# Suite V - Die den Weg Weisende

**Teil 2: Essays 326-337**

**Dreiecks-Ungleichung*|.|. DU*|.|.**

$M$_**focus inferior von** $E$**.** $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$**.** $\overset{M}{\mathsf{efocinf}}$**.**
$M$_**focus superior von** $E$**.** $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$**.** $\overset{M}{\mathsf{efocsup}}$**.**
$M$_**focus von** $E$**.** $\overset{M}{\mathsf{foc}}$**.** $\overset{M}{\mathsf{efoc}}$**.**
**Filter-Basis.**
$(M,E)$**gw inferior von** $x$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$**.**
$(M,E)$**gw superior von** $x$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$**.**
$(M,E)$**gw von** $x$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{egw}}$**.**
$E^{\mathsf{upkt}}p$**.**
$(M,E)$**limes inferior von** $x$ **in** $p$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{liminf}}\,(x,p)$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$**.**
$(M,E)$**limes superior von** $x$ **in** $p$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{limsup}}\,(x,p)$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$**.**
$(M,E)$**limes ordinatus von** $x$ **in** $p$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{limord}}\,(x,p)$**.** $\overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$**.**

**Modellierung: Generation und Abbau II. Zeitdiskretes Modell. Lebensdauer-Funktion.**

$R$ **ist ana1 von** $q,x$**.**
$\mathtt{rf1}qx$**.**

**MSC2010: 03E75. 00A71. 97M99.**

Andreas Unterreiter

30. September 2016

Analysis: Dreiecks-Ungleichung*|.|. DU*|.|.
$||x| - |y|| \leq |x + y|$ gdw $(x, y \in \mathbb{B}) \wedge ((x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C}))$.

**Ersterstellung: 08/02/15** **Letzte Änderung: 11/02/15**

**326-1.** Im Halbschlaf fragte ich mich wegen $\{p, q\} = \{x, y\}$. Vorliegendes ist dabei zunächst für $\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$ herausgekommen.

**326-1(Satz)**

a) $\{p\}, \{q\} \subseteq \{p, q\}$.

b) *Aus "$p, q$ Menge" und "$\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$"*
*folgt "$p = q = x$ Menge"*
*oder "$(p = x) \wedge (q = y) \wedge (x, y$ Menge$)$"*
*oder "$(p = y) \wedge (q = x) \wedge (x, y$ Menge$)$"*
*oder "$p = q = y$ Menge".*

c) *Aus "$p = q = x$" folgt "$\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$".*

d) *Aus "$p = x$" und "$q = y$" folgt "$\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$".*

e) *Aus "$p = y$" und "$q = x$" folgt "$\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$".*

f) *Aus "$p = q = y$" folgt "$\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$".*

Beweis **326-1** a)

1: Via **4-11** gilt: $\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$.

2: Via **2-7** gilt: $\{p\}, \{q\} \subseteq \{p\} \cup \{q\}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\{p\}, \{q\} \subseteq \{p, q\}$.

<u>Beweis **326-1**</u> `b)` `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \wedge (\{p, q\} \subseteq \{x, y\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p\ldots$ Menge$\ldots$"
folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge$\ldots$"
folgt via **4-9**: $q \in \{p, q\}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$p \in \{p, q\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p, q\} \subseteq \{x, y\}$"
folgt via **0-4**: $p \in \{x, y\}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$q \in \{p, q\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p, q\} \subseteq \{x, y\}$"
folgt via **0-4**: $q \in \{x, y\}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$p \in \{x, y\}$"
folgt via **94-4**: $(p = x \text{ Menge}) \vee (p = y \text{ Menge})$.

`3.2:` Aus `2.2`"$q \in \{x, y\}$"
folgt via **94-4**: $(q = x \text{ Menge}) \vee (q = y \text{ Menge})$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (p = q = x \text{ Menge}) \\ \vee\ & ((p = x) \wedge (q = y) \wedge (x, y \text{ Menge})) \\ \vee\ & ((p = y) \wedge (q = x) \wedge (x, y \text{ Menge})) \\ \vee\ & (p = q = y \text{ Menge}). \end{aligned}$$

`c)` `VS` gleich $p = q = x$.

`1:` $\{p, q\} \stackrel{\texttt{VS}}{=} \{q, q\} \stackrel{\texttt{VS}}{=} \{x, x\} \stackrel{\textbf{4-11}}{=} \{x\}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{x\} \subseteq \{x, y\}$.

`3:` Aus `1`"$\{p, q\} = \ldots = \{x\}$" und
aus `2`
folgt: $\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$.

<u>Beweis</u> **326-1** `d)` `VS` gleich $(p=x)\wedge(q=y)$.

`1.1:` Aus `VS` folgt: $p=x$.

`1.2:` Aus `VS` folgt: $q=y$.

`2:` $\{p,q\}\stackrel{\text{1.1}}{=}\{x,q\}\stackrel{\text{1.2}}{=}\{x,y\}$.

`3:` Aus `2` "$\{p,q\}=\ldots=\{x,y\}$" folgt via **folk**: $\{p,q\}\subseteq\{x,y\}$.

`e)` `VS` gleich $(p=y)\wedge(q=x)$.

`1.1:` Aus `VS` folgt: $p=y$.

`1.2:` Aus `VS` folgt: $q=x$.

`2:` $\{p,q\}\stackrel{\text{1.1}}{=}\{y,q\}\stackrel{\text{1.2}}{=}\{y,x\}\stackrel{\textbf{4-11}}{=}\{x,y\}$.

`3:` Aus `2` "$\{p,q\}=\ldots=\{x,y\}$" folgt via **folk**: $\{p,q\}\subseteq\{x,y\}$.

`f)` `VS` gleich $p=q=y$.

`1:` $\{p,q\}\stackrel{\text{VS}}{=}\{q,q\}\stackrel{\text{VS}}{=}\{y,y\}\stackrel{\textbf{4-11}}{=}\{y\}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{y\}\subseteq\{x,y\}$.

`3:` Aus `1` "$\{p,q\}=\ldots=\{y\}$" und aus `2` folgt: $\{p,q\}\subseteq\{x,y\}$.

$\square$

**326-2.** Sind $p, q, x, y$ Mengen, so folgt aus $\{p, q\} = \{x, y\}$ Erwartetes. Die Umkehrung kommt - wie bereits in **326-1** erschienen - ohne die Mengenforderung an $p, q, x, y$ aus.

**326-2(Satz)**

`a)` *Aus "$p, q, x, y$ Menge" und "$\{p, q\} = \{x, y\}$"*
*folgt "$(p = x) \wedge (q = y)$" oder "$(p = y) \wedge (q = x)$".*

`b)` *Aus "$p = x$" und "$q = y$" folgt "$\{p, q\} = \{x, y\}$".*

`c)` *Aus "$p = y$" und "$p = x$" folgt "$\{p, q\} = \{x, y\}$".*

Beweis **326-2** `a)` `VS` gleich $(p, q, x, y \text{ Menge}) \wedge (\{p, q\} = \{x, y\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \{p, q\} = \{x, y\}$"
folgt via **folk**: $\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p, q \ldots$ Menge$\ldots$" und
aus `1` "$\{p, q\} \subseteq \{x, y\}$"
folgt via **326-1**:
$$(p = q = x) \vee ((p = x) \wedge (q = y)) \vee ((p = y) \wedge (q = x)) \vee (p = q = y).$$

`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis **326-2**</u> `a)` `VS` gleich $(p, q, x, y \text{ Menge}) \wedge (\{p, q\} = \{x, y\})$.

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $p = q = x$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall` folgt: $p = x$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge..." folgt via **4-9**: $y \in \{x, y\}$.

`4:` Aus `3.2` und aus `VS` gleich "$\ldots \{p, q\} = \{x, y\}$" folgt: $y \in \{p, q\}$.

`5:` Aus `4`"$y \in \{p, q\}$" folgt via **4-9**: $(y = p) \vee (y = q)$.

`6:` Aus `5` und aus `2.1.Fall` folgt: $y = x$.

`7:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots q = x$" und aus `6` folgt: $q = y$.

`8:` Aus `3.1` und aus `7` folgt: $(p = x) \wedge (q = y)$.

`2.2.Fall` $(p = x) \wedge (q = y)$.

`2.3.Fall` $(p = y) \wedge (q = x)$.

...

Beweis **326-2** `a)` `VS` gleich $(p, q, x, y \text{ Menge}) \wedge (\{p, q\} = \{x, y\})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $p = q = y$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $p = y$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \ldots$ Menge$\ldots$"
folgt via **4-9**: $x \in \{x, y\}$.

`4:` Aus `3.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots \{p, q\} = \{x, y\}$"
folgt: $x \in \{p, q\}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \{p, q\}$"
folgt via **4-9**: $(x = p) \vee (x = q)$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.4.Fall`
folgt: $x = y$.

`7:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots q = y$" und
aus `6`
folgt: $x = q$.

`8:` Aus `3.1` und
aus `7`
folgt: $(p = y) \wedge (q = x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$((p = x) \wedge (q = y) \vee ((p = y) \wedge (q = x))$.

`b)` `VS` gleich $(p = x) \wedge (q = y)$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $p = x$.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $q = y$.

`2:` $\{p, q\} \stackrel{1.1}{=} \{x, q\} \stackrel{1.2}{=} \{x, y\}$.

<u>Beweis</u> **326-2** `c)` `VS` gleich $$(p=y)\wedge(q=x).$$

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $$p=y.$$

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $$q=x.$$

`2:` $$\{p,q\}\stackrel{\text{1.1}}{=}\{y,q\}\stackrel{\text{1.2}}{=}\{y,x\}\stackrel{\text{4-11}}{=}\{x,y\}.$$

$\square$

**326-3.** Aus $|x| = 1$ folgt nicht unbedingt $|x \cdot y| = |y|$.

**326-3.Bemerkung**

- Die Aussage
  "$(|x| = 1) \Rightarrow (|x \cdot y| = |y|)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$((|x| = 1) \wedge (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (|x \cdot y| = |y|)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$((|x| = 1) \wedge (y \in \mathbb{B})) \Rightarrow (|x \cdot y| = |y|)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

**326-4.** Da offenbar $|\sqrt{2} : 2 + \mathsf{i} \cdot (\sqrt{2}) : 2| = 1$ gilt, kann aus $|x| = 1$ und $y \in \mathbb{B}$ nicht ohne Weiteres $|x \cdot y| = |y|$ folgen.

**326-4.BEISPIEL** Es gelte:

→) $x = \sqrt{2} : 2 + \mathsf{i} \cdot (\sqrt{2} : 2)$.

→) $y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $|x| = 1$.

b) $y$ Zahl.

c) $y \in \mathbb{B}$.

d) $|y| = +\infty$.

e) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

f) $|x \cdot y| = \mathsf{nan}$.

g) $|x \cdot y| \neq |y|$.

---

RECH-**Notation**.

**326-5.** Nachtrag: Aus $|x| = 1$ und $y \in \mathbb{C}$ folgt $|x \cdot y| = |y|$ und $|y \cdot x| = |y|$. Falls $y \notin \mathbb{A}$, so gilt generell $|x \cdot y| = |y \cdot x| = |x| \cdot |y| = |y| = \mathcal{U}$.

**326-5(Satz)**

a) *Aus* "$|x| = 1$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$|x \cdot y| = |y \cdot x| = |y|$".

b) *Aus* "$y \notin \mathbb{A}$" *folgt* "$|x \cdot y| = |y \cdot x| = |x| \cdot |y| = |y| = \mathcal{U}$".

---

`RECH`-**Notation**.

Beweis **326-5** `VS` gleich $(|x| = 1) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$|x| = 1 \ldots$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt: $|x| \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Via **KGM** gilt: $\boxed{|x \cdot y| = |y \cdot x|}$

`2:` Aus `1.1`"$|x| \in \mathbb{R}$"
folgt via **321-28**: $x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **321-19**: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

`4.1:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$|x| = 1 \ldots$"
folgt: $|x \cdot y| = 1 \cdot |y|$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **321-28**: $|y| \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.2`"$|y| \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $1 \cdot |y| = |y|$.

`6:` Aus `4.1` und
aus `5`

folgt: $\boxed{|x \cdot y| = |y|}$

<u>Beweis **326-5**</u> `b)` `VS` gleich $y \notin \mathbb{A}$.

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{|x \cdot y| = |y \cdot x|}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $y \cdot x = \mathcal{U}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **323-9**: $\boxed{|y| = \mathcal{U}}$

`2.1:` $|y \cdot x| \stackrel{1.2}{=} |\mathcal{U}| \stackrel{\textbf{321-8}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{96-19}}{=} |x| \cdot \mathcal{U} \stackrel{1.3}{=} |x| \cdot |y|$.

`2.2:` $|x| \cdot |y| \stackrel{1.3}{=} |x| \cdot \mathcal{U} \stackrel{\textbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{1.3}{=} |y|$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{|y \cdot x| = |x| \cdot |y|}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{|x| \cdot |y| = |y|}$

□

**326-6.** Aus $x \leq y$ und $-x \leq y$ folgt $|x| \leq y$.

**326-6(Satz)**

a) *Aus "$x \leq y$" und "$-x \leq y$" folgt "$|x| \leq y$".*

b) *Aus "$x < y$" und "$-x < y$" folgt "$|x| < y$".*

c) *Aus "$x \leq |y|$" und "$-x \leq |y|$" folgt "$|x| \leq |y|$".*

d) *Aus "$x < |y|$" und "$-x < |y|$" folgt "$|x| < |y|$".*

---

$\leq$-**Notation**.

Beweis **326-6** `a)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (-x \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **321-30**: $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $|x| = x$.
Aus `3.1.Fall`"$|x| = x$" und
aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt: $|x| \leq y$.

`3.2.Fall` $|x| = -x$.
Aus `3.2.Fall`"$|x| = -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots - x \leq y$"
folgt: $|x| \leq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $|x| \leq y$.

<u>Beweis **326-6**</u> `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (-x < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **321-30**: $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $|x| = x$.
Aus `3.1.Fall`"$|x| = x$" und
aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt: $|x| < y$.

`3.2.Fall` $|x| = -x$.
Aus `3.2.Fall`"$|x| = -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots -x < y$"
folgt: $|x| < y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $|x| < y$.

`c)` `VS` gleich "$(x \leq |y|) \wedge (-x \leq |y|)$"

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \leq |y|) \wedge (-x \leq |y|)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $|x| \leq ||y||$.

`2:` Via **323-19** gilt: $||y|| = |y|$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $|x| \leq |y|$.

`d)` `VS` gleich "$(x < |y|) \wedge (-x < |y|)$"

`1:` Aus `VS` gleich "$(x < |y|) \wedge (-x < |y|)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $|x| < ||y||$.

`2:` Via **323-19** gilt: $||y|| = |y|$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $|x| < |y|$.

□

**326-7.** Zumindest für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $||x| - |y|| \leq |x + y|$. Die Beweis-Reihenfolge ist `bac)`.

**326-7(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) $x, y \in \mathbb{C}$.

*Dann folgt:*

`a)` $|x| \leq |y| + |x + y|$.

`b)` $|y| \leq |x| + |x + y|$.

`c)` $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

---

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **326-7** `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x, y$ Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + y \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $y + x \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1`"$x \ldots$ Zahl"
folgt via **160-3**: $-y + (y + x) = x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **160-3**: $-x + (x + y) = y$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `1.3`"$y + x \in \mathbb{C}$"
folgt via **DU**$|.|$: $|-y + (y + x)| \leq |y| + |y + x|$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{C}$" und
aus `1.2`"$x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via **DU**$|.|$: $|-x + (x + y)| \leq |x| + |x + y|$.

...

<u>Beweis **326-7**</u> `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

...

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `2.1`
folgt: $|x| \le |y| + |y + x|$.

`4.b):` Aus `3.2` und
aus `2.2`
folgt: $|y| \le |x| + |x + y|$.

`4.2:` Via **FSA** gilt: $y + x = x + y$.

`4.3:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **321-8**: $|x|, |y| \in \mathbb{R}$.

`5.a):` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $|x| \le |y| + |x + y|$.

`5.1:` Aus `4.1`"$|y| \le |x| + |x + y|$" und
aus `4.3`"$|x| \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $-|x| + |y| \le |x + y|$.

`5.2:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(|x| - |y|) = -|x| + |y|$.

`6.1:` Aus `5.b)`"$|x| \le |y| + |x + y|$" und
aus `4.3`"$\ldots |y| \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $-|y| + |x| \le |x + y|$.

`6.2:` Via **FS**$-+$ gilt: $|x| - |y| = -|y| + |x|$.

`6.3:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $-(|x| - |y|) \le |x + y|$.

`7:` Aus `6.2` und
aus `6.1`
folgt: $|x| - |y| \le |x + y|$.

`8.c):` Aus `7`"$|x| - |y| \le |x + y|$" und
aus `6.3`"$-(|x| - |y|) \le |x + y|$"
folgt via **326-6**: $||x| - |y|| \le |x + y|$.

$\square$

**326-8.** Aus $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{C}$ folgt $x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

**326-8(Satz)**

a) *Aus "$x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x + y, y + x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$".*

b) *Aus "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$" und "$y \in \mathbb{C}$" folgt "$x + y, y + x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$".*

c) $| + \infty| = +\infty$.

d) $| - \infty| = +\infty$.

---

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **326-8** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \notin \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + y \in \mathbb{S}$.

`3:` Es gilt: $(x + y \in \mathbb{R}) \vee (x + y \notin \mathbb{R})$.
`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x + y \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x + y \in \mathbb{C}$.

`5:` Aus `4`"$x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-3**: $x, y \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `5`"$x \ldots \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

`7:` Via `1` gilt: $x \notin \mathbb{R}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x + y \notin \mathbb{R}$"

`4:` Aus `2`"$x + y \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$x + y \notin \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $\boxed{x + y \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}}$

`5:` Via **FSA** gilt: $y + x = x + y$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\boxed{y + x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}}$

<u>Beweis</u> **<u>326-8</u>** `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **folk**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{B} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **+SZ**: $x + y \in \mathbb{B}$.

`3:` Es gilt: $(x + y \in \mathbb{C}) \vee (x + y \notin \mathbb{C})$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x + y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-3**: $x, y \in \mathbb{C}$.

`5.1:` Aus `4`
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`5.2:` Via `1` gilt: $x \notin \mathbb{C}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x + y \notin \mathbb{C}$"

`4:` Aus `2`"$x + y \in \mathbb{B}$" und
aus `A1` gleich "$x + y \notin \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $\boxed{x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}}$

`5:` Via **FSA** gilt: $y + x = x + y$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\boxed{y + x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}}$

`c)`

`1:` Aus **101-7**"$+\infty \in \mathbb{B}$" und
aus **101-5**"$+\infty \notin \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $+\infty \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$+\infty \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **321-28**: $|+\infty| = +\infty$.

`d)`

$$|-\infty| \stackrel{\textbf{321-8}}{=} |-(-\infty)| \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} |+\infty| \stackrel{\text{c)}}{=} +\infty.$$

□

**326-9.** Die Ungleichung $||x| - |y|| \leq |x + y|$ gilt genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{B}$ und $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

**326-9(Satz)** *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, *iii) sind äquivalent:*

`i)` $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

`ii)` *"$x, y \in \mathbb{B}$" und "$(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$".*

`iii)` *"$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$" oder "$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$".*

---

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **326-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $||x| - |y|| \le |x+y|$.

`1:` Aus `VS` gleich “$||x| - |y|| \le |x+y|$”
folgt via **folk**: $|x+y| \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$|x+y| \in \mathbb{S}$”
folgt via **321-28**: $x + y \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`“$x+y \in \mathbb{B}$”
folgt via **325-6**: $\boxed{x, y \in \mathbb{B}}$

`4:` Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C}) \vee (x, y \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

`4.2.Fall` $x, y \notin \mathbb{C}$.

`5.1:` Aus `3`“$x \ldots \in \mathbb{B}$” und
aus `4.2.Fall`“$x \ldots \notin \mathbb{C}$”
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`5.2:` Aus `3`“$\ldots y \in \mathbb{B}$” und
aus `4.2.Fall`“$\ldots y \notin \mathbb{C}$”
folgt via **folk**: $y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`6.1:` Aus `5.1`“$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|x| = +\infty$.

`6.2:` Aus `5.2`“$y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|y| = +\infty$.

`6.3:` Aus `VS` gleich “$||x| - |y|| \le |x+y|$”
folgt via **folk**: $||x| - |y|| \in \mathbb{S}$.

`7:` $||x| - |y|| \stackrel{6.1}{=} |(+\infty) - |y|| \stackrel{6.2}{=} |(+\infty) - (+\infty)| \stackrel{\mathbf{97-4}}{=} |\mathsf{nan}| \stackrel{\mathbf{323-8}}{=} \mathsf{nan}$.

`8:` Aus `6.3` und
aus `7`
folgt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{S}$.

`9:` Via **95-11** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

<u>Beweis **326-9**</u> `ii) ⇒ iii)` VS gleich $(x, y \in \mathbb{B}) \wedge ((x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C}))$.

Aus VS
folgt: $((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

`iii) ⇒ i)` VS gleich $((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

2: Es gilt: $(y \in \mathbb{C}) \vee (y \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y \in \mathbb{C}$.

Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `2.1.Fall`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **326-7**: $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

`2.2.Fall` $y \notin \mathbb{C}$.

3.1: Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **321-28**: $|x| \in \mathbb{R}$.

3.2: Aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{B}$” und
aus `2.2.Fall`“$y \notin \mathbb{C}$”
folgt via **folk**: $y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

4.1: Aus 3.1“$|x| \in \mathbb{R}$”
folgt via **97-3**: $|x| - (+\infty) = -\infty$.

4.2: Aus 3.2“$y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|y| = +\infty$.

4.3: Aus 3.2“$y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$” und
aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **326-8**: $x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

5: Aus 4.3“$x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|x + y| = +\infty$.

6: $||x| - |y|| \stackrel{4.2}{=} ||x| - (+\infty)| \stackrel{4.1}{=} |-\infty| \stackrel{\mathbf{326-8}}{=} +\infty \stackrel{5}{=} |x + y|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$||x| - |y|| \leq |x + y|$.

...

Beweis **326-9** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

2: Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

Aus `2.1.Fall`“$x \in \mathbb{C}$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **326-7**: $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{C}$.

3.1: Aus `1.2.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|y| \in \mathbb{R}$.

3.2: Aus `1.2.Fall`“$x \in \mathbb{B} \ldots$” und
aus `2.2.Fall`“$x \notin \mathbb{C}$”
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

4.1: Aus 3.1“$|y| \in \mathbb{R}$”
folgt via **97-3**: $(+\infty) - |y| = +\infty$.

4.2: Aus 3.2“$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|x| = +\infty$.

4.3: Aus 3.2“$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via **326-8**: $x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

5: Aus 4.3“$x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **321-28**: $|x+y| = +\infty$.

6: $||x| - |y|| \stackrel{4.2}{=} |(+\infty) - |y|| \stackrel{4.1}{=} |+\infty| \stackrel{\mathbf{326-8}}{=} +\infty \stackrel{5}{=} |x+y|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$||x| - |y|| \leq |x+y|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

□

**326-10.** Mit Hilfe von **326-9** kann **DU*** $|.|$ relativ einfach bewiesen werden.

**326-10(Satz)** (**DU*** $|.|$: **Dreiecks-Ungleichung*** $|.|$)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |x - y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |-x + y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |-x - y| \le |x| + |y|$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |x - y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |-x + y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |-x - y| \le |x| + |y|$".

c) *Aus* "$x, y \in \mathbb{R}$"
*oder* "$(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{R})$"
*oder* "$(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$"
*oder* "$x, y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |x - y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |-x + y| \le |x| + |y|$"
*und* "$||x| - |y|| \le |-x - y| \le |x| + |y|$".

d) *Aus* "$||x| - |y|| \le |x + y|$"
*folgt* "$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$".

e) *Aus* "$||x| - |y|| \le |x - y|$"
*folgt* "$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$".

f) *Aus* "$||x| - |y|| \le |-x + y|$"
*folgt* "$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$".

g) *Aus* "$||x| - |y|| \le |-x - y|$"
*folgt* "$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$".

---

$\le$.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **326-10**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{B}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"
folgt via **326-9**: $\boxed{||x| - |y|| \le |x + y|}$

`1.4:` Aus `VS` gleich "$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"
folgt via $+$**SZ**: $x + y \in \mathbb{B}$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"
folgt via **SSZ**: $x - y \in \mathbb{B}$.

`1.6:` Aus `VS` gleich "$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"
folgt via $-$**ASZ**: $-x + y \in \mathbb{B}$.

`1.7:` Aus `VS` gleich "$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"
folgt via $-$**SSZ**: $-x - y \in \mathbb{B}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$" und
aus `1.2`"$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via **326-9**: $||x| - |-y|| \le |x + (-y)|$.

`2.2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{B}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **326-9**: $||-x| - |y|| \le |-x + y|$.

`2.3:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{B}$" und
aus `1.2`"$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via **326-9**: $||-x| - |-y|| \le |(-x) + (-y)|$.

`2.4:` Aus `1.4`"$x + y \in \mathbb{B}$"
folgt via **DU**$|.|$: $\boxed{|x + y| \le |x| + |y|}$

`2.5:` Aus `1.5`"$x - y \in \mathbb{B}$"
folgt via **DU**$|.|$: $\boxed{|x - y| \le |x| + |y|}$

...

<u>Beweis **326-10**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

...

`2.6:` Aus `1.6` "$-x+y \in \mathbb{B}$"

folgt via **DU**$|.|$: $\boxed{|-x+y| \le |x|+|y|}$

`2.7:` Aus `1.7` "$-x-y \in \mathbb{B}$"

folgt via **DU**$|.|$: $\boxed{|-x-y| \le |x|+|y|}$

`2.8:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`2.9:` Via **321-8** gilt: $|-y| = |y|$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $||x|-|-y|| \le |x-y|$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `2.8`

folgt: $\boxed{||x|-|y|| \le |-x+y|}$

`3.3:` Aus `2.3`
folgt: $||-x|-|-y|| \le |-x-y|$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `2.9`

folgt: $\boxed{||x|-|y|| \le |x-y|}$

`4.2:` Aus `3.3`,
aus `2.8` und
aus `2.9`

folgt: $\boxed{||x|-|y|| \le |-x-y|}$

<u>Beweis **326-10**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\dots y \in \mathbb{B}$” und
aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{C} \dots$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$||y|-|x|| \leq |y+x| \leq |y|+|x|$$
$$\wedge \quad ||y|-|x|| \leq |y-x| \leq |y|+|x|$$
$$\wedge \quad ||y|-|x|| \leq |-y+x| \leq |y|+|x|$$
$$\wedge \quad ||y|-|x|| \leq |-y-x| \leq |y|+|x|.$$

`2.1:` Via **FSA** gilt: $|y|+|x| = |x|+|y|$.

`2.2:` Via **FSA** gilt: $y+x = x+y$.

`2.3:` Via **FS**$-+$ gilt: $y-x = -x+y$.

`2.4:` Via **FS**$-+$ gilt: $-y+x = x-y$.

`2.5:` Via **FS**$-+$ gilt: $-y-x = -x-y$.

`2.6:` Via **FS**$-+$ gilt: $|y|-|x| = -(|x|-|y|)$.

`3.1:` Aus `1`,
aus `2.1`,
aus `2.2`,
aus `2.3`,
aus `2.4`.
aus `2.5` und
aus `2.6`
folgt:

$$|-(|x|-|y|)| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad |-(|x|-|y|)| \leq |-x+y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad |-(|x|-|y|)| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad |-(|x|-|y|)| \leq |-x-y| \leq |x|+|y|.$$

`3.2:` Via **321-8** gilt: $|-(|x|-|y|)| = ||x|-|y||$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad ||x|-|y|| \leq |-x+y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad ||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad ||x|-|y|| \leq |-x-y| \leq |x|+|y|.$$

`5:` Aus `4`
folgt:

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad ||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad ||x|-|y|| \leq |-x+y| \leq |x|+|y|$$
$$\wedge \quad ||x|-|y|| \leq |-x-y| \leq |x|+|y|.$$

Beweis **326-10** `c)`
`VS` gleich $(x,y\in\mathbb{R})\vee((x\in\mathbb{S})\wedge(y\in\mathbb{R}))\vee((x\in\mathbb{R})\wedge(y\in\mathbb{S}))\vee(x,y\in\mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS`
folgt via $\wedge$**SZ**: $((x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{C}))\vee((x\in\mathbb{C})\wedge(x\in\mathbb{B}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{C})$.

Aus `1.1.Fall` "$(x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{C})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|x-y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|-x+y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|-x-y|\le|x|+|y|.$$

`1.2.Fall` $(x\in\mathbb{C})\wedge(y\in\mathbb{B})$.

Aus `1.2.Fall` "$(x\in\mathbb{C})\wedge(y\in\mathbb{B})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$$||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|x-y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|-x+y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|-x-y|\le|x|+|y|.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|x-y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|-x+y|\le|x|+|y|$$
$$\wedge\quad ||x|-|y||\le|-x-y|\le|x|+|y|.$$

`d)` `VS` gleich $||x|-|y||\le|x+y|$.
Aus `VS` gleich "$||x|-|y||\le|x+y|$"
folgt via **326-9**: $((x\in\mathbb{C})\wedge(y\in\mathbb{B}))\vee((x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{C}))$.

<u>Beweis</u> **326-10** `e)` `VS` gleich $||x|-|y|| \le |x-y|$.

`1:` Nach `VS` gilt: $||x|-|y|| \le |x+(-y)|$.

`2:` Via **321-8** gilt: $|-y| = |y|$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $||x|-|-y|| \le |x+(-y)|$.

`4:` Aus `3`“$||x|-|-y|| \le |x+(-y)|$”
folgt via **326-9**: $((x \in \mathbb{C}) \wedge (-y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (-y \in \mathbb{C}))$.

`5.1:` Via **folk** gilt: $(-y \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{B})$.

`5.2:` Via **folk** gilt. $(-y \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{C})$.

`6:` Aus `4`,
aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

`f)` `VS` gleich $||x|-|y|| \le |-x+y|$.

`1:` Via **FS**$-+$ gilt: $-x+y = -(x-y)$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $||x|-|y|| \le |-(x-y)|$.

`3:` Via **321-8** gilt: $|-(x-y)| = |x-y|$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $||x|-|y|| \le |x-y|$.

`5:` Aus `4`“$||x|-|y|| \le |x-y|$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

<u>Beweis **326-10**</u> `g)` `VS` gleich $||x| - |y|| \le |-x-y|$.

`1:` Via **FS**$-+$ gilt: $-x-y = -(x+y)$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $||x| - |y|| \le |-(x+y)|$.

`3:` Via **321-8** gilt: $|-(x+y)| = |x+y|$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $||x| - |y|| \le |x+y|$.

`5:` Aus `4` "$||x| - |y|| \le |x+y|$"
folgt via **326-9**: $((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \vee ((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C}))$.

$\square$

Mengenlehre: $p$ ist $M$_focus inferior von $E$. $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$.
$E$ hat $M$_focus inferior. $\overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.
$p$ ist $M$_focus superior von $E$. $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$.
$E$ hat $M$_focus superior. $\overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.
$p$ ist $M$_focus von $E$. $\overset{M}{\mathsf{foc}}$.
$E$ hat $M$_focus. $\overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

**Ersterstellung: 13/02/15** **Letzte Änderung: 13/02/15**

**327-1.** Auf dem Wege zum limes inferior und limes superior wird ohne Bezug zu einer weiteren Klasse(Funktion) mit $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ begonnen.

**327-1(Satz)**

a) $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

b) *Aus* "$p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p$ *ist* $M$*_Infimum von* $\Omega)$.".

c) *Aus* "$inf$ *ist* $M$*_Infimum von* $x$" *und* "$x \in E$" *folgt* "$inf \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$."

d) $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

e) *Aus* "$p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
*folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p$ *ist* $M$*_Supremum von* $\Omega)$.".

f) *Aus* "$sup$ *ist* $M$*_Supremum von* $x$" *und* "$x \in E$"
*folgt* "$sup \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$."

Beweis **327-1** a)

1: Via **8-10** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

2: Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

3: Aus 1"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

<u>Beweis **327-1**</u> `b)` `VS` gleich $p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, p) \in \overset{M}{\mathsf{inf}})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots (\Omega, p) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **182-5**: $p$ ist $M$_Infimum von $\Omega$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p$ ist $M$_Infimum von $\Omega)$.

`c)` `VS` gleich $(inf$ ist $M$_Infimum von $x) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$x$ Menge" und
aus `VS` gleich "$inf$ ist $M$_Infimum von $x \ldots$"
folgt via **182-5**: $(x, inf) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

`3:` Aus `2`"$(x, inf) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$"
folgt via **8-8**: $inf \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`d)`

`1:` Via **8-10** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`2:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)s$.

`3:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$" und
aus `2`"$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

<u>Beweis</u> **327-1** `e)` `VS` gleich $p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, p) \in \overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`2:` Aus `1` "$\ldots (\Omega, p) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **182-5**: $p$ ist $M$_Supremum von $\Omega$.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p$ ist $M$_Supremum von $\Omega)$.

`c)` `VS` gleich ($sup$ ist $M$_Supremum von $x) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`2:` Aus `1` "$x$ Menge" und
aus `VS` gleich "$sup$ ist $M$_Supremum von $x \ldots$"
folgt via **182-5**: $(x, sup) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`3:` Aus `2` "$(x, sup) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$"
folgt via **8-8**: $sup \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

□

**327-2.** Ein unscheinbarer Satz über Infima wird - zumindest meiner momentanen Einschätzung nach - später von grossem Wert sein.

**327-2(Satz)** *Es gelte:*

→) $x \in E$.

→) $inf$ *ist* $M$*_Infimum von* $x$.

→) $D \subseteq E$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

→) $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

*Dann* $\exists \Phi, \Psi$ :

e1) $\Phi \in D$.

e2) $\Psi$ *ist* $M$*_Infimumv on* $\Phi$.

e3) $inf$_$M$_$\Psi$.

<u>Beweis **327-2**</u>

`1:` Aus →) “$x \in E$” und
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$”
folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in D) \wedge (\Phi \subseteq x)$.

`2.1:` Aus 1“$\ldots \Phi \in D \ldots$” und
aus →) “$D \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$”
folgt via **0-4**: $\Phi \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`2.2:` Aus →) “$inf$ ist $M$_Infimum von $x$” und
aus 1“$\ldots \Phi \subseteq x$”
folgt via **36-5**: $inf$ untere $M$_Schranke von $\Phi$.

`3:` Aus 2.1“$\Phi \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$”
folgt via **182-2**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $\Phi$.

`4:` Aus 3“$\ldots \Psi$ ist $M$_Infimum von $\Phi$” und
aus 2.2“$inf$ untere $M$_Schranke von $\Phi$”
folgt via **folk**: $inf$_$M$_$\Psi$.

`5:` Aus 1“$\exists \Phi \ldots$”,
aus 3“$\exists \Psi \ldots$”,
aus 1“$\ldots \Phi \in D \ldots$”,
aus 3“$\ldots \Psi$ ist $M$_Infimum von $\Phi$” und
aus 4“$inf$_$M$_$\Psi$”
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi \in D) \wedge (\Psi$ ist $M$_Infimum von $\Phi) \wedge (inf$_$M$_$\Psi)$.

□

**327-3.** Ein unscheinbarer Satz über Suprema wird - zumindest meiner momentanen Einschätzung nach - später von grossem Wert sein.

**327-3(Satz)** *Es gelte:*

→) $x \in E$.

→) *sup ist M_Supremum von* $x$.

→) $D \subseteq E$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

→) $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

*Dann* $\exists \Phi, \Psi$ :

e1) $\Phi \in D$.

e2) $\Psi$ *ist M_Supremumv on* $\Phi$.

e3) $\Psi$*_M_sup.*

<u>Beweis **327-3**</u>

`1:` Aus →) “$x \in E$” und
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$”
folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in D) \wedge (\Phi \subseteq x)$.

`2.1:` Aus `1` “$\ldots \Phi \in D \ldots$” und
aus →) “$D \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$”
folgt via **0-4**: $\Phi \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`2.2:` Aus →) “$sup$ ist $M$_Supremum von $x$” und
aus `1` “$\ldots \Phi \subseteq x$”
folgt via **36-5**: $sup$ obere $M$_Schranke von $\Phi$.

`3:` Aus `2.1` “$\Phi \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$”
folgt via **182-2**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_Supremum von $\Phi$.

`4:` Aus `3` “$\ldots \Psi$ ist $M$_Supremum von $\Phi$” und
aus `2.2` “$sup$ obere $M$_Schranke von $\Phi$”
folgt via **folk**: $\Psi\_M\_sup$.

`5:` Aus `1` “$\exists \Phi \ldots$”,
aus `3` “$\exists \Psi \ldots$”,
aus `1` “$\ldots \Phi \in D \ldots$”,
aus `3` “$\ldots \Psi$ ist $M$_Supremum von $\Phi$” und
aus `4` “$\Psi\_M\_sup$”
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi \in D) \wedge (\Psi$ ist $M$_Supremum von $\Phi) \wedge (\Psi\_M\_sup)$.

□

**327-4.** Ist $M$ transitiv, so können unter Umständen die unteren Schranken verschiedener Klassen miteinander verglichen werden.

**327-4(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) *$M$ transitiv.*

$\rightarrow$) *$u$ untere $M$_Schranke von $D$.*

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$.

*Dann folgt "$u$ untere $M$_Schranke von $E$".*

Beweis **327-4**

1.1: Aus $\rightarrow$) "$u$ untere $M$_Schranke von $D$"
folgt via **folk**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

Thema1.2 $\beta \in E$.

2: Aus Thema1.2 "$\beta \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$"
folgt: $\exists\Phi : (\Phi \in D) \wedge (\Phi\_M\_\beta)$.

3: Aus $\rightarrow$) "$u$ untere $M$_Schranke von $D$" und
aus 2 "$\ldots \Phi \in D \ldots$"
folgt via **folk**: $u\_M\_\Phi$.

4: Aus $\rightarrow$) "$M$ transitiv",
aus 3 "$u\_M\_\Phi$" und
aus 2 "$\ldots \Phi\_M\_\beta$"
folgt via **folk**: $u\_M\_\beta$.

Ergo Thema1.2: A1 | "$\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (u\_M\_\beta)$"

2: Aus 1.1 "$u \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus A1 gleich "$\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (u\_M\_\beta)$"
folgt via **folk**: $u$ untere $M$_Schranke von $E$.

□

**327-5.** Ist $M$ transitiv, so können unter Umständen die oberen Schranken verschiedener Klassen miteinander verglichen werden.

**327-5(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *$o$ obere $M$_Schranke von $D$.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$.

*Dann folgt "$o$ obere $M$_Schranke von $E$".*

Beweis **327-5**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$"$o$ obere $M$_Schranke von $D$"
folgt via **folk**: $u \in \mathsf{ran}\, M$.

`Thema1.2` $\beta \in E$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in E$" und
aus $\rightarrow\!)$"$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$"
folgt: $\exists\Phi : (\Phi \in D) \wedge (\beta\_M\_\Phi)$.

`3:` Aus $\rightarrow\!)$"$o$ obere $M$_Schranke von $D$" und
aus 2"$\ldots \Phi \in D \ldots$"
folgt via **folk**: $\Phi\_M\_o$.

`4:` Aus $\rightarrow\!)$"$M$ transitiv",
aus 2"$\ldots \beta\_M\_\Phi$" und
aus 2"$\Phi\_M\_o$"
folgt via **folk**: $\beta\_M\_o$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$"

`2:` Aus `1.1`"$o \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta\_M\_o)$"
folgt via **folk**: $o$ obere $M$_Schranke von $E$.

□

**327-6.** Mit **327-4** können gelegentlich untere Schranken von $D$ mit Infima von $E$ verglichen werden

**327-6(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow)$ *$u$ untere $M$_Schranke von $D$.*

$\rightarrow)$ *$p$ ist $M$_Infimum von $E$.*

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$.

*Dann folgt "$u\_M\_p$".*

Beweis **327-6**

1: Aus $\rightarrow)$ "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow)$ "$u$ untere $M$_Schranke von $D$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega\_M\_\alpha))$"
folgt via **327-4**: $u$ untere $M$_Schranke von $E$.

2: Aus $\rightarrow)$ "$p$ ist $M$_Infimum von $E$" und
aus 1 "$u$ untere $M$_Schranke von $E$"
folgt via **folk**: $u\_M\_p$.

□

**327-7.** Mit **327-5** können gelegentlich obere Schranken von $D$ mit Suprema von $E$ verglichen werden

**327-7(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *$o$ obere $M$_Schranke von $D$.*

$\rightarrow\!)$ *$p$ ist $M$_Supremum von $E$.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$.

