10**: $\alpha = \beta.$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-10**: $\alpha = \gamma.$

`3:` Aus `2.1`"$\alpha = \beta$" und
aus `2.2`"$\alpha = \gamma$"
folgt: $\beta = \gamma.$

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{”}}$

Beweis **20-11** a) ...

1.3: Aus A1 gleich "id_E Relation" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \mathsf{id}_E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_E)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: id_E Funktion.

b)

Thema1.1	$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$.
2: Aus Thema1.1"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$" folgt via **7-2**:	$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{id}_E$.
3: Aus 2"$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{id}_E$" folgt via **20-10**:	$\alpha \in E$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) \subseteq E$"

Thema1.2	$\alpha \in E$.
2: Aus Thema1.2"$\alpha \in E$" folgt via **20-9**:	$(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_E$.
3: Aus 2"$(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_E$" folgt via **7-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$"

1.3: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) \subseteq E$" und
aus A2 gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

<u>Beweis **20-11**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$"
folgt via **7-4**: $\exists\Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{id}_E$.

`3:` Aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-10**: $\alpha \in E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)) \Rightarrow (\alpha \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) \subseteq E$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in E$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E$" und
aus "$\alpha = \alpha$"
folgt via **20-10**: $(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_E$.

`3:` Aus 2"$(\alpha, \alpha) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) \subseteq E$" und
aus `A2` gleich "$E \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

Beweis **20-11** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{id}_0.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{id}_0$"
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in 0).$

`3:` Es gilt `2`"$\ldots \Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathsf{id}_0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_0) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{id}_0).$

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{id}_0 = 0.$

`e)` `VS` gleich $p \in E.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt via **20-9**: $(p, p) \in \mathsf{id}_E.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: id_E Funktion.

`3:` Aus `2`"id_E Funktion" und
aus `1`"$(p, p) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **18-20**: $p = \mathsf{id}_E(p).$

<u>Beweis **20-11**</u> `f) VS` gleich $\mathsf{id}_E(p) = p$.

`1:` Es gilt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = \mathcal{U}$.

Aus `1.1.Fall`“$p = \mathcal{U}$”
folgt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \in E)$.

`1.2.Fall` $p \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{id}_E(p) = p$” und
aus `1.2.Fall`“$p \neq \mathcal{U}$”
folgt: $\mathsf{id}_E(p) \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{id}_E(p) \neq \mathcal{U}$”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

`5:` Aus `3`“$p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$” und
aus `4`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$”
folgt: $p \in E$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \in E)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p = \mathcal{U}) \vee (p \in E)$.

$\square$

20-12. id_E ist injektiv und gleich $(\mathsf{id}_E)^{-1}$. Im Hinblick auf **19-1** ist es nicht überraschend, dass die Beweis-Reihenfolge `b) - a)` ist:

20-12(Satz)

a) id_E *injektiv.*

b) $(\mathsf{id}_E)^{-1} = \mathsf{id}_E$.

Beweis **20-12** `b)`

`Thema1.1` $\alpha \in (\mathsf{id}_E)^{-1}$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (\mathsf{id}_E)^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in \mathsf{id}_E)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \Psi) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-10**: $(\Psi \in E) \wedge (\Omega = \Psi)$.

4: Aus 3 "$\ldots \Omega = \Psi$"
folgt: $\Psi = \Omega$.

5: Aus 3 "$\Psi \in E \ldots$" und
aus 4 "$\Psi = \Omega$"
folgt via **20-10**: $(\Psi, \Omega) \in \mathsf{id}_E$.

6: Aus 2 "$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus 5 "$(\Psi, \Omega) \in \mathsf{id}_E$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{id}_E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{id}_E)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{id}_E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$(\mathsf{id}_E)^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E$"

...

Beweis **20-12** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathsf{id}_E$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathsf{id}_E$”
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in E)$.

`3:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathsf{id}_E$” und
aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_E$.

`4:` Aus `3`“$(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_E$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Omega) \in (\mathsf{id}_E)^{-1}$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$” und
aus `4`“$(\Omega, \Omega) \in (\mathsf{id}_E)^{-1}$”
folgt: $\alpha \in (\mathsf{id}_E)^{-1}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_E) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{id}_E)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{id}_E \subseteq (\mathsf{id}_E)^{-1}\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$(\mathsf{id}_E)^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E$” und
aus `A2` gleich “$\mathsf{id}_E \subseteq (\mathsf{id}_E)^{-1}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\mathsf{id}_E)^{-1} = \mathsf{id}_E$.

`a)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathsf{id}_E)^{-1} = \mathsf{id}_E$.

`2:` Via **20-11** gilt: id_E Funktion.

`3:` Aus `1`“$(\mathsf{id}_E)^{-1} = \mathsf{id}_E$” und
aus `2`“id_E Funktion”
folgt: $(\mathsf{id}_E)^{-1}$ Funktion.

`4:` Aus `3`“$(\mathsf{id}_E)^{-1}$ Funktion”
folgt via **19-1**: id_E injektiv.

$\square$

20-13. Falls $E \subseteq e$, dann ist id_E die Einschränkung von id_e auf E. Via $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ folgt hieraus, dass id_E die Einschränkung von id auf E ist:

20-13(Satz)

a) *Aus "$E \subseteq e$" folgt "id_E Einschränkung von id_e auf E".*

b) *id_E Einschränkung von id auf E.*

c) *Aus "id_E Menge" folgt "E Menge".*

d) *Aus "id_E Unmenge" folgt "E Unmenge".*

e) *Aus "E Menge" folgt "id_E Menge".*

f) *Aus "E Unmenge" folgt "id_E Unmenge".*

g) *id Unmenge.*

<u>Beweis **20-13**</u> `a)` `VS` gleich $E \subseteq e$.

`1.1:` Via **20-11** gilt: `A1` "id_e Funktion"

`1.2:` Via **20-11** gilt: `A2` "id_E Funktion"

`1.3:` Via **20-11** gilt: `A3` "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$"

`Thema1.4` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$.

`2:` Aus `Thema1.4` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$" und
aus `A3` gleich "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt: $\alpha \in E$.

`3.1:` Aus `2` "$\alpha \in E$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_E(\alpha) = \alpha$.

`3.2:` Aus `2` "$\alpha \in E$" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in e$.

`4:` Aus `3.2` "$\alpha \in e$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_e(\alpha) = \alpha$.

`5:` Aus `3.1` "$\mathsf{id}_E(\alpha) = \alpha$" und
aus `4` "$\mathsf{id}_e(\alpha) = \alpha$"
folgt: $\mathsf{id}_E(\alpha) = \mathsf{id}_e(\alpha)$.

Ergo `Thema1.4`: `A4` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)) \Rightarrow (\mathsf{id}_E(\alpha) = \mathsf{id}_e(\alpha))$"

`1.5:` Aus `A1` gleich "id_e Funktion",
aus `A2` gleich "id_E Funktion" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)) \Rightarrow (\mathsf{id}_E(\alpha) = \mathsf{id}_e(\alpha)))$"
folgt via **18-49**: id_E Einschränkung von id_e auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$.

`2:` Aus `1.5` "id_E Einschränkung von id_e auf $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$" und
aus `A3` gleich "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt: id_E Einschränkung von id_e auf E.

<u>Beweis **20-13**</u> `b)`

`1:` Via **0-18** gilt: $E \subseteq \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `1` "$E \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
id_E Einschränkung von $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ auf E

`2.2:` Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`3:` Aus `2.2` "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$" und
aus `2.1` "id_E Einschränkung von $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ auf E"
folgt: id_E Einschränkung von id auf E

`c)` `VS` gleich id_E Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "id_E Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$ Menge.

`2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

`3:` Aus `1` "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$ Menge" und
aus `2` "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt: E Menge.

Beweis **20-13** `d) VS` gleich id_E Unmenge.

`1:` Es gilt: $(E$ Menge$) \vee (E$ Unmenge$)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` E Menge.

`2.1:` Via **20-11** gilt: id_E Funktion.

`2.2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

`2.3:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

`3.1:` Aus `2.1`"id_E Funktion"
folgt via **18-18**: id_E Relation.

`3.2:` Aus `1.1.Fall`"E Menge" und
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$ Menge.

`3.3:` Aus `1.1.Fall`"E Menge" und
aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$ Menge.

`4:` Aus `3.1`"id_E Relation",
aus `3.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$ Menge" und
aus `3.3`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E)$ Menge"
folgt via **10-5**: id_E Menge.

`5:` Es gilt `4`"id_E Menge".
Es gilt `VS` gleich "id_E Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: E Unmenge.

`1.2.Fall` E Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: E Unmenge.

<u>Beweis **20-13**</u> `e)` `VS` gleich E Menge.

`1:` Es gilt: $(\mathsf{id}_E$ Unmenge$) \vee (\mathsf{id}_E$ Menge$)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` id_E Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“id_E Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: E Unmenge.

`3:` Es gilt `2`“E Unmenge” .
Es gilt `VS` gleich “E Menge” .
Ex falso quodlibet folgt: id_E Menge.

`1.2.Fall` id_E Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: id_E Menge.

`f)` `VS` gleich E Unmenge.

`1:` Es gilt: $(\mathsf{id}_E$ Menge$) \vee (\mathsf{id}_E$ Unmenge$)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` id_E Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“id_E Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: E Menge.

`3:` Es gilt `2`“E Menge” .
Es gilt `VS` gleich “E Unmenge” .
Ex falso quodlibet folgt: id_E Unmenge.

`1.2.Fall` id_E Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: id_E Unmenge.

<u>Beweis</u> **20-13** `g)`

`1:` Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`2:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`3:` Aus `2`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ Unmenge.

`4:` Aus `1`"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$" und
aus `3`"$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ Unmenge"
folgt: id Unmenge.

$\square$

20-14. Die $(\mathsf{dom}\,x)$Identität ist eine Teilklasse von $x^{-1} \circ x$ (siehe a) und die $(\mathsf{ran}\,x)$Identität ist eine TeilKlasse von $x \circ x^{-1}$, siehe d). Falls x injektiv ist, dann gilt via b) die Gleichung $x^{-1} \circ x = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}$. Die Aussage von b) wird in c) "verstärkend invertiert", indem gesagt wird, dass aus "$x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_E$" - hier ist E eine beliebige Klasse - die Injektivität von x folgt. Klarer Weise kann die hier auftretetende Voraussetzung auf "$\mathsf{dom}\,x$" spezialisiert werden und dann ist die Voraussetzung "$x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}$" im Hinblick auf a) zu "$x^{-1} \circ x = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}$" äquivalent:

20-14(Satz)

a) $\mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x} \subseteq x^{-1} \circ x$.

b) *Aus "x injektiv" folgt "$x^{-1} \circ x = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}$".*

c) *Aus "$x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_E$" folgt "$x$ injektiv".*

d) $\mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,x} \subseteq x \circ x^{-1}$.

Beweis **20-14** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}$”
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\,x)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,x$”
folgt via **7-2**: $\exists \Psi : (\Omega, \Psi) \in x$.

`4:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **11-4**: $(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$.

`5:` Aus `3`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$” und
aus `4`“$(\Psi, \Omega) \in x^{-1}$”
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Omega) \in x^{-1} \circ x$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$” und
aus `5`“$(\Omega, \Omega) \in x^{-1} \circ x$”
folgt: $\alpha \in x^{-1} \circ x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x}) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1} \circ x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x} \subseteq x^{-1} \circ x$.

Beweis **20-14** `b) VS` gleich x injektiv.

`1:` Aus `VS` gleich "x injektiv"
folgt via **19-1**: x^{-1} Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$	$\alpha \in x^{-1} \circ x$.
`3:` Aus `Thema2.1`"$\alpha \in x^{-1} \circ x$" folgt via **14-3**:	$\exists \Omega, \Upsilon, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge ((\Omega, \Upsilon) \in x) \wedge ((\Upsilon, \Psi) \in x^{-1})$.
`4.1:` Aus `3`"$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in x \ldots$" folgt via **7-5**:	$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.
`4.2:` Aus `3`"$\ldots (\Omega, \Upsilon) \in x \ldots$" folgt via **11-4**:	$(\Upsilon, \Omega) \in x^{-1}$.
`5:` Aus `1`"x^{-1} Funktion", aus `3`"$\ldots (\Upsilon, \Psi) \in x^{-1}$" und aus `4.2`"$(\Upsilon, \Omega) \in x^{-1}$" folgt via **18-18(Def)**:	$\Psi = \Omega$.
`6:` Aus `5`"$\Psi = \Omega$" folgt via **PaarAxiom I**:	$(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Omega)$.
`7:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$" und aus `6`"$(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Omega)$" folgt:	$\alpha = (\Omega, \Omega)$.
`8:` Aus `4.1`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **20-9**:	$(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x}$.
`9:` Aus `7`"$\alpha = (\Omega, \Omega)$" und aus `8`"$(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x}$" folgt:	$\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x^{-1} \circ x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x} \text{"}}$

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x} \subseteq x^{-1} \circ x$.

`3:` Aus `A1` gleich "$x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x}$" und
aus `2.2`"$\mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x} \subseteq x^{-1} \circ x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x^{-1} \circ x = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x}$.

