Suite IV - Die Zerrissene

Teil 2: Essays 260 - 276

Meinem Vater

Erste Elemente der Topologie.

Modellierung: Generation und Abbau I. Zeitdiskretes Modell. Konstante Lebensdauer.

Modellierung: Eine Gartenbauformel.

KLT: Invarianz und Erhaltungsgrößen. Linearer Fall.

KLT: $\overset{m}{\mathsf{dreh}}$. Erhaltung von Drehimpulsdichten.

KLT: TransformationsSatz (`ELG`).

KLT: Standard L mit $M_{..}(t,x),\ldots$.

MSC2010: 70A05, 34A99, 53A99.

Andreas Unterreiter

19. Juni 2015

KLT: $g^{\mathtt{G}}$.
$g^{1|x}$ und $g^{2|\xi}$ und $g^{\mathtt{G}|x,v}$.
Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

Ersterstellung: 30/11/13 **Letzte Änderung: 30/01/15**

Notationen 1. Falls $0 \neq D$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, ist und falls $g \in \mathsf{C}^1(D : \mathbb{R}^n)$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, so spielt hier und im Folgenden gelegentlich die Funktion

$$g^{\mathtt{G}} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad g^{\mathtt{G}}(x, v) = \sum_{j=1}^{m} g_{,j}(x) \cdot v_j,$$

eine nicht unbedeutende Rolle, wobei hier und in den Folgenden Abschnitten der KLT die der Differentialgeometrie entlehnten Notation

$$g_{,j} = \partial_j g, , \quad j \in \{1, \ldots, s\}$$

Gebrauch gemacht werden sol. Offenbar gilt $g^{\mathtt{G}} \in \mathsf{C}(D \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$. Falls $g \in \mathsf{C}^{1+k}(D : \mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}$, so gilt $g^{\mathtt{G}} \in \mathsf{C}^k(D \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$. Im Speziellen folgt aus $g \in \mathsf{C}^2(D : \mathbb{R}^n)$ die stetige Differenzierbarkeit von $g^{\mathtt{G}}$. Für $c \in \mathsf{C}^1(J : D)$, J echtes reelles Intervall, folgt $g \circ c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^n)$ und ohne allzu große Mühe ergibt sich

$$(g \circ c)^{\bullet} = \sum_{j=1}^{m} (g_{,j} \circ c) \cdot \dot{c}_j = g^{\mathtt{G}} \circ (c, \dot{c}).$$

Notationen 2. Seien $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$, sei $0 \neq D$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und sei P ein echtes reelles Intervall. In Verallgemeinerung des in **Notationen 1** Dargelegten werden gelegentlich Funktionen $g \in \mathsf{C}^1(P \times D : \mathbb{R}^n)$ betrachtet. Hier sind für $\xi \in P$ die Funktionen

$$g^{1|\xi} : D \to \mathbb{R}^n, \quad g^{1|\xi}(x) = g(\xi, x),$$

und für $x \in D$ die Funktionen

$$g^{2|x} : P \to \mathbb{R}^n, \quad g^{2|x}(\xi) = g(\xi, x),$$

von Interesse. Offenbar gilt

$$g^{1|\xi} \in \mathsf{C}^1(D : \mathbb{R}^n), \quad \xi \in P,$$

und

$$g^{2|x} \in \mathsf{C}^1(P : \mathbb{R}^n), \quad x \in D,$$

und

$$g^{1|\xi}(x) = g^{2|x}(\xi) = g(\xi, x), \quad (\xi, x) \in P \times D.$$

Für $(\xi, x) \in P \times D$ und $(\mathsf{e}j) = j$ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, m$, gilt

$$\begin{aligned}(\partial_j g^{1|\xi})(x) &= \lim_{h \to 0} (g^{1|\xi}(x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - g^{1|\xi}(x)) : h \\ &= \lim_{h \to 0} (g(\xi, x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - g(\xi, x)) : h = (\partial_{1+j} g)(\xi, x),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(g^{2|x})'(\xi) = \lim_{h \to 0} (g^{2|x}(\xi + h) - g^{2|x}(\xi)) : h &= \lim_{h \to 0} (g(\xi + h, x) - g(\xi, x)) : h \\ &= (\partial_1 g)(\xi, x).\end{aligned}$$

Wegen $g^{1|\xi} \in \mathsf{C}^1(D : \mathbb{R}^n)$, $\xi \in P$, können nun mit Hilfe von **Notationen 1** die Funktionen

$$(g^{1|\xi})^{\mathtt{G}} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

betrachtet werden. Es gilt auf jeden Fall $(g^{1|\xi})^{\mathtt{G}} \in \mathsf{C}(D \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$ und wenn $g^{1|\xi} \in \mathsf{C}^{1+k}(D : \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \in \mathbb{N}$, so folgt $(g^{1|\xi})^{\mathtt{G}} \in \mathsf{C}^k(D \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$, so dass im speziellen Fall $g^{1|\xi} \in \mathsf{C}^2(D : \mathbb{R}^n)$ die Aussage $(g^{1|\xi})^{\mathtt{G}} \in \mathsf{C}^1(D \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$ verfügbar ist. Offenbar gilt für $(\xi, x, v) \in P \times D \times \mathbb{R}^m$,

$$(g^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x, v) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_j g^{1|\xi})(x) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{m} (\partial_{1+j} g)(\xi, x) \cdot v_j.$$

Hieraus könen ohne allzu viel Mühe die Funktionen

$$g^{\mathsf{G}|x,v} : P \to \mathbb{R}^n, \quad g^{\mathsf{G}|x,v}(\xi) = (g^{1|\xi})^{\mathsf{G}}(x,v) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_{1+j} g)(\xi, x) \cdot v_j,$$
$$(x,v) \in D \times \mathbb{R}^m$$

gewonnen werden. Offenbar gilt $g^{\mathsf{G}|x,v} \in \mathsf{C}^1(P : \mathbb{R}^n)$, $(x,v) \in D \times \mathbb{R}^m$, also

$$(g^{\mathsf{G}|x,v})' \in \mathsf{C}(P : \mathbb{R}^n),$$

und eine kurze Rechnung ergibt

$$(g^{\mathsf{G}|x,v})'(\xi) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_1 \partial_{1+j} g)(\xi, x) \cdot v_j, \quad \xi \in P.$$

Für $c \in \mathsf{C}^1(J : D)$, J echtes reelles Intervall, und $\xi \in P$ folgt $g^{1|\xi} \circ c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^n)$ und es ergibt sich

$$(g^{1|\xi} \circ c)^{\bullet}(t) = (g^{1|\xi})^{\mathsf{G}}(c(t), \dot{c}(t)) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_{1+j} g)(\xi, c(t)) \cdot \dot{c}_j(t), \quad t \in J.$$

Auch gilt für $\xi \in P$, $t \in J$,

$$(g^{1|\xi} \circ c)(t) = g^{2|c(t)}(\xi)(t), \quad (g^{1|\xi} \circ c)^{\bullet}(t) = g^{\mathsf{G}|c(t),\dot{c}(t)}(\xi).$$

Notationen 3. Seien $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$, sei $0 \neq D$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und sein P ein echtes reelles Intervall. Nun sei $g \in \mathsf{C}^2(P \times D : \mathbb{R}^n)$. Dann folgt im Speziellen

$$\partial_1 g \in \mathsf{C}^1(P \times D : \mathbb{R}^n),$$

so dass unter Einbeziehung von **Notationen 2** für $\xi \in P$ ohne Weiteres die Funktion

$$(\partial_1 g)^{1|\xi} \in \mathsf{C}^1(D : \mathbb{R}^n), \quad (\partial_1 g)^{1|\xi}(x) = (\partial_1 g)(\xi, x),$$

betrachtet werden kann. Für $c \in \mathsf{C}^1(J : D)$, J echtes reelles Intervall, und $\xi \in P$ folgt $(\partial_1 g)^{1|\xi} \circ c \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R}^n)$ und es ergibt sich unter Einbeziehung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von g,

$$\begin{aligned} ((\partial_1 g)^{1|\xi} \circ c)^\bullet(t) &= ((\partial_1 g)^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(c(t), \dot{c}(t)) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_{1+j}(\partial_1 g))(\xi, c(t)) \cdot \dot{c}_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\partial_{1+j}\partial_1 g)(\xi, c(t)) \cdot \dot{c}_j(t) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_1 \partial_{1+j} g)(\xi, c(t)) \cdot \dot{c}_j(t), \quad t \in J, \end{aligned}$$

und somit

$$((\partial_1 g)^{1|\xi} \circ c)^\bullet(t) = (g^{\mathtt{G}|c(t),\dot{c}(t)})'(\xi) = ((\partial_1 g)^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(c(t), \dot{c}(t)). \quad t \in J.$$

In der KLT werden Aussagen über Erhaltungsgrößen mit Hilfe von Koordinaten-Transformationen des Orts-Raums hergeleitet. Dabei sollen $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurven in $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurven übergeführt werden. Dies stellt eine gewisse notationelle Herausforderung dar, der sich die nun folgende Begriffsbildung stellt.

$$\Gamma \text{ ist } L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}\text{-Transformationsfamilie}$$

genau dann, wenn gilt:

1) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

2) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

3) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}} \subseteq \mathcal{D}$.

4) Für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

   4.a) $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

   4.b) $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.

   4.c) Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$ und $(\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}[E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}] \subseteq E_{\mathtt{vel}}$.

Bemerkung. Aus 4.b) folgt mit Hilfe mengentheoretischer Argumente $0 \in P$.

Vor allem Aussage `4.b)` *hat interessante Folgerungen.*

Es gelte:

→) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

→) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$.

Dann folgt:

`a)` Für alle $x \in D$ gilt $\Psi^{2|x} \in \mathsf{C}^2(P : \mathbb{R}^s)$ und

$$\Psi^{2|x}(0) = x \quad \text{und} \quad (\Psi^{2|x})'(0) = (\partial_1 \Psi)^{1|0}(x).$$

`b)` Für alle $(x, v) \in E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt $\Psi^{\mathsf{G}|x,v} \in \mathsf{C}^1(P : \mathbb{R}^s)$ und $\Psi^{\mathsf{G}|x,v}(0) = v$.

Beweis. Γ ist eine $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie. Also gilt $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$. Hieraus ergibt sich $\Psi^{2|x} \in \mathsf{C}^2(P : \mathbb{R}^s)$, $x \in E_{\mathtt{ort}}$, und $\Psi^{\mathsf{G}|x,v} \in \mathsf{C}^1(P : \mathbb{R}^s)$, $(x, v) \in E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$. Für $x \in E_{\mathtt{ort}}$ gilt wegen $0 \in P$,

$$\Psi^{2|x}(0) = \Psi^{1|0}(x) = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}(x) = x.$$

Wie in **Notationen 2** dargelegt gilt wegen $0 \in P$ für alle $x \in E_{\mathtt{ort}}$,

$$(\Psi^{2|x})'(0) = (\partial_1 \Psi)(0, x) = (\partial_1 \Psi)^{1|0}(x).$$

Zur Ermittlung von $\Psi^{\mathsf{G}|x,v}(0)$, $(x, v) \in E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$, seien zunächst $x \in E_{\mathtt{ort}}$ und $j \in \{1, \ldots, s\}$. Dann gilt mit $(\mathsf{e}j) = j$ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^s$,

$$\begin{aligned}(\partial_{1+j}\Psi)(0, x) &= \lim_{h \to 0} (\Psi(0, x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - \Psi(0, x)) : h \\ &= \lim_{h \to 0} (\Psi^{1|0}(x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - \Psi^{1|0}(x)) : h \overset{\mathsf{a)}}{=} \lim_{h \to 0} ((x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - x) : h = (\mathsf{e}j),\end{aligned}$$

wobei hier, da es sich bei $E_{\mathtt{ort}}$ um eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ ist, und $x \in E_{\mathtt{ort}}$ gilt, von $x + h \cdot (\mathsf{e}j)$ für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ "hinreichend klein" Gebrauch gemacht wird. Es folgt für alle $(x, v) \in E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$,

$$\Psi^{\mathsf{G}|x,v}(0) = \sum_{j=1}^{s} (\partial_{1+j}\Psi)(0, x) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{s} (\mathsf{e}j) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{s} v_j \cdot (\mathsf{e}j) = v.$$

$\square$

Beinahe offensichtlich ist der hier ohne Beweis angegebene Satz.

Es gelte:

$\rightarrow$) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

$\rightarrow$) $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$.

$\rightarrow$) J echtes reelles Intervall.

$\rightarrow$) $J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

$\rightarrow$) $c \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow$) Für alle $t \in J$ gilt $c(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{c}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt:

a) c ist eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve.

b) Für alle $\xi \in P$ ist $\Psi^{1|\xi} \circ c$ eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve und es gilt

$$\mathsf{dom}\,(\Psi^{1|\xi} \circ c) = J \quad \text{sowie} \quad (\Psi^{1|\xi} \circ c)^{\bullet}(t) = \Psi^{\mathsf{G}|c(t),\dot{c}(t)}(\xi), \quad t \in J.$$

c) Für alle $t \in J$ gilt

$$\Psi^{\mathsf{G}|c(t),\dot{c}(t)} \in \mathsf{C}^1(P : \mathbb{R}^s),$$

und für alle $(\xi, t) \in P \times J$ gilt

$$(\Psi^{\mathsf{G}|c(t),\dot{c}(t)})'(\xi) = ((\partial_1 \Psi)^{1|\xi} \circ c)(t).$$

Bei der Untersuchung von Drehimpulsen sind jene Transformationsfamilien Γ *von Interesse, bei denen* $\Gamma^{1|\xi}$ *eine Drehung ist. Grund genung, sich mit Transformationsfamilien* Γ *auseinander zu setzen, bei denen* $\Gamma^{1|\xi}$ *eine lineare Funktion ist. Als Vorbereitung soll ein Satz mit einfachem, also vernachlässigbarem, Beweis präsentiert werden.*

Es gelte:

→) E ist echtes reelles Intervall.

→) $A : E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$.

→) $\boldsymbol{\mathcal{B}}_m$ ist Basis von $\mathbb{R}^m$.

→) $\boldsymbol{\mathcal{B}}_n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $x \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_m$ und alle $y \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_n$ gilt

$$\left\langle\, A^{2|x} \mid y \,\right\rangle_n \in \mathsf{C}^k(E : \mathbb{R}),$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$.

Dann folgt $A \in \mathsf{C}^k(E \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$.

Ist $A : E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ wie im vorangehenden Satz und ist A stetig differenzierbar, so nimmt $A^{\mathsf{G}|x,v}$, $x, v \in \mathbb{R}^m$, verblüffend einfache Gestalt an.

Es gelte:

→) E ist echtes reelles Intervall.

→) $A \in \mathsf{C}^1(E \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^n)$, $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

Dann folgt

$$A^{\mathsf{G}|x,v}(\xi) = A^{1|\xi} v, \quad (\xi, x, v) \in E \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Beweis. Seien zunächst $(\xi, x) \in E \times \mathbb{R}^m$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$ und sei $(\mathsf{e}j) = j$ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^m$. Dann gilt wegen der Linearität von $A^{1|\xi}$,

$$(\partial_{1+j} A)(\xi, x) = \lim_{h \to 0} (A(\xi, x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - A(\xi, x)) : h$$

$$= \lim_{h \to 0} (A^{1|\xi}(x + h \cdot (\mathsf{e}j)) - A^{1|\xi} x) : h = \lim_{h \to 0} (A^{1|\xi} x + h \cdot A^{1|\xi}(\mathsf{e}j) - A^{1|\xi} x) : h$$

$$= A^{1|\xi}(\mathsf{e}j).$$

Es folgt für alle $(\xi, x, v) \in E \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ unter neuerlicher Ausnützung der Linearität von $A^{1|\xi}$,

$$A^{\mathsf{G}|x,v}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_{1+j} A)(\xi, x) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{m} A^{1|\xi}(\mathsf{e}j) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot A^{1|\xi}(\mathsf{e}j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} A^{1|\xi}(v_j \cdot (\mathsf{e}j)) = A^{1|\xi} \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot (\mathsf{e}j) \right) = A^{1|\xi} v.$$

□

Nun sollen gut einsetzbare Bedinungen an eine Familie linearer Abbildungen angegeben werden, die sicherstellen, dass diese Familie eine $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, E_{\texttt{vel}}$-Transformationsfamilie vorliegt. Auf den Beweis kann unter Verweis auf das bisher in diesem Essay Erarbeitete größtenteils verzichtet werden. Lediglich der Nachweis von $(\Psi^{1|\xi})^{\mathsf{G}}[E_{\texttt{ort}} \times E_{\texttt{vel}}] \subseteq E_{\texttt{vel}}$ für alle $\xi \in P$ bedarf ein wenig Argumentation.

Es gelte:

→) $P, E, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

→) $P \subseteq E$.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}, E_{\texttt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \times E_{\texttt{vel}} \subseteq \mathcal{D}$.

→) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

→) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\texttt{vel}}] \subseteq E_{\texttt{vel}}$.

Dann folgt "A ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\texttt{zeit}}, E_{\texttt{ort}}, E_{\texttt{vel}}$-Transformationsfamilie" .

Beweis(tw). Sei $\Psi = (A \downharpoonright P \times E_{\texttt{ort}})$ und seien $(\xi, x, v) \in P \times E_{\texttt{ort}} \times E_{\texttt{vel}}$. Dann gilt $x, v \in \mathbb{R}^s$ und unter Einsatz der Linearität von $A^{1|\xi}$ und unter Verwendung von $\partial_{1+j}\Psi = \partial_{1+j}A$ auf $P \times E_{\texttt{ort}}$ - hier wird verwendet, dass es sich bei $E_{\texttt{ort}}$ um eine offene Teilmenge$\neq 0$ des $\mathbb{R}^s$ handelt - folgt aus bisher Bewiesenem

$$(\Psi^{1|\xi})^{\mathsf{G}}(x, v) = \sum_{j=1}^{s} (\partial_{1+j}\Psi)(\xi, x) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{s} (\partial_{1+j}A)(\xi, x) \cdot v_j = A^{\mathsf{G}(x,v)}(\xi)$$

$$\overset{\text{vorherigerSatz}}{=} A^{1|\xi}v \in E_{\texttt{vel}},$$

da $v \in E_{\texttt{vel}}$ und $A^{1|\xi}[E_{\texttt{vel}}] \subseteq E_{\texttt{vel}}$ gilt. Durch "Beweglich-Machen" von $(x, v) \in E_{\texttt{ort}} \times E_{\texttt{vel}}$ ergibt sich $\Psi^{1|\xi}[E_{\texttt{ort}} \times E_{\texttt{vel}}] \subseteq E_{\texttt{vel}}$ für alle $\xi \in P$.

□

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

Mengenlehre: $x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$.
Weiteres über $\{(p,q)\} \cup x$.
Weiteres über $g : \mathtt{cp}\ f \to A$ und $f : D \to B$.

Ersterstellung: 14/01/14 **Letzte Änderung: 02/06/14**

261-1. In klassischem Stil werden der elementaren Mengenlehre zugehörige Resultate bewiesen. In weiterer Folge von `a)` stellt sich heraus, dass *Topologien* ausschließlich *auf Mengen* angetroffen werden können.

261-1(Satz)

a) $x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$.

b) *“$q \in \{p\}^C$” genau dann, wenn “q Menge” und “$q \neq p$”.*

c) *Aus “f Funktion” und “$p \in \mathsf{dom}\,(f \downharpoonright D)$” folgt “$(p, f(p)) \in (f \downharpoonright D)$”.*

d) *Aus “f Funktion” folgt “$\{(p, f(p))\} \subseteq f$”.*

e) $(x \downharpoonright D) \subseteq x$.

f) *Aus “$r \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$” folgt “$r = p$”.*

g) *Aus “$r \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$” folgt “$r = q$”.*

h) *Aus “$r \neq p$” folgt “$r \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$”.*

i) *Aus “$r \neq q$” folgt “$r \notin \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$”.*

Beweis **261-1** `a)`

`Thema1` $\alpha \in x$

`Thema1.1` $\beta \in \alpha$

Aus `Thema1.1`"$\beta \in \alpha$" und
aus `Thema1`"$\alpha \in x$"
folgt via **1-12**: $\beta \in \bigcup x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \alpha) \Rightarrow (\beta \in \bigcup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\alpha \subseteq \bigcup x$"

`1.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2:` Aus `A1` gleich "$\alpha \subseteq \bigcup x$" und
aus `1.2`"α Menge"
folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(\bigcup x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(\bigcup x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$.

<u>Beweis **261-1**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $q \in \{p\}^C$.

`1:` Via **5-11** gilt: $\{p\}^C = \mathcal{U} \setminus \{p\}$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $q \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$q \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$"
folgt via **5-3**: $(q \in \mathcal{U}) \wedge (q \notin \{p\})$.

`4.1:` Aus `3`"$q \in \mathcal{U} \ldots$"

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{q \text{ Menge}}$

`4.2:` Aus `3`"$\ldots q \notin \{p\}$"
folgt via **1-7**: $(q \neq p) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`

folgt: $\boxed{q \neq p}$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (q \neq p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \neq p$"
folgt via **1-7**: $q \notin \{p\}$.

`2:` Aus Aus `1`"$q \notin \{p\}$" und
aus `VS` gleich "q Menge... "
folgt via **3-2**: $q \in \{p\}^C$.

<u>Beweis **261-1**</u> `c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\,(f \downharpoonleft D))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **258-11**: $(f \downharpoonleft D)$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "… $p \in \mathsf{dom}\,(f \downharpoonleft D)$"
folgt via **258-11**: $(f \downharpoonleft D)\,(p) = f(p)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(f \downharpoonleft D)$ Funktion" und
aus `VS` gleich "… $p \in \mathsf{dom}\,(f \downharpoonleft D)$"
folgt via **18-22**: $(p, (f \downharpoonleft D)\,(p)) \in (f \downharpoonleft D)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$(f \downharpoonleft D)\,(p) = f(p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, (f \downharpoonleft D)\,(p)) = (p, f(p))$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p, f(p)) \in (f \downharpoonleft D)$.

Beweis **261-1** d) VS gleich f Funktion.

1: Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, f) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, f)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus VS gleich "f Funktion" und
aus 1.1.Fall "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

3: Aus 2 "$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **1-8**: $\{(p, f(p))\} \subseteq f$.

1.2.Fall $p \notin \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus 1.2.Fall "$p \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(p)$ Unmenge.

3: Aus 2 "$f(p)$ Unmenge"
folgt via **6-2**: $(p, f(p))$ Unmenge.

4: Aus 3 "$(p, f(p))$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(p, f(p))\} = 0$.

5: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq f$.

6: Aus 5 und
aus 4
folgt: $\{(p, f(p))\} \subseteq f$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{(p, f(p))\} \subseteq f$.

e)

1: Via **258-10(Def)** gilt: $(x \downharpoonleft D) = x \cap (D \times \mathcal{U})$.

2: Via **2-7** gilt: $x \cap (D \times \mathcal{U}) \subseteq x$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $(x \downharpoonleft D) \subseteq x$.

<u>Beweis **261-1**</u> `f)` `VS` gleich $r \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`1:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$r \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$"
folgt via **0-4**: $r \in \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$r \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $r = p$.

`g)` `VS` gleich $r \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`1:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$r \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$" und
aus `1`"$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$"
folgt via **0-4**: $r \in \{q\}$.

`3:` Aus `2`"$r \in \{q\}$"
folgt via **1-6**: $r = q$.

`h)` `VS` gleich $r \neq p$.

`1:` Es gilt: $(r \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \vee (r \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $r \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$r \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $r = p$.

`3:` Es gilt `2`"$r = p$".
Es gilt `VS` gleich "$r \neq p$".
Ex falso quodlibet folgt: $r \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $r \notin \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})$.

<u>Beweis **261-1**</u> `i)` `VS` gleich $r \neq q$.

`1:` Es gilt: $(r \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})) \vee (r \notin \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $r \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$r \in \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $r = q$.

`3:` Es gilt `2`“$r = q$”.
Es gilt `VS` gleich “$r \neq q$”.
Ex falso quodlibet folgt: $r \notin \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $r \notin \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\})$.

□

261-2. Jede Funktion f kann einfach aus $\left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)$ rekonstruiert werden. Dabei ist es unerheblich, ob $p \in \mathsf{dom}\, f$ oder $p \notin \mathsf{dom}\, f$ gilt.

261-2(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$f = \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonright \{p\}^C\right)$".

<u>Beweis **261-2**</u> `VS` gleich f Funktion.

`Thema1.1` $\alpha \in f$.

2: Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in f$"
folgt via **18-25**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha = (\Omega, f(\Omega)))$.

3: Es gilt: $(\Omega = p) \vee (\Omega \neq p)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega = p$.

4.1: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in f$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

4.2: Aus `3.1.Fall`"$\Omega = p$"
folgt: $f(\Omega) = f(p)$.

5.1: Aus 4.1 und
aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, f(\Omega))$"
folgt: $(\Omega, f(\Omega))$ Menge.

5.2: Aus `3.1.Fall`"$\Omega = p$" und
aus 4.2"$f(\Omega) = f(p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, f(\Omega)) = (p, f(p))$.

6.1: Aus 2"$\ldots \alpha = (\Omega, f(\Omega))$" und
aus 5.2
folgt: $\alpha = (p, f(p))$.

6.2: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $(p, f(p))$ Menge.

7: Aus 6.2"$(p, f(p))$ Menge"
folgt via **2-28**: $(p, f(p)) \in \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

8: Aus 6.1 und
aus 7
folgt: $\alpha \in \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

...

...

<u>Beweis **261-2**</u> `VS` gleich f Funktion.

...

`Thema1.1` $\alpha \in f$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $\Omega \neq p$.