*Dann folgt "$p\_M\_o$".*

Beweis **327-7**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$o$ obere $M$_Schranke von $D$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha\_M\_\Omega))$"
folgt via **327-5**: $o$ obere $M$_Schranke von $E$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$p$ ist $M$_Supremum von $E$" und
aus 1 "$o$ obere $M$_Schranke von $E$"
folgt via **folk**: $p\_M\_o$.

□

**327-8.** In Vorbereitung von limes inferior, limes superior und limes werden hier ohne Bezug zu Funktionen oder Argumenten focus inferior, focus superior und focus von Klassen defniniert.

**327-8(Definition)**

1) "$p$ **ist** $M$_**focus inferior von** $E$" genau dann, wenn gilt:

$$p \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E].$$

2) "$p$ **ist** $M$_**focus superior von** $E$" genau dann, wenn gilt:

$$p \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E].$$

3) "$p$ **ist** $M$_**focus von** $E$" genau dann, wenn gilt:

$p$ ist $M$_focus inferior von $E$.

$\wedge$

$p$ ist $M$_focus superior von $E$.

4) "$E$ **hat** $M$_**focus inferior**" genau dann, wenn gilt:

$$\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E.$$

5) "$E$ **hat** $M$_**focus superior**" genau dann, wenn gilt:

$$\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E.$$

6) "$E$ **hat** $M$_**focus**" genau dann, wenn gilt:

$$\exists\Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_focus von } E.$$

**327-9.** Mit **327-2** zeigt sich, dass bei der Untersuchung der $M$_focus inferior von $E$ gelegentlich auf Teil-Klassen von $E$ zurück gegriffen werden kann.

<u>**327-9(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) *$M$ transitiv*

→) $D \subseteq E$.

→) $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

→) *$p$ ist $M$_focus inferior von $D$.*

→) *$q$ ist $M$_focus inferior von $E$.*

*Dann folgt "$p$_$M$_$q$" und "$q$_$M$_$p$".*

<u>Beweis **327-9**</u>

`1.1:` Aus →) “$D \subseteq E$”

folgt via **8-9**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D] \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`1.2:` Aus →) “$p$ ist $M$_focus inferior von $D$”

folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$.

`1.3:` Aus →) “$q$ ist $M$_focus inferior von $E$”

folgt via **327-8(Def)**: $q$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`Thema1.4` $\beta \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`2:` Aus `Thema1.4`“$\beta \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$”
folgt via **327-1**:
$\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\beta$ ist $M$_Infimum von $\Phi)$.

`3:` Aus 2“$\ldots \Phi \in E \ldots$”,
aus 2“$\ldots \beta$ ist $M$_Infimum von $\Phi$”,
aus →) “$D \subseteq E$”,
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$” und
aus →) “$D \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$”
folgt via **327-2**:
$\exists \Gamma, \Psi : (\Gamma \in D) \wedge (\Psi$ ist $M$_Infimum von $\Gamma) \wedge (\beta$_$M$_$\Psi)$.

`4:` Aus 3“$\ldots \Psi$ ist $M$_Infimum von $\Gamma \ldots$” und
aus 3“$\ldots \Gamma \in D \ldots$”
folgt via **327-1**: $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$.

`5:` Aus 3“$\exists \ldots \Psi \ldots$”,
aus 4“$\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$” und
aus 3“$\ldots \beta$_$M$_$\Psi$”
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]) \wedge (\beta$_$M$_$\Psi)$.

Ergo `Thema1.4`:

`A1` | “$\forall \beta : (\beta \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\exists \Psi : (\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]) \wedge (\beta$_$M$_$\Psi))$”

...

Beweis **327-9** . . .

2.1: Aus 1.2 "$p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$"

folgt via **folk**: $p$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$.

2.2: Aus 1.3 "$q$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$" und

aus 1.1 "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D] \subseteq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"

folgt via **35-6**: $q$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$.

3.1: Aus →) "$M$ transitiv",

aus 2.1 "$p$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$",

aus 1.3 "$q$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$" und

aus A1 gleich "$\forall \beta : (\beta \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\exists \Psi : (\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]) \wedge (\beta\_M\_\Psi))$"

folgt via **327-7**: $\boxed{q\_M\_p}$

3.2: Aus 1.2 "$p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$" und

aus 2.2 "$q$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$"

folgt via **folk**: $\boxed{p\_M\_q}$

□

**327-10.** Mit **327-3** zeigt sich, dass bei der Untersuchung der $M$_focus superior von $E$ gelegentlich auf Teil-Klassen von $E$ zurück gegriffen werden kann.

**327-10(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) *$M$ transitiv*

$\rightarrow$) $D \subseteq E$.

$\rightarrow$) $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha \subseteq \Omega))$.

$\rightarrow$) *$p$ ist $M$_focus superior von $D$.*

$\rightarrow$) *$q$ ist $M$_focus superior von $E$.*

*Dann folgt "$p$_$M$_$q$" und "$q$_$M$_$p$".*

Beweis **327-10**

1.1: Aus →) " $D \subseteq E$ "
folgt via **8-9**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D] \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

1.2: Aus →) " $p$ ist $M$_focus superior von $D$ "
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$.

1.3: Aus →) " $q$ ist $M$_focus superior von $E$ "
folgt via **327-8(Def)**: $q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`Thema1.4` $\beta \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

2: Aus `Thema1.4` " $\beta \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ "
folgt via **327-1**:
$\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\beta$ ist $M$_Supremum von $\Phi)$.

3: Aus 2 " $\ldots \Phi \in E \ldots$ ",
aus 2 " $\ldots \beta$ ist $M$_Supremum von $\Phi$ ",
aus →) " $D \subseteq E$ ",
aus →) " $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha \subseteq \Omega))$ " und
aus →) " $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$ "
folgt via **327-3**:
$\exists \Gamma, \Psi : (\Gamma \in D) \wedge (\Psi$ ist $M$_Supremum von $\Gamma) \wedge (\Psi$_$M$_$\beta)$.

4: Aus 3 " $\ldots \Psi$ ist $M$_Supremum von $\Gamma \ldots$ " und
aus 3 " $\ldots \Gamma \in D \ldots$ "
folgt via **327-1**: $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$.

5: Aus 3 " $\exists \ldots \Psi \ldots$ ",
aus 4 " $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$ " und
aus 3 " $\ldots \Psi$_$M$_$\beta$ "
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]) \wedge (\Psi$_$M$_$\beta)$.

Ergo `Thema1.4`:

| A1 | " $\forall \beta : (\beta \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (\exists \Psi : (\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]) \wedge (\Psi$_$M$_$\beta))$ " |
|---|---|

...

Beweis **327-10** . . .

`2.1:` Aus `1.2` “$p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$ ”
folgt via **folk**: $p$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$.

`2.2:` Aus `1.3` “$q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ” und
aus `1.1` “$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D] \subseteq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ”
folgt via **35-6**: $q$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[D]$.

`3.1:` Aus →) “ $M$ transitiv ” ,
aus `2.1` “$p$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$ ” ,
aus `1.3` “$q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ” und
aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (\exists\Psi : (\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]) \wedge (\Psi\_M\_\beta))$ ”
folgt via **327-6**: $\boxed{p\_M\_q}$

`3.2:` Aus `1.2` “$p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$ ” und
aus `2.2` “$q$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[D]$ ”
folgt via **folk**: $\boxed{q\_M\_p}$

□

**327-11.** Ist $M$ nicht nur transitiv, sondern auch antiSymmetrisch, dann ergibt sich via **327-9** eine ansprechende Aussage.

**327-11(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *$M$ transitiv*

$\rightarrow)$ *$M$ antiSymmetrisch.*

$\rightarrow)$ $D \subseteq E$.

$\rightarrow)$ $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow)$ *$p$ ist $M$_focus inferior von $D$.*

$\rightarrow)$ *$q$ ist $M$_focus inferior von $E$.*

*Dann folgt "$p = q$".*

Beweis **327-11**

1: Aus $\rightarrow)$ "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow)$ "$D \subseteq E$",
aus $\rightarrow)$ "$D \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$",
aus $\rightarrow)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$",
aus $\rightarrow)$ "$p$ ist $M$_focus inferior von $D$" und
aus $\rightarrow)$ "$q$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via **327-9**: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

2: Aus $\rightarrow)$ "$M$ antiSymmetrisch" und
aus 1 "$(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$"
folgt via **folk**: $p = q$.

$\square$

**327-12.** Ist $M$ nicht nur transitiv, sondern auch antiSymmetrisch, dann ergibt sich via **327-10** eine ansprechende Aussage.

**327-12(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) $M$ *transitiv*

$\rightarrow$) $M$ *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) $D \subseteq E$.

$\rightarrow$) $D \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow$) $p$ *ist* $M$*_focus superior von* $D$.

$\rightarrow$) $q$ *ist* $M$*_focus superior von* $E$.

*Dann folgt "*$p = q$*".*

Beweis **327-12**

1: Aus $\rightarrow$) "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow$) "$D \subseteq E$",
aus $\rightarrow$) "$D \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$",
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$",
aus $\rightarrow$) "$p$ ist $M$_focus superior von $D$" und
aus $\rightarrow$) "$q$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt via **327-10**: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

2: Aus $\rightarrow$) "$M$ antiSymmetrisch" und
aus 1 "$(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$"
folgt via **folk**: $p = q$.

$\square$

**327-13.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so hat jede Klasse höchstens einen $M$_focus inferior und höchstens einen $M$_focus superior.

**327-13(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p, q$ ist $M$_focus inferior von $E$"* *folgt "$p = q$".*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p, q$ ist $M$_focus superior von $E$"* *folgt "$p = q$".*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p, q$ ist $M$_focus von $E$"* *folgt "$p = q$".*

Beweis **327-13** a)
VS gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p, q \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E)$.

1: Aus VS gleich "…$p, q$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p, q$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus 1 "$p, q$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **46-3**: $p = q$.

b) VS gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p, q \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E)$.

1: Aus VS gleich "…$p, q$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p, q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus 1 "$p, q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **46-2**: $p = q$.

c) VS gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p, q \text{ ist } M\text{\_focus von } E)$.

1: Aus VS gleich "…$p, q$ ist $M$_focus von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p, q$ ist $M$_focus inferior von $E$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus 1 "$p, q$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $p = q$.

□

**327-14.** Ähnlich wie $\overset{M}{\mathsf{inf}}, \overset{M}{\mathsf{sup}}, \overset{M}{\mathsf{einf}}, \overset{M}{\mathsf{esup}}$ werden nun korrespondierende Klassen für focus inferior, focus superior und focus definiert.

**327-14(Definition)**

1) $\overset{M}{\mathsf{focinf}} = \mathsf{327.0}(M) = \{(\lambda, \mu) : \mu \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \lambda)\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi))\}.$$

2) $\overset{M}{\mathsf{focsup}} = \mathsf{327.1}(M) = \{(\lambda, \mu) : \mu \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \lambda)\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi))\}.$$

3) $\overset{M}{\mathsf{foc}} = \mathsf{327.2}(M) = \{(\lambda, \mu) : \mu \text{ ist } M\text{\_focus von } \lambda)\}$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi))\}.$$

4) $\overset{M}{\mathsf{efocinf}} = \mathsf{327.3}(M)$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \omega)\}.$$

5) $\overset{M}{\mathsf{efocsup}} = \mathsf{327.4}(M)$

$$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \omega)\}.$$

6) $\overset{M}{\mathsf{efocsup}} = \mathsf{327.5}(M) = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } M\text{\_focus von } \omega)\}.$

**327-15.** Zur Untersuchung der in **327-14(Def)** fest gelegten Klassen ist Vorliegendes hilfreich.

**327-15(Satz)**

a) *Aus "p ist M_focus inferior von E"*
*folgt "p Menge" und "*$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$*".*

b) *Aus "p ist M_focus superior von E"*
*folgt "p Menge" und "*$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$*".*

c) *Aus "p ist M_focus von E"*
*folgt "p Menge" und "*$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$*".*

Beweis **327-15** `a)` `VS` gleich $p$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`2:` Aus `1`"$p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **36-4**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

`b)` `VS` gleich $p$ ist $M$_focus superior von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`2:` Aus `1`"$p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **36-3**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

`c)` `VS` gleich $p$ ist $M$_focus von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $M$_focus von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`2:` Aus `1`"$p$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(p \text{ Menge}) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

□

**327-16.** Passender Weise wird der Focus zunächst auf $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{efocinf}}$ gerichtet.

**327-16(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"
*folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Phi$ *ist* $M$*_focus inferior von* $\Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Phi))$".

b) "$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$" *genau dann, wenn*
"$E$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$".

c) *Aus* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$".

d) *Aus* "$E$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$"
*folgt* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$".

e) $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ *Relation.*

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

g) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ *Funktion*" *genau dann, wenn*
"$\overset{M}{\mathsf{focinf}} : \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

i) *Aus* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$" *und* "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ *Funktion*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$".

j) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M}{\mathsf{focinf}} : \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

k) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$".

l) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*"
*und* "$E$ *Menge*"
*und* "$p$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$" *folgt* "$p = \overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$".

<u>Beweis **327-16**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich " $w \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$ "
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich " $w \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$ "
folgt via **327-14(Def)**:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2` " $\ldots w = (\Omega, \Phi)$ "
folgt: $(\Omega, \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2` " $(\Omega, \Phi)$ Menge "
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich " $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$ "
folgt via **ElementAxiom**: $(E, p)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich " $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$ "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \Omega) \wedge ((E, p) = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1.1` " $(E, p)$ Menge "
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{E \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2` " $\ldots (E, p) = (\Omega, \Phi)$ " und
aus `1.1` " $(E, p)$ Menge "
folgt via **IGP**: $(E = \Omega) \wedge (p = \Phi)$.

`3:` Aus `1.2` " $\ldots \Phi$ ist $M$_focus inferior von $\Omega \ldots$ " und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{p \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E}$

<u>Beweis **327-16**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "... $p$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... $p$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via **327-15**: $p$ Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$E$ Menge..." und
aus `1.2` "$p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E, p)$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "... $p$ ist $M$_focus inferior von $E$" und
aus `1.1` "... $(\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$"
folgt: $\Phi$ ist $M$_focus inferior von $\Omega$.

`2.3:` Aus `1.1` "... $(\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (E, p)$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $(E, p) = (\Omega, \Phi)$.

`4:` Aus `1.1` "$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.2` "$\Phi$ ist $M$_focus inferior von $\Omega$",
aus `3` "$(E, p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2.1` "$(E, p)$ Menge"
folgt via **327-14(Def)**: $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$"
folgt via **327-14(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`d)` `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "... $p$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2:` Aus `1` "... $\Omega = p$" und
aus `VS` gleich "... $p$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt: $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `2` "$\Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$" und
aus `VS` gleich "$E$ Menge..."
folgt via **327-14(Def)**: $E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

Beweis **327-16** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}.$

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Relation.

`f)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}).$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$"

folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}.$

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \alpha).$

`4:` Aus `3` "$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \alpha)$"

folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{efocinf}}\text{"}}$

...

Beweis **327-16** f) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$

2.1: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

2.2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen c):
$\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$.

3: Aus 2.1 "$\alpha$ Menge" und
aus 2.2 "... $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

4: Aus 3 "$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$\overset{M}{\mathsf{efocinf}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$"

2: Aus A1 gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$" und
aus A2 gleich "$\overset{M}{\mathsf{efocinf}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

Beweis **327-16** g)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen b):
$\alpha$ ist $M$_focus inferior von $\Omega$.

4: Aus 3 "$\alpha$ ist $M$_focus inferior von $\Omega$"
folgt via **327-15**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion.

1.1: Via des bereits bewiesenen f) gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion",
aus 1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{focinf}} : \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\overset{M}{\mathsf{focinf}} : \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{focinf}} : \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion.

<u>Beweis **327-16**</u> `i)` `VS` gleich $(E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{focinf}} \text{ Funktion})$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \ldots$" und
aus `1`
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion" und
aus `2`"$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}})$"
folgt via **18-22**: $(E, \overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

`4:` Aus `3`"$(E, \overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha,\beta) \ldots \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\beta$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha,\gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\gamma$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch",
aus `2.1`"$\beta$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$" und
aus `2.2`"$\gamma$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$"
folgt via **327-13**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

...

Beweis **327-16** `j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

...

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focinf}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{\overset{M}{\mathsf{focinf}}\text{ Funktion}}$

`3:` Aus `2`“$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`:

$$\boxed{\overset{M}{\mathsf{focinf}}: \overset{M}{\mathsf{efocinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)}$$

`k)` `VS` gleich $(M$ antiSymmetrisch$) \wedge (E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$M$ antiSymmetrisch...”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$” und
aus `1`“$\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Funktion”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$ ist $M$_focus inferior von $E$.

<u>Beweis **327-16**</u> `l)`
`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } E)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus `1` "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…",
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus inferior von $E$" und
aus `2` "$\overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$ ist $M$_focus inferior von $E$"
folgt via **327-13**: $p = \overset{M}{\mathsf{focinf}}\,(E)$.

□

**327-17.** Nun wird der Focus auf $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ und $\overset{M}{\mathsf{efocsup}}$ gerichtet.

**327-17(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
*folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Phi))$".

b) "$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$" *genau dann, wenn*
"$E$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $M$_*focus superior von* $E$".

c) *Aus* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $M$_*focus superior von* $E$".

d) *Aus* "$E$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $M$_*focus superior von* $E$"
*folgt* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$".

e) $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ *Relation.*

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

g) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ *Funktion*" *genau dann, wenn*
"$\overset{M}{\mathsf{focsup}}: \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

i) *Aus* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$" *und* "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ *Funktion*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}\,(E)$ *ist* $M$_*focus superior von* $E$".

j) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *folgt* "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ *Funktion*"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}: \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

k) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}\,(E)$ *ist* $M$_*focus superior von* $E$".

l) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*"
*und* "$E$ *Menge*"
*und* "$p$ *ist* $M$_*focus superior von* $E$" *folgt* "$p = \overset{M}{\mathsf{focsup}}\,(E)$".

<u>Beweis **327-17**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via **327-14(Def)**:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(E, p)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \Omega) \wedge ((E, p) = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(E, p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{E \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (E, p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"$(E, p)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(E = \Omega) \wedge (p = \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi$ ist $M$_focus superior von $\Omega \ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{p \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E}$

<u>Beweis **327-17**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt via **327-15**: $p$ Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$E$ Menge$\ldots$" und
aus `1.2` "$p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E, p)$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus superior von $E$" und
aus `1.1` "$\ldots (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$"
folgt: $\Phi$ ist $M$_focus superior von $\Omega$.

`2.3:` Aus `1.1` "$\ldots (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (E, p)$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $(E, p) = (\Omega, \Phi)$.

`4:` Aus `1.1` "$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.2` "$\Phi$ ist $M$_focus superior von $\Omega$",
aus `3` "$(E, p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2.1` "$(E, p)$ Menge"
folgt via **327-14(Def)**: $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via **327-14(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $E$.

`d)` `VS` gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2:` Aus `1` "$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt: $\Omega$ ist $M$_focus superior von $E$.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `2` "$\Omega$ ist $M$_focus superior von $E$" und
aus `VS` gleich "$E$ Menge$\ldots$"
folgt via **327-14(Def)**: $E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

<u>Beweis **327-17**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Relation.

`f)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`3:` Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ ist } M\_\text{focus superior von } \alpha)$.

`4:` Aus 3 "$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ ist } M\_\text{focus superior von } \alpha)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$"

...

<u>Beweis **327-17**</u> `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $\alpha$.

`3:` Aus `2.1`"$\alpha$ Menge" und
aus `2.2`"... $\Omega$ ist $M$_focus superior von $\alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M}{\mathsf{efocsup}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M}{\mathsf{efocsup}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

Beweis **327-17** g)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$"
folgt via **folk**: $\qquad \exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen b):
$\alpha$ ist $M$_focus superior von $\Omega$.

4: Aus 3 "$\alpha$ ist $M$_focus superior von $\Omega$"
folgt via **327-15**: $\qquad \alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo Thema1: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\qquad \overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion.

1.1: Via des bereits bewiesenen f) gilt: $\qquad \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: $\qquad \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion",
aus 1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\qquad \overset{M}{\mathsf{focsup}} : \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $\qquad \overset{M}{\mathsf{focsup}} : \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{focsup}} : \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\qquad \overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion.

<u>Beweis **327-17**</u> `i)` `VS` gleich $(E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{focsup}}\text{ Funktion})$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \ldots$" und
aus `1`
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion" und
aus `2`"$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}})$"
folgt via **18-22**: $(E, \overset{M}{\mathsf{focsup}}\,(E)) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`4:` Aus `3`"$(E, \overset{M}{\mathsf{focsup}}\,(E)) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\overset{M}{\mathsf{focsup}}\,(E)$ ist $M$_focus superior von $E$.

`j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\beta$ ist $M$_focus superior von $\alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\gamma$ ist $M$_focus superior von $\alpha$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch",
aus `2.1`"$\beta$ ist $M$_focus superior von $\alpha$" und
aus `2.2`"$\gamma$ ist $M$_focus superior von $\alpha$"
folgt via **327-13**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

...

<u>Beweis **327-17**</u> `j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

...

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`"$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Relation" und

aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{focsup}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{\overset{M}{\mathsf{focsup}} \text{ Funktion}}$

`3:` Aus `2`"$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion"

folgt via des bereits bewiesenen `h)`:

$$\boxed{\overset{M}{\mathsf{focsup}} : \overset{M}{\mathsf{efocsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)}$$

`k)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."

folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$" und

aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Funktion"

folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\overset{M}{\mathsf{focsup}}(E)$ ist $M$_focus superior von $E$.

<u>Beweis **327-17**</u> `l)`
`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus `1` "$E \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\overset{M}{\mathsf{focsup}}(E)$ ist $M$_focus superior von $E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…",
aus `VS` gleich "…$p$ ist $M$_focus superior von $E$" und
aus `2` "$\overset{M}{\mathsf{focsup}}(E)$ ist $M$_focus superior von $E$"
folgt via **327-13**: $p = \overset{M}{\mathsf{focsup}}(E)$.

□

**327-18.** Schließlich wird der Focus auf $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ und $\overset{M}{\mathsf{efoc}}$ gerichtet.

**327-18(Satz)**

a) *Aus* “$w \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$”
*folgt* “$\exists \Omega, \Phi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Phi$ *ist* $M$*_focus von* $\Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$”.

b) “$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$” *genau dann, wenn*
“$E$ *Menge*” *und* “$p$ *ist* $M$*_focus von* $E$”.

c) *Aus* “$E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$” *folgt* “$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $M$*_focus von* $E$”.

d) *Aus* “$E$ *Menge*” *und* “$p$ *ist* $M$*_focus von* $E$” *folgt* “$E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$”.

e) $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ *Relation.*

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) = \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

g) $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) “$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ *Funktion*” *genau dann, wenn*
“$\overset{M}{\mathsf{foc}}: \overset{M}{\mathsf{efoc}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”.

i) *Aus* “$E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$” *und* “$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ *Funktion*”
*folgt* “$\overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)$ *ist* $M$*_focus von* $E$”.

j) *Aus* “$M$ *antiSymmetrisch*” *folgt* “$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ *Funktion*”
*und* “$\overset{M}{\mathsf{foc}}: \overset{M}{\mathsf{efoc}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”.

k) *Aus* “$M$ *antiSymmetrisch*” *und* “$E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$”
*folgt* “$\overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)$ *ist* $M$*_focus von* $E$”.

l) *Aus* “$M$ *antiSymmetrisch*”
*und* “$E$ *Menge*”
*und* “$p$ *ist* $M$*_focus von* $E$” *folgt* “$p = \overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)$”.

<u>Beweis **327-18**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via **327-14(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\_\text{focus von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } M\_\text{focus von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(E, p)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } M\_\text{focus von } \Omega) \wedge ((E, p) = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(E, p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{E \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (E, p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"$(E, p)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(E = \Omega) \wedge (p = \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi$ ist $M_$focus von $\Omega \ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{p \text{ ist } M\_\text{focus von } E}$

<u>Beweis **327-18**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\qquad (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\_\text{focus von } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus von $E$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus von $E$"
folgt via **327-15**: $p$ Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$E$ Menge$\ldots$" und
aus `1.2`"$p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(E, p)$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus von $E$" und
aus `1.1`"$\ldots (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$"
folgt: $\Phi$ ist $M$_focus von $\Omega$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots (\Omega = E) \wedge (\Phi = p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (E, p)$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $(E, p) = (\Omega, \Phi)$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.2`"$\Phi$ ist $M$_focus von $\Omega$",
aus `3`"$(E, p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2.1`"$(E, p)$ Menge"
folgt via **327-14(Def)**: $(E, p) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`c)` `VS` gleich $p \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$"
folgt via **327-14(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus von $E$.

`d)` `VS` gleich $\qquad (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\_\text{focus von } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus von $E$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $M$_focus von $E$"
folgt: $\Omega$ ist $M$_focus von $E$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\Omega$ ist $M$_focus von $E$" und
aus `VS` gleich "$E$ Menge$\ldots$"
folgt via **327-14(Def)**: $E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

Beweis **327-18** `e)`

| | |
|---|---|
| `Thema1` | $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$. |
| Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: | $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$. |

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{foc}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Relation.

`f)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
($\alpha$ Menge) $\wedge$ ($\Omega$ ist $M$_focus von $\alpha$).

`4:` Aus `3` "($\alpha$ Menge) $\wedge$ ($\Omega$ ist $M$_focus von $\alpha$)"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efoc}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{efoc}}$"

...

Beweis **327-18** `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus von $\alpha$.

`3:` Aus `2.1` "$\alpha$ Menge" und
aus `2.2` "... $\Omega$ ist $M$_focus von $\alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, \Omega) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{"}\overset{M}{\mathsf{efoc}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})\text{"}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) \subseteq \overset{M}{\mathsf{efoc}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M}{\mathsf{efoc}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) = \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

<u>Beweis **327-18**</u> `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\alpha$ ist $M$_focus von $\Omega$.

`4:` Aus `3` "$\alpha$ ist $M$_focus von $\Omega$"
folgt via **327-15**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`h)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) = \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion",
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) = \overset{M}{\mathsf{efoc}}$" und
aus `1.2` "$\mathsf{ran}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{foc}}: \overset{M}{\mathsf{efoc}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`h)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\overset{M}{\mathsf{foc}}: \overset{M}{\mathsf{efoc}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{foc}}: \overset{M}{\mathsf{efoc}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion.

Beweis **327-18** `i)` `VS` gleich $(E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{foc}} \text{ Funktion})$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}}) = \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}} \ldots$" und
aus `1`
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion" und
aus `2`"$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$"
folgt via **18-22**: $(E, \overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`4:` Aus `3`"$(E, \overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$\overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)$ ist $M$_focus von $E$.

`j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\beta$ ist $M$_focus von $\alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\gamma$ ist $M$_focus von $\alpha$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch",
aus `2.1`"$\beta$ ist $M$_focus von $\alpha$" und
aus `2.2`"$\gamma$ ist $M$_focus von $\alpha$"
folgt via **327-13**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{"}\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{"}}$

...

<u>Beweis **327-18**</u> `j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

...

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`"$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M}{\mathsf{foc}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{\overset{M}{\mathsf{foc}} \text{ Funktion}}$

`3:` Aus `2`"$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `h)`:

$$\boxed{\overset{M}{\mathsf{foc}} : \overset{M}{\mathsf{efoc}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)}$$

`k)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$" und
aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{foc}}$ Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\overset{M}{\mathsf{foc}}(E)$ ist $M$_focus von $E$.

<u>Beweis **327-18**</u> `l)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\_\text{focus von } E)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots (E \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } M\_\text{focus von } E)$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$M$ antiSymmetrisch...” und
aus `1`“$E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}}$”
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\overset{M}{\mathsf{foc}}(E)$ ist $M_$focus von $E$.

`3:` Aus `VS` gleich “$M$ antiSymmetrisch...”,
aus `VS` gleich “$\ldots p$ ist $M_$focus von $E$” und
aus `2`“$\overset{M}{\mathsf{foc}}(E)$ ist $M_$focus von $E$”
folgt via **327-13**: $p = \overset{M}{\mathsf{foc}}(E)$.

□

**Literatur.**

**N. Dunford & J.T. Schwartz**, Linear Operators. Part I: General Theory, Wiley, 1988(6).

Mengenlehre: Filter-Basis. Weiteres über focus (inferior/superior).

**Ersterstellung: 17/02/15** **Letzte Änderung: 17/02/15**

**328-1.** Ist $M$ Vollständig, so kann Hinreichendes über die Existenz eines focus inferior ausgesagt werden.

**328-1(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ Vollständig.*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq x \in E$.

$\rightarrow\!)$ *$u$ untere $M$_Schranke von $x$.*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha$ *ist $M$_Infimum von* $\beta \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$.

*Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$".*

Beweis **328-1**

1.1: Aus$\rightarrow\!)$ "$M$ Vollständig",
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq x \ldots$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$u$ untere $M$_Schranke von $x$"
folgt via **320-1**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $x$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

2: Aus Thema1.2"$\gamma \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **327-1**:
$\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\gamma$ ist $M$_Infimum von $\Phi)$.

3: Aus 2"$\ldots \gamma$ ist $M$_Infimum von $\Phi$",
aus 2"$\ldots \Phi \in E \ldots$" und
aus $\rightarrow\!)$"$\forall \alpha, \beta : (\alpha$ ist $M$_Infimum von $\beta \in E)$
$\Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt: $\gamma\_M\_o$.

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{"}\forall \gamma : (\gamma \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\gamma\_M\_o)\text{"}}$

...

Beweis **328-1** . . .

2: Aus 1.1 “ . . . $\Psi$ ist $M$_Infimum von $x$ ” und
aus →) “ . . . $x \in E$ ”
folgt via **327-1**: $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

3: Aus 2 “ $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ”
folgt via **folk**: $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

4: Aus 3 “ $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ” und
aus A1 gleich “ $\forall \gamma : (\gamma \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\gamma\_M\_o)$ ”
folgt via **folk**: $o$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

5: Aus →) “ $M$ Vollständig ” ,
aus 3 “ $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ” und
aus 4 “ $o$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ”
folgt via **320-1**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

6: Aus 5 “ . . . $\Omega$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ”
folgt via **327-8(Def)**: $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

7: Aus 5 “ $\exists \Omega$ . . . ” und
aus 6
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

□

**328-2.** Ist $M$ Vollständig, so kann Hinreichendes über die Existenz eines focus superior ausgesagt werden.

> **328-2(Satz)** *Es gelte:*
>
> $\rightarrow)$ *$M$ Vollständig.*
>
> $\rightarrow)$ $0 \neq x \in E$.
>
> $\rightarrow)$ *$o$ obere $M$_Schranke von $x$.*
>
> $\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha$ *ist $M$_Supremum von* $\beta \in E) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$.
>
> *Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $E$".*

Beweis **328-2**

`1.1:` Aus$\rightarrow)$ "$M$ Vollständig",
aus $\rightarrow)$ "$0 \neq x \ldots$" und
aus $\rightarrow)$ "$o$ obere $M$_Schranke von $x$"
folgt via **320-1**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_Supremum von $x$.

> `Thema1.2` $\gamma \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
> folgt via **327-1**:
> $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\gamma$ ist $M$_Supremum von $\Phi)$.
>
> `3:` Aus 2"$\ldots \gamma$ ist $M$_Supremum von $\Phi$",
> aus 2"$\ldots \Phi \in E \ldots$" und
> aus $\rightarrow)$"$\forall \alpha, \beta : (\alpha$ ist $M$_Supremum von $\beta \in E)$
> $\Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
> folgt: $u\_M\_\gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (u\_M\_\gamma)$"

...

Beweis **328-2** ...

2: Aus 1.1"... $\Psi$ ist $M$_Supremum von $x$" und
aus →) "... $x \in E$"
folgt via **327-1**: $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

3: Aus 2"$\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **folk**: $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

4: Aus 3"$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (u\_M\_\gamma)$"
folgt via **folk**: $u$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

5: Aus →) "$M$ Vollständig",
aus 3"$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$" und
aus 4"$u$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **320-1**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

6: Aus 5"... $\Omega$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **327-8(Def)**: $\Omega$ ist $M$_focus superior von $E$.

7: Aus 5"$\exists \Omega$..." und
aus 6
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $E$.

□

**328-3.** Ist $M$ oben Stark Vollständig, so kann Hinreichendes über die Existenz eines focus inferior ausgesagt werden.

**328-3(Satz)** *Es gelte:*

→) *$M$ oben Stark Vollständig.*

→) $0 \neq x \in E$.

→) *$u$ untere $M$_Schranke von $x$.*

*Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$".*

<u>Beweis **328-3**</u>

`1.1:` Aus →) “ $M$ oben Stark Vollständig ”
folgt via **50-2**: $M$ Vollständig.

`1.2:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2.1:` Aus `1.1` “ $M$ Vollständig ” ,
aus →) “ $0 \neq x \ldots$ ” und
aus →) “ $u$ untere $M$_Schranke von $x$ ”
folgt via **320-1**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $x$.

`2.2:` Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

`3.1:` Aus `2.1` “ $\ldots \Psi$ ist $M$_Infimum von $x$ ” und
aus →) “ $\ldots x \in E$ ”
folgt via **327-1**: $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`3.2:` Aus `1.2` “ $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ ” und
aus `2.2` “ $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{dom}\,M$ ”
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

`4:` Aus `3.1` “ $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ”
folgt via **folk**: $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`5:` Aus →) “ $M$ oben Stark Vollständig ” ,
aus `4` “ $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ” und
aus `3.2` “ $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$ ”
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`6:` Aus `5` “ $\ldots \Omega$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ”
folgt via **327-8(Def)**: $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`7:` Aus `5` “ $\exists \Omega \ldots$ ” und
aus `6`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

$\square$

**328-4.** Ist $M$ unten Stark Vollständig, so kann Hinreichendes über die Existenz eines focus superior ausgesagt werden.

**328-4(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) *$M$ unten Stark Vollständig.*

$\rightarrow$) $0 \neq x \in E$.

$\rightarrow$) *$o$ obere $M$_Schranke von $x$.*

*Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $E$".*

<u>Beweis **328-4**</u>

`1.1:` Aus →) “ $M$ unten Stark Vollständig ”
folgt via **50-2**: $M$ Vollständig.

`1.2:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2.1:` Aus `1.1` “ $M$ Vollständig ” ,
aus →) “ $0 \neq x \ldots$ ” und
aus →) “ $o$ obere $M$_Schranke von $x$ ”
folgt via **320-1**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_Supremum von $x$.

`2.2:` Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`3.1:` Aus `2.1` “ $\ldots \Psi$ ist $M$_Supremum von $x$ ” und
aus →) “ $\ldots x \in E$ ”
folgt via **327-1**: $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`3.2:` Aus `1.2` “ $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ ” und
aus `2.2` “ $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{ran}\,M$ ”
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`4:` Aus `3.1` “ $\Psi \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ”
folgt via **folk**: $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`5:` Aus →) “ $M$ unten Stark Vollständig ” ,
aus `4` “ $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ” und
aus `3.2` “ $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$ ”
folgt via **50-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`6:` Aus `5` “ $\ldots \Omega$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ”
folgt via **327-8(Def)**: $\Omega$ ist $M$_focus superior von $E$.

`7:` Aus `5` “ $\exists \Omega \ldots$ ” und
aus `6`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $E$.

□

**328-5.** Ist $M$ Total Vollständig, so hat jede Klasse einen $M$_focus inferior und einen $M$_focus superior. Konsequenter Weise gilt in diesem Fall $\overset{M}{\mathsf{efocinf}} = \mathcal{U}$ und $\overset{M}{\mathsf{efocsup}} = \mathcal{U}$.

> **<u>328-5(Satz)</u>** *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) *$M$ Total Vollständig.*
>
> *Dann folgt:*
>
> a) $\exists \Omega : \Omega$ *ist $M$_focus inferior von $E$.*
>
> b) $\exists \Psi : \Psi$ *ist $M$_focus superior von $E$.*
>
> c) $\overset{M}{\mathsf{efocinf}} = \mathcal{U}$
>
> d) $\overset{M}{\mathsf{efocsup}} = \mathcal{U}$.
>
> e) $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ *Unmenge.*
>
> f) $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ *Unmenge.*

<u>Beweis **328-5**</u> ab)

1.1: Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

1.2: Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2.1: Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2.2: Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

3.1: Aus 1.1 "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus 2.1 "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

3.2: Aus 1.2 "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$" und
aus 2.2 "$(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M) \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

...

<u>Beweis **328-5**</u> `ab)` ...

`4.1:` Aus →) " $M$ Total Vollständig " und
aus `3.1` " $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$ "
folgt via **320-2**: $\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`4.2:` Aus →) " $M$ Total Vollständig " und
aus `3.2` " $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$ "
folgt via **320-2**: $\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`5.1:` Aus `4.1` " ... $\Omega$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ "
folgt via **327-8(Def)**: $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`5.2:` Aus `4.2` " ... $\Psi$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ "
folgt via **327-8(Def)**: $\Psi$ ist $M$_focus superior von $E$.

`6.a):` Aus `4.1` " $\exists\Omega$ ... " und
aus `5.1`
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`6.b):` Aus `4.2` " $\exists\Psi$ ... " und
aus `5.2`
folgt: $\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_focus superior von $E$.

`c)`

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1` " $\alpha \in \mathcal{U}$ "
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`3:` Aus →) " $M$ Total Vollständig "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$.

`4:` Aus `2` " $\alpha$ Menge " und
aus `3` " ... $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $\alpha$ "
folgt via **327-16**: $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocinf}})$.

Konsequenz via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{efocinf}} = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **328-5**</u> `d)`

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1}}$ | $\alpha \in \mathcal{U}$. |
| `2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"<br>folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `3:` Aus →) "$M$ Total Vollständig"<br>folgt via des bereits bewiesenen `a)`: | $\exists \Psi : \Psi$ ist $M$_focus superior von $\alpha$. |
| `4:` Aus `2` "$\alpha$ Menge" und<br>aus `3` "$\ldots \Psi$ ist $M$_focus superior von $\alpha$"<br>folgt via **327-17**: | $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$. |

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{efocsup}})$.

Konsequenz via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{efocsup}} = \mathcal{U}$.

`ef)`

`1.1:` Via **327-16** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \overset{M}{\mathsf{efocinf}}$.

`1.2:` Via **327-17** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \overset{M}{\mathsf{efocsup}}$.

`2.1:` Aus →) "$M$ Total Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\overset{M}{\mathsf{efocinf}} = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus →) "$M$ Total Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\overset{M}{\mathsf{efocinf}} = \mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `1.1` und
aus `2.1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `1.2` und
aus `2.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \mathcal{U}$.

...

<u>Beweis **328-5**</u> `ef)` ...

`4.e):` Aus `3.1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focinf}}) = \mathcal{U}$"

folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{focinf}}$ Unmenge.

`4.f):` Aus `3.2` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{focsup}}) = \mathcal{U}$"

folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{focsup}}$ Unmenge.

$\square$

**328-6.** Mit dem Begriff "Filter-Basis" werfen Netze ihre Schatten voraus.

**328-6(Definition)**

"$E$ **Filter-Basis**" genau dann, wenn gilt:

e1) $0 \neq E$.

e2) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (\Omega \subseteq \alpha, \beta))$.

**328-7.** Keine Filter-Basis enthält die leere Menge.

<u>**328-7(Satz)**</u>

a) *Aus "$E$ Filter-Basis" folgt "$0 \notin E$".*

b) *Aus "$x, y \in E$ Filter-Basis" folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \subseteq x \cap y)$".*

c) *Aus "$x, y \in E$ Filter-Basis" folgt "$0 \neq x \cap y$".*

<u>Beweis **328-7**</u> `a)` `VS` gleich $E$ Filter-Basis.

`1:` Es gilt: $(0 \in E) \vee (0 \notin E)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E$ Filter-Basis",
aus `1.1.Fall` "$0 \in E$" und
aus `1.1.Fall` "$0 \in E$"
folgt via **328-6(Def)**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (\Omega \subseteq 0, 0)$.

`3:` Aus 2 "$\ldots \Omega \subseteq 0 \ldots$"
folgt via **folk**: $\Omega = 0$.

`4:` Via 2 gilt: $0 \neq \Omega$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \notin E$.

`bc)` `VS` gleich $x, y \in E$ Filter-Basis.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in E$ Filter-Basis"
folgt via **328-6(Def)**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \subseteq x, y)$.

`2:` Aus `1` "$\ldots \Omega \subseteq x, y$"
folgt via **folk**: $\Omega \subseteq x \cap y$.

`3.b):` Aus `1` "$\exists \Omega : 0 \neq \Omega \in E \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \subseteq x \cap y)$.

`3.c):` Aus `3.b)` "$\ldots 0 \neq \Omega \subseteq x \cap y$"
folgt via **folk**: $0 \neq x \cap y$.