Beweis **20-14** `c)` `VS` gleich $x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_E$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1`“ $\ldots (\gamma, \beta) \in x$ ”
folgt via **11-4**: $(\beta, \gamma) \in x^{-1}$.

`3:` Aus `Thema1`“ $(\alpha, \beta) \in x \ldots$ ” und
aus `2`“ $(\beta, \gamma) \in x^{-1}$ ”
folgt via **14-5**: $(\alpha, \gamma) \in x^{-1} \circ x$.

`4:` Aus `3`“ $(\alpha, \gamma) \in x^{-1} \circ x$ ” und
aus `VS` gleich “ $x^{-1} \circ x \subseteq \mathsf{id}_E$ ”
folgt via **0-4**: $(\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_E$.

`5:` Aus `4`“ $(\alpha, \gamma) \in \mathsf{id}_E$ ”
folgt via **20-10**: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\gamma, \beta) \in x)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **8-1(Def)**: x injektiv.

<u>Beweis **20-14** `d)`</u>

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,x}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,x}$"
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in \mathsf{ran}\,x)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\,x$"
folgt via **7-4**: $\exists \Psi : (\Psi, \Omega) \in x$.

4: Aus 3 "$\ldots (\Psi, \Omega) \in x$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in x^{-1}$.

5: Aus 4 "$(\Omega, \Psi) \in x^{-1}$" und
aus 3 "$\ldots (\Psi, \Omega) \in x$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Omega) \in x \circ x^{-1}$.

6: Aus 2 "$\ldots \alpha = (\Omega, \Omega) \ldots$" und
aus 5 "$(\Omega, \Omega) \in x \circ x^{-1}$"
folgt: $\alpha \in x \circ x^{-1}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,x}) \Rightarrow (\alpha \in x \circ x^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,x} \subseteq x \circ x^{-1}$.

$\square$

20-15 Im folgenden Satz werden Bedinungen formuliert, aus denen folgt, dass eine Relation die Relation invers zu s ist. Interessanter Weise muss hier s weder Relation noch Funktion sein:

20-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) r *Relation.*

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, r \subseteq E \subseteq \mathsf{dom}\, s$.

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, s \subseteq D \subseteq \mathsf{dom}\, r$.

$\rightarrow$) $s \circ r \subseteq \mathsf{id}_D$.

$\rightarrow$) $r \circ s \subseteq \mathsf{id}_E$.

Dann folgt "$r = s^{-1}$".

Beweis **20-15**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in r.$

2: Aus →) “r Relation” und
aus Thema1.1 “$\alpha \in r$”
folgt via **10-2**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi).$

3: Aus 2 “$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus Thema1.1 “$\alpha \in r$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in r.$

4: Aus 3 “$(\Omega, \Psi) \in r$”
folgt via **7-5**: $\Psi \in \mathsf{ran}\, r.$

5: Aus 4 “$\Psi \in \mathsf{ran}\, r$” und
aus →) “$\mathsf{ran}\, r \subseteq E \ldots$”
folgt via **0-4**: $\Psi \in E.$

6: Aus 5 “$\Psi \in E$” und
aus →) “$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, s$”
folgt via **0-4**: $\Psi \in \mathsf{dom}\, s.$

7: Aus 7 “$\Psi \in \mathsf{dom}\, s$”
folgt via **7-2**: $\exists \Phi : (\Psi, \Phi) \in s.$

8: Aus 3 “$(\Omega, \Psi) \in r$” und
aus 7 “$\ldots (\Psi, \Phi) \in s$”
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in s \circ r.$

9: Aus 8 “$(\Omega, \Phi) \in s \circ r$” und
aus →) “$s \circ r \subseteq \mathsf{id}_D$”
folgt via **0-4**: $(\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_D.$

10: Aus 9 “$(\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_D$”
folgt via **20-10**: $\Omega = \Phi.$

…

<u>Beweis **20-15**</u> ...

`Thema1.1` $\alpha \in r$.

...

`11:` Aus `10`"$\Omega = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (\Psi, \Phi)$.

`12:` Aus `11`"$(\Psi, \Omega) = (\Psi, \Phi)$" und
aus `7`"$\ldots (\Psi, \Phi) \in s$"
folgt: $(\Psi, \Omega) \in s$.

`13:` Aus `12`"$(\Psi, \Omega) \in s$"
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Psi) \in s^{-1}$.

`14:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `13`"$(\Omega, \Psi) \in s^{-1}$"
folgt: $\alpha \in s^{-1}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in r) \Rightarrow (\alpha \in s^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$r \subseteq s^{-1}$"

`Thema1.2` $\alpha \in s^{-1}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in s^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Psi, \Omega)) \wedge ((\Omega, \Psi) \in s)$
$\wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, s) \wedge (\Psi \in \mathsf{ran}\, s)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, s$" und
aus $\rightarrow$)"$\mathsf{ran}\, s \subseteq D \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Psi \in D$.

`4:` Aus `3`"$\Psi \in D$" und
aus $\rightarrow$)"$\ldots D \subseteq \mathsf{dom}\, r$"
folgt via **0-4**: $\Psi \in \mathsf{dom}\, r$.

`5:` Aus `4`"$\Psi \in \mathsf{dom}\, r$"
folgt via **7-2**: $\exists \Phi : (\Psi, \Phi) \in r$.

...

Beweis **20-15** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in s^{-1}$.

...

6: Aus 2"... $(\Omega, \Psi) \in s$ ..." und
aus 5"... $(\Psi, \Phi) \in r$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in r \circ s$.

7: Aus 6"$(\Omega, \Phi) \in r \circ s$" und
aus →) "$r \circ s \subseteq \mathsf{id}_E$"
folgt via **0-4**: $(\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_E$.

8: Aus 7"$(\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-10**: $\Omega = \Phi$.

9: Aus 8"$\Omega = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (\Psi, \Phi)$.

10: Aus 9"$(\Psi, \Omega) = (\Psi, \Phi)$" und
aus 5"... $(\Psi, \Phi) \in r$"
folgt: $(\Psi, \Omega) \in r$.

11: Aus 2"... $\alpha = (\Psi, \Omega)$ ..." und
aus 10"$(\Psi, \Omega) \in r$"
folgt: $\alpha \in r$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in s^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in r)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}s^{-1} \subseteq r\text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$r \subseteq s^{-1}$" und
aus A2 gleich "$s^{-1} \subseteq r$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $r = s^{-1}$.

□

20-16. Falls f eine Funktion ist, so dass für alle $\alpha \in E$ die Gleichung $\alpha = f(\alpha)$ besteht, dann ist die EIdentität eine TeilKlasse von f:

<u>20-16(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = f(\alpha))$.

Dann folgt "$\mathsf{id}_E \subseteq f$".

<u>Beweis **20-16**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \mathsf{id}_E$.

`2`: Aus `Thema1`“$\beta \in \mathsf{id}_E$”
folgt via **20-9**: $\exists \Omega : (\beta = (\Omega, \Omega)) \wedge (\Omega \in E)$.

`3.1`: Aus `2`“$\ldots \Omega \in E$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2`: Aus `2`“$\ldots \Omega \in E$” und
aus →)“$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = f(\alpha))$”
folgt: $\Omega = f(\Omega)$.

`4.1`: Aus `3.2`“$\Omega = f(\Omega)$” und
aus `3.1`“Ω Menge”
folgt: $f(\Omega)$ Menge.

`4.2`: Aus `3.2`“$\Omega = f(\Omega)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Omega) = (\Omega, f(\Omega))$.

`5.1`: Aus `4.1`“$f(\Omega)$ Menge”
folgt via **17-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`5.2`: Aus `2`“$\ldots \beta = (\Omega, \Omega) \ldots$” und
aus `4.2`“$(\Omega, \Omega) = (\Omega, f(\Omega))$”
folgt: $\beta = (\Omega, f(\Omega))$.

`6`: Aus →)“f Funktion” und
aus `5.1`“$\Omega \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-22**: $(\Omega, f(\Omega)) \in f$.

`7`: Aus `5.2`“$\beta = (\Omega, f(\Omega))$” und
aus `6`“$(\Omega, f(\Omega)) \in f$”
folgt: $\beta \in f$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{id}_E) \Rightarrow (\beta \in f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{id}_E \subseteq f$.

□

20-17. Wenn für eine Funktion f für alle α aus ihrem Definitions-Bereich die Gleichung $\alpha = f(\alpha)$ gilt, dann ist f gleich der $(\mathsf{dom}\, f)$Identität:

20-17(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\alpha = f(\alpha))$.

Dann folgt "$f = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$".

<u>Beweis **20-17**</u>

`Thema1.1` $\beta \in f$.

`2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1`"$\beta \in f$"
folgt via **18-25**:
$$\exists \Omega : (\beta = (\Omega, f(\Omega))) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f).$$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\alpha = f(\alpha))$"
folgt: $\Omega = f(\Omega)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **20-9**: $(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$.

`4:` Aus `3.1`"$\Omega = f(\Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Omega) = (\Omega, f(\Omega))$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \beta = (\Omega, f(\Omega)) \ldots$" und
aus `4`"$(\Omega, \Omega) = (\Omega, f(\Omega))$"
folgt: $\beta = (\Omega, \Omega)$.

`6:` Aus `5`"$\beta = (\Omega, \Omega)$" und
aus `3.2`"$(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$"
folgt: $\beta \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in f) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$f \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$"

`1.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\alpha = f(\alpha))$"
folgt via **20-16**: $\mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f} \subseteq f$.

`2:` Aus `A1` gleich "$f \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f} \subseteq f$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, f}$.

□

20-18. Wird eine Funktion g auf E durch eine Funktion f "invertiert", dann ist die EIdentität eine TeilKlasse von $f \circ g$:

20-18(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ g *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = f(g(\alpha)))$.

Dann folgt "$\mathsf{id}_E \subseteq f \circ g$".

Beweis **20-18**

`1.1:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus →) “ g Funktion ”
folgt via **18-46**: `A1` | “ $f \circ g$ Funktion ”

`Thema1.2` $\beta \in E$.

`3.1:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus →) “ g Funktion ”
folgt via **18-46**: $(f \circ g)(\beta) = f(g(\beta))$.

`3.2:` Aus `Thema1.2` “ $\beta \in E$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = f(g(\alpha)))$ ”
folgt: $\beta = f(g(\beta))$.

`4:` Aus `3.2` “ $\beta = f(g(\beta))$ ” und
aus `3.1` “ $(f \circ g)(\beta) = f(g(\beta))$ ”
folgt: $\beta = (f \circ g)(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta = (f \circ g)(\beta))$.

Konsequenz: `A2` | “ $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta = (f \circ g)(\beta))$ ”

`1.3:` Aus `A1` gleich “ $f \circ g$ Funktion ” und
aus `A2` gleich “ $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta = (f \circ g)(\beta))$ ”
folgt via **20-16**: $\mathsf{id}_E \subseteq f \circ g$.

□

20-19. Wenn für zwei Funktionen f, g für alle $\alpha \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$ die Gleichung $\alpha = (f \circ g)(\alpha)$ besteht, dann ist $f \circ g$ die $(\mathsf{dom}\,(f \circ g))$Identität:

20-19(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) g *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \Rightarrow (\alpha = f(g(\alpha)))$.

Dann folgt "$f \circ g = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,(f \circ g)}$".

Beweis **20-19**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus $\rightarrow$) "g Funktion"
folgt via **18-46**: $f \circ g$ Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \Rightarrow (\alpha = f(g(\alpha))$"
folgt: $\beta = f(g(\beta))$.

`2.2:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus $\rightarrow$) "g Funktion"
folgt via **18-46**: $(f \circ g)(\beta) = f(g(\beta))$.

`3:` Aus `2.1`"$\beta = f(g(\beta))$" und
aus `2.2`"$(f \circ g)(\beta) = f(g(\beta))$"
folgt: $\beta = (f \circ g)(\beta)$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \Rightarrow (\beta = (f \circ g)(\beta))$"

`2:` Aus `1.1`"$f \circ g$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \Rightarrow (\beta = (f \circ g)(\beta))$"
folgt via **20-17**: $f \circ g = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,(f \circ g)}$.

□

20-20. Die Aussagen von **20-14** über $x^{-1} \circ x$ und über Identitäten können unter Zusatzvoraussetzungen an x - x soll Relation oder Funktion sein - ausgedehnt werden:

20-20(Satz)

a) *Aus "f Funktion" folgt "$f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$".*

b) *Aus "r Relation" und "$r \circ r^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E$" folgt "$r$ Funktion".*

Beweis **20-20** a) VS gleich f Funktion.

1.1: Aus VS gleich "f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

1.2: Aus VS gleich "f Funktion"
folgt via **18-19**: f^{-1} injektiv.

2.1: Aus 1.1 "f Relation"
folgt via **13-3**: $f = (f^{-1})^{-1}$.

2.2: Aus 1.2 "f^{-1} injektiv"
folgt via **20-14**: $(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,(f^{-1})}$.