`4.1:` Aus 2"$\dots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \dots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4.2:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) = \{p\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$.

`5:` Aus 4.1"Ω Menge" und
aus `3.2.Fall`"$\Omega \neq p$"
folgt via **261-1**: $\Omega \in \{p\}^C$.

`6:` Aus 5"$\Omega \in \{p\}^C$" und
aus 2"$\dots \Omega \in \mathsf{dom}\, f \dots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in \{p\}^C \cap \mathsf{dom}\, f$.

`7:` Aus 6 und
aus 4.2
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

`8:` Aus →)"f Funktion" und
aus 7"$\Omega \in \mathsf{dom}\,\left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$"
folgt via **261-1**: $(\Omega, f(\Omega)) \in \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

`9:` Aus 2"$\dots \alpha = (\Omega, f(\Omega))$" und
aus 8
folgt: $\alpha \in \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

`10:` Aus 9"$\alpha \in \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f) \Rightarrow \left(\alpha \in \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)\right)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$f \subseteq \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$"

<u>Beweis **261-2**</u> `VS` gleich f Funktion.

...

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **261-1**: $\{(p, f(p))\} \subseteq f$.

`1.3:` Via **261-1** gilt: $\left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) \subseteq f$.

`2:` Aus `1.2`"$\{(p, f(p))\} \subseteq f$" und
aus `1.3`"$\left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) \subseteq f$"
folgt via **2-12**: $\{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) \subseteq f$.

`3:` Aus `A1` gleich "$f \subseteq \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$" und
aus `3`"$\{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right) \subseteq f$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = \{(p, f(p))\} \cup \left(f \downharpoonleft \{p\}^C\right)$.

□

261-3. Falls p, q Mengen sind dann gilt $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x) = \{p\}\cup \mathsf{dom}\, x$. Ähnliches gilt für den Bild-Bereich von $\{(p,q)\}\cup x$.

261-3(Satz)

a) $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x) \subseteq \{p\}\cup \mathsf{dom}\, x$.

b) $\mathsf{ran}\, x \subseteq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}\cup x) \subseteq \{q\}\cup \mathsf{ran}\, x$.

c) *Aus* "p, q *Menge*" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x) = \{p\}\cup \mathsf{dom}\, x$" *und* "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}\cup x) = \{q\}\cup \mathsf{ran}\, x$".

d) *Aus* "(p *Unmenge*) $\vee$ (q *Unmenge*)" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x) = \mathsf{dom}\, x$" *und* "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}\cup x) = \mathsf{ran}\, x$".

e) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$(x\cup y)[\{p\}] = y[\{p\}]$" *und* "$(x\cup y)(p) = y(p)$".

f) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, y$" *folgt* "$(x\cup y)[\{p\}] = x[\{p\}]$" *und* "$(x\cup y)(p) = x(p)$".

g) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, x$" *und* "$p, q$ *Menge*" *folgt* "$(\{(p,q)\}\cup x)(p) = q$".

h) *Aus* "$r \neq p$" *folgt* "$(\{(p,q)\}\cup x)(r) = x(r)$".

i) *Aus* "$p \notin y$" *und* "$r \in y$" *folgt* "$(\{(p,q)\}\cup x)(r) = x(r)$".

Beweis **261-3** a)

1.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq \{(p,q)\} \cup x$.

1.2: Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$.

2.1: Aus 1.1 "$x \subseteq \{(p,q)\} \cup x$"

folgt via **7-10**: $\boxed{\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x)}$

2.2: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{dom}\,x$.

2.3: Aus 1.2 "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$"
folgt via **2-15**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{dom}\,x \subseteq \{p\} \cup \mathsf{dom}\,x$.

3: Aus 2.2 "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \ldots = \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{dom}\,x$" und
aus 2.3

folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) \subseteq \{p\} \cup \mathsf{dom}\,x}$

b)

1.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq \{(p,q)\} \cup x$.

1.2: Via **259-36** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$.

2.1: Aus 1.1 "$x \subseteq \{(p,q)\} \cup x$"

folgt via **7-10**: $\boxed{\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x)}$

2.2: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{ran}\,x$.

2.3: Aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{q\}$"
folgt via **2-15**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{ran}\,x \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x$.

3: Aus 2.2 "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \ldots = \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{ran}\,x$" und
aus 2.3

folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) \subseteq \{p\} \cup \mathsf{ran}\,x}$

<u>Beweis **261-3**</u> `c)` `VS` gleich p, q Menge.

`1.1:` Aus →) “p, q Menge”
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) = \{p\}$.

`1.2:` Aus →) “p, q Menge”
folgt via **259-36**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) = \{q\}$.

`2.1:` $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{dom}\,x \stackrel{1.1}{=} \{p\} \cup \mathsf{dom}\,x$.

`2.2:` $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{ran}\,x \stackrel{1.2}{=} \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \{p\} \cup \mathsf{dom}\,x}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x}$

`d)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$”
folgt via **259-36**: $\{(p,q)\} = 0$.

`2.1:` $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{dom}\,x \stackrel{1}{=} (\mathsf{dom}\,0) \cup \mathsf{dom}\,x$
$\stackrel{\mathbf{7-11}}{=} 0 \cup \mathsf{dom}\,x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \mathsf{dom}\,x$.

`2.2:` $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{\mathbf{7-16}}{=} \mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}) \cup \mathsf{ran}\,x \stackrel{1}{=} (\mathsf{ran}\,0) \cup \mathsf{ran}\,x$
$\stackrel{\mathbf{7-11}}{=} 0 \cup \mathsf{ran}\,x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \mathsf{ran}\,x$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \mathsf{dom}\,x}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \mathsf{ran}\,x}$

Beweis **261-3** `e)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cup y)[\{p\}]$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \cup y)[\{p\}]$"
folgt via **9-15**: $(p, \alpha) \in x \cup y$.

`3:` Aus 2 "$(p, \alpha) \in x \cup y$"
folgt via **2-2**: $((p, \alpha) \in x) \vee ((p, \alpha) \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(p, \alpha) \in x$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$(p, \alpha) \in x$"
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`5:` Es gilt 4 "$p \in \mathsf{dom}\, x$".
Es gilt `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, x$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \in y[\{p\}]$.

`3.2.Fall` $(p, \alpha) \in y$.

Aus `3.2.Fall` "$(p, \alpha) \in y$"
folgt via **9-15**: $\alpha \in y[\{p\}]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in y[\{p\}]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y)[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha \in y[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \cup y)[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$"

`1.2:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2:` Aus `1.2` "$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **8-9**: $y[\{p\}] \subseteq (x \cup y)[\{p\}]$.

`3:` Aus `A1` gleich "$(x \cup y)[\{p\}] \subseteq y[\{p\}]$" und
aus 2 "$y[\{p\}] \subseteq (x \cup y)[\{p\}]$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{(x \cup y)[\{p\}] = y[\{p\}]}$

...

<u>Beweis **261-3**</u> `e)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

...

`4:` Aus `3` "$(x \cup y)[\{p\}] = y[\{p\}]$"

folgt via **259-13**: $\boxed{(x \cup y)(p) = y(p)}$

`f)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, y$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$((y \cup x)[\{p\}] = x[\{p\}]) \wedge ((y \cup x)(p) = x(p))$.

`2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $((x \cup y)[\{p\}] = x[\{p\}]) \wedge ((x \cup y)(p) = x(p))$.

□

`g)` `VS` gleich $(p \notin \mathsf{dom}\, x) \wedge (p, q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(\{(p, q)\} \cup x)(p) = \{(p, q)\}(p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q$ Menge"
folgt via **259-37**: $\{(p, q)\}(p) = q$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\{(p, q)\} \cup x)(p) = q$.

`h)` `VS` gleich $r \neq p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$r \neq p$"
folgt via **261-1**: $r \notin \mathsf{dom}\, (\{(p, q)\})$.

`2:` Aus `1` "$r \notin \mathsf{dom}\, (\{(p, q)\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(\{(p, q)\} \cup x)(r) = x(r)$.

`i)` `VS` gleich $(p \notin y) \wedge (r \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots r \in y$" und
aus `VS` gleich "$p \notin y \ldots$"
folgt via **0-1**: $r \neq p$.

`2:` Aus `1` "$r \neq p$"
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $(\{(p, q)\} \cup x)(r) = x(r)$.

□

261-4. Falls $p \in \mathsf{cp}\ \left(x \downharpoonleft \{q\}^C\right)$ mit $q \in \mathsf{dom}\, x$, dann gilt $\{(q,r)\} \cup p \in \mathsf{cp}\ x$ für alle $r \in x(q)$.

<u>**261-4(Satz)**</u>

a) *Aus* "$p \notin \mathsf{dom}\, f$" *und* "$f$ *Funktion*" *folgt* "$\{(p,q)\} \cup f$ *Funktion*".

b) *Aus* "$p \in \mathsf{cp}\ \left(x \downharpoonleft \{q\}^C\right)$" *und* "$q \in \mathsf{dom}\, x$" *und* "$r \in x(q)$" *folgt* "$\{(q,r)\} \cup p \in \mathsf{cp}\ x$".

<u>Beweis **261-4**</u> `a)` `VS` gleich $(p \notin \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus `1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \ldots$"
folgt via **261-1**: $\alpha = p$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`"$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`5:` Es gilt `4`"$p \in \mathsf{dom}\, f$".
Es gilt `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, f \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cap \mathsf{dom}\, f$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cup \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\alpha \notin (\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cup \mathsf{dom}\, f).$$

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{"}(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cap \mathsf{dom}\, f = 0\text{"}}$

`1.2:` Via **259-36** gilt: $\{(p,q)\}$ Funktion.

`2:` Aus `1.2`"$\{(p,q)\}$ Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots f$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$(\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\})) \cap (\mathsf{dom}\, f = 0)$"
folgt via **18-42**: $\{(p,q)\} \cup f$ Funktion.

<u>Beweis **261-4**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in \mathtt{cp}\,\left(x \downharpoonleft \{q\}^C\right)) \wedge (q \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (r \in x(q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{cp}\,\left(x \downharpoonleft \{q\}^C\right)\ldots$"
folgt via **259-45**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{q\})$
$\wedge(\forall \alpha : (q \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha)))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **5-19**: $\mathsf{dom}\, x = \{q\} \cup ((\mathsf{dom}\, x) \setminus \{q\})$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots r \in x(q)$"
folgt via **ElementAxiom**: r Menge.

`2.1:` Via **5-14** gilt: $q \notin (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{q\}$.

`2.2:` Aus `1.2`"q Menge" und
aus `1.4`"r Menge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(q, r)\} \cup p) = \{q\} \cup \mathsf{dom}\, p$.

`2.3:` Aus `1.1`"p Menge..."
folgt via **2-28**: $\{(q, r)\} \cup p$ Menge.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{dom}\, p = (\mathsf{dom}\, x) \setminus \{q\} \ldots$"
folgt: $q \notin \mathsf{dom}\, p$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{dom}\, p = \mathsf{dom}\, x \setminus \{q\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(q, r)\} \cup p) = \{q\} \cup ((\mathsf{dom}\, x) \setminus \{q\})$.

`4.1:` Aus `3.1`"$q \notin \mathsf{dom}\, p$" und
aus `1.1`"$\ldots p$ Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\{(q, r)\} \cup p$ Funktion.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `1.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(q, r)\} \cup p) = \mathsf{dom}\, x$.

...

<u>Beweis **261-4**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{cp}\ (x \downharpoonright \{q\}^C)) \wedge (q \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (r \in x(q))$.

...

`Thema5.1` $\beta \in \mathsf{dom}\, x$.

`6:` Es gilt: $(\beta = q) \vee (\beta \neq q)$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $\beta = q$.

`7:` Aus `6.1.Fall` "$\beta = q$" und aus `VS` gleich "$\ldots r \in x(q)$" folgt: $r \in x(\beta)$.

`8:` Aus `3.1` "$q \notin \mathsf{dom}\, p$", aus `1.2` "$q$ Menge" und aus `1.4` "r Menge" folgt via **261-3**: $(\{(q,r)\} \cup p)(q) = r$.

`9:` Aus `8` und aus `7` folgt: $(\{(q,r)\} \cup p)(q) \in x(\beta)$.

`10:` Aus `9` und aus `6.1.Fall` folgt: $(\{(q,r)\} \cup p)(\beta) \in x(\beta)$.

`6.2.Fall` $\beta \neq q$.

`7:` Aus aus `6.2.Fall` "$\beta \neq q$", aus `Thema5.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\, x$" und aus `1.1` "$\ldots \forall \alpha : (q \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (p(\alpha) \in x(\alpha))$" folgt: $p(\beta) \in x(\beta)$.

`8:` Aus `6.2.Fall` "$\beta \neq q$" folgt via **261-3**: $(\{(q,r)\} \cup p)(\beta) = p(\beta)$.

`9:` Aus `7` und aus `8` folgt: $(\{(q,r)\} \cup p)(\beta) \in x(\beta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\{(q,r)\} \cup p)(\beta) \in x(\beta)$.

...

<u>Beweis **261-4**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in \mathsf{cp}\,\big(x \downharpoonright \{q\}^C\big)) \wedge (q \in \mathsf{dom}\,x) \wedge (r \in x(q))$.

...

Ergo `Thema5.1`: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“}\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,x) \Rightarrow ((\{(q,r)\} \cup p)(\beta) \in x(\beta))\text{”}}$

`5.2`: Aus `2.3`“$\{(q,r)\} \cup p$ Menge”,
aus `4.1`“$\{(q,r)\} \cup p$ Funktion”,
aus `4.2`“$\mathsf{dom}\,(\{(q,r)\} \cup p) = \mathsf{dom}\,x$” und
aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,x) \Rightarrow ((\{(q,r)\} \cup p)(\beta) \in x(\beta))$”
folgt via **259-39**: $\{(q,r)\} \cup p \in \mathsf{cp}\,x$.

$\square$

261-5. Hier wird Weiteres über $y \cap (x \times \mathcal{U})$ und $y \cap (\mathcal{U} \times x)$ bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `abcdefhgi)`.

261-5(Satz)

a) *Aus* “$x \cap \mathsf{dom}\, y = 0$” *folgt* “$y \cap (x \times \mathcal{U}) = 0$”.

b) *Aus* “$x \cap \mathsf{ran}\, y = 0$” *folgt* “$y \cap (\mathcal{U} \times x) = 0$”.

c) *Aus* “$x \cap \mathsf{dom}\, y = 0$” *folgt* “$y \cap (x^C \times \mathcal{U}) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”.

d) *Aus* “$x \cap \mathsf{ran}\, y = 0$” *folgt* “$y \cap (\mathcal{U} \times x^C) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”.

e) “$x \subseteq y$” *genau dann, wenn* “$y^C \cap x = 0$”.

f) *Aus* “$\mathsf{dom}\, y \subseteq x$” *folgt* “$y \cap (x^C \times \mathcal{U}) = 0$”.

g) *Aus* “$\mathsf{ran}\, y \subseteq x$” *folgt* “$y \cap (\mathcal{U} \times x^C) = 0$”.

h) *Aus* “$\mathsf{dom}\, y \subseteq x$” *folgt* “$y \cap (x \times \mathcal{U}) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”.

i) *Aus* “$\mathsf{ran}\, y \subseteq x$” *folgt* “$y \cap (\mathcal{U} \times x) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”.

Beweis **261-5** `a)` `VS` gleich $x \cap \mathsf{dom}\, y = 0.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in y \cap (x \times \mathcal{U}).$

`2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in y \cap (x \times \mathcal{U})$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \in x \times \mathcal{U}).$

`3`: Aus `2`"$\ldots \alpha \in x \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$

`4`: Aus `2`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in y.$

`5`: Aus `4`"$(\Omega, \Phi) \in y$"
folgt via **7-5**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, y.$

`6`: Aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus `5`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cap \mathsf{dom}\, y.$

`7`: Aus `6` und
aus `VS`
folgt: $\Omega \in 0.$

`8`: Es gilt `7`"$\Omega \in 0$".
Via **0-19** gilt: $\Omega \notin 0.$
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin y \cap (x \times \mathcal{U}).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y \cap (x \times \mathcal{U})) \Rightarrow (\alpha \notin y \cap (x \times \mathcal{U})).$

Konsequenz via **0-19**: $y \cap (x \times \mathcal{U}) = 0.$

<u>Beweis **261-5**</u> `b)` `VS` gleich $x \cap \mathsf{ran}\, y = 0.$

`Thema1` $\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times x).$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times x)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \in \mathcal{U} \times x).$

`3:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \mathcal{U} \times x$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\Phi \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$

`4:` Aus `2`"$\alpha \in y \ldots$" und
aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in y.$

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \Phi) \in y$"
folgt via **7-5**: $\Phi \in \mathsf{ran}\, y.$

`6:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in x \ldots$" und
aus `5`"$\Phi \in \mathsf{ran}\, y$"
folgt via **2-2**: $\Phi \in x \cap \mathsf{ran}\, y.$

`7:` Aus `6` und
aus `VS`
folgt: $\Phi \in 0.$

`8:` Es gilt `7`"$\Phi \in 0$".
Via **0-19** gilt: $\Phi \notin 0.$
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin y \cap (\mathcal{U} \times x).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in y \cap (\mathcal{U} \times x)) \Rightarrow (\alpha \notin y \cap (\mathcal{U} \times x)).$

Konsequenz via **0-19**: $y \cap (\mathcal{U} \times x) = 0.$

<u>Beweis **261-5**</u> `c)` VS gleich $x \cap \mathsf{dom}\, y = 0.$

1: Aus VS gleich "$x \cap \mathsf{dom}\, y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $y \cap (x \times \mathcal{U}) = 0.$

2: $y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \stackrel{3-6}{=} y \cap ((x^C \cup x) \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{62-1}}{=} y \cap ((x^C \times \mathcal{U}) \cup (x \times \mathcal{U}))$
$\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (y \cap (x^C \times \mathcal{U})) \cup (y \cap (x \times \mathcal{U})) \stackrel{1}{=} (y \cap (x^C \times \mathcal{U})) \cup 0$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} y \cap (x^C \times \mathcal{U}).$

3: Aus 2"$y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \ldots y \cap (x^C \times \mathcal{U})$"
folgt: $y \cap (x^C \times \mathcal{U}) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}).$

`d)` VS gleich $x \cap \mathsf{ran}\, y = 0.$

1: Aus VS gleich "$x \cap \mathsf{ran}\, y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $y \cap (\mathcal{U} \times x) = 0.$

2: $y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \stackrel{3-6}{=} y \cap (\mathcal{U} \times (x \cup x^C) \stackrel{\mathbf{62-1}}{=} y \cap ((\mathcal{U} \times x) \cup (\mathcal{U} \times x^C))$
$\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (y \cap (\mathcal{U} \times x)) \cup (y \cap (\mathcal{U} \times x^C)) \stackrel{1}{=} 0 \cup (y \cap (\mathcal{U} \times x^C))$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} y \cap (\mathcal{U} \times x^C).$

3: Aus 2"$y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \ldots = y \cap (\mathcal{U} \times x^C)$"
folgt: $y \cap (\mathcal{U} \times x^C) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}).$

`e)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $x \subseteq y.$

1: Aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **5-6**: $x \setminus y = 0.$

2: Via **5-10** gilt: $x \setminus y = x \cap y^C.$

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $x \cap y^C = 0.$

4: Via **KG**$\cap$ gilt: $y^C \cap x = x \cap y^C.$

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $y^C \cap x = 0.$

<u>Beweis</u> **261-5** `e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y^C \cap x = 0$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y^C = y^C \cap x$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $x \cap y^C = 0$.

`3:` Via **5-10** gilt: $x \setminus y = x \cap y^C$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $x \setminus y = 0$.

`5:` Aus `4` "$x \setminus y = 0$"
folgt via **5-6**: $x \subseteq y$.

`fh)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, y \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, y \subseteq x$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x^C \cap \mathsf{dom}\, y = 0$.

`2.f):` Aus `1` "$x^C \cap \mathsf{dom}\, y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $y \cap (x^C \times \mathcal{U}) = 0$.

`2.1:` Aus `1` "$x^C \cap \mathsf{dom}\, y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $y \cap ((x^C)^C \times \mathcal{U}) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`3:` Via **3-4** gilt: $(x^C)^C = x$.

`4.h):` Aus `2.1` und
aus `3`
folgt: $y \cap (x \times \mathcal{U}) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

<u>Beweis **261-5**</u> `gi)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\, y \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\, y \subseteq x$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x^C \cap \mathsf{ran}\, y = 0$.

`2.g):` Aus `1`"$x^C \cap \mathsf{ran}\, y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $y \cap (\mathcal{U} \times x^C) = 0$.

`2.1:` Aus `1`"$x^C \cap \mathsf{ran}\, y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $y \cap (\mathcal{U} \times (x^C)^C) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`3:` Via **3-4** gilt: $(x^C)^C = x$.

`4.i):` Aus `2.1` und
aus `3`
folgt: $y \cap (\mathcal{U} \times x) = y \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

$\square$

261-6. Falls f eine Funktion ist und $p \notin \mathsf{dom}\, f$ gilt - so ein p gibt es immmer, wenn $\mathsf{dom}\, f \neq \mathcal{U}$ - so kann via **261-4** die Funktion f zu $\{(p,q)\} \cup f$ erweitert werden. Auch ist die Einschränkung von $\{(p,q)\} \cup f$ auf $\{p\}^C$ entsprechend Vorliegendem gleich f.

261-6(Satz)

a) *Aus "r Relation" und "$x \cap \mathsf{dom}\, r = 0$" und "$\mathsf{dom}\, y \subseteq x$" folgt "$r = \big((r \cup y) \downharpoonleft x^C\big)$".*

b) *Aus "r Relation" und "$p \notin \mathsf{dom}\, r$" und "$\mathsf{dom}\, y \subseteq \{p\}$" folgt "$r = \big((r \cup y) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$".*

c) *Aus "r Relation" und "$p \notin \mathsf{dom}\, r$" folgt "$r = \big((\{(p,q)\} \cup r) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$".*

d) *Asu "f Funktion" und "$p \notin \mathsf{dom}\, f$" folgt "$f = \big((\{(p,q)\} \cup f) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$".*

Beweis **261-6** a) VS gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (x \cap \mathsf{dom}\, r = 0) \wedge (\mathsf{dom}\, y \subseteq x)$.

1.1: Aus VS gleich "r Relation..."
folgt via **10-3**: $r = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots x \cap \mathsf{dom}\, r = 0 \ldots$"
folgt via **261-5**: $r \cap (x^C \times \mathcal{U}) = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

1.3: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, y \subseteq x$"
folgt via **261-5**: $y \cap (x^C \times \mathcal{U}) = 0$.

2: $\big((r \cup y) \downharpoonleft x^C\big) \stackrel{\mathbf{258-10(Def)}}{=} (r \cup y) \cap (x^C \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (r \cap (x^C \times \mathcal{U})) \cup (y \cap (x^C \times \mathcal{U}))$
$\stackrel{1.3}{=} (r \cap (x^C \times \mathcal{U})) \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} r \cap (x^C \times \mathcal{U}) \stackrel{1.2}{=} r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \stackrel{1.1}{=} r$.

3: Aus 2"$\big((r \cup y) \downharpoonleft x^C\big) = \ldots = r$"
folgt: $r = \big((r \cup y) \downharpoonleft x^C\big)$.

b) VS gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, r) \wedge (\mathsf{dom}\, y \subseteq \{p\})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, r \ldots$"
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap \mathsf{dom}\, r = 0$.

2: Aus VS gleich "r Relation...",
aus 1"$\{p\} \cap \mathsf{dom}\, r = 0$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, y \subseteq \{p\}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $r = \big((r \cup y) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$.

<u>Beweis **261-6**</u> `c)` `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, r)$.

`1:` Via **259-36** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "r Relation…",
aus `VS` gleich "…$p \notin \mathsf{dom}\, r$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}) \subseteq \{p\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $r = \big((r \cup \{(p,q)\}) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$.

`3:` Via **KG**$\cup$ gilt: $r \cup \{(p,q)\} = \{(p,q)\} \cup r$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $r = \big((\{(p,q)\} \cup r) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2:` Aus `1` "f Relation" und
aus `VS` gleich "…$p \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $f = \big((\{(p,q)\} \cup f) \downharpoonleft \{p\}^C\big)$.

□

261-7. Hier wird einer der Zwischenschritte von **#260** verifiziert.

261-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $g : \mathtt{cp}\, f \to A$.

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $u, z \in D$.

$\rightarrow\!)$ $u \neq z$.

$\rightarrow\!)$ $x \in \mathtt{cp}\, \left(f \downharpoonright \{u\}^C\right)$.

$\rightarrow\!)$ $y = \left(x \downharpoonright \{z\}^C\right)$.

$\rightarrow\!)$ $p \in f(u)$.

Dann folgt:

a) $x = \{(z, x(z))\} \cup y$.

b) $\{(u, p)\} \cup x \in \mathtt{cp}\, f$.

c) $\{(u, p)\} \cup (\{(z, x(z))\} \cup y) \in \mathtt{cp}\, f$.

d) $g\,(x|u.)\,(p) = g\,(\{(u, p)\} \cup y|z.)\,(x(z))$.

Beweis **261-5**

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$x \in \mathtt{cp}\, \left(f \downharpoonright \{u\}^C\right)$"
folgt via **259-39**: x Funktion.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

1.3: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \in f(u)$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.4: Aus $\rightarrow\!)$ "$u \neq z$"
folgt: $z \neq u$.

1.5: Aus $\rightarrow\!)$ "$x \in \mathtt{cp}\, \left(f \downharpoonright \{u\}^C\right)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **259-46**: $\mathsf{dom}\, x = D \setminus \{u\}$.