$\square$

**328-8.** Die Bedeutung von Filter-Basen beginnt sich an Hand der nunmehrigen Aussage abzuzeichnen.

**328-8(Satz)** *Es gelte:*

→) *$M$ transitiv.*

→) *$E$ Filter-Basis.*

→) *$u$ untere $M$_Schranke von $x \in E$.*

→) *$o$ obere $M$_Schranke von $y \in E$.*

*Dann folgt "$u$_$M$_$o$".*

Beweis **328-8**

1: Aus →) "$E$ Filter-Basis",
aus →) "$\ldots x \in E$" und
aus →) "$\ldots y \in E$"
folgt via **328-6(Def)**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (\Omega \subseteq x, y)$.

2.1: Aus →) "$u$ untere $M$_Schranke von $x \ldots$" und
aus 1 "$\ldots \Omega \subseteq x \ldots$"
folgt via **folk**: $u$ untere $M$_Schranke von $\Omega$.

2.2: Aus →) "$o$ obere $M$_Schranke von $y \ldots$" und
aus 1 "$\ldots \Omega \subseteq \ldots y$"
folgt via **folk**: $o$ obere $M$_Schranke von $\Omega$.

3: Aus →) "$M$ transitiv",
aus 2.1 "$u$ untere $M$_Schranke von $\Omega$",
aus 2.2 "$o$ obere $M$_Schranke von $\Omega$" und
aus 1 "$\ldots 0 \neq \Omega \ldots$"
folgt via **37-15**: $u$_$M$_$o$.

□

**328-9.** Ist $E$ eine Filter-Basis und ist $M$ transitiv, so ist jedes $p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ eine untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

**328-9(Satz)**

a) *Aus "$M$ transitiv" und "$E$ Filter-Basis" und "$p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"*
*folgt "$p$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$".*

b) *Aus "$M$ transitiv" und "$E$ Filter-Basis" und "$p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"*
*folgt "$p$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$".*

<u>Beweis **328-9**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (E \text{ Filter-Basis}) \wedge (p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$.

`1.1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **327-1**:
$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha$ ist $M$_Supremum von $\Omega$"
folgt via **folk**: $\alpha$ obere $M$_Schranke von $\Omega$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **327-1**:
$\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Psi)$.

`5:` Aus `4` "$\ldots p$ ist $M$_Infimum von $\Psi$"
folgt via **folk**: $p$ untere $M$_Schranke von $\Psi$.

`6:` Aus `VS` gleich "$(M \text{ transitiv}) \wedge (E \text{ Filter-Basis}) \ldots$",
aus `5` "$p$ untere $M$_Schranke von $\Psi$",
aus `4` "$\ldots \Psi \in E \ldots$",
aus `3` "$\alpha$ obere $M$_Schranke von $\Omega$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **328-8**: $p\_M\_\alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$" und
aus `1.1` "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **folk**: $p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`3:` Aus `2` "$p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **folk**: $p \in \mathsf{dom}\,M$.

`4:` Aus `3` "$p \in \mathsf{dom}\,M$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **folk**: $p$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

<u>Beweis **328-9**</u> `b)` `VS` gleich $(M \text{ transitiv}) \wedge (E \text{ Filter-Basis}) \wedge (p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$.

`1.1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

---

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$”
folgt via **327-1**:
$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \alpha$ ist $M$_Infimum von $\Omega$”
folgt via **folk**: $\alpha$ untere $M$_Schranke von $\Omega$.

`4:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$”
folgt via **327-1**:
$\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge (p \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Psi)$.

`5:` Aus `4`“$\ldots p$ ist $M$_Supremum von $\Psi$”
folgt via **folk**: $p$ obere $M$_Schranke von $\Psi$.

`6:` Aus `VS` gleich “$(M \text{ transitiv}) \wedge (E \text{ Filter-Basis}) \ldots$”,
aus `2`“$\alpha$ untere $M$_Schranke von $\Omega$”,
aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”,
aus `5`“$p$ obere $M$_Schranke von $\Psi$” und
aus `4`“$\ldots \Psi \in E \ldots$”
folgt via **328-8**: $\alpha\_M\_p$.

---

Ergo `Thema1.2`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$”

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \in \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$” und
aus `1.1`“$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt via **folk**: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`3:` Aus `2`“$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$”
folgt via **folk**: $p \in \mathsf{ran}\, M$.

`4:` Aus `3`“$p \in \mathsf{ran}\, M$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$”
folgt via **folk**: $p$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

□

**328-10.** Ist $E$ eine Filter-Basis, so gilt für transitive $M$ Interessantes für $M$_focus inferior und $M$_focus superior.

**328-10(Satz)** *Es gelte:*

→) *$M$ transitiv.*

→) *$E$ Filter-Basis.*

→) *$p$ ist $M$_focus inferior von $E$.*

→) *$q$ ist $M$_focus superior von $E$.*

*Dann folgt "$p$_$M$_$q$".*

Beweis **328-10**

`1.1:` Aus →) " $p$ ist $M$_focus inferior von $E$ "
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`1.2:` Aus →) " $q$ ist $M$_focus superior von $E$ "
folgt via **327-8(Def)**: $q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`2:` Es gilt: $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] = 0) \vee (0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] = 0$.

`3:` Aus `1` und
aus `2.1.Fall`
folgt: $p$ ist $M$_Supremum von $0$.

`4:` Aus →) " $p$ ist $M$_Supremum von $0$ "
folgt via **36-12**: $p$ ist $M$_Infimum von $\mathsf{ran}\,M$.

`5:` Aus `1.2` " $q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ "
folgt via **36-3**: $q \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`6:` Aus `5` " $q \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ "
folgt via **folk**: $q \in \mathsf{ran}\,M$.

`7:` Aus `4` " $p$ ist $M$_Infimum von $\mathsf{ran}\,M$ " und
aus `6` " $q \in \mathsf{ran}\,M$ "
folgt via **folk**: $p$_$M$_$q$.

...

<u>Beweis **328-10**</u>

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`3:` Aus →) " $M$ transitiv " ,
aus →) " $E$ Filter-Basis " und
aus `Thema3.1` " $\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ "
folgt via **328-9**: $\alpha$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`4:` Aus `1.2` " $q$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ " und
aus `3` " $\alpha$ untere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ "
folgt via **folk**: $\alpha\_M\_q$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | " $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\alpha\_M\_q)$ "

`3.2:` Aus `2.2.Fall` " $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ " und
aus `A1` gleich " $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\alpha\_M\_q)$ "
folgt via **folk**: $q$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`4:` Aus `1.1` " $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ " und
aus `3.2` " $q$ obere $M$_Schranke von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ "
folgt via **folk**: $p\_M\_q$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $p\_M\_q$.

□

**Literatur.**

**K.P. Grotemeyer**, Topologie, *B.I. Mannheim/Wien/Zürich*, 1969.

$$\text{Mengenlehre: } p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x.\ \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}.$$
$$x \text{ hat } (M,E)\text{gw inferior. } \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}.$$
$$p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x.\ \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}.$$
$$x \text{ hat } (M,E)\text{gw superior. } \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}.$$
$$p \text{ ist } (M,E)\text{gw von } x.\ \overset{M,E}{\mathsf{gw}}.$$
$$x \text{ hat } (M,E)\text{gw. } \overset{M,E}{\mathsf{egw}}.$$

**Ersterstellung: 17/02/15** **Letzte Änderung: 18/02/15**

**329-1.** Ist $E$ eine Filter-Basis, so dass jedes Element von $E$ nicht-leeren Schnitt mit $\mathsf{dom}\,x$ hat und $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ gilt, so ist auch $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ eine Filter-Basis.

**329-1(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *$E$ Filter-Basis.*

$\rightarrow)$ $0 \notin E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\,x$.

$\rightarrow)$ $p \in E$.

$\rightarrow)$ $x[p]$ *Menge.*

*Dann folgt* "$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ *Filter-Basis*".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-1**

`1.1:` Aus →) "$p \in E$" und
aus →) "$x[p]$ Menge"
folgt via **8-23**: $x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha, \beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \ldots \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
> folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x[\Omega])$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
> folgt via **8-23**: $\exists \Psi : (\Psi \in E) \wedge (\beta = x[\Psi])$.
>
> `2.3:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \ldots \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
> folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.
>
> `3:` Aus →) "$E$ Filter-Basis",
> aus `2.1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
> aus `2.2`"$\ldots \Psi \in E \ldots$"
> folgt via **328-6(Def)**: $\exists \Gamma : (0 \neq \Gamma \in E) \wedge (\Gamma \subseteq \Omega, \Psi)$.
>
> `4.1:` Aus `3`"$\ldots \Gamma \subseteq \Omega \ldots$"
> folgt via **8-9**: $x[\Gamma] \subseteq x[\Omega]$.
>
> `4.2:` Aus `3`"$\ldots \Gamma \subseteq \ldots \Psi$"
> folgt via **8-9**: $x[\Gamma] \subseteq x[\Psi]$.
>
> `4.3:` Aus `3`"$\ldots \Gamma \in E \ldots$"
> folgt via **220-4**: $\Gamma \cap \mathsf{dom}\, x \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$.
>
> `5.1:` Aus `4.1` und
> aus `2.1`"$\ldots \alpha = x[\Omega]$"
> folgt: $x[\Gamma] \subseteq \alpha$.
>
> `5.2:` Aus `4.2` und
> aus `2.2`"$\ldots \beta = x[\Psi]$"
> folgt: $x[\Gamma] \subseteq \beta$.
>
> `5.3:` Aus →) "$0 \notin E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$" und
> aus `3`"$\exists \Gamma \ldots$"
> folgt: $\exists \Phi : \Phi = x[\Gamma]$.
>
> `5.4:` Aus `4.3`"$\Gamma \cap \mathsf{dom}\, x \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$" und
> aus →) "$0 \notin E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$"
> folgt via **0-1**: $\Gamma \cap \mathsf{dom}\, x \neq 0$.
>
> ...

...

<u>Beweis **329-1**</u>

...

`Thema1.2` $\alpha, \beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

...

`6.1:` Aus `5.1` und
aus `5.3`“$\ldots \Phi = x[\Gamma]$”
folgt: $\Phi \subseteq \alpha$.

`6.2:` Aus `5.2` und
aus `5.3`“$\ldots \Phi = x[\Gamma]$”
folgt: $\Phi \subseteq \beta$.

`6.3:` Aus `5.4`
folgt: $0 \neq \Gamma \cap \mathsf{dom}\, x$.

`6.4:` Aus `5.1`“$x[\Gamma] \subseteq \alpha$” und
aus `2.3`“$\alpha$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x[\Gamma]$ Menge.

`7.1:` Aus `6.3`“$0 \neq \Gamma \cap \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **8-14**: $0 \neq x[\Gamma]$.

`7.2:` Aus `6.4`“$x[\Gamma]$ Menge” und
aus `3`“$\ldots \Gamma \in E \ldots$”
folgt via **8-23**: $x[\Gamma] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`8.1:` Aus `7.1` und
aus `5.3`“$\ldots \Phi = x[\Gamma]$”
folgt: $0 \neq \Phi$.

`8.2:` Aus `7.2` und
aus `5.3`“$\ldots \Phi = x[\Gamma]$”
folgt: $\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

...

...

<u>Beweis **329-1**</u>

...

`Thema1.2` $\qquad\qquad \alpha,\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$.

...

`9:` Aus `5.3`“$\exists\Phi\ldots$”,
aus `8.1`,
aus `8.2`,
aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $\qquad \exists\Phi:(0\neq\Phi\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\})\wedge(\Phi\subseteq\alpha,\beta)$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` “$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\})$
$\Rightarrow(\exists\Phi:(0\neq\Phi\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\})\wedge(\Phi\subseteq\alpha,\beta))$”

`2:` Aus `1.1`“$x[p]\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$”
folgt via **folk**: $\qquad 0\neq\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$.

`3:` Aus 2“$0\neq\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$” und
aus `A1` gleiich “$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\})$
$\Rightarrow(\exists\Phi:(0\neq\Phi\in\{x[\lambda]:\lambda\in E\})\wedge(\Phi\subseteq\alpha,\beta))$”
folgt via **328-6(Def)**: $\qquad \{x[\lambda]:\lambda\in E\}$ Filter-Basis.

□

**329-2.** Ist $\mathsf{ran}\, x$ eine Menge, so ist eine vereinfachte Version von **329-1** verfügbar.

**329-2(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) *$E$ Filter-Basis.*

$\rightarrow$) $0 \notin E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$.

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, x$ *Menge.*

*Dann folgt "$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Filter-Basis".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-2**

1: Aus $\rightarrow$) "$E$ Filter-Basis"
folgt via **328-6(Def)**: $0 \neq E$.

2: Aus 1 "$0 \neq E$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

3: Via **8-10** gilt: $x[\Omega] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

4: Aus 3 "$x[\Omega] \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x[\Omega]$ Menge.

5: Aus $\rightarrow$) "$E$ Filter-Basis",
aus $\rightarrow$) "$0 \notin E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$",
aus 2 "$\ldots \Omega \in E$" und
aus 4 "$x[\Omega]$ Menge"
folgt via **329-1**: $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Filter-Basis.

□

**329-3.** Via dom ran **Axiom** ist eine vereinfachte Version von **329-2** verfügbar.

**329-3(Satz)** *Es gelte:*

→) *$E$ Filter-Basis.*

→) $0 \notin E \;_{\mathtt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$.

→) *$x$ Menge.*

*Dann folgt "$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Filter-Basis".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-3**

1: Aus →) "$x$ Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: ran $x$ Menge.

2: Aus →) "$E$ Filter-Basis",
aus →) "$0 \notin E \;_{\mathtt{ni}}\!\cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus 1 "ran $x$ Menge"
folgt via **329-2**: $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Filter-Basis.

□

**329-4.** In Anlehnung an "Grenzwert" wird hier nun unter anderem definiert, was es heißt, dass $p$ ein $M$_gw inferior von $E$ zu sein. Das Wort "Grenzwert" wird hier nicht eingesetzt, da es an späterer, konventionellerer Stelle verwendet werden wird. Anders als bei diesen späteren Konzepten kommt hier zwar zusätzlich zu $M, E$ noch eine weitere Klasse $x$ - in Anwendungen oft eine Funktion - vor, doch keine "Stelle $a$", an der ein "Grenzwert" betrachtet werden soll.

**329-4(Definition)**

1) "$p$ **ist** $(M, E)$**gw inferior von** $x$" genau dann, wenn
"$p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$".

2) "$p$ **ist** $(M, E)$**gw superior von** $x$" genau dann, wenn
"$p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$".

3) "$p$ **ist** $(M, E)$**gw von** $x$" genau dann, wenn
"$p$ ist $M$_focus von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$".

4) "$x$ **hat** $(M, E)$**gw inferior**" genau dann, wenn
"$\exists\Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$".

5) "$x$ **hat** $(M, E)$**gw superior**" genau dann, wenn
"$\exists\Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $x$".

6) "$x$ **hat** $(M, E)$**gw**" genau dann, wenn
"$\exists\Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw von $x$".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

**329-5.** Ähnlich wie für focus (inferior/superior) werden nun korrespondierende Klassen für gw inferior, gw superior und gw definiert.

**329-5(Definition)**

1) $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} = \mathsf{329.0}(M,E)$
$$= \{(\lambda,\mu) : \mu \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } \lambda)\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega,\Phi))\}.$$

2) $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} = \mathsf{329.1}(M,E)$
$$= \{(\lambda,\mu) : \mu \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } \lambda)\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega,\Phi))\}.$$

3) $\overset{M,E}{\mathsf{gw}} = \mathsf{329.2}(M,E) = \{(\lambda,\mu) : \mu \text{ ist } (M,E)\text{gw von } \lambda)\}$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw von } \Omega) \wedge (\omega = (\Omega,\Phi))\}.$$

4) $\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} = \mathsf{329.3}(M,E)$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } \omega)\}.$$

5) $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} = \mathsf{329.4}(M,E)$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } \omega)\}.$$

6) $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} = \mathsf{329.5}(M,E) = \{\omega : (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{gw von } \omega)\}.$

**329-6.** Aus $D \subseteq E$ folgt $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

**329-6(Satz)**

a) *Aus* “$D \subseteq E$” *folgt* “$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$”.

b) *Aus* “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$”

*folgt* “$\forall \beta : (\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\})$
$\Rightarrow (\exists \Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta))$”.

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in y\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-6** a) VS gleich $D \subseteq E$.

Thema1 $\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}$.

2: Aus Thema1 “$\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}$”
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = x[\Omega])$.

3.1: Aus Thema1 “$\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

3.2: Aus 2 “$\ldots \Omega \in D \ldots$” und
aus VS gleich “$D \subseteq E$”
folgt via **folk**: $\Omega \in E$.

4: Aus 2 “$\ldots \alpha = x[\Omega]$” und
aus 3.1
folgt: $x[\Omega]$ Menge.

5: Aus 4 “$x[\Omega]$ Menge” und
aus 3.2 “$\Omega \in E$”
folgt via **8-23**: $x[\Omega] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

6: Aus 2 “$\ldots \alpha = x[\Omega]$” und
aus 5
folgt: $\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

Beweis **329-6** `b)` `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$"

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **8-23**: $\exists\Gamma : (\Gamma \in E) \wedge (\beta = x[\Gamma])$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Gamma \in E \ldots$" und
aus `VS`
folgt: $\exists\Psi : (\Psi \in D) \wedge (\Psi \subseteq \Gamma)$.

`4.1:` Aus `Thema1` "$\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\beta$ Menge.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Psi \subseteq \Gamma$"
folgt via **folk**: $x[\Psi] \subseteq x[\Gamma]$.

`4.3:` Aus `Thema1` und
aus `3` "$\exists\Psi \ldots$"
folgt: $\exists\Phi : \Phi = x[\Psi]$.

`5:` Aus `4.2` "$x[\Psi] \subseteq x[\Gamma]$" und
aus `2` "$\ldots \beta = x[\Gamma]$"
folgt: $x[\Psi] \subseteq \beta$.

`6.1:` Aus `5` "$x[\Psi] \subseteq \beta$" und
aus `4.1` "$\beta$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x[\Psi]$ Menge.

`6.2:` Aus `4.3` "$\ldots \Phi = x[\Psi]$" und
aus `5`
folgt: $\Phi \subseteq \beta$.

...

...

<u>Beweis **329-6**</u> `b)` `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$"

...

`Thema1` $\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

...

`7:` Aus `6.1`"$x[\Psi]$ Menge" und
aus `3`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **8-23**: $x[\Psi] \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}$.

`8:` Aus `4.3`"$\ldots \Phi = x[\Psi]$" und
aus `7`
folgt: $\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}$.

`9:` Aus `4.3`"$\exists\Phi \ldots$",
aus `8` und
aus `6.2`
folgt: $\exists\Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta)$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall\beta : (\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\exists\Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta)).$$

□

**329-7.** Gelegentlich können gw inferior unterschiedlicher Klassen miteinander verglichen werden.

<u>**329-7(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) $M$ *transitiv.*

→) $D \subseteq E$.

→) $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

→) $p$ *ist* $(M, D)$*gw inferior von* $x$.

→) $q$ *ist* $(M, E)$*gw inferior von* $x$.

*Dann folgt "*$p\_M\_q$*" und "*$q\_M\_p$*".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in y\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **329-7**</u>

1.1: Aus →) "$D \subseteq E$"
folgt via **329-6**: $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

1.2: Aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$"
folgt via **329-6**:
$\forall \beta : (\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\exists \Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta))$.

1.3: Aus →) "$p$ ist $(M, D)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in D\}$.

1.4: Aus →) "$q$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $q$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus →) "$M$ transitv",
aus 1.1 "$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$",
aus →) "$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$",
aus 1.2 "$\forall \beta : (\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\})$
$\Rightarrow (\exists \Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta))$",
aus 1.3 "$p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in D\}$" und
aus 1.4 "$q$ ist $M$_foxus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **327-9**: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

□

**329-8.** Gelegentlich können gw superior unterschiedlicher Klassen miteinander verglichen werden.

**329-8(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow\!)$ $D \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow\!)$ *$p$ ist $(M, D)$gw superior von $x$.*

$\rightarrow\!)$ *$q$ ist $(M, E)$gw superior von $x$.*

*Dann folgt "$p\_M\_q$" und "$q\_M\_p$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in y\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-8**

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$D \subseteq E$"
folgt via **329-6**: $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$"
folgt via **329-6**:
$\forall \beta : (\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\exists \Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta))$.

1.3: Aus $\rightarrow\!)$ "$p$ ist $(M, D)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in D\}$.

1.4: Aus $\rightarrow\!)$ "$q$ ist $(M, E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ transitv",
aus 1.1 "$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$",
aus $\rightarrow\!)$ "$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$",
aus 1.2 "$\forall \beta : (\beta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\})$
$\Rightarrow (\exists \Phi : (\Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in D\}) \wedge (\Phi \subseteq \beta))$",
aus 1.3 "$p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in D\}$" und
aus 1.4 "$q$ ist $M$_foxus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **327-10**: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

$\square$

**329-9.** Gelegentlich können gw inferior unterschiedlicher Klassen gleich sein.

**329-9(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow)$ *$M$ antiSymmetrisch.*

$\rightarrow)$ $D \subseteq E$.

$\rightarrow)$ $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow)$ *$p$ ist $(M, D)$gw inferior von $x$.*

$\rightarrow)$ *$q$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$.*

*Dann folgt* "$p = q$".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in y\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-9**

1: Aus $\rightarrow)$ "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow)$ "$D \subseteq E$",
aus $\rightarrow)$ "$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$",
aus $\rightarrow)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha)$",
aus $\rightarrow)$ "$p$ ist $(M, D)$gw inferior von $x$" und
aus $\rightarrow)$ "$q$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-7**: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

2: Aus $\rightarrow)$ "$M$ antiSymmetrisch" und
aus 1 "$(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$"
folgt via **folk**: $p = q$.

$\square$

**329-10.** Gelegentlich können gw superior unterschiedlicher Klassen gleich sein.

**329-10(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *$M$ antiSymmetrisch.*

$\rightarrow\!)$ $D \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow\!)$ *$p$ ist $(M, D)$gw superior von $x$.*

$\rightarrow\!)$ *$q$ ist $(M, E)$gw superior von $x$.*

*Dann folgt "$p = q$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in y\}$ **8-22(Def)**

Beweis **329-10**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$D \subseteq E$",
aus $\rightarrow\!)$ "$\{x[\lambda] : \lambda \in D\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$",
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\Omega \subseteq \alpha)$",
aus $\rightarrow\!)$ "$p$ ist $(M, D)$gw superior von $x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$q$ ist $(M, E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-8**: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ antiSymmetrisch" und
aus 1 "$(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p)$"
folgt via **folk**: $p = q$.

$\square$

**329-11.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so hat jede Klasse $x$ höchstens eine $(M,E)$gw (inferior/superior).

**329-11(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p,q$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"* *folgt "$p=q$".*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p,q$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"* *folgt "$p=q$".*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p,q$ ist $(M,E)$gw von $x$"* *folgt "$p=q$".*

Beweis **329-11**

---

$\{x[\lambda]:\lambda\in y\}$ **8-22(Def)**

---

a) `VS` gleich $(M$ antiSymmetrisch$)\wedge(p,q$ ist $(M,E)$gw inferior von $x)$.

1: Aus `VS` gleich "…$p,q$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p,q$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$.

2: Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus 1"$p,q$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$"
folgt via **327-13**: $p=q$.

b) `VS` gleich $(M$ antiSymmetrisch$)\wedge(p,q$ ist $(M,E)$gw superior von $x)$.

1: Aus `VS` gleich "…$p,q$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p,q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$.

2: Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus 1"$p,q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$"
folgt via **327-13**: $p=q$.

c) `VS` gleich $(M$ antiSymmetrisch$)\wedge(p,q$ ist $(M,E)$gw von $x)$.

1: Aus `VS` gleich "…$p,q$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p,q$ ist $M$_focus von $\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$.

2: Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus 1"$p,q$ ist $M$_focus von $\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$"
folgt via **327-13**: $p=q$.

□

**329-12.** Jeder $(M,E)$gw (inferior/superior) von $x$ ist eine Menge, die Element von $(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M)$ ist.

<u>**329-12(Satz)**</u>

a) *Aus "$p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"*
*folgt "$p$ Menge" und "$p\in(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M)$".*

b) *Aus "$p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"*
*folgt "$p$ Menge" und "$p\in(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M)$".*

c) *Aus "$p$ ist $(M,E)$gw von $x$"*
*folgt "$p$ Menge" und "$p\in(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M)$".*

<u>Beweis **329-12**</u>

---

$\{x[\lambda]:\lambda\in y\}$ **8-22(Def)**

---

a) VS gleich $p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda]:\lambda\in[\}E]$.

2: Aus 1"$p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda]:\lambda\in[\}E]$"
folgt via **327-15**: $(p\text{ Menge})\wedge(p\in(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M))$.

b) VS gleich $p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda]:\lambda\in[\}E]$.

2: Aus 1"$p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda]:\lambda\in[\}E]$"
folgt via **327-15**: $(p\text{ Menge})\wedge(p\in(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M))$.

c) VS gleich $p$ ist $(M,E)$gw von $x$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus von $\{x[\lambda]:\lambda\in[\}E]$.

2: Aus 1"$p$ ist $M$_focus von $\{x[\lambda]:\lambda\in[\}E]$"
folgt via **327-15**: $(p\text{ Menge})\wedge(p\in(\mathsf{dom}\, M)\cap(\mathsf{ran}\, M))$.

$\square$

**329-13.** Passender Weise wird der Focus zunächst auf $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$ gerichtet.

**329-13(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$"
*folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Phi$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $\Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Phi))$".

b) "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$" *genau dann, wenn*
"$x$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$".

d) *Aus* "$x$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$"
*folgt* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$".

e) $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ *Relation.*

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

g) $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

h) "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ *Funktion*" *genau dann, wenn*
"$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$".

i) *Aus* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ *Funktion*"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$".

j) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ *Funktion*" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$".

k) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$".

l) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$x$ *Menge*"
*und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$" *folgt* "$p = \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)$".

<u>Beweis **329-13**</u> `a)` `VS` gleich $w \overset{M,E}{\in} \mathsf{gwinf}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \overset{M,E}{\in} \mathsf{gwinf}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \overset{M,E}{\in} \mathsf{gwinf}$"
folgt via **329-5(Def)**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi)).$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi)).$$

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x,p) \overset{M,E}{\in} \mathsf{gwinf}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \overset{M,E}{\in} \mathsf{gwinf}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(x,p)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \overset{M,E}{\in} \mathsf{gwinf}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } \Omega) \wedge ((x,p) = (\Omega, \Phi)).$$

`2.1:` Aus `1.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (x,p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (p = \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi$ ist $(M,E)$gw inferior von $\Omega \ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x}$

Beweis **329-13** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-12**: $p$ Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x$ Menge$\ldots$" und
aus `1.2`"$p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x,p)$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$" und
aus `1.1`"$\ldots (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$"
folgt: $\Phi$ ist $(M,E)$gw inferior von $\Omega$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (x,p)$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $(x,p) = (\Omega, \Phi)$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.2`"$\Phi$ ist $(M,E)$gw inferior von $\Omega$",
aus `3`"$(x,p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **329-5(Def)**: $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$"
folgt via **329-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

`d)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"
folgt: $\Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2`"$\Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$" und
aus `VS` gleich "$x$ Menge$\ldots$"
folgt via **329-5(Def)**: $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

Beweis **329-13** `e)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}.$

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)).$

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Relation.

`f)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}).$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$"

folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}.$

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ ist } (M, E)\text{gw inferior von } \alpha).$

`4:` Aus `3` "$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\Omega \text{ ist } (M, E)\text{gw inferior von } \alpha)$"

folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$"

...

Beweis **329-13** `f)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists\Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw inferior von $\alpha$.

`3:` Aus `2.1`"$\alpha$ Menge" und
aus `2.2`"...$\Omega$ ist $(M, E)$gw inferior von $\alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

Beweis **329-13** g)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$"
folgt via **folk**: $\exists\Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\alpha$ ist $(M, E)$gw inferior von $\Omega$.

4: Aus 3 "$\alpha$ ist $(M, E)$gw inferior von $\Omega$"
folgt via **329-12**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo Thema1: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion.

1.1: Via des bereits bewiesenen f) gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion",
aus 1 "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$" und
aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Aus VS gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion.

Beweis **329-13** `i)` `VS` gleich $(x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\text{ Funktion})$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \ldots$" und aus `1` folgt: $x \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion" und aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}})$" folgt via **18-22**: $(x, \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$.

`4:` Aus `3`"$(x, \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)$ ist $(M,E)$gw inferior von $xs$.

`j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

`Thema1.1` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\beta$ ist $(M,E)$gw inferior von $\alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\gamma$ ist $(M,E)$gw inferior von $\alpha$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch", aus `2.1`"$\beta$ ist $(M,E)$gw inferior von $\alpha$" und aus `2.2`"$\gamma$ ist $(M,E)$gw inferior von $\alpha$" folgt via **329-11**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

...

<u>Beweis **329-13**</u> `j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

...

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`"$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Relation" und

aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} \text{ Funktion}}$

`3:` Aus `2`"$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion"

folgt via des bereits bewiesenen `h)`:

$$\boxed{\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)}$$

`k)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."

folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$" und

aus `1`"$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion"

folgt via des bereits bewiesenen `i)`:

$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}(x)$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$.

<u>Beweis</u> **329-13** `l)`
`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch… " und
aus `1` "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`:
$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x) \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch… ",
aus `VS` gleich "$\ldots p \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x$" und
aus `2` "$\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x) \text{ ist } (M,E)\text{gw inferior von } x$"
folgt via **329-11**: $p = \overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}\,(x)$.

□

**329-14.** Hier werden $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$ untersucht.

**329-14(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
*folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Phi$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $\Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Phi))$".

b) "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$" *genau dann, wenn*
"$x$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$".

d) *Aus* "$x$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$"
*folgt* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$".

e) $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ *Relation.*

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

g) $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

h) "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ *Funktion*" *genau dann, wenn*
"$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

i) *Aus* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ *Funktion*"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\,(x)$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$".

j) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ *Funktion*"
*und* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".

k) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\,(x)$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$".

l) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$x$ *Menge*"
*und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$" *folgt* "$p = \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\,(x)$".

<u>Beweis **329-14**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via **329-5(Def)**:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(x,p)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } \Omega) \wedge ((x,p) = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (x,p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (p = \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi$ ist $(M,E)$gw superior von $\Omega \ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x}$

Beweis **329-14** b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-12**: $p$ Menge.

2.1: Aus VS gleich "$x$ Menge$\ldots$" und
aus 1.2"$p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x,p)$ Menge.

2.2: Aus VS gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$" und
aus 1.1"$\ldots (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$"
folgt: $\Phi$ ist $(M,E)$gw superior von $\Omega$.

2.3: Aus 1.1"$\ldots (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (x,p)$.

3: Aus 2.3
folgt: $(x,p) = (\Omega, \Phi)$.

4: Aus 1.1"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 2.2"$\Phi$ ist $(M,E)$gw superior von $\Omega$",
aus 3"$(x,p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus 2.1"$(x,p)$ Menge"
folgt via **329-5(Def)**: $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

c) VS gleich $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

Aus VS gleich "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via **329-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

d) VS gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega = p$" und
aus VS gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"
folgt: $\Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

3: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $x$" und
aus VS gleich "$x$ Menge$\ldots$"
folgt via **329-5(Def)**: $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

Beweis **329-14** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Relation.

`f)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(\alpha$ Menge$) \wedge (\Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $\alpha)$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha$ Menge$) \wedge (\Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $\alpha)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}\text{”}}$

...

Beweis **329-14** `f)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $\alpha$.

`3:` Aus `2.1`"$\alpha$ Menge" und
aus `2.2`"... $\Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $\alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

<u>Beweis **329-14**</u> `g)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\alpha$ ist $(M, E)$gw superior von $\Omega$.

`4:` Aus `3` "$\alpha$ ist $(M, E)$gw superior von $\Omega$"
folgt via **329-12**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion",
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$" und
aus `1.2` "$\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion.

Beweis **329-14** `i)` `VS` gleich $(x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}) \wedge (\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\text{ Funktion})$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \ldots$" und
aus `1`
folgt: $x \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion" und
aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}})$"
folgt via **18-22**: $(x, \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\,(x)) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$.

`4:` Aus `3`"$(x, \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\,(x)) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}\,(x)$ ist $(M,E)$gw superior von $xs$.

`j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

| `Thema1.1` | $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$. |

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\beta$ ist $(M,E)$gw superior von $\alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\gamma$ ist $(M,E)$gw superior von $\alpha$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch",
aus `2.1`"$\beta$ ist $(M,E)$gw superior von $\alpha$" und
aus `2.2`"$\gamma$ ist $(M,E)$gw superior von $\alpha$"
folgt via **329-11**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

...

<u>Beweis **329-14**</u> `j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

...

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} \text{ Funktion}}$

`3:` Aus `2`“$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`:

$$\boxed{\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)}$$

`k)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$M$ antiSymmetrisch...”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$” und
aus `1`“$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`:
$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}(x)$ ist $(M, E)$gw superior von $x$.

<u>Beweis **329-14**</u> `l)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus `1` "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`:
$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}(x) \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…",
aus `VS` gleich "$\ldots p \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x$" und
aus `2` "$\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}(x) \text{ ist } (M,E)\text{gw superior von } x$"
folgt via **329-11**: $p = \overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}(x)$.

□

**329-15.** Hier werden $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{egw}}$ untersucht.

**329-15(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$" *folgt* "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega$ *Menge*$) \wedge (\Phi$ *ist* $(M,E)$*gw von* $\Omega)$
$\wedge (w = (\Omega, \Phi))$".

b) "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$" *genau dann, wenn*
"$x$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw von* $x$".

c) *Aus* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$" *folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $(M,E)$*gw von* $x$".

d) *Aus* "$x$ *Menge*" *und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw von* $x$" *folgt* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$".

e) $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ *Relation.*

f) $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

g) $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}) \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

h) "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ *Funktion*" *genau dann, wenn*
"$\overset{M,E}{\mathsf{gw}} : \overset{M,E}{\mathsf{egw}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$".

i) *Aus* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$" *und* "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ *Funktion*"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$ *ist* $(M,E)$*gw von* $x$".

j) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ *Funktion*"
*und* "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}} : \overset{M,E}{\mathsf{egw}} \to (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$".

k) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$"
*folgt* "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$ *ist* $(M,E)$*gw von* $x$".

l) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*" *und* "$x$ *Menge*"
*und* "$p$ *ist* $(M,E)$*gw von* $x$" *folgt* "$p = \overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$".

<u>Beweis **329-15**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via **329-5(Def)**:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \Phi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\Omega$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw von } \Omega) \wedge (w = (\Omega, \Phi))$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(x,p)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Phi : (\Phi \text{ ist } (M,E)\text{gw von } \Omega) \wedge ((x,p) = (\Omega, \Phi))$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (x,p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `1.1`"$(x,p)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(x = \Omega) \wedge (p = \Phi)$.

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi$ ist $(M,E)$gw von $\Omega \ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $\boxed{p \text{ ist } (M,E)\text{gw von } x}$

<u>Beweis **329-15**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw von } x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt via **329-12**: $p$ Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x$ Menge$\ldots$" und
aus `1.2` "$p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x,p)$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw von $x$" und
aus `1.1` "$\ldots (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$"
folgt: $\Phi$ ist $(M,E)$gw von $\Omega$.

`2.3:` Aus `1.1` "$\ldots (\Omega = x) \wedge (\Phi = p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (x,p)$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $(x,p) = (\Omega, \Phi)$.

`4:` Aus `1.1` "$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.2` "$\Phi$ ist $(M,E)$gw von $\Omega$",
aus `3` "$(x,p) = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2.1` "$(x,p)$ Menge"
folgt via **329-5(Def)**: $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$"
folgt via **329-5(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw von $x$.

`d)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2:` Aus `1` "$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt: $\Omega$ ist $(M,E)$gw von $x$.

`3:` Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `2` "$\Omega$ ist $(M,E)$gw von $x$" und
aus `VS` gleich "$x$ Menge$\ldots$"
folgt via **329-5(Def)**: $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

<u>Beweis **329-15**</u> `e)`

`Thema1` $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

Aus `Thema1` "$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Relation.

`f)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
($\alpha$ Menge) $\wedge$ ($\Omega$ ist $(M, E)$gw von $\alpha$).

`4:` Aus `3` "($\alpha$ Menge) $\wedge$ ($\Omega$ ist $(M, E)$gw von $\alpha$)"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})) \Rightarrow (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$"

...

Beweis **329-15** `f)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw von $\alpha$.

`3:` Aus `2.1`"$\alpha$ Menge" und
aus `2.2`"...$\Omega$ ist $(M, E)$gw von $\alpha$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \Omega) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\overset{M,E}{\mathsf{egw}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$"

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}) \subseteq \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$" und
aus `A2` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{egw}} \subseteq \mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

Beweis **329-15** `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad\alpha\in\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha\in\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$"
folgt via **folk**: $\exists\Omega:(\Omega,\alpha)\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots(\Omega,\alpha)\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\alpha$ ist $(M,E)$gw von $\Omega$.

`4:` Aus `3` "$\alpha$ ist $(M,E)$gw von $\Omega$"
folgt via **329-12**: $\alpha\in(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}))\Rightarrow(\alpha\in(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})=\overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion",
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})=\overset{M,E}{\mathsf{egw}}$" und
aus `1.2` "$\mathsf{ran}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})\subseteq(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}:\overset{M,E}{\mathsf{egw}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}:\overset{M,E}{\mathsf{egw}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

Aus `VS` gleich "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}:\overset{M,E}{\mathsf{egw}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion.

<u>Beweis **329-15**</u> `i)` VS gleich $(x\in\overset{M,E}{\mathsf{egw}})\wedge(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}\text{ Funktion}).$

1: Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})=\overset{M,E}{\mathsf{egw}}.$

2: Aus VS gleich "$x\in\overset{M,E}{\mathsf{egw}}\ldots$" und
aus 1
folgt: $x\in\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}}).$

3: Aus VS gleich "$\ldots\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion" und
aus 2"$x\in\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gw}})$"
folgt via **18-22**: $(x,\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x))\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}.$

4: Aus 3"$(x,\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x))\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$ ist $(M,E)$gw von $xs$.

`j)` VS gleich $M$ antiSymmetrisch.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}.$

2.1: Aus Thema1.1"$(\alpha,\beta)\ldots\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\beta$ ist $(M,E)$gw von $\alpha$.

2.2: Aus Thema1.1"$\ldots(\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\gamma$ ist $(M,E)$gw von $\alpha$.

3: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch",
aus 2.1"$\beta$ ist $(M,E)$gw von $\alpha$" und
aus 2.2"$\gamma$ ist $(M,E)$gw von $\alpha$"
folgt via **329-11**: $\beta=\gamma.$

Ergo Thema1.1: | A1 | "$\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)\in\overset{M,E}{\mathsf{gw}})\Rightarrow(\beta=\gamma)$" |

...

<u>Beweis **329-15**</u> `j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

...

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Relation.

`2:` Aus `1.2`“$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in \overset{M,E}{\mathsf{gw}}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\boxed{\overset{M,E}{\mathsf{gw}} \text{ Funktion}}$

`3:` Aus `2`“$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $\boxed{\overset{M,E}{\mathsf{gw}} : \overset{M,E}{\mathsf{egw}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)}$

`k)` `VS` gleich $(M$ antiSymmetrisch$) \wedge (x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$M$ antiSymmetrisch...”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$” und
aus `1`“$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}$ Funktion”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$ ist $(M,E)$gw von $x$.

<u>Beweis **329-15** `l)`</u>
`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x \text{ Menge}) \wedge (p \text{ ist } (M,E)\text{gw von } x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…" und
aus `1` "$x \in \overset{M,E}{\mathsf{egw}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$ ist $(M,E)$gw von $x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…",
aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M,E)$gw von $x$" und
aus `2` "$\overset{M,E}{\mathsf{gw}}(x)$ ist $(M,E)$gw von $x$"
folgt via **329-11**: $p = \overset{M,E}{\mathsf{gw}}(xs)$.

□

Mengenlehre: gw (inferior/superior): Vollständigkeit. Filter-Basis.

**Ersterstellung: 19/02/15** **Letzte Änderung: 19/02/15**

**330-1.** Als Hilfsmittel zur Untersuchung der Auswirkungen von (Starker/Totaler) Vollsändigkeit auf gw (inferior/superior) wird Vorliegendes in die Essays aufgenommen.

**330-1(Satz)**

a) *Aus* "$0 \neq q \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \cap \mathsf{dom}\, x) \wedge (x[\Omega]$ *Menge*$)$
$\wedge (q = x[\Omega])$".

b) *Aus* "$p \in E$" *und* "$x[p]$ *Menge*" *und* "$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
*folgt* "$0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **330-1** a) VS gleich $0 \neq q \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (q = x[\Omega])$.

2: Aus VS gleich "$0 \neq q \ldots$" und
aus 1"$\ldots q = x[\Omega]$"
folgt: $0 \neq x[\Omega]$.