3: $f \circ f^{-1} \overset{2.1}{=} (f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} \overset{2.2}{=} \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,(f^{-1})} \overset{\mathbf{11\text{-}7}}{=} \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$.

4: Aus 3
folgt: $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$.

b) VS gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (r \circ r^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E)$.

1: Aus VS gleich "r Relation ..."
folgt via **13-3**: $r = (r^{-1})^{-1}$.

2: Aus 1 "$r = (r^{-1})^{-1}$" und
aus VS gleich "$\ldots r \circ r^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E$"
folgt: $(r^{-1})^{-1} \circ r^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E$.

3: Aus 2 "$(r^{-1})^{-1} \circ r^{-1} \subseteq \mathsf{id}_E$"
folgt via **20-14**: r^{-1} injektiv.

4: Aus VS gleich "r Relation..." und
aus 3 "r^{-1} injektiv"
folgt via **18-19**: r Funktion.

□

$$f : D \to B.$$
$$y[\{.\}].$$
AuswahlAxiom.

Ersterstellung: 11/10/05 **Letzte Änderung: 21/04/11**

21-1. Mit "$f : D \to B$" wird eine der Standardnotationen der Mathematik in die Essays eingeführt:

21-1(Definition)

"$f : D \to B$" genau dann, wenn gilt:

f Funktion.

$\wedge$

$\mathsf{dom}\, f = D$.

$\wedge$

$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

21-2. Falls $f : D \to B$, dann ist B eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, f$. Speziell gilt $f : D \to B$ also auch, wenn - unter anderem - B gleich dem Bild-Bereich von f ist:

21-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, f = D$.

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{ran}\, f = B$.

Dann folgt "$f : D \to B$".

Beweis **21-2**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{ran}\, f = B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{dom}\, f = D$" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to B$.

□

21-3. Mit Hilfe der Notation $f : D \to B$ ergibt sich das folgende "Funktions-Kriterium", aus dem insbesondere hervorgeht, dass sich jede Funktion f via $D = \mathsf{dom}\, f$ und $B = \mathsf{ran}\, f$ die Klassen D, B in der Notation "$f : D \to B$" "selbst erschafft":

21-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` f *Funktion.*

`ii)` $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$.

Beweis **21-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f Funktion.

Aus `VS` gleich "f Funktion",
aus "$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, f$" und
aus "$\mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **21-2**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$.

Aus `VS` gleich "$f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

□

21-4. Falls $f : D \to B$ und falls $x \in D$, dann ist $f(x)$ ein Element von B:

21-4(Satz)

Aus "$f : D \to B$" und "$x \in D$" folgt "$f(x) \in B$".

Beweis **21-4** `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (x \in D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
und aus `VS` gleich "$\ldots x \in D$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `1`"f Funktion $\ldots$" und
aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `3`"$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **0-4**: $f(x) \in B$.

□

21-5. Im folgenden Satz wird die Mehrdeutigkeit von "B" in der Notation "$f : D \to B$" thematisiert:

<u>**21-5(Satz)**</u>

Aus "$f : D \to B$" und "$B \subseteq W$" folgt "$f : D \to W$".

<u>Beweis **21-5**</u> `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (B \subseteq W)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus `VS` gleich "$\ldots B \subseteq W$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq W$.

`3:` Aus `1`"f Funktion ...",
aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$" und
aus `2`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq W$"
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to W$.

$\square$

21-6. Die Bedeutung des folgenden, an sich wenig bemerkenswerten Satzes liegt darin, in späteren Beweisen verkürzend zu wirken:

21-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow)$ $B = \mathsf{ran}\, f$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = B$.

b) $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D$.

Beweis **21-6**

1: Aus $\rightarrow)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

2.1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\, f$.

2.2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\, f$.

3.a): Aus 2.1 "$\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = \mathsf{ran}\, f$" und
aus $\rightarrow)$ "$B = \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(f^{-1}) = B$.

3.b): Aus 2.2 "$\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = \mathsf{dom}\, f$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(f^{-1}) = D$.

□

21-7. In der Notation “$f : D \to B$” bleibt der Bild-Bereich von f bis auf $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$ verborgen. Wenn also Interesse an $\mathsf{ran}\, f$ besteht und $f : D \to B$ bekannt ist, bleibt $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$ nachzuweisen:

21-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow)$ $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

Dann folgt “$B = \mathsf{ran}\, f$”.

Beweis **21-7**

1: Aus $\rightarrow)$ “$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

2: Aus $\rightarrow)$ “$B \subseteq \mathsf{ran}\, f$” und
aus 1 “$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $B = \mathsf{ran}\, f$.

$\square$

21-8. Ein Möglichkeit, sich unter der Voraussetzung $f : D \to B$ Klarheit über den Bild-Bereich von f zu verschaffen besteht gemäss folgendem Satzes darin, nachzuweisen, dass jedes $\alpha \in B$ Bild einer Klasse Ω unter f ist:

21-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (\exists \Omega : \alpha = f(\Omega))$.

Dann folgt "$B = \mathsf{ran}\, f$".

Beweis **21-8**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

2: Aus 1 "f Funktion ..." und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (\exists \Omega : \alpha = f(\Omega))$"
folgt via **18-23**: $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2 "$B \subseteq \mathsf{ran}\, f$" und
aus 1 "... $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $B = \mathsf{ran}\, f$.

□

21-9. Falls $f : D \to B$ und $g : C \to A$, dann sind f, g Funktionen, also ist auch $f \circ g$ eine Funktion und da via **14-6** die Klassen $\mathsf{dom}\,(f \circ g)$ und $\mathsf{ran}\,(f \circ g)$ spezifiziert werden können, ergibt sich der folgende Satz:

21-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

$\rightarrow$) $g : C \to A$.

Dann folgt:

a) $f \circ g : g^{-1}[D] \to B$.

b) $f \circ g : g^{-1}[D] \to f[\mathsf{ran}\, g]$.

c) $f \circ g : g^{-1}[D] \to f[A]$.

<u>Beweis **21-9**</u>

`1.1:` Aus →) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`1.2:` Aus →) "$g : C \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(g \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, g \subseteq A)$.

`1.3:` Via **14-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[\mathsf{dom}\, f]$.

`1.4:` Via **14-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(f \circ g) \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

`1.5:` Via **14-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(f \circ g) = f[\mathsf{ran}\, g]$.

`2.1:` Aus `1.1`"f Funktion ... " und
aus `1.2`"g Funktion... "
folgt via **18-46**: $f \circ g$ Funktion.

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[\mathsf{dom}\, f]$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[D]$.

`2.3:` Aus `1.4`"$\mathsf{ran}\,(f \circ g) \subseteq \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(f \circ g) \subseteq B$.

`2.4:` Aus `1.2`"$\ldots \mathsf{ran}\, g \subseteq A$"
folgt via **8-9**: $f[\mathsf{ran}\, g] \subseteq f[A]$.

`3.a):` Aus `2.1`"$f \circ g$ Funktion",
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[D]$" und
aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(f \circ g) \subseteq B$"
folgt via **21-1(Def)**: $f \circ g : g^{-1}[D] \to B$.

`3.b):` Aus `2.1`"$f \circ g$ Funktion",
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[D]$" und
aus `1.5`"$\mathsf{ran}\,(f \circ g) = f[\mathsf{ran}\, g]$"
folgt via **21-2**: $f \circ g : g^{-1}[D] \to f[\mathsf{ran}\, g]$.

`4.c):` Aus `3.b)`"$f \circ g : g^{-1}[D] \to f[\mathsf{ran}\, g]$" und
aus `2.4`"$f[\mathsf{ran}\, g] \subseteq f[A]$"
folgt via **21-5**: $f \circ g : g^{-1}[D] \to f[A]$.

□

21-10. Im folgenden Satz wird der Frage nachgegangen, unter welchen Voraussetzungen aus $f : D \to B$ und $g : C \to A$ die Aussage $f \circ g : C \to B$ folgt. Hinreichend hierfür ist $f : D \to B$ und $g : C \to D$ - hier tritt "D" zweimal auf - oder $f : D \to B$ und $g : C \to A$ mit $A \subseteq D$:

21-10(Satz)

Es gelte:

→) $f : D \to B$.

→) $g : C \to D$.

oder

"$g : C \to A$" *und* "$A \subseteq D$".

Dann folgt "$f \circ g : C \to B$".

<u>Beweis **21-10**</u>

1: Nach $\rightarrow$) gilt: $(g : C \rightarrow D) \vee ((g : C \rightarrow A) \wedge (A \subseteq D))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $g : C \rightarrow D$.

`1.2.Fall` $(g : C \rightarrow A) \wedge (A \subseteq D)$.

Aus `1.1.Fall`“$g : C \rightarrow A$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots A \subseteq D$”
folgt via **21-5**: $g : C \rightarrow D$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` “$g : C \rightarrow D$”

2.1: Aus `A1` gleich “$g : C \rightarrow D$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, g = C$.

2.2: Aus `A1` gleich “$g : C \rightarrow D$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, g \subseteq D$.

2.3: Aus $\rightarrow$)“$f : D \rightarrow B$” und
aus `A1` gleich “$g : C \rightarrow D$”
folgt via **21-9**: $f \circ g : g^{-1}[D] \rightarrow B$.

3: Aus 2.2“$\mathsf{ran}\, g \subseteq D$”
folgt via **2-10**: $D \cap \mathsf{ran}\, g = \mathsf{ran}\, g$.

4: $$g^{-1}[D] \stackrel{\mathbf{11\text{–}19}}{=} g^{-1}[D \cap \mathsf{ran}\, g] \stackrel{3}{=} g^{-1}[\mathsf{ran}\, g] \stackrel{\mathbf{11\text{–}19}}{=} \mathsf{dom}\, g \stackrel{2.1}{=} C.$$

5: Aus 2.3“$f \circ g : g^{-1}[D] \rightarrow B$” und
aus 4“$g^{-1}[D] = \ldots = C$”
folgt: $f \circ g : C \rightarrow B$.

□

21-11. Wenn $f : D \to B$, $g : C \to A$ und wenn für alle $\alpha \in D$ die Gleichung $f(\alpha) = g(\alpha)$ besteht, dann ist f die Einschränkung von g auf $D = \mathsf{dom}\, f$ und somit eine TeilKlasse von g und es gilt $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$ sowie $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap \mathsf{ran}\, g$, so dass $f : D \to B \cap A$ und $f : D \to B \cap \mathsf{ran}\, g$ folgt. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - e) - c) - d) - g) - f)`:

21-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

$\rightarrow$) $g : C \to A$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$.

Dann folgt:

a) f *Einschränkung von* g *auf* D.

b) $f \subseteq g$.

c) $D \subseteq C$.

d) $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$.

e) $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap \mathsf{ran}\, g$.

f) $f : D \to B \cap A$.

g) $f : D \to B \cap \mathsf{ran}\, g$.

<u>Beweis **21-11**</u>

`1.1:` Aus →) “$g : C \to A$”
folgt via **21-1(Def)**: $(g \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = C) \wedge (\mathsf{ran}\, g \subseteq A)$.

`1.2:` Aus →) “$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Fuktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`2:` Aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$” und
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$.

`3:` Aus `1.1`“g Funktion…”,
aus `1.2`“f Funktion…” und
aus `2`“$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$”
folgt via **18-47**: f Einschränkung von g auf $\mathsf{dom}\, f$.

`4.a):` Aus `3`“f Einschränkung von g auf $\mathsf{dom}\, f$” und
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$”
folgt: f Einschränkung von g auf D.

`4.b):` Aus `3`“f Einschränkung von g auf $\mathsf{dom}\, f$”
folgt via **15-3**: $f \subseteq g$.

`5:` Aus `4.b)`“$f \subseteq g$”
folgt via **7-10**: $(\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{ran}\, g)$.

`6.1:` Aus `1.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$” und
aus `5`“$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$”
folgt: $D \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

`6.2:` Aus `5`“$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{ran}\, g$” und
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{ran}\, g \subseteq A$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq A$.

`6.e):` Aus `1.2`“$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$” und
aus `5`“$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{ran}\, g$”
folgt via **2-12**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap \mathsf{ran}\, g$.

…

Beweis **21-11** ...

`7.c):` Aus `6.1`“$D \subseteq \mathsf{dom}\, g$” und
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{dom}\, g = C \ldots$”
folgt: $D \subseteq C$.

`7.d):` Aus `1.2`“$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$” und
aus `6.2`“$\mathsf{ran}\, f \subseteq A$”
folgt via **2-12**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$.

`7.g):` Aus `1.2`“f Funktion... ”,
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$” und
aus `6.e))`“$\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap \mathsf{ran}\, g$”
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to B \cap \mathsf{ran}\, g$.

`8.f):` Aus `1.2`“f Funktion... ”,
aus `1.2`“$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$” und
aus `7.d)`“$\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$”
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to B \cap A$.

$\square$

21-12. Wenn $f : D \to B$ und $g : D \to A$ - hier tritt "D" zweimal auf - und wenn für alle $\alpha \in D$ die Gleichung $f(\alpha) = g(\alpha)$ gilt, dann ist $f = g$ und es gilt $f : D \to B \cap A$ und $g : D \to A \cap B$:

21-12(Satz)

Es gelte:

→) $f : D \to B$.