...

<u>Beweis **261-5**</u>

...

`2.1:` Aus `1.1`"x Funktion..." folgt via **261-2**: $$x = \{(z, x(z))\} \cup \left(x \downharpoonright \{z\}^C\right).$$

`2.2:` Aus →)"$u \ldots \in D$" und aus `1.2` folgt: $$u \in \mathsf{dom}\, f.$$

`2.3:` Aus `1.3`"p Menge" folgt via **259-14**: $$g\,(x|u.)\,(p) = g(\{(u, p)\} \cup x).$$

`2.4:` Aus →)"$\ldots z \in D$" und aus `1.4`"$z \neq u$" folgt via **5-15**: $$z \in D \setminus \{u\}.$$

`3.a):` Aus →)"$y = \left(x \downharpoonright \{z\}^C\right)$" und aus `2.1` folgt: $$x = \{(z, x(z))\} \cup y.$$

`3.b):` Aus →)"$x \in \mathsf{cp}\ \left(f \downharpoonright \{u\}^C\right)$", aus `2.2`"$u \ldots \in \mathsf{dom}\, f$" und aus →)"$p \in f(u)$" folgt via **261-4**: $$\{(u, p)\} \cup x \in \mathsf{cp}\ f.$$

`3.1:` Aus `2.4` und aus `1.5` folgt: $$z \in \mathsf{dom}\, x.$$

`4.c):` Aus `3.a)` und aus `3.b)` folgt: $$\{(u, p)\} \cup (\{(z, x(z))\} \cup y) \in \mathsf{cp}\ f.$$

`4.1:` Aus `3.1`"$z \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **17-5**: $$x(z) \text{ Menge}.$$

`5:` Aus `4.1`"$z(x)$ Menge" folgt via **259-14**: $$g\,(\{(u, p)\} \cup y|z.)\,(x(z)) = g(\{(z, x(z))\} \cup (\{(u, p)\} \cup y)).$$

`6:` $$\begin{aligned} g\,(x|u.)\,(p) &\overset{2.3}{=} g(\{(u, p)\} \cup x) \overset{3.a)}{=} g(\{(u, p)\} \cup (\{(z, x(z))\} \cup y)) \\ &\overset{\mathbf{AG}\cup}{=} g((\{(u, p)\} \cup \{(z, x(z))\}) \cup y) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} g((\{(z, x(z))\} \cup \{(u, p)\}) \cup y) \\ &\overset{\mathbf{AG}\cup}{=} g(\{(z, x(z))\} \cup (\{(u, p)\} \cup y)) \overset{5}{=} g\,(\{(u, p)\} \cup y|z.)\,(x(z)). \end{aligned}$$

`7.d):` Aus `6` folgt: $$g\,(x|u.)\,(p) = g\,(\{(u, p)\} \cup y|z.)\,(x(z)).$$

□

Mengenlehre: $\bigcup(x[E])$. $\bigcap(x[E])$.
Aus " f Funktion" folgt " $f[\{p,q\}]=\{f(p),f(q)\}$" .
$\{p,\mathcal{U}\}=\{p\}$. $\{\mathcal{U},q\}=\{q\}$. $\{\mathcal{U},\mathcal{U}\}=0$.

Ersterstellung: 16/01/14 **Letzte Änderung: 04/06/14**

262-1. Bei der Untersuchung von Topologien spielen Terme der Form $\bigcup(f[E])$, $\bigcap(f[E])$ - mit *Funktionen* f - eine große Rolle. Dies ist Grund genug, sich an dieser Stelle in allgeinerer Form mit $\bigcup(x[E])$, $\bigcap(x[E])$ - hier ist x eine ansonsten beliebige Klasse - auseinander zu setzen.

262-1(Satz)

a) *Aus* "$p\in\bigcup(x[E])$" *folgt* "$\exists\Omega,\Phi:(p\in\Omega)\wedge(\Phi\in E)\wedge((\Phi,\Omega)\in x)$".

b) *Aus* "$p\in u$" *und* "$v\in E$" *und* "$(v,u)\in x$" *folgt* "$p\in\bigcup(x[E])$".

c) *Aus* "$p\in\bigcap(x[E])$" *und* "$v\in E$" *und* "$(v,u)\in x$" *folgt* "$p\in u$".

d) *Aus* "p *Menge*"
und "$\forall\alpha,\beta:((\beta\in E,\mathsf{dom}\,x)\wedge((\beta,\alpha)\in x))\Rightarrow(p\in\alpha)$"
folgt "$p\in\bigcap(x[E])$".

e) *Aus* "$0\neq E\cap\mathsf{dom}\,x$"
und "$\forall\alpha,\beta:((\beta\in E,\mathsf{dom}\,x)\wedge((\beta,\alpha)\in x))\Rightarrow(p\in\alpha)$"
folgt "$p\in\bigcap(x[E])$".

f) *Aus* "$0\neq E\subseteq\mathsf{dom}\,x$"
und "$\forall\alpha,\beta:((\beta\in E,\mathsf{dom}\,x)\wedge((\beta,\alpha)\in x))\Rightarrow(p\in\alpha)$"
folgt "$p\in\bigcap(x[E])$".

<u>Beweis **262-1**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \bigcup(x[E])$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \bigcup(x[E])$”
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : p \in \Omega \in x[E]$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in x[E]$”
folgt via **8-7**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge ((\Phi, \Omega) \in x)$.

`3:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `2`“$\exists \Phi \ldots$”,
aus `1`“$\ldots p \in \Omega \ldots$”,
aus `2`“$\ldots \Phi \in E \ldots$” und
aus `2`“$\ldots (\Phi, \Omega) \in x$”
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (p \in \Omega) \wedge (\Phi \in E) \wedge ((\Phi, \Omega) \in x)$.

`b)` `VS` gleich $(p \in u) \wedge (v \in E) \wedge ((v, u) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots (v, u) \in x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots v \in E \ldots$”
folgt via **8-8**: $u \in x[E]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in u \ldots$” und
aus `1`“$u \in x[E]$”
folgt via **1-12**: $p \in \bigcup(x[E])$.

`c)` `VS` gleich $(p \in \bigcap(x[E])) \wedge (v \in E) \wedge ((v, u) \in x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots (v, u) \in x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots v \in E \ldots$”
folgt via **8-8**: $u \in x[E]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in \bigcap(x[E]) \ldots$” und
aus `1`“$u \in x[E]$”
folgt via **1-13**: $p \in u$.

Beweis **262-1** `d)`
`VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\beta, \alpha) \in x)) \Rightarrow (p \in \alpha))$.

`Thema1.1` $\gamma \in x[E]$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\gamma \in x[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$.

`3:` Aus 2 "$\ldots (\Omega \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$" und
aus `VS` gleich
"$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\beta, \alpha) \in x)) \Rightarrow (p \in \alpha)$"
folgt: $p \in \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (p \in \gamma)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Menge…" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (p \in \gamma)$"
folgt via **1-13**: $p \in \bigcap(x[E])$.

`e)` `VS` gleich $(0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\beta, \alpha) \in x)) \Rightarrow (p \in \alpha))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **8-14**: $0 \neq x[E]$.

`Thema1.2` $\gamma \in x[E]$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\gamma \in x[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$.

`3:` Aus 2 "$\ldots (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \gamma) \in x)$" und
aus `VS` gleich
"$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\beta, \alpha) \in x)) \Rightarrow (p \in \alpha)$"
folgt: $p \in \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (p \in \gamma)$"

`2:` Aus `1.1` "$0 \neq x[E]$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in x[E]) \Rightarrow (p \in \gamma)$"
folgt via **1-13**: $p \in \bigcap(x[E])$.

Beweis **262-1** `f)`
`VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\beta, \alpha) \in x)) \Rightarrow (p \in \alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, x \ldots$"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{dom}\, x = E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `1`"$E \cap \mathsf{dom}\, x = E$"
folgt: $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, x) \wedge ((\beta, \alpha) \in x)) \Rightarrow (p \in \alpha)$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \in \bigcap(x[E])$.

$\square$

262-2. Für spezielle spätere Verwendung wird nun die "Funktions-Version" von **262-1** nachgereicht:

262-2(Satz)

a) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in \bigcup(f[E])$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p \in f(\Omega))$".

b) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$u \in E, \mathsf{dom}\, f$" *und* "$p \in f(u)$" *folgt* "$p \in \bigcup(f[E])$".

c) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in \bigcap(f[E])$" *und* "$u \in E, \mathsf{dom}\, f$" *folgt* "$p \in f(u)$".

d) *Aus* "f *Funktion*" *und* "p *Menge*" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha))$" *folgt* "$p \in \bigcap(f[E])$".

e) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha))$" *folgt* "$p \in \bigcap(f[E])$".

f) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha))$" *folgt* "$p \in \bigcap(f[E])$".

Beweis **262-2** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \bigcup(f[E]))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \in \bigcup(f[E])$"
folgt via **262-1**: $\exists \Phi, \Omega : (p \in \Phi) \wedge (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Phi) \in f)$.

2: Aus VS gleich "f Funktion…" und
aus 1"$\ldots (\Omega, \Phi) \in f$"
folgt via **18-20**: $\Phi = f(\Omega)$.

3: Aus 1"$\ldots p \in \Phi \ldots$" und
aus 2"$\Phi = f(\Omega)$"
folgt: $p \in f(\Omega)$.

4: Aus 1"$\exists \ldots \Omega \ldots$",
aus 1"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 3"$p \in f(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p \in f(\Omega))$.

<u>Beweis **262-2**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (u \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge (p \in f(u))$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \ldots \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(u, f(u)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in f(u)$",
aus `VS` gleich "$\ldots u \in E \ldots$" und
aus `2`"$(u, f(u)) \in f$"
folgt via **262-1**: $p \in \bigcup(f[E])$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \bigcap(f[E])) \wedge (u \in E, \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \ldots \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(u, f(u)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \bigcap(f[E]) \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots u \in E \ldots$" und
aus `1`"$(u, f(u)) \in f$"
folgt via **262-1**: $p \in f(u)$.

<u>Beweis</u> **262-2** `d)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha)))$.

`Thema1.1` $(\beta \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `Thema1.1`"…$(\beta, \gamma) \in f$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E, \mathsf{dom}\, f$…" und
aus `VS` gleich "…$\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha))$"
folgt: $p \in f(\beta)$.

`4:` Aus `3`"$p \in f(\beta)$" und
aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$"
folgt: $p \in \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \gamma, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (p \in \gamma)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "…p Menge…" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (p \in \gamma)$"
folgt via **262-1**: $p \in \bigcap (f[E])$.

Beweis **262-2** `e)` `VS` gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha)))$$

`Thema1.1` $(\beta \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `Thema1.1`"… $(\beta, \gamma) \in f$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E, \mathsf{dom}\, f$ …" und
aus `VS` gleich "… $\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha))$"
folgt: $p \in f(\beta)$.

`4:` Aus `3`"$p \in f(\beta)$" und
aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$"
folgt: $p \in \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \gamma, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (p \in \gamma)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "… $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f$ …" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \beta : ((\beta \in E, \mathsf{dom}\, f) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (p \in \gamma)$"
folgt via **262-1**: $p \in \bigcap(f[E])$.

`f)`
`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha)))$.

`1:` Aus `VS` gleich "… $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$ …"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{dom}\, f = E$.

`2:` Aus `VS` gleich "… $0 \neq E$ …" und
aus `1.1`"$E \cap \mathsf{dom}\, f = E$"
folgt: $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `2`"$0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "… $\forall \alpha : (\alpha \in E, \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (p \in f(\alpha))$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \in \bigcap(f[E])$.

□

262-3. Verdächtiger Weise ist der folgende (Hilfs-)Satz nicht in **Suite I** zu finden:

262-3(Satz)

a) $\{p, \mathcal{U}\} = \{p\}$.

b) $\{\mathcal{U}, q\} = \{q\}$.

c) $\{\mathcal{U}, \mathcal{U}\} = 0$.

Beweis **262-3** a)

1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **4-12**: $\{p, \mathcal{U}\} = \{p\}$.

b)

1: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus 1"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **4-12**: $\{\mathcal{U}, q\} = \{q\}$.

c)

1: $\{\mathcal{U}, \mathcal{U}\} \stackrel{\text{a)}}{=} \{\mathcal{U}\} \stackrel{\mathbf{1-5}}{=} 0$.

2: Aus 1
folgt: $\{\mathcal{U}, \mathcal{U}\} = 0$.

□

262-4. Nun sollen einige Spezialfälle von $\bigcup(f[E])$ und $\bigcap(f[E])$, f Funktion, angesprochen werden. Vorab wird die für Funktionen f gültige Gleichung "$f[\{p,q\}] = \{f(p), f(q)\}$" - unabhängig davon, ob $p, q \in \mathsf{dom}\, f$ oder nicht - bewiesen.

<u>**262-4(Satz)**</u>

a) *Aus "f Funktion" folgt "$f[\{p,q\}] = \{f(p), f(q)\}$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$p \in \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$\bigcup(f[\{p\}]) = f(p)$" und "$\bigcap(f[\{p\}]) = f(p)$".

c) *Aus "f Funktion" und "$p \notin \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$\bigcup(f[\{p\}]) = 0$" und "$\bigcap(f[\{p\}]) = \mathcal{U}$".

d) *Aus "f Funktion" und "$p, q \in \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$\bigcup(f[\{p,q\}]) = f(p) \cup f(q)$"
und "$\bigcap(f[\{p,q\}]) = f(p) \cap f(q)$".

e) *Aus "f Funktion" und "$p \in \mathsf{dom}\, f$" und "$q \notin \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$\bigcup(f[\{p,q\}]) = f(p)$" und "$\bigcap(f[\{p,q\}]) = f(p)$".

f) *Aus "f Funktion" und "$p \notin \mathsf{dom}\, f$" und "$q \in \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$\bigcup(f[\{p,q\}]) = f(q)$" und "$\bigcap(f[\{p,q\}]) = f(q)$".

g) *Aus "f Funktion" und "$p, q \notin \mathsf{dom}\, f$"*
folgt "$\bigcup(f[\{p,q\}]) = 0$" und "$\bigcap(f[\{p,q\}]) = \mathcal{U}$".

<u>Beweis **262-4**</u> `a)` `VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via **259-16**: $f[\{p\}] = \{f(p)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via **259-16**: $f[\{q\}] = \{f(q)\}$.

`2:`
$$f[\{p,q\}] \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} f[\{p\} \cup \{q\}] \stackrel{\mathbf{9-8}}{=} f[\{p\}] \cup f[\{q\}] \stackrel{1.1}{=} \{f(p)\} \cup f[\{q\}]$$
$$\stackrel{1.2}{=} \{f(p)\} \cup \{f(q)\} \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \{f(p), f(q)\}.$$

`3:` Aus 2
folgt: $f[\{p,q\}] = \{f(p), f(q)\}$.

<u>Beweis **262-4**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f[\{p\}] = \{f(p)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$p \in \mathsf{dom}\, f$)"
folgt via **17-5**: $f(p)$ Menge.

`2.1:` Aus `1.2`"$f(p)$ Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{f(p)\} = f(p)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$f(p)$ Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{f(p)\} = f(p)$.

`3.1:` $\bigcup(f[\{p\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcup\{f(p)\} \stackrel{2.1}{=} f(p)$.

`3.2:` $\bigcap(f[\{p\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcap\{f(p)\} \stackrel{2.2}{=} f(p)$.

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $\boxed{\bigcup(f[\{p\}]) = f(p)}$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $\boxed{\bigcap(f[\{p\}]) = f(p)}$

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **259-16**: $f[\{p\}] = \{f(p)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$p \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(p) = \mathcal{U}$.

`2.1:` $\bigcup(f[\{p\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcup\{f(p)\} \stackrel{1.2}{=} \bigcup\{\mathcal{U}\} \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} 0$.

`2.2:` $\bigcap(f[\{p\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcap\{f(p)\} \stackrel{1.2}{=} \bigcap\{\mathcal{U}\} \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{\bigcup(f[\{p\}]) = 0}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\bigcap(f[\{p\}]) = \mathcal{U}}$

<u>Beweis **262-4**</u> `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p, q \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f[\{p, q\}] = \{f(p), f(q)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-5**: $f(p)$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-5**: $f(q)$ Menge.

`2.1:` Aus `1.2`"$f(p)$ Menge" und
aus `1.3`"$f(q)$ Menge"
folgt via **4-16**: $\bigcup\{f(p), f(q)\} = f(p) \cup f(q)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$f(p)$ Menge" und
aus `1.3`"$f(q)$ Menge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{f(p), f(q)\} = f(p) \cap f(q)$.

`3.1:` $\bigcup(f[\{p, q\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcup\{f(p), f(q)\} \stackrel{2.1}{=} f(p) \cup f(q)$.

`3.2:` $\bigcap(f[\{p, q\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcap\{f(p), f(q)\} \stackrel{2.2}{=} f(p) \cap f(q)$.

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $\boxed{\bigcup(f[\{p, q\}]) = f(p) \cup f(q)}$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $\boxed{\bigcap(f[\{p, q\}]) = f(p) \cap f(q)}$

<u>Beweis **262-4**</u> `e)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (q \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via **259-16**: $f[\{p\}] = \{f(p)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f[\{p, q\}] = \{f(p), f(q)\}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\bigcup(f[\{p\}]) = f(p)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\bigcap(f[\{p\}]) = f(p)$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(q)$ Unmenge.

`2:` Aus `1.5` "$f(q)$ Unmenge"
folgt via **4-12**: $\{f(p), f(q)\} = \{f(p)\}$.

`3.1:` $\bigcup(f[\{p, q\}]) \stackrel{1.2}{=} \bigcup\{f(p), f(q)\} \stackrel{2}{=} \bigcup\{f(p)\} \stackrel{1.1}{=} \bigcup(f[\{p\}]) \stackrel{1.3}{=} f(p)$.

`3.2:` $\bigcap(f[\{p, q\}]) \stackrel{1.2}{=} \bigcap\{f(p), f(q)\} \stackrel{2}{=} \bigcap\{f(p)\} \stackrel{1.1}{=} \bigcap(f[\{p\}]) \stackrel{1.4}{=} f(p)$.

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $\boxed{\bigcup(f[\{p, q\}]) = f(p)}$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $\boxed{\bigcap(f[\{p, q\}]) = f(p)}$

<u>Beweis</u> **262-4** `f)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \notin \mathsf{dom}\, f) \wedge (q \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\bigcup(f[\{q,p\}]) = f(q)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `VS` gleich "$\ldots q \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\bigcap(f[\{q,p\}]) = f(q)$.

`2.1:` $\bigcup(f[\{p,q\}]) \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \bigcup(f[\{q,p\}]) \stackrel{1.1}{=} f(q)$.

`2.2:` $\bigcap(f[\{p,q\}]) \stackrel{\mathbf{4-11}}{=} \bigcap(f[\{q,p\}]) \stackrel{1.2}{=} f(q)$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\bigcup(f[\{p,q\}]) = f(q)$.

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\bigcap(f[\{p,q\}]) = f(q)$.

`g)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p, q \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f[\{p,q\}] = \{f(p), f(q)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(p) = \mathcal{U}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(q) = \mathcal{U}$.

`1.4:` Via **262-3** gilt: $\{\mathcal{U}, \mathcal{U}\} = 0$.

`2.1:` $\bigcup(f[\{p,q\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcup\{f(p), f(q)\} \stackrel{1.2}{=} \bigcup\{\mathcal{U}, f(q)\} \stackrel{1.3}{=} \bigcup\{\mathcal{U}, \mathcal{U}\} \stackrel{1.4}{=} \bigcup 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} 0$.

`2.2:` $\bigcap(f[\{p,q\}]) \stackrel{1.1}{=} \bigcap\{f(p), f(q)\} \stackrel{1.2}{=} \bigcap\{\mathcal{U}, f(q)\} \stackrel{1.3}{=} \bigcap\{\mathcal{U}, \mathcal{U}\} \stackrel{1.4}{=} \bigcap 0 \stackrel{\mathbf{1-14}}{=} \mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{\bigcup(f[\{p,q\}]) = 0}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\boxed{\bigcap(f[\{p,q\}]) = \mathcal{U}}$

□

262-5. $\bigcup(f[E])$ und $\bigcap(f[E])$ werden für die Funktionen $f = 0$ und $f = \mathsf{id}_D$ untersucht.

262-5(Satz)

a) "$\bigcup(0[E]) = 0$" *und* "$\bigcap(0[E]) = \mathcal{U}$".

b) "$\bigcup(\mathsf{id}[E]) = \bigcup E$" *und* "$\bigcap(\mathsf{id}[E]) = \bigcap E$".

c) "$\bigcup(\mathsf{id}_E[E]) = \bigcup E$" *und* "$\bigcap(\mathsf{id}_E[E]) = \bigcap E$".

d) "$\bigcup(\mathsf{id}_D[E]) = \bigcup(D \cap E)$" *und* "$\bigcap(\mathsf{id}_D[E]) = \bigcap(D \cap E)$".

Beweis. a)

1.1: $$\bigcup(0[E]) \stackrel{\textbf{8-12}}{=} \bigcup 0 \stackrel{\textbf{1-14}}{=} 0.$$

1.2: $$\bigcap(0[E]) \stackrel{\textbf{8-12}}{=} \bigcap 0 \stackrel{\textbf{1-14}}{=} \mathcal{U}.$$

b)

1.1: $$\bigcup(\mathsf{id}[E]) \stackrel{\textbf{94-15}}{=} \bigcup E.$$

1.2: $$\bigcap(\mathsf{id}[E]) \stackrel{\textbf{94-15}}{=} \bigcap E.$$

c)

1.1: $$\bigcup(\mathsf{id}_E[E]) \stackrel{\textbf{94-15}}{=} \bigcup(E \cap E) \stackrel{\textbf{2-14}}{=} \bigcup E.$$

1.2: $$\bigcap(\mathsf{id}_E[E]) \stackrel{\textbf{94-15}}{=} \bigcap(E \cap E) \stackrel{\textbf{2-14}}{=} \bigcap E.$$

d)

1.1: $$\bigcup(\mathsf{id}_D[E]) \stackrel{\textbf{94-15}}{=} \bigcup(D \cap E).$$

1.2: $$\bigcap(\mathsf{id}_D[E]) \stackrel{\textbf{94-15}}{=} \bigcap(D \cap E).$$

□

Topologie: τ Topologie.

Ersterstellung: 16/01/14 **Letzte Änderung: 05/06/14**

263-1. Einer lang gehegten Vision folgend wird hier eine Definition einer Topologie - unabhängig von einer "Grundmenge" - gegeben, die sich ausschließlich an Funktionen orientiert. Der Symmetriebruch bezüglich Vereinigung und Durchschnitt von Klassen $\alpha[\gamma]$ tritt deutlich hervor.

263-1(Definition) "τ **Topologie**" genau dann, wenn gilt:

1) $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha : \beta \to \tau) \wedge (\gamma \subseteq \beta)) \Rightarrow (\bigcup(\alpha[\gamma]) \in \tau)$.

2) $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha : \beta \to \tau) \wedge (0 \neq \gamma \subseteq \beta) \wedge (\gamma \text{ endlich}))$
$\Rightarrow (\bigcap(\alpha[\gamma]) \in \tau)$.

263-2. Aus der Definition einer Topologie τ folgen ohne viel Weiteres die folgenden, vertraut erscheinenden Aussagen:

263-2(Satz)

a) *Aus "τ Topologie" folgt "$0 \in \tau \neq 0$".*

b) *Aus "τ Topologie" folgt "$\bigcup \tau \in \tau$".*

c) *Aus "τ Topologie" folgt "$\tau, \bigcup \tau$ Menge".*

d) *Aus "τ Topologie" und "$O \subseteq \tau$" folgt "$\bigcup O \in \tau$".*

e) *Aus "τ Topologie" und "$0 \neq O \subseteq \tau$" und "O endlich" folgt "$\bigcap O \in \tau$".*

f) *Aus "τ Topologie" und "$U, V \in \tau$" folgt "$U \cup V \in \tau$" und "$U \cap V \in \tau$".*

Beweis **263-2** a) VS gleich τ Topologie.

1.1: Via **0-6** gilt: $0 \subseteq 0$.

1.2: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \tau$.

2: Aus **21-13**"$0 : 0 \to 0$" und aus 1.2"$0 \subseteq \tau$" folgt via **21-5**: $0 : 0 \to \tau$.

3: Aus VS gleich "τ Topologie", aus 2"$0 : 0 \to \tau$" und aus 1.1"$0 \subseteq 0$" folgt via **263-1(Def)**: $\bigcup(0[0]) \in \tau$.

4: Via **262-5** gilt: $\bigcup(0[0]) = 0$.

5: Aus 3"$\bigcup(0[0]) \in \tau$" und aus 4"$\bigcup(0[0]) = 0$" folgt: $\boxed{0 \in \tau}$

6: Aus 5"$0 \in \tau$" folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq \tau}$

<u>Beweis **263-2**</u> `b)` `VS` gleich τ Topologie.

`1.1:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_\tau : \tau \to \tau$.

`1.2:` Via **0-6** gilt: $\tau \subseteq \tau$.

`1.3:` Via **262-5** gilt: $\bigcup(\mathsf{id}_\tau[\tau]) = \bigcup \tau$.

`2:` Aus `VS` gleich "τ Topologie",
aus `1.1`"$\mathsf{id}_\tau : \tau \to \tau$" und
aus `1.2`"$\tau \subseteq \tau$"
folgt via **263-1(Def)**: $\bigcup(\mathsf{id}_\tau[\tau]) \in \tau$.