3: Aus 2"$0 \neq x[\Omega]$"
folgt via **folk**: $0 \neq \Omega \cap \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 1 und
aus 3
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \cap \mathsf{dom}\, x) \wedge (q = x[\Omega])$.

b) VS gleich $(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge}) \wedge (0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x)$.

1.1: Aus VS gleich "$(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge}) \ldots$"
folgt via **8-23**: $\boxed{x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}}$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots 0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq x[p]}$

□

**330-2.** Ist $M$ Vollständig, so kann unter Umständen auf das Vorhandensein eines $(M,E)$gw inferior geschlossen werden.

**330-2(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ Vollständig.*

$\rightarrow\!)$ $p \in E$.

$\rightarrow\!)$ $x[p]$ *Menge.*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$.

$\rightarrow\!)$ *$u$ untere $M$_Schranke von $x[p]$.*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \textit{ ist } M\text{\_}\textit{Infimum von } x[\beta] \textit{ Menge}) \wedge (\beta \in E)) \Rightarrow (\alpha\text{\_}M\text{\_}o)$.

*Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$".*

Beweis **330-2**

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

---

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \in E$",
aus $\rightarrow\!)$ "$x[p]$ Menge" und
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **330-1**: $0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

...

Beweis **330-2** . . .

`Thema1.2` $\gamma$ ist $M$_Infimum von $\delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$

2: Aus Thema1.2"$\ldots \delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\delta = x[\Omega])$.

3.1: Aus Thema1.2 und
aus 2"$\ldots \delta = x[\Omega]$"
folgt: $\gamma$ ist $M$_Infimum von $x[\Omega]$.

3.2: Aus Thema1.2"$\ldots \delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\delta$ Menge.

4: Aus 3.2 und
aus 2"$\ldots \delta = x[\Omega]$"
folgt: $x[\Omega]$ Menge.

5: Aus 3.1"$\gamma$ ist $M$_Infimum von $x[\Omega]$",
aus 4"$x[\Omega]$ Menge",
aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha$ ist $M$_Infimum von $x[\beta]$ Menge)
$\wedge(\beta \in E)) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt: $\gamma\_M\_o$.

Ergo Thema1.2:

| A1 | "$\forall \gamma, \delta : (\gamma$ ist $M$_Infimum von $\delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\gamma\_M\_o)$" |
|---|---|

2: Aus →)"$M$ Vollständig",
aus 1.1"$0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in []E]$",
aus →)"$u$ untere $M$_Schranke von $x[p]$" und
aus A1 gleich "$\forall \gamma, \delta : (\gamma$ ist $M$_Infimum von $\delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\})$
$\Rightarrow (\gamma\_M\_o)$"
folgt via **328-1**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$.

4: Aus 2"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 3
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$.

□

**330-3.** Ist $M$ Vollständig, so kann unter Umständen auf das Vorhandensein eines $(M, E)$gw superior geschlossen werden.

**330-3(Satz)** *Es gelte:*

→) $M$ *Vollständig.*

→) $p \in E$.

→) $x[p]$ *Menge.*

→) $0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$.

→) $o$ *obere* $M$_*Schranke von* $x[p]$.

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \text{ ist } M\text{\_Supremum von } x[\beta] \text{ Menge}) \wedge (\beta \in E)) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$.

*Dann folgt* "$\exists \Omega : \Omega$ *ist* $(M, E)$*gw superior von* $x$".

Beweis **330-3**

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

1.1: Aus →) "$p \in E$",
aus →) "$x[p]$ Menge" und
aus →) "$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **330-1**: $0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

...

Beweis **330-3** ...

`Thema1.2` $\gamma$ ist $M$_Supremum von $\delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$

`2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots \delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$”
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\delta = x[\Omega])$.

`3.1:` Aus `Thema1.2` und
aus `2`“$\ldots \delta = x[\Omega]$”
folgt: $\gamma$ ist $M$_Supremum von $x[\Omega]$.

`3.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots \delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\delta$ Menge.

`4:` Aus `3.2` und
aus `2`“$\ldots \delta = x[\Omega]$”
folgt: $x[\Omega]$ Menge.

`5:` Aus `3.1`“$\gamma$ ist $M$_Supremum von $x[\Omega]$”,
aus `4`“$x[\Omega]$ Menge”,
aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus →)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha$ ist $M$_Supremum von $x[\beta]$ Menge)
$\wedge(\beta \in E)) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$”
folgt: $u\_M\_\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | “$\forall \gamma, \delta : (\gamma$ ist $M$_Supremum von $\delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (u\_M\_\gamma)$”

`2:` Aus →)“$M$ Vollständig”,
aus `1.1`“$0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in []E]$”,
aus →)“$o$ obere $M$_Schranke von $x[p]$” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma, \delta : (\gamma$ ist $M$_Supremum von $\delta \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\})$
$\Rightarrow (u\_M\_\gamma)$”
folgt via **328-2**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$”
folgt via **329-4(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $x$.

`4:` Aus `2`“$\exists \Omega \ldots$” und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E)$gw superior von $x$.

□

**330-4.** Falls $M$ unten Stark Vollständig ist, muss noch weniger als in **330-2** vorausgesetzt werden, um die Existenz eines $(M,E)$gw inferior zu garantieren.

**330-4(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ oben Stark Vollständig.*

$\rightarrow\!)$ $p \in E$.

$\rightarrow\!)$ $x[p]$ *Menge.*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$.

$\rightarrow\!)$ *$u$ untere $M$_Schranke von $x[p]$.*

*Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$".*

Beweis **330-4**

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \in E$",
aus $\rightarrow\!)$ "$x[p]$ Menge" und
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **330-1**: $0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ oben Stark Vollständig",
aus 1 "$0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$u$ untere $M$_Schranke von $x[p]$"
folgt via **328-3**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $\Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

4: Aus 2 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 3
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

$\square$

**330-5.** Falls $M$ oben Stark Vollständig ist, muss noch weniger als in **330-2** vorausgesetzt werden, um die Existenz eines $(M,E)$gw superior zu garantieren.

**330-5(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *$M$ unten Stark Vollständig.*

$\rightarrow)$ *$p \in E$.*

$\rightarrow)$ *$x[p]$ Menge.*

$\rightarrow)$ *$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$.*

$\rightarrow)$ *$o$ obere $M$_Schranke von $x[p]$.*

*Dann folgt "$\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $x$".*

Beweis **330-5**

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

1: Aus $\rightarrow)$"$p \in E$",
aus $\rightarrow)$"$x[p]$ Menge" und
aus $\rightarrow)$"$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **330-1**: $0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus $\rightarrow)$"$M$ unten Stark Vollständig",
aus 1"$0 \neq x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus $\rightarrow)$"$o$ obere $M$_Schranke von $x[p]$"
folgt via **328-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $\Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

4: Aus 2"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 3
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

□

**330-6.** Ist $M$ Total Vollständig, so ist die Existenz von $(M,E)$gw inferior von $x$ und von $(M,E)$gw superior von $x$ gesichert.

**330-6(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ Total Vollständig.*

*Dann folgt:*

a) $\exists\Omega : \Omega$ *ist $(M,E)$gw inferior von $x$.*

b) $\exists\Psi : \Psi$ *ist $(M,E)$gw superior von $x$.*

c) $\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} = \mathcal{U}$

d) $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} = \mathcal{U}$.

e) $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ *Unmenge.*

f) $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ *Unmenge.*

Beweis **330-6** a)

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ Total Vollständig"
folgt via **328-5**: $\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus 1"... $\Omega$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $\Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

3: Aus 1"$\exists\Omega$ ..." und
aus 2
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

b)

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ Total Vollständig"
folgt via **328-5**: $\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus 1"... $\Psi$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $\Psi$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

3: Aus 1"$\exists\Psi$ ..." und
aus 2
folgt: $\exists\Psi : \Psi$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

Beweis **330-6** `c)`

| | |
|---|---|
| `Thema0` | $\alpha\in\mathcal{U}$. |
| `1.1:` Aus `Thema0`“$\alpha\in\mathcal{U}$” folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `1.2:` Aus →) “$M$ Total Vollständig” folgt via des bereits bewiesenen `a)`: | $\exists\Omega:\Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $\alpha$. |
| `2:` Aus `1.1`“$\alpha$ Menge” und aus `1.2`“$\ldots\Omega$ ist $(M,E)$gw inferior von $\alpha$” folgt via **329-13**: | $\alpha\in\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$. |

Ergo `Thema0`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathcal{U})\Rightarrow(\alpha\in\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}})$.

Konsequenz via **folk**: $\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}=\mathcal{U}$.

`d)`

| | |
|---|---|
| `Thema0` | $\alpha\in\mathcal{U}$. |
| `1.1:` Aus `Thema0`“$\alpha\in\mathcal{U}$” folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `1.2:` Aus →) “$M$ Total Vollständig” folgt via des bereits bewiesenen `a)`: | $\exists\Omega:\Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $\alpha$. |
| `2:` Aus `1.1`“$\alpha$ Menge” und aus `1.2`“$\ldots\Omega$ ist $(M,E)$gw superior von $\alpha$” folgt via **329-14**: | $\alpha\in\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$. |

Ergo `Thema0`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathcal{U})\Rightarrow(\alpha\in\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}})$.

Konsequenz via **folk**: $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}=\mathcal{U}$.

<u>Beweis</u> **330-6** `e)`

`1.1:` Aus →) “ $M$ Total Vollständig ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\overset{M,E}{\mathsf{egwinf}} = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **329-13** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwinf}}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2 “ $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}) = \mathcal{U}$ ”

folgt via **folk**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwinf}}$ Unmenge.

`f)`

`1.1:` Aus →) “ $M$ Total Vollständig ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\overset{M,E}{\mathsf{egwsup}} = \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **329-14** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \overset{M,E}{\mathsf{egwsup}}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2 “ $\mathsf{dom}\,(\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}) = \mathcal{U}$ ”

folgt via **folk**: $\overset{M,E}{\mathsf{gwsup}}$ Unmenge.

□

**330-7.** Ist $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ eine Filter-Basis - Hinreichendes hierfür ist in **329-1,2,3** notiert - und ist $M$ transitiv, so gilt $p\_M\_q$ für jeden $(M, E)$gw inferior $p$ von $x$ und jeden $(M, E)$gw superior $q$ von $x$.

**330-7(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$M$ transitiv.*

$\rightarrow\!)$ *$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Filter-Basis.*

$\rightarrow\!)$ *$p$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$.*

$\rightarrow\!)$ *$q$ ist $(M, E)$gw superior von $x$.*

*Dann folgt "$p\_M\_q$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **330-7**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$p$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$q$ ist $(M, E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$M$ transitiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Filter-Basis",
aus `1.1` "$p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus `1.2` "$q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **328-10**: $p\_M\_q$.

$\square$

Mengenlehre: sse_focus inferior. sse_focus superior.

**Ersterstellung: 24/02/15** **Letzte Änderung: 01/03/15**

**331-1.** Die Klassen $\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ und $\{\bigcap\lambda:\lambda\in E\}$ sind bei der Untersuchung von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$ und $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$ wichtig.

**331-1(Definition)**

1) $\mathsf{331.0}(E)=\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$
$$=\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega\in E)\wedge(\omega=\bigcup\Omega))\}.$$

2) $\mathsf{331.1}(E)=\{\bigcap\lambda:\lambda\in E\}$
$$=\{\omega:(\exists\Omega:(\Omega\in E)\wedge(\omega=\bigcap\Omega))\}.$$

**331-2.** Obwohl ähnlich unterscheiden sich die Aussagen über Elemente von $\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ und $\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

**331-2(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = \bigcup \Omega$ *Menge*$)$".

b) *Aus* "$p \in E$" *folgt* "$\bigcup p \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$".

c) *Aus* "$w \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (w = \bigcap \Omega$ *Menge*$)$".

d) *Aus* "$0 \neq p \in E$" *folgt* "$\bigcap p \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$".

e) *Aus* "$p \in E$" *und* "$\bigcap p$ *Menge*" *folgt* "$\bigcap p \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$".

---

$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**
$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

Beweis **331-2** `a)` `VS` gleich $w \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt via **331-1(Def)**: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = \bigcup \Omega)}$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots w = \bigcup \Omega$" und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{\bigcup \Omega \text{ Menge}}$

<u>Beweis **331-2**</u> `b)` `VS` gleich $p \in E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2.1:` Aus `1.1`"$p$ Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup p$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` und
aus `1.2`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $\bigcup \Omega = \bigcup p$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $\bigcup p = \bigcup \Omega$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcup p = \bigcup \Omega)$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcup p = \bigcup \Omega)$" und
aus `2.1`"$\bigcup p$ Menge"
folgt via **331-1(Def)**: $\bigcup p \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`c)` `VS` gleich $w \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt via **331-1(Def)**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = \bigcap \Omega)$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots w = \bigcap \Omega$" und
aus `1.1`
folgt: $\bigcap \Omega$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\bigcap \Omega$ Menge"
folgt via **1-17**: $0 \neq \Omega$.

`4:` Aus `1.2`,
aus `3` und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (w = \bigcap \Omega$ Menge$)$.

<u>Beweis</u> **331-2** `d)` `VS` gleich $0 \neq p \in E.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq p \ldots$"
folgt via **1-17**: $\bigcap p$ Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p.$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in E$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $\Omega \in E.$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $\bigcap \Omega = \bigcap p.$

`3:` Aus `2.2`
folgt: $\bigcap p = \bigcap \Omega.$

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcap p = \bigcap \Omega).$

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcap p = \bigcap \Omega)$" und
aus `1.1`"$\bigcap p$ Menge"
folgt via **331-1(Def)**: $\bigcap p \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}.$

`e)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\bigcap p \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \bigcap p$ Menge"
folgt via **1-17**: $0 \neq p.$

`2:` Aus `1`"$0 \neq p$" und
aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\bigcap p \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}.$

□

**331-3.** Es werden $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$ und $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$ untersucht.

**331-3(Satz)**

a) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E] = \{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$.

b) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E] = \{\bigcup\lambda : \lambda \in E\}$.

---

$\{\bigcup\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**
$\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

Beweis **331-3** a)

`Thema0.1` $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

1: Aus `Thema0.1` "$\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **327-1**:
$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha \text{ ist } \mathsf{sse}\text{\_Infimum von } \Omega)$.

2: Aus 1 "$\ldots\alpha$ ist sse_Infimum von $\Omega$"
folgt via **61-20**: $\alpha = \bigcap\Omega$ Menge.

3: Aus 1 "$\ldots\Omega \in E\ldots$" und
aus 2 "$\ldots\bigcap\Omega$ Menge"
folgt via **331-2**: $\bigcap\Omega \in \{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$.

4: Aus 2 "$\alpha = \bigcap\Omega\ldots$" und
aus 3
folgt: $\alpha \in \{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcap\lambda : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$"

...

Beweis **331-3** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

1: Aus Thema0.2 "$\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-2**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (\alpha = \bigcap \Omega)$.

2: Aus 1 "$\ldots 0 \neq \Omega \ldots$"
folgt via **61-12**: $\bigcap \Omega$ ist sse_Infimum von $\Omega$.

3: Aus 2 "$\bigcap \Omega$ ist sse_Infimum von $\Omega$" und
aus 1 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **327-1**: $\bigcap \Omega \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

4: Aus 1 "$\ldots \alpha = \bigcap \Omega$" und
aus 3
folgt: $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

Ergo Thema0.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]\text{"}}$

1: Aus A1 gleich "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$" und
aus A2 gleich "$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E] = \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

Beweis **331-3** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`1:` Aus `Thema0.1`"$\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **327-1**:
$$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha \text{ ist } \mathsf{sse}\_\text{Supremum von } \Omega).$$

`2:` Aus `1`"…$\alpha$ ist $\mathsf{sse}$_Supremum von $\Omega$"
folgt via **61-20**: $\alpha = \bigcup \Omega$.

`3:` Aus `1`"…$\Omega \in E$…"
folgt via **331-2**: $\bigcup \Omega \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"

…

Beweis **331-3** `b)` ...

`Thema0.2` $\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

1: Aus `Thema0.2`"$\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \bigcup \Omega$ Menge$)$.

2: Aus 1"...$\bigcup \Omega$ Menge"
folgt via **61-14**: $\bigcup \Omega$ ist sse_Supremum von $\Omega$.

3: Aus 2"$\bigcup \Omega$ ist sse_Supremum von $\Omega$" und
aus 1"...$\Omega \in E$..."
folgt via **327-1**: $\bigcup \Omega \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

4: Aus 1"...$\alpha = \bigcup \Omega$..." und
aus 3
folgt: $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$"

1: Aus A1 gleich "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$" und
aus A2 gleich "$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E] = \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

□

**331-4.** $\bigcup x$ ist genau dann eine Menge, wenn $x$ eine Menge ist.

**331-4(Satz)**

a) *“$\bigcup x$ Menge” genau dann, wenn “$x$ Menge”.*

b) *“$\bigcup x$ Unmenge” genau dann, wenn “$x$ Unmenge”.*

Beweis **331-4** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\bigcup x$ Menge.

1: Aus VS gleich “$\bigcup x$ Menge”
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(\bigcup x)$ Menge.

2: Via **261-1** gilt: $x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$.

3: Aus 2“$x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$” und
aus 1“$\mathcal{P}(\bigcup x)$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x$ Menge.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x$ Menge.
Aus VS gleich “$x$ Menge”
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup x$ Menge.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(\bigcup x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(\bigcup x \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(x \text{ Menge}))$.

3: Aus 2
folgt: $(\bigcup x \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge})$.

□

**331-5.** Der kanonische Kandidat für sse_focus inferior ist $\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$.

**<u>331-5(Satz)</u>**

a) *Aus "$p$ ist sse_focus inferior von $E$"*
*folgt "$p = \bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ Menge"*
*und "$\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ Menge".*

b) *Aus "$\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_focus inferior von $E$".*

c) *Aus "$\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_focus inferior von $E$".*

---

$\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

<u>Beweis **331-5**</u> a) VS gleich $p$ ist sse_focus inferior von $E$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist sse_focus inferior von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist sse_Supremum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}[E]$.

2: Aus 1 "$p$ ist sse_Supremum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}[E]$"
folgt via **61-20**: $p = \bigcup \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}[E]$ Menge.

3.1: Aus 2 "$\ldots \bigcup \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}[E]$ Menge"
folgt via **331-4**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}[E]$ Menge.

3.2: Via **331-3** gilt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}[E] = \{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$.

4.1: Aus 2 und
aus 3.2
folgt: $\boxed{p = \bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\} \text{ Menge}}$

4.2: Aus $\widehat{3}$.1 und
aus 3.2
folgt: $\boxed{\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\} \text{ Menge}}$

<u>Beweis **331-5**</u> `b)` `VS` gleich $\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge"
folgt via **61-14**: $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_Supremum von $\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`3:` Via **331-3** gilt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E] = \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_Supremum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`5:` Aus `4`"$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_Supremum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **327-8(Def)**:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $E$.

`c)` `VS` gleich $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge"
folgt via **331-4**: $\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $E$.

$\square$

**331-6.** Der kanonische Kandidat für $\mathsf{sse}$_focus superior ist $\bigcap\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$.

**331-6(Satz)**

a) *Aus "$p$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $E$"*
*folgt "$p=\bigcap\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ Menge"*
*und "$0\neq\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$".*

b) *Aus "$0\neq\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$"*
*folgt "$\bigcap\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $E$".*

c) *Aus "$\bigcap\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcap\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $E$".*

---

$\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ **331-1(Def)**

Beweis **331-6** `a)` `VS` gleich $p$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $E$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}[E]$.

`2:` Aus `1`"$p$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}[E]$"
folgt via **61-20**: $p=\bigcap\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}[E]$ Menge.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots\bigcap\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}[E]$ Menge"
folgt via **1-17**: $0\neq\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}[E]$.

`3.2:` Via **331-3** gilt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}[E]=\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$.

`4.1:` Aus `2` und
aus `3.2`
folgt: $\boxed{p=\bigcap\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}\text{ Menge}}$

`4.2:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\boxed{0\neq\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}}$

<u>Beweis **331-6**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **1-17**: $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ Menge"
folgt via **61-12**: $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_Infimum von $\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`3:` Via **331-3** gilt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E] = \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_Infimum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`5:` Aus `4`"$\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_Infimum von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **327-8(Def)**: $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_focus superior von $E$.

`c)` `VS` gleich $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ Menge"
folgt via **1-17**: $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_focus superior von $E$.

□

**331-7.** Bei der Formulierung von Hinreichendem für die “Mengen-Artigkeit” von $\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ oder $\{\bigcap\lambda:\lambda\in E\}$ ist es hilfreich, die “Funtions-Artigkeit” von $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}$ oder $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}$ fest gestellt ist.

**331-7(Satz)**

a) *Aus “$M$ antiSymmetrisch” folgt “$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion”.*

b) *Aus “$M$ antiSymmetrisch” folgt “$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion”.*

c) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}=\mathcal{U}\setminus\{0\}$.

d) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{esup}}=\mathcal{U}$.

e) $(\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse}))\cap(\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}))=\mathcal{U}$.

f) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$.

g) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$.

h) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}$ *Funktion.*

i) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}$ *Funktion.*

---

$\{\bigcup\lambda:\lambda\in E\}$ **331-1(Def)**
$\{\bigcap\lambda:\lambda\in E\}$ **331-1(Def)**

Beweis **331-7** ab) VS gleich $M$ antiSymmetrisch.

1.1: Aus VS gleich “$M$ antiSymmetrisch”
folgt via **182-11**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}:\overset{M}{\mathsf{einf}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

1.2: Aus VS gleich “$M$ antiSymmetrisch”
folgt via **182-11**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}:\overset{M}{\mathsf{esup}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$.

2.a): Aus 1.1 “$\overset{M}{\mathsf{inf}}:\overset{M}{\mathsf{einf}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

2.b): Aus 1.2 “$\overset{M}{\mathsf{sup}}:\overset{M}{\mathsf{esup}}\to(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

<u>Beweis **331-7**</u> `c)`

`Thema0.1` $\qquad \alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}.$

`1:` Aus `Thema0.1`"$\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **182-2**:
$$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \mathsf{sse}\_\text{Infimum von } \alpha).$$

`2.1:` Aus `1`"$\alpha$ Menge…"
folgt via **0-22**: $\qquad \alpha \in \mathcal{U}.$

`2.2:` aus `2`"…$\Omega$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha$"
folgt via **61-20**: $\qquad \Omega = \bigcap \alpha$ Menge.

`3:` Aus `2.2`"…$\bigcap \alpha$ Menge"
folgt via **1-17**: $\qquad 0 \neq \alpha.$

`4:` Aus `2.1`"$\alpha \in \mathcal{U}$" und
aus `3`"$0 \neq \alpha$"
folgt via **5-15**: $\qquad \alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}.$

Ergo `Thema0.1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad$ `A1` | "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$"

…

Beweis **331-7** `c)` ...

| | |
|---|---|
| `Thema0.2` | $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$. |
| `1.1:` Aus `Thema0.2`"$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `1.2:` Aus `Thema0.2`"$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" folgt via **5-15**: | $0 \neq \alpha \in \mathcal{U}$. |
| `2:` Aus `1.2`"$0 \neq \alpha \ldots$" folgt via **61-12**: | $\bigcap \alpha$ ist sse_Infimum von $\alpha$. |
| `3:` Aus `1.1`"$\alpha$ Menge" und aus `2`"$\bigcap \alpha$ ist sse_Infimum von $\alpha$" folgt via **182-2**: | $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}$. |

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}$"

`1:` Aus `A1` gleich "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}} = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Beweis **331-7** d)

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

1: Aus Thema0.1"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

2: Aus 1"$\alpha$ Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \alpha$ Menge.

3: Aus 2"$\bigcup \alpha$ Menge"
folgt via **61-14**: $\bigcup \alpha$ ist sse_Supremum von $\alpha$.

5: Aus 1"$\alpha$ Menge" und
aus 3"$\bigcup \alpha$ ist sse_Supremum von $\alpha$"
folgt via **182-2**: $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{esup}}$.

Ergo Thema0.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{esup}})$.

Konsequenz via **folk**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{esup}} = \mathcal{U}$.

e) $((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}))) \overset{\mathbf{61-8}}{=} \mathcal{U} \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})) \overset{\mathbf{2-17}}{=} \mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}) \overset{\mathbf{61-8}}{=} \mathcal{U}$.

f)

1: Aus **61-8**"sse antiSymmetrisch"
folgt via **182-11**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}} : \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}} \to ((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})))$.

2: Aus 1 und
via c)"$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{einf}} = \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}} : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to ((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})))$.

3: Aus 2 und
via e)"$((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})) = \mathcal{U}$"
folgt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}} : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}$.

Beweis **331-7** g)

1: Aus **61-8** "sse antiSymmetrisch"
folgt via **182-11**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}} : \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{esup}} \to ((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})))$.

2: Aus 1 und
via d) "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{esup}} = \mathcal{U}$"
folgt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}} : \mathcal{U} \to ((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})))$.

3: Aus 2 und
via e) "$((\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})) = \mathcal{U}$"
folgt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

hi)

1.g): Aus e) "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}} : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

1.h): Aus f) "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

□

**331-8.** Jede Menge $E$ hat mit $\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ einen $\mathsf{sse}$_focus inferior.

**331-8(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) *$E$ Menge.*

*Dann folgt:*

a) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$ *Menge.*

b) $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$ *Menge.*

c) $\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ *Menge.*

d) $\{\bigcup\lambda : \lambda \in E\}$ *Menge.*

e) $\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ *ist* $\mathsf{sse}$_*focus inferior von* $E$.

---

$\{\bigcup\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**
$\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

<u>Beweis **331-8**</u> `VS` gleich $E$ Menge.

`1.a):` Aus **331-7**“$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}$ Funktion” und
aus `VS` gleich “$E$ Menge”
folgt via **FunktionsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge.

`1.b):` Aus **331-7**“$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}$ Funktion” und
aus `VS` gleich “$E$ Menge”
folgt via **FunktionsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge.

`2.1:` Via **331-3** gilt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{inf}}\,[E] = \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`2.2:` Via **331-3** gilt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{sup}}\,[E] = \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`3.c):` Aus `1.a)` und
aus `2.1`
folgt: $\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`3.d):` Aus `1.b)` und
aus `2.2`
folgt. $\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ Menge.

`4.e):` Aus `3.1`“$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ Menge”
folgt via **331-5**: $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $E$.

□

**331-9.** $E$ ist genau dann nicht leer, wenn $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

<u>**331-9(Satz)**</u>

a) *"$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$" genau dann, wenn "$0 \neq E$".*

b) *"$\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist* sse*_focus superior von $E$"*
*genau dann, wenn "$0 \neq E$".*

---

$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

<u>Beweis **331-9**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$\Omega \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-2**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\Omega = \bigcup \Phi)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Phi \in E \ldots$"
folgt via **folk**: $0 \neq E$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **331-2**: $\bigcup \Omega \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`3:` Aus `2`"$\bigcup \Omega \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\bigcap \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist `sse`_focus superior von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcap \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist `sse`_focus superior von $E$"
folgt via **331-6**: $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \neq E$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-6**: $\bigcap \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ ist `sse`_focus superior von $E$.

$\square$

**331-10.** Enthält $E$ eine nichtleere Menge, so folgt $0 \neq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

**331-10(Satz)**

a) *Aus* "$0 \neq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$" *folgt* "$\exists \Omega : 0 \neq \Omega \in E$".

b) *Aus* "$0 \neq p \in E$" *folgt* "$0 \neq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$".

---

$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

Beweis **331-10** `a)` `VS` gleich $0 \neq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi : \Phi \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Phi \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-2**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (\Phi = \bigcap \Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : 0 \neq \Omega \in E$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq p \in E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq p \in E$"
folgt via **331-2**: $\bigcap p \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$\bigcap p \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $0 \neq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

□

**331-11.** $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}}$ und $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}}$ sind Funktionen mit beträchtlichen Definiqtions-Bereichen.

**331-11(Satz)**

a) $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}}$ *Funktion.*

b) $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}}$ *Funktion.*

c) $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} = \mathcal{U}$.

d) $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocsup}} = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

e) $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

f) $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}} : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}$.

Beweis **331-11**

$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)** $\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

1.1: Aus **61-8**“sse antiSymmetrisch”
folgt via **327-16**: $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}} : \overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} \to ((\textsf{dom}\,(\textsf{sse})) \cap (\textsf{ran}\,(\textsf{sse})))$.

1.2: Aus **61-8**“sse antiSymmetrisch”
folgt via **327-17**: $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}} : \overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} \to ((\textsf{dom}\,(\textsf{sse})) \cap (\textsf{ran}\,(\textsf{sse})))$.

2.1: Aus 1.1 und
aus **331-7**“$((\textsf{dom}\,(\textsf{sse})) \cap (\textsf{ran}\,(\textsf{sse})) = \mathcal{U}$”
folgt: $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}} : \overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} \to \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2 und
aus **331-7**“$((\textsf{dom}\,(\textsf{sse})) \cap (\textsf{ran}\,(\textsf{sse})) = \mathcal{U}$”
folgt: $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}} : \overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} \to \mathcal{U}$.

3.a): Aus 2.1“$\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}} : \overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} \to \mathcal{U}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focinf}}$ Funktion.

3.b): Aus 2.2“$\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}} : \overset{\textsf{sse}}{\textsf{efocinf}} \to \mathcal{U}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\overset{\textsf{sse}}{\textsf{focsup}}$ Funktion.

...

<u>Beweis</u> **<u>331-11</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`5:` Aus `4`"$\alpha$ Menge"
folgt via **331-8**:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \alpha\}$ ist sse_focus inferior von $\alpha$.

`6:` Aus `4`"$\alpha$ Menge" und
aus `5`"$\bigcap\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ ist sse_focus inferior von $\alpha$"
folgt via **327-16**: $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocinf}}$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocinf}})$.

Konsequenz via **folk**: $\boxed{\texttt{Ac)} \mid \text{"}\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocinf}} = \mathcal{U}\text{"}}$

<u>Beweis **331-11**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}$.

4: Aus Thema3.2"$\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via **327-17**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $\alpha$.

5: Aus 4"$\ldots \Omega$ ist $\mathsf{sse}$_focus superior von $\alpha$"
folgt via **331-6**: $0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in \alpha\}$.

6: Aus 5"$0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in \alpha\}$"
folgt via **331-9**: $0 \neq \alpha$.

7: Aus Thema3.2"$\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

8: Aus 8"$\alpha$ Menge"
folgt via **0-22**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

9: Aus 6"$0 \neq \alpha$" und
aus 8"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **5-15**: $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Ergo Thema3.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}\text{"}}$

Beweis **331-11** ...

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema3.3}}$ | $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$. |
| `4:` Aus `Thema3.3`"$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" folgt via **5-15**: | $0 \neq \alpha \in \mathcal{U}$. |
| `5.1:` Aus `4`"$0 \neq \alpha \ldots$" folgt via **331-9**: | $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in \alpha\}$ ist sse_focus superior von $\alpha$. |
| `5.2:` Aus `4`"$\ldots \alpha \in \mathcal{U}$" folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `6:` Aus `5.2`"$\alpha$ Menge" und aus `5.1`"$\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in \alpha\}$ ist sse_focus superior von $\alpha$" folgt via **327-17**: | $\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}$. |

Ergo `Thema3.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}\text{"}}$

`4.d):` Aus `A1` gleich "$\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{efocsup}} = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`5.e):` Aus `2.1` und
aus `Ac)`
folgt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{focinf}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

`5.f):` Aus `2.2` und
aus `4.d)`
folgt: $\overset{\mathsf{sse}}{\mathsf{focsup}} : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}$.

$\square$

Mengenlehre: $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior. $(\mathsf{sse}, E)$gw superior.

**Ersterstellung: 25/02/15** **Letzte Änderung: 03/03/15**

**332-1.** Hier werden $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U} \setminus \{0\}$ thematisiert.

**332-1(Satz)**

a) *Aus "$p \in x$" folgt "$p \in \mathcal{U}$".*

b) *Aus "$0 \neq p \in x$" folgt "$p \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$".*

c) *"$p \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" genau dann, wenn "$0 \neq p$ Menge".*

<u>Beweis</u> **332-1** `a)` `VS` gleich $p \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

`2:` Aus `1`"$p$ Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq p \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq p \ldots$" und
aus `1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **5-15**: $p \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt via **5-15**: $(p \in \mathcal{U}) \wedge (p \neq 0)$.

`2.1:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1`
folgt: $\boxed{0 \neq p}$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq p$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **0-20**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq p \ldots$" und
aus `1`"$p \in \mathcal{U}$"
folgt via **5-15**: $p \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

□

**332-2.** Die Klassen $\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ und $\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ begleiten die Untersuchungen von $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior/superior von $x$.

**332-2(Definition)**

a) $\mathtt{332.0}(E,x) = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \bigcup x[\Omega]))\}.$$

b) $\mathtt{332.1}(E,x) = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$

$$= \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \bigcap x[\Omega]))\}.$$

**332-3.** Bei der Untersuchung von $\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ und von $\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ spielen Mengen eine wichtige Rolle.

**332-3(Satz)**

a) *Aus* "$w \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega]$ *Menge*$) \wedge (w = \bigcup(x[\Omega])$ *Menge*$)$".

b) *Aus* "$p \in E$" *und* "$x[p]$ *Menge*"
*folgt* "$\bigcup(x[p]) \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

c) *Aus* "$p \in E$" *und* "$\bigcup(x[p])$ *Menge*"
*folgt* "$\bigcup(x[p]) \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

d) *Aus* "$w \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \cap \mathsf{dom}\, x) \wedge (0 \neq x[\Omega])$
$\wedge (w = \bigcap(x[\Omega])$ *Menge*$)$".

e) *Aus* "$p \in E$" *und* "$\bigcap(x[p])$ *Menge*"
*folgt* "$\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

f) *Aus* "$p \in E$" *und* "$0 \neq x[p]$"
*folgt* "$\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

g) *Aus* "$p \in E$" *und* "$0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
*folgt* "$\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

h) *Aus* "$p \in E$" *und* "$0 \neq p \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
*folgt* "$\bigcap(x[p]) \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

---

$\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$, $\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**

<u>Beweis **332-3**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **332-2(Def)**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = \bigcup(x[\Omega]))$.

`2:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`3:` Aus `1`"$\ldots w = \bigcup(x[\Omega])$" und
aus `2`
folgt: $\bigcup(x[\Omega])$ Menge.

`4:` Aus `3`"$\bigcup(x[\Omega])$ Menge"
folgt via **331-4**: $x[\Omega]$ Menge.

`5:` Aus `1`,
aus `3` und
aus `4`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega] \text{ Menge}) \wedge (w = \bigcup(x[\Omega]) \text{ Menge})$.

`b)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x[p]$ Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup(x[p])$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $x[\Omega] = x[p]$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \in E$.

`3:` Aus `2.1`
folgt: $\bigcup(x[\Omega]) = \bigcup(x[p])$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcup(x[p]) = \bigcup(x[\Omega]))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcup(x[p]) = \bigcup(x[\Omega]))$" und
aus `1.2`"$\bigcup(x[p])$ Menge"
folgt via **332-2(Def)**: $\bigcup(x[p]) \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **332-3**</u> `c)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\bigcup(x[p])$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \bigcup(x[p])$ Menge"
folgt via **331-4**: $x[p]$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `1` "$x[p]$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\bigcup(x[p]) \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`d)` `VS` gleich $w \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **332-2(Def)**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = \bigcap(x[\Omega]))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`2:` Aus `1.1` "$\ldots w = \bigcap(x[\Omega])$" und
aus `1.2`
folgt: $\bigcap(x[\Omega])$ Menge.

`3:` Aus `2` "$\bigcap(x[\Omega])$ Menge"
folgt via **1-17**: $0 \neq x[\Omega]$.

`4:` Aus `3` "$0 \neq x[\Omega]$"
folgt via **8-14**: $0 \neq \Omega \cap \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Aus `1.1`,
aus `2`,
aus `3` und
aus `4`
folgt:
$$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 \neq \Omega \cap \mathsf{dom}\, x) \wedge (0 \neq x[\Omega]) \wedge (w = \bigcap(x[\Omega]) \text{ Menge}).$$

<u>Beweis</u> **332-3** `e)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\bigcap(x[p])\text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $x[\Omega] = x[p]$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \in E$.

`3:` Aus `2.1`
folgt: $\bigcap(x[\Omega]) = \bigcap(x[p])$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\bigcap(x[p]) = \bigcap(x[\Omega])$.

`5:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2` und
aus `4`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcap(x[p]) = \bigcap(x[\Omega]))$.

`6:` Aus `5`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\bigcap(x[p]) = \bigcap(x[\Omega]))$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap(x[p])$ Menge…"
folgt via **332-2(Def)**: $\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`f)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (0 \neq x[p])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x[p]$"
folgt via **1-17**: $\bigcap(x[p])$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `1`"$\bigcap(x[p])$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`g)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq p \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **8-14**: $0 \neq x[p]$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `1`"$0 \neq x[p]$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **332-3**</u> `h)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (0 \neq p \subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \neq p \subseteq \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **263-7**: $0 \neq x[p]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in E \ldots$” und
aus `1`“$0 \neq x[p]$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\bigcap(x[p]) \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

$\square$

**332-4.** Die Klassen $\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ und $\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ werden untersucht.

**332-4(Satz)**

a) $\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

b) $\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \subseteq \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

c) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge*$)$"
*folgt* "$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

d) *Aus* "$\mathsf{ran}\, x$ *Menge*"
*folgt* "$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

e) *Aus* "$x$ *Menge*"
*folgt* "$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

---

$\{\bigcup\lambda : \lambda \in D\}$, $\{\bigcap\lambda : \lambda \in D\}$ **331-1(Def)**
$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**
$\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$, $\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**

<u>Beweis</u> **332-4** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$”
folgt via **331-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{x[\mu] : \mu \in E\}) \wedge (\alpha = \bigcup \Omega)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \{x[\mu] : \mu \in E\} \ldots$”
folgt via **8-23**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\Omega = x[\Phi])$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \bigcup \Omega$” und
aus `3`“$\ldots \Omega = x[\Phi]$”
folgt: $\alpha = \bigcup(x[\Phi])$.

`5:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\bigcup(x[\Phi])$ Menge.

`7:` Aus `3`“$\ldots \Phi \in E \ldots$” und
aus `6`“$\bigcup(x[\Phi])$ Menge”
folgt via **332-3**: $\bigcup(x[\Phi]) \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`8:` Aus `4` und
aus `7`
folgt: $\alpha \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema1.1`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | “$\{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \subseteq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$”

Beweis **332-4** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad \alpha \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **332-3**: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \bigcup(x[\Omega])$ Menge$)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \bigcup(x[\Omega])$ Menge"
folgt via **331-4**: $x[\Omega]$ Menge.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `3`"$x[\Omega]$ Menge"
folgt via **8-23**: $x[\Omega] \in \{x[\mu] : \mu \in E\}.$

`5:` Aus `4`"$x[\Omega] \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **331-2**: $\bigcup(x[\Omega]) \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}.$

`6:` Aus `2`$\ldots \alpha = \bigcup(x[\Omega]) \ldots$ und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}.$

Ergo `Thema1.2`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

$$\boxed{\texttt{A2} \,\big|\; \text{“}\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}\text{”}}$$

`2:` Aus `A1` gleich "$\{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \subseteq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:

$$\{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$$

<u>Beweis **332-4**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha\in\{\bigcap\lambda:\lambda\in\{x[\mu]:\mu\in E\}\}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha\in\{\bigcap\lambda:\lambda\in\{x[\mu]:\mu\in E\}\}$”
folgt via **331-2**: $\exists\Omega:(\Omega\in\{x[\mu]:\mu\in E\})\wedge(\alpha=\bigcap\Omega)$.

`3:` Aus `2`“$\Omega\in\{x[\mu]:\mu\in E\}\ldots$”
folgt via **8-23**: $\exists\Phi:(\Phi\in E)\wedge(\Omega=x[\Phi])$.

`4:` Aus `2`“$\ldots\alpha=\bigcap\Omega$” und
aus `3`“$\ldots\Omega=x[\Phi]$”
folgt: $\alpha=\bigcap(x[\Phi])$.

`5:` Aus `Thema1`“$\alpha\in\{\bigcap\lambda:\lambda\in\{x[\mu]:\mu\in E\}\}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\bigcap(x[\Phi])$ Menge.

`7:` Aus `3`“$\ldots\Phi\in E\ldots$” und
aus `6`“$\bigcap(x[\Phi])$ Menge”
folgt via **332-3**: $\bigcap(x[\Phi])\in\{\bigcap(x[\lambda]):\lambda\in E\}$.

`8:` Aus `4` und
aus `7`
folgt: $\alpha\in\{\bigcap(x[\lambda]):\lambda\in E\}$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall\alpha:(\alpha\in\{\bigcap\lambda:\lambda\in\{x[\mu]:\mu\in E\}\})\Rightarrow(\alpha\in\{\bigcap(x[\lambda]):\lambda\in E\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\bigcap\lambda:\lambda\in\{x[\mu]:\mu\in E\}\}\subseteq\{\bigcap(x[\lambda]):\lambda\in E\}$.