→) $g : D \to A$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$.

Dann folgt:

a) $f = g$.

b) $f : D \to B \cap A$.

c) $g : D \to A \cap B$.

Beweis **21-12**

1: Aus →) "$f : D \to B$",
aus →) "$g : D \to A$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
folgt via **21-11**: $f \subseteq g$.

2: Aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$.

3: Aus →) "$g : D \to A$",
aus →) "$f : D \to B$" und
aus 2 "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (g(\alpha) = f(\alpha))$"
folgt via **21-11**: $g \subseteq f$.

4.a): Aus 1 "$f \subseteq g$" und
aus 3 "$g \subseteq f$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = g$.

...

<u>Beweis</u> **21-12** . . .

5.1: Aus →) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

5.2: Aus →) "$g : D \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(g \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = D) \wedge (\mathsf{ran}\, g \subseteq A)$.

5.3: Aus 4.a) "$f = g$"
folgt: $\mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, g$.

6.1: Aus 5.3 "$\mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, g$" und
aus 5.1 "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt: $\mathsf{ran}\, g \subseteq B$.

6.2: Aus 5.3 "$\mathsf{ran}\, f = \mathsf{ran}\, g$" und
aus 5.2 "$\ldots \mathsf{ran}\, g \subseteq A$"
folgt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq A$.

7.1: Aus 5.1 "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus 6.2 "$\mathsf{ran}\, f \subseteq A$"
folgt via **2-12**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$.

7.2: Aus 5.2 "$\ldots \mathsf{ran}\, g \subseteq A$" und
aus 6.1 "$\mathsf{ran}\, g \subseteq B$"
folgt via **2-12**: $\mathsf{ran}\, g \subseteq A \cap B$.

8.b): Aus 5.1 "f Funktion. . . ",
aus 5.1 "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$" und
aus 7.1 "$\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$"
folgt via **21-1(Def)**: $f : D \to B \cap A$.

8.c): Aus 5.2 "g Funktion. . . ",
aus 5.2 "$\ldots \mathsf{dom}\, g = D \ldots$" und
aus 7.2 "$\mathsf{ran}\, g \subseteq A \cap B$"
folgt via **21-1(Def)**: $g : D \to A \cap B$.

□

21-13. Die Notation "$f : D \to B$" wird nun auf die bereits eingeführten Funktionen 0, zo_E und id_E angewendet. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - e) - d)`:

21-13(Satz)

a) $0 : 0 \to 0$.

b) $\mathsf{zo} : \mathcal{U} \to \{0\}$.

c) $\mathsf{zo}_E : E \to \{0\}$.

d) $\mathsf{id} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

e) $\mathsf{id}_E : E \to E$.

Beweis **21-13** a)

1.1: Via **18-51** gilt: $\quad$ 0 Funktion.

1.2: Via **7-11** gilt: $\quad \mathsf{dom}\, 0 = 0$.

1.3: Via **7-11** gilt: $\quad \mathsf{ran}\, 0 = 0$.

2: Aus 1.1"0 Funktion",
aus 1.2"$\mathsf{dom}\, 0 = 0$" und
aus 1.3"$\mathsf{ran}\, 0 = 0$"
folgt via **21-2**: $\quad 0 : 0 \to 0$.

c)

1: Via **20-5** gilt: $\quad (\mathsf{zo}_E \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E) \wedge (\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\})$.

2: Aus 1"zo_E Funktion ...",
aus 1"... $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$ ..." und
aus 1"... $\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\quad \mathsf{zo}_E : E \to \{0\}$.

b)

1.1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\quad \mathsf{zo}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \{0\}$.

1.2: Via **20-1(Def)** gilt: $\quad \mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$.

2: Aus 1.2"$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$" und
aus 1.1"$\mathsf{zo}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \{0\}$"
folgt: $\quad \mathsf{zo} : \mathcal{U} \to \{0\}$.

<u>Beweis</u> **21-13** ...

e)

1: Via **20-11** gilt: $(\mathsf{id}_E \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E) \wedge (\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E)$.

2: Aus 1"id_E Funktion ... ",
aus 1"... $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$ ..." und
aus 1"... $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt via **21-2**: $\mathsf{id}_E : E \to E$.

d)

1.1: Via des bereits bewiesenen e) gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

1.2: Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

2: Aus 1.2"$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$" und
aus 1.1"$\mathsf{id}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{id} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

$\square$

21-14. Mit dem folgenden Satz werden mit $f \circ g \subseteq \mathsf{id}_B$ und $g \circ f \subseteq \mathsf{id}_D$ hinreichende Bedingungen für Funktionen $f : D \to B$ und $g : B \to D$ gegeben, so dass $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$ gilt:

21-14(Satz)

Es gelte:

→) $f : D \to B$.

→) $g : B \to D$.

→) $f \circ g \subseteq \mathsf{id}_B$.

→) $g \circ f \subseteq \mathsf{id}_D$.

Dann folgt:

a) $g = f^{-1}$.

b) $f = g^{-1}$.

Beweis **21-14**

1.1: Aus →) "$g : B \to D$"
folgt via **21-1(Def)**: g Funktion

1.2: Aus →) "$g : B \to D$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, g \subseteq D$.

1.3: Aus →) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

1.4: Aus →) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

1.5: Aus →) "$g : B \to D$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, g = B$.

...

Beweis **21-14** . . .

2.1: Aus 1.1"g Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: g Relation.

2.2: Aus 1.5"$\mathsf{dom}\, g = B$"
folgt: $B = \mathsf{dom}\, g$.

2.3: Aus 1.3"$\mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $D = \mathsf{dom}\, f$.

3.1: Aus 2.2"$B = \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **0-6**: $B \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

3.2: Aus 2.3"$D = \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-6**: $D \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

4.1: Aus 1.2"$\mathsf{ran}\, g \subseteq D$" und
aus 3.2"$D \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $\mathsf{ran}\, g \subseteq D \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

4.2: Aus 1.4"$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus 3.1"$B \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

5.a): Aus 2.1"g Relation",
aus 4.1"$\mathsf{ran}\, g \subseteq D \subseteq \mathsf{dom}\, f$",
aus 4.2"$\mathsf{ran}\, f \subseteq B \subseteq \mathsf{dom}\, g$",
aus →)"$f \circ g \subseteq \mathsf{id}_B$" und
aus →)"$g \circ f \subseteq \mathsf{id}_D$"
folgt via **20-15**: $g = f^{-1}$.

6.1: Aus →)"$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

6.2: Aus 5.a)"$g = f^{-1}$"
folgt: $g^{-1} = (f^{-1})^{-1}$.

7: Aus 6.1"f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

8: Aus 7"f Relation"
folgt via **13-3**: $f = (f^{-1})^{-1}$.

9.b): Aus 8"$f = (f^{-1})^{-1}$" und
aus 6.2"$g^{-1} = (f^{-1})^{-1}$"
folgt: $f = g^{-1}$.

□

21-15. Nun wird unter anderem die Klasse $y[\{.\}]$ eingeführt. Wie sich später herausstellt, ist $y[\{.\}]$ eine Funktion, die jeder Menge p, für die $y[\{p\}]$ eine Menge ist, die Menge $y[\{p\}]$ zuordnet. Die anderen Klassen sind Definitions- oder Bild-Bereich von $y[\{.\}]$ oder sind die Einschränkung von $y[\{.\}$ auf x oder Definitions- oder Bild-Bereich dieser Einschränkung. Genaueres wird hierzu im Laufe dieses Essays entwickelt. Geeignete Einschränkungen von $y[\{.\}]$ spielen beim Beweis des **BijektionsLemmas** - siehe **#23** - eine Rolle. Einige Aussagen in diesem Essay Vorbereitungen dieses Beweises:

21-15(Definition)

1) $\mathsf{21.0}(y) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

2) $\mathsf{21.1}(E, y) = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\}.$$

3) $\mathsf{21.2}(E, y) = \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\}.$$

4) $y[\{.\}]$

$$= \mathsf{21.3}(y) = \{\omega : (\exists\Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\}.$$

21-16. Es folgt ein Kriterium für $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$:

21-16(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`ii)` *"p Menge" und "$y[\{p\}]$ Menge".*

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **21-16** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt: $y[\{p\}] \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2` "$y[\{p\}] \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: $y[\{p\}]$ Menge.

`3:` Aus `1.1` "p Menge" und
aus `2` "$y[\{p\}]$ Menge"
folgt: (p Menge) $\wedge$ ($y[\{p\}]$ Menge).

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich (p Menge) $\wedge$ ($y[\{p\}]$ Menge).

`1:` Aus `VS` gleich "... $y[\{p\}]$ Menge"
folgt via **0-19**: $y[\{p\}] \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$y[\{p\}] \in \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "p Menge..."
folgt: $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

□

21-17. Falls p eine Menge mit $p \notin \mathsf{dom}\, y$ ist, dann folgt $y[\{p\}] = 0$ und da 0 eine Menge ist, folgt via **21-16** *für Mengen* p die Aussage $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$:

21-17(Satz)

a) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, y$" *folgt* "$y[\{p\}] = 0$" *und* "$y[\{p\}]$ *Menge*".

b) *Aus* "p *Menge*" *und* "$p \notin \mathsf{dom}\, y$" *folgt* "$p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$".

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **21-17** a) VS gleich $p \notin \mathsf{dom}\, y$.

1: Aus VS gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, y$" folgt via **9-20**: $y[\{p\}] = 0$.

2: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

3: Aus 1"$y[\{p\}] = 0$" und aus 2"0 Menge" folgt: $y[\{p\}]$ Menge.

4: Aus 1 und aus 3 folgt: $(y[\{p\}] = 0) \wedge (y[\{p\}]$ Menge$)$.

b) VS gleich $(p$ Menge$) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, y)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, y$" folgt via des bereits bewiesenen a): $y[\{p\}]$ Menge.

2: Aus VS gleich "p Menge…" und aus 1"$y[\{p\}]$ Menge" folgt via **21-16**: $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

□

21-18. In vielen Fällen ist $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ eine Unmenge:

21-18(Satz)

a) $(\mathsf{dom}\, y)^C \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

b) *Aus "*$(\mathsf{dom}\, y)^C$ *Unmenge" folgt "*$\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ *Unmenge".*

c) *Aus "*$\mathsf{dom}\, y$ *Menge" folgt "*$\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ *Unmenge".*

d) *Aus "*y *Menge" folgt "*$\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ *Unmenge".*

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **21-18** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in (\mathsf{dom}\, y)^C$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in (\mathsf{dom}\, y)^C$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in (\mathsf{dom}\, y)^C$”
folgt via **3-2**: $\alpha \notin \mathsf{dom}\, y$.

`3:` Aus `2.1`“α Menge” und
aus `2.2`“$\alpha \notin \mathsf{dom}\, y$”
folgt via **21-17**: $\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, y)^C) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\mathsf{dom}\, y)^C \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`b) VS` gleich $(\mathsf{dom}\, y)^C$ Unmenge.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(\mathsf{dom}\, y)^C \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`2:` Aus `1`“$(\mathsf{dom}\, y)^C \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$” und
aus `VS` gleich “$(\mathsf{dom}\, y)^C$ Unmenge”
folgt via **0-7**: $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ Unmenge.

`c) VS` gleich $\mathsf{dom}\, y$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{dom}\, y$ Menge”
folgt via **3-6**: $(\mathsf{dom}\, y)^C$ Unmenge.

`2:` Aus `1`“$(\mathsf{dom}\, y)^C$ Unmenge”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ Unmenge.

`d) VS` gleich y Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “y Menge”
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\, y$ Menge.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\, y$ Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ Unmenge.

□

21-19. Wenn $y[\{\alpha\}]$ für alle $\alpha \in E$ eine Menge ist, dann ist E eine TeilKlasse von $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$:

21-19(Satz)

Aus "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ *Menge*)" *folgt* "$E \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$".

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **21-19** `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge).

`Thema1` $\beta \in E$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\beta \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\beta \in E$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge)"
folgt: $y[\{\beta\}]$ Menge.

`3:` Aus `2.1` "β Menge" und
aus `2.2` "$y[\{\beta\}]$ Menge"
folgt via **21-16**: $\beta \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

□

21-20. Als Vorbereitung für Späteres folgt ein Kriterium für
"$p \in E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$" :

21-20(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`ii)` "$p \in E$" *und* "$y[\{p\}]$ *Menge*".

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **21-20** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $p \in E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **2-2**: $(p \in E) \wedge (p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **21-16**: $y[\{p\}]$ Menge.

`3:` Aus `1`"$p \in E \ldots$" und
aus `2`
folgt: $(p \in E) \wedge (y[\{p\}]$ Menge$)$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (y[\{p\}]$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2:` Aus `1`"p Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots y[\{p\}]$ Menge"
folgt via **21-16**: $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `2`"$p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **2-2**: $p \in E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

□

21-21. Es folgt eine Aussage über Elemente von $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$:

21-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

Dann gibt es Ω so dass gilt:

`e.1)` $w = y[\{\Omega\}]$.