`3:` Aus `1.3`"$\bigcup(\mathsf{id}_\tau[\tau]) = \bigcup \tau$" und
aus `2`"$\bigcup(\mathsf{id}_\tau[\tau]) \in \tau$"
folgt: $\bigcup \tau \in \tau$.

`c)` `VS` gleich τ Topologie.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\bigcup \tau \in \tau$.

`2:` Aus `1`"$\bigcup \tau \in \tau$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{\bigcup \tau \text{ Menge}}$

`3.1:` Aus `2`"$\bigcup \tau$ Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(\bigcup \tau)$ Menge.

`3.2:` Via **261-1** gilt: $\tau \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \tau)$.

`4:` Aus `3.2`"$\tau \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \tau)$" und
aus `3.1`"$\mathcal{P}(\bigcup \tau)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\boxed{\tau \text{ Menge}}$

<u>Beweis **263-2**</u> `d)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie}) \wedge (O \subseteq \tau)$.

`1.1:` Via **0-6** gilt: $O \subseteq O$.

`1.2:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_O : O \to O$.

`2:` Aus `1.2`“$\mathsf{id}_O : O \to O$” und
aus `VS` gleich “$\ldots O \subseteq \tau$”
folgt via **21-5**: $\mathsf{id}_O : O \to \tau$.

`3:` Aus `VS` gleich “τ Topologie…”,
aus `2`“$\mathsf{id}_O : O \to \tau$” und
aus `1.1`“$O \subseteq O$”
folgt via **263-1(Def)**: $\bigcup(\mathsf{id}_O[O]) \in \tau$.

`4:` Via **262-5** gilt: $\bigcup(\mathsf{id}_O[O]) = \bigcup O$.

`5:` Aus `3`“$\bigcup(\mathsf{id}_O[O]) \in \tau$” und
aus `4`“$\bigcup(\mathsf{id}_O[O]) = \bigcup O$”
folgt: $\bigcup O \in \tau$.

`e)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie}) \wedge (0 \neq O \subseteq \tau) \wedge (O \text{ endlich})$.

`1.1:` Via **0-6** gilt: $O \subseteq O$.

`1.2:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_O : O \to O$.

`2:` Aus `1.2`“$\mathsf{id}_O : O \to O$” und
aus `VS` gleich “$\ldots O \subseteq \tau \ldots$”
folgt via **21-5**: $\mathsf{id}_O : O \to \tau$.

`3:` Aus `VS` gleich “τ Topologie…”,
aus `2`“$\mathsf{id}_O : O \to \tau$”,
aus `VS` gleich “$\ldots 0 \neq O \subseteq \tau \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots O$ endlich”
folgt via **263-1(Def)**: $\bigcap(\mathsf{id}_O[O]) \in \tau$.

`4:` Via **262-5** gilt: $\bigcap(\mathsf{id}_O[O]) = \bigcap O$.

`5:` Aus `3`“$\bigcap(\mathsf{id}_O[O]) \in \tau$” und
aus `4`“$\bigcap(\mathsf{id}_O[O]) = \bigcap O$”
folgt: $\bigcap O \in \tau$.

<u>Beweis</u> **263-2** `f)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie}) \wedge (U, V \in \tau)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots U, V \in \tau$"
folgt via **4-14**: $\{U, V\} \subseteq \tau$.

`1.2:` Via **28-8** gilt: $\{U, V\}$ endlich.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots U, V \in \tau$"
folgt via **ElementAxiom**: U, V Menge.

`2.1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie… " und
aus `1.1`"$\{U, V\} \subseteq \tau$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\bigcup\{U, V\} \in \tau$.

`2.2:` Aus `1.3`"$U \ldots$ Menge"
folgt via **4-10**: $0 \neq \{U, V\}$.

`2.3:` Aus `1.3`"U, V Menge"
folgt via **4-16**: $\bigcup\{U, V\} = U \cup V$.

`2.4:` Aus `1.3`"U, V Menge"
folgt via **4-17**: $\bigcap\{U, V\} = U \cap V$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\bigcup\{U, V\} \in \tau$" und
aus `2.3`"$\bigcup\{U, V\} = U \cup V$"

folgt: $\boxed{U \cup V \in \tau}$

`3.2:` Aus `VS` gleich "τ Topologie… ",
aus `2.2`"$0 \neq \{U, V\}$",
aus `1.1`"$\{U, V\} \subseteq \tau$" und
aus `1.2`"$\{U, V\}$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\bigcap\{U, V\} \in \tau$.

`4:` Aus `3.2`"$\bigcap\{U, V\} \in \tau$" und
aus `2.4`"$\bigcap\{U, V\} = U \cap V$"

folgt: $\boxed{U \cap V \in \tau}$

□

263-3. Nun sollen die klassischen, auf Vereinigungs- und Durchschnittsbildung beruhenden, hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen einer Topologie etabliert werden. Hierfür sind einige Vorbereitungen, insbesondere zwei Induktionsbeweise, erforderlich.

263-3(Definition)

$$\mathsf{263.0}(x) = \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}.$$

263-4. Wegen $\bigcap 0 = \mathcal{U}$ ist $0 \notin \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap w \in x)\}$ nicht verblüffend.

263-4(Satz)

a) $0 \notin \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

b) $x_{\text{sngltn}} \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

$\{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$ **263-3(Def)**

Beweis 263-4. a)

1: Es gilt: $(0 \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}) \vee (0 \notin \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

2: Aus `1.1.Fall`“$0 \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$”
folgt: $(0 \subseteq x) \wedge (\bigcap 0 \in x)$.

3: Aus **1-14**“$\bigcap 0 = \mathcal{U}$” und
aus 2“$\ldots \bigcap 0 \in x$”
folgt: $\mathcal{U} \in x$.

4: Es gilt 3“$\mathcal{U} \in x$” .
Via **94-1** gilt “$\mathcal{U} \notin x$” .
Ex falso quodlibet folgt: $0 \notin \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 \notin \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

<u>Beweis</u> **263-4** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in x_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\alpha = \{\Omega\}) \wedge (\Omega \in x)$.

`3.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \subseteq x$.

`4:` Aus `3.2` "Ω Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{\Omega\} = \Omega$.

`5:` Aus `4` "$\bigcap\{\Omega\} = \Omega$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in x$"
folgt: $\bigcap\{\Omega\} \in x$.

`6:` Aus `3.3` "$\{\Omega\} \subseteq x$",
aus `5` "$\bigcap\{\Omega\} \in x$" und
aus `3.1` "$\{\Omega\}$ Menge"
folgt: $\{\Omega\} \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap\omega \in x)\}$.

`7:` Aus `2` "$\ldots \alpha = \{\Omega\} \ldots$" und
aus `6` "$\{\Omega\} \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap\omega \in x)\}$"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap\omega \in x)\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap\omega \in x)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x_{\text{sngltn}} \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap\omega \in x)\}$.

$\square$

263-5. Ist der binäre Durchschnitt von Elementen von x wieder in x, so ist $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$ eine TeilKlasse von $\{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

263-5(Satz)

Aus "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cap \beta \in x)$"
folgt "$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x) \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$".

$\{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$ **263-3(Def)**

Beweis **263-5** `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cap \beta \in x)$.

`Thema1.1` $\alpha \in x$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x$"
folgt via **27-3**: $\{\alpha\} \in x_{\text{sngltn}}$.

3: Via **263-4** gilt: $x_{\text{sngltn}} \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

4: Aus 2"$\{\alpha\} \in x_{\text{sngltn}}$" und
aus 3"$x_{\text{sngltn}} \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$"
folgt via **0-4**: $\{\alpha\} \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\{\alpha\} \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\})$"

<u>Beweis **263-5**</u> `VS` gleich $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cap\beta\in x)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\delta\in x)\wedge(\epsilon\in\{\omega:(\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\})\wedge(\epsilon\subseteq x)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\delta\in x\ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: δ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots\epsilon\in\{\omega:(\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\}\ldots$"
folgt: $(\epsilon$ Menge$)\wedge(\epsilon\subseteq x)\wedge(\bigcap\epsilon\in x)$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`"$\delta\in x\ldots$"
folgt via **1-8**: $\{\delta\}\subseteq x$.

`3.1:` Aus `2.1`"δ Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{\delta\}=\delta$.

`3.2:` Aus `2.2`"ϵ Menge$\ldots$"
folgt via **2-28**: $\{\delta\}\cup\epsilon$ Menge.

`3.3:` Aus `Thema1.2`"$\delta\in x\ldots$",
aus `2.2`"$\ldots\bigcap\epsilon\in x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cap\beta\in x)$"
folgt: $\delta\cap\bigcap\epsilon\in x$.

`3.4:` Aus `2.3`"$\{\delta\}\subseteq x$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots\epsilon\subseteq x$"
folgt via **2-12**: $\{\delta\}\cup\epsilon\subseteq x$.

`4:` $\bigcap(\{\delta\}\cup\epsilon)\stackrel{\mathbf{2-34}}{=}(\bigcap\{\delta\})\cap\bigcap\epsilon\stackrel{3.1}{=}\delta\cap\bigcap\epsilon$.

`5:` Aus `4`"$\bigcap(\{\delta\}\cup\epsilon)=\ldots=\delta\cap\bigcap\epsilon$" und
aus `3.3`"$\delta\cap\bigcap\epsilon\in x$"
folgt: $\bigcap(\{\delta\}\cup\epsilon)\in x$.

`6:` Aus `3.4`"$\{\delta\}\cup\epsilon\subseteq x$",
aus `5`"$\bigcap(\{\delta\}\cup\epsilon)\in x$" und
aus `3.2`"$\{\delta\}\cup\epsilon$ Menge"
folgt: $\{\delta\}\cup\epsilon\in\{\omega:(\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\}$.

...

<u>Beweis **263-5**</u> `VS` gleich $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta\in x)\Rightarrow(\alpha\cap\beta\in x)$.

...

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall\delta,\epsilon : (\delta\in x)\wedge(\epsilon\in\{\omega : (\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\})\wedge(\epsilon\subseteq x)$ $\Rightarrow(\{\delta\}\cup\epsilon\in\{\omega : (\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\forall\alpha : (\alpha\in x)\Rightarrow(\{\alpha\}\in\{\omega : (\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\})$" und
aus `A2` gleich "$\forall\delta,\epsilon : (\delta\in x)\wedge(\epsilon\in\{\omega : (\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\})\wedge(\epsilon\subseteq x)$
$\Rightarrow(\{\delta\}\cup\epsilon\in\{\omega : (\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\})$"
folgt via $\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)$**Induktion**:

$$\mathcal{P}^*_{\text{endl}}(x)\subseteq\{\omega : (\omega\subseteq x)\wedge(\bigcap\omega\in x)\}.$$

□

263-6. Ist der binäre Durchschnitt von Elementen von x wieder in x, so ist auch der Durchschnitt jeder endlichen, nichtleeren Teilmenge von x in x.

263-6(Satz) *Es gelte:*

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cap \beta \in x)$.

→) $0 \neq E \subseteq x$.

→) E *endlich.*

Dann folgt "$\bigcap E \in x$".

Beweis **263-6**

$\{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$ **263-3(Def)**

`1.1:` Aus →)"$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \cap \beta \in x)$"
folgt via **263-5**: $\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

`1.2:` Aus →)"$0 \neq E \subseteq x$" und
aus →)"E endlich"
folgt via **33-2**: $E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1.2`"$E \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x)$" und
aus `1.1`"$\mathcal{P}^*_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$"
folgt via **0-4**: $E \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\bigcap \omega \in x)\}$"
folgt: $\bigcap E \in x$.

□

263-7. Wie in **8-14** gesagt, folgt aus $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x$ die Aussage $0 \neq x[E]$. Dieses Resultat kann leicht für Klassen E mit $0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ re-formuliert werden.

263-7(Satz)

Aus "$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" *folgt* "$0 \neq x[E]$".

Beweis **263-7** `VS` gleich $0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{dom}\, x = E$.

`2`: Aus `VS` gleich "$0 \neq E \ldots$" und
aus `1`"$E \cap \mathsf{dom}\, x = E$"
folgt: $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x$.

`3`: Aus `2`"$0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **8-14**: $0 \neq x[E]$.

$\square$

263-8. Satz **263-7** kann einfach für $f : D \to B$ re-formuliert werden. Im Speziellen ist $f[E]$ für jede Klasse E mit $0 \neq E \subseteq D$ nichtleer.

263-8(Satz)

a) *Aus* “$f : D \to B$” *und* “$0 \neq E \cap D$” *folgt* “$0 \neq f[E]$”.

b) *Aus* “$f : D \to B$” *und* “$0 \neq E \subseteq D$” *folgt* “$0 \neq f[E]$”.

Beweis **263-8** a) VS gleich $(f : D \to B) \wedge (0 \neq E \cap D)$.

1: Aus VS gleich “$f : D \to B \ldots$” folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

2: Aus VS gleich “$\ldots 0 \neq E \cap D$” und aus 1“$\mathsf{dom}\, f = D$” folgt: $0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus 2“$0 \neq E \cap \mathsf{dom}\, f$” folgt via **8-14**: $0 \neq f[E]$.

b) VS gleich $(f : D \to B) \wedge (0 \neq E \subseteq D)$.

1: Aus VS gleich “$f : D \to B \ldots$” folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

2: Aus VS gleich “$\ldots 0 \neq E \subseteq D$” und aus 1“$\mathsf{dom}\, f = D$” folgt: $0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus 2“$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, f$” folgt via **263-7**: $0 \neq f[E]$.

□

263-9. Die Klasse aller Klassen ω mit $x[\omega]$ endlich wird nun in die Essays eingebracht.

263-9(Definition)

$$\mathsf{263.1}(x) = \{\omega : x[\omega] \text{ endlich}\}.$$

263-10. Wegen $x[0] = 0$ und 0 endlich gilt $0 \in \{\omega : x[\omega]$ endlich$\}$.

263-10(Satz)

$0 \in \{\omega : x[\omega]$ endlich$\}$.

$\{\omega : x[\omega]$ endlich$\}$ **263-9(Def)**

Beweis **263-10**

1: Via **8-12** gilt: $x[0] = 0$.

2: Aus 1"$x[0] = 0$" und
aus **EndlichkeitsAxiom**"0 endlich"
folgt: $x[0]$ endlich.

3: Aus 2"$x[0]$ endlich" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : x[\omega]$ endlich$\}$.

□

263-11. Funktionen führen endliche Mengen in endliche Mengen über.

263-11(Satz)

a) *Aus "f Funktion" folgt "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}} \subseteq \{\omega : f[\omega]$ endlich$\}$".*

b) *Aus "f Funktion" und "E endlich" folgt "$f[E]$ endlich".*

$\{\omega : x[\omega]$ endlich$\}$ **263-9(Def)**

Beweis **263-11** `a)` `VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Via **263-10** gilt: `A1` | "$0 \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **259-16**: $f[\{\beta\}] = \{f(\beta)\}$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$"
folgt: $(\beta \text{ Menge}) \wedge (f[\beta] \text{ endlich})$.

`3.1:` $f[\{\alpha\} \cup \beta] \stackrel{\mathbf{9-8}}{=} f[\{\alpha\}] \cup f[\beta] \stackrel{2.1}{=} \{f(\alpha)\} \cup f[\beta]$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots f[\beta]$ endlich"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\{f(\alpha)\} \cup f[\beta]$ endlich.

`3.3:` Aus `2.2`"β Menge…"
folgt via **2-28**: $\{\alpha\} \cup \beta$ Menge.

`4:` Aus `3.1`"$f[\{\alpha\} \cup \beta] = \ldots = \{f(\alpha)\} \cup f[\beta]$" und
aus `3.2`"$\{f(\alpha)\} \cup f[\beta]$ endlich"
folgt: $f[\{\alpha\} \cup \beta]$ endlich.

`5:` Aus `3.3`"$\{\alpha\} \cup \beta$ Menge" und
aus `4`"$f[\{\alpha\} \cup \beta]$ endlich"
folgt: $\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\})$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$0 \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}) \Rightarrow (\{\alpha\} \cup \beta \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\})$"
folgt via $\mathcal{P}_{\text{endl}}$**Induktion**: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$.

Beweis **263-11** `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…E endlich"
folgt via **28-7**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `1.2`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `1.1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}} \subseteq \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$"
folgt via **0-4**: $E \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$.

`3:` Aus `2`"$E \in \{\omega : f[\omega] \text{ endlich}\}$"
folgt: $f[E]$ endlich.

□

263-12. Die klassische Charakterisierung von Topologien kommt ohne Funktionen aus.

263-12(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau)$.

Dann folgt "τ Topologie".

Beweis **263-12**

`Thema1.1` $(\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (\phi \subseteq \epsilon)$.

2: Aus `Thema1.1`"$\delta : \epsilon \to \tau \ldots$"
folgt via **94-13**: $\delta[\phi] \subseteq \tau$.

3: Aus 2"$\delta[\phi] \subseteq \tau$" und
aus $\rightarrow\!)$"$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)$"
folgt: $\bigcup(\delta[\phi]) \in \tau$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \delta, \epsilon, \phi : ((\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (\phi \subseteq \epsilon)) \Rightarrow (\bigcup(\delta[\phi]) \in \tau)$"

...

Beweis **263-12**

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (0 \neq \phi \subseteq \epsilon) \wedge (\phi \text{ endlich})$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\delta : \epsilon \to \tau \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: δ Funktion.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\delta : \epsilon \to \tau \ldots$"
folgt via **94-13**: $\delta[\phi] \subseteq \tau$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`"$(\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (0 \neq \phi \subseteq \epsilon) \ldots$"
folgt via **263-8**: $0 \neq \delta[\phi]$.

`3:` Aus `2.1`"δ Funktion" und
aus `Thema1.2`"$\ldots \phi$ endlich"
folgt via **263-11**: $\delta[\phi]$ endlich.

`4:` Aus →) "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau)$",
aus `2.3`"$0 \neq \delta[\phi]$",
aus `2.2`"$\delta[\phi] \subseteq \tau$" und
aus `3`"$\delta[\phi]$ endlich"
folgt via **263-6**: $\bigcap(\delta[\phi]) \in \tau$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \delta, \epsilon, \phi : ((\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (0 \neq \phi \subseteq \epsilon) \wedge (\phi \text{ endlich})) \Rightarrow (\bigcap(\delta[\phi]) \in \tau)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \delta, \epsilon, \phi : ((\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (\phi \subseteq \epsilon)) \Rightarrow (\bigcup(\delta[\phi]) \in \tau)$" und
aus `A2` gleich "$\forall \delta, \epsilon, \phi : (\delta : \epsilon \to \tau) \wedge (0 \neq \phi \subseteq \epsilon) \wedge (\phi \text{ endlich})$
$\Rightarrow (\bigcap(\delta[\phi]))$"
folgt via **263-1(Def)**: τ Topologie.

□

Literatur.

K.P. Grotemeyer, Topologie, *B.I. Mannheim/Wien/Zürich*, 1969.

Topologie: τ Topologie in X.

Ersterstellung: 18/01/14 **Letzte Änderung: 06/06/14**

264-1. In geradezu klassischer Weise wird nun gesagt, was unter einer Topologie in X zu verstehen ist. Hier ist X eine Art Grundmenge, die traditioneller Weise mit einem Großbuchstaben bezeichnet wird.

264-1(Definition) "τ **Topologie in** X" genau dann, wenn gilt:

1) $X \in \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$.

2) $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)$.

3) $\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau)$.

264-2. Der Zusammenhang einer Topologie in X mit einer Topologie schlechthin ist einfach herzustellen.

264-2(Satz)

a) *Aus "τ Topologie in X" folgt "τ Topologie" und "$\bigcup \tau = X$".*

b) *Aus "τ Topologie" folgt "τ Topologie in $\bigcup \tau$".*

Beweis **264-2** a) VS gleich τ Topologie in X.

1: Aus VS gleich "τ Topologie in X"
folgt via **264-1(Def)**:

$$(X \in \tau \subseteq \mathcal{P}(X)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)) \wedge (\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau)).$$

2.1: Aus 1"$X \in \tau \ldots$"
folgt via **1-15**: $X \subseteq \bigcup \tau$.

2.2: Aus 1"$\ldots \tau \subseteq \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-28**: $\bigcup \tau \subseteq \bigcup \mathcal{P}(x)$.

2.3: Aus 1"$\ldots (\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)) \ldots$" und
aus 1"$\ldots \forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau))$"
folgt via **263-1(Def)**: $\boxed{\tau \text{ Topologie}}$

3: Via **1-19** gilt: $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$.

4: Aus 2.2"$\bigcup \tau \subseteq \bigcup \mathcal{P}(X)$" und
aus 3"$\bigcup \mathcal{P}(X) = X$"
folgt: $\bigcup \tau \subseteq X$.

5: Aus 2.1"$X \subseteq \bigcup \tau$" und
aus 4"$\bigcup \tau \subseteq X$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{\bigcup \tau = X}$

Beweis **264-2** `b)` `VS` gleich τ Topologie.

`Thema1.1` $\alpha \subseteq \tau$.

Aus `VS` gleich "τ Topologie" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \subseteq \tau$"
folgt via **263-2**: $\bigcup \alpha \in \tau$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)$"

`Thema1.2` $\beta, \gamma \in \tau$.

Aus `VS` gleich "τ Topologie" und
aus `Thema1.2`"$\beta, \gamma \in \tau$"
folgt via **263-2**: $\beta \cap \gamma \in \tau$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau)$"

`1.3`: Aus `VS` gleich "τ Topologie"
folgt via **263-2**: $\bigcup \tau \in \tau$.

`1.4`: Via **261-1**
gilt: $\tau \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \tau)$.

`2`: Aus `1.3`"$\bigcup \tau \in \tau$",
aus `1.4`"$\tau \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \tau)$",
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \tau) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \tau)$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \tau) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \tau)$"
folgt via **264-1(Def)**: τ Topologie in $\bigcup \tau$.

$\square$

264-3. Die "Grundmenge" jeder Topologie ist in der Tat eine Menge und durch die Topologie eindeutig fest gelegt.

<u>**264-3(Satz)**</u>

`a)` *Aus "τ Topologie auf X" folgt "X Menge".*

`b)` *Aus "τ Topologie in X, Y" folgt "$X = Y$".*

<u>Beweis **264-3**</u> `a)` `VS` gleich τ Topologie in X.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie auf X"
folgt via **264-1(Def)**: $X \in \tau$.

`2:` Aus `1`"$X \in \tau$"
folgt via **ElementAxiom**: X Menge.

`b)` `VS` gleich $(\tau$ Topologie in $X) \wedge (\tau$ Topologie in $Y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$"
folgt via **264-2**: $\bigcup \tau = X$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \tau$ Topologie in Y"
folgt via **264-2**: $\bigcup \tau = Y$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $X = Y$.

$\square$

264-4. Hier wird keine Voraussetzung bezüglich der "Mengen-Eigenschaft" von p oder p, q getroffen.

264-4(Satz)

a) *Aus* "$p \subseteq x$" *folgt* "$\{p\} \subseteq \mathcal{P}(x)$".

b) *Aus* "$p, q \subseteq x$" *folgt* "$\{p, q\} \subseteq \mathcal{P}(x)$".

c) *Aus* "$0 \neq x \subseteq y$" *und* "$x \neq y$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (x \subseteq y \setminus \{\Phi\})$".

d) *Aus* "$p \in x$" *und* "$q \in y$" *und* "$x \subseteq y \setminus \{q\}$"
folgt "$0 \neq x \subseteq y$" *und* "$x \neq y$".

e) $\{p, q\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$.

f) *Aus* "$p \neq q$" *folgt* "$\{p, q\} \setminus \{q\} = \{p\}$".

g) $\{p, q\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}$.

h) *Aus* "$p \neq q$" *folgt* "$\{p, q\} \setminus \{p\} = \{q\}$".

i) *Aus* "$0 \neq x \subseteq \{p, q\}$" *und* "$x \neq \{p, q\}$"
folgt "$x = \{p\}$" *oder* "$x = \{q\}$".

j) *Aus* "$x \subseteq \{p, q\}$"
folgt "$(x = 0) \vee (x = \{p\}) \vee (x = \{q\}) \vee (x = \{p, q\})$".

<u>Beweis **264-4**</u> `a)` `VS` gleich $p \subseteq x.$

> `Thema1` $\alpha \in \{p\}.$
>
> `2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \{p\}$”
> folgt via **1-6**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha = p).$
>
> `3:` Aus 2“$\ldots \alpha = p$” und
> aus `VS` gleich “$p \subseteq x$”
> folgt: $\alpha \subseteq x.$
>
> `4:` Aus 3“$\alpha \subseteq x$” und
> aus 2“α Menge…”
> folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(x).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(x)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{p\} \subseteq \mathcal{P}(x).$

`b)` `VS` gleich $p, q \subseteq x.$

> `Thema1` $\alpha \in \{p, q\}.$
>
> `2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \{p, q\}$”
> folgt via **94-4**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge ((\alpha = p) \vee (\alpha = q)).$
>
> `3:` Aus 2“$\ldots (\alpha = p) \vee (\alpha = q)$” und
> aus `VS` gleich “$p, q \subseteq x$”
> folgt: $((\alpha = p) \wedge (p \subseteq x)) \vee ((\alpha = q) \wedge (q \subseteq x)).$
>
> `4:` Aus 3
> folgt: $\alpha \subseteq x.$
>
> `5:` Aus 4“$\alpha \subseteq x$” und
> aus 2“α Menge…”
> folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(x).$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(x)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{p, q\} \subseteq \mathcal{P}(x).$

Beweis **264-4** `c)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \dots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`1.2:` Es gilt: $(\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (x \not\subseteq y \setminus \{\alpha\})) \vee (\exists \Phi : (\Phi \in y) \wedge (x \subseteq y \setminus \{\Phi\}))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (x \not\subseteq y \setminus \{\alpha\})$.