Beweis **332-4** `c)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[E]\text{ Menge})$.

`Thema1.1` $\alpha \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **332-3**: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \bigcap(x[\Omega])\text{ Menge})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots\Omega \in E\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]\text{ Menge})$"
folgt: $x[\Omega]$ Menge.

`4:` Aus `2`"$\ldots\Omega \in E\ldots$" und
aus `3`"$x[\Omega]$ Menge"
folgt via **8-23**: $x[\Omega] \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$.

`5:` Aus `4`"$x[\Omega] \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$" und
aus `2`"$\bigcap(x[\Omega])$ Menge"
folgt via **331-2**: $\bigcap(x[\Omega]) \in \{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

`6:` Aus `2`$\ldots\alpha = \bigcap(x[\Omega])\ldots$ und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall\alpha : (\alpha \in \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1` | "$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq \{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \subseteq \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1.2`"$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \subseteq \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq \{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$$

<u>Beweis **332-4**</u> `d)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

> `Thema1` $\alpha \in E$.
>
> `2:` Via **8-10** gilt: $x[\alpha] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.
>
> `3:` Aus `2`“$x[\alpha] \subseteq \mathsf{ran}\, x$” und
> aus `VS` gleich “$\mathsf{ran}\, x$ Menge”
> folgt via **TeilMengenAxiom**: $x[\alpha]$ Menge.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge$)$.

Konsequenz via des bereits bewiesenen `c)`:

$$\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap (x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$$

`e)` `VS` gleich $x$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “$x$ Menge”
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{ran}\, x$ Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:

$$\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap (x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$$

□

**332-5.** Dank der Vorarbeiten von **#331** stehen einige Aussagen über $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$ zur Verfügung. Der Fall, dass $x[\lambda]$ für alle $\lambda \in E$ eine Menge ist wird später untersucht.

**332-5(Satz)**

a) *Aus "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$"*
*folgt "$p = \bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge"*
*und "$\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge".*

b) *Aus "$\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$".*

c) *Aus "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$".*

d) *Aus "$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$".*

---

$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ **8-22(Def)**
$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

Beweis **332-5** a) VS gleich $p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$.

2: Aus 1"$p$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **331-5**: $(p = \bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge)
$\wedge(\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge).

b) VS gleich $\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge.

1: Aus VS gleich "$\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$"
folgt via **331-5**:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$.

2: Aus 1 "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

Beweis **332-5** `c)` `VS` gleich $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$"
folgt via **331-5**:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $\mathsf{sse}$_focus inferior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

`d)` `VS` gleich $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge"
folgt via **331-8**: $\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

$\square$

**332-6.** Mit dem vorangehenden **332-5** erwacht das Interesse an Hinreichendem für $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge.

**332-6(Satz)**

a) $\{x[\mu] : \mu \in E\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

b) *Aus "*$\mathsf{ran}\, x$ *Menge" folgt "*$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ *Menge".*

c) *Aus "*$x$ *Menge" folgt "*$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ *Menge".*

---

$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **332-6** `a)`

`Thema1` $\alpha \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x[\Omega])$.

`3:` Via **8-10** gilt: $x[\Omega] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`4:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = x[\Omega]$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`5:` Aus `4`"$\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `2.1`"$\alpha$ Menge"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x[\mu] : \mu \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x[\mu] : \mu \in E\} \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`b)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$ Menge.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{x[\mu] : \mu \in E\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

`3:` Aus `2`"$\{x[\mu] : \mu \in E\} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$" und
aus `1`"$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge.

`c)` `VS` gleich $x$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$x$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge.

□

**332-7.** Aus beweistechnischen Gründen soll ein Zwischenschritt im Beweis von **332-4** nun doch explizit dargestellt werden.

**332-7(Satz)**

a) *Aus "*$\mathsf{ran}\,x$ *Menge" folgt "*$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge)".*

b) *Aus "*$x$ *Menge" folgt "*$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge)".*

Beweis **332-7** a) VS gleich $\mathsf{ran}\,x$ Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E$.
Aus VS gleich "$\mathsf{ran}\,x$ Menge"
folgt via **8-11**: $x[E]$ Menge.

Ergo Thema1: $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge).

b) VS gleich $x$ Menge.

1: Aus VS gleich "$x$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\,x$ Menge.

2: Aus 1"$\mathsf{ran}\,x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge).

□

**332-8.** Im Fall $\mathsf{ran}\,x$ Menge ist nicht nur $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge, es gilt auch $\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ und so entstehen aus **332-4,5a)** neue Aussagen.

**332-8(Satz)**

a) *Aus* "$p$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw inferior von* $x$"
*und* "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge*)"
*folgt* "$p = \bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Menge*"
*und* "$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Menge*".

b) *Aus* "$p$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw inferior von* $x$" *und* "$\mathsf{ran}\,x$ *Menge*"
*folgt* "$p = \bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Menge*"
*und* "$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Menge*".

c) *Aus* "$p$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw inferior von* $x$" *und* "$x$ *Menge*"
*folgt* "$p = \bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Menge*"
*und* "$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Menge*".

---

$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**

Beweis **332-8**

---

$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**
$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ **8-22(Def)**

---

`a)` `VS` gleich $(p \text{ ist } (\mathsf{sse}, E)\text{gw inferior von } x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[E] \text{ Menge}))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x \ldots$"
folgt via **332-5**: $(p = \bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \text{ Menge})$
$\wedge(\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} \text{ Menge})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$"
folgt via **332-4**: $\{\bigcap \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p = \bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \text{ Menge})$
$\wedge(\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \text{ Menge})$.

`b)` `VS` gleich $(p \text{ ist } (\mathsf{sse}, E)\text{gw inferior von } x) \wedge (\mathsf{ran}\, x \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **332-7**: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x \ldots$" und
aus `1`"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)` $(p = \bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \text{ Menge})$
$\wedge(\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \text{ Menge})$.

`c)` `VS` gleich $(p \text{ ist } (\mathsf{sse}, E)\text{gw inferior von } x) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via **332-7**: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x \ldots$" und
aus `1`"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)` $(p = \bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \text{ Menge})$
$\wedge(\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\} \text{ Menge})$.

□

**332-9.** Ähnlich wie bei **332-8** erschließen sich aus **331-4,5bcd)** neue Aussagen.

**332-9(Satz)**

a) *Aus* "$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ *Menge*" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ *Menge*)"
*folgt* $\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw inferior von* $x$".

b) *Aus* "$\mathsf{ran}\, x$ *Menge*"
*folgt* "$\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw inferior von* $x$".

c) *Aus* "$x$ *Menge*"
*folgt* "$\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw inferior von* $x$".

---

$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**

<u>Beweis **332-9**</u>

---

$\{\bigcap\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**
$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ **8-22(Def)**

---

`a)` `VS` gleich $(\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge$) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge$))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge..."
folgt via **332-5**:
$\bigcup\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge$)$"
folgt via **332-4**:
$$\{\bigcap\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

`b)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **332-6**: $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via **332-7**: $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge$)$.

`2:` Aus `1.1`"$\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge" und
aus `1.1`"$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge$)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

`c)` `VS` gleich $x$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$x$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\, x$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ran}\, x$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

□

**332-10.** In **332-6** wird, um $\{x[\mu] : \mu \in E\}$ Menge nachzuweisen, der Focus auf $x$ gerichtet. Dass die angestrebte Aussage auch durch $E$ Menge erreicht werden kann, liegt an der "Funnktions-Artigkeit" der Zuordnung $\lambda \to x[\lambda]$".

**332-10(Definition)**

1) 332.2$(E, x) = \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$.

2) 332.3$(E, x) = \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = (\Omega, x[\Omega])))\}$.

**332-11.** $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist eine Funktion.

**332-11(Satz)**

a) $\{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega]\ \mathit{Menge})\} \subseteq E$.

b) *Aus* "$p \in E$" *und* "$x[p]$ *Menge*"
*folgt* "$p \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega]\ \mathit{Menge})\}$".

c) *Aus* "$w \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega]\ \mathit{Menge}) \wedge (w = (\Omega, x[\Omega]))$".

d) *Aus* "$(p, q) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$p \in E$" *und* "$q = x[p]$ *Menge*".

e) *Aus* "$p \in E$" *und* "$x[p]$ *Menge*"
*folgt* "$(p, x[p]) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".

f) $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq E \times \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

g) $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Relation.*

h) $\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) = \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega]\ \mathit{Menge})\}$.

i) $\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq E$.

j) $\mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) = \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

k) $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *Funktion.*

---

$\{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega]\ \mathit{Menge})\}$ **332-10(Def)**
$\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-10(Def)**
$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **332-11**</u> `a)`

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1}}$ | $\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}.$ |
| `1:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$” folgt: | $(\alpha \in E) \wedge (x[\alpha] \text{ Menge}).$ |
| `2:` Aus `1` folgt: | $\alpha \in E.$ |

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}) \Rightarrow (\alpha \in E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\} \subseteq E.$

`b)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in E \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich “$(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge})$” und
aus `1`“$p$ Menge”
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}.$

`c)` `VS` gleich $w \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$w \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$”
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$w \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$”
folgt via **332-10(Def)**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w = (\Omega, x[\Omega])).$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`“$\ldots w = (\Omega, x[\Omega])$”
folgt: $(\Omega, x[\Omega])$ Menge.

`3:` Aus `2`“$(\Omega, x[\Omega])$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $x[\Omega]$ Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega] \text{ Menge}) \wedge (w = (\Omega, x[\Omega])).$

<u>Beweis **332-11**</u> `d)` `VS` gleich $(p,q)\in\{(\lambda,x[\lambda]):\lambda\in E\}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\{(\lambda,x[\lambda]):\lambda\in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(p,q)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\{(\lambda,x[\lambda]):\lambda\in E\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists\Omega:(\Omega\in E)\wedge(x[\Omega]\text{ Menge})\wedge((p,q)=(\Omega,x[\Omega])).$$

`2:` Aus `1.2`"$\ldots(p,q)=(\Omega,x[\Omega])$" und
aus `1.1`"$(p,q)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p=\Omega)\wedge(q=x[\Omega])$.

`3.1:` Aus `2`"$p=\Omega\ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots\Omega\in E\ldots$"
folgt: $\boxed{p\in E}$

`3.2:` Aus `2`
folgt: $\boxed{q=x[p]}$

`3.3:` Aus `2`"$\ldots q=x[\Omega]$" und
aus `1.2`"$\ldots x[\Omega]$ Menge$\ldots$"
folgt: $q$ Menge.

`4:` Aus `3.3` und
aus `3.2`
folgt: $\boxed{x[p]\text{ Menge}}$

<u>Beweis **332-11**</u> `e)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt: $x[\Omega] = x[p]$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `VS`
folgt: $(\Omega \in E) \wedge (x[\Omega] \text{ Menge})$.

`2.3:` Aus `1.2`"$p$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots x[p]$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, x[p])$ Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `2.1`"$x[\Omega] = x[p]$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, x[\Omega]) = (p, x[p])$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(p, x[p]) = (\Omega, x[\Omega])$.

`5:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.2`"$\Omega \in E \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((p, x[p]) = (\Omega, x[\Omega]))$.

`6:` Aus `5`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((p, x[p]) = (\Omega, x[\Omega]))$" und
aus `2.3`"$(p, x[p])$ Menge"
folgt via **332-10(Def)**: $(p, x[p]) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **332-11**</u> `fg)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega]$ Menge$) \wedge (\alpha = (\Omega, x[\Omega]))$.

`3:` Via **8-10** gilt: $x[\Omega] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

`4:` Aus `3` "$x[\Omega] \subseteq \mathsf{ran}\, x$" und
aus `2` "$\ldots x[\Omega]$ Menge$\ldots$"
folgt via **folk**: $x[\Omega] \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4` "$x[\Omega] \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, x[\Omega]) \in E \times \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, x[\Omega])$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in E \times \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in E \times \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{Af)} \,\big|\, \text{“}\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq E \times \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)\text{”}}$

`2.g):` Aus `Af)` gleich "$\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\} \subseteq E \times \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, x)$"
folgt via **10-12**: $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Relation.

<u>Beweis **332-11**</u> `h)`

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ | $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$. |

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$(\alpha \in E) \wedge (\Omega = x[\alpha] \text{ Menge})$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha \in E) \wedge (x[\alpha] \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

| `A1` | "$\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$" |
|---|---|

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ | $\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$. |

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$"
folgt: $(\alpha \in E) \wedge (x[\alpha] \text{ Menge})$.

`3:` Aus `2` "$(\alpha \in E) \wedge (x[\alpha] \text{ Menge})$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$(\alpha, x[\alpha]) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`4:` Aus `3` "$(\alpha, x[\alpha]) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$.

Ergo `Thema1.2`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

| `A2` | "$\{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$" |
|---|---|

...

<u>Beweis **332-11**</u> `h)` ...

2: Aus `A1` gleich “$\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$
$\subseteq \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) = \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}.$$

`i)`

1: Via des bereits bewiesenen `h)` gilt:
$$\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) = \{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\}.$$

2: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{\omega : (\omega \in E) \wedge (x[\omega] \text{ Menge})\} \subseteq E.$

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq E.$

`j)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}).$

2: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}.$

3: Aus 2“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(\Omega \in E) \wedge (\alpha = x[\Omega] \text{ Menge}).$$

4: Aus 3“$\Omega \in E \ldots$” und
aus 3“$\ldots x[\Omega]$ Menge”
folgt via **8-23**: $x[\Omega] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$

5: Aus 3“$\ldots \alpha = x[\Omega] \ldots$” und
aus 4
folgt: $\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})) \Rightarrow (\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$”

...

Beweis **332-11** `j)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **8-23**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x[\Omega])$.

3: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

4: Aus 3 und
aus 2 "$\ldots \alpha = x[\Omega]$"
folgt: $x[\Omega]$ Menge.

5: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 4 "$x[\Omega]$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$(\Omega, x[\Omega]) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

6: Aus 5 "$(\Omega, x[\Omega]) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $x[\Omega] \in \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$.

7: Aus 2 "$\ldots \alpha = x[\Omega]$" und
aus 6
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{x[\lambda] : \lambda \in E\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})\text{”}}$

2: Aus A1 gleich "$\mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus A2 gleich "$\{x[\lambda] : \lambda \in E\} \subseteq \mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$\mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) = \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **332-11** `k)`</u>

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Relation.

`Thema1.2` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\beta = x[\alpha]$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\gamma = x[\alpha]$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”

`2:` Aus `1.1`“$\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Funktion.

$\square$

**332-12.** Unter Einbeziehung von $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ zeigt sich für jede Menge $E$, dass $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ eine Menge ist.

**332-12(Satz)**

a) *Aus "$E$ Menge" folgt "$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Menge".*

b) *Aus "$E$ Menge" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge)"*
*folgt "$\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **332-12**

---

$\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-10(Def)**

---

a) VS gleich $E$ Menge.

1: Via **332-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq E$.

2: Aus 1"$\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \subseteq E$" und
aus VS gleich "$E$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$ Menge.

3: Via **332-11** gilt: $\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Funktion.

4: Aus 3"$\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Funktion" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$ Menge"
folgt via **26-3**: $\mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\})$ Menge.

5: Via **332-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(\lambda, x[\lambda]) : \lambda \in E\}) = \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Menge.

b) VS gleich $(E \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha] \text{ Menge}))$.

1: Aus VS gleich "$E$ Menge..."
folgt via des bereits bewiesenen a) : $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Menge.

2: Aus 1"$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ Menge" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x[\alpha]$ Menge)"
folgt via **332-9**: $\bigcup\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $x$.

□

**332-13.** Jeder $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$ ist gleich $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

**332-13(Satz)**

a) *Aus "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$"*
*folgt "$p = \bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"*
*und "$0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$".*

b) *Aus "$0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"*
*folgt "$\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$".*

c) *Aus "$\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Menge"*
*folgt "$\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$".*

---

$\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**

Beweis **332-13**

---

$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**
$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

---

a) VS gleich $p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist sse_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus 1"$p$ ist sse_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-6**:
$$(p = \bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}) \wedge (0 \neq \{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}).$$

3: Via **332-4**: $\{\bigcup \lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $(p = \bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}) \wedge (0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\})$.

<u>Beweis **332-13**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`1:` Via **332-4** gilt: $\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\} = \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $0 \neq \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$”
folgt via **331-6**:
$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist sse_focus superior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$.

`4:` Aus `3`“$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$ ist
sse_focus superior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$”
folgt via **329-4(Def)**:
$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.

`5:` Via **332-4** gilt: $\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.

`c)` `VS` gleich $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ Menge.

`1:` Via **332-4** gilt: $\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\} = \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge.

`3:` Aus `2`“$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ Menge”
folgt via **331-6**:
$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist sse_focus superior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$.

`4:` Aus `3`“$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}$ ist
sse_focus superior von $\{x[\mu] : \mu \in E\}$”
folgt via **329-4(Def)**:
$\bigcap\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.

`5:` Via **332-4** gilt: $\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.

□

**332-14.** Aus $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ folgt $0 \neq E$ und die Existenz von $p \in E$, so dass $x[p]$ eine Menge ist.

**332-14(Satz)**

`a)` *Aus* "$0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
*folgt* "$0 \neq E$" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega]$ *Menge*)".

`b)` *Aus* "$p \in E$" *und* "$x[p]$ *Menge*" *folgt* "$0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **332-14** `a)` `VS` gleich $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi : \Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Phi \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **8-23**: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega] \text{ Menge})}$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq E}$

`b)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \in E) \wedge (x[p] \text{ Menge})$"
folgt via **8-23**: $x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

□

**332-15.** $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist unter anderem genau dann $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$, wenn $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

**332-15(Satz)** *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ *ist* $(\mathsf{sse}, E)$*gw superior von* $x$.

`ii)` $0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

`iii)` $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

---

$\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**
$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **332-15**

---

$\{\bigcup\lambda : \lambda \in E\}$ **331-1(Def)**

---

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.
Aus `VS` gleich "$\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$"
folgt via **332-13**: $0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

1: Via **332-4** gilt: $\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\} = \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

2: Aus 1 und
aus `VS`
folgt: $0 \neq \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

3: Aus 2 "$0 \neq \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$"
folgt via **331-9**: $0 \neq \{x[\mu] : \mu \in E\}$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

1: Aus `VS`
folgt: $0 \neq \{x[\mu] : \mu \in E\}$.

2: Aus 1 "$0 \neq \{x[\mu] : \mu \in E\}$"
folgt via **331-9**: $0 \neq \{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\}$.

3: Via **332-4** gilt: $\{\bigcup\lambda : \lambda \in \{x[\mu] : \mu \in E\}\} = \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

4: Aus 3 und
aus 2
folgt: $0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

5: Aus 4 "$0 \neq \{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$"
folgt via **332-13**: $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $x$.

$\square$

**332-16.** Die Untersuchung von $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}}$ und $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}$ wird durch die Einführung einer neuen Klasse vorbereitet.

**332-16(Definition)**

$$\mathsf{332.4}(E) = \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}.$$

**332-17.** Aus $0 \neq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$ folgt $0 \neq E$.

**332-17(Satz)**

a) *Aus* "$x \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$"
*folgt* "$0 \neq E$" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega]$ *Menge*)".

b) *Aus* "$p \in E$" *und* "$x$ *Menge*"
*folgt* "$x \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$".

c) *Aus* "$0 \neq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$" *folgt* "$0 \neq E$".

d) *Aus* "$E = 0$" *folgt* "$\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = 0$".

e) $\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in 0\}\} = 0$.

f) *Aus* "$0 \neq E$" *folgt* "$\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = \mathcal{U}$".

---

$\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$ **332-16(Def)**

Beweis **332-17** a) VS gleich $x \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

1: Aus VS gleich "$x \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$"
folgt: $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus 1"$0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **332-14**: $(0 \neq E) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x[\Omega]$ Menge$))$.

b) VS gleich $(p \in E) \wedge (x$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via **8-11**: $x[p]$ Menge.

2: Aus VS gleich "$p \in E \ldots$" und
aus 1"$x[p]$ Menge"
folgt via **8-23**: $x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

3: Aus 2"$x[p] \in \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **folk**: $0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

4: Aus 3"$0 \neq \{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus VS gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt: $x \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

<u>Beweis **332-17**</u> `c)` `VS` gleich $0 \neq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \neq E$.

`d)` `VS` gleich $E = 0$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$(0 \neq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}) \Rightarrow (0 \neq E).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(0 \neq E)) \Rightarrow (\neg(0 \neq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\})).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(E = 0) \Rightarrow (\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = 0).$$

`e)`
Aus "$0 = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in 0\}\} = 0$.

`f)` `VS` gleich $0 \neq E$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `2`"$\alpha$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}.$$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\})$

Konsequenz via **folk**: $\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = \mathcal{U}$.

$\square$

**332-18.** $f : 0 \to B$ ist nur für $f = 0$ möglich.

<u>**332-18(Satz)**</u>

*Aus "$f : 0 \to B$" folgt "$f = 0$".*

<u>Beweis **332-18**</u> `VS` gleich $f : 0 \to B$.

`1`: Aus `VS` gleich "$f : 0 \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = 0)$.

`2`: Aus `1` "$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = 0)$"
folgt via **92-5**: $f = 0$.

□

**332-19.** Bei $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}}$ und $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}$ handelt es sich um Funktionen mit nicht unerwarteten Eigenschaften.

**332-19(Satz)**

a) $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}}$ *Funktion.*

b) $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}$ *Funktion.*

c) $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}} = \mathcal{U}$.

d) $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

e) *Aus* "$0 \neq E$" *folgt* "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \mathcal{U}$".

f) *Aus* "$E = 0$" *folgt* "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = 0$".

g) $\overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{egwsup}} = 0$.

h) $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

i) $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \to \mathcal{U}$.

j) *Aus* "$0 \neq E$" *folgt* "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}\ \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

k) *Aus* "$E = 0$" *folgt* "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} = 0$".

l) $\overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{gwsup}} = 0$.

---

$\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$ **332-16(Def)**

Beweis **332-19**

---

$\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**
$\{\bigcap(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ **332-2(Def)**

---

a)
Aus **61-8** "$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch"

folgt via **329-13**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion.

Beweis **332-19** b)
Aus **61-8**“$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch”
folgt via **329-14**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion.

c)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

2: Aus Thema1“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

3: Aus 2“$\alpha$ Menge”
folgt via **332-6**: $\{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}$ Menge.

4: Aus 3“$\{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}$ Menge”
folgt via **332-5**:
$\bigcup\{\bigcap(\alpha[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $\alpha$.

5: Aus 2“$\alpha$ Menge” und
aus 4“$\bigcup\{\bigcap(\alpha[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw inferior von $\alpha$”
folgt via **329-13**: $\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}})$.

Konsequenz via **folk**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}} = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **332-19**</u> `d)`

`Thema1.1` $\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via **329-14**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $\alpha$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $\alpha$"
folgt via **332-13**: $\Omega = \bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$.

4: Aus 3 und
aus 2
folgt: $\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $\alpha$.

5: Aus 4 "$\bigcap\{\bigcup(x[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $\alpha$"
folgt via **332-15**: $0 \neq \{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}$.

6: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

7: Aus 5 "$0 \neq \{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus 6 "$\alpha$ Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} \subseteq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$"

...

<u>Beweis **332-19**</u> `d)` ...

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ | $\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$. |
| `2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$” folgt: | $0 \neq \{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}$. |
| `3:` Aus `2`“$0 \neq \{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}$” folgt via **332-15**: | $\bigcap\{\bigcup(\alpha[\lambda]) : \lambda \in E\}$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $\alpha$. |
| `4:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\alpha[\lambda] : \lambda \in E\}\}$” folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `5:` Aus `4`“$\alpha$ Menge” und aus `3`“$\bigcap\{\bigcup(\alpha[\lambda]) : \lambda \in E$ ist $(\mathsf{sse}, E)$gw superior von $\alpha$” folgt via **329-14**: | $\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}$. |

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}) \Rightarrow (\alpha \in \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \subseteq \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} \subseteq \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \subseteq \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

`e)` `VS` gleich $0 \neq E$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq E$”
folgt via **332-17**: $\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = \mathcal{U}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **332-19**</u> `f)` `VS` gleich $E=0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$E=0$"
folgt via **332-17**: $\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = 0.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}.$

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = 0.$

`g)`

$$\overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{egwsup}} \overset{\mathrm{d)}}{=} \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in 0\}\} \overset{\mathbf{332-17}}{=} 0.$$

`h)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}}$ Funktion"
folgt via **329-13**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}} : \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}} \to (\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})).$

`3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\overset{sfsse,E}{\mathsf{egwinf}} = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}} : \mathcal{U} \to (\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})).$

`5:` Aus `4` und
aus **331-7** "$(\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})) = \mathcal{U}$"
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwinf}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}.$

Beweis **332-19** `i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}$ Funktion"
folgt via **329-14**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : \overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} \to (\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}))$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \to (\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}))$.

`5:` Aus `4` und
aus **331-7** "$(\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})) = \mathcal{U}$"
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \to \mathcal{U}$.

`j)` `VS` gleich $0 \neq E$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt:
$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \to \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E$"
folgt via **332-17**: $\{\omega : 0 \neq \omega[E]\} = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

`k)` `VS` gleich $E = 0$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt:
$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} : \{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} \to \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$E = 0$"
folgt via **332-17**: $\{\omega : 0 \neq \{\omega[\lambda] : \lambda \in E\}\} = 0$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} : 0 \to \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "$\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}}\ 0 \to \mathcal{U}$"
folgt via **332-18**: $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwsup}} = 0$.

<u>Beweis</u> **332-19** `l)`
Aus "$0 = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\mathsf{gwsup}^{\mathsf{sse},0} = 0.$

$\square$

Mengenlehre: $M$_focus inferior und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.
$M$_focus superior und $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

**Ersterstellung: 05/03/15** **Letzte Änderung: 05/03/15**

**333-1.** Ist $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ eine Funktion, so ist $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,E$ das $M$_Infimum von $E$, wenn $E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$. Ähnliches gilt für $M$_Suprema.

**333-1(Satz)**

a) *Aus* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*" *und* "$E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
*folgt* "*E Menge*" *und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,E$ *ist M_Infimum von E*".

b) *Aus* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*" *und* "$E \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
*folgt* "*E Menge*" *und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,E$ *ist M_Supremum von E*".

c) *Aus* "*M antiSymmetrisch*" *und* "$E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
*folgt* "*E Menge*" *und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,E$ *ist M_Infimum von E*".

d) *Aus* "*M antiSymmetrisch*" *und* "$E \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
*folgt* "*E Menge*" *und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,E$ *ist M_Supremum von E*".

Beweis **333-1** a) VS gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\text{ Funktion}) \wedge (E \in \overset{M}{\mathsf{einf}})$.

1: Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}) = \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

2: Aus VS gleich "$\ldots E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$" und
aus 1
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

3: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…" und
aus 2"$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}})$"
folgt via **folk**: $(E, \overset{M}{\mathsf{inf}}\,E) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$.

4: Aus 3"$(E, \overset{M}{\mathsf{inf}}\,E) \in \overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via **182-5**: $(E\text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\,E\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E)$.

Beweis **333-1** `b)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion}) \wedge (E \in \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`1:` Via **182-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}) = \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{sup}}$" und
aus `1`
folgt: $E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…" und
aus `2`"$E \in \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}})$"
folgt via **folk**: $(E, \overset{M}{\mathsf{sup}}\,E) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$.

`4:` Aus `3`"$(E, \overset{M}{\mathsf{sup}}\,E) \in \overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via **182-5**: $(E\text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,E\text{ ist }M\text{\_Supremum von }E)$.

`c)` `VS` gleich $(M\text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \in \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{inf}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…"
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{inf}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(E\text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\,E\text{ ist }M\text{\_Infimum von }E)$.

`d)` `VS` gleich $(M\text{ antiSymmetrisch}) \wedge (E \in \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{sup}})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…"
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathsf{e}\overset{M}{\mathsf{sup}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(E\text{ Menge}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,E\text{ ist }M\text{\_Supremum von }E)$.

$\square$

**333-2.** Im Fall $M$ (unten/oben Stark) (Total) Vollständig kann in **333-1** via **182-13,14** auf explizite Erwähnung von $\overset{M}{\mathsf{einf}}$, $\overset{M}{\mathsf{esup}}$ verzichtet werden.

<u>**333-2(Satz)**</u>

a) *Aus "$M$ unten Stark Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M$" folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $M$_Infimum von $E$".*

b) *Aus "$M$ oben Stark Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M$" folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $M$_Supremum von $E$".*

c) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$E \subseteq \mathsf{ran}\, M$" folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $M$_Infimum von $E$".*

d) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, M$" folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $M$_Supremum von $E$".*

<u>Beweis **333-2**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ unten Stark Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion})$
$\wedge(E \text{ Menge}) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **folk**: $E \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ unten Stark Vollständig$\ldots$"
folgt via **182-13**: $\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **5-15**: $E \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **folk**: $E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `3`"$E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **333-1**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $M$_Infimum von $E$.

`b)` `VS` gleich $(M \text{ oben Stark Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}} \text{ Funktion})$
$\wedge(E \text{ Menge}) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $E \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ oben Stark Vollständig$\ldots$"
folgt via **182-13**: $\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$"
folgt via **5-15**: $E \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M) \setminus \{0\} \subseteq \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **folk**: $E \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion$\ldots$" und
aus `3`"$E \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **333-1**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $M$_Supremum von $E$.

<u>Beweis **333-2**</u> `c)` `VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion}) \wedge (E \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **folk**: $E \in \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ Total Vollständig$\ldots$"
folgt via **182-14**: $\overset{M}{\mathsf{einf}} = \mathcal{P}(\mathsf{ran}\, M)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion$\ldots$" und
aus 2"$E \in \overset{M}{\mathsf{einf}}$"
folgt via **333-1**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $M$_Infimum von $E$.

`d)` `VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}} \text{ Funktion}) \wedge (E \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E$ Menge$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **folk**: $E \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots M$ Total Vollständig$\ldots$"
folgt via **182-14**: $\overset{M}{\mathsf{esup}} = \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, M)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $E \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion$\ldots$" und
aus 2"$E \in \overset{M}{\mathsf{esup}}$"
folgt via **333-1**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $M$_Supremum von $E$.

□

**333-3.** Für antiSymmetrische $M$ kann in **333-2** auf die Forderungen $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion verzichtet werden.

**333-3(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ unten Stark Vollständig"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M$"* *folgt "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *$E$ ist $M$_Infimum von $E$.*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ oben Stark Vollständig"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M$"* *folgt "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *$E$ ist $M$_Supremum von $E$.*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ Total Vollständig"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$E \subseteq \mathsf{ran}\, M$"* *folgt "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *$E$ ist $M$_Infimum von $E$.*

d) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ Total Vollständig"*
*und "$E$ Menge"*
*und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, M$"* *folgt "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *$E$ ist $M$_Supremum von $E$.*

Beweis **333-3** a) VS gleich ($M$ antiSymmetrisch) $\wedge$ ($M$ unten Stark Vollständig) $\wedge$($E$ Menge) $\wedge$ ($0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M$).

1: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch ..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

2: Aus 1"$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus VS gleich "...$M$ unten Stark Vollständig...",
aus VS gleich "...$E$ Menge..." und
aus VS gleich "...$0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ $E$ ist $M$_Infimum von $E$.

<u>Beweis **333-3**</u> `b)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ oben Stark Vollständig})$
$\wedge(E \text{ Menge}) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch ... "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "... $M$ oben Stark Vollständig... ",
aus `VS` gleich "... $E$ Menge... " und
aus `VS` gleich "... $0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $M$_Supremum von $E$.

`c)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ Total Vollständig})$
$\wedge(E \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch ... "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "... $M$ Total Vollständig... ",
aus `VS` gleich "... $E$ Menge... " und
aus `VS` gleich "... $E \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\, E$ ist $M$_Infimum von $E$.

`d)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ Total Vollständig})$
$\wedge(E \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, M)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch ... "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "... $M$ Total Vollständig... ",
aus `VS` gleich "... $E$ Menge... " und
aus `VS` gleich "... $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\, E$ ist $M$_Supremum von $E$.

□

**333-4.** Ist $M$ (unten/oben) Stark Vollständig, so gibt es einfach scheinende Aussagen über $M\_$ focus inferior/superior.

**333-4(Satz)**

a) *Aus* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*"
*und* "$p$ *ist* $M$*_focus inferior von* $E$"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ *Menge*" *folgt* "$p = \overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$".

b) *Aus* "$M$ *oben stark Vollständig*"
*und* $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*
*und* "$0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ *Menge*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$" *ist* $M$*_focus inferior von* $E$".

c) *Aus* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*"
*und* "$p$ *ist* $M$*_focus superior von* $E$"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ *Menge*" *folgt* "$p = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$".

d) *Aus* "$M$ *unten stark Vollständig*"
*und* $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*
*und* "$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ *Menge*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$" *ist* $M$*_focus superior von* $E$".

Beweis **333-4** a) VS gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion$) \wedge (p$ ist $M$_focus inferior von $E)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich "…$p$ ist $M$_focus inferior von $E$…"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

2: Aus VS gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…",
aus VS gleich "…$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge" und
aus 1 "$p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **189-1**: $p = \overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$.

<u>Beweis **333-4**</u> `b)` `VS` gleich $(M$ oben Stark Vollständig$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion$)$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge$)$.

`1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

`3:` Aus `1`“$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$” und
aus `2`“$(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{dom}\,M$”
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

`4:` Aus `VS` gleich “$M$ oben Stark Vollständig …”,
aus `VS` gleich “… $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…”,
aus `VS` gleich “… $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge”,
aus `VS` gleich “… $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ …” und
aus `3`“$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$”
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

`5:` Aus `4`“$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$”
folgt via **327-8(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`c)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion$) \wedge (p$ ist $M$_focus superior von $E)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “… $p$ ist $M$_focus superior von $E$ …”
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…”,
aus `VS` gleich “… $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge” und
aus `1`“$p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$”
folgt via **189-1**: $p = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$.

<u>Beweis **333-4**</u> `d)` `VS` gleich $(M \text{ unten Stark Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion}) \wedge (0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \text{ Menge})$.

`1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`3:` Aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$" und
aus `2` "$(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{ran}\,M$"
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`4:` Aus `VS` gleich "$M$ unten Stark Vollständig ... ",
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion... ",
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge",
aus `VS` gleich "... $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ..." und
aus `3` "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$"
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`5:` Aus `4` "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_Iinfmum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$"
folgt via **327-8(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_focus superior von $E$.

□

**333-5.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so sind $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktionen und **333-4** kann re-formuliert werden.

<u>**333-5(Satz)**</u>

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p$ ist $M$_focus inferior von $E$"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"* *folgt "$p=\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$".*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ oben stark Vollständig"*
*und "$0\neq\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"*
*folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$" ist $M$_focus inferior von $E$".*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p$ ist $M$_focus superior von $E$"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"* *folgt "$p=\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$".*

d) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ unten stark Vollständig"*
*und "$0\neq\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"*
*folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$" ist $M$_focus superior von $E$".*

<u>Beweis **333-5**</u> a) VS gleich ($M$ antiSymmetrisch)
$\wedge$($p$ ist $M$_focus inferior von $E$) $\wedge$ ($\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge).

1: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

2: Aus 1"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus VS gleich "... $p$ ist $M$_focus inferior von $E$..." und
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"
folgt via **333-4**: $p=\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$.

<u>Beweis **333-5**</u> `b)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ oben Stark Vollständig})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…"
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "…$M$ oben Stark Vollständig…" und
aus `VS` gleich "…$0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"
folgt via **333-4**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_focus inferior von $E$.

`c)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch})$
$\wedge(p \text{ ist } M\text{\_focus superior von } E) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…"
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "…$p$ ist $M$_focus superior von $E$…" und
aus `VS` gleich "…$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"
folgt via **333-4**: $p = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$.

`d)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ unten Stark Vollständig})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…"
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "…$M$ unten Stark Vollständig…" und
aus `VS` gleich "…$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"
folgt via **333-4**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_focus superior von $E$.

□

**333-6.** Ist $M$ Total Vollständig, so ergeben sich in jenen Fällen, in denen $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ oder $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktionen und $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ oder $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Mengen sind, einfach formulierbare Aussagen über $M$_focus superior oder $M$_focus inferior.

**333-6(Satz)**

a) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"*
*folgt* $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ *ist $M$_focus inferior von $E$.*

b) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"*
*folgt* $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ *ist $M$_focus superior von $E$.*

Beweis **333-6** a) VS gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}} \text{ Funktion}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \text{ Menge})$.

1: Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

3: Aus 1"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$" und
aus 2"$(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{dom}\,M$"
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$.

4: Aus VS gleich "$M$ Total Vollständig..." ,
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion..." ,
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge" und
aus 3"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq \mathsf{dom}\,M$"
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$.

5: Aus 4"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$"
folgt via **327-8(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_focus inferior von $E$.

<u>Beweis **333-6**</u> `b)` `VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \text{ Menge})$.

`1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Via **folk** gilt: $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`3:` Aus `1`“$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$” und
aus `2`“$(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M) \subseteq \mathsf{ran}\,M$”
folgt via **folk**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$.

`4:` Aus `VS` gleich “$M$ Total Vollständig...”,
aus `VS` gleich “... $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion...”,
aus `VS` gleich “... $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge” und
aus `3`“$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq \mathsf{ran}\,M$”
folgt via **333-2**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$.

`5:` Aus `4`“$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$”
folgt via **327-8(Def)**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_focus superior von $E$.

$\square$

**333-7.** Ist $M$ antiSymmetrisch und Total Vollständig, so können die Voraussetzungen von **333-6** modifiziert werden.

**333-7(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"*

*folgt* $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ *ist $M$_focus inferior von $E$.*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"*

*folgt* $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ *ist $M$_focus superior von $E$.*

Beweis **333-7** a) VS gleich $(M$ antiSymmetrisch$) \wedge (M$ Total Vollständig$)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch … "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

2: Aus VS gleich "… $M$ Total Vollständig… ",
aus 1 "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion" .und
aus VS gleich "… $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge"
folgt via **333-6**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_focus inferior von $E$.

b) VS gleich $(M$ antiSymmetrisch$) \wedge (M$ Total Vollständig$)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch … "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

2: Aus VS gleich "… $M$ Total Vollständig… ",
aus 1 "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion" .und
aus VS gleich "… $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge"
folgt via **333-6**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_focus superior von $E$.

□

**333-8.** Unter den verschiedenen Möglichkeiten, $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge oder $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge zu garantieren wird eine besoders einfach formulierbare ausgewählt.

**333-8(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ *Menge.*

$\rightarrow)$ $M$ *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow)$ $M$ *Total Vollständig.*

*Dann folgt:*

a) $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ *ist $M$_focus inferior von $E$.*

b) $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ *ist $M$_focus superior von $E$.*

<u>Beweis **333-8**</u> a)

1: Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus 1“ $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ ” und
aus →) “ $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ Menge ”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge.

3: Aus →) “ $M$ antiSymmetrisch ” ,
aus →) “ $M$ Total Vollständig ” und
aus 2“ $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ Menge ”
folgt via **333-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ ist $M$_focus inferior von $E$.

b)

1: Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus 1“ $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ ” und
aus →) “ $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ Menge ”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge.

3: Aus →) “ $M$ antiSymmetrisch ” ,
aus →) “ $M$ Total Vollständig ” und
aus 2“ $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ Menge ”
folgt via **333-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist $M$_focus superior von $E$.

□

Mengenlehre: $(M,E)$gw inferior und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.
$(M,E)$gw superior und $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

**Ersterstellung: 06/03/15** **Letzte Änderung: 06/03/15**

**334-1.** Ist $M$ (unten/oben) Stark Vollständig, so gibt es einfach scheinende Aussagen über $(M,E)$gw inferior/superior.

**334-1(Satz)**

a) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion"*
*und "*$p$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$*"*
*und "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ *Menge"*
*folgt "*$p=\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$*".*

b) *Aus "*$M$ *oben Stark Vollständig"*
*und* $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*
*und "*$0\neq\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ *Menge"*
*folgt "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$*" ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$*".*

c) *Aus "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion"*
*und "*$p$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$*"*
*und "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ *Menge"*
*folgt "*$p=\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$*".*

d) *Aus "*$M$ *unten Stark Vollständig"*
*und* $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*
*und "*$0\neq\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ *Menge"*
*folgt "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$*" ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$*".*

---

$\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **334-1**</u> `a)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion}) \wedge (p \text{ ist } (M, E)\text{gw inferior von } E)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M, E)$gw inferior von $x \ldots$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…",
aus `1`"$p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-4**: $p = \overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]).$

`b)` `VS` gleich $(M \text{ oben Stark Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ oben Stark Vollständig…",
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-4**:
$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $(M, E)$gw inferior von $x$.