`e.2)` $\Omega \in E$.

`e.3)` $y[\{\Omega\}]$ *Menge.*

21-15(Def) $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **21-21**</u>

`1.1:` Aus →) "$w \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus →) "$w \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$" und
aus "$\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = y[\{\Omega\}])$.

`3:` Aus `2`"$\ldots w = y[\{\Omega\}]$" und
aus `1.1`"w Menge"
folgt: $y[\{\Omega\}]$ Menge.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots w = y[\{\Omega\}]$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `3`"$y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt: $\exists \Omega$:

$$w = y[\{\Omega\}]$$

$$\wedge \quad \Omega \in E$$

$$\wedge \quad y[\{\Omega\}] \text{ Menge.}$$

□

21-22. Es folgt eine hinreichende Bedingung für “$y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$” :

<u>21-22(Satz)</u>

Aus “$p \in E$” und “$y[\{p\}]$ Menge” folgt “$y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$”.

21-15(Def) $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **21-22**</u> `VS` gleich $(p \in E) \wedge (y[\{p\}]$ Menge$)$.

`1`: Aus `VS` gleich “$p \in E \ldots$”
folgt: $\exists p : p \in E$.

`2`: Aus `1`“$\exists p : p \in E$” und
aus “$y[\{p\}] = y[\{p\}]$”
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge (y[\{p\}] = y[\{p\}])$.

`3`: Aus `2`“$\exists p : (p \in E) \wedge (y[\{p\}] = y[\{p\}])$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y[\{p\}]$ Menge”
folgt: $y[\{p\}] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\}$.

`4`: Aus `3`“$y[\{p\}] \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = y[\{\Omega\}]))\} = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$”
folgt: $y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

□

21-23. Jedes Element aus $\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}$ ist eine TeilKlasse von $y[E]$ und in weiterer Folge eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\,y$, siehe `ab)`. Konsequenter Weise ist $\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(y[E])$ und von von $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\,y)$, siehe `cd)`:

21-23(Satz)

`a)` *Aus "$w\in\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}$" folgt "$w\subseteq y[E]$".*

`b)` *Aus "$w\in\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}$" folgt "$w\subseteq \mathsf{ran}\,y$".*

`c)` $\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}\subseteq\mathcal{P}(y[E])$.

`d)` $\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}\subseteq\mathcal{P}(\mathsf{ran}\,y)$.

21-15(Def) $\{y[\{\lambda\}]:\lambda\in E\}$.

<u>Beweis **21-23**</u> `ab)` `VS` gleich $w \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
folgt via **21-21**: $\exists \Omega : (w = y[\{\Omega\}]) \wedge (\Omega \in E)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \subseteq E$.

`3:` Aus `2`"$\{\Omega\} \subseteq E$"
folgt via **8-9**: $y[\{\Omega\}] \subseteq y[E]$.

`4.a):` Aus `1`"$\ldots w = y[\{\Omega\}] \ldots$" und
aus `3`"$y[\{\Omega\}] \subseteq y[E]$"
folgt: $w \subseteq y[E]$.

`5:` Via **8-10** gilt: $y[E] \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

`6.b):` Aus `4.a)`"$w \subseteq y[E]$" und
aus `5`"$y[E] \subseteq \mathsf{ran}\, y$"
folgt via **0-6**: $w \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

`c)`

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.
>
> Aus `Thema1`"$\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
> folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \subseteq y[E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq y[E])$.

Konsequenz via **0-29**: $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq \mathcal{P}(y[E])$.

`d)`

> $\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.
>
> Aus `Thema1`"$\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
> folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, y)$.

Konsequenz via **0-29**: $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

$\square$

21-24. Falls $p \in E \setminus \mathsf{dom}\, y$, dann ist $y[\{p\}] = 0$ ein Element von $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$. Es folgt: falls $0 \neq E \setminus \mathsf{dom}\, y$, dann $0 \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$:

<u>21-24(Satz)</u>

a) *Aus* "$p \in E \setminus \mathsf{dom}\, y$"

folgt "$y[\{p\}] = 0$" *und* "$y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"

und "$0 \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$".

b) *Aus* "$0 \neq E \setminus \mathsf{dom}\, y$" *folgt* "$0 \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$".

21-15(Def) $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **21-24**</u> `a)` `VS` gleich $p \in E \setminus \mathsf{dom}\, y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \setminus \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **5-3**: $(p \in E) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **9-20**: $y[\{p\}] = 0$.

`3:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`4:` Aus `2`"$y[\{p\}] = 0$" und
aus `3`"0 Menge"
folgt: $y[\{p\}]$ Menge.

`5:` Aus `1`"$p \in E \ldots$" und
aus `4`"$y[\{p\}]$ Menge"
folgt via **21-22**: $y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`6:` Aus `2`"$y[\{p\}] = 0$" und
aus `5`"$y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
folgt: $0 \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`7:` Aus `2`,
aus `5` und
aus `6`
folgt:

$$y[\{p\}] = 0$$
$$\wedge \quad y[\{p\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$$
$$\wedge \quad 0 \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}.$$

`b)` `VS` gleich $0 \neq E \setminus \mathsf{dom}\, y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \setminus \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E \setminus \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E \setminus \mathsf{dom}\, y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

□

21-25. Nun folgt eine Aussage über Elemente von $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$:

21-25(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

Dann gibt es Ω*, so dass gilt:*

`e.1)` $w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$.

`e.2)` $\Omega \in E$.

`e.3)` $y[\{\Omega\}]$ *Menge.*

21-15(Def) $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **21-25**</u>

`1.1:` Aus →) "$w \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus →) "$w \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$" und
"$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\}$.

`2:` Aus `1.1`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (\Omega, y[\{\Omega\}]))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$" und
aus `1.1`"w Menge"
folgt: $(\Omega, y[\{\Omega\}])$ Menge.

`4:` Aus `3`"$(\Omega, y[\{\Omega\}])$ Menge"
folgt via **PaarAxiom II**: $y[\{\Omega\}]$ Menge.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4`"$y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt: $\exists \Omega$:

$$w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$$

$$\wedge \quad \Omega \in E$$

$$\wedge \quad y[\{\Omega\}] \text{ Menge.}$$

□

21-26. Es folgt ein Kriterium fq̈r $(p,q) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$:

21-26(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äqqivalent:*

`i)` $(p,q) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

`ii)` *"$p \in E$" und "$q = y[\{p\}]$" und "$y[\{p\}]$ Menge".*

21-15(Def) $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

Beweis **21-26** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p,q) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **21-24**: $\exists \Omega : ((p,q) = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \wedge (\Omega \in E) \wedge (y[\{\Omega\}]$ Menge$)$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \ldots$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = y[\{\Omega\}])$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt: $p \in E$.

`3.2:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $y[\{p\}] = y[\{\Omega\}]$.

`4.1:` Aus `2`"$\ldots q = y[\{\Omega\}]$" und
aus `3.2`"$y[\{p\}] = y[\{\Omega\}]$"
folgt: $q = y[\{p\}]$.

`4.2:` Aus `3.2`"$y[\{p\}] = y[\{\Omega\}]$" und
aus `1.2`"$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt: $y[\{p\}]$ Menge.

`5:` Aus `3.1`,
aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(p \in E) \wedge (q = y[\{p\}]) \wedge (y[\{p\}]$ Menge$)$.

<u>Beweis **21-26**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (q = y[\{p\}]) \wedge (y[\{p\}] \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists p : p \in E$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = y[\{p\}] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y[\{p\}]$ Menge"
folgt: q Menge.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = y[\{p\}] \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, q) = (p, y[\{p\}])$.

`2.1:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `1.3`"q Menge"
folgt via **PaarAxiom II**: (p, q) Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\exists p : p \in E$" und
aus `1.4`"$(p, q) = (p, y[\{p\}])$"
folgt: $\exists p : (p \in E) \wedge ((p, q) = (p, y[\{p\}]))$.

`3:` Aus `2.2`"$\exists p : (p \in E) \wedge ((p, q) = (p, y[\{p\}]))$" und
aus `2.1`"(p, q) Menge"
folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\}$.

`4:` Aus `3`"$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, y[\{\Omega\}])))\} = \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$"
folgt: $(p, q) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

$\square$

21-27. Im folgenden Satz wird Einiges über Elemente von $y[\{.\}]$ ausgesagt:

21-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $w \in y[\{.\}]$.

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

`e.1)` $w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$.

`e.2)` Ω *Menge.*

`e.3)` $y[\{\Omega\}]$ *Menge.*

Beweis **21-27**

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"$w \in y[\{.\}]$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `1.1`"$w \in y[\{.\}]$" und
aus "$y[\{.\}] = \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\}$"
folgt: $\exists \Omega : w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$.

`3:` Aus `2`"$\ldots w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$" und
aus `1.1`"w Menge"
folgt: $(\Omega, y[\{\Omega\}])$ Menge.

`4:` Aus `3`"$(\Omega, y[\{\Omega\}])$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega \text{ Menge}) \wedge (y[\{\Omega\}] \text{ Menge})$.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$",
aus `4`"Ω Menge$\ldots$" und
aus `4`"$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt: $\exists \Omega$:

$$w = (\Omega, y[\{\Omega\}])$$
$$\wedge \quad \Omega \text{ Menge}$$
$$\wedge \quad y[\{\Omega\}] \text{ Menge.}$$

$\square$

21-28. Im folgenden Satz wird ein Kriterium dafür formuliert, dass ein geordnetes Paar ein Element von $y[\{.\}]$ ist:

> **21-28(Satz)**
>
> *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*
>
> `i)` $(p,q) \in y[\{.\}]$.
>
> `ii)` *"p Menge" und "$q = y[\{p\}]$" und "$y[\{p\}]$ Menge".*

Beweis **21-28** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(p,q) \in y[\{.\}]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in y[\{.\}]$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in y[\{.\}]$"
folgt via **21-27**:
$$\exists \Omega : ((p,q) = (\Omega, y[\{\Omega\}])) \wedge (\Omega \text{ Menge}) \wedge (y[\{\Omega\}] \text{ Menge}).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \ldots$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = y[\{\Omega\}])$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt: p Menge.

`3.2:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$"
folgt: $y[\{p\}] = y[\{\Omega\}]$.

`4.1:` Aus `2`"$\ldots q = y[\{\Omega\}]$" und
aus `3.2`"$y[\{p\}] = y[\{\Omega\}]$"
folgt: $q = y[\{p\}]$.

`4.2:` Aus `1.2`"$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge" und
aus `3.2`"$y[\{p\}] = y[\{\Omega\}]$"
folgt: $y[\{p\}]$ Menge.

`5:` Aus `3.1`,
aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q = y[\{p\}]) \wedge (y[\{p\}] \text{ Menge})$.

<u>Beweis **21-28**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q = y[\{p\}]) \wedge (y[\{p\}] \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt: $\exists p : p$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = y[\{p\}] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y[\{p\}]$ Menge"
folgt: q Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q = y[\{p\}] \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, q) = (p, y[\{p\}])$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "p Menge…" und
aus `1.2` "q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`2.2:` Aus `1.1` "$\exists p \ldots$" und
aus `1.3` "$(p, q) = (p, y[\{p\}])$"
folgt: $\exists p : (p, q) = (p, y[\{p\}])$.

`3:` Aus `2.2` "$\exists p : (p, q) = (p, y[\{p\}]))$" und
aus `2.1` "(p, q) Menge"
folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\}$.

`4:` Aus `3` "$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, y[\{\Omega\}]))\} = y[\{.\}]$"
folgt: $(p, q) \in y[\{.\}]$.

$\square$

21-29. Aus **21-28** folgt schnell ein Kriterium für "$(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$". Der kurze Beweis deutet an, dass der Erkenntnisgewinn hinter **21-28** eher gering ist. Die Bedeutung jetzigen Satzes liegt in der Abkürzung, die durch seinen Einsatz in weiteren Beweisen erzielt werden kann:

21-29(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$.

`ii)` *"p Menge" und "y[{p}] Menge".*

Beweis **21-29** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$.

Aus `VS` gleich "$(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$"
folgt via **21-28**: $(p \text{ Menge}) \wedge (y[\{p\}] \text{ Menge})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (y[\{p\}] \text{ Menge})$.

Aus `VS` gleich "p Menge..." ,
aus "$y[\{p\}] = y[\{p\}]$" und
aus `VS` gleich "...$y[\{p\}]$ Menge"
folgt via **21-28**: $(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$.

$\square$

21-30. Gemäß folgendem Satz ist $y[\{.\}]$ eine Funktion mit Definitions-Bereich= $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ und Bild-Bereich= $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$. Außerdem ist der Bild-Bereich von $y[\{.\}]$ eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, y$. Falls $x \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$, dann $y[\{.\}](x) = y[\{x\}]$:

21-30(Satz)

a) $y[\{.\}]$ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

c) $\mathsf{ran}\,(y[\{.\}]) = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

d) $y[\{.\}] : \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

e) $y[\{.\}] : \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

f) *Aus* “$p \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$” *folgt* “$y[\{.\}](p) = y[\{p\}]$”.