`Thema2.1` $\beta \in y$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\beta \in y$" und
aus `1.2.1.Fall`
folgt: $x \not\subseteq y \setminus \{\beta\}$.

`4:` Aus `3`"$x \not\subseteq y \setminus \{\beta\}$"
folgt via **0-5**: $\exists \Psi : (\Psi \in x) \wedge (\Psi \notin y \setminus \{\beta\})$.

`5.1:` Aus `4`"$\dots \Psi \in x \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots x \subseteq y \dots$"
folgt via **0-4**: $\Psi \in y$.

`5.2:` Aus `4`"$\dots \Psi \notin y \setminus \{\beta\}$"
folgt via **5-16**: $(\Psi \notin y) \vee (\Psi = \beta)$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\Psi = \beta$.

`7:` Aus `6`"$\Psi = \beta$" und
aus `4`"$\dots \Psi \in x \dots$"
folgt: $\beta \in x$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \beta : (\beta \in y) \Rightarrow (\beta \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$y \subseteq x$"

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\dots x \subseteq y \dots$" und
aus `A1` gleich "$y \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y$.

`3:` Es gilt `2.2`"$x = y$".
Es gilt `VS` gleich "$\dots x \neq y$".
Ex falso quodlibet folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in y) \wedge (x \subseteq y \setminus \{\Phi\})$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Phi : (\Phi \in y) \wedge (x \subseteq y \setminus \{\Phi\})$.

<u>Beweis **264-4**</u> `d)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (q \in y) \wedge (x \subseteq y \setminus \{q\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"

folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq x}$

`1.2:` Via **5-5** gilt: $y \setminus \{x\} \subseteq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y \setminus \{x\}$" und
aus `1.2`"$y \setminus \{x\} \subseteq y$"

folgt via **0-6**: $\boxed{x \subseteq y}$

`1.3:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.3.1.Fall` $x = y$.

`2:` Via **5-14** gilt: $q \notin y \setminus \{q\}$.

`3:` Aus `2`"$q \notin y \setminus \{q\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y \setminus \{p\}$"
folgt via **0-4**: $q \notin x$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in y \ldots$" und
aus `1.3.1.Fall`
folgt: $q \in x$.

`5:` Es gilt `3`"$q \notin x$".
Es gilt `4`"$q \in x$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq y$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{x \neq y}$

Beweis **264-4** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{p, q\} \setminus \{q\}$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{p, q\} \setminus \{q\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{p, q\} \setminus \{q\}$"
folgt via **5-15**: $(\alpha \in \{p, q\}) \wedge (\alpha \neq q)$.

`3:` Aus `2.2` "$\alpha \in \{p, q\} \ldots$"
folgt via **4-9**: $(\alpha = p) \vee (\alpha = q)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2` "$\ldots \alpha \neq q$"
folgt: $\alpha = p$.

`5:` Aus `4` "$\alpha = p$" und
aus `2.1` "α Menge"
folgt via **1-6**: $\alpha \in \{p\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\} \setminus \{q\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{p, q\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$.

<u>Beweis **264-4**</u> `f)` `VS` gleich $p \neq q$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{p\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $(\alpha = p) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.

`3.1:` Aus `2`"$\alpha = p \ldots$" und
aus `VS`
folgt: $\alpha \neq q$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha$ Menge" und
aus `2`"$\alpha = p \ldots$"
folgt via **94-4**: $\alpha \in \{p, q\}$.

`4:` Aus `3.2`"$\alpha \in \{p, q\}$" und
aus `3.1`"$\alpha \neq q$"
folgt via **5-15**: $\alpha \in \{p, q\} \setminus \{q\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p, q\} \setminus \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{p\} \subseteq \{p, q\} \setminus \{q\}$"

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\{p, q\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$.

`2:` Aus `1.2`"$\{p, q\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$" und
aus `A1` gleich "$\{p\} \subseteq \{p, q\} \setminus \{q\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{p, q\} \setminus \{q\} = \{p\}$.

`g)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\{q, p\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}$.

`1.2:` Via **4-11** gilt: $\{q, p\} = \{p, q\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\{p, q\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}$.

<u>Beweis **264-4**</u> `h)` `VS` gleich $p \neq q$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $q \neq p$.

`2.1:` Aus `1`“$q \neq p$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\{q, p\} \setminus \{p\} = \{q\}$.

`2.2:` Via **4-11** gilt: $\{q, p\} = \{p, q\}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\{p, q\} \setminus \{p\} = \{q\}$.

<u>Beweis **264-4**</u> `i)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \{p,q\}) \wedge (x \neq \{p,q\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(0 \neq x \subseteq \{p,q\}) \wedge (x \neq \{p,q\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\exists \Phi : (\Phi \in \{p,q\}) \wedge (x \subseteq \{p,q\} \setminus \{\Phi\})$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Phi \in \{p,q\} \ldots$"
folgt via **4-9**: $(\Phi = p) \vee (\Phi = q)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\Phi = p$.

`3:` Aus `1`"$\ldots x \subseteq \{p,q\} \setminus \{\Phi\}$" und
aus `2.1.Fall`
folgt: $x \subseteq \{p,q\} \setminus \{p\}$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\{p,q\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}$.

`5:` Aus `3`"$x \subseteq \{p,q\} \setminus \{p\}$" und
aus `4`"$\{p,q\} \setminus \{p\} \subseteq \{q\}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \{q\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `5`"$x \subseteq \{q\}$"
folgt via **174-1**: $x = \{q\}$.

`2.2.Fall` $\Phi = q$.

`3:` Aus `1`"$\ldots x \subseteq \{p,q\} \setminus \{\Phi\}$" und
aus `2.2.Fall`
folgt: $x \subseteq \{p,q\} \setminus \{q\}$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\{p,q\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$.

`5:` Aus `3`"$x \subseteq \{p,q\} \setminus \{q\}$" und
aus `4`"$\{p,q\} \setminus \{q\} \subseteq \{p\}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \{p\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `5`"$x \subseteq \{p\}$"
folgt via **174-1**: $x = \{p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x = \{p\}) \vee (x = \{q\})$.

<u>Beweis **264-4**</u> `j)` `VS` gleich $x \subseteq \{p, q\}$.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (x = \{p, q\}) \vee (0 \neq x \neq \{p, q\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`1.2.Fall` $x = \{p, q\}$.

`1.3.Fall` $0 \neq x \neq \{p, q\}$.

Aus `1.3.Fall` "$0 \neq x \ldots$",
aus `VS` gleich "$x \subseteq \{p, q\}$" und
aus `1.3.Fall` "$\ldots x \neq \{p, q\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $(x = \{p\}) \vee (x = \{q\})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(x = 0) \vee (x = \{p\}) \vee (x = \{q\}) \vee (x = \{p, q\})$.

$\square$

264-5. Das spezielle ungeordnete Paar $\{0, p\}$ hat höchstens vier Teilmengen.

264-5(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq \{0, p\}$"
folgt "$(x = 0) \vee (x = \{0\}) \vee (x = \{p\}) \vee (x = \{0, p\})$".

b) *Aus* "$x \subseteq \{0, p\}$" *und* "p *Unmenge*" *folgt* "$(x = 0) \vee (x = \{0\})$".

c) *Aus* "$x \subseteq \{0, p\}$" *und* "p *Unmenge*" *folgt* "$\bigcup x = 0$".

d) *Aus* "$x \subseteq \{0, p\}$" *folgt* "$(\bigcup x = 0) \vee (\bigcup x = p)$".

e) *Aus* "$x \subseteq \{0, p\}$" *folgt* "$\bigcup x \in \{0, p\}$".

f) *Aus* "$q, r \in \{0, p\}$" *und* "p *Unmenge*" *folgt* "$q \cap r = 0$".

g) *Aus* "$q, r \in \{0, p\}$" *folgt* "$(q \cap r = 0) \vee (q \cap r = p)$".

h) *Aus* "$q, r \in \{0, p\}$" *folgt* "$q \cap r \in \{0, p\}$".

Beweis **264-5** a) VS gleich $x \subseteq \{0, p\}$.
Aus VS gleich "$x \subseteq \{0, p\}$"
folgt via **264-4**: $(x = 0) \vee (x = \{0\}) \vee (x = \{p\}) \vee (x = \{0, p\})$.

b) VS gleich $(x \subseteq \{0, p\}) \wedge (p \text{ Unmenge})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p$ Unmenge"
folgt via **4-12**: $\{0, p\} = \{0\}$.

2: Aus VS gleich "$x \subseteq \{0, p\} \ldots$" und
aus 1
folgt: $x \subseteq \{0\}$.

3: Aus 2 "$x \subseteq \{0\}$"
folgt via **1-10**: $(x = 0) \vee (x = \{0\})$.

c) VS gleich $(x \subseteq \{0, p\}) \wedge (p \text{ Unmenge})$.

1: Aus VS gleich "$x \subseteq \{0, p\} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots p$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen b): $(x = 0) \vee (x = \{0\})$.

3: Aus 2 "$(x = 0) \vee (x = \{0\})$"
folgt via **1-18**: $\bigcup x = 0$.

<u>Beweis **264-5**</u> `d)` `VS` gleich $x \subseteq \{0, p\}$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \{0, p\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(x = 0) \vee (x = \{0\}) \vee (x = \{p\}) \vee (x = \{0, p\})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x = 0) \vee (x = \{0\})$.

Aus `2.1.Fall` "$(x = 0) \vee (x = \{0\})$"
folgt via **1-18**: $\bigcup x = 0$.

`2.2.Fall` $x = \{p\}$.

`3:` Aus `1.1.Fall` "p Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = p$.

`4:` Aus `3` und
aus `2.2.Fall`
folgt: $\bigcup x = p$.

`2.3.Fall` $x = \{0, p\}$.

`3:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge" und
aus `1.1.Fall` "p Menge"
folgt via **4-16**: $\bigcup\{0, p\} = 0 \cup p$.

`4:` Via **2-17** gilt: $0 \cup p = p$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`
folgt: $\bigcup\{0, p\} = p$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.3.Fall`
folgt: $\bigcup x = p$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(\bigcup x = 0) \vee (\bigcup x = p)$.

...

...

Beweis **264-5** `d)` `VS` gleich $x \subseteq \{0, p\}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` p Unmenge.

Aus `VS` gleich "$x \subseteq \{0, p\}$" und
aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\bigcup x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\bigcup x = 0) \vee (\bigcup x = p)$.

`e)` `VS` gleich $x \subseteq \{0, p\}$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(\bigcup x = 0) \vee (\bigcup x = p)$.

`3.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **4-9**: $0 \in \{0, p\}$.

`3.2:` Aus `1.1.Fall`"p Menge"
folgt via **4-9**: $p \in \{0, p\}$.

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\bigcup x \in \{0, p\}$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\bigcup\{0, p\} = 0$.

`3:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **4-9**: $0 \in \{0, p\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\bigcup x \in \{0, p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\bigcup x \in \{0, p\}$.

<u>Beweis **264-5**</u> `f)` `VS` gleich $(q, r \in \{0, p\}) \wedge (p \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Unmenge"
folgt via **4-12**: $\{0, p\} = \{0\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$q, r \in \{0, p\} \ldots$" und
aus `1`
folgt: $q, r \in \{0\}$.

`3:` Aus `2`"$q \ldots \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $q = 0$.

`4:` $q \cap r \stackrel{3}{=} 0 \cap r \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`5:` Aus `4`
folgt: $q \cap r = 0$.

`g)` `VS` gleich $q, r \in \{0, p\}$.

`1:` Es gilt: $(q = 0) \vee (r = 0) \vee (0 \neq q, r)$.
`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q = 0$.

`2:` $q \cap r \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} 0 \cap r \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $q \cap r = 0$.

`1.2.Fall` $r = 0$.

`2:` $q \cap r \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} q \cap 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $q \cap r = 0$.

...

<u>Beweis **264-5**</u> `g)` `VS` gleich $q, r \in \{0, p\}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $0 \neq q, r$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$q \ldots \in \{0, p\}$"
folgt via **4-9**: $(q = 0) \vee (q = p)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots r \in \{0, p\}$"
folgt via **4-9**: $(r = 0) \vee (r = p)$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1.3.Fall`"$0 \neq q \ldots$"
folgt: $q = p$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1.3.Fall`"$0 \neq \ldots r$"
folgt: $r = p$.

`4:` $q \cap r \stackrel{\text{3.1}}{=} p \cap r \stackrel{\text{3.2}}{=} p \cap p \stackrel{\mathbf{2-14}}{=} p$.

`5:` Aus `4`
folgt: $q \cap r = p$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(q \cap r = 0) \vee (q \cap r = p)$.

<u>Beweis **264-5**</u> `h)` `VS` gleich $q, r \in \{0, p\}$.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$q, r \in \{0, p\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(q \cap r = 0) \vee (q \cap r = p)$.

`3:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `2`
folgt: $(q \cap r = 0 \text{ Menge}) \vee (q \cap r = p)$.

`4:` Aus `1.1.Fall`"p Menge" und
aus `3`
folgt: $((q \cap r = 0 \text{ Menge}) \vee (q \cap r = p \text{ Menge})$.

`5:` Aus `4`"$(q \cap r = 0 \text{ Menge}) \vee ((q \cap r = p \text{ Menge})$"
folgt via **94-4**: $q \cap r \in \{0, p\}$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `VS` gleich "$q, r \in \{0, p\}$" und
aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $q \cap r = 0$.

`3:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **4-9**: $0 \in \{0, p\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $q \cap r \in \{0, p\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $q \cap r \in \{0, p\}$.

□

264-6. Auf einer Menge X gibt es außer in den überschaubaren Fällen mit $\{0, X\} = \mathcal{P}(X)$ mehr als eine Topologie. Jede Topologie in X umfasst $\{0, X\}$ und ist TeilMenge von $\mathcal{P}(X)$, so dass $\{0, X\}$ als die "gröbste" Topologie in X und $\mathcal{P}(X)$ ist die "feinste" Topologie in X aufgefasst werden kann.

264-6(Satz)

a) *Aus "X Menge" folgt "$\{0, X\}$ Topologie in X".*

b) *Aus "X Menge" folgt "$\mathcal{P}(X)$ Topologie in X".*

c) *Aus "τ Topologie in X" folgt "$\{0, X\} \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$".*

<u>Beweis **264-6**</u> `a)` `VS` gleich X Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "X Menge"
folgt via **4-9**: $X \in \{0, X\}$.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq X$.

`1.3:` Via **0-6** gilt: $X \subseteq X$.

> `Thema1.4` $\alpha \subseteq \{0, X\}$.
>
> Aus `Thema1.4`"$\alpha \subseteq \{0, X\}$"
> folgt via **264-5**: $\bigcup \alpha \in \{0, X\}$.

Ergo `Thema1.4`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \{0, X\}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{0, X\})$"

> `Thema1.5` $\beta, \gamma \in \{0, X\}$.
>
> Aus `Thema1.5`"$\beta, \gamma \in \{0, X\}$"
> folgt via **264-5**: $\beta \cap \gamma \in \{0, X\}$.

Ergo `Thema1.5`: `A2` | "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \{0, X\}) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \{0, X\})$"

`2:` Aus `1.2`"$0 \subseteq X$" und
aus `1.3`"$X \subseteq X$"
folgt via **264-4**: $\{0, X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

`3:` Aus `1.1`"$X \in \{0, X\}$",
aus `2`"$\{0, X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$",
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \{0, X\}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{0, X\})$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \{0, X\}) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \{0, X\})$"
folgt via **264-1(Def)**: $\{0, X\}$ Topologie in X.

<u>Beweis **264-6**</u> `b)` `VS` gleich X Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "X Menge"
folgt via **0-27**: $X \in \mathcal{P}(X)$.

`1.2:` Via **0-6** gilt: $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$.

> `Thema1.3` $\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$.
>
> Aus `Thema1.3`"$\alpha \subseteq \{0, X\}$" und
> aus `VS` gleich "X Menge"
> folgt via **1-20**: $\bigcup \alpha \in \mathcal{P}(X)$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \mathcal{P}(X))$"

> `Thema1.4` $\beta, \gamma \in \mathcal{P}(X)$.
>
> Aus `Thema1.4`"$\beta \ldots \in \mathcal{P}(X)$"
> folgt via **2-27**: $\beta \cap \gamma \in \mathcal{P}(X)$.

Ergo `Thema1.4`: `A2` | "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \mathcal{P}(X)) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \mathcal{P}(X))$"

`2:` Aus `1.1`"$X \in \mathcal{P}(X)$",
aus `1.2`"$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$",
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \mathcal{P}(X))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \mathcal{P}(X)) \Rightarrow (\beta \cap \gamma \in \mathcal{P}(X))$"
folgt via **264-1(Def)**: $\mathcal{P}(X)$ Topologie in X.

<u>Beweis **264-6**</u> `c)` `VS` gleich τ Topologie in X.

`1.1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in X"
folgt via **264-1(Def)**: $X \in \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in X"
folgt via **264-2**: τ Topologie.

`2.1:` Aus `1.1`
folgt: $\boxed{\tau \subseteq \mathcal{P}(X)}$

`2.2:` Aus `1.2`"τ Topologie"
folgt via **263-2**: $0 \in \tau$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \in \tau$" und
aus `1.1`"$X \in \tau \ldots$"
folgt via **4-14**: $\boxed{\{0, X\} \subseteq \tau}$

□

264-7. Da gemäß **264-2** eine Topologie in X eine Topologie ist stehen via **#263** etliche Resultate für Topologien in X zur Verfügung.

264-7(Satz)

a) *Aus "τ Topologie in X" folgt "$0 \neq \tau$ Menge".*

b) *Aus "τ Topologie in X" folgt "$0, X \in \tau$".*

c) *Aus "τ Topologie in X" und "$U \in \tau$" folgt "$U \subseteq X$".*

d) *Aus "τ Topologie in X" und "$U, V \in \tau$" folgt "$U \cup V \subseteq X$" und "$U \cup V \in \tau$".*

e) *Aus "τ Topologie in X" und "$U, V \in \tau$" folgt "$U \cap V \subseteq X$" und "$U \cap V \in \tau$".*

f) *Aus "τ Topologie in X" und "$O \subseteq \tau$" folgt "$\bigcup O \subseteq X$" und "$\bigcup O \in \tau$".*

g) *Aus "τ Topologie in X" und "$0 \neq O \subseteq \tau$" und "O endlich" folgt "$\bigcap O \subseteq X$" und "$\bigcap O \in \tau$".*

Beweis **264-7** a) VS gleich τ Topologie in X.

1: Aus VS gleich "τ Topologie in X" folgt via **264-2**: τ Topologie.

2: Aus 1 "τ Topologie" folgt via **263-2**: $(0 \neq \tau) \wedge (\tau \text{ Menge})$.

b) VS gleich τ Topologie in X.

1.1: Aus VS gleich "τ Topologie in X" folgt via **264-1(Def)**: $\boxed{X \in \tau}$

1.2: Aus VS gleich "τ Topologie in X" folgt via **264-2**: τ Topologie.

2: Aus 1.2 "τ Topologie" folgt via **263-2**: $\boxed{0 \in \tau}$

<u>Beweis **264-7**</u> `c)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie in } X) \wedge (U \in \tau)$.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$"
folgt via **264-1(Def)**: $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots U \in \tau$" und
aus `1`"$\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$"
folgt via **0-4**: $U \in \mathcal{P}(X)$.

`3:` Aus `2`"$U \in \mathcal{P}(X)$"
folgt via **0-26**: $U \subseteq X$.

`d)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie in } X) \wedge (U, V \in \tau)$.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$"
folgt via **264-2**: τ Topologie.

`2:` Aus `1`"τ Topologie" und
aus `VS` gleich "$\ldots U, V \in \tau$"
folgt via **263-2**: $\boxed{U \cup V \in \tau}$

`3:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$" und
aus `2`"$U \cup V \in \tau$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{U \cup V \subseteq X}$

`e)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie in } X) \wedge (U, V \in \tau)$.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$"
folgt via **264-2**: τ Topologie.

`2:` Aus `1`"τ Topologie" und
aus `VS` gleich "$\ldots U, V \in \tau$"
folgt via **263-2**: $\boxed{U \cap V \in \tau}$

`3:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$" und
aus `2`"$U \cap V \in \tau$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{U \cap V \subseteq X}$

Beweis **264-7** `f)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie in } X) \wedge (O \subseteq \tau)$.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots O \subseteq \tau$"

folgt via **264-1(Def)**: $\boxed{\bigcup O \in \tau}$

`2:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$" und
aus `1`"$\bigcup O \in \tau$"

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{\bigcup O \subseteq X}$

`g)` `VS` gleich $(\tau \text{ Topologie in } X) \wedge (0 \neq O \subseteq \tau) \wedge (O \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (0 \neq O \subseteq \tau) \wedge (O \text{ endlich})$"

folgt via **264-1(Def)**: $\boxed{\bigcap O \in \tau}$

`2:` Aus `VS` gleich "τ Topologie in $X \ldots$" und
aus `1`"$\bigcap O \in \tau$"

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{\bigcap O \subseteq X}$

$\square$

Literatur.

K.P. Grotemeyer, Topologie, *B.I. Mannheim/Wien/Zürich*, 1969.

Mengenlehre: Wenn r Relation, dann $0 \neq r$ genau dann, wenn $0 \neq \mathsf{dom}\, r$ genau dann, wenn $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.
Wenn f Funktion, dann $0 \neq f$ genau dann, wenn $0 \neq \mathsf{dom}\, f$ genau dann, wenn $0 \neq \mathsf{ran}\, f$.
Wenn $f : D \to B$, dann $0 \neq f$ genau dann, wenn $0 \neq D$.

Ersterstellung: 18/01/14 **Letzte Änderung: 22/01/14**

265-1. Dem Grundsatz, auch nicht unmittelbar benötigte Zwischenresultate in die Essays aufzunehmen verdankt der vorliegende Essay seinen Inhalt. Bei einer früheren Beweisführung schien es mir dringend notwendig zu sein, für Funktionen $f : D \to B$ das naheliegende Kriterium $0 \neq D$ genau dann, wenn $0 \neq f$ zur Verfügung zu haben. Also wurde diese Aussage, bei Relationen beginnend, schrittweise aufgebaut. Erst danach stellte ich fest, dass ich den betreffenden Beweis auch ohne dieses Kriterium führen kann. So harren die drei Sätze des vorliegenden Essays noch auf ihren ersten Einsatz.

265-1(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) *r Relation.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq r$.

`ii)` $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

`iii)` $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.

Beweis **265-1** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq r$.

1: Es gilt: $(\mathsf{dom}\, r = 0) \vee (0 \neq \mathsf{dom}\, r)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, r = 0$.

2: Aus →) "r Relation" und
aus `1.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, r = 0$"
folgt via **92-5**: $r = 0$.

3: Es gilt 2 "$r = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq r$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{dom}\, r$.
Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{dom}\, r$"
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ran}\, r$.
Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{ran}\, r$"
folgt via **7-4**: $0 \neq r$.

□

265-2. Falls f eine Funktion ist so ist $0 \neq f$ genau dann, wenn $0 \neq \mathsf{dom}\, f$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $0 \neq \mathsf{ran}\, f$.

265-2(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq f$.

`ii)` $0 \neq \mathsf{dom}\, f$.

`iii)` $0 \neq \mathsf{ran}\, f$.

Beweis **265-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq f$.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2:` Aus `1` "f Relation" und
aus `VS` gleich "$0 \neq f$"
folgt via **265-1**: $0 \neq \mathsf{dom}\, f$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{dom}\, f$.
Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{ran}\, f$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ran}\, f$.
Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **7-4**: $0 \neq f$.

□

265-3. Falls $f : D \to B$, so gilt im Fall $0 \neq D$ jedenfalls $0 \neq f$.

265-3(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq f$.

`ii)` $0 \neq D$.

Beweis **265-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq f$.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`2:` Aus `1`"f Funktion..." und
aus `VS` gleich "$0 \neq f$"
folgt via **265-2**: $0 \neq \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \mathsf{dom}\, f$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $0 \neq D$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq D$.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\, f = D$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq D$"
folgt: $0 \neq \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **7-2**: $0 \neq f$.

$\square$

Modellierung: Generation und Abbau I. Zeitdiskretes Modell. Konstante Lebensdauer.

Ersterstellung: 23/01/14 **Letzte Änderung: 24/01/14**

Bei der Lektüre des Wikipedia-Artikels

http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt,

Version vom 09.01.2o14, zuletzt geändert am 12.12.2o13 06:46, stoße ich auf einige Zahlen über neutrophile Granulozyten:

> *"Ein erwachsener Mensch produziert mehr als* 10^{11} *Neutrophile pro Tag. . . . Sollten Neutrophile innerhalb von 6 bis 8 Stunden nach Eintritt in die Blutbahn nicht in Kontakt mit Infektionen und/oder Entzündungsreaktionen kommen, verlassen sie die Blutbahn, erfahren einen programmierten Zelltod (Apoptose) und werden durch Makrophagen in Leber und Milz abgebaut. Neutrophile haben im Allgemeinen eine Lebensdauer von 1 bis 4 Tagen."*

Ergänzend hierzu ist auf Blutbefunden gelegentlich der "Normbereich " der Anzahl der Neutrophilen angegeben. Danach befinden sind bei einem erwachsenen ("gesunden") Menschen konstant(?) . . . neutrophile Granulozyten in der Blutbahn.

Ich sehe es als interessante Aufgabe an, für den Zusammenhang zwischen Generation von Neutrophilen, dem Abbau von Neutrophilen und der aktuellen Anzahl von Neutrophilen mathematische Modelle zu entwickeln. Klarer Weise sollten diese Modelle nicht nur zum Verständnis der Generation und des Abbaus von Neutrophilen, sondern auch von anderen biologischen Entitäten, die dem Enstehen und dem Vergehen unterworfen sind, beitragen.