`c)` `VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\text{ Funktion}) \wedge (p \text{ ist } (M, E)\text{gw superior von } E)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ ist $(M, E)$gw superior von $x \ldots$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…",
aus `1`"$p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-4**: $p = \overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]).$

<u>Beweis **334-1**</u> `d)` `VS` gleich $(M$ unten Stark Vollständig$) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion$)$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ unten Stark Vollständig…",
aus `VS` gleich "… $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-4**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } (M, E)\text{gw superior von } x.$$

$\square$

**334-2.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so sind $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktionen und **334-1** kann re-formuliert werden.

**334-2(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"*
*folgt "$p = \overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$".*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ oben Stark Vollständig"*
*und "$0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"*
*folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$" ist $(M,E)$gw inferior von $x$".*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$p$ ist $(M,E)$gw superior von $x$"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"*
*folgt "$p = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$".*

d) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ unten Stark Vollständig"*
*und "$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"*
*folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$" ist $(M,E)$gw superior von $x$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **334-2** a) VS gleich $(M$ antiSymmetrisch$)$
$\wedge(p$ ist $(M,E)$gw inferior von $E)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge$)$.

1: Aus VS gleich "… $p$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$ …"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch… ",
aus 1 "… $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus VS gleich "… $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-5**: $p = \overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$.

<u>Beweis **334-2**</u> `b)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ oben Stark Vollständig})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch. . . ",
aus `VS` gleich ". . . $M$ oben Stark Vollständig. . . " und
aus `VS` gleich ". . . $0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-5**:
$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } (M, E)\text{gw inferior von } x.$$

`c)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch})$
$\wedge(p \text{ ist } (M, E)\text{gw superior von } E)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich ". . . $p$ ist $(M, E)$gw superior von $x$ . . . "
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch. . . ",
aus `1`". . . $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$" und
aus `VS` gleich ". . . $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-5**: $p = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$.

`d)` `VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ unten Stark Vollständig})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch. . . ",
aus `VS` gleich ". . . $M$ unten Stark Vollständig. . . " und
aus `VS` gleich ". . . $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-5**:
$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } (M, E)\text{gw superior von } x.$$

$\square$

**334-3.** Ist $M$ Total Vollständig, so ergeben sich in jenen Fällen, in denen $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ oder $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktionen und $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ oder $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Mengen sind, einfach formulierbare Aussagen über $(M, E)$gw superior oder $(M, E)$gw inferior.

**334-3(Satz)**

a) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"*
*folgt* $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ *ist* $(M, E)$*gw inferior von* $x$.

b) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"*
*folgt* $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ *ist* $(M, E)$*gw superior von* $x$.

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **334-3**</u> `a)` `VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}} \text{ Funktion})$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Total Vollständig…",
aus `VS` gleich "… $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-6**:
$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } M\text{\_focus inferior von } \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } (M, E)\text{gw inferior von } x.$$

`b)` `VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion})$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Total Vollständig…",
aus `VS` gleich "… $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge"
folgt via **333-6**:
$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } M\text{\_focus superior von } \{x[\lambda] : \lambda \in E\}.$$

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$"
folgt via **329-4(Def)**:
$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]) \text{ ist } (M, E)\text{gw superior von } x.$$

□

**334-4.** Ist $M$ antiSymmetrisch und Total Vollständig, so können die Voraussetzungen von **334-3** modifiziert werden.

**334-4(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ Total Vollständig"*
*und "*$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ *Menge"*
*folgt* $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$ *ist* $(M,E)$*gw inferior von* $x$.

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ Total Vollständig"*
*und "*$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ *Menge"*
*folgt* $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$ *ist* $(M,E)$*gw superior von* $x$.

---

$\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **334-4** a) VS gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}] \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch ... "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

2: Aus VS gleich "... $M$ Total Vollständig... ",
aus 1"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion" .und
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ Menge"
folgt via **334-3**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

b) VS gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}] \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch ... "
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

2: Aus VS gleich "... $M$ Total Vollständig... ",
aus 1"$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion" .und
aus VS gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}]$ Menge"
folgt via **334-3**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E\}])$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

□

**334-5.** Unter den verschiedenen Möglichkeiten, $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge oder $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge zu garantieren wird eine besoders einfach formulierbare ausgewählt.

<u>**334-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

$\rightarrow)$ $M$ *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow)$ $M$ *Total Vollständig.*

*Dann folgt:*

a) $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ *ist* $(M, E)$*gw inferior von* $x$.

b) $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ *ist* $(M, E)$*gw superior von* $x$.

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **334-5**</u> `a)`

`1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus 1 " $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ " und
aus →) " $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ Menge "
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge.

`3:` Aus →) " $M$ antiSymmetrisch " ,
aus →) " $M$ Total Vollständig " und
aus 2 " $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge "
folgt via **334-4**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $(M,E)$gw inferior von $x$.

`b)`

`1:` Via **327-1** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

`2:` Aus 1 " $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}] \subseteq (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ " und
aus →) " $(\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$ Menge "
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge.

`3:` Aus →) " $M$ antiSymmetrisch " ,
aus →) " $M$ Total Vollständig " und
aus 2 " $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}]$ Menge "
folgt via **334-4**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist $(M,E)$gw superior von $x$.

□

Mengenlehre: $E^{\mathsf{upkt}}p$.
limes inferior. limes superior. limes ordinatus.

**Ersterstellung: 16/03/15** **Letzte Änderung: 17/03/15**

**335-1.** Die limites inferior, superior und ordinatus sind durch mengentheoretische Operationen auf "punktierten Umgebungen" definiert.

**335-1(Definition)**

$$E^{\mathsf{upkt}}p = \mathsf{335.0}(p, E) = \{\lambda \setminus \{p\} : p \in \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (p \in \Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus \{p\}))\}.$$

**335-2.** Aus $w \in E^{\mathsf{upkt}}p$ folgt, dass es sich bei $p$ um eine Menge handeln muss. Demnach gilt $E^{\mathsf{upkt}}p = 0$ für jede Unmenge $p$. Dass aus $p \in x \in E$ bereits $x \setminus \{p\} \in E^{\mathsf{upkt}}p$ folgt erfordert einige Beweis-Schritte.

**335-2(Satz)**

a) *Aus* “$w \in E^{\mathsf{upkt}}p$” *folgt* “$\exists \Omega : (p \in \Omega \in E) \wedge (w = \Omega \setminus \{p\})$” *und* “$p$ *Menge*”.

b) *Aus* “$0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p$” *folgt* “$p$ *Menge*”.

c) *Aus* “$p$ *Unmenge*” *folgt* “$E^{\mathsf{upkt}}p = 0$”.

d) *Aus* “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$” *folgt* “$E^{\mathsf{upkt}}p = 0$”.

e) *Aus* “$p \in x \in E$” *folgt* “$x \setminus \{p\} \in E^{\mathsf{upkt}}p \neq 0$”.

Beweis **335-2** `a)` `VS` gleich $w \in E^{\mathsf{upkt}}p$.

1: Aus `VS` gleich “$w \in E^{\mathsf{upkt}}p$”

folgt via **335-1(Def)**: $\boxed{\exists \Omega : (p \in \Omega \in x) \wedge (w = \Omega \setminus \{p\})}$

2: Aus 1“$\ldots p \in \Omega \ldots$”

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`b)` `VS` gleich $0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p$.

1: Aus `VS` gleich “$0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in E^{\mathsf{upkt}}p$.

2: Aus 2“$\ldots \Omega \in E^{\mathsf{upkt}}p$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p$ Menge.

`c)`

1: Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p) \Rightarrow (p \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \text{ Menge})) \Rightarrow (\neg(0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \text{ Unmenge}) \Rightarrow (E^{\mathsf{upkt}}p = 0)$.

<u>Beweis **335-2**</u> `d)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p) \vee (E^{\mathsf{upkt}}p = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p$"
folgt via **folk**: $\exists\Omega : \Omega \in E^{\mathsf{upkt}}p$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in E^{\mathsf{upkt}}p$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists\Phi : (p \in \Phi \in E) \wedge (\Omega = \Phi \setminus \{p\})$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Phi \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$"
folgt: $p \notin \Phi$.

`5:` Aus `3`
folgt: $p \in \Phi$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E^{\mathsf{upkt}}p = 0$.

`e)` `VS` gleich $p \in x \in E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $\exists\Omega : \Omega = x$.

`2.1:` Aus `1.2` "$\ldots \Omega = x$" und
aus `VS`
folgt: $p \in \Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1.2` "$\ldots \Omega = x$"
folgt: $x = \Omega$.

`2.3:` Aus `1.1` "$x$ Menge"
folgt via **94-6**: $x \setminus \{p\}$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $x \setminus \{p\} = \Omega \setminus \{p\}$.

`4:` Aus `1.2` "$\exists\Omega \ldots$",
aus `2.1` "$p \in \Omega \in E$" und
aus `3`
folgt: $\exists\Omega : (p \in \Omega \in E) \wedge (x \setminus \{p\} = \Omega \setminus \{p\})$.

...

Beweis **335-2** `e)` `VS` gleich $p \in x \in E.$

...

`5:` Aus `4`“$\exists \Omega : (p \in \Omega \in E) \wedge (x \setminus \{p\} = \Omega \setminus \{p\})$” und aus `2.3`“$x \setminus \{p\}$ Menge”

folgt via **335-1(Def)**: $\boxed{x \setminus \{p\} \in E^{\mathsf{upkt}} p}$

`6:` Aus `4`“$x \setminus \{p\} \in E^{\mathsf{upkt}} p$”

folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq E^{\mathsf{upkt}} p}$

□

**335-3.** Die limites inferior, superior und ordinatus entstehen aus den korrespondierenden gw-en durch Übergang von $E$ zu $E^{\mathsf{upkt}}p$.

**335-3(Definition)**

1) "$q$ **ist** $(M, E)$**limes inferior von** $x$ **in** $p$" genau dann, wenn $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

2) "$q$ **ist** $(M, E)$**limes superior von** $x$ **in** $p$" genau dann, wenn $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

3) "$q$ **ist** $(M, E)$**limes ordinatus von** $x$ **in** $p$" genau dann, wenn $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$.

**335-4.** Einen limes inferior, superior, ordinatus kann, muss es aber nicht geben.

**335-4(Definition)**

1) $\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}} = \mathsf{335.1}(M,E)$

$$= \{(\lambda,\mu) : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{limes inferior von } \lambda \text{ in } \mu)\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Phi,\Psi : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{limes inferior von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge(\omega = (\Phi,\Psi))\}.$$

2) $\overset{M,E}{\mathsf{elimsup}} = \mathsf{335.2}(M,E)$

$$= \{(\lambda,\mu) : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{limes superior von } \lambda \text{ in } \mu)\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Phi,\Psi : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{limes superior von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge(\omega = (\Phi,\Psi))\}.$$

3) $\overset{M,E}{\mathsf{elimord}} = \mathsf{335.3}(M,E)$

$$= \{(\lambda,\mu) : (\exists\Omega : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{limes ordinatus von } \lambda \text{ in } \mu)\}$$

$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Phi,\Psi : \Omega \text{ ist } (M,E)\text{limes ordinatus von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge(\omega = (\Phi,\Psi))\}.$$

**335-5.** Unter Vorgabe von $M, E$ werden jene *Mengen* $(x, p)$, für die ein limes inferior, superior, ordinatus existiert, mit diesen in $\overset{M,E}{\mathsf{limsup}}$, $\overset{M,E}{\mathsf{liminf}}$, $\overset{M,E}{\mathsf{limord}}$ zusammengeführt.

**335-5(Definition)**

1) $\overset{M,E}{\mathsf{liminf}} = 335.4(M, E)$

$$= \{((\lambda, \mu), \eta) : \eta \text{ ist } (M, E)\text{limes inferior von } \lambda \text{ in } \mu\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \text{ ist limes inferior von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge (\omega = ((\Phi, \Psi), \Omega)))\}.$$

2) $\overset{M,E}{\mathsf{limsup}} = 335.5(M, E)$

$$= \{((\lambda, \mu), \eta) : \eta \text{ ist } (M, E)\text{limes superior von } \lambda \text{ in } \mu\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \text{ ist limes superior von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge (\omega = ((\Phi, \Psi), \Omega)))\}.$$

3) $\overset{M,E}{\mathsf{limord}} = 335.6(M, E)$

$$= \{((\lambda, \mu), \eta) : \eta \text{ ist } (M, E)\text{limes ordinatus von } \lambda \text{ in } \mu\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \text{ ist limes ordinatus von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge (\omega = ((\Phi, \Psi), \Omega)))\}.$$

**335-6.** Gleichsam per definitionem können unter anderem $\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$ mit $\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{liminf}}$ mit $\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{gwinf}}$ in Verbindung gebracht werden. Dabei ist es unter Umständen wesentlich, ob $p$ eine Menge ist.

**335-6(Satz)**

a) *Aus* "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$" *folgt* "$x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}$".

b) *Aus* "$p$ *Menge*" *und* "$x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}$" *folgt* "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$".

c) *Aus* "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$" *folgt* "$x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwsup}}$".

d) *Aus* "$p$ *Menge*" *und* "$x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwsup}}$" *folgt* "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$".

e) *Aus* "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$" *folgt* "$x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egw}}$".

f) *Aus* "$p$ *Menge*" *und* "$x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egw}}$" *folgt* "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$".

Beweis **335-6** a) VS gleich $(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$.

1.1: Aus VS gleich "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$"
folgt via **folk**: $x,p$ Menge.

1.2: Aus VS gleich "$(x,p)\in\overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$"
folgt via **335-4(Def)**: $\exists\Omega:\Omega$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$.

2: Aus 1.2"$\ldots\Omega$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $\Omega$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

3: Aus 1.1"$x\ldots$ Menge" und
aus 2"$\Omega$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-13**: $x\in\overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}$.

<u>Beweis **335-6**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwinf}}$"
folgt via **329-13**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

`1.3:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Phi : \Phi = x$.

`1.4:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Psi : \Psi = p$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, p)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \Phi = x$" und
aus `1.4`"$\ldots \Psi = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \Psi) = (x, p)$.

`3.1:` Aus `1.3`"$\ldots \Phi = x$",
aus `1.4`"$\ldots \Psi = p$" und
aus `2.2`"$\ldots \Omega$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$"
folgt: $\Omega$ ist $(M, E)$limes inferior von $\Phi$ in $\Psi$.

`3.2:` Aus `2.3`
folgt: $(x, p) = (\Phi, \Psi)$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.3`"$\exists \Phi \ldots$",
aus `1.4`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \text{ ist } (M, E)\text{limes inferior von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge ((x, p) = (\Phi, \Psi))).$$

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega$ ist $(M, E)$limes inferior von $\Phi$ in $\Psi)$
$\wedge((x, p) = (\Phi, \Psi)))$" und
aus `2.1`"$(x, p)$ Menge"
folgt via **335-4(Def)**: $(x, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{eliminf}}$.

<u>Beweis</u> **335-6** `c)` `VS` gleich $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$"
folgt via **folk**: $x, p$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$"
folgt via **335-4(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$.

`2:` Aus `1.2`"… $\Omega$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

`3:` Aus `1.1`"$x$ … Menge" und
aus `2`"$\Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$"
folgt via **329-14**: $x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwsup}}$.

<u>Beweis **335-6**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwsup}}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egwsup}}$"
folgt via **329-14**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

`1.3:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Phi : \Phi = x$.

`1.4:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Psi : \Psi = p$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, p)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \Phi = x$" und
aus `1.4`"$\ldots \Psi = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \Psi) = (x, p)$.

`3.1:` Aus `1.3`"$\ldots \Phi = x$",
aus `1.4`"$\ldots \Psi = p$" und
aus `2.3`"$\ldots \Omega$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$"
folgt: $\Omega$ ist $(M, E)$limes superior von $\Phi$ in $\Psi$.

`3.2:` Aus `2.3`
folgt: $(x, p) = (\Phi, \Psi)$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.3`"$\exists \Phi \ldots$",
aus `1.4`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega$ ist $(M, E)$limes superior von $\Phi$ in $\Psi) \wedge ((x, p) = (\Phi, \Psi)))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega$ ist $(M, E)$limes superior von $\Phi$ in $\Psi)$
$\wedge((x, p) = (\Phi, \Psi)))$" und
aus `2.1`"$(x, p)$ Menge"
folgt via **335-4(Def)**: $(x, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimsup}}$.

<u>Beweis</u> **335-6** `e)` `VS` gleich $(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$"
folgt via **folk**: $x, p$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(x,p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$"
folgt via **335-4(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M,E)$limes ordinatus von $x$ in $p$.

`2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega$ ist $(M,E)$limes ordinatus von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$.

`3:` Aus `1.1`"$x \ldots$ Menge" und
aus `2`"$\Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$"
folgt via **329-15**: $x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egw}}$.

<u>Beweis **335-6**</u> `f)` `VS` gleich $(x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egw}}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egw}}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \overset{M,E^{\mathsf{upkt}}p}{\mathsf{egw}}$"
folgt via **329-15**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$.

`1.3:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Phi : \Phi = x$.

`1.4:` Aus `VS`
folgt: $\exists \Psi : \Psi = p$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, p)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$"
folgt via **335-3(Def)**: $\Omega$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \Phi = x$" und
aus `1.4`"$\ldots \Psi = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \Psi) = (x, p)$.

`3.1:` Aus `1.3`"$\ldots \Phi = x$",
aus `1.4`"$\ldots \Psi = p$" und
aus `2.3`"$\ldots \Omega$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p$"
folgt: $\Omega$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $\Phi$ in $\Psi$.

`3.2:` Aus `2.3`
folgt: $(x, p) = (\Phi, \Psi)$.

`4:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.3`"$\exists \Phi \ldots$",
aus `1.4`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \text{ ist } (M, E)\text{limes ordinatus von } \Phi \text{ in } \Psi) \wedge ((x, p) = (\Phi, \Psi)))$.

`5:` Aus `4`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $\Phi$ in $\Psi)$
$\wedge((x, p) = (\Phi, \Psi)))$" und
aus `2.1`"$(x, p)$ Menge"
folgt via **335-4(Def)**: $(x, p) \in \overset{M,E}{\mathsf{elimord}}$.

□

**335-7.** In gewöhnlchen Anwendungen wird bei der Betrachtung von limites von $p \in x$ für zumindest ein $x \in E$ ausgegangen. Ansonsten - im Speziellen, wenn $p$ eine Unmenge ist - gilt $p \notin \alpha$ für alle $\alpha \in E$ und es folgt $E^{\mathsf{upkt}}p = 0$.

**335-7(Satz)** *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 = E^{\mathsf{upkt}}p$.

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$.

Beweis **325-7** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $0 = E^{\mathsf{upkt}}p$.

`1:` Es gilt: $(\exists \Omega : (p \in \Omega \in E)) \vee (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists \Omega : p \in \Omega \in E$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "$\ldots p \in \Omega \in E$"
folgt via **335-2**: $0 \neq E^{\mathsf{upkt}}p$.

`2.2:` Nach `VS` gilt: $0 = E^{\mathsf{upkt}}p$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$.

Aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \notin \alpha)$"
folgt via **335-2**: $E^{\mathsf{upkt}}p = 0$.

□

**335-8.** In Hinblick auf den möglichen Fall $E^{\mathsf{upkt}}p = 0$ werden in einem Intermezzo unter anderem $(M, 0)$gw inferior von $x$ und $M$_focus inferior von 0 untersucht.

**335-8(Satz)** *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *$p$ ist $(M, 0)$gw inferior von $x$.*

`ii)` *$p$ ist $M$_focus inferior von 0.*

`iii)` *$p$ ist $M$_Supremum von 0.*

<u>Beweis **335-8**</u>

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

---

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p$ ist $(M,0)$gw inferior von $x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $(M,0)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

`2:` Via **8-24** gilt: $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = 0$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $p$ ist $M$_focus inferior von $0$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $p$ ist $M$_focus inferior von $0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist $M$_focus inferior von $0$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[0]$.

`2:` Via **8-12** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[0] = 0$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $p$ ist $M$_Supremum von $0$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p$ ist $M$_Supremum von $0$.

`1:` Via **8-12** gilt: $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[0] = 0$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[0]$.

`3:` Aus `2`"$p$ ist $M$_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[0]$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_focus inferior von $0$.

`4:` Via **8-24** gilt: $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = 0$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

`6:` Aus `5`"$p$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $(M,0)$gw inferior von $x$.

□

**335-9.** In Hinblick auf den möglichen Fall $E^{\mathsf{upkt}}p = 0$ werden in einem Intermezzo unter anderem $(M,0)$gw superior von $x$ und $M$_focus superior von 0 untersucht.

**335-9(Satz)** *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *$p$ ist $(M,0)$gw superior von $x$.*

`ii)` *$p$ ist $M$_focus superior von 0.*

`iii)` *$p$ ist $M$_Infimum von 0.*

Beweis **335-9**

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

---

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $p$ ist $(M,0)$gw superior von $x$.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $(M,0)$gw superior von $x$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

2: Via **8-24** gilt: $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = 0$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $p$ ist $M$_focus superior von 0.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich $p$ ist $M$_focus superior von 0.

1: Aus VS gleich "$p$ ist $M$_focus superior von 0"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[0]$.

2: Via **8-12** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[0] = 0$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $p$ ist $M$_Infimum von 0.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $p$ ist $M$_Infimum von 0.

1: Via **8-12** gilt: $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[0] = 0$.

2: Aus VS und
aus 1
folgt: $p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[0]$.

3: Aus 2"$p$ ist $M$_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[0]$"
folgt via **327-8(Def)**: $p$ ist $M$_focus superior von 0.

4: Via **8-24** gilt: $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\} = 0$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$.

6: Aus 5"$p$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in 0\}$"
folgt via **329-4(Def)**: $p$ ist $(M,0)$gw superior von $x$.

□

**335-10.** Gilt $E^{\mathsf{upkt}}p=0$, so kommt bei der Betrachtung des $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$ möglicher Weise der $M$_focus inferior von 0 ins Spiel.

**335-10(Satz)**

a) *Aus "$E^{\mathsf{upkt}}p=0$" und "$q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$" folgt "$q$ ist $M$_Supremum von 0".*

b) *Aus "$E^{\mathsf{upkt}}p=0$" und "$q$ ist $M$_Supremum von 0" folgt "$q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$".*

c) *Aus "$E^{\mathsf{upkt}}p=0$" und "$q$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$" folgt "$q$ ist $M$_Infimum von 0".*

d) *Aus "$E^{\mathsf{upkt}}p=0$" und "$q$ ist $M$_Infimum von 0" folgt "$q$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$".*

Beweis **335-10** a)
VS gleich $(E^{\mathsf{upkt}}p=0)\wedge(q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p)$.

1: Aus VS gleich "…$q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

2: Aus 1 und
aus VS gleich "$E^{\mathsf{upkt}}$=0…"
folgt: $q$ ist $(M,0)$gw inferior von $x$.

3: Aus 2"$q$ ist $(M,0)$gw inferior von $x$"
folgt via **335-8**: $q$ ist $M$_Supremum von 0.

b) VS gleich $(E^{\mathsf{upkt}}p=0)\wedge(q$ ist $M$_Supremum von $0)$.

1: Aus VS gleich "…$q$ ist $M$_Supremum von 0"
folgt via **335-8**: $q$ ist $(M,0)$gw inferior von $x$.

2: Aus 1 und
aus VS gleich "$E^{\mathsf{upkt}}p=0$…"
folgt: $q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

3: Aus 2"$q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$.

Beweis **335-10** `c)`
`VS` gleich $(E^{\mathsf{upkt}}p=0)\wedge(q \text{ ist } (M,E)\text{limes superior von } x \text{ in } p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "…$q$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$E^{\mathsf{upkt}}$=0…"
folgt: $q$ ist $(M,0)$gw superior von $x$.

`3:` Aus `2`"$q$ ist $(M,0)$gw superior von $x$"
folgt via **335-9**: $q$ ist $M$_Infimum von 0.

`d)` `VS` gleich $(E^{\mathsf{upkt}}p=0)\wedge(q \text{ ist } M\text{\_Infimum von } 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "…$q$ ist $M$_Infimum von 0"
folgt via **335-9**: $q$ ist $(M,0)$gw superior von $x$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$E^{\mathsf{upkt}}p=0$…"
folgt: $q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

`3:` Aus `2`"$q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$.

□

**335-11.** $q$ ist genau dann $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$, wenn $q$ ein $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$ ist.

**335-11(Satz)**

a) *"$q$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$" genau dann, wenn "$q$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$".*

b) *"$q$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$" genau dann, wenn "$q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **335-11** a)

1: Via **335-3(Def)** gilt: $q$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$
$\Leftrightarrow$ $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}})$gw inferior von $x$.

2: Via **329-4(Def)** gilt: $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}} p)$gw inferior von $x$
$\Leftrightarrow$ $q$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $q$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$
$\Leftrightarrow$ $q$ ist $M$_focus inferior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$.

b)

1: Via **335-3(Def)** gilt: $q$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$
$\Leftrightarrow$ $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}})$gw superior von $x$.

2: Via **329-4(Def)** gilt: $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}} p)$gw superior von $x$
$\Leftrightarrow$ $q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $q$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$
$\Leftrightarrow$ $q$ ist $M$_focus superior von $\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}$.

$\square$

**335-12.** Wie jedem $(M, E)$gw kommen auch den $(M, E)$limites allgemeine Eigenschaften zu.

<u>**335-12(Satz)**</u>

a) *Aus "$q$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$"*
*folgt "$q$ Menge" und "$q \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".*

b) *Aus "$q$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$"*
*folgt "$q$ Menge" und "$q \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".*

c) *Aus "$q$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p$"*
*folgt "$q$ Menge" und "$q \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$".*

<u>Beweis **335-12**</u> `a)` `VS` gleich $q$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

`2:` Aus `1`"$q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-12**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

`b)` `VS` gleich $q$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

`2:` Aus `1`"$q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$"
folgt via **329-12**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

`c)` `VS` gleich $q$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$.

`2:` Aus `1`"$q$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$"
folgt via **329-12**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M))$.

$\square$

**335-13.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so hat $x$ in $p$ höchstens einen limes inferior.

**335-13(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$q, y$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$"* *folgt "$q = y$".*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$q, y$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$"* *folgt "$q = y$".*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$q, y$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p$"* *folgt "$q = y$".*

Beweis **335-13** a) VS gleich $(M$ antiSymmetrisch$)$
$\wedge(q, y$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q, y$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $E$"
folgt via **335-3(Def)**: $q, y$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch$\ldots$" und
aus 1"$q, y$ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **329-11**: $q = y$.

b) VS gleich $(M$ antiSymmetrisch$)$
$\wedge(q, y$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q, y$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $E$"
folgt via **335-3(Def)**: $q, y$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch$\ldots$" und
aus 1"$q, y$ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$"
folgt via **329-11**: $q = y$.

c) VS gleich $(M$ antiSymmetrisch$)$
$\wedge(q, y$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $p)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q, y$ ist $(M, E)$limes ordinatus von $x$ in $E$"
folgt via **335-3(Def)**: $q, y$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$.

2: Aus VS gleich "$M$ antiSymmetrisch$\ldots$" und
aus 1"$q, y$ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von $x$"
folgt via **329-11**: $q = y$.

$\square$

**335-14.** Wie für gwe inferior oder superior gibt es für limites inferior oder superior kanonische Kandidaten.

<u>**335-14(Satz)**</u>

a) *Aus* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*"
*und* "$q$ *ist* $(M,E)$*limes inferior von* $x$ *in* $p$"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge*"
*folgt* "$q=\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$".

b) *Aus* "$M$ *oben Stark Vollständig*"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*
*und* "$0\neq\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ *ist* $(M,E)$*limes inferior von* $x$ *in* $p$".

c) *Aus* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*"
*und* "$q$ *ist* $(M,E)$*limes superior von* $x$ *in* $p$"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge*"
*folgt* "$q=\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$".

d) *Aus* "$M$ *unten Stark Vollständig*"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*
*und* "$0\neq\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ *ist* $(M,E)$*limes superior von* $x$ *in* $p$".

---

$\{x[\lambda]:\lambda\in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis</u> **335-14** `a)`

`VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion})\wedge(q\text{ ist }(M,E)\text{limes inferior von }x\text{ in }p)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]\text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p\ldots$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…",
aus `1`"$q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **334-1**: $q=\overset{M}{\mathsf{sup}}\;(\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}\}]).$

`b)`

`VS` gleich $(M\text{ oben Stark Vollständig})\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\text{ Funktion})$
$\wedge(0\neq\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]\text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ oben Stark Vollständig…",
aus `VS` gleich "$\ldots\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0\neq\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$"
folgt via **334-1**:
$\overset{M}{\mathsf{sup}}\;(\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}\;(\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**:
$\overset{M}{\mathsf{sup}}\;(\overset{M}{\mathsf{inf}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$.

`c)`

`VS` gleich $(\overset{M}{\mathsf{inf}}\text{ Funktion})\wedge(q\text{ ist }(M,E)\text{limes superior von }x\text{ in }p)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]\text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p\ldots$"
folgt via **335-3(Def)**: $q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…",
aus `1`"$q$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\overset{M}{\mathsf{sup}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **334-1**: $q=\overset{M}{\mathsf{inf}}\;(\overset{M}{\mathsf{sup}}\;[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}\}]).$

<u>Beweis **335-14**</u> `d)`

`VS` gleich $(M \text{ unten Stark Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}} [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}] \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ unten Stark Vollständig…",
aus `VS` gleich "… $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion…" und
aus `VS` gleich "… $0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}} [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}]$"
folgt via **334-1**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}} (\overset{M}{\mathsf{sup}} [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}]) \text{ ist } (M, E^{\mathsf{upkt}} p)\text{gw superior von } x.$$

`2:` Aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{inf}} (\overset{M}{\mathsf{sup}} [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}])$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}} p)$gw superior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}} (\overset{M}{\mathsf{sup}} [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}]) \text{ ist } (M, E)\text{limes superior von } x \text{ in } p.$$

$\square$

**335-15.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so sind $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktionen und somit ist eine veränderte Verstion von **335-14** verfügbar.

**335-15(Satz)**

a) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"*
*folgt "$q = \overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$".*

b) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ oben Stark Vollständig"*
*und "$0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"*
*folgt "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$".*

c) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$q$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$"*
*und "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"*
*folgt "$q = \overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$".*

d) *Aus "$M$ antiSymmetrisch"*
*und "$M$ unten Stark Vollständig"*
*und "$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"*
*folgt "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E)$limes superior von $x$ in $p$".*

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

Beweis **335-15** `a)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (q \text{ ist } (M,E)\text{limes inferior von } x \text{ in } p)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "...$q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$..." und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in [\}E^{\mathsf{upkt}}p]$ Menge"
folgt via **335-14**: $q = \overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]).$

`b)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ oben Stark Vollständig})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "...$M$ oben Stark Vollständig..." und
aus `VS` gleich "...$0 \neq \overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **335-14**:
$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$.

`c)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (q \text{ ist } (M,E)\text{limes inferior von } x \text{ in } p)$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "...$q$ ist $(M,E)$limes inferior von $x$ in $p$..." und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in [\}E^{\mathsf{upkt}}p]$ Menge"
folgt via **335-14**: $q = \overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]).$

<u>Beweis **335-15**</u> `d)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ oben Stark Vollständig})$
$\wedge(0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch…"
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `1`"$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion",
aus `VS` gleich "…$M$ oben Stark Vollständig…" und
aus `VS` gleich "…$0 \neq \overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}]$ Menge"
folgt via **335-14**:
$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}])$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$.

$\square$

**335-16.** Ist $M$ Total Vollständig, so bedarf es in **335-14** nicht mehr der Voraussetzung ungleich 0.

**335-16(Satz)**

a) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ *Funktion*
*und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge"*
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ *ist* $(M,E)$*limes inferior von* $x$ *in* $p$".

b) *Aus "$M$ Total Vollständig"*
*und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ *Funktion*
*und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge"*
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ *ist* $(M,E)$*limes superior von* $x$ *in* $p$".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **335-16**</u> `a)`

`VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{sup}} \text{ Funktion})$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich " $M$ Total Vollständig... ",
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion... " und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **334-3**:

$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]) \text{ ist } (M, E^{\mathsf{upkt}}p)\text{gw inferior von } x.$$

`2:` Aus `1`" $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**:

$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\ (\overset{M}{\mathsf{inf}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]) \text{ ist } (M, E)\text{limes inferior von } x \text{ in } p.$$

`b)`

`VS` gleich $(M \text{ Total Vollständig}) \wedge (\overset{M}{\mathsf{inf}} \text{ Funktion})$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich " $M$ Total Vollständig... ",
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion... " und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **334-3**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]) \text{ ist } (M, E^{\mathsf{upkt}}p)\text{gw superior von } x.$$

`2:` Aus `1`" $\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M, E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$"
folgt via **335-3(Def)**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\ (\overset{M}{\mathsf{sup}}\ [\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]) \text{ ist } (M, E)\text{limes superior von } x \text{ in } p.$$

□

**335-17.** Ist $M$ antiSymmetrisch, so sind $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktionen und somit ist **335-16** in veränderter Form verfügbar.

**335-17(Satz)**

a) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*
*und* "$M$ *Total Vollständig*"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ *ist* $(M, E)$*limes inferior von* $x$ *in* $p$".

b) *Aus* "$M$ *antiSymmetrisch*"
*und* "$M$ *Total Vollständig*"
*und* "$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ *Menge*"
*folgt* "$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ *ist* $(M, E)$*limes superior von* $x$ *in* $p$".

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **335-17**</u> `a)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ Total Vollständig})$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "... $M$ Total Vollständig...",
aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{sup}}$ Funktion" und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **335-16**:
$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M, E)$limes inferior von $x$ in $p$.

`b)`

`VS` gleich $(M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (M \text{ Total Vollständig})$
$\wedge(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}] \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch..."
folgt via **331-7**: $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "... $M$ Total Vollständig...",
aus `1` "$\overset{M}{\mathsf{inf}}$ Funktion" und
aus `VS` gleich "... $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}]$ Menge"
folgt via **335-16**:
$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M, E)$limes superior von $x$ in $p$.

□

**335-18.** Unter Beibehaltung anderer Voraussetzungen ist für Mengen $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine vereinfachte Version von **335-18** verfügbar.

**335-18(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ *Menge.*

$\rightarrow$) $M$ *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) $M$ *Total Vollständig.*

*Dann folg:*

a) $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}])$ *ist* $(M, E)$*limes inferior von* $x$ *in* $p$.

b) $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E^{\mathsf{upkt}} p\}])$ *ist* $(M, E)$*limes superior von* $x$ *in* $p$.

---

$\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ **8-22(Def)**

<u>Beweis **335-18**</u>

`1.1:` Aus →) “$(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ Menge”,
aus →) “$M$ antiSymmetrisch” und
aus →) “$M$ Total Vollständig”
folgt via **334-5**:

$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])\text{ ist }(M,E^{\mathsf{upkt}}p)\text{gw inferior von }x.$$

`1.2:` Aus →) “$(\mathsf{dom}\,M)\cap(\mathsf{ran}\,M)$ Menge”,
aus →) “$M$ antiSymmetrisch” und
aus →) “$M$ Total Vollständig”
folgt via **334-5**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])\text{ ist }(M,E^{\mathsf{upkt}}p)\text{gw superior von }x.$$

`2.a):` Aus `1.1` “$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von $x$”
folgt via **335-3(Def)**:

$$\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])\text{ ist }(M,E)\text{limes inferior von }x\text{ in }p.$$

`2.b):` Aus `1.2` “$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])$ ist $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw superior von $x$”
folgt via **335-3(Def)**:

$$\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda]:\lambda\in E^{\mathsf{upkt}}p\}])\text{ ist }(M,E)\text{limes superior von }x\text{ in }p.$$

□

Modellierung: Generation und Abbau II.
Zeitdiskretes Modell. Lebensdauer-Funktion $T : P \to [0|+\infty]$, $1 \leq P \in \mathbb{N}$.

**Ersterstellung: 18/03/15** **Letzte Änderung: 19/03/15**

**1. Lebensdauer-Funktion** $T$ In

http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt,

ist von einer Lebendsdauer von 1 bis 4 Tagen der Neutrophilen die Rede. Wird in Modell Generation und Abbau I von **#266** noch von lediglich einer Lebensdauer $T$ ausgegangen, sollen hier allgemeiner $P$, $1 \leq P \in \mathbb{N}$, Lebensdauern berücksichtigt werden. Dazu werden die Neutrophilen als Vereinigung von $P$ paarweise disjunkten Sub-Populationen modelliert. Die Sub-Populationen werden mit Lauf-Indices aus $P = \{0, \ldots, -1+P\}$, durchnummeriert. Die Lebenserwartung von Sub-Population $l \in P$ wird mit $T(l)$ bezeichnet. Durch funktionale Abstraktion wird hieraus die Lebensdauer-Funktion $T : P \to [0|+\infty]$ erhalten. Die Populationen seien so durchnummeriert, dass $T$ isoton ist:

$$T(l) \leq T(\lambda), \quad l \leq \lambda, \quad l, \lambda \in P.$$

**2. Zeitparameter** $\Delta$ Wie bereits bei der Diskussion von Modell Generation und Abbau I in **#266** dargelegt, handelt es sich bei $\Delta$, $0 < \Delta \in \mathbb{R}$, um einen "freien Parameter", der bei konkreten Berechnungen benannt werden muß. Unterschiedliche Werte für $\Delta$ können zu unterschiedlichen Resultaten führen.

**3. Modell-Größe** $n(\Delta, l)$ **=Anzahl Neutrophile der Sub-Population** $l \in P$ **in Blutbahn in Abhängigkeit der Zeit** Für $l \in P$ wird wie bei Modell Generation und Abbau I von **#266** von

$$n(\Delta, l) : \mathbb{N} \to [0|+\infty[,$$

mit der Interpretation

$$n(\Delta, l)(j) = \text{Anzahl Neutrophilen der Sub-Population } l \text{ in Blutbahn zur Zeit } j\Delta, \quad j \in \mathbb{N},$$

ausgegangen.

**4. Generationsmenge** $g(\Delta, l)$**=Anzahl Neutrophile der Sub-Population** $l \in P$**, die in einem Zeitintervall in die Blutbahn übergehen.** Zwischen einem Zeitpunkt $j\Delta$ und dem "nächsten" Zeitpunkt $(1+j)\Delta$, $j \in \mathbb{N}$, kommen in die Blutbahn neue Neutrophile hinzu, andere Neutrophile verschwinden. Die Anzahl der Neutrophilen der Sub-Population $l$, die in diesem Zeitintervall in der Blutbahn neu auftreten, ist $g(\Delta, l)(j)$. Es wird in Konsistenz mit dem Definitions-Bereich von $n(\Delta, l)$ von

$$g(\Delta, l) : \mathbb{N} \to [0|+\infty[,$$

ausgegangen. Es soll

$$g(\Delta,l)(j) = \text{Anzahl Neutrophile der Sub-Population } l\text{, die im Zeitintervall } [j\Delta|(1+j)\Delta[,\ j \in \mathbb{N}\text{, in die Blutbahn übergehen,}$$

gelten. Im Rahmen der vorliegenden Modellierung wird also nicht berücksichtigt, wo die Neutrophilen tatsächlich entstehen und mit welcher Verzögerung sie in die Blutbahn übergehen.

**5. Abbaumenge $r(\Delta, l)$=Anzahl Neutrophile der Sub-Population $l \in P$, die in einem Zeitintervall aus der Blutbahn verschwinden.** Zwischen einem Zeitpunkt $j\Delta$ und dem "nächsten" Zeitpunkt $(1+j)\Delta$, $j \in \mathbb{N}$, verschwinden Neutrophile der Sub-Population $l$ aus der Blutbahn. Diese Anzahl ist $r(\Delta, l)(j)$. Es wird in Konsistenz mit dem Definitions-Bereich von $n(\Delta, l)$ von

$$r(\Delta, l) : \mathbb{N} \to [0| + \infty[,$$

ausgegangen. Es soll

$$r(\Delta,l)(j) = \text{Anzahl Neutrophile der Sub-Population } l\text{, die im Zeitintervall } [j\Delta|(1+j)\Delta[,\ j \in \mathbb{N}\text{, aus der Blutbahn verschwinden,}$$

gelten.