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ *und* $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

<u>Beweis **21-30**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in y[\{.\}]$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in y[\{.\}]$” folgt via **21-27**:	$\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}])) \wedge (\Omega \text{ Menge}) \wedge (y[\{\Omega\}] \text{ Menge})$.
`3:` Aus `2`“$\dots \Omega$ Menge$\dots$” und aus `2`“$\dots y[\{\Omega\}]$ Menge” folgt via **6-8**:	$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.
`4:` Aus `2`“$\dots \alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \dots$” und aus `3`“$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” folgt:	$\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y[\{.\}]) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $y[\{.\}] \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: `A1` | “$y[\{.\}]$ Relation”

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$((\alpha, \beta) \in y[\{.\}]) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y[\{.\}])$.
`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha, \beta) \in y[\{.\}]$” folgt via **21-28**:	$\beta = y[\{\alpha\}]$.
`2.2:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha, \gamma) \in y[\{.\}]$” folgt via **21-28**:	$\gamma = y[\{\alpha\}]$.
`3:` Aus `2.1`“$\beta = y[\{\alpha\}]$” und aus `2.2`“$\gamma = y[\{\alpha\}]$” folgt:	$\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in y[\{.\}]) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y[\{.\}])) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$y[\{.\}]$ Relation” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in y[\{.\}]) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y[\{.\}])) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $y[\{.\}]$ Funktion.

<u>Beweis</u> **21-30** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$.
`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$” folgt via **7-2**:	$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in y[\{.\}]$.
`3:` Aus `2.2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in y[\{.\}]$” folgt via **21-28**:	$y[\{\alpha\}]$ Menge.
`4:` Aus `2.1`“α Menge” und aus `3`“$y[\{\alpha\}]$ Menge” folgt via **21-16**:	$\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}\text{”}}$

...

Beweis **21-30** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$”
folgt via **21-16**: $y[\{\alpha\}]$ Menge.

`3:` Aus `2.1`“α Menge” und
aus `2.2`“$y[\{\alpha\}]$ Menge”
folgt via **21-29**: $(\alpha, y[\{\alpha\}]) \in y[\{.\}]$.

`4:` Aus `3`“$(\alpha, y[\{\alpha\}]) \in y[\{.\}]$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}]))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \;\big|\; \text{“}\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

Beweis **21-30** `c)`

`Thema1.1`	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(y[\{.\}])$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(y[\{.\}])$" folgt via **7-4**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in y[\{.\}]$.
`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in y[\{.\}]$" folgt via **21-28**:	$(\Omega \text{ Menge}) \wedge (\alpha = y[\{\Omega\}]) \wedge (y[\{\Omega\}] \text{ Menge})$.
`4:` Aus `3` "Ω Menge… " folgt via **0-19**:	$\Omega \in \mathcal{U}$.
`5:` Aus `4` "$\Omega \in \mathcal{U}$" und aus `3` "$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge" folgt via **21-22**:	$y[\{\Omega\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.
`6:` Aus `3` "$\ldots \alpha = y[\{\Omega\}] \ldots$" und aus `5` "$y[\{\Omega\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$" folgt:	$\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(y[\{.\}])) \Rightarrow (\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{ran}\,(y[\{.\}]) \subseteq \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$"

…

Beweis **21-30** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **21-21**:
$$\exists \Omega : (\alpha = y[\{\Omega\}]) \wedge (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (y[\{\Omega\}] \text{ Menge}).$$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \alpha = y[\{\Omega\}] \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = (\Omega, y[\{\Omega\}])$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3.2`"Ω Menge" und
aus `2`"$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **21-29**: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}]$.

`5:` Aus `3.1`"$(\Omega, \alpha) = (\Omega, y[\{\Omega\}])$" und
aus `4`"$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}]$"
folgt: $(\Omega, \alpha) \in y[\{.\}]$.

`6:` Aus `5`"$(\Omega, \alpha) \in y[\{.\}]$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(y[\{.\}])$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(y[\{.\}]))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathsf{ran}\,(y[\{.\}])\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(y[\{.\}]) \subseteq \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$" und
aus `A2` gleich "$\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathsf{ran}\,(y[\{.\}])$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(y[\{.\}]) = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

<u>Beweis **21-30** `de)`</u>

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $y[\{.\}]$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(y[\{.\}]) = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`2.d):` Aus `1.1`"$y[\{.\}]$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$" und
aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(y[\{.\}]) = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **21-2**: $y[\{.\}] : \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$.

`3:` Via **21-23** gilt: $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,y)$.

`4.e):` Aus `2.d)`"$y[\{.\}] : \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\}$" und
aus `3`"$\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,y)$"
folgt via **21-5**: $y[\{.\}] : \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,y)$.

`f)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt: $p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`3:` Aus `2`"$p \in \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$"
folgt via **21-16**: $(p \text{ Menge}) \wedge (y[\{p\} \text{ Menge})$.

`4:` Aus `3`"p Menge..." und
aus `3`"...$y[\{p\}]$ Menge"
folgt via **21-29**: $(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$.

`5:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $y[\{.\}]$ Funktion.

`6:` Aus `5`"$y[\{.\}]$ Funktion" und
aus `4`"$(p, y[\{p\}]) \in y[\{.\}]$"
folgt via **18-20**: $y[\{p\}] = y[\{.\}](p)$.

`7:` Aus `6`
folgt: $y[\{.\}](p) = y[\{p\}]$.

□

21-31. Das Bild von E unter $y[\{.\}]$ ist $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$:

<u>**21-31(Satz)**</u>

$$y[\{.\}][E] = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}.$$

21-15(Def) $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **21-31**</u>

`Thema1.1` $\alpha \in y[\{.\}][E]$.

2: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in y[\{.\}][E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \alpha) \in y[\{.\}])$.

3: Aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in y[\{.\}]$"
folgt via **21-28**: $(\alpha = y[\{\Omega\}]) \wedge (y[\{\Omega\}]$ Menge$)$.

4: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 3"$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **21-22**: $y[\{\Omega\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

5: Aus 3"$\alpha = y[\{\Omega\}] \ldots$" und
aus 4"$y[\{\Omega\}] \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
folgt: $\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y[\{.\}][E]) \Rightarrow (\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$y[\{.\}][E] \subseteq \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"

<u>Beweis</u> **21-31** . . .

`Thema1.2` $\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

2: Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$"
folgt via **21-21**:
$\exists \Omega : (\alpha = y[\{\Omega\}]) \wedge (\Omega \in E) \wedge (y[\{\Omega\}]$ Menge$)$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

4: Aus 3 "Ω Menge" und
aus 2 "$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **21-28**: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}]$.

5: Aus 4 "$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}]$" und
aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **8-8**: $y[\{\Omega\}] \in y[\{.\}][E]$.

6: Aus 2 "$\ldots \alpha = y[\{\Omega\}] \ldots$" und
aus 5 "$y[\{\Omega\}] \in y[\{.\}][E]$"
folgt: $\alpha \in y[\{.\}][E]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \Rightarrow (\alpha \in y[\{.\}][E]))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq y[\{.\}][E]$"

1.3: Aus `A1` gleich "$y[\{.\}][E] \subseteq \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$" und
aus `A2` gleich "$\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq y[\{.\}][E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y[\{.\}][E] = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

□

21-32. Die in **21-15(Def)** eingeführte Klasse $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$ ist die Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E:

21-32(Satz)

$$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} \textit{ Einschränkung von } y[\{.\}] \textit{ auf } E.$$

21-15(Def) $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **21-32**</u>

`Thema1.1` $\alpha \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$”
folgt via **21-25**:
$\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}])) \wedge (\Omega \in E) \wedge (y[\{\Omega\}]$ Menge).

`2.1:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge”
folgt via **0-19**: $y[\{\Omega\}] \in \mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2.1`“Ω Menge” und
aus `1`“$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge”
folgt via **21-29**: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}]$.

`3.2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus `2.2`“$y[\{\Omega\}] \in \mathcal{U}$”
folgt via **6-6**: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in E \times \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1`“$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}]$” und
aus `3.2`“$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in E \times \mathcal{U}$”
folgt via **2-2**: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$.

`5:` Aus `1`“$\ldots \alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \ldots$” und
aus `4`“$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$”
folgt: $\alpha \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} \subseteq y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$”

...

Beweis **21-32** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$.

1: Aus Thema1.2"$\alpha \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y[\{.\}]) \wedge (\alpha \in E \times \mathcal{U})$.

2: Aus 1"$\alpha \in y[\{.\} \ldots$"
folgt via **21-27**:
$\exists \Omega : (\alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}])) \wedge (y[\{\Omega\}]$ Menge$)$.

3: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \ldots$" und
aus 1"$\ldots \alpha \in E \times \mathcal{U}$"
folgt: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in E \times \mathcal{U}$.

4: Aus 3"$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in E \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-6**: $\Omega \in E$.

5: Aus 4"$\Omega \in E$",
aus "$y[\{\Omega\}] = y[\{\Omega\}]$" und
aus 2"$\ldots y[\{\Omega\}]$ Menge"
folgt via **21-25**: $(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

6: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, y[\{\Omega\}]) \ldots$" und
aus 5"$(\Omega, y[\{\Omega\}]) \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$"
folgt: $\alpha \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \in \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"} y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U}) \subseteq \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} \text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} \subseteq y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$" und
aus A2 gleich "$y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U}) \subseteq \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} = y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$.

2: Aus 1.3"$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\} = y[\{.\}] \cap (E \times \mathcal{U})$"
folgt via **15-1(Def)**:
$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E.

□

21-33. Zusammenstellung von Eigenschaften von f, wenn f die Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E, also gleich $\{\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$ ist:

21-33(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Einschränkung von* $y[\{.\}]$ *auf* E.

Dann folgt:

a) $f = \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

b) f *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\, f = E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

d) $\mathsf{ran}\, f = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

e) $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

f) $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(y[E])$.

g) $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

h) *Aus* "$x \in \mathsf{dom}\, f$" *folgt* "$f(x) = y[\{x\}]$".

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ *und* $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

Beweis **21-33** a)

1: Via **21-32** gilt: $\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E.

2: Aus $\rightarrow)$ "f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E" und
aus 1 "$\{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E"
folgt via **15-2**: $f = \{(\lambda, y[\{\lambda\}]) : \lambda \in E\}$.

b)

1: Via **21-30** gilt: $y[\{.\}]$ Funktion.

2: Aus 1 "$y[\{.\}]$ Funktion" und
aus $\rightarrow)$ "f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E"
folgt via **18-47**: f Funktion.

<u>Beweis **21-33**</u> `cd)`

`1.1:` Aus →) “ f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E ”
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\, f = E \cap \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$.

`1.2:` Aus →) “ f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E ”
folgt via **15-6**: $\mathsf{ran}\, f = y[\{.\}][E]$.

`2.1:` Via **21-30** gilt: $\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`2.2:` Via **21-31** gilt: $y[\{.\}][E] = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`3.c):` Aus `1` “ $\mathsf{dom}\, f = E \cap \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])$ ” und
aus `2.1` “ $\mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) = \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ ”
folgt: $\mathsf{dom}\, f = E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`3.d):` Aus `1` “ $\ldots \mathsf{ran}\, f = y[\{.\}][E]$ ” und
aus `2.2` “ $y[\{.\}][E] = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$ ”
folgt: $\mathsf{ran}\, f = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`efg)`

`1.1:` Aus →) “ f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: f Funktion.

`1.2:` Aus →) “ f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E ”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{dom}\, f = E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

`1.3:` Aus →) “ f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E ”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ran}\, f = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`2.e):` Aus `1.1` “ f Funktion ”,
aus `1.2` “ $\mathsf{dom}\, f = E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$ ” und
aus `1.3` “ $\mathsf{ran}\, f = \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$ ”
folgt via **21-2**: $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

`2.1:` Via **21-23** gilt: $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq \mathcal{P}(y[E])$.

`2.2:` Via **21-23** gilt: $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

`3.f):` Aus `2.e)` “ $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$ ” und
aus `2.1` “ $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq \mathcal{P}(y[E])$ ”
folgt via **21-5**: $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(y[E])$.

`3.g):` Aus `2.e)` “ $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$ ” und
aus `2.2` “ $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$ ”
folgt via **21-5**: $f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

Beweis **21-33** `h)` `VS` gleich $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`1:` Aus →) "f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **ES**: $(x \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}])) \wedge (f(x) = y[\{.\}](x))$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\,(y[\{.\}]) \ldots$"
folgt via **21-30**: $y[\{.\}](x) = y[\{x\}]$.

`4:` Aus `2`"$\ldots f(x) = y[\{.\}](x)$" und
aus `3`"$y[\{.\}](x) = y[\{x\}]$"
folgt: $f(x) = y[\{x\}]$.

$\square$

21-34. In dem in Kürze erscheinenden **AuswahlAxiom** spielen Funktionen eine Rolle, die den Wert 0 *nicht* annehmen. Nicht nur vor diesem Hintergrund ist der folgende Satz von Interesse:

21-34(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Einschränkung von* $y[\{.\}]$ *auf* E.