Hier ist von "Verständnis" und nicht von "Beschreibung" die Rede. Es ist geplant, nicht bei einem einzigen Modell zu verharren, sondern eine Modellhierarchie aufzubauen, bei der das nächstfeinere Modell nicht nur das Vorgängermodell als Spezialfall enthält sondern sich zusätzlich - so ist die Hoffnung bei der Modellierung - den beobachteten Verhältnissen besser annähert.

Erfahrungsgemäß beginnt die Modellierung am anschaulichsten mit einem "zeitdiskreten " Ansatz, bei dem von einem (Beobachtungs-)Zeitpunkt t *zu dem nächsten (Beobachtungs-)Zeitpunkt* $t + \Delta$ *übergegangen wird, wobei* Δ *(zunächst) eine positive Konstante, "die typische Zeiteinheit", ist.*

1. Lebensdauer T *Im Gegensatz* zu den Ausführungen in

http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt,

wo von einer Lebendsdauer von 1 bis 4 Tagen die Rede ist, wird für den ersten Modellzugang von einer *konstanten* Lebendsdauer T *aller* Neutrophiler ausgegangen. Dies geschieht aus Gründen der besseren Fokussierbarkeit auf die *anderen Aspekte* der Modellierung und dient so dem besseren Verständnis des Modellierungsvorgangs an sich. Es ist anzunehmen, dass beim nächstfeineren Modell von unterschiedlichen Lebensdauern die Rede sein wird.

2. Zeitparameter Δ Im Gegensatz zu der Lebensdauer T - die entsprechend der Vorgaben zwischen einem und vier Tagen gewählt wird - handelt es sich bei Δ, $0 < \Delta$, um einen *mathematischen* Parameter mit dessen Festlegung die Modellierung Fahrt aufnehmen kann. Ohne umittelbaren Bezug zu den zu Grunde liegenden Vorgängen ist es heikel, sich für einen Wert von Δ zu entscheiden. Das Ergebnis der Modellierung wird aller Voraussicht nach von Δ abhängen - obwohl Δ keine unmittelbare phänomenbezogene Bedeutung hat. In mathematischer Hinsicht entgeht man den mit einer speziellen Wahl von Δ einhergehenden Schwierigkeiten, indem man Δ einfach als "freien Parameter" in die Modellgleichungen integriert. Dies soll aber nicht darüber hinweg täuschen, dass bei konkreten Berechnungen Δ benannt werden muß und je nach der Wahl von Δ unterschiedliche Resultate prognostiziert werden können.

3. Meßgröße $N(\Delta)$ =**Anzahl Neutrophile in Blutbahn in Abhängigkeit der Zeit.** In mancher Hinsicht erscheint es natürlicher, die Anzahl der Neutrophilen als Funktion einer "kontinuierlichen" Zeit $t \in I$, I echtes reelles Intervall, etwa $I = [0| + \infty[$, anzusehen. Dabei steht die Frage im Raum, weshalb ein Modell für die Neutrophilen in der Blutbahn entwickelt werden soll, das deren Anzahl für (überabzählbar) unendlich viele Zeitpunkte modelliert, obwohl die Messwerte, die als Massstab für den Erfolg des Modells dienen, "nur" zu endlich vielen ("diskreten") Zeitpunkten vorliegen. Also warum sollte es nicht reichen, ein ebenfalls "zeitdiskretes" Modell zu entwickeln? Im Prinzip ist diese Frage kaum ein für alle Mal entscheidbar. Mitunter ist es eben ratsam, die Zeit als "kontinuierliche Größe" anzusehen - immerhin stehen dann reichliche Hilfsmittel der Analysis zur Verfügung - andererseits ist es für das unmittelbare Verständnis hilfreich, von einer Messung zur nächsten zu denken. Im vorliegenden Fall, wo überhaupt die ersten Modellierungs-Schritte unternommen werden, wird der zeitdiskrete Zugang gewählt und $N(\Delta)$ wird als Funktion "diskreter" Variablen angesehen. Klassischer Weise kommen hierfür Teilmengen von $\mathbb{Z}$ als mögliche Definitionsbereiche von $N(\Delta)$ in Frage. Ich habe mich für $\mathbb{N}$, also für

$$N(\Delta) : \mathbb{N} \to [0| + \infty[,$$

mit der Interpretation

$$N(\Delta)(j) = \text{Anzahl Neutrophile in Blutbahn zur Zeit } j\Delta,\ j \in \mathbb{N},$$

entschieden.

4. Generationsmenge $G(\Delta)$=Anzahl Neutrophile, die in einem Zeitintervall in die Blutbahn übergehen. Zwischen einem Zeitpunkt $j\Delta$ und dem "nächsten" Zeitpunkt $(1+j)\Delta$, $j \in \mathbb{N}$, kommen in die Blutbahn neue Neutrophile hinzu, andere Neutrophile verschwinden. Die Anzahl der Neutrophilen, die in diesem Zeitintervall in der Blutbahn neu auftreten, ist $G(\Delta)(j)$. Es wird in Konsistenz mit dem Definitions-Bereich von $N(\Delta)$ von

$$G(\Delta) : \mathbb{N} \to [0| + \infty[,$$

ausgegangen. Es soll

$$G(\Delta)(j) = \text{Anzahl Neutrophile, die im Zeitintervall } [j\Delta|(1+j)\Delta[,\ j \in \mathbb{N}, \text{ in die Blutbahn übergehen},$$

gelten. Im Rahmen der vorliegenden Modellierung wird also nicht berücksichtigt, wo die Neutrophilen tatsächlich entstehen und mit welcher Verzögerung sie in die Blutbahn übergehen.

5. Abbaumenge $R(\Delta)$=Anzahl Neutrophile, die in einem Zeitintervall aus der Blutbahn verschwinden. Zwischen einem Zeitpunkt $j\Delta$ und dem "nächsten" Zeitpunkt $(1+j)\Delta$, $j \in \mathbb{N}$, verschwinden Neutrophile aus der Blutbahn. Diese Anzahl ist $R(\Delta)(j)$. Es wird in Konsistenz mit dem Definitions-Bereich von $N(\Delta)$ von

$$R(\Delta) : \mathbb{N} \to [0| + \infty[,$$

ausgegangen. Es soll

$$R(\Delta)(j) = \text{Anzahl Neutrophile, die im Zeitintervall } [j\Delta|(1+j)\Delta[,\ j \in \mathbb{N}, \text{ aus der Blutbahn verschwinden},$$

gelten.

Bilanzgleichung. In Einklang mit der Interpretation von $N(\Delta), G(\Delta), R(\Delta)$ gilt für $j \in \mathbb{N}$ die "Bilanzgleichung"

$$\begin{aligned}
&\text{Anzahl Neutrophile in Blutbahn zur Zeit } (1+j)\Delta \\
&= \text{Anzahl Neutrophile in Blutbahn zur Zeit } j\Delta \\
&\qquad + \text{Anzahl Neutrophile, die in } [j\Delta|(1+j)\Delta[\text{ in Blutbahn übergehen} \\
&\qquad - \text{Anzahl Neutrophile, die in } [j\Delta|(1+j)\Delta[\text{ aus Blutbahn verschwinden},
\end{aligned}$$

was in deutlich kürzerer Form als

$$N(\Delta)(1+j) = N(\Delta)(j) + G(\Delta)(j) - R(\Delta)(j), \quad j \in \mathbb{N},$$

geschrieben werden kann. Hier kann $N(\Delta)(j)$ für $1 \le j \in \mathbb{N}$ aus $G(\Delta)(j), R(\Delta)(j)$ ermittelt werden. Der "Startwert" $N(\Delta)(0)$ wird durch diese Vorschrift nicht erfasst und muss zusätzlich vorgegeben werden:

$$N(\Delta)(0) = N_\Delta^0 \in [0| + \infty[.$$

Hat man sich für N_Δ^0 entschieden und sind $G(\Delta), R(\Delta)$ bekannt, so ergibt sich in rekursiver Weise die Funktion $N(\Delta)$:

$$\begin{aligned}
N(\Delta)(0) &= N_\Delta^0 \\
N(\Delta)(1) &= N_\Delta^0 + G(\Delta)(0) - R(\Delta)(0), \\
N(\Delta)(2) &= N_\Delta^0 + (G(\Delta)(0) - R(\Delta)(0)) + (G(\Delta)(1) - R(\Delta)(1)), \\
N(\Delta)(3) &= N_\Delta^0 + (G(\Delta)(0) - R(\Delta)(0)) + (G(\Delta)(1) - R(\Delta)(1)) \\
&\quad + (G(\Delta)(2) - R(\Delta)(2)), \\
&\dots \\
N(\Delta)(1+j) &= N_\Delta^0 + \sum_{\alpha=0}^{j} (\ G(\Delta)(\alpha) - R(\Delta)(\alpha)\ ).
\end{aligned}$$

An dieser Auflösung ist der Einfluß des Startwerts N_Δ^0 gut sichtbar. Die Abhängigkeit der Funktion $N(\Delta)$ von N_Δ^0 wird nicht explizit notiert.

6. Die konstante Lebensdauer fließt in das Modell ein und $\kappa(T,\Delta)$ erscheint. Bei der bislang erfolgten Modellierung haben $G(\Delta)$ und $R(\Delta)$ nichts miteinander zu tun und es tritt der Parameter T der konstanten Lebenserwartung nicht auf. Soll T in das bisher entwickelte Modell integriert werden, so ergibt sich für $j \in \mathbb{N}$ die Aussage

Anzahl Neutrophile, die im Zeitintervall $[j\Delta|(1+j)\Delta[$,
aus der Blutbahn verschwinden
=Anzahl Neutrophile, die im Zeitintervall $[-T+j\Delta|-T+(1+j)\Delta[$,
in die Blutbahn übergehen.

Versucht man, diese Aussage mit Hilfe von $G(\Delta)$ und $R(\Delta)$ darzustellen, so ergibt sich das Problem, dass das Intervall $[-T+j\Delta|-T+(1+j)\Delta[$ *nicht unbedingt* - in gewissem Sinn: eigentlich nie - von der Form $[k\Delta|(1+k)\Delta[$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, so dass die in diesem Zeitinervall in die Blutahn übergehenden Neutrophilen *nicht unbedingt* durch $G(\Delta)$ erfasst werden. Präziser gesprochen gibt es hier zwei Arten von Problemen. Erstens kann $-T+j\Delta$ für "kleine" Werte von j und "große" Werte von T negativ werden. Zweitens muss T kein ganzzahliges Vielfaches von Δ sein. Das zweite Problem wird durch die Einführung von

$$\kappa(T,\Delta) = \text{kleinster Minimierer von } |k \cdot \Delta - T| \text{ bezüglich } k \in \mathbb{N},$$

einer Lösung nahegebracht, wodurch im Rahmen des Modells die Approximation

$$\kappa(T,\Delta)\cdot\Delta \approx T,$$

präziser,

$$|\kappa(T,\Delta)\cdot\Delta - T| < \Delta : 2,$$

gilt, so dass T bis auf die "Messgenauigkeit" $\Delta : 2$ durch das $\kappa(T,\Delta)$-fache von Δ angenähert wird. An dieser Stelle sollte klar sein, dass unterschiedliche Werte von Δ zu unterschiedlichen Werten von $\kappa(T,\Delta)$ und zu unterschiedlich genauen Approximationen führt. Offenbar gilt $\lim\limits_{\Delta\to 0}\kappa(T,\Delta) = +\infty$, präziser

$$\lim_{\Delta\to 0}\kappa(T,\Delta)\cdot\Delta = T.$$

Mit der freundlichen Unterstützung durch $\kappa(T,\Delta)$ kann nun der "lebenszeitbasierte " Zusammenhang zwischen $G(\Delta)$ und $R(\Delta)$ als

$$R(\Delta)(j) = G(\Delta)(j-\kappa(T,\Delta)), \quad j\in\mathbb{N},$$

modelliert werden. Hierbei besteht, wie vorab bereits erwähnt, für die *negativen* Argumente $-\kappa(T,\Delta), 1-\kappa(T,\Delta), 2-\kappa(T,\Delta),\ldots,-1$ von $G(\Delta)$ Argumentationsbedarf. Entsprechend Interpretation von $\kappa(T,\Delta)$ liegt es nahe, die in Frage stehenden Werte für $G(j-\kappa(T,\Delta))$, $j = 0,1,2,\ldots,-1+\kappa(\Delta,T)$, mit Hilfe von $R(\Delta)$ via

$$G(\Delta)(j-\kappa(T,\Delta)) = R(\Delta)(j), \quad j = 0,\ldots,-1+\kappa(T,\Delta)$$

zu definieren.

Modell 1 Generation und Abbau. Zusammenfassend bestehen die Modellgleichungen aus

$$N(\Delta)(1+j) = N(\Delta)(j) + G(\Delta)(j) - G(\Delta)(j-\kappa(T,\Delta)), \quad j\in\mathbb{N},$$

$$N(\Delta)(0) = N^0_\Delta \in [0|+\infty[,$$

$$N(\Delta):\mathbb{N}\to[0|+\infty[, \quad G(\Delta):\{-\kappa(T,\Delta),\ldots\}\to[0|+\infty[,$$

$$\kappa(T,\Delta) = \text{kleinster Minimierer von } |k\cdot\Delta - T| \text{ bezüglich } k\in\mathbb{N},$$

$$0 < T\in\mathbb{R}.$$

Modell 1 Generation und Abbau - abstrakt. Bei genauerer Betrachtung der Modellgleichungen fällt auf, dass T und Δ nicht explizit, sondern implizit über $\kappa(T,\Delta)$ eingehen. Für die mathematische Analysis der Modellgleichungen ist es irrelevant, wie genau κ von möglichen anderen, nicht mehr in Erscheinung tretenden Parametern oder Messgrößen abhängt. Wichtig ist nur, dass es ein $\kappa\in\mathbb{N}$ gibt, das die Modellgleichungen mitbestimmt. Vor diesem Hintergrund können für die mathematischen Untersuchungen die Abhängigkeiten von Δ und T vorerst unberücksichtigt bleiben und wir gelangen zu der " abgespeckten" Version

$$
\begin{aligned}
n(1+j) &= n(j)+g(j)-g(j-\kappa), \quad j \in \mathbb{N}, && (1)\\
n(0) &= N_\Delta^0 \geq 0, && (2)\\
n:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \quad &, \quad g:\{-\kappa,\ldots\}\to [0|+\infty[, && (3)\\
\kappa &\in \mathbb{N}, && (4)
\end{aligned}
$$

wobei hier vorsichtshalber der Werte-Bereich von n auf $\mathbb{R}$ erweitert wird.

Modell 1 Generation und Abbau - abstrakt. Abbruchbedinung(en). Es ist eine der wichtigsten Erkenntnisse des Modellierens, dass ab dem Zeitpunkt, zu dem die Modellgleichungen unter Einbeziehung abstrakter Funktionen vorliegen, das " Gedächtnis der Herleitung" in mehr oder weniger rigoroser Form gelöscht ist. Damit ist gemeint, dass die durch Lösungsstrategien gefundenen Lösungen nicht unbedingt die erwarteten oder gemessenen Eigenschaften der zu Grunde liegenden Messgrößen haben müssen. Im vorliegenden Fall sind die Meßgrößen N, G, R *entsprechend ihrer Interpretation als Anzahl und Mengen* stets nicht-negativ. Dies muss für allgemeine Lösungen der abstrakten Modellgleichungen aber nicht mehr gelten - es wäre ein großer Fehler, die Positivitätseigenschaften der zu Grunde liegenden Funktionen für " beliebige" Lösungen der Modellgleichungen vorauszusetzen. Natürlich gilt: wenn für n, g die *realen* Funktionen und für N_Δ^0 der *reale* Startwert eingesetzt wird, dann sind diese Lösungen positiv. Jedoch stellt sich in dieser Situation die Frage, warum denn dann noch modelliert werden soll - es sind ja alle relevanten Funktionen bekannt. In der Praxis ist es typischer Weise so, dass ein - möglicherweise sehr komplexes - Modell für g zur Verfügung steht und dass auf Grund dieses Modells mit Hilfe von (1) - (4) die korrespondierende Anzahl Neutrophiler ermittelt werden soll. In dieser Situation kann es hin und wieder vorkomen, dass die hier angenommene Modellierung von g zwar in *bestimmten* Argument-Bereichen von g exzellente Näherungen liefert, in anderen Argument-Bereichen von g jedoch falsche, ja unsinnige Resultate liefert - und das, ohne dass diese Argument-Bereiche auf einfache Art und Weise vorab benannt werden könnten. Dieser nicht ausschließbaren Möglichkeit ist die Notwendigkeit geschuldet, ein Abbruchkriterium für die " Dauer der Rekursion" (1) - (2) zu formulieren, ab der die Berechnung weiterer Funktionswerte $n(j)$ eingestellt wird. Im vorliegenden Zusammenhang scheint die Nicht-Negativitätsforderung an n das ausschlaggebende Kriterium zu sein und so kann eine " Stoppzeit " definiert werden:

$$
\text{Stoppzeit}
$$
$$
\Omega = \inf\{k\in\mathbb{N} : n(1+k) < 0\} = \inf\{k\in\mathbb{N} : n(k)+g(k)-g(k-\kappa) < 0\}.
$$

Wegen $n(0) = N_\Delta^0 \geq 0$ gilt offenbar $\Omega \in \mathbb{N}$ oder - wenn das Verfahren beliebig weiterläuft - $\Omega = +\infty$. Ω soll nun anhand dreier Werte für κ beispielhaft diskutiert werden. Die Verallgemeinerung auf alle anderen Werte für κ bleibt den Lesern überlassen.

Beispiel $\kappa = 0$. Entsprechend der Definition von $\kappa = \kappa(T, \Delta)$ liegt dieser Fall vor, wenn die Lebensdauer T kleiner oder gleich $\Delta : 2$ ist. Dies bedeutet, dass von einer sehr groben Auflösung der Zeit ausgegangen wird. Die Modellgleichungen (1) - (2) vereinfachen sich zu

$$n(1 + j) = n(j), \quad n(0) = N_\Delta^0,$$

so dass die Funktion g aus dem Modell verschwindet und die Lösung mit $n(j) = N_\Delta^0$, $j \in \mathbb{N}$, einfach hinzuschreiben ist. Die Stoppzeit ist wegen $0 \le N_\Delta^0$ gleich $+\infty$. Dass n konstant ist bedeutet im Sinne der urpsprünglichen Interpretation aber nicht, dass die Anzahl der Neutrophilen in der Blutbahn immer konstant ist. Innerhalb eines Zeitschritts können Neutrophile entstehen, doch es werden innerhalb eines Zeitschritts genau so viele Neutrophile wieder abgebaut wie entstanden sind.

Beispiel $\kappa = 1$. Der Fall $\kappa = 1$ korrespondiert zu $\Delta : 2 < T \le 3\Delta : 2$, also wenn "$\Delta$ und T die gleiche Grössenordnung" haben. Anders formuliert gilt "$T = \Delta \pm 50\%$". Aufgrund von (1) und (2) gilt für $j = 0$ zunächst

$$n(1) = n(0) + g(0) - g(-1) = N_\Delta^0 + g(0) - g(-1),$$

so dass $\Omega = 0$ genau dann gilt, wenn $N_\Delta^0 + g(0) - g(-1) < 0$. Andernfalls gilt $1 \le \Omega$ und in diesem Fall ergibt sich

$$n(2) = n(1) + g(1) - g(0) = (N_\Delta^0 + g(0) - g(-1)) + g(1) - g(0) = N_\Delta^0 + g(1) - g(-1),$$

und es kann auf $\Omega = 1$ genau dann geschlossen werden, wenn $N_\Delta^0 + g(1) - g(-1) < 0$ gilt. Andernfalls gilt $2 \le \Omega$ und in diesem Fall folgt

$$n(3) = n(2) + g(2) - g(1) = \ldots = N_\Delta^0 + g(2) - g(-1),$$

und klarer Weise gilt $\Omega = 2$ genau dann, wenn $N_\Delta^0 + g(2) - g(-1) < 0$. Aus den Beobachtungen der ersten drei Rekursionsschritte kann leicht ein Induktionsbeweis geführt werden, der zu folgendem Resultat führt:

$\Omega = +\infty$ gilt genau dann, wenn

$$N_\Delta^0 + g(j) - g(-1) \ge 0, \quad j \in \mathbb{N},$$

oder, äquivalent hierzu, wenn

$$g(j) \ge g(-1) - N_\Delta^0, \quad j \in \mathbb{N},$$

gilt und in diesem Fall ermittelt sich die Funktion n via

$$n(0) = N_\Delta^0, \quad n(j) = N_\Delta^0 + g(-1 + j) - g(-1), \quad 1 \le j \in \mathbb{N}.$$

Das Kriterium "$g(j) \geq g(-1) - N_\Delta^0$" bedeutet, dass die Generationsmenge in jedem Zeitschritt einen bestimmten Mindestwert nicht unterschreiten darf. Im Fall $N_\Delta^0 > g(-1)$ ist dies trivialer Weise für jede Funktion $g \geq 0$ der Fall.

Beispiel $\kappa = 4$. Anders als in den "Randfällen" $\kappa = 0$ oder$= 1$ können von der Untersuchung des Falls $\kappa = 4$ Einsichten in den Fall eines "allgemeinen $\kappa \geq 2$" erhofft werden. Diese Einsichten stellen sich in der Tat ein, die Ausführung der Einzelheiten soll aber den Lesern überlassen werden. In ähnlicher Vorgehensweise wie im Fall $\kappa = 1$ ergibt sich aus (1) und (2) im Fall $j = 0$

$$n(1) = \ldots = N_\Delta^0 + g(0) - g(-4),$$

und $\Omega = 1$ stellt sich genau für $N_\Delta^0 + g(0) - g(-4) < 0$ ein. Andernfalls gilt $1 \leq \Omega$ und es folgt

$$n(2) = \ldots = N_\Delta^0 + (g(1) + g(0)) - (g(-3) + g(-4)),$$

und $\Omega = 2$ genau dann, wenn $N_\Delta^0 + (g(1) + (g(0)) - (g(-3) + g(-4)) < 0$. Bereits an dieser Stelle kann fest gestellt werden, dass die Verhältnisse verwickelter als im Fall $\kappa = 1$ liegen. Gilt auch nicht $n(2) < 0$, so ermitteln wir

$$n(3) = \ldots = N_\Delta^0 + (g(2) + g(1) + g(0)) - (g(-2) + g(-3) + g(-4)),$$

und $\Omega = 3$ genau dann, wenn

$$N_\Delta^0 + (g(2) + g(1) + g(0)) - (g(-2) + g(-3) + g(-4)) < 0.$$

Andernfalls folgt

$$n(4) = \ldots = N_\Delta^0 + (g(3) + g(2) + g(1) + g(0)) - (g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)),$$

und es gilt $\Omega = 4$ genau dann, wenn

$$N_\Delta^0 + (g(3) + g(2) + g(1) + g(0)) - (g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)) < 0.$$

Im gegenteiligen Fall wird es nun wohl spannend, denn dann kürzt sich der Term "$g(0)$" auf Grund von (1) aus der resultierenden Summe weg und es ergibt sich

$$n(5) = \ldots = N_\Delta^0 + (g(4) + g(3) + g(2) + g(1)) - (g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)),$$

mit $\Omega = 5$ genau dann, wenn

$$N_\Delta^0 + (g(4) + g(3) + g(2) + g(1)) - (g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)) < 0.$$

Im letzten hier explizit durchgeführten Schritt ergibt sich andernfalls

$$n(6) = \ldots = N_\Delta^0 + (g(5) + g(4) + g(3) + g(2)) - (g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)),$$

mit $\Omega = 6$ genau dann, wenn

$$N^0_\Delta + (g(5) + g(4) + g(3) + g(2)) - (g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)) < 0.$$

An dieser Stelle sollte spätestens die Idee für den allgemeinen Fall $6 \leq j$ vorhanden und das nachfolgende Kriterium durch vollständige Induktion beweisbar sein:

Seien

$$\begin{aligned}
H^{-4} &= g(-4)\\
H^{-3} &= g(-3) + g(-4)\\
H^{-2} &= g(-2) + g(-3) + g(-4)\\
H^{-1} &= g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)\\
H^{0} &= g(0) = \sum_{\alpha=\max\{0,0-3\}}^{0} g(\alpha)\\
H^{1} &= g(1) + g(0) = \sum_{\alpha=\max\{0,1-3\}}^{1} g(\alpha)\\
H^{2} &= g(2) + g(1) + g(0) = \sum_{\alpha=\max\{0,2-3\}}^{2} g(\alpha)\\
H^{3} &= g(3) + g(2) + g(1) + g(0) = \sum_{\alpha=\max\{0,3-3\}}^{3} g(\alpha)\\
H^{4} &= g(4) + g(3) + g(2) + g(1) = \sum_{\alpha=\max\{0,4-3\}}^{4} g(\alpha)\\
H^{5} &= g(5) + g(4) + g(3) + g(2) = \sum_{\alpha=\max\{0,5-3\}}^{5} g(\alpha)
\end{aligned}$$

allgemein

$$H^j = \sum_{\alpha=\max\{0,j-3\}}^{j} g(\alpha), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\Omega = +\infty$ genau dann, wenn

$$N^0_\Delta + H^j - H^{\min\{-1,-4+j\}} \geq 0, \quad j \in \mathbb{N},$$

und in diesem Fall gilt

$$n(0) = N^0_\Delta, \quad n(j) = N^0_\Delta + H^{-1+j} - H^{\min\{-1,-5+j\}}, \quad 1 \leq j \in \mathbb{N}.$$

Ähnlich, aber doch komplizierter als im Fall $\kappa = 1$ zielt das Kriterium für $\Omega = +\infty$ darauf ab, dass die Generationsmengen nicht nachhaltig "zu klein" werden. Neuerlich ist im Fall nicht-negativer Generationsmengen das Kriterium trivial erfüllt, wenn die Anfangspopulation hinreichend groß ist, wenn also etwa beispielsweise

$$N_\Delta^0 \geq g(-1) + g(-2) + g(-3) + g(-4)$$

gilt. Das tatsächliche Kriterium ist deutlich schwächer als diese Bedingung.