**Bilanzgleichung.** Gemäß der Interpretation von $n(\Delta, l), g(\Delta, l), r(\Delta, l)$, $l \in P$, gilt für $j \in \mathbb{N}$ die "Bilanzgleichung"

Anzahl Neutrophile der Sub-Population $l$ in Blutbahn zur Zeit $(1 + j)\Delta$
= Anzahl Neutrophile der Sub-Population $l$ in Blutbahn zur Zeit $j\Delta$
+ Anzahl Neutrophile der Sub-Population $l$,
die in $[j\Delta|(1 + j)\Delta[$ in Blutbahn übergehen
− Anzahl Neutrophile der Sub-Population $l$,
die in $[j\Delta|(1 + j)\Delta[$ aus Blutbahn verschwinden,

was in deutlich kürzerer Form als

$$n(\Delta, l)(1 + j) = n(\Delta, l)(j) + g(\Delta, l)(j) - r(\Delta, l)(j), \quad l \in P, j \in \mathbb{N},$$

geschrieben werden kann. $n(\Delta, l)(j)$ wird für $1 \leq j \in \mathbb{N}$ aus $g(\Delta, l)(j), r(\Delta, l)(j)$ ermittelt. Die "Startwerte" $n(\Delta, l)(0)$ werden durch diese Vorschrift nicht erfasst und müssen zusätzlich vorgegeben werden:

$$n(\Delta, l)(0) = n^0_\Delta(l) \in [0| + \infty[, \quad l \in P.$$

Ähnlich wie in **#266** folgt für alle $l \in P$ und alle $j \in \mathbb{N}$,

$$n(\Delta, l)(1 + j) = n^0_\Delta(l) + \sum_{\alpha=0}^{j} (\ g(\Delta, l)(\alpha) - r(\Delta, l)(\alpha)\ ). \tag{1}$$

Der Einfluß der Startwerte $n^0_\Delta(l)$ ist gut sichtbar. Die Abhängigkeit der Funktion $n(\Delta, l)$ von $n^0_\Delta(l)$ wird nicht explizit notiert.

**6. Die konstanten Lebensdauern fließen in das Modell ein und $\tau(\Delta, l)$ erscheint** Die in **#266** erläuterten Zusammenhänge zwischen Lebensdauer und $\Delta$ treffen hier auf jede der $P$ Sub-Populationen zu. Ähnlich wie in **#266** wird für $l \in P$,

$$\tau(\Delta, l) = \text{kleinster Minimierer von } |k \cdot \Delta - T(l)| \text{ bezüglich } k \in \mathbb{N},$$

gesetzt, so dass

$$|\tau(\Delta, l) \cdot \Delta - T(l)| < \Delta : 2,$$

gilt. Damit ist $T(l)$ bis auf die "Messgenauigkeit" $\Delta : 2$ durch das $\tau(\Delta, l)$-fache von $\Delta$ angenähert. An dieser Stelle wird klar, dass unterschiedliche Werte von $\Delta$ zu unterschiedlichen Werten von $\tau(\Delta, l)$ und zu unterschiedlich genauen Approximationen führt. Mit der freundlichen Unterstützung durch $\tau(\Delta, l)$ kann nun der "lebenszeit-basierte " Zusammenhang zwischen $g(\Delta, l)$ und $r(\Delta, l)$ als

$$r(\Delta, l)(j) = g(\Delta, l)(j - \tau(\Delta, l)), \quad j \in \mathbb{N},$$

modelliert werden.

**7. Gesamt-Anzahl von Neutrophilen, gesamte Generations- und Abbaumenge** Es ist für mich nicht davon auszugehen, dass jedem individuellen Neutrophilen die Lebensdauer anzusehen ist. Auch ist es für mich nicht vorstellbar, dass beim Generations- und Abbauvorgang eine Unterscheidung der Lebensdauern erfolgen kann. Statt dessen ist es für mich vorstellbar, die gesamte Anzahl von Neutrophilen und die Gesamtzahl der in einem Zeitintervall erzeugten oder abgebauten Neutrophilen zu bestimmen. Mit den aus **#266** vetrauten Festlegungen

$$N(\Delta)(j) = \text{Anzahl Neutrophile in Blutbahn zur Zeit } j\Delta,\ j \in \mathbb{N},$$

$$G(\Delta)(j) = \text{Anzahl Neutrophile, die im Zeitintervall } [j\Delta|(1+j)\Delta[,\ j \in \mathbb{N}, \text{ in die Blutbahn übergehen,}$$

$$R(\Delta)(j) = \text{Anzahl Neutrophile, die im Zeitintervall } [j\Delta|(1+j)\Delta[,\ j \in \mathbb{N}, \text{ aus der Blutbahn verschwinden,}$$

und

$$N(\Delta), G(\Delta), R(\Delta) : \mathbb{N} \to [0| + \infty],$$

gilt hier für diese, der Messung zugänglich scheinenden Größen,

$$N(\Delta) = \sum_{l \in P} n(\Delta, l), \quad G(\Delta) = \sum_{l \in P} g(\Delta, l), \quad R(\Delta) = \sum_{l \in P} r(\Delta, l).$$

Wird noch
$$N_\Delta^0 = \sum_{l \in P} n_\Delta^0(l),$$
gesetzt, so folgt aus (1) die auch in **#266** erscheinende Gleichung
$$N(\Delta)(1+j) = N_\Delta^0 + \sum_{\alpha=1}^{j} (\ G(\Delta)(j) - R(\Delta)(j)\ ), \quad j \in \mathbb{N}.$$

**Modell 2 Generation und Abbau.** Zusammenfassend bestehen die Modellgleichungen aus
$$1 \le P \in \mathbb{N},$$
$$n(\Delta,l)(1+j) = n(\Delta,l)(j) + g(\Delta,l)(j) - g(\Delta,l)(j - \tau(\Delta,l)), \quad l \in P, j \in \mathbb{N},$$
$$n(\Delta,l)(0) = n_\Delta^0(l) \in [0| + \infty[,$$
$$n(\Delta,l) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad g(\Delta,l) : \{-\tau(\Delta,l), \ldots\} \to [0| + \infty[,$$
$$\tau(\Delta,l) = \text{kleinster Minimierer von } |k \cdot \Delta - T(l)| \text{ bezüglich } k \in \mathbb{N},$$
$$T : P \to [0| + \infty] \quad \text{isoton.}$$
Möglicherweise besteht lediglich Interesse an der Gesamtzahl Neutrophiler und nicht unbedingt an deren aktueller Lebensdauer-Verteilung. In diesem Fall kann über alle $l \in P$ summiert werden und es ergeben sich die Modell-Gleichungen
$$1 \le P \in \mathbb{N},$$
$$N(\Delta)(1+j) = N(\Delta)(j) + \sum_{l \in P} (\ g(\Delta,l)(j) - g(\Delta,l)(j - \tau(\Delta,l))\ ), \quad j \in \mathbb{N},$$
$$N(\Delta)(0) = N_\Delta^0 \in [0| + \infty[,$$
$$N(\Delta) : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$g(\Delta,l) : \{-\tau(\Delta,l), \ldots\} \to [0| + \infty[, \quad l \in P,$$
$$\tau(\Delta,l) = \text{kleinster Minimierer von } |k \cdot \Delta - T(l)| \text{ bezüglich } k \in \mathbb{N},$$
$$T : P \to [0| + \infty] \quad \text{isoton,}$$
bei denen die Vorgabe der $l$ individuellen Funktionen $g(\Delta,l)$ erforderlich ist. Interessanter Weise ist keine Angabe über die Zusammensetzung der anfänglichen $N_\Delta^0$ Neutrophilen bezüglich ihrer Lebenserwartungen erforderlich.

**Modell 2 Generation und Abbau - abstrakt.** Wie bereits in **#266** dargestellt, liefert Modell 2 für beliebige Funktionen $g(\Delta, l) : \mathbb{N} \to [0| + \infty]$, $l \in P$, nicht unbedingt sinnvolle Ergebnisse. In Konsistenz mit den Begriffs-Zuordnungen der Modellierung sind die Ergebnisse auf jeden Fall zum Zeitpunkt $(1 + j)\Delta$, $j \in \mathbb{N}$, sinnlos, wenn für ein $l \in P$

$$n(\Delta, 1 + j) < 0,$$

gilt. Zur Präzisierung wird wie in **#266** für $l \in P$ die Stoppzeit $\Omega(l)$ definiert:

$$\Omega(l) = \inf\{k \in \mathbb{N} : n(\Delta, l)(1 + k) < 0\}.$$

Offenbar gilt

$$\Omega(l) = \inf\{k \in \mathbb{N} : n(\Delta, l)(k) + g(\Delta, l)(k) - g(\Delta, l)(k - \tau(\Delta, l)) < 0\}.$$

Da das Verfahren aufhört, sinnvolle Ergebnisse zu liefern, wenn mindestens eine der Stoppzeiten $\Omega(l)$, $l \in P$, erreicht ist, wird

$$\overline{\Omega} = \min\{\Omega(l) : l \in P\},$$

gesetzt. Es gilt $\overline{\Omega} \in \mathbb{N}$ oder - wenn das Verfahren für alle $P$ Sub-Populationen stets nicht-negative Werte liefert - $\overline{\Omega} = +\infty$. Wir erhalten

$$0 \leq n(\Delta, l)(j)$$

für alle $l \in P$ und alle $j \in 1 + \overline{\Omega} = \{0, \ldots, \overline{\Omega}\}$. Der Fall $\overline{\Omega} = +\infty$ ist hier von ganz besonderem Interesse. Mit Hilfe von (1) und dem postulierten Zusammenhang zwischen Generation und Abbau ergibt sich die zu $\overline{\Omega} = +\infty$ äquivalente Aussage

$$\forall l \in P, j \in \mathbb{N} : \quad \sum_{\alpha=-\tau(\Delta,l)}^{-\tau(\Delta,l)+j} g(\Delta, l)(\alpha) \leq n_{\Delta}^{0}(l) + \sum_{\alpha=0}^{j} g(\Delta, l)(\alpha). \tag{2}$$

Bemerkenswerter Weise treten hier nun doch die Anfangsbedingungen $n_{\Delta}^{0}(l)$, $l \in P$, auf, die bei der Betrachtung der Modell-Gleichungen für $N(\Delta)$ *nicht* in Erscheinung treten. Es kann demnach sein, dass das Modell für die beobachtbare Grösse $N(\Delta)$ nicht-negative Resultate liefert, obwohl das Verfahren wegen des Negativ-Werdens einer der Funktionen $n(\Delta, l)$, $l \in P$, abgebrochen werden müsste. Um doppelte Berücksichtigung zu vermeiden ist es besser, wenn in Bedingung (2) eine Fein-Unterscheidung zwischen $j \leq -1 + \tau(\Delta, l)$ und $\tau(\Delta, l) \leq j$ getroffen wird. Aussage (2) ist äquivalent zu

$$\forall l \in P, j \in \tau(\Delta, l) : \quad \sum_{\alpha=-\tau(\Delta,l)}^{-\tau(\Delta,l)+j} g(\Delta, l)(\alpha) \leq n_{\Delta}^{0}(l) + \sum_{\alpha=0}^{j} g(\Delta, l)(\alpha),$$

und

$$\forall l \in P, j \in \{\tau(\Delta, l), \ldots\} : \quad \sum_{\alpha=-\tau(\Delta,l)}^{-1} g(\Delta, l)(\alpha) \leq n_{\Delta}^{0}(l) + \sum_{\alpha=1-\tau(\Delta,l)+j}^{j} g(\Delta, l)(\alpha).$$

Hier zeigt sich, dass, um Nicht-Negativität zu erreichen, anfangs in jeder der $P$ Sub-Populatioinen genügend viele Neutrophile vorhanden sein müssen, um nicht - in sinnloser Weise - "überabgebaut" zu werden.

Analysis: $R$ ist **ana1** von $q, x$.
$\texttt{rf1}qx$.

**Ersterstellung: 20/03/15** **Letzte Änderung: 22/04/15**

**337-1.** Die Addition ist kommutativ, assoziativ und hat in 0 ein neutrales Element. Auf Grund dieser Eigenschaften kann jeder endlichen Teilmenge von $\mathbb{A}$ in eindeutiger Weise eine "Summe" zugeordnet werden. Dabei ist die "Reihenfolge der Summation" unerheblich. Dies alles soll in weiterer Folge bewiesen werden. Dazu sind einige Vorbereitungen notwendig.

**337-1(Definition)**

$$\begin{aligned}\mathsf{337.0}(x,y) &= \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu) \\ &\qquad\wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\} \\ &= \{\omega : (\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Gamma : (\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\Phi),\Gamma)\in y) \\ &\qquad\wedge(\omega=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)))\}.\end{aligned}$$

**337-2.** Auf die Verifikation der "Mengen-Eigenschaft" kann beim Vorliegen der definierenden Eigenschaften von $\mathsf{337.0}(x,y)$ verzichtet werden. $\mathsf{337.0}(x,y)$ ist eine Relation.

**337-2(Satz)**

a) *Aus* "$(p,q)\in\mathsf{337.0}(x,y)$" *folgt* "$\exists\Omega,\Phi,\Psi:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)$ $\wedge(((\Omega,\Phi),q)\in y)\wedge(p=\{\Phi\}\cup\Psi)$".

b) *Aus* "$p\notin E$" *und* "$(E,a)\in x$" *und* "$((a,p),b)\in y$" *folgt* "$(\{p\}\cup E,b)\in\mathsf{337.0}(x,y)$".

c) $\mathsf{337.0}(x,y)$ *Relation.*

---

$$\mathsf{337.0}(x,y)=\{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta):(\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega:((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$$

Beweis **337-2** a) VS gleich $(p,q)\in\mathsf{337.0}(x,y)$.

1.1: Aus VS gleich "$(p,q)\in\mathsf{337.0}(x,y)$"
folgt via **ElementAxiom**: $(p,q)$ Menge.

1.2: Aus VS gleich "$(p,q)\in\mathsf{337.0}(x,y)$"
folgt via **337-1(Def)**:
$$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Gamma:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\Phi),\Gamma)\in y)\wedge((p,q)=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)).$$

2: Aus 1.2"$\ldots(p,q)=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)$" und
aus 1.1"$(p,q)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p=\{\Phi\}\cup\Psi)\wedge(q=\Gamma)$.

3: Aus 2"$\ldots q=\Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega,\Phi),q)=((\Omega,\Phi),\Gamma)$.

4: Aus 3 und
aus 1.2"$\ldots((\Omega,\Phi),\Gamma)\in y\ldots$"
folgt: $((\Omega,\Phi),q)\in y$.

5: Aus 1.2"$\exists\Omega,\Phi,\Psi\ldots$",
aus 1.2"$\ldots(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\ldots$",
aus 4 und
aus 2"$p=\{\Phi\}\cup\Psi\ldots$"
folgt:
$$\exists\Omega,\Phi,\Psi:(\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\Phi),q)\in y)\wedge(p=\{\Phi\}\cup\Psi).$$

<u>Beweis **337-2**</u> `b) VS` gleich $(p \notin E) \wedge ((E, a) \in x) \wedge (((a, p), b) \in y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$"
folgt: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi = p) \wedge (\Psi = E)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((a, p), b) \in y$"
folgt: $\exists \Omega, \Gamma : (\Omega = a) \wedge (\Gamma = b)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots (E, a) \in x \ldots$"
folgt via **9-15**: $E$ Menge.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((a, p), b) \in y$"
folgt via **9-15**: $b$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots (\Phi = p) \wedge (\Psi = E)$" und
aus `VS` gleich "$p \notin E \ldots$"
folgt: $\Phi \notin \Psi$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi = E$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega = a \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (E, a)$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega = a \ldots$" und
aus `1.1`"$\ldots \Phi = p \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (a, p)$.

`2.4:` Aus `1.3`"$E$ Menge"
folgt via **2-28**: $\{p\} \cup E$ Menge.

`2.5:` Aus `1.1`"$\ldots (\Phi = p) \wedge (\Psi = E)$"
folgt: $\{\Phi\} \cup \Psi = \{p\} \cup E$.

...

<u>Beweis</u> **337-2** `b)` `VS` gleich $(p \notin E) \wedge ((E, a) \in x) \wedge (((a, p), b) \in y)$.

...

`3.1:` Aus `2.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots (E, a) \in x \ldots$"
folgt: $(\Psi, \Omega) \in x$.

`3.2:` Aus `2.3`"$(\Omega, \Phi) = (a, p)$" und
aus `1.2`"$\ldots \Gamma = b$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Gamma) = ((a, p), b)$.

`3.3:` Aus `2.4`"$\{p\} \cup E$ Menge" und
aus `1.4`"$b$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{p\} \cup E, b)$ Menge.

`3.4:` Aus `2.5`"$\{\Phi\} \cup \Psi = \{p\} \cup E$" und
aus `1.2`"$\ldots \Gamma = b$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) = (\{p\} \cup E, b)$.

`4.1:` Aus `3.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots ((a, p), b) \in y$"
folgt: $((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y$.

`4.2:` Aus `3.4`
folgt: $(\{p\} \cup E, b) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$.

`5:` Aus `1.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.1`"$\exists \Phi, \Psi \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \ldots \Gamma$",
aus `2.1`"$\Phi \notin \Psi$",
aus `3.1`"$(\Psi, \Omega) \in x$",
aus `4.1`"$((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y$",
aus `4.2`"$(\{p\} \cup E, b) = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus `3.3`"$(\{p\} \cup E, b)$ Menge"
folgt via **337-1(Def)**: $(\{p\} \cup E, b) \in \mathsf{337.0}(x, y)$.

Beweis **337-2** `c)`

`Thema1` $\alpha \in 337.0(x,y)$ .

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in 337.0(x,y)$ "
folgt via **337-1(Def)**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)).$$

`3.1:` Aus 2"$\ldots (\Psi, \Omega) \in x \ldots$"
folgt via **9-15**: $\Psi$ Menge.

`3.2:` Aus 2"$\ldots ((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y$"
folgt via **9-15**: $\Gamma$ Menge.

`4:` Aus `3.1`"$\Psi$ Menge"
folgt via **2-28**: $\{\Phi\} \cup \Psi$ Menge.

`5:` Aus 4"$\{\Phi\} \cup \Psi$ Menge" und
aus `3.2`"$\Gamma$ Menge"
folgt via **6-8**: $(\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`6:` Aus 2"$\ldots \alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$" und
aus 5
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 337.0(x,y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $337.0(x,y) \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Konsequenz via **10-1(Def)**: $337.0(x,y)$ Relation.

$\square$

**337-3.** Nun wird rekursiv vorgegangen.

**337-3(Definition)**

"$R$ **ist ana1 von** $q, x$" genau dann, wenn gilt:

1) $R$ Funktion.

2) $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

3) $R(0) = \{(0, q)\}$.

4) $\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), x))$.

---

$$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

RECH-**Notation**.

**337-4.** Ist $R$ **ana1** von $q, x$, dann gilt $0 \neq \mathsf{dom}\, R$.

**337-4(Satz)**

a) $\{(0, \{(0, q)\})\}$ *ist* **ana1** *von* $q, x$.

b) *Aus "$q$ Menge" folgt "$[[q]]$ ist* **ana1** *von* $q, x$".

c) *Aus "$R$ ist* **ana1** *von* $q, x$"
*folgt "$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und "$0 \neq \mathsf{dom}\, R$" und "$R$ Menge".*

d) *Aus "$q$ Unmenge" und "$R$ ist* **ana1** *von* $q, x$" *folgt "$R(0) = 0$".*

Beweis **337-4**

---

$337.0(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$
RECH-**Notation**.

---

a)

1: Via **259-36** gilt: $\{(0, \{(0, q)\})\}$ Funktion.

2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0, q)\}$ Menge.

3.1: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus 2 "$\{(0, q)\}$ Menge"
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\}) = \{0\}$.

3.2: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus 2 "$\{(0, q)\}$ Menge"
folgt via **259-37**: $(\{(0, \{(0, q)\})\})(0) = \{(0, q)\}$.

4: Aus **95-1(Def)** "$1 = \{0\}$" und
aus 3.1
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\}) = 1$.

5: Aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

...

Beweis **337-4** `a)` ...

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema7}}$ | $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\})$. |
| `8.1`: Aus `Thema7` "$\alpha \ldots \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\})$" und aus `3.1` folgt: | $\alpha \in \{0\}$. |
| `8.2`: Aus `Thema7` "$\ldots 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\})$" und aus `4` folgt: | $1+\alpha \in 1$. |
| `9`: Aus `8.1` "$\alpha \in \{0\}$" folgt via **folk**: | $\alpha = 0$. |
| `10`: Aus `9` "$\alpha = 0$" und aus +**schola** "$1+0=1$" folgt: | $1+\alpha = 1$. |
| `11`: Aus `10` und aus `8.2` folgt: | $1 \in 1$. |
| `12`: Aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{N}$" folgt via **197-4**: | $1 \notin 1$. |

Ergo `Thema7`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}))$
$\Rightarrow ((\{(0,\{(0,q)\})\})(1+\alpha) = \mathsf{337.0}((\{(0,\{(0,q)\})\})(\alpha), x))$"

`8`: Aus `1` "$\{(0,\{(0,q)\})\}$ Funktion",
aus `6` "$\mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `3.2` "$(\{(0,\{(0,q)\})\})(0) = \{(0,q)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{(0,q)\})\}))$
$\Rightarrow ((\{(0,\{(0,q)\})\})(1+\alpha) = \mathsf{337.0}((\{(0,\{(0,q)\})\})(\alpha), x))$"
folgt via **337-3(Def)**: $\{(0,\{(0,q)\})\}$ ist **ana1** von $q, x$.

<u>Beweis **337-4**</u> `b)` `VS` gleich $q$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$q$ Menge"
folgt: $[q] = \{(0, q)\}$.

`1.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0, q)\}$ Menge.

`2:` Aus `1.2`"$\{(0, q)\}$ Menge"
folgt: $[\{(0, q)\}] = \{(0, \{(0, q)\})\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1`
folgt: $[[q]] = \{(0, \{(0, q)\})\}$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana1** von $q, x$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`
folgt: $[[q]]$ ist **ana1** von $q, x$.

`c)` `VS` gleich $R$ ist **ana1** von $q, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: ($R$ Funnktion)
$\wedge((\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\})$.

`2.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0, q)\}$ Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{dom}\, R$ Menge.

`3:` Aus `1`"$\ldots R(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `2.1`
folgt: $R(0)$ Menge.

`4.1:` Aus `3`"$R(0)$ Menge"

folgt via **17-5**: $\boxed{0 \in \mathsf{dom}\, R}$

`4.2:` Aus `1`"$R$ Funktion…" und
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\, R$ Menge"

folgt via **folk**: $\boxed{R \text{ Menge}}$

`5:` Aus `4.1`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$"

folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq \mathsf{dom}\, R}$

<u>Beweis</u> **337-4** `d)` `VS` gleich $(q \text{ Unmenge}) \wedge (R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q$ Unmenge…"
folgt via **92-3**: $(0, q)$ Unmenge.

`2:` Aus `1` "$(0, q)$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(0, q)\} = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "…$R$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $R(0) = 0$.

$\square$

**337-5.** Unter nicht unüblichen Zusatzbedingungen an $y, E$ ist eine vereinfachte Version von **IS$\mathbb{Z}$(170-3)** verfügbar.

**337-5(Satz)** *Es gelte:*

→) $x \in \mathbb{Z} \cap E$.

→) $y \in \mathbb{S}$.

→) $E \subseteq \mathbb{S}$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$.

*Dann folgt* "$\{x, \ldots, y\} \subseteq E$".

---

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **337-5**</u>

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\beta \in E$.

1: Aus Thema0 "$\beta \in E$" und
aus →) "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1 "$\beta \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(\beta < y) \vee (y \leq \beta)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\beta < y$.

Aus Thema0 "$\beta \in E$",
aus 2.1.Fall "$\beta < y$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$"
folgt: $1 + \beta \in E$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $y \leq \beta$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ : In beiden Fällen gilt:
$(1 + \beta \in E) \vee (y \leq \beta)$.

Ergo Thema0: A1 | "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((1 + \beta \in E) \vee (y \leq \beta))$"

1: Aus →) "$x \in \mathbb{Z} \cap E$" und
aus A1 gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((1 + \beta \in E) \vee (y \leq \beta))$"
folgt via **IS$\mathbb{Z}$**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq E$.

□

**337-6.** Unter nicht unüblichen Zusatzbedingungen an $x, E$ ist eine vereinfachte Version von **IS$\mathbb{Z}$(170-3)** verfügbar.

**337-6(Satz)** *Es gelte:*

→) $x \in \mathbb{S}$.

→) $y \in \mathbb{Z} \cap E$.

→) $E \subseteq \mathbb{S}$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (x < \alpha)) \Rightarrow (-1 + \alpha \in E)$.

*Dann folgt "$\{x, \dots, y\} \subseteq E$".*

---

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **337-6**

`Thema0` $\beta \in E.$

1: Aus `Thema0`"$\beta \in E$" und
aus →) "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathbb{S}.$

2: Aus `1`"$\beta \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(\beta \le x) \vee (x < \beta).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta \le x.$

`2.2.Fall` $x < \beta.$

Aus `Thema0`"$\beta \in E$",
aus `2.2.Fall`"$x < \beta$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (x < \alpha)) \Rightarrow (-1 + \alpha \in E)$"
folgt: $-1 + \beta \in E.$

`Ende Fallunterscheidung` : In beiden Fällen gilt:
$(-1 + \beta \in E) \vee (\beta \le x).$

Ergo `Thema0`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((-1 + \beta \in E) \vee (\beta \le x))$"

1: Aus →) "$y \in \mathbb{Z} \cap E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow ((-1 + \beta \in E) \vee (\beta \le x))$"
folgt via **IS$\mathbb{Z}$**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq E.$

□

**337-7.** Hier wird ein Pendant zu $\mathsf{305.0}(x,y)$ definiert.

**337-7(Definition)**

$$\mathsf{337.1}(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) = y(\omega))\}.$$

**337-8.** Fast von selbst versteht sich ein Kriterium für das "Element-Sein" in $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) = y(\omega))\}$.

**337-8(Satz)** *Die Aussgen* i), ii) *sind äquivalent:*

i) $p \in \mathsf{337.1}(x, y)$ .

ii) "$p \in \mathsf{dom}\, x$" *und* "$x(p) = y(p)$".

---

$\mathsf{337.1}(x, y) = \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) = y(\omega))\}$

Beweis **337-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $p \in \mathsf{337.1}(x, y)$ .

Aus VS gleich "$p \in \mathsf{337.1}(x, y)$"
folgt via **337-7(Def)**: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) = y(p))$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Leftarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) = y(p))$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

2: Aus VS gleich "$(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) = y(p))$" und
aus 1 "$p$ Menge"
folgt via **337-7(Def)**: $p \in \mathsf{337.1}(x, y)$ .

□

**337-9.** Der Umgang mit $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ wird nun vertieft.

<u>**337-9(Satz)**</u>

a) *Aus* "$0 \neq p \in \mathbb{N}$" *folgt* "$0 \in p$".

b) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq -1 + m$" *folgt* "$n \in m$".

c) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \notin m$" *folgt* "$m \leq n$".

d) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$n, 1 + n \in 1 + m$".

e) *Aus* "$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$n \in \mathbb{N}$".

f) *Aus* "$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *und* "$1 + n \notin p$" *folgt* "$p = 1 + n \in \mathbb{N}$".

g) *Aus* "$0 \neq p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$0 \in p$".

h) *Aus* "$p, q \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$(p \subseteq q) \vee (q \subseteq p)$"

---

<u>$\leq$.RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **337-9**</u> a) VS gleich $0 \neq p \in \mathbb{N}$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq p \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $1 \leq p$.

2: Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$",
aus VS gleich "$\ldots p \in \mathbb{N}$" und
aus 1"$1 \leq p$"
folgt via **197-6**: $1 \subseteq p$.

3: Aus **95-1(Def)**"$1 = \{0\}$" und
aus 2
folgt: $\{0\} \subseteq p$.

4: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus 3"$\{0\} \subseteq p$"
folgt via **213-2**: $0 \in p$.

Beweis **337-9** `b)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq -1+m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **237-6**: $m = \{0, \ldots, -1+m\}$.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots n \in \mathbb{Z}$",
aus `1.1`"$0 \leq n \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \leq -1+m$"
folgt via **169-2**: $n \in \{0, \ldots, -1+m\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2`
folgt: $n \in m$.

`c)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \notin m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n, m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$n, m \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(n < m) \vee (m \leq n)$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $n < m$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$n < m$"
folgt via **197-5**: $n \in m$.

`4:` Nach `VS` gilt: $n \notin m$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $m \leq n$.

<u>Beweis **337-9**</u> `d)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + m \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $m < 1 + m$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots n < m$"
folgt via **160-11**: $1 + n < 1 + m$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n < m$" und
aus `1.3`"$m < 1 + m$"
folgt via **folk**: $n < 1 + m$.

`2.2:` Aus `1.1`"$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `1.2`"$1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus `1.4`"$1 + n < 1 + m$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 + n \in 1 + m}$

`3:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1.2`"$1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus `2.1`"$n < 1 + m$"

folgt via **197-5**: $\boxed{n \in 1 + m}$

<u>Beweis **337-9**</u> `e)` `VS` gleich $n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(p = \mathbb{N}) \vee (p \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = \mathbb{N}$.

Aus `VS` gleich "$n \in p \ldots$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $p \in \mathbb{N}$.

Aus `VS` gleich "$n \in p \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$p \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $n \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **337-9**</u> `f)` `VS` gleich $(n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (1 + n \notin p)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **folk**: $(p = \mathbb{N}) \vee (p \in \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $\boxed{1 + n \in \mathbb{N}}$

`3:` Aus `2`"$1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \notin p$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{N} \neq p$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.1`
folgt: $p \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `1.2`"$n \in \mathbb{N}$",
aus `4`"$p \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$n \in p \ldots$"
folgt via **197-5**: $n < p$.

`6:` Aus `1.2`"$n \in \mathbb{N}$",
aus `4`"$p \in \mathbb{N}$" und
aus `5`"$n < p$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + n \leq p$.

`7:` Aus `2`"$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `4`"$p \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \notin p$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $p \leq 1 + n$.

`8:` Aus `7`"$p \leq 1 + n$" und
aus `6`"$1 + n \leq p$"
folgt via **folk**: $\boxed{p = 1 + n}$

Beweis **337-9** `g)` `VS` gleich $0 \neq p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **94-8**: $(p = \mathbb{N}) \vee (p \in \mathbb{N}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = \mathbb{N}.$

Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $0 \in p.$

`1.2.Fall` $p \in \mathbb{N}.$

Aus `VS` gleich "$0 \neq p \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$p \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \in p.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \in p.$

<u>Beweis **337-9**</u> `h)` `VS` gleich $p, q \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \ldots \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(p = \mathbb{N}) \vee (p \in \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(q = \mathbb{N}) \vee (q \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(p = q = \mathbb{N}) \vee (q \in \mathbb{N} = p) \vee (p \in \mathbb{N} = q) \vee (p, q \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $p = q = \mathbb{N}$.

Aus `2.1.Fall` "$p = q \ldots$"
folgt via **folk**: $p \subseteq q$.

`2.2.Fall` $q \in \mathbb{N} = p$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$q \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **197-4**: $q \subseteq \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2.Fall` "$\ldots \mathbb{N} = p$"
folgt: $q \subseteq p$.

`2.3.Fall` $p \in \mathbb{N} = q$.

`3:` Aus `2.3.Fall` "$p \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **197-4**: $p \subseteq \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.3.Fall` "$\ldots \mathbb{N} = q$"
folgt: $p \subseteq q$.

`2.4.Fall` $p, q \in \mathbb{N}$.

Aus `2.4.Fall` "$p, q \in \mathbb{N}$"
folgt via **305-7**: $(p \subseteq q) \vee (q \subseteq p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(p \subseteq q) \vee (q \subseteq p)$.

□

**337-10.** Durch einen kleinen Kunstgriff kann **337-5** näher an die hier benötigte Form gebracht werden.

**337-10(Satz)** *Es gelte:*

→) $x \in \mathbb{Z} \cap E$.

→) $y \in \mathbb{S}$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$".

*Dann folgt* "$\{x, \ldots, y\} \subseteq E$".

---

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **337-10**</u>

`1.1:` Via **2-19** gilt: $\mathbb{Z} \cap (\mathbb{Z} \cap E) = \mathbb{Z} \cap E.$

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y).$
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y)$" und
> aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\alpha < y)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$"
> folgt: $1 + \beta \in E.$
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in \mathbb{Z} \cap E \ldots$"
> folgt via **folk**: $\beta \in \mathbb{Z}.$
>
> `3:` Aus ∈**schola**"$1 \in \mathbb{Z}$" und
> aus `2.2`"$\beta \in \mathbb{Z}$"
> folgt via **164-9**: $1 + \beta \in \mathbb{Z}.$
>
> `4:` Aus `3`"$1 + \beta \in \mathbb{Z}$" und
> aus `2.1`"$1 + \beta \in E$"
> folgt via **folk**: $1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap E.$

Ergo `Thema1.2`: | `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap E)$" |

`1.3:` Via **folk** gilt: $\mathbb{Z} \cap E \subseteq \mathbb{Z}.$

`2.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{Z} \cap E$" und
aus `1.1`
folgt: $x \in \mathbb{Z} \cap (\mathbb{Z} \cap E).$

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathbb{Z} \cap E \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $\mathbb{Z} \cap E \subseteq \mathbb{S}.$

`3:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{Z} \cap (\mathbb{Z} \cap E)$",
aus →) "$y \in \mathbb{S}$",
aus `2.2`"$\mathbb{Z} \cap E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap E)$"
folgt via **337-5**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z} \cap E.$

`4:` Via **folk** gilt: $\mathbb{Z} \cap E \subseteq E.$

`5:` Aus `3`"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z} \cap E$" und
aus `4`"$\mathbb{Z} \cap E \subseteq E$"
folgt via **folk**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq E.$

□

**337-11.** Gilt unter den Voraussetzungen von **337-10** zusätzlich $E \subseteq \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{Z}$, so kann der **LS**$\mathbb{Z}$ zum Einsatz kommen.

**337-11(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $x \in E \subseteq \mathbb{Z}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{Z}$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (1 + \alpha \leq y)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$.

*Dann folgt* "$\{x, \ldots, y\} \subseteq E$".

---

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **337-11**</u>

`1.1:` Aus →) "$\ldots E \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{Z} \cap E = E$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $y \in \mathbb{S}$.

| | |
|---|---|
| `Thema1.3` | $(\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y)$. |
| `2:` Aus `Thema1.3`"$\beta \in \mathbb{Z} \cap E \ldots$" folgt via **folk**: | $(\beta \in \mathbb{Z}) \wedge (\beta \in E)$. |
| `3:` Aus `2`"$\beta \in \mathbb{Z} \ldots$", aus →) "$y \in \mathbb{Z}$" und aus `Thema1.3`"$\ldots \beta < y$" folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: | $1 + \beta \leq y$. |
| `4:` Aus `2`"$\ldots \beta \in E$", aus `3`"$1 + \beta \leq y$" und aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (1 + \alpha \leq y)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$" folgt: | $1 + \beta \in E$. |

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (1 + \beta \in E)$"

`2:` Aus →) "$x \in E \ldots$" und
aus `1.1`
folgt: $x \in \mathbb{Z} \cap E$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{Z} \cap E$",
aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\beta < y)) \Rightarrow (1 + \beta \in E)$"
folgt via **337-10**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq E$.

□

**337-12.** Ein Spezialfall von **337-11** liegt vor, wenn $y = -1 + n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt.

**337-12(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $0 \in E$.

$\rightarrow)$ $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (1 + \alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$.

*Dann folgt "$n \subseteq E$".*

---

RECH-**Notation**.

Beweis **337-12**

---

**$\leq$-Notation**.

---

`1.1:` Aus →) “$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus ∈**schola**“$0 \in \mathbb{N}$” und
aus →) “$0 \in E$”
folgt via **folk**: $0 \in \mathbb{N} \cap E$.

`Thema1.3` $(\beta \in \mathbb{N} \cap E) \wedge (1 + \beta \leq -1 + n)$.

`2:` Aus `Thema1.3`“$\beta \in \mathbb{N} \cap E \ldots$”
folgt via **folk**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in E)$.

`3:` Aus `2`“$\beta \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`“$1 + \beta \in \mathbb{N}$”,
aus →) “$n \in \mathbb{N}$” und
aus `Thema1.3`“$\ldots 1 + \beta \leq -1 + n$”
folgt via **337-9**: $1 + \beta \in n$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \beta \in E$”,
aus `4`“$1 + \beta \in n$” und
aus →) “$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (1 + \alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$”
folgt: $1 + \beta \in E$.

`6:` Aus `3`“$1 + \beta \in \mathbb{N}$” und
aus `5`“$1 + \beta \in E$”
folgt via **folk**: $1 + \beta \in \mathbb{N} \cap E$.

Ergo `Thema1.3`:

| `A1` | “$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N} \cap E) \wedge (1 + \beta \leq -1 + n)) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{N} \cap E)$” |
|---|---|

...

Beweis **337-12** . . .

`1.4`: Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \cap E \subseteq \mathbb{N}$.

`2.1`: Aus `1.4`"$\mathbb{N} \cap E \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \cap E \subseteq \mathbb{Z}$.

`2.2`: Aus $\in$**schola**"$-1 \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.1`"$n \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $-1 + n \in \mathbb{Z}$.

`3`: Aus `1.2`"$0 \in \mathbb{N} \cap E$",
aus `2.1`"$\mathbb{N} \cap E \subseteq \mathbb{Z}$",
aus `2.2`"$-1 + n \in \mathbb{Z}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in \mathbb{N} \cap E) \wedge (1 + \beta \leq -1 + n)) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{N} \cap E)$"
folgt via **337-11**: $\{0, \ldots, -1 + n\} \subseteq \mathbb{N} \cap E$.

`4`: Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \cap E \subseteq E$.

`5`: Aus `3`"$\{0, \ldots, -1 + n\} \subseteq \mathbb{N} \cap E$" und
aus `4`"$\mathbb{N} \cap E \subseteq E$"
folgt via **folk**: $\{0, \ldots, -1 + n\} \subseteq E$.

`6`: Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **237-6**: $n = \{0, \ldots, -1 + n\}$.

`7`: Aus `6` und
aus `5`
folgt: $n \subseteq E$.

□

**337-13.** Gilt $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{337.1}(f,g)$ für Funktionen $f, g$, so folgt $f \subseteq g$.

<u>**337-13(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) $f, g$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{337.1}(f,g)$ .

*Dann folgt* "$f \subseteq g$".

---

$\mathsf{337.1}(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) = y(\omega))\}$

<u>Beweis **337-13**</u>

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.

1: Aus Thema0 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{337.1}(f,g)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{337.1}(f,g)$ .

2: Aus 1 "$\alpha \in \mathsf{337.1}(f,g)$"
folgt via **337-8**: $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Ergo Thema0: A1 | "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) = g(\beta))$"

1: Aus $\rightarrow$) "$f, g$ Funktion" und
aus A1 gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) = g(\beta))$"
folgt via **18-43**. $f \subseteq g$.

□

**337-14.** Sind $f, g$ Funktionen und gilt $0 \neq \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$, so gibt es "induktive Bedingungen", die $f \subseteq g$ garantieren.

**337-14(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow$) $f, g$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $0 \neq \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

$\rightarrow$) $f(0) = g(0)$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha))) \Rightarrow (f(1 + \alpha) = g(1 + \alpha))$.

*Dann folgt "$f \subseteq g$".*

---

`RECH`-**Notation**.

Beweis **337-14**

---

$$337.1(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathrm{dom}\, x) \wedge (x(\omega) = y(\omega))\}$$

---

1.1: Aus →) “$0 \neq \mathrm{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **337-9**: $0 \in \mathrm{dom}\, f$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in 337.1(f,g)) \wedge (1+\beta \in \mathrm{dom}\, f)$.
>
> 2: Aus Thema1.2 “$\beta \in 337.1(f,g) \ldots$”
> folgt via **337-8**: $(\beta \in \mathrm{dom}\, f) \wedge (f(\beta) = g(\beta))$.
>
> 3: Aus 2 “$\beta \in \mathrm{dom}\, f$”,
> aus Thema1.2 “$\ldots 1+\beta \in \mathrm{dom}\, f$”,
> aus 2 “$\ldots f(\beta) = g(\beta)$” und
> aus →) “$\forall \alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathrm{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha))) \Rightarrow (f(1+\alpha) = g(1+\alpha))$”
> folgt: $f(1+\beta) = g(1+\beta)$.
>
> 4: Aus Thema1.2 “$\ldots 1+\beta \in \mathrm{dom}\, f$” und
> aus 3 “$f(1+\beta) = g(1+beta)$”
> folgt via **337-8**: $1+\beta \in 337.1(f,g)$.

Ergo Thema1.2:

| | |
|---|---|
| A1 | “$\forall \beta : ((\beta \in 337.1(f,g)) \wedge (1+\beta \in \mathrm{dom}\, f)) \Rightarrow (1+\beta \in 337.1(f,g))$” |

2: Aus 1.1 “$0 \in \mathrm{dom}\, f$” und
aus →) “$f(0) = g(0)$”
folgt via **337-8**: $0 \in 337.1(f,g)$.

3: Aus 2 “$0 \in 337.1(f,g)$”,
aus →) “$\ldots \mathrm{dom}\, f \in \mathbb{N}$” und
aus A1 gleich “$\forall \beta : ((\beta \in 337.1(f,g)) \wedge (1+\beta \in \mathrm{dom}\, f)) \Rightarrow (1+\beta \in 337.1(f,g))$”
folgt via **337-12**: $\mathrm{dom}\, f \subseteq 337.1(f,g)$.