$\rightarrow$) $x \in \mathsf{dom}\, y$.

Dann folgt "$0 \neq f(x)$".

Beweis **21-34**

1: Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **9-19**: $0 \neq y[\{x\}]$.

2: Es gilt: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \vee (x \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus $\rightarrow$) "f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E" und
aus 2.1.Fall "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **21-33**: $f(x) = y[\{x\}]$.

4: Aus 1 "$0 \neq y[\{x\}]$" und
aus 3 "$f(x) = y[\{x\}]$"
folgt: $0 \neq f(x)$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathsf{dom}\, f$.

3.1: Aus 2.2.Fall "$x \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(x) = \mathcal{U}$.

3.2: Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}$.

4: Aus 3.2 "$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus 3.1 "$f(x) = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq f(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq f(x)$.

□

21-35. Der Definitions-Bereich der Einschränkung f von $y[\{.\}]$ auf E nimmt in jenen Fällen, in denen für alle $\alpha \in E$ die Klasse $y[\{\alpha\}]$ eine Menge ist mit $\mathsf{dom}\, f = E$ besonders einfache Form an:

21-35(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E.*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\, f = E$.

b) $f : E \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

c) $f : E \to \mathcal{P}(y[E])$.

d) $f : E \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

e) *Aus "$x \in E$" folgt "$f(x) = y[\{x\}]$".*

21-15(Def) $\{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

Beweis **21-35** abcd)

21-15(Def) $\{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E" folgt via **21-33**:

$$\mathsf{dom}\, f = E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$$
$$\wedge \quad f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$$
$$\wedge \quad f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(y[E])$$
$$\wedge \quad f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y).$$

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$" folgt via **21-19**: $E \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$.

...

<u>Beweis **21-35**</u> `abcd)` ...

`2:` Aus `1.2`“$E \subseteq \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\}$”
folgt via **2-10**: $E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} = E.$

`3.a):` Aus `2`“$E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} = E$” und
aus `1.1`“$\mathsf{dom}\, f = E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \ldots$”
folgt: $\mathsf{dom}\, f = E.$

`3.b):` Aus `2`“$E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} = E$” und
aus `1.1`“$\ldots f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\} \ldots$”
folgt: $f : E \to \{y[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}.$

`3.c):` Aus `2`“$E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} = E$” und
aus `1.1`“$\ldots f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(y[E]) \ldots$”
folgt: $f : E \to \mathcal{P}(y[E]).$

`3.d):` Aus `2`“$E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} = E$” und
aus `1.1`“$\ldots f : E \cap \{\omega : y[\{\omega\}] \in \mathcal{U}\} \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y) \ldots$”
folgt: $f : E \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y).$

`h) VS` gleich $x \in E.$

`1:` Aus $\rightarrow$)“f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E” und
aus $\rightarrow$)“$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge)”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\, f = E.$

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in E$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, f = E$”
folgt: $x \in \mathsf{dom}\, f.$

`3:` Aus $\rightarrow$)“f Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf E” und
aus `2`“$x \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **21-33**: $f(x) = y[\{x\}].$

□

21-36. Nun wird **21-34** für die Relation invers zu y adaptiert. Das jetzige Resultat geht über ein blosses Ersetzen von "y" durch "y^{-1}" in **21-34** hinaus, indem "$\mathsf{dom}\,(y^{-1})$" via **11-7** durch "$\mathsf{ran}\,y$" ersetzt wird:

21-36(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E.*

$\rightarrow)$ *$x \in \mathsf{ran}\,y$.*

Dann folgt "$0 \neq g(x)$".

Beweis **21-36**

1: Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,y = \mathsf{dom}\,(y^{-1})$.

2: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathsf{ran}\,y$" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\,y = \mathsf{dom}\,(y^{-1})$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\,(y^{-1})$.

3: Aus $\rightarrow)$ "g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E" und
aus 2 "$x \in \mathsf{dom}\,(y^{-1})$"
folgt via **21-34**: $0 \neq g(x)$.

$\square$

21-37. Nun wird **21-35** für die Relation invers zu y adaptiert. Das jetzige Resultat geht nur in d) über ein blosses Ersetzen von "y" durch "y^{-1}" in **21-35** hinaus, indem in d) "$\mathsf{ran}\,(y^{-1})$" via **11-7** durch "$\mathsf{dom}\,y$" ersetzt wird. Klarer Weise stellt sich die Frage nach der Rechtfertigung, eine derlei einfache Adaption eines bereits bewiesenen Resultats in die Essays aufzunehmen. Diese Frage wird durch einfacheres Zitieren an späterer Stelle beantwortet:

21-37(Satz)

Es gelte:

→) g *Einschränkung von* $y^{-1}[\{.\}]$ *auf* E.

→) $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,g = E$.

b) $g : E \to \{y^{-1}[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

c) $g : E \to \mathcal{P}(y^{-1}[E])$.

d) $g : E \to \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,y)$.

e) *Aus* "$x \in E$" *folgt* "$g(x) = y^{-1}[\{x\}]$".

21-15(Def) $\{y^{-1}[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

Beweis **21-37** abcd)

1.a): Aus →) "g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge$)$"
folgt via **21-35**: $\mathsf{dom}\,g = E$.

1.b): Aus →) "g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge$)$"
folgt via **21-35**: $g : E \to \{y^{-1}[\{\lambda\}] : \lambda \in E\}$.

1.c): Aus →) "g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge$)$"
folgt via **21-35**: $g : E \to \mathcal{P}(y^{-1}[E])$.

...

<u>Beweis</u> **21-37** `abcd)` ...

`1.1:` Aus →) "g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)"
folgt via **21-35**: $g : E \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,(y^{-1}))$.

`2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(y^{-1}) = \mathsf{dom}\,y$.

`3.d):` Aus `1.1` "$g : E \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\,(y^{-1}))$" und
aus `2` "$\mathsf{ran}\,(y^{-1}) = \mathsf{dom}\,y$"
folgt: $g : E \to \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,y)$.

`e) VS` gleich $x \in E$.

Aus →) "g Einschränkung von $y^{-1}[\{.\}]$ auf E",
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)" und
aus `VS` gleich "$x \in E$"
folgt via **21-35**: $g(x) = y^{-1}[\{x\}]$.

□

AuswahlAxiom. Mit der hier vorliegenden Version des **AuswahlAxiom**s betritt eines der bekanntesten Axiome der Mathematik die Essays. Präziser gesprochen wird ab nun davon ausgegangen, dass es zu jeder Funktion f, die den Wert 0 *nicht* annimmt eine Funktion g gibt, die den gleichen Definitions-Bereich wie f hat und die jedes Element β aus $\mathsf{dom}\, f$ auf ein Element von $f(\beta)$ abbildet - und die Existenz von g ist *nicht* an zusätzliche "Mächtigkeits-Forderungen" an $\mathsf{dom}\, f$ gebunden:

AuswahlAxiom

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$.

Dann gibt es g, so dass gilt:

e.1) $g : \mathsf{dom}\, f \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$.

e.2) $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$.

21-38. Hier wird das **AuswahlAxiom** für Funktionen $f : D \to B$ re-formuliert:

21-38(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$.

Dann gibt es g, so dass gilt:

`e.1)` $g : D \to \bigcup B$.

`e.2)` $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$.

<u>Beweis **21-38**</u>

1: Aus →) " $f : D \to B$ "
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

2.1: Aus 1 " $\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$ " und
aus →) " $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$ "
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$.

2.2: Aus 1 " $\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$ "
folgt via **1-15**: $\bigcup \mathsf{ran}\, f \subseteq \bigcup B$.

3: Aus 1 " f Funktion $\ldots$ " und
aus 2.1 " $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$ "
folgt via **AuswahlAxiom**: $\exists g :$

$$g : \mathsf{dom}\, f \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta)).$$

4.1: Aus 1 " $\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$ " und
aus 3 " $\ldots g : \mathsf{dom}\, f \to \bigcup \mathsf{ran}\, f \ldots$ "
folgt: $g : D \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$.

4.2: Aus 1 " $\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$ " und
aus 3 " $\ldots \forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$ "
folgt: $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$.

5: Aus 4.1 " $g : D \to \bigcup \mathsf{ran}\, f$ " und
aus 2.2 " $\bigcup \mathsf{ran}\, f \subseteq \bigcup B$ "
folgt via **21-5**: $g : D \to \bigcup B$.

6: Aus 3 " $\exists g \ldots$ ",
aus 5 " $g : D \to \bigcup B$ " und
aus 4.2 " $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$ "
folgt: $\exists g :$

$$g : D \to \bigcup B$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta)).$$

□

21-39. Nun wird das **AuswahlAxiom** für Funktionen $f : D \to \mathcal{P}(z)$ adaptiert:

21-39(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $f : D \to \mathcal{P}(z)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$.

Dann gibt es g, so dass gilt:

`e.1)` $g : D \to z$.

`e.2)` $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$.

Beweis **21-39**

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to \mathcal{P}(z)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$"
folgt via **21-38**: $\exists g :$

$$g : D \to \bigcup \mathcal{P}(z)$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta)).$$

`2:` Via **1-19** gilt: $\bigcup \mathcal{P}(z) = z$.

`3:` Aus `1`"$\ldots g : D \to \bigcup \mathcal{P}(z) \ldots$" und
aus `2`"$\bigcup \mathcal{P}(z) = z$"
folgt: $g : D \to z$.

`4:` Aus `1`"$\exists g \ldots$",
aus `3`"$g : D \to z$" und
aus `1`"$\ldots \forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta))$"
folgt: $\exists g :$

$$g : D \to z$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (g(\beta) \in f(\beta)).$$

$\square$

21-40. Die erste "echte" Anwendung des **AuswahlAxiom**s bezieht sich auf die Formulierung einer Bedingung, welche die Existenz einer Funktion $f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y$ sichert, so dass für alle $\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y$ die Aussage $f(\beta) \in y[\{\beta\}]$ gilt:

21-40(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Dann gibt es f, so dass gilt:

`e.1)` $f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y$.

`e.2)` $\forall \beta : (\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$.

Beweis **21-40**

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf $D \cap \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus 1"$\ldots \Omega$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf $D \cap \mathsf{dom}\, y$" und
aus $\rightarrow$)"$\forall \alpha : (\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$"
folgt via **21-35**: $\Omega : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y)$.

`Thema3.1` $\delta \in D \cap \mathsf{dom}\, y$

`4:` Aus `Thema3.1`"$\delta \in D \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $\delta \in \mathsf{dom}\, y$.

`5:` Aus 1"$\ldots \Omega$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf $D \cap \mathsf{dom}\, y$" und
aus 4"$\delta \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **21-34**: $0 \neq \Omega(\delta)$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \delta : (\delta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (0 \neq \Omega(\delta))$"

`3.2:` Aus 2"$\Omega : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, y) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \delta : (\delta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (0 \neq g(\delta))$"
folgt via **21-39**:

`A2` | "$\exists f : (f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y)$
$\wedge (\forall \epsilon : (\epsilon \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\epsilon) \in \Omega(\epsilon)))$"

...

<u>Beweis</u> **21-40** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.3}}$ $\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y$.

`4.1:` Aus `Thema3.3`"$\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y$" und
aus `A2` gleich "$\ldots \forall \epsilon : (\epsilon \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\epsilon) \in \Omega(\epsilon))$"
folgt: $f(\beta) \in \Omega(\beta)$.

`4.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ Einschränkung von $y[\{.\}]$ auf $D \cap \mathsf{dom}\, y$",
aus →)"$\forall \alpha : (\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge)" und
aus `Thema3.3`"$\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **21-35**: $\Omega(\beta) = y[\{\beta\}]$.

`5:` Aus `4.1`"$f(\beta) \in \Omega(\beta)$" und
aus `4.2`"$\Omega(\beta) = y[\{\beta\}]$"
folgt: $f(\beta) \in y[\{\beta\}]$.

Ergo `Thema3.3`: `A3` "$\forall \beta : (\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$"

`3.4:` Aus `A2` gleich "$\exists f \ldots$",
aus `A2` gleich "$\ldots f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y \ldots$" und
aus `A3` gleich "$\forall \beta : (\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$"
folgt: $\exists f :$

$$f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}]).$$

□

21-41. Die Verhältnisse von **21-40** vereinfachen sich im Fall “ $D \subseteq \mathsf{ran}\, y$” :

21-41(Satz)

Es gelte:

→) $D \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]\ \mathit{Menge})$.

Dann gibt es f, so dass gilt:

e.1) $f : D \to \mathsf{ran}\, y$.

e.2) $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$.

Beweis **21-41**

1: Aus →) “ $D \subseteq \mathsf{dom}\, y$ ”
folgt via **2-10**: $D \cap \mathsf{dom}\, y = D$.

2: Aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$ ” und
aus 1 “ $D \cap \mathsf{dom}\, y = D$ ”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$.

3: Aus 2 “ $\forall \alpha : (\alpha \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge$)$ ”
folgt via **21-40**:
$\exists f : (f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y) \wedge (\forall \beta : (\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}]))$.