Ausblick. Mit den Modellgleichungen (1) - (4) und den Erläuterungen ist ein erster Schritt zum mathematischen Verständnis der Generation und des Abbaus von Neutrophilen in der Blutbahn getan. Die etwas gewaltsam in das Modell eingebrachte Annahme einer konstanten Lebensdauer manifestiert sich im "nachlaufenden Argument" $j - \kappa$ von (1). Es ist Modellerweiterungen vorbehalten, diese Annahme durch variable Lebensdauern zu ersetzen. Eine halbwegs realistische Abbildung der tatsächlichen Vorgänge des Erzeugens und Abbauens der Neutrophilen in der Blutbahn ist durch das vorliegende Modell nicht zu erreichen. Dazu wären tiefergehende Beschreibungen der physiologischen Vorgänge im Körper erforderlich. Diese Beschreibungen liegen nicht vor. Es ist zu erwarten, dass aus diesen Beschreibungen detailliertere Ansätze für die Funktion g erwachsen, die zu modifizierten Modellen führen. Diese modifizierten Modelle können nur durch weiterführende Recherchen erstellt werden.

KLT: Invarianz und Erhaltungsgrößen.

Ersterstellung: 25/01/14 **Letzte Änderung: 17/02/15**

In diesem Essay soll der Satz, wonach Invarianzen der Lagrange-Funktion gegenüber $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilien auf Erhaltungsgrößen führen, bewiesen werden. Die häufigste Anwendung bezieht sich auf Invarianzen gegenüber spezieller Drehungenan, die zur Konstanz korrespondierender Dreh-Impulse führen.

Das Kernstück des Satzes über Invarianz und Erhaltungsgrößen ist eine Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung.

Es gelte:

→) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

→) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$.

Dann folgt für alle $(t, x, v) \in E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$:

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(\, L(t, \Psi^{1|\xi}(x), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x, v)) - L(t, x, v) \, \Big) : \xi$$

$$= \Big\langle \, \mathtt{K}(t, x, v) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0}(x) \, \Big\rangle + \Big\langle \, \mathtt{P}(t, x, v) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0) \, \Big\rangle \, .$$

Beweis. Mit Hilfe von **#260** ergeben sich unter den geltenden Voraussetzungen die Gleichungen

$$\Psi^{1|\xi}(x) = \Psi^{2|x}(\xi), \quad (\Psi^{\mathtt{G}})^{1|\xi}(x,v) = \Psi^{\mathtt{G}|x,v}(\xi), \qquad \xi \in P, x \in E_{\mathtt{ort}}, v \in E_{\mathtt{vel}},$$

sowie

$$\Psi^{2|x}(0) = x, \quad (\Psi^{2|x})'(0) = (\partial_1\Psi)^{1|0}(x), \qquad x \in E_{\mathtt{ort}},$$

und

$$\Psi^{\mathtt{G}|x,v}(0) = v, \quad v \in E_{\mathtt{vel}},$$

so dass mit Hilfe der Kettenregel dank der geltenden Differenzierbarkeiten nunmehr für alle $(t,x,v) \in E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$gerechnet werden kann:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi\to 0}\Big(\, L(t,\Psi^{1|\xi}(x),(\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x,v)) - L(t,x,v)\,\Big) : \xi \\
&= \lim_{\xi\to 0}\Big(\, L(t,\Psi^{2|x}(\xi),(\Psi^{\mathtt{G}|x,v})(\xi)) - L(t,x,v)\,\Big) : \xi \\
&= \lim_{\xi\to 0}\Big(\, L(t,\Psi^{2|x}(\xi),(\Psi^{\mathtt{G}|x,v})(\xi)) - L(t,\Psi^{2|x}(0),v)\,\Big) : \xi \\
&= \lim_{\xi\to 0}\Big(\, L(t,\Psi^{2|x}(\xi),(\Psi^{\mathtt{G}|x,v})(\xi)) - L(t,\Psi^{2|x}(0),\Psi^{\mathtt{G}|x,v}(0))\,\Big) : \xi \\
&= \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{x}}L(t,\Psi^{2|x}(0),\Psi^{\mathtt{G}|x,v}(0)) \mid (\Psi^{2|x})'(0)\,\Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{v}}L(t.\Psi^{2|x}(0),\Psi^{\mathtt{G}|x,v}(0)) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0)\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{x}}L(t,x,\Psi^{\mathtt{G}|x,v}(0)) \mid (\Psi^{2|x})'(0)\,\Big\rangle + \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{v}}L(t.x,\Psi^{\mathtt{G}|x,v}(0)) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0)\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{x}}L(t,x,v) \mid (\Psi^{2|x})'(0)\,\Big\rangle + \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{v}}L(t.x,v) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0)\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{x}}L(t,x,v) \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}(x)\,\Big\rangle + \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{v}}L(t.x,v) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0)\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, \mathtt{K}(t,x,v) \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}(x)\,\Big\rangle + \Big\langle\, \nabla_{\mathtt{v}}L(t.x,v) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0)\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, \mathtt{K}(t,x,v) \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}(x)\,\Big\rangle + \Big\langle\, \mathtt{P}(t.x,v) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|x,v})'(0)\,\Big\rangle\,.
\end{aligned}$$

□

Das vorangehende Resultat soll nun auf spezielle $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurven angewendet werden.

Es gelte:

→) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

→) $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$.

→) J echtes reelles Intervall.

→) $J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) $c \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$.

→) Für alle $t \in J$ gilt $c(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{c}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt für alle $t \in J$:

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(L(t, (\Psi^{1|\xi} \circ c)(t), (\Psi^{1|\xi} \circ c)^\bullet(t)) - (L^* c)(t) \Big) : \xi$$

$$= - \Big\langle (\Delta_{\mathtt{elg}}\, c) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \circ c \Big\rangle (t) + \Big(\Big\langle \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \Big\rangle^* c \Big)^\bullet (t).$$

<u>**Beweis.**</u> Auf Grund der Voraussetzungen folgt via **#260**,

$$(\Psi^{1|\xi} \circ c)^\bullet(t) = \Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot{c}(t)}(\xi), \qquad \xi \in P, t \in J,$$

sowie

$$(\Psi^{\mathtt{G}})^{1|\xi}(x, v) = \Psi^{\mathtt{G}|x,v}(\xi), \qquad \xi \in P, x \in E_{\mathtt{ort}}, v \in E_{\mathtt{vel}},$$

woraus

$$(\Psi^{\mathtt{G}})^{1|\xi}(c(t), \dot{c}(t)) = \Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot{c}(t)}(\xi), \qquad \xi \in P, t \in J,$$

folgt und ausserdem gilt via **#260** noch

$$(\Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot{c}(t)})'(\xi) = ((\partial_1 \Psi)^{1|\xi} \circ c)(t), \quad \xi \in P, t \in J,$$

so dass für alle $t \in J$ gerechnet werden:

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(L(t, (\Psi^{1|\xi} \circ c)(t), (\Psi^{1|\xi} \circ c)^\bullet(t)) - (L^* c)(t) \Big) : \xi$$

$$= \lim_{\xi \to 0} \Big(L(t, \Psi^{1|\xi}(c(t)), (\Psi^{1|\xi} \circ c)^\bullet(t)) - (L^* c)(t) \Big) : \xi$$

$$= \lim_{\xi \to 0} \Big(L(t, \Psi^{1|\xi}(c(t)), (\Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot{c}(t)})) - (L^* c)(t) \Big) : \xi$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \lim_{\xi\to 0}\Big(\ L(t,\Psi^{1|\xi}(c(t)),(\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(c(t),\dot c(t))) - (L^*c)(t)\ \Big) : \xi$$

$$\lim_{\xi\to 0}\Big(\ L(t,\Psi^{1|\xi}(c(t)),(\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(c(t),\dot c(t))) - L(t,c(t),\dot c(t))\ \Big) : \xi$$

$$= \Big\langle\ \mathtt{K}(t,c(t),\dot c(t)) \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}(c(t))\ \Big\rangle + \Big\langle\ \mathtt{P}(t.c(t),\dot c(t)) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot c(t)})'(0)\ \Big\rangle$$

$$= \Big\langle\ (\mathtt{K}^*c)(t) \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}(c(t))\ \Big\rangle + \Big\langle\ \mathtt{P}(t.c(t),\dot c(t)) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot c(t)})'(0)\ \Big\rangle$$

$$= \Big\langle\ (\mathtt{K}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ \mathtt{P}(t.c(t),\dot c(t)) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot c(t)})'(0)\ \Big\rangle$$

$$= \Big\langle\ (\mathtt{K}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)(t) \mid (\Psi^{\mathtt{G}|c(t),\dot c(t)})'(0)\ \Big\rangle$$

$$= \Big\langle\ (\mathtt{K}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)^{\bullet}(t)\ \Big\rangle$$

$$= \Big\langle\ (\mathtt{K}^*c)(t) - (\mathtt{P}^*c)^{\bullet}(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle$$
$$+ \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)^{\bullet}(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)^{\bullet}(t)\ \Big\rangle$$

$$= -\Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)^{\bullet}(t) - (\mathtt{K}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle$$
$$+ \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)^{\bullet}(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)^{\bullet}(t)\ \Big\rangle$$

$$= -\Big\langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}\ c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle$$
$$+ \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)^{\bullet}(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)^{\bullet}(t)\ \Big\rangle$$

$$= -\Big\langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}\ c) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)\ \Big\rangle(t)$$
$$+ \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)^{\bullet}(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)(t) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)^{\bullet}(t)\ \Big\rangle$$

$$= -\Big\langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}\ c) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)\ \Big\rangle(t)$$
$$+ \Big\langle\ (\mathtt{P}^*c)^{\bullet} \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c\ \Big\rangle(t) + \Big\langle\ \mathtt{P}^*c \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)^{\bullet}\ \Big\rangle(t)$$

$$= -\Big\langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}\ c) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)\ \Big\rangle(t) + \Big(\ \Big\langle\ \mathtt{P}^*c \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c\ \Big\rangle\ \Big)^{\bullet}(t)$$

$$= -\Big\langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}\ c) \mid ((\partial_1\Psi)^{1|0}\circ c)\ \Big\rangle(t) + \Big(\ \Big\langle\ \mathtt{P} \mid (\partial_1\Psi)^{1|0}\ \Big\rangle^{*} c\ \Big)^{\bullet}(t).$$

$\square$

Verläuft $(t, q(t), \dot{q}(t))$ *einer Lösungskurve von* (ELG) *ganz in* $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$, *so ergibt sich mit Hilfe des vorangehenden Resultats ohne viel Weiteres die Änderungsrate von* $\left\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\right\rangle^* q$.

Es gelte:

→) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

→) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$.

→) q löst (ELG).

→) $\mathsf{dom}\, q = J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) Für alle $t \in J$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{q}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt für alle $t \in J$:

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(\, L(t, (\Psi^{1|\xi} \circ q)(t), (\Psi^{1|\xi} \circ q)^\bullet(t)) - (L^* q)(t) \,\Big) : \xi$$

$$= \Big(\, \left\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\right\rangle^* q \,\Big)^\bullet(t).$$

<u>**Beweis.**</u> Offenbar erfüllen Γ, q die Voraussetzungen vorhergehenden Satzes. Es folgt

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(\, L(t, (\Psi^{1|\xi} \circ q)(t), (\Psi^{1|\xi} \circ q)^\bullet(t)) - (L^* q)(t) \,\Big) : \xi$$

$$= - \left\langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}\, q) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \circ q \,\right\rangle(t) + \Big(\, \left\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\right\rangle^* q \,\Big)^\bullet(t).$$

Als Lösung von (ELG) gilt via **#253**

$$(\Delta_{\mathtt{elg}}\, q) = \mathsf{zo}_J.$$

□

Die häufigsten Anwendungen des hier Entwickelten beziehen sich auf Situationen, in denen im vorliegenden Kontext

$$L(t, \Psi^{1|\xi}(x), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x,v)) = L(t,x,v), \quad (\xi,t,x,v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}},$$

gilt - obwohl diese Bedingung durch die schächere Aussage

$$\lim_{\xi \to 0} \big(\, L(t, \Psi^{1|\xi}(x), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x,v)) - L(t,x,v) \,\big) : \xi = 0,$$

ersetzt werden könnte. Entsprechende Adaptionen bleiben bis auf Weiteres den Lesern überlassen.

Es gelte:

$\rightarrow)$ Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

$\rightarrow)$ $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$.

$\rightarrow)$ Für $(\xi,t,x,v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$ gilt

$$L(t, \Psi^{1|\xi}(x), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x,v)) = L(t,x,v).$$

$\rightarrow)$ J echtes reelles Intervall.

$\rightarrow)$ $J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

$\rightarrow)$ $c \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow)$ Für alle $t \in J$ gilt $c(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{c}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt für alle $t \in J$:

$$\big(\, \big\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\big\rangle^{*} c \,\big)^{\bullet}(t) = \big\langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}\, c) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \circ c \,\big\rangle(t).$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen gilt für alle $(\xi, t, x, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$ ergibt sich ohne viel Weiteres die Gleichung

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(\, L(t, \Psi^{1|\xi}(x), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x, v)) - L(t, x, v) \, \Big) : \xi = 0.$$

Hieraus folgt durch die wegen $J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$, $c(t) \in E_{\mathtt{ort}}, \dot{c}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$ mögliche Spezialisierung

$$\lim_{\xi \to 0} \Big(\, L(t, \Psi^{1|\xi}(c(t)), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(c(t), \dot{c}(t))) - L(t, c(t), \dot{c}(t)) \, \Big) : \xi = 0, \quad t \in J.$$

Mit Hilfe von voran Gegangenem ergibt sich

$$\begin{aligned} &- \Big\langle \, (\Delta_{\mathtt{elg}} \, c) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \circ c \, \Big\rangle (t) + \Big(\, \Big\langle \, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \, \Big\rangle^{*} c \, \Big)^{\bullet}(t) \\ &\qquad = \lim_{\xi \to 0} \Big(\, L(t, \Psi^{1|\xi}(c(t)), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(c(t), \dot{c}(t))) - L(t, c(t), \dot{c}(t)) \, \Big) : \xi \\ &\qquad = 0, \quad t \in J. \end{aligned}$$

□

Verläuft $(t, q(t), \dot{q}(t))$ *einer Lösungskurve von* (ELG) *ganz in* $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$, *so ergibt sich mit Hilfe des vorangehenden Resultats ohne viel Weiteres, dass* $\left\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\right\rangle^* q$ *konstant ist.*

Es gelte:

→) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie.

→) $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$.

→) Für $(\xi, t, x, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$ gilt

$$L(t, \Psi^{1|\xi}(x), (\Psi^{1|\xi})^{\mathtt{G}}(x, v)) = L(t, x, v).$$

→) q löst (ELG).

→) $\mathsf{dom}\, q = J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) Für alle $t \in J$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{q}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt:

a) $\left(\, \left\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\right\rangle^* q \,\right)^{\bullet} = \mathsf{zo}_J$.

b) Für alle $t, \sigma \in J$ gilt

$$\left\langle\, (\mathtt{P}^* q)(t) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0}(q(t)) \,\right\rangle = \left\langle\, (\mathtt{P}^* q)(\sigma) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0}(q(\sigma)) \,\right\rangle.$$

Beweis. Die Voraussetzung vorangehendenn Satzes sind durch Γ, q erfüllt. Es folgt

$$\left(\, \left\langle\, \mathtt{P} \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \,\right\rangle^* q \,\right)^{\bullet}(t) = \left\langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}\, q) \mid (\partial_1 \Psi)^{1|0} \circ c \,\right\rangle(t), \quad t \in J.$$

Als Lösung von (ELG) gilt via **#253**

$$(\Delta_{\mathtt{elg}}\, q) = \mathsf{zo}_J.$$

□

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}$, $1 \le m \in \mathbb{N}$.
$\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$, $1 \le m \in \mathbb{N}$.
Erhaltung von Drehimpulsdichten.

Ersterstellung: 26/01/14 **Letzte Änderung: 18/02/15**

Notationen. Sei $1 \le m \in \mathbb{N}$. Für $u, w \in \mathbb{R}^m$ gelten die Parallelogramm-Gleichungen

$$\|u \pm w\|_m^2 = \|u\|_m^2 \pm 2 \cdot \langle\, u \mid w \,\rangle_m + \|w\|_m^2,$$

aus denen sich wie von selbst die Gleichung

$$\langle\, u \mid w \,\rangle_m = (\|u + w\|_m^2 - \|u - w\|_m^2) : 4, \tag{5}$$

ergibt. Abkürzend wird

$$\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} = \sqrt{\|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - \langle\, u \mid w \,\rangle_m^2},$$

gesetzt. Offenbar gilt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} \in [0| + \infty[$ oder $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} = \mathcal{U}$. Im Fall $m = 1$ und $u, w \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ gilt $\overset{1,u,w}{\mathsf{dskr}} = 0$. $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}$ ist genau dann eine nicht-negative, reelle Zahl, wenn $u, w \in \mathbb{R}^m$. Falls $u, w \in \mathbb{R}^m$, so gilt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} = 0$ genau dann, wenn u, w linear abhängig sind. Für $(u, w) \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^m)$ gilt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} = 1$.

Nun wird für $u, w \in \mathbb{R}^m$, $1 \le m \in \mathbb{N}$, eine spezielle Familie linearer Abbildungen, nämlich der $\mathbb{R}^m$Drehungen$\perp(u, w)$, in die KLT eingebracht.

$$\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}} = \{ \qquad ((\phi, x), y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m :$$

$$y = x$$

$$- u \cdot (\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot (1 - \cos\phi) \cdot \|w\|_m^2$$
$$+ \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} \cdot \sin\phi - (1 - \cos\phi) \cdot \langle\, u \mid w \,\rangle_m)) : (\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}})^2$$

$$-w \cdot (- \langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot (\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} \cdot \sin\phi + (1 - \cos u) \cdot \langle\, u \mid w \,\rangle_m)$$
$$+ \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (1 - \cos\phi) \cdot \|u\|_m^2) : (\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}})^2.$$

$\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ *besitzt einige, im Folgenden oft eingesetzte "Funktions-Eigenschaften". Der Beweis bleibt den Lesern überlassen.*

Es gelte:

$\rightarrow$) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

Dann folgt:

a) $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ Relation.

b) $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ Funktion.

c) $\mathsf{dom}\,(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

d) $\mathsf{ran}\,(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Wesentlich interessanter als eine allgemeine, nichts über u, w voraussetzende Diskussion von $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ ist die Untersuchung von $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ im Fall $u, w \in \mathbb{R}^m$. Der Beweis von ab) *bleibt neuerlich den Lesern überlassen, obwohl man beim Nachweis von* b) *wor einige Herausforderungen gestellt wird. Am besten werwendet man die Erhaltung der Norm - dies wird später bewiesen - und die geradezu offensichtliche Linearität von $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$, die später nachgereicht wird. An* d) *manifestiert sich, dass es auf die Reihenfolge von u und w ankommt. Aussage* e) *kommt zum Tragen, wenn u, w linear abhängig sind. In diesen Fällen ist es in der Tat nicht einfach, von einer Drehung, die die von u, w aufgespannte Ebene inwariant lässt - siehe später - zu sprechen. So kommt die Konwention $1 : 0 = 0$ zum Tragen.*

Es gelte:

→) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^m$.

→) $(\phi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

b) $\mathsf{ran}\,(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}) = \mathbb{R}^m$.

c) Falls $p = \overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}$ und $c = \langle\, u \mid w \,\rangle_m$, so gilt

$$\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) = x$$

$$- u \cdot (\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot (1 - \cos\phi) \cdot \|w\|_m^2 + \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (p \cdot \sin\phi - (1 - \cos\phi) \cdot c)) : \ p^2$$

$$-w \cdot (-\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot (p \cdot \sin\phi + (1 - \cos\phi) \cdot c) + \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (1 - \cos\phi) \cdot \|u\|_m^2) : \ p^2.$$

d) $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (-\phi, x) = \overset{m,w,u}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x)$.

e) Aus $\overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}} = 0$ folgt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) = x$.

f) Aus $\langle\, x \mid u \,\rangle_m = 0$ und $\langle\, x \mid w \,\rangle_m = 0$ folgt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) = x$.

g) Aus $x \in \mathsf{span}\{u, w\}$ folgt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) \in \mathsf{span}\{u, w\}$.

Im Spezialfall $m = 1$ ergibt sich unter kanonischen Bedingungen an u, w, ϕ, x via $\overset{1,u,w}{\mathsf{dskr}} = 0$ die Gleichung $\overset{1,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) = x$.

Aus $u, w, \phi, x \in \mathbb{R}$ folgt $\overset{1,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) = x$.

Sind $u, w \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, so gilt $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}} \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^m)$ - dieser Nachweis bleibt den Lesern überlassen - und es gilt $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^m}$ - auch dies wird hier wegen Offensichtlichkeit nicht bewiesen - und $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}$ ist für alle $\phi \in \mathbb{R}$ linear.

Es gelte:

→) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^m$.

Dann folgt:

a) $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}} \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \mathbb{R}^m)$.

b) $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^m}$.

c) Für alle $\phi \in \mathbb{R}$ ist $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}$ linear.

Beweis. c) Sei $\phi \in \mathbb{R}$ und sei $x \in \mathbb{R}^m$. Mit den Bezeichnungen

$$p = \overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}, \quad c = \langle\, u \mid w \,\rangle_m,$$

gilt via des Vorangehenden

$$(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x) = \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\,(\phi, x) = x + \langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot a + \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot b,$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= a(u, w, \phi) \\ &= -u \cdot (1 - \cos\phi)^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^2 + w \cdot (p \cdot \sin\phi + (1 - \cos\phi) \cdot c) : p^2 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b &= b(u, w, \phi) \\ &= -u \cdot ((1 - \cos\phi) \cdot c - p \cdot \sin\phi) : p^2 - w \cdot (1 - \cos\phi) \cdot \|u\|^2 : p^2 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

nur von u, w, ϕ aber nicht von $x \in \mathbb{R}^m$ abhängen. Hieraus ergibt sich ohne allzu wiel Mühe die Linearität von $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}$.

$\square$

Für $u, w \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, und $\phi \in \mathbb{R}$ erhält $(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}$ Norm und Skalar-Produkt.

Es gelte:

→) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^m$.