4: Aus →) “$f, g$ Funktion” und
aus 3 “$\mathrm{dom}\, f \subseteq 337.1(f,g)$”
folgt via **337-13**: $f \subseteq g$.

□

**337-15.** Ein zu **337-14** analoges Resultat ist auch im Fall $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$ verfügbar.

**337-15(Satz)** *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $f, g$ *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

$\rightarrow\!)$ $f(0) = g(0)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha))) \Rightarrow (f(1+\alpha) = g(1+\alpha))$.

*Dann folgt "$f \subseteq g$".*

---

RECH-**Notation**.

Beweis **337-15**

---

$\mathsf{337.1}(x, y) = \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) = y(\omega))\}$

---

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$"
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\, f$.

...

Beweis **337-15** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap 337.1(f,g)$.

2: Aus Thema1.2 "$\beta \in \mathbb{N} \cap 337.1(f,g)$"
folgt via **folk**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in 337.1(f,g))$.

3.1: Aus 2 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

3.2: Aus 2 "$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

3.3: Aus 2 "$\ldots \beta \in 337.1(f,g)$"
folgt via **337-8**: $f(\beta) = g(\beta)$.

4: Aus 3.2 und
aus →) "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $1 + \beta \in \mathsf{dom}\, f$.

5: Aus 3.1 "$\beta \in \mathsf{dom}\, f$",
aus 4 "$1 + \beta \in \mathsf{dom}\, f$",
aus 3.3 "$f(\beta) = g(\beta)$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha)))$
$\Rightarrow (f(1+\alpha) = g(1+\alpha))$"
folgt: $f(1+\beta) = g(1+\beta)$.

6: Aus 4 "$1 + \beta \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 5 "$f(1+\beta) = g(1+\beta)$"
folgt via **337-8**: $1 + \beta \in 337.1(f,g)$.

Ergo Thema1.2: | A1 | "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap 337.1(f,g)) \Rightarrow (1 + \beta \in 337.1(f,g))$" |

2: Aus 1.1 "$0 \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$f(0) = g(0)$"
folgt via **337-8**: $0 \in 337.1(f,g)$.

3: Aus 2 "$0 \in 337.1(f,g)$" und
aus A1 gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap 337.1(f,g)) \Rightarrow (1 + \beta \in 337.1(f,g))$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq 337.1(f,g)$.

...

<u>Beweis</u> **337-15** ...

4: Aus →) " $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \ldots$ " und
aus 3
folgt: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{337.1}(f, g)$ .

5: Aus →) " $f, g$ Funktion " und
aus 4 " $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{337.1}(f, g)$ "
folgt via **337-13**: $f \subseteq g$.

□

**337-16.** Sätze **337-14,15** können gut zusammen gefasst werden.

**337-16(Satz)** *Es gelte:*

→) $f, g$ *Funktion.*

→) $\mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

→) $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

→) $f(0) = g(0)$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha))) \Rightarrow (f(1+\alpha) = g(1+\alpha))$.

*Dann folgt* "$f \subseteq g$".

---

`RECH`-**Notation**.

Beweis **337-16**

1: Aus →) "$\mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $(\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

Aus →) "$f, g$ Funktion",
aus `1.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$",
aus →) "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$",
aus →) "$f(0) = g(0)$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha))) \Rightarrow (f(1+\alpha) = g(1+\alpha))$"
folgt via **337-15**: $f \subseteq g$.

...

Beweis **337-16** ...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

2: Es gilt: $(\mathsf{dom}\, f = 0) \vee (0 \neq \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathsf{dom}\, f = 0$.

3: Aus →) "$f$ ... Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: $f$ Relation.

4: Aus 3 "$f$ Relation" und
aus `2.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, f = 0$"
folgt via **92-5**: $f = 0$.

5: Via **folk** gilt: $0 \subseteq g$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $f \subseteq g$.

`2.2.Fall` $0 \neq \mathsf{dom}\, f$.

Aus →) "$f, g$ Funktion",
aus `2.2.Fall` "$0 \neq \mathsf{dom}\, f$",
aus `1.2.Fall` "$\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$",
aus →) "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$",
aus →) "$f(0) = g(0)$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = g(\alpha)))$
$\Rightarrow (f(1 + \alpha) = g(1 + \alpha))$"
folgt via **337-14**: $f \subseteq g$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \subseteq g$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f \subseteq g$.

□

**337-17.** Sind $R, S$ **ana1** von $q, x$ und gilt $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$, so folgt $R \subseteq S$.

> **337-17(Satz)** *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) $R, S$ *ist* **ana1** *von* $q, x$.
>
> $\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$.
>
> *Dann folgt "$R \subseteq S$".*

Beweis **337-17**

---

$337.0(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$
RECH-**Notation**.

---

1.1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$
$\wedge(R(0) = \{(0, q)\})$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = 337.0(R(\alpha), x))))$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$S$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: $(S \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$
$\wedge(S(0) = \{(0, q)\})$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, S) \Rightarrow (S(1 + \alpha) = 337.0(S(\alpha), x))))$.

2.1: Aus 1.1 "$\ldots R(0) = \{(0, q)\} \ldots$" und
aus 1.2 "$\ldots S(0) = \{(0, q)\} \ldots$"
folgt: $R(0) = S(0)$.

...

<u>Beweis</u> **<u>337-17</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta))$.

`3.1:` Aus `Thema2.2`"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R\ldots$" und
aus `1.1`"$\ldots\forall\alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
$\Rightarrow (R(1+\alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), x)))$"
folgt: $R(1+\beta) = \mathsf{337.0}(R(\beta), x)$.

`3.2:` Aus `Thema2.2`"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R\ldots$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$"
folgt via **folk**: $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, S$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `Thema2.`"2"$\ldots R(\beta) = S(\beta)$
folgt: $R(1+\beta) = \mathsf{337.0}(S(\beta), x)$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, S$" und
aus `1.2`"$\ldots\forall\alpha : ((\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, S)$
$\Rightarrow (S(1+\alpha) = \mathsf{337.0}(S(\alpha), x)))$"
folgt: $S(1+\beta) = \mathsf{337.0}(S(\beta), x)$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $R(1+\beta) = S(1+\beta)$.

Ergo `Thema2.2`:

| `A1` | "$\forall\beta : ((\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta))) \Rightarrow (R(1+\beta) = S(1+\beta))$" |
|---|---|

`3:` Aus `1.1`"$R$ Funktion...",
aus `1.2`"$S$ Funktion...",
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}\ldots$",
aus →) "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$",
aus `2.1`"$R(0) = S(0)$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : ((\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta)))$
$\Rightarrow (R(1+\beta) = S(1+\beta))$"
folgt via **337-16**:

$R \subseteq S$.

□

**337-18.** Nicht nur aus technischen Gründen seien alle $R$, die **ana1** von $q, x$ sind, zu einer eigenen Klasse zusammen gefasst.

**337-18(Definition)**

$$\mathsf{337.2}(q, x) = \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}.$$

**337-19.** Da jede Klasse, die **ana1** von $q, x$ ist, eine Menge ist, ist das Erfüllt-Sein der definierenden Eigenschaft von $\mathsf{337.2}(q, x)$ notwendig und hinreichend für die Zugehörigkeit zu dieser Klasse.

**337-19(Satz)** *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *$R$ ist* **ana1** *von $q, x$.*

`ii)` $R \in \{\omega : \omega$ *ist* **ana1** *von* $q, x\}$.

---

$\mathsf{337.2}(q, x) = \{\omega : \omega$ *ist* **ana1** *von* $q, x\}$

Beweis **337-19** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $R$ ist **ana1** von $q, x$.

`1`: Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-4**: $R$ Menge.

`2`: Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus `1` "$R$ Menge"
folgt: $R \in \{\omega : \omega$ ist **ana1** von $q, x\}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $R \in \{\omega : \omega$ ist **ana1** von $q, x\}$.

Aus `VS` gleich "$R \in \{\omega : \omega$ ist **ana1** von $q, x\}$"
folgt: $R$ ist **ana1** von $q, x$.

$\square$

**337-20.** In den mir momentan gegenwärtigen Resultaten ist die naheliegende Beschreibung von sse_Ketten nicht enthalten.

**337-20(Satz)** *Die Aussagen* i), ii) *sind äquivalent:*

i) $K$ *ist* sse_*Kette.*

ii) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Beweis **337-20**

sse-**Notation**.

i) $\Rightarrow$ ii) VS gleich $K$ ist sse_Kette.

Thema0 $\alpha, \beta \in K$.

1: Aus Thema0 "$\alpha, \beta \in K$" und
aus VS gleich "$K$ ist sse_Kette"
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha \text{ sse } \beta) \vee (\beta \text{ sse } \alpha)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\alpha \text{ sse } \beta$.

Aus 1.1.Fall "$\alpha \text{ sse } \beta$"
folgt via **61-4**: $\alpha \subseteq \beta$.

1.2.Fall $\beta \text{ sse } \alpha$.

Aus 1.2.Fall "$\beta \text{ sse } \alpha$"
folgt via **61-4**: $\beta \subseteq \alpha$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Beweis **337-20** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\gamma,\delta \in K$.

1: Aus `Thema0`"$\gamma,\delta \in K$"
folgt via **ElementAxiom**: $\gamma,\delta$ Menge.

2: Aus `Thema0`"$\gamma,\delta \in K$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt: $(\gamma \subseteq \delta) \vee (\delta \subseteq \gamma)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $\gamma \subseteq \delta$.

Aus `2.1.Fall`"$\gamma \subseteq \delta$" und
aus 1"$\gamma,\delta$ Menge"
folgt via **61-4**: $\gamma$ sse $\delta$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $\delta \subseteq \gamma$.

Aus `2.2.Fall`"$\delta \subseteq \gamma$",
aus 1"$\ldots\delta$ Menge" und
aus 1"$\gamma\ldots$ Menge"
folgt via **61-4**: $\delta$ sse $\gamma$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(\gamma$ sse $\delta) \vee (\delta$ sse $\gamma)$.

Ergo `Thema0`: $\forall\gamma,\delta : (\gamma,\delta \in K) \Rightarrow ((\gamma$ sse $\delta) \vee (\delta$ sse $\gamma))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: $K$ ist sse_Kette.

□

**337-21.** Wenn schon der Begriff "sse_Kette" vorhanden ist, kann er getrost eingesetzt werden.

<u>**337-21(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $K$ *ist* sse_*Kette.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha\ \mathit{Funktion})$.

*Dann folgt* "$\bigcup K$ *Funktion*".

<u>Beweis **337-21**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$K$ ist sse_Kette"
folgt via **337-20**: $\forall\alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in K) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$" und
aus 1 "$\forall\alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup K$ Funktion.

$\square$

**337-22.** Die Klasse aller $R$, die **ana1** von $q, x$ mit dom $N$ sind, ist eine sse_Kette.

**337-22(Satz)**

a) *Aus* "$R, S$ *ist* **ana1** *von* $q, x$" *folgt* "$(R \subseteq S) \vee (S \subseteq R)$".

b) $\{\omega : \omega$ *ist* **ana1** *von* $q, x\}$ *ist* sse_*Kette.*

---

337.2$(q, x)$ $= \{\omega : \omega$ *ist* **ana1** *von* $q, x\}$

Beweis **337-22** a) VS gleich $R, S$ ist **ana1** von $q, x$.

1.1: Aus VS gleich "$R\ldots$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots S$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus 1.1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus 1.2"$\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S) \vee (\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R)$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$.
Aus VS gleich "$R, S$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus 2.1.Fall"$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$"
folgt via **337-17**: $R \subseteq S$.

2.2.Fall $\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$.
Aus VS gleich "$\ldots S$ ist **ana1** von $q, x$",
aus VS gleich "$R\ldots$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus 2.2.Fall"$\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-17**: $S \subseteq R$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(R \subseteq S) \vee (S \subseteq R)$.

b)

Thema0 $\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana1** von $q, x\}$.

1: Aus Thema0"$\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana1** von $q, x\}$"
folgt: $\alpha, \beta$ ist **ana1** von $q, x$.

2: Aus 1"$\alpha, \beta$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Konsequenz via **337-20**: $\{\omega : \omega$ ist **ana1** von $q, x\}$ ist sse_Kette.

□

**337-23.** $\texttt{rf1}qx$ ist die Vereinigung aller Mengen, die **ana1** von $q, x$ sind.

**337-23(Definition)**

$$\texttt{rf1}qx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}.$$

---

$\mathsf{337.2}(q, x) = \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}$

**337-24.** Passend zu der via **337-23(Def)** in den Blickwinkel gerückten Vereinigung sollen hier zwei Aussagen über $\mathsf{dom}\,(\bigcup x)$ getroffen werden.

**337-24(Satz)**

a) *Aus* "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup x)$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,\Omega)$".

b) *Aus* "$p, q \in \mathsf{dom}\,(\bigcup K)$" *und* "$K$ *ist* sse_*Kette*" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in K) \wedge (p, q \in \mathsf{dom}\,\Omega)$".

Beweis **337-24**

---

$\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$ **7-12(Def)**

---

a) VS gleich $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup x)$.

1: Via **7-16** gilt: $\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$.

2: Aus VS und aus 1 folgt: $p \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$.

3: Aus 2"$p \in \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$" folgt via **folk**: $\exists \Phi : p \in \Phi \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$.

4: Aus 3"$\ldots \Phi \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$" folgt via **7-13**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Phi = \mathsf{dom}\,\Omega)$.

5: Aus 3"$\ldots p \in \Phi \ldots$" und aus 4"$\ldots \Phi = \mathsf{dom}\,\Omega$" folgt: $p \in \mathsf{dom}\,\Omega$.

6: Aus 4"$\exists \Omega : (\Omega \in x) \ldots$" und aus 5 folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,\Omega)$.

Beweis **337-24** VS gleich $(p, q \in \mathsf{dom}\,(\bigcup K)) \wedge (K \text{ ist } \mathsf{sse\_Kette})$.

1.1: Aus VS gleich "$p \ldots \in \mathsf{dom}\,(\bigcup K) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\exists \Phi : (\Phi \in K) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,\Phi)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\,(\bigcup K) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\exists \Psi : (\Psi \in K) \wedge (q \in \mathsf{dom}\,\Psi)$.

2: Aus 1.1"$\ldots \Phi \in K \ldots$",
aus 1.2"$\ldots \Psi \in K \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots K$ ist sse_Kette"
folgt via **337-20**: $(\Phi \subseteq \Psi) \vee (\Psi \subseteq \Phi)$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $\Phi \subseteq \Psi$.

3: Aus 2.1"$\Phi \subseteq \Psi$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,\Phi \subseteq \mathsf{dom}\,\Psi$.

4: Aus 1.1"$\ldots p \in \mathsf{dom}\,\Phi$" und
aus 3"$\mathsf{dom}\,\Phi \subseteq \mathsf{dom}\,\Psi$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\,\Psi$.

5: Aus 1.2"$\exists \Psi : \Psi \in K \ldots$",
aus 4 und
aus 1.2"$\ldots q \in \mathsf{dom}\,\Psi$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in K) \wedge (p, q \in \mathsf{dom}\,\Psi)$.

2.2.Fall $\Psi \subseteq \Phi$.

3: Aus 2.1"$\Psi \subseteq \Phi$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,\Psi \subseteq \mathsf{dom}\,\Phi$.

4: Aus 1.2"$\ldots q \in \mathsf{dom}\,\Psi$" und
aus 3"$\mathsf{dom}\,\Psi \subseteq \mathsf{dom}\,\Phi$"
folgt via **0-4**: $q \in \mathsf{dom}\,\Phi$.

5: Aus 1.1"$\exists \Phi : \Phi \in K \ldots$",
aus 1.1"$\ldots p \in \mathsf{dom}\,\Phi$" und
aus 4
folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in K) \wedge (p, q \in \mathsf{dom}\,\Phi)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (p, q \in \mathsf{dom}\,\Omega)$.

□

**337-25.** $\texttt{rf1}qx$ ist **ana1** von $q, x$ mit dom $N$.

**337-25(Satz)**

a) $\texttt{rf1}qx$ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

c) *Aus "$R$ ist* **ana1** *von $q, x$" folgt "$R \subseteq \texttt{rf1}qx$".*

d) *Aus "$R$ ist* **ana1** *von $q, x$" und "$n \in \mathsf{dom}\,R$"*
*folgt "$R(n) = \texttt{rf1}qx(n)$".*

e) $\texttt{rf1}qx(0) = \{(0, q)\}$.

f) $\texttt{rf1}qx$ *ist* **ana1** *von $q, x$.*

Beweis **337-25**

---

$\mathsf{337.2}(q, x) = \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}$

$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$.

RECH-**Notation**.

---

<u>Beweis **337-25**</u> `a)`

| `Thema1.1` | $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$. |
|---|---|

`2`: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$"
folgt: $\alpha \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x$.

`3`: Aus `2`"$\alpha \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x$"
folgt via **337-3(Def)**: $\alpha$ Funktion.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$"

`1.2`: Via **337-22** gilt: $\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$ ist sse_Kette.

`2`: Aus `1.2`"$\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$ ist sse_Kette" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$"
folgt via **337-21**:
$\bigcup \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$ Funktion.

`3`: Via **337-23(Def)** gilt: $\mathtt{rf1}qx = \bigcup \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$.

`4`: Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

<u>Beweis **337-25**</u> `b)`

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ | $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$. |
| `2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$" folgt: | $\alpha$ ist **ana1** von $q, x$. |
| `3:` Aus `2` "$\alpha$ ist **ana1** von $q, x$" folgt via **337-3(Def)**: | $\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$. |

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"
folgt via **308-2**:

$$\mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$$

`2:` Aus `1.2` und
aus **337-23(Def)** "$\texttt{rf1}qx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`c)` `VS` gleich $R$ ist **ana1** von $q, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-19**: $R \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$.

`2:` Aus `1` "$R \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$"
folgt via **folk**: $R \subseteq \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$.

`3:` Via **337-23(Def)** gilt: $\texttt{rf1}qx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $R \subseteq \texttt{rf1}qx$.

Beweis **337-25** `d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $R \subseteq \mathtt{rf1}qx$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$",
aus `1.1`"$R \subseteq \mathtt{rf1}qx$" und
aus `1.2`"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion"
folgt via **308-6**: $R(n) = \mathtt{rf1}qx(n)$.

`e)`

`1:` Via **337-4** gilt: $\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana1** von $q, x$.

`2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0, q)\}$ Menge.

`3.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `2`"$\{(0, q)\}$ Menge"
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\}) = \{0\}$.

`3.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `2`"$\{(0, q)\}$ Menge"
folgt via **259-37**: $(\{(0, \{(0, q)\})\})(0) = \{(0, q)\}$.

`4:` Aus **1-5**"$0 \in \{0\}$" und
aus `3.1`
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\})$.

`5:` Aus `1`"$\{(0, \{(0, q)\})\}$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus `4`"$0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\{(0, \{(0, q)\})\})(0) = \mathtt{rf1}qx(0)$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.2`
folgt: $\mathtt{rf1}qx(0) = \{(0, q)\}$.

<u>Beweis **337-25** `f)`</u>

`Thema0` $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`1:` Via **337-23(Def)** gilt:
$\mathtt{rf1}qx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}$.

`2:` Aus `Thema0` und
aus `1`
folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\})$.

`3:` Via **337-22** gilt: $\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}$ ist $\mathsf{sse}$_Kette.

`4:` Aus `2`"$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\})$" und
aus `3`"$\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}$ ist $\mathsf{sse}$_Kette"
folgt via **337-24**: $\exists\Omega : (\Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\})$
$\wedge(\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega)$.

`5:` Aus `4`"$\ldots\Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana1} \text{ von } q, x\}\ldots$"
folgt: $\Omega$ ist **ana1** von $q, x$.

`6:` Aus `5`"$\Omega$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus `4`"$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via **337-3(Def)**: $\Omega(1+\alpha) = 337.0(\Omega(\alpha), x)$.

`7:` Aus `5`"$\Omega$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus `4`"$\ldots\alpha\ldots \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\Omega(\alpha) = \mathtt{rf1}qx(\alpha)$.

`8.1:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $\Omega(1+\alpha) = 337.0(\mathtt{rf1}qx(\alpha), x)$.

`8.2:` Aus `5`"$\Omega$ ist **ana1** von $q, x$" und
aus `4`"$\ldots 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$\Omega(1+\alpha) = \mathtt{rf1}qx(1+\alpha)$.

`9:` Aus `8.1` und
aus `8.2`
folgt: $\mathtt{rf1}qx(1+\alpha) = 337.0(\mathtt{rf1}qx(\alpha), x)$.

...

<u>Beweis</u> **337-25** `f)` ...

Ergo `Thema0`:

| | |
|---|---|
| `A1` | "$\forall\alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \Rightarrow (\mathtt{rf1}qx(1+\alpha) = 337.0(\mathtt{rf1}qx(\alpha), x))$" |

`1.1`: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{rf1}qx$ Funktion.

`1.2`: Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.3`: Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathtt{rf1}qx(0) = \{(0, q)\}$.

`2`: Aus `1.1`"$\mathtt{rf1}qx$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `1.3`"$\mathtt{rf1}qx(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)) \Rightarrow (\mathtt{rf1}qx(1+\alpha) = 337.0(\mathtt{rf1}qx(\alpha), x))$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von $q, x$.

□

**337-26.** Für jede Funktion $f$ gilt $f = \{(p, f(p))\} \cup f$ unabhängig davon, ob $p \in \mathsf{dom}\, f$ oder nicht.

**337-26(Satz)**

*Aus* "$f$ *Funktion*" *folgt* "$f = \{(p, f(p))\} \cup f$".

Beweis **337-26** `VS` gleich $f$ Funktion.

1: Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, f) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus `VS` gleich "$f$ Funktion" und
aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **folk**: $(p, f(p)) \in f$.

3: Aus 2 "$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **308-8**: $\{(p, f(p))\} \cup f = f$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus `1.2.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **folk**: $f(p)$ Unmenge.

3: Aus 2 "$f(p)$ Unmenge"
folgt via **92-3**: $(p, f(p))$ Unmenge.

4: Aus 3 "$(p, f(p))$ Unmenge"
folgt via **folk**: $\{(p, f(p))\} = 0$.

5: Via **folk** gilt: $0 \cup f = f$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $\{(p, f(p))\} \cup f = f$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{(p, f(p))\} \cup f = f$.

□

**337-27.** Es wird vorbereitet, dass in einigen interessanten Fällen $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathbb{N}$ gilt.

**337-27(Satz)**

a) *Aus* "$R$ *ist* **ana1** *von* $q, x$"
*und* "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
*und* "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$"
*und* "$\mathsf{337.0}(R(n), x)$ *Menge*"
*folgt* "$\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ *ist* **ana1** *von* $q, x$".

b) *Aus* "$R$ *ist* **ana1** *von* $q, x$"
*und* "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
*und* "$\mathsf{337.0}(R(n), x)$ *Menge*"
*folgt* "$\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ *ist* **ana1** *von* $q, x$".

c) *Aus* "$R$ *ist* **ana1** *von* $q, x$"
*und* "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
*und* "$\mathsf{337.0}(R(n), x)$ *Menge*"
*folgt* "$1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$".

---

$$\mathsf{337.0}(x, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \lambda), \eta) \in y))\}$$

RECH-**Notation**.

Beweis **337-27**

---

**≤-Notation**.

---

a)

VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (337.0(R(n), x) \text{ Menge})$.

1: Aus →) "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**:
$$(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1+\alpha) = 337.0(R(\alpha), x)))$$.

2.1: Aus 1 "$R$ Funktion…" und
aus VS gleich "$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **261-4**: $\{(1+n, 337.0(R(n), x))\} \cup R$ Funktion.

2.2: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

2.3: Aus VS gleich "$\ldots 337.0(R(n), x)$ Menge"
folgt via **309-2**: $\mathsf{dom}\,(\{(1+n, 337.0(R(n), x))\} \cup R) = \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

2.4: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus 1 "$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **337-9**: $\mathsf{dom}\, R = 1+n \in \mathbb{N}$.

3.1: Aus 2.4 "$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via A$\mathbb{N}$**Axiom**: $1+(1+n) = \{1+n\} \cup (1+n)$.

3.2: Aus 2.4 "$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1+(1+n) \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3.1 und
aus 2.4 "$\mathsf{dom}\, R = 1+n \ldots$"
folgt: $1+(1+n) = \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

5.1: Aus 4 und
aus 2.3
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(1+n, 337.0(R(n), x))\} \cup R) = 1+(1+n)$.

5.2: Aus 4 und
aus 3.2
folgt: $\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$.

…

<u>Beweis **337-27**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{337.0}(R(n), x) \text{ Menge})$.

...

`6:` Aus `5.2`“$\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`7:` Aus `6` und
aus `2.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`8:` Aus `2.2`“$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **307-2**: $0 \neq 1 + n$.

`9:` Aus `8`“$0 \neq 1 + n$”
folgt via **261-3**: $(\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(0) = R(0)$.

`10:` Aus `9` und
aus `1`“$\ldots R(0) = \{(0, q)\} \ldots$”
folgt: $(\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(0) = \{(0, q)\}$.

...

Beweis **337-27** `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(337.0(R(n), x) \text{ Menge})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema11}}$ $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, 337.0(R(n), x)\,)\} \cup R)$.

`12:` Aus `Thema11` und
aus `5.1`
folgt: $\beta, 1+\beta \in 1+(1+n)$.

`13.1:` Aus `12`"$\beta \ldots \in 1+(1+n)$" und
aus `3.2`"$1+(1+n) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $\beta \in \mathbb{N}$.

`13.2:` Aus `2.4`"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$" und
aus `12`"$\ldots 1+\beta \in 1+(1+n)$"
folgt via **237-7**: $\mathbb{N} \ni 1+\beta \leq 1+n$.

`13.3:` Aus `2.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $n < 1+n$.

`14:` Aus `14.2`"$\ldots 1+\beta \leq 1+n$"
folgt via **160-10**: $\beta \leq n$.

`15:` Aus `15`"$\beta \leq n$" und
aus `13.3`"$n < 1+n$"
folgt via **folk**: $\beta < 1+n$.

`16:` aus `15`"$\beta < 1+n$"
folgt via **41-3**: $\beta \neq 1+n$.

`17:` Aus `16`"$\beta \neq 1+n$"
folgt via **261-3**:
$(\{(1+n, 337.0(R(n), x)\,)\} \cup R)(\beta) = R(\beta)$.

`18:` Aus `14`"$\beta \leq n$"
folgt via **41-5**: $(\beta < n) \vee (\beta = n)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

Beweis **337-27** a)

VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q,x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\,R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\,R)$
$\wedge(337.0(R(n),x) \text{ Menge}).$

...

Thema11 $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, 337.0(R(n),x)\,)\} \cup R).$

...

Fallunterscheidung

18.1.Fall $\beta < n.$

19: Aus 13.1"$\beta \in \mathbb{N}$",
aus 2.2"$n \in \mathbb{N}$" und
aus 18.1.Fall"$\beta < n$"
folgt via **337-9**: $\beta, 1+\beta \in 1+n.$

20: Aus 19 und
aus 2.4"$\mathsf{dom}\,R = 1+n\ldots$"
folgt: $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,R.$

21: Aus 20"$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,R$" und
aus 1"$\forall\alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,R)$
$\Rightarrow (R(1+\alpha) = 337.0(R(\alpha),x)\,)$
folgt: $R(1+\beta) = 337.0(R(\beta),x)\,.$

22: Aus 18.1.Fall"$\beta < n$"
folgt via **160-11**: $1+\beta < 1+n.$

23: Aus 22"$1+\beta < 1+n$"
folgt via **41-3**: $1+\beta \neq 1+n.$

24: Aus 23"$1+\beta \neq 1+n$"
folgt via **261-3**:
$(\{(1+n, 337.0(R(n),x)\,)\} \cup R)(1+\beta)$
$= R(1+\beta).$

25: Aus 24 und
aus 21
folgt: $(\{(1+n, 337.0(R(n),x)\,)\}\} \cup R)(1+\beta)$
$= 337.0(R(\beta),x)\,.$

26: Aus 25 und
aus 17
folgt: $(\{(1+n, 337.0(R(n),x)\,)\}\} \cup R)(1+\beta)$
$= 337.0((\{(1+n, 337.0(R(n),x)\,)\}\} \cup R)(\beta),x)\,.$

...

...

<u>Beweis **337-27**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{337.0}(R(n), x) \text{ Menge}).$

...

`Thema11` $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`18.2.Fall` $\beta = n.$

`19:` Aus `2.4`“$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

`20:` Aus `VS` gleich “$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$”,
aus `19`“$1+n$ Menge” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{337.0}(R(n), x)$ Menge”
folgt via **261-3**:
$(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(1+n)$
$= \mathsf{337.0}(R(n), x)\,.$

`21:` Aus `20` und
aus `18.2.Fall`“$\beta = n$”
folgt: $(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(1+\beta)$
$= \mathsf{337.0}(R(\beta), x)\,.$

`22:` Aus `21` und
aus `17`
folgt: $(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\}\} \cup R)(1+\beta)$
$= \mathsf{337.0}((\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\}\} \cup R)(\beta), x)\,.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(1+\beta)$
$= \mathsf{337.0}((\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(\beta), x)\,.$

Ergo `Thema11`:

`A1` | “$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R))$
$\Rightarrow ((\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(1+\beta)$
$= \mathsf{337.0}((\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x)\,)\} \cup R)(\beta), x)\,)$”

<u>Beweis **337-27**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(\mathsf{337.0}(R(n), x) \text{ Menge}).$

...

`12:` Aus `2.1`“$\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ Funktion” ,
aus `5.1`“$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” ,
aus `10`“$(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R)(0) = \{(0, q)\}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R))$
$\Rightarrow (((\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R)(1+\beta)$
$= \mathsf{337.0}(\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R(\beta), x))$”
folgt via **337-3(Def)**:

$\{(1+n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ ist **ana1** von $q, x$.

<u>Beweis **337-27**</u> `b)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\mathsf{337.0}(R(n), x) \text{ Menge})$.

`1:` Es gilt: $(1 + n \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $R$ Funktion.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-3(Def)**: $R(1 + n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$.

`3.1:` Aus `2.1` "$R$ Funktion"
folgt via **337-26**: $\{(1 + n, R(1 + n))\} \cup R = R$.

`3.2:` Aus `2.2` "$R(1 + n) = \mathsf{337.0}(R(n), x)$"
folgt via **PaarAxiom I**:
$(1 + n, R(1 + n)) = (1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R = R$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt: $\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ ist **ana1** von $q, x$.

`1.2.Fall` $1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$.

Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{337.0}(R(n), x)$ Menge" und
aus `1.2.Fall` "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ ist **ana1** von $q, x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\{(1 + n, \mathsf{337.0}(R(n), x))\} \cup R$ ist **ana1** von $q, x$.

<u>Beweis</u> **337-27** `c)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (337.0(R(n), x) \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$"
folgt via **337-3(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$R$ ist **ana1** von $q, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 337.0(R(n), x)$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\{(1 + n, 337.0(R(n), x))\} \cup R$ ist **ana1** von $q, x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 337.0(R(n), x)$ Menge"
folgt via **309-2**: $\mathsf{dom}\,(\{(1 + n, 337.0(R(n), x))\} \cup R) = \{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1` "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.2` "$\{(1 + n, 337.0(R(n), x))\} \cup R$ ist **ana1** von $q, x$"
folgt via **337-25**:
$\{(1 + n, 337.0(R(n), x))\} \cup R \subseteq \mathtt{rf1}qx$.

`3.1:` Aus `2.2` "$\{(1 + n, 337.0(R(n), x))\} \cup R \subseteq \mathtt{rf1}qx$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,(\{(1 + n, 337.0(R(n), x))\} \cup R) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`3.2:` Aus `2.1` "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `1.3` und
aus `3.1`
folgt: $\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

`4.2:` Aus `3.2` "$1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + n$ Menge.

`5:` Aus `4.2` "$1 + n$ Menge"
folgt via **folk**: $1 + n \in \{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

`6:` Aus `5` "$1 + n \in \{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R$" und
aus `4.1` "$\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt via **0-4**: $1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

□

**337-28.** Die mögliche Eigenschaft von $\mathsf{337.0}(R(n),x)$, eine Menge zu sein, hat entsprechend **337-27** interessante Konsequenzen. Aber wann ist $\mathsf{337.0}(x,y)$ eine Menge? Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig.

**337-28(Satz)**

a) $x\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ y = \mathsf{cup}[x\times y]$.

b) *Aus "$x,y$ Menge" folgt "$x\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ y$ Menge".*

c) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x,y)) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$.

d) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{337.0}(x,y)) \subseteq \mathsf{ran}\,y$.

e) *Aus "$x,y$ Menge" folgt "$\mathsf{337.0}(x,y)$ Menge".*

---

$$\mathsf{337.0}(x,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu) \wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}.$$

<u>Beweis **337-28**</u> `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ y.$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ y$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Phi).$

`3.1:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\Omega$ Menge.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots \Phi \in y \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\Phi$ Menge.

`3.3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega, \Phi) \in x \times y.$

`4:` Aus `3.1` "$\Omega$ Menge" und
aus `3.2` "$\Phi$ Menge"
folgt via **298-3**: $((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi) \in \mathsf{cup}.$

`5:` Aus `4` "$((\Omega, \Phi), \Omega \cup \Phi) \in \mathsf{cup}$" und
aus `3.3` "$(\Omega, \Phi) \in x \times y$"
folgt via **folk**: $\Omega \cup \Phi \in \mathsf{cup}[x \times y].$

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = \Omega \cup \Phi$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \mathsf{cup}[x \times y].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ y) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{cup}[x \times y]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ y \subseteq \mathsf{cup}[x \times y]$"

...

Beweis **337-28** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathsf{cup}[x \times y]$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathsf{cup}[x \times y]$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in x \times y) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \mathsf{cup})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x \times y \ldots$”
folgt via **folk**: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi \in x) \wedge (\Psi \in y) \wedge (\Omega = (\Phi, \Psi))$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Omega = (\Phi, \Psi)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = ((\Phi, \Psi), \alpha)$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{cup}$”
folgt: $((\Phi, \Psi), \alpha) \in \mathsf{cup}$.

`6:` Aus `5`“$((\Phi, \Psi), \alpha) \in \mathsf{cup}$”
folgt via **298-3**: $\alpha = \Phi \cup \Psi$.

`7:` Aus `3`“$\ldots (\Phi \in x) \wedge (\Psi \in y) \ldots$”
folgt via **220-6**: $\Phi \cup \Psi \in x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $\alpha \in x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{cup}[x \times y]) \Rightarrow (\alpha \in x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{cup}[x \times y] \subseteq x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y \subseteq \mathsf{cup}[x \times y]$” und
aus `A2` gleich “$\mathsf{cup}[x \times y] \subseteq x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, y = \mathsf{cup}[x \times y]$.

<u>Beweis **337-28**</u> `b)` `VS` gleich $x, y$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y$ Menge"
folgt via **binär-cartesisches Axiom**: $x \times y$ Menge.

`2:` Aus **298-4**"`cup` Funktion" und
aus `1`"$x \times y$ Menge"
folgt via **FunktionsAxiom**: $\mathsf{cup}[x \times y]$ Menge.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} y = \mathsf{cup}[x \times y]$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $x \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} y$ Menge.

<u>Beweis **337-28**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(337.0(x,y)\,)$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(337.0(x,y)\,)$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\alpha, \Gamma) \in 337.0(x,y)$.

3: Aus 2 "$\ldots (\alpha, \Gamma) \in 337.0(x,y)$"
folgt via **337-2**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = \{\Phi\} \cup \Psi).$$

4.1: Aus 3 "$\ldots (\Psi, \Omega) \in x \ldots$"
folgt via **folk**: $\Psi \in \mathsf{dom}\, x$.

4.2: Aus 3 "$\ldots ((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega, \Phi) \in \mathsf{dom}\, y$.

5: Aus 4.2 "$(\Omega, \Phi) \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **folk**: $\Phi \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y)$.

6: Aus 5 "$\Phi \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y)$"
folgt via **27-3**: $\{\Phi\} \in (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}}$.

7: Aus 6 "$\{\Phi\} \in (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}}$" und
aus 4.1 "$\Psi \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **220-6**:
$$\{\Psi\} \cup \Phi \in (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}} \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathsf{dom}\, x.$$

8: Aus 3 "$\ldots \alpha = \{\Phi\} \cup \Psi$" und
aus 7
folgt: $\alpha \in (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}} \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathsf{dom}\, x$.

9: Via **220-7** gilt:
$$(\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}} \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathsf{dom}\, x = (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}}.$$

10: Aus 8 und
aus 9
folgt: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}}$.

Ergo Thema1:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(337.0(x,y)\,)) \Rightarrow (\alpha \in (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}}.$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:
$$\mathsf{dom}\,(337.0(x,y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, y))_{\text{sngltn}}.$$

Beweis **337-28** d)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(337.0(x,y)\,)$.

2: Aus Thema1 " $\alpha \in \mathsf{ran}\,(337.0(x,y)\,)$ "
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\Gamma, \alpha) \in 337.0(x,y)\,.$

3: Aus 2 " $\ldots (\Gamma, \alpha) \in 337.0(x,y)$ "
folgt via **337-2**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \alpha) \in y) \wedge (\Gamma = \{\Phi\} \cup \Psi).$$

4: Aus 3 " $\ldots ((\Omega, \Phi), \alpha) \in y \ldots$ "
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, y$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(337.0(x,y)\,)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(337.0(x,y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

Beweis **337-28** `e)` `VS` gleich $x, y$ Menge.

`1.1:` Via **337-2** gilt: $\mathsf{337.0}(x, y)$ Relation.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,y$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$x \ldots$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,x$ Menge.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,y, \mathsf{ran}\,y$ Menge.

`2.1:` Aus `1.5`"$\mathsf{dom}\,y \ldots$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,) \subseteq \mathsf{ran}\,y$" und
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{ran}\,y$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,)$ Menge.

`3:` Aus `2.1`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y)$ Menge"
folgt via **27-12**: $(\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$ Menge.

`4:` Aus `1.4`"$\mathsf{dom}\,x$ Menge" und
aus `3`"$(\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$ Menge.

`5:` Aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,) \subseteq (\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$" und
aus `4`"$(\mathsf{dom}\,x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,y))_{\mathrm{sngltn}}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,)$ Menge.

`6:` Aus `1.1`"$\mathsf{337.0}(x, y)$ Relation",
aus `4`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,)$ Menge" und
aus `2.3`"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{337.0}(x, y)\,)$ Menge"
folgt via **10-5**: $\mathsf{337.0}(x, y)$ Menge.

$\square$

**337-29.** Der Definitions-Bereich von $\mathtt{rf}1qx$ ist höchstens= $\mathbb{N}$. Er ist= $\mathbb{N}$, wenn $x$ eine Menge ist.

**337-29(Satz)**

*Aus "$x$ Menge" folgt "*$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N}$*".*

Beweis **337-29** VS gleich $x$ Menge.

---

$337.0(x,y) \ = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)\wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$
RECH-**Notation**.

---

1: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx(0)=\{(0,q)\}$.

2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0,q)\}$ Menge.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathtt{rf1}qx(0)$ Menge.

4: Aus 3"$\mathtt{rf1}qx(0)$ Menge"
folgt via **folk**: $0\in\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

Thema5 $\alpha\in\mathbb{N}\cap\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

6.1: Aus Thema5"$\alpha\in\mathbb{N}\cap\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt via **folk**: $\alpha\in\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

6.2: Via **337-25** gilt: $\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von $q,x$.

7: Aus 6.1"$\alpha\in\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$"
folgt via **folk**: $\mathtt{rf1}qx(\alpha)$ Menge.

8: Aus 7"$\mathtt{rf1}qx(\alpha)$ Menge" und
aus VS gleich "$x$ Menge"
folgt via **337-28**: $337.0(\mathtt{rf1}qx(\alpha),x)$ Menge.

9: Aus 6.2"$\mathtt{rf1}qx$ ist **ana1** von $q,x$",
aus Thema5"$\alpha\in\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$" und
aus 8"$337.0(\mathtt{rf1}qx(\alpha),x)$ Menge"
folgt via **337-27**: $1+\alpha\in\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx)$.

Ergo Thema5:

A1 | "$\forall\alpha : (\alpha\in\mathbb{N}\cap\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx))\Rightarrow(1+\alpha\in\mathrm{dom}\,(\mathtt{rf1}qx))$"

...

<u>Beweis **337-29**</u> `VS` gleich $x$ Menge.

...

6: Aus 4“$0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx)$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx))$”
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx)$.

7: Via **337-25** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

8: Aus 6“$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx)$” und
aus 7“$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **308-6**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}1qx) = \mathbb{N}$.

□

- **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, De-Gruyter, 1978(3).
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.