4.1: Aus 3 “ $\ldots f : D \cap \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y \ldots$ ” und
aus 1 “ $D \cap \mathsf{dom}\, y = D$ ”
folgt: $f : D \to \mathsf{ran}\, y$.

4.2: Aus 1 “ $\ldots \forall \beta : (\beta \in D \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$ ” und
aus 1 “ $D \cap \mathsf{dom}\, y = D$ ”
folgt: $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$.

5: Aus 3 “ $\exists f \ldots$ ”,
aus 4.1 “ $f : D \to \mathsf{ran}\, y$ ” und
aus 4.2 “ $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$ ”
folgt: $\exists f$:

$$f : D \to \mathsf{ran}\, y$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}]).$$

□

21-42. Der folgende Satz ist mit "$D = \mathsf{dom}\, y$" ein Spezialfall von **21-41**:

21-42(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]\ \textit{Menge})$.

Dann gibt es f, so dass gilt:

e.1) $f : \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y$.

e.2) $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}])$.

Beweis **21-42**

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

2: Aus 1"$\mathsf{dom}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, y$" und
aus $\rightarrow$)"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (y[\{\alpha\}]$ Menge)"
folgt via **21-41**: $\exists f$:

$$f : \mathsf{dom}\, y \to \mathsf{ran}\, y$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (f(\beta) \in y[\{\beta\}]).$$

□

21-43. Es folgt die Adaption von **21-40** für “y^{-1}” an Stelle von “y” unter Einbeziehung der via **11-7** gültigen Gleichungen “$\mathsf{dom}\,(y^{-1}) = \mathsf{ran}\,y$” und “$\mathsf{ran}\,(y^{-1}) = \mathsf{dom}\,y$” :

21-43(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\,y) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]\ \mathit{Menge})$.

Dann gibt es g, so dass gilt:

e.1) $g : B \cap \mathsf{ran}\,y \to \mathsf{dom}\,y$.

e.2) $\forall\beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\,y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$.

<u>Beweis **21-43**</u>

`1.1:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{ran}\, y = \mathsf{dom}\,(y^{-1})$.

`1.2:` Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\, y = \mathsf{ran}\,(y^{-1})$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{ran}\, y = \mathsf{dom}\,(y^{-1})$” und
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{dom}\,(y^{-1})) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge).

`3:` Aus `2`“$\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{dom}\,(y^{-1})) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)”
folgt via **21-40**: $\exists g$:

$$g : B \cap \mathsf{dom}\,(y^{-1}) \to \mathsf{ran}\,(y^{-1})$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{dom}\,(y^{-1})) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}]).$$

`4.1:` Aus `3`“$\ldots g : B \cap \mathsf{dom}\,(y^{-1}) \to \mathsf{ran}\,(y^{-1}) \ldots$” und
aus `1.1`“$\mathsf{ran}\, y = \mathsf{dom}\,(y^{-1})$”
folgt: $g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{ran}\,(y^{-1})$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{dom}\,(y^{-1})) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$” und
aus `1.1`“$\mathsf{ran}\, y = \mathsf{dom}\,(y^{-1})$”
folgt: $\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$.

`5:` Aus `4.1`“$g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{ran}\,(y^{-1})$” und
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\, y = \mathsf{ran}\,(y^{-1})$”
folgt: $g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{dom}\, y$.

`6:` Aus `3`“$\exists g \ldots$”,
aus `5`“$g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{dom}\, y$” und
aus `4.2`“$\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$”
folgt: $\exists g$:

$$g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{dom}\, y$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}]).$$

□

21-44. Die Verhältnisse von **21-43** gewinnen im Fall “$B \subseteq \mathsf{ran}\, y$” an Klarheit:

<u>**21-44(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $B \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*).

Dann gibt es g, so dass gilt:

`e.1)` $g : B \to \mathsf{dom}\, y$.

`e.2)` $\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$.

<u>Beweis **21-44**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) “$B \subseteq \mathsf{ran}\, y$”
folgt via **2-10**: $B \cap \mathsf{ran}\, y = B$.

`2:` Aus $\rightarrow$) “$\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)” und
aus `1`“$B \cap \mathsf{ran}\, y = B$”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge).

`3:` Aus `2`“$\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)”
folgt via **21-43**:
$\exists g : (g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{dom}\, y) \wedge (\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}]))$.

`4.1:` Aus `3`“$\ldots g : B \cap \mathsf{ran}\, y \to \mathsf{dom}\, y \ldots$” und
aus `2`“$B \cap \mathsf{ran}\, y = B$”
folgt: $g : B \to \mathsf{dom}\, y$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$” und
aus `2`“$B \cap \mathsf{ran}\, y = B$”
folgt: $\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$.

`5:` Aus `3`“$\exists g \ldots$”,
aus `4.1`“$g : B \to \mathsf{dom}\, y$” und
aus `4.2`“$\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$”
folgt: $\exists g$:

$$g : B \to \mathsf{dom}\, y$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}]).$$

$\square$

21-45. Der folgende Satz ist mit "$B = \mathsf{ran}\, y$" ein Spezialfall von **21-44**:

21-45(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*).

Dann gibt es g, so dass gilt:

e.1) $g : \mathsf{ran}\, y \rightarrow \mathsf{dom}\, y$.

e.2) $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}])$.

Beweis **21-45**

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\, y \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

2: Aus 1 "$\mathsf{ran}\, y \subseteq \mathsf{ran}\, y$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, y) \Rightarrow (y^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)"
folgt via **21-44**: $\exists g$:

$$g : \mathsf{ran}\, y \rightarrow \mathsf{dom}\, y$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\, g) \Rightarrow (g(\beta) \in y^{-1}[\{\beta\}]).$$

$\square$

21-46. Wenn es sich bei der in **21-43** vorkommenden Klasse y um eine Funktion handelt, dann erweitern sich die Schlussfolgerungen von **21-43** in dem Sinn, dass es eine *injektive* Funktion $g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f$ gibt, so dass unter anderem für alle $\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, f$ die Gleichung $f(g(\alpha)) = \alpha$ gilt. Dies ist im Hinblick auf **20-20**, wonach aus " f Funktion" die Gleichung " $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$" folgt, insofern interessant, als f^{-1} in **20-20** *keine Funktion* sein muss und demnach in **20-20** die Gleichung " $(f \circ f^{-1})(\alpha) = f(f^{-1}(\alpha))$ *nicht notwendiger Weise* zur Verfügung steht:

21-46(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Dann gibt es g, so dass gilt:

e.1) $g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f$.

e.2) g *injektiv.*

e.3) $\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$.

e.4) $f \circ g = \mathsf{id}_{B \cap \mathsf{ran}\, f}$.

Beweis **21-46**

1: Aus $\rightarrow)$ " $\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge$)$ "
folgt via **21-43**:
$\exists g : (g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \gamma : (\gamma \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (g(\gamma) \in f^{-1}[\{\gamma\}]))$.

2: Aus 1 " $\ldots g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f \ldots$ "
folgt via **21-1(Bef)**:
$(g$ Funktion$) \wedge (\mathsf{dom}\, g = B \cap \mathsf{ran}\, f) \wedge (\mathsf{ran}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

3: Aus 1 " $\ldots \forall \gamma : (\gamma \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (g(\gamma) \in f^{-1}[\{\gamma\}])$ " und
aus 2 " $\ldots \mathsf{dom}\, g = B \cap \mathsf{ran}\, f \ldots$ "
folgt: $\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\gamma) \in f^{-1}[\{\gamma\}]$.

4: Aus $\rightarrow)$ " f Funktion ",
aus 2 " g Funktion… " und
aus 3 " $\forall \gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (g(\gamma) \in f^{-1}[\{\gamma\}])$ "
folgt via **19-9**: g injektiv.

…

<u>Beweis</u> **21-46**...

$\boxed{\texttt{Thema5.1}}$ $\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f.$

6: Aus Thema5.1"$\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f$" und
aus 1"...$\forall \gamma : (\gamma \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (g(\gamma) \in f^{-1}[\{\gamma\}])$"
folgt: $g(\beta) \in f^{-1}[\{\beta\}].$

7: Aus →)"f Funktion" und
aus 6"$g(\beta) \in f^{-1}[\{\beta\}]$"
folgt via **18-21**: $f(g(\beta)) = \beta.$

8: Aus 7
folgt: $\beta = f(g(\beta)).$

Ergo Thema5.1: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))\text{”}}$

5.2: Aus 2"...$\mathsf{ran}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(f \circ g) = \mathsf{dom}\, g.$

6: Aus 5.2"$\mathsf{dom}\,(f \circ g) = \mathsf{dom}\, g$" und
aus 2"...$\mathsf{dom}\, g = B \cap \mathsf{ran}\, f$..."
folgt: $\mathsf{dom}\,(f \circ g) = B \cap \mathsf{ran}\, f.$

7: Aus A1 gleich "$\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$" und
aus 6"$\mathsf{dom}\,(f \circ g) = B \cap \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta))).$

8: Aus →)"f Funktion",
aus 2"g Funktion ..." und
aus 7"$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(f \circ g)) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$"
folgt via **20-19**: $f \circ g = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,(f \circ g)}.$

9: Aus 8"$f \circ g = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,(f \circ g)}$" und
aus 6"$\mathsf{dom}\,(f \circ g) = B \cap \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $f \circ g = \mathsf{id}_{B \cap \mathsf{ran}\, f}.$

...

<u>Beweis</u> **21-46** . . .

`10:` Aus `1` "$\exists g : (g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f) \ldots$" ,
aus `4` "g injektiv" ,
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$" und
aus `9` "$f \circ g = \mathsf{id}_{B \cap \mathsf{ran}\, f}$"
folgt: $\exists g$:

$$g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f$$

$$\wedge \quad g \text{ injektiv}$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$$

$$\wedge \quad f \circ g = \mathsf{id}_{B \cap \mathsf{ran}\, f}.$$

$\square$

21-47. Im Fall "$B \subseteq \mathsf{ran}\, f$" vereinfacht sich **21-46** zu der folgenden Aussage:

21-47(Satz)

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*$)$.

Bann gibt es g, so dass gilt:

e.1) $g : B \to \mathsf{dom}\, f$.

e.2) g *injektiv.*

e.3) $\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$.

e.4) $f \circ g = \mathsf{id}_B$.

Beweis **21-47**

1: Aus →) “ $B \subseteq \mathsf{ran}\, f$ ”
folgt via **2-10**: $B \cap \mathsf{ran}\, f = B$.

2: Aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in B) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge) ” und
aus 1 “ $B \cap \mathsf{ran}\, f = B$ ”
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge).

3: Aus →) “ f Funktion ” und
aus 2 “ $\forall \alpha : (\alpha \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge) ”
folgt via **21-46**:
$\exists g : (g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f) \wedge (g$ injektiv)
$\wedge (\forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta))))$
$\wedge (f \circ g = \mathsf{id}_{B \cap \mathsf{ran}\, f})$.

4.1: Aus 3 “ $\ldots g : B \cap \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” und
aus 1 “ $B \cap \mathsf{ran}\, f = B$ ”
folgt: $g : B \to \mathsf{dom}\, f$.

4.2: Aus 3 “ $\ldots \forall \beta : (\beta \in B \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta))) \ldots$ ” und
aus 1 “ $B \cap \mathsf{ran}\, f = B$ ”
folgt: $\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$.

4.3: Aus 3 “ $\ldots f \circ g = \mathsf{id}_{B \cap \mathsf{ran}\, f}$ ” und
aus 1 “ $B \cap \mathsf{ran}\, f = B$ ”
folgt: $f \circ g = \mathsf{id}_B$.

5: Aus 3 “ $\exists g : \ldots$ ” ,
aus 4.1 “ $g : B \to \mathsf{dom}\, f$ ” ,
aus 3 “ $\ldots g$ injektiv… ” ,
aus 4.2 “ $\forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$ ” und
aus 4.3 “ $f \circ g = \mathsf{id}_B$ ”
folgt: $\exists g$:

$$g : B \to \mathsf{dom}\, f$$

$$\wedge \quad g \text{ injektiv}$$

$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in B) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$$

$$\wedge \quad f \circ g = \mathsf{id}_B.$$

□

21-48. Durch die Spezialisierung “$B = \mathsf{ran}\, f$” ergibt sich aus **21-47** der folgende Satz:

21-48(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ *Menge*).

Dann gibt es g, *so dass gilt:*

e.1) $g : \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f$.

e.2) g *injektiv.*

e.3) $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$.

e.4) $f \circ g = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}$.

Beweis **21-48**

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

2: Aus $\rightarrow$) “f Funktion”,
aus 1 “$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{ran}\, f$” und
aus $\rightarrow$) “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (f^{-1}[\{\alpha\}]$ Menge)”
folgt via **21-47**: $\exists g$:

$$g : \mathsf{ran}\, f \to \mathsf{dom}\, f$$
$$\wedge \quad g \text{ injektiv}$$
$$\wedge \quad \forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta = f(g(\beta)))$$
$$\wedge \quad f \circ g = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\, f}.$$

□

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.