→) $(\phi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Dann folgt:

a) $\|(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)\|_m = \|x\|_m$.

b) Für alle $y \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\left\langle\ (\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x) \mid (\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(y)\ \right\rangle_m = \langle\ x \mid y\ \rangle_m\,.$$

<u>Beweis.</u> Im Hinblick auf (5) muss nur a) bewiesen werden.
Dabei stellt dank worangehender Untersuchungen nur der Fall $0 \neq \overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}$ eine Herausforderung dar. In diesem Fall ergibt sich mit Hilfe der Abkürzungen

$$p = p(u, w, m) = \overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}, \quad c = c(u, w, m) = \langle\ u \mid w\ \rangle_m\,,$$

aus denen im Speziellen

$$\|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - c^2 = p^2,$$

folgt, ...

$$
\begin{aligned}
\|(\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)\|_m^2 = \|\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}(\phi,x)\|_m^2 = \left\langle \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}(\phi,x) \;\middle|\; \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}(\phi,x) \right\rangle_m
&= \|x\|_m^2 \\
&+ (\|u\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad \langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|w\|_m^4 \\
&+ 2\,\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot \|w\|_m^2 \\
&+ \langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c)^2 \quad) \\
&+ (\|w\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad \langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c)^2 \\
&- 2\,\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot \|u\|_m^2 \\
&+ \langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^4 \quad) \\
&- 2(\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 : p^2) \cdot (1-\cos\phi) \\
&- 2\,\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) : p^2 \\
&+ 2\,\langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c) : p^2 \\
&- 2(\|u\|_m^2 : p^2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot (1-\cos\phi) \\
&- 2c \cdot (\|w\|_m^2 : p^4) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c) \\
&+ 2c \cdot (\|u\|_m^2 : p^4) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) \\
&+ 2c \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot ((1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
&- (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c)) : p^4 \\[1ex]
&= \|x\|_m^2 \\
&+ (\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^4 \\
&+ (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c)^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
&- 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) \cdot \|w\|_m^2 - 2c \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot \|w\|_m^2 \quad) \\
&+ 2\,\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (\quad (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
&- (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
&- (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) + (p\cdot\sin\phi + (1-\cos\phi)\cdot c) \\
&+ c \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - cp^2 \cdot \sin^2\phi + c \cdot ((1-\cos\phi)\cdot c)^2 \quad) : p^4 \\
&+ (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
&+ (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c)^2 \cdot \|u\|_m^2 \\
&- 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) \cdot \|u\|_m^2 + 2c \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p\cdot\sin\phi - (1-\cos\phi)\cdot c) \cdot \|u\|_m^2 \quad) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ldots = {} & \|x\|_m^2 \\
& + (\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& + (p \cdot \sin\phi + (1-\cos\phi) \cdot c)^2 \\
& - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) - 2c \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p \cdot \sin\phi + (1-\cos\phi) \cdot c) \quad) \\
& + 2\,\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (\quad (1-\cos\phi) \cdot (p \cdot \sin\phi - (1-\cos\phi) \cdot c) \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& - (1-\cos\phi) \cdot (p \cdot \sin\phi + (1-\cos\phi) \cdot c) \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& - (p \cdot \sin\phi - (1-\cos\phi) \cdot c) + (p \cdot \sin\phi + (1-\cos\phi) \cdot c) \\
& + c \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - cp^2 \cdot \sin^2\phi + c \cdot ((1-\cos\phi) \cdot c)^2 \quad) : p^4 \\
& + (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot \|u\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& + (p \cdot \sin\phi - (1-\cos\phi) \cdot c)^2 \\
& - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) + 2c \cdot (1-\cos\phi) \cdot (p \cdot \sin\phi - (1-\cos\phi) \cdot c) \quad)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & \|x\|_m^2 \\
& + (\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 + p^2 \cdot \sin^2\phi \\
& + 2cp \cdot \sin\phi \cdot (1-\cos\phi) + c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) \\
& - 2cp \cdot \sin\phi \cdot (1-\cos\phi) - 2c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 \quad) \\
& + 2\,\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m \cdot (\quad 2p \cdot (1-\cos\phi) \cdot \sin\phi \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& - 2c \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& - 2p \cdot (1-\cos\phi) \cdot \sin\phi \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - 2c \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
& + 4cp^2 \cdot (1-\cos\phi) + 2c \cdot (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - 2cp^2 \cdot \sin\phi \\
& + 2c^3 \cdot (1-\cos\phi)^2 \quad) : p^4 \\
& + (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot \|u\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 + p^2 \cdot \sin^2\phi \\
& - 2cp \cdot \sin\phi \cdot (1-\cos\phi) + c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) \\
& + 2cp \cdot (1-\cos\phi) \cdot \sin\phi - 2c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 \quad)
\end{aligned}
$$

$$= \ldots$$

$$\begin{gathered}
\ldots = \|x\|_m^2 \\
+ (\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 + p^2 \cdot \sin^2\phi \\
- c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) \quad) \\
+ 2c \cdot (\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m : p^4) \cdot (\quad -2(1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 \\
+ 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) - 2(1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - 2p^2 \cdot \sin^2\phi \\
+ 2c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 \quad) \\
+ (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot \|u\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 + p^2 \cdot \sin^2\phi \\
- c^2 \cdot (1-\cos\phi)^2 - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) \quad)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
= \|x\|_m^2 + \\
(\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot (\|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2 - c^2) \\
- 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) + p^2 \cdot \sin^2\phi \quad) \\
+ 2c \cdot (\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot (c^2 - \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2) \\
+ 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) - p^2 \cdot \sin^2\phi \quad) \\
+ (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot \|u\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot (-c^2 + \|u\|_m^2 \cdot \|w\|_m^2) \\
- 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) + p^2 \cdot \sin^2\phi \quad)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
= \|x\|_m^2 + \\
(\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot p^2 - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) + p^2 \cdot \sin^2\phi \quad) \\
+ 2c \cdot (\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m : p^4) \cdot (\quad -(1-\cos\phi)^2 \cdot p^2 \\
+ 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) - p^2 \cdot \sin^2\phi \quad) \\
+ (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot \|u\|_m^2 : p^4) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 \cdot p^2 - 2p^2 \cdot (1-\cos\phi) + p^2 \cdot \sin^2\phi \quad)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
= \|x\|_m^2 + \\
(\langle\, x \mid u \,\rangle_m^2 \cdot \|w\|_m^2 : p^1) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 - 2(1-\cos\phi) + \sin^2\phi \quad) \\
+ 2c \cdot (\langle\, x \mid u \,\rangle_m \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle_m : p^1) \cdot (\quad -(1-\cos\phi)^2 + 2(1-\cos\phi) - \sin^2\phi \quad) \\
+ (\langle\, x \mid w \,\rangle_m^2 \cdot \|u\|_m^2 : p^2) \cdot (\quad (1-\cos\phi)^2 - 2(1-\cos\phi) + \sin^2\phi \quad)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
= \ldots (1-\cos\phi)^2 - 2(1-\cos\phi) + \sin^2\phi = 0 \ldots \\
= \|x\|_m^2.
\end{gathered}$$

$\square$

Nun soll für geeignete $u, w \in \mathbb{R}^m$ *die Funktion* $\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ *untersucht werden. In* `b)` *ist* $\vec{0}$ *der Null-Vektor im* $\mathbb{R}^m$*.*

Es gelte:

→) $u, w, x \in \mathbb{R}^m$.

→) $p = \overset{m,u,w}{\mathsf{dskr}}$.

→) $c = \langle\ u \mid w\ \rangle_m$.

Dann folgt:

`a)` Für alle $\phi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}&(\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(\phi, x)\\ &\quad = -u \cdot (\langle\ x \mid u\ \rangle_m \cdot \|w\|_m^2 \cdot \sin\phi + \langle\ x \mid w\ \rangle_m \cdot (p \cdot \cos\phi - c \cdot \sin\phi)) :\ p^2\\ &\quad -w \cdot (-\langle\ x \mid u\ \rangle_m \cdot (p \cdot \cos\phi + c \cdot \sin\phi) + \langle\ x \mid w\ \rangle_m \cdot \|u\|_m^2 \cdot \sin\phi) :\ p^2.\end{aligned}$$

`b)` Falls $p = 0$, so gilt für alle $\phi \in \mathbb{R}$,

$$(\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(\phi, x) = \vec{0}.$$

`c)` $(\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(0, x) = (-u \cdot \langle\ x \mid w\ \rangle_m + w \cdot \langle\ x \mid u\ \rangle_m) : p.$

`d)` Für alle $\phi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left\langle\ (\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(\phi, x) \mid \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x)\ \right\rangle_m = 0.$$

<u>**Beweis.**</u> Für alle $\phi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\ (\phi, x) = x + \sin\phi \cdot A + (1 - \cos\phi) \cdot B,$$

wobei

$$A = A(u, w, x) = -u \cdot \langle\ x \mid w\ \rangle_m : p + w \cdot \langle\ x \mid u\ \rangle_m : p \in \mathbb{R}^m,$$

und

$$\begin{aligned}B = B(u, w, x) = u \cdot (-\langle\ x \mid u\ \rangle_m \cdot |w|^2 + c \cdot \langle\ x \mid w\ \rangle_m) : p^2\\ + w \cdot (c \cdot \langle\ x \mid u\ \rangle_m - \langle\ x \mid w\ \rangle_m \cdot |u|^2) : p^2 \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung ergibt sich ohne wiel Weiteres

$$(\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(\phi, x) = \cos\phi \cdot A + \sin\phi \cdot B,$$

und hieraus

$$(\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(0, x) = A,$$

wobei im Fall $p = 0$ offenbar $A = \vec{0}$ gilt. Damit sind `abc)` bewiesen. Zum Beweis von `d)` wird die Hilfs-Funktion $f = f(u, w, x)$,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad f(\sigma) = \left\langle \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\,(\sigma, x) \mid \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\,(\sigma, x) \right\rangle_m,$$

betrachtet. Wie worab gesagt gilt

$$f = (\|x\|_m^2)^{\mathbf{on}}\mathbb{R},$$

und somit $f' = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$. Andererseits gilt offenbar

$$f'(\sigma) = \left\langle (\partial_1 \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}})(\sigma, x) \mid \overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}\,(\sigma, x) \right\rangle_m, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Nun kann der Zusammenhang zwischen $\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}}$ *und der* (u, w)*Drehimpulsdichte* $\mathtt{I}(u, w)$ *hergestellt werden. Der einfache Beweis bleibt den Lesern überlassen.*

Aus $u, w \in \mathbb{R}^s$ und $p = \overset{s,u,w}{\mathsf{dskr}}$ folgt

$$\left\langle \mathtt{P} \mid (\partial_1 \overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|0} \right\rangle = -\mathtt{I}(u, w) : p.$$

Nach den Vorbereitungen soll nun untersucht werden, inwieweit sich für $u, w \in \mathbb{R}^s$ *die Funktion* $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ *als* $L.\boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$*-Transformationsfamilie in Frage kommt. Diese Frage kann unter Bezug auf* **#260** *relatiw einfach beantwortet werden. Im zu Grunde liegenden Satz kann* $E = \mathbb{R}$ *gewählt werden.*

Es gelte:

→) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{vel}}] \subseteq E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt “ $\overset{m,u,w}{\mathsf{dreh}}$ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$-Transformationsfamilie” .

Werden nun die bisherigenn Resultate kombiniert, so ergibt sich via **#267** *vorliegende Aussage, deren Beweis den Lesern überlassen werden kann.*

Es gelte:

→) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}, E_{\texttt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \times E_{\texttt{vel}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{vel}}] \subseteq E_{\texttt{vel}}$.

→) J echtes reelles Intervall.

→) $J \subseteq E_{\texttt{zeit}}$.

→) $c \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$.

→) Für alle $t \in J$ gilt $c(t) \in E_{\texttt{ort}}$ und $\dot{c}(t) \in E_{\texttt{vel}}$.

Dann folgt mit $p = \overset{s,u,w}{\mathsf{dskr}}$ für alle $t \in J$:

$$\lim_{\phi \to 0} \Big(L(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(c(t)), (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(\dot{c}(t))) - (L^* c)(t) \Big) : \phi$$

$$= \Big(\langle c \mid u \rangle \cdot \langle (\Delta_{\texttt{elg}} c) \mid w \rangle - \langle c \mid w \rangle \cdot \langle (\Delta_{\texttt{elg}} c) \mid u \rangle \Big)(t) : p \\ -\Big(\mathtt{I}(u,w)^* c \Big)^{\bullet}(t) : p$$

$$= -\Big(\mathtt{M}(u,w)^* c \Big)(t) : p.$$

Löst q die Euler-Lagrange-Gleichungen `(ELG)`*, so ist Vorliegendes für die Änderungsrate von* $\mathtt{I}(u,w)^*q$ *verfügbar*

Es gelte:

→) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{vel}}] \subseteq E_{\mathtt{vel}}$.

→) q löst `(ELG)`.

→) $\mathsf{dom}\, q = J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) Für alle $t \in J$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{q}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt mit $p = \overset{s,u,w}{\mathsf{dskr}}$ für alle $t \in J$:

$$\lim_{\phi \to 0} \Big(L(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(q(t)), (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(\dot{q}(t))) - (L^*q)(t) \Big) : \phi$$
$$= -\Big(\mathtt{I}(u,w)^*q \Big)^{\bullet}(t) : p = -\Big(\mathtt{M}(u,w)^*q \Big)(t) : p.$$

Die häufigsten Anwendungen des hier Entwickelten beziehen sich auf Situationen, in denen im vorliegenden Kontext

$$L(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x), (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(v)) = L(t,x,v), \quad (\phi,t,x,v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}},$$

gilt - obwohl diese Bedingung durch die schächere Aussage

$$\lim_{\phi \to 0} \Big(L(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x), (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(v)) - L(t,x,v) \Big) : \phi = 0,$$

ersetzt werden könnte. Entsprechende Adaptionen bleiben bis auf Weiteres den Lesern überlassen.

Es gelte:

→) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{vel}}] \subseteq E_{\mathtt{vel}}$.

→) Für $(\phi, t, x, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$ gilt

$$L(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x), (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(v)) = L(t,x,v).$$

→) J echtes reelles Intervall.

→) $J \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) $c \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^s)$.

→) Für alle $t \in J$ gilt $c(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{c}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt für alle $t \in J$,

$$\big(\mathtt{I}(u,w)^* c \big)^{\bullet}(t)$$
$$= \Big(\ \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid w \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid u \,\rangle \ \Big)(t),$$

und

$$\mathtt{M}(u,w)^* c(t) = 0.$$

Ist über die vorhergehenden Prämissen hinaus q eine Lösung von `(ELG)`*, so ergibt sich das vielleicht bekannteste einschlägige Resultat.*

Es gelte:

- →) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- →) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}, E_{\mathtt{vel}}$ sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- →) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.
- →) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- →) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{vel}}] \subseteq E_{\mathtt{vel}}$.
- →) Für alle $(\phi, t, x, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times E_{\mathtt{vel}}$ gilt

$$L(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x), (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(v)) = L(t, x, v).$$

- →) q löst `(ELG)`.
- →) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.
- →) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$ und $\dot{q}(t) \in E_{\mathtt{vel}}$.

Dann folgt:

a) $\mathtt{M}(u, w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$.

b) $(\mathtt{I}(u, w)^* q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$.

c) Für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(\mathtt{I}(u, w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u, w)^* q)(\sigma).$$

Oft sind u, w nicht beliebige Elemente von $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, sondern es gilt $(u, w) \in \mathsf{ONB2}(\mathbb{R}^m)$. Für diese Fälle ist Vorliegendes gelegentlich hilfreich. Auf den Beweis wird verzichtet.

Es gelte:

$\rightarrow$) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $(f_1, f_2) \in \mathsf{ONB2}(\mathbb{R}^m)$.

$\rightarrow$) $(\phi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Dann folgt:

a) $$\overset{m,f_1,f_2}{\mathsf{dreh}}(\phi, x) = x - f_1 \cdot \big(\langle\, x \mid f_1 \,\rangle_m \cdot (1 - \cos\phi) + \langle\, x \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \sin\phi \,\big) \\ - f_2 \cdot \big(-\langle\, x \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \sin\phi + \langle\, x \mid f_2 \,\rangle_m \cdot (1 - \cos\phi) \,\big).$$

b) $$(\partial_1 \overset{m,f_1,f_2}{\mathsf{dreh}})(\phi, x) = -f_1 \cdot (\langle\, x \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \sin\phi + \langle\, x \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \cos\phi) \\ - f_2 \cdot (-\langle\, x \mid f_1 \,\rangle_m \cdot \cos\phi + \langle\, x \mid f_2 \,\rangle_m \cdot \sin\phi).$$

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: $E^{\frown}\Psi$.
$L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}, m$-Koordinatenfunktion.
TransformationsSatz `(ELG)`.

Ersterstellung: 29/01/14 **Letzte Änderung: 18/02/15**

Gegenstand der Betrachtungen sind die im Rahmen der KLT gerne verwendeten "Variablen-Transformationen", bei denen die "ursprünglichen cartesischen Koordinaten" durch "problembezogene Koordinaten" - oder, etwas weniger spezifisch durch "krummlinige Koordinaten" - ersetzt werden sollen. Zum Beispiel ist es mitunter ratsam, zu "Polar-" oder "Kugelkoordinaten" überzugehen. Ist dies geschehen, so stellen sich die `(ELG)` *nicht mehr in den "cartesischen Koordinaten" - im Fall $s = 3$ gerne mit x, y, z bezeichnet - dar, sondern etwa in den "Kugelkoordinaten" r, θ, ϕ. Es erhebt sich die Frage, wie die Bewegungsgleichungen* `(ELG)` *in den neuen Koordinaten aussehen. In der einschlägigen Literatur wird einfach die klassische Form - etwa in der in den Essays ansonsten nicht zum Einsatz kommenden Gestalt "$\left((\nabla_{\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi}}\tilde{L})^* q\right)^\bullet = (\nabla_{r,\theta,\phi}\tilde{L})^*\tilde{q}$" geschrieben, wobei "$\tilde{\ }$" die Verwendung krummliniger Koordinaten andeutet - verwendet und die korrespondierenden Lösungen $\tilde{q}$ in cartesiche Koordinaten "zurücktransformiert". Es ist Ziel des vorliegenden Essays, diese Vorgehensweise unter die Lupe zu nehmen.*

$$\Gamma \textit{ ist } L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}, m\textit{-Koordinatenfunktion}$$

genau dann, wenn gilt:

1) $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

2) $0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ *ist offene Teilmenge von* $\mathbb{R}$.

3) $0 \neq D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}$ *sind offene Teilmengen des* $\mathbb{R}^m$.

4) *Für* $\Psi = (\Gamma \downharpoonright D_{\mathtt{ort}})$ *gilt:*

   4.a) $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

   4.b) $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \times \Psi^{\mathtt{G}}[D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}}] \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Bemerkung. Hier fällt das Erscheinen von m mit $1 \leq m \in \mathbb{N}$ auf. Es kann $m = s$ gelten. Es kann aber auch $m \neq s$ sein.

Notationen. Falls $0 \neq D$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$, ist und falls $g \in \mathsf{C}^1(D : \mathbb{R}^n)$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, so sei

$$E^{\sim} g = \{(\lambda, \mu) : (\lambda = (t, x, v)) \wedge (\mu = E(t, g(x), g^{\mathtt{G}}(x, v)))\},$$

mit einem etwas verwickelten, da x und v Variable mischenden, Definitions-Bereich. Falls im Speziellen Γ eine $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}, m$-Koordinatenfunktion ist, dann gilt im am häufigst vorkommenden Fall für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ offenbar

$$L^{\sim}\Psi \in \mathsf{C}^1(O_{\mathtt{zeit}} \times D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}} : \mathbb{R}),$$

und es nicht allzu herausfordernd auch die erste Kernaussage dieses Essays, nämlich

$L^{\sim}\Psi$ ist eine klassische Lagrange-Funktion mit m Freiheitsgraden auf $O_{\mathtt{zeit}} \times D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}}$

mit

$$L^{\sim}\Psi = (L^{\sim}\Psi \downharpoonleft O_{\mathtt{zeit}} \times D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}}),$$

nachzuweisen. Auch hier fällt der mögliche Wechsel der Anzahl der Freiheitsgrade auf. Klarer Weise gilt

$$(L^{\sim}\Psi)(t, x, v) = L(t, \Psi(x), \Psi^{\mathtt{G}}(x, v)), \quad (t, x, v) \in O_{\mathtt{zeit}} \times D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}}.$$

Die einschlägigen Koordinatenfunktionen verdienen ihren Namen nicht zuletzt wegen des nun folgenden Satzes, dessen Beweis den Lesern überlassen wird.

Es gelte:

→) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}, m$-Koordinatenfunktion

→) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$.

→) γ ist $O_{\mathtt{zeit}} \times D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}}$-Kurve.

Dann folgt:

a) $\Psi \circ \gamma$ ist eine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-Kurve.

b) $\mathsf{dom}\,(\Psi \circ \gamma) = \mathsf{dom}\,\gamma$.

c) $(\Psi \circ \gamma)^{\bullet} = \Psi^{\mathtt{G}} \circ (\gamma, \dot{\gamma})$.

In diesem Abschnitt gibt es nun mit L und $L^{\sim}\Psi$ - Ψ ist die Einschränkung einer Koordinatenfunktion Γ - zwei verschiedene Lagrange-Funktionen. Dies ist Grund genug, die Untersuchung der Euler-Lagrange-Gleichungen durch Vorab-Differenzieren vorzubereiten.

Es gelte:

$\rightarrow$) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}, m$-Koordinatenfunktion

$\rightarrow$) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$.

$\rightarrow$) $(t, x, v) \in O_{\mathtt{zeit}} \times D_{\mathtt{ort}} \times D_{\mathtt{vel}}$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$

Dann folgt:

`a)` $(\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))(t, x, v)$

$$= \langle\ (\mathtt{K}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(x) \cdot v_\beta\ \rangle.$$

`b)` $(\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))(t, x, v) = \langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle$.

<u>Beweis.</u> `a)`

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))(t, x, v) &= \langle\ (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, \Psi(x), \Psi^{\mathtt{G}}(x, v)) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle \\
&\quad + \langle\ (\nabla_{\mathtt{v}} L)(t, \Psi(x), \Psi^{\mathtt{G}}(x, v)) \mid (\partial_{x_\alpha}\Psi^{\mathtt{G}})(x, v)\ \rangle \\
&= \langle\ (\mathtt{K}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle + \langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid (\partial_{x_\alpha}\Psi^{\mathtt{G}})(x, v)\ \rangle \\
&= \langle\ (\mathtt{K}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle + \left\langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \;\middle|\; \sum_{\beta=1}^{m} \Psi_{,\,\beta\alpha}(x) \cdot v_\beta\ \right\rangle \\
&= \langle\ (\mathtt{K}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(x) \cdot v_\beta\ \rangle.
\end{aligned}$$

`b)`

$$\begin{aligned}
(\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))(t, x, v) &= \langle\ (\nabla_{\mathtt{v}} L)(t, \Psi(x), \Psi^{\mathtt{G}}(x, v)) \mid (\partial_{v_\alpha}\Psi^{\mathtt{G}})(x, v)\ \rangle \\
&= \langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid (\partial_{v_\alpha}\Psi^{\mathtt{G}})(x, v)\ \rangle = \langle\ (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, x, v) \mid \Psi_{,\,\alpha}(x)\ \rangle.
\end{aligned}$$

Nun ist es an der Zeit, $(\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma$ *und* $(\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma$ *für geeignete Kurven* γ *zu betrachten.*

Es gelte:

$\rightarrow$) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\texttt{zeit}}, D_{\texttt{ort}}, D_{\texttt{vel}}, m$-Koordinatenfunktion

$\rightarrow$) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\texttt{ort}})$.

$\rightarrow$) γ ist $O_{\texttt{zeit}} \times D_{\texttt{ort}} \times D_{\texttt{vel}}$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$

Dann folgt:

a) $(\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma$

$$= -\langle\, (\Delta_{\texttt{elg}}(\Psi \circ \gamma)) \mid \Psi_{,\,\alpha} \circ \gamma \,\rangle + \langle\, \texttt{P}^*(\Psi \circ \gamma) \mid \Psi_{,\,\alpha} \circ \gamma \,\rangle^\bullet.$$

b) $(\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma = \langle\, \texttt{P}^*(\Psi \circ \gamma) \mid \Psi_{,\,\alpha} \circ \gamma \,\rangle$.

c) $\big(\, (\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma \,\big)^\bullet = \langle\, \texttt{P}^*(\Psi \circ \gamma) \mid \Psi_{,\,\alpha} \circ \gamma \,\rangle^\bullet$.

d) $\big(\, (\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma \,\big)^\bullet - (\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma = \langle\, (\Delta_{\texttt{elg}}(\Psi \circ \gamma)) \mid \Psi_{,\,\alpha} \circ \gamma \,\rangle$.

Beweis. a) Mit Hilfe der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von Ψ kann für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ gerechnet werden:

$$
\begin{aligned}
\big(\, (\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma \,\big)(t) &= (\partial_{x_\alpha}(L^{\sim}\Psi))(t, \gamma(t), \dot\gamma(t)) \\
&= \langle\, (\mathtt{K}^{\sim}\Psi)(t, \gamma(t), \dot\gamma(t)) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\, (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t, \gamma(t), \dot\gamma(t)) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\rangle \\
&= \Big\langle\, \mathtt{K}(t, \Psi(\gamma(t)), \Psi^{\mathtt{G}}(\gamma(t), \dot\gamma(t))) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\Big\rangle \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{m} \Big\langle\, \mathtt{P}(t, \Psi(\gamma(t)), \Psi^{\mathtt{G}}(\gamma(t), \dot\gamma(t))) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\Big\rangle \\
&= \langle\, \mathtt{K}(t, (\Psi\circ\gamma)(t)), (\Psi\circ\gamma)^{\bullet}(t) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\, \mathtt{P}(t, (\Psi\circ\gamma))(t), (\Psi\circ\gamma)^{\bullet}(t)) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\rangle \\
&= \langle\, (\mathtt{K}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\rangle \\
&= \langle\, (\mathtt{K}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t)) \,\rangle + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid \Psi_{,\,\beta\alpha}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\rangle \\
&= \langle\, (\mathtt{K}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t)) \,\rangle + \sum_{\beta=1}^{m} \langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid \Psi_{,\,\alpha\beta}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\rangle \\
&= \langle\, (\mathtt{K}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t)) \,\rangle + \left\langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid \sum_{\beta=1}^{m} \Psi_{,\,\alpha\beta}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\beta(t) \,\right\rangle \\
&= \langle\, (\mathtt{K}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t)) \,\rangle + \langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)^{\bullet}(t) \,\rangle \\
&= -\langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t)) \,\rangle + \langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))^{\bullet}(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t) \,\rangle \\
&\quad + \langle\, (\mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma))(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)^{\bullet}(t) \,\rangle \\
&= -\langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}(\Psi\circ\gamma)) \mid \Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma \,\rangle\,(t) + \big(\, \langle\, \mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma) \,\rangle \,\big)^{\bullet}(t).
\end{aligned}
$$

b) Für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt:

$$
\begin{aligned}
((\partial_{v_\alpha}(L^{\sim}\Psi))^*\gamma)(t) &= \langle\, (\mathtt{P}^{\sim}\Psi)(t,\gamma(t),\dot\gamma(t)) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle \\
&= \langle\, \mathtt{P}(t,\Psi(\gamma(t)),\Psi^{\mathtt{G}}(\gamma(t),\dot\gamma(t))) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle \\
&= \langle\, \mathtt{P}(t,(\Psi\circ\gamma)(t),(\Psi\circ\gamma)^{\bullet}(t)) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle \\
&= \langle\, \mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma)(t) \mid \Psi_{,\,\alpha}(\gamma(t)) \,\rangle \\
&= \langle\, \mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma)(t) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma)(t) \,\rangle \\
&= \langle\, \mathtt{P}^*(\Psi\circ\gamma) \mid (\Psi_{,\,\alpha}\circ\gamma) \,\rangle\,(t).
\end{aligned}
$$

c) folgt sofort aus b).

d) folgt aus ac).

$\square$

Aus den vorangehenden Betrachtungen kann nun der TransformationsSatz `(ELG)` *formuliert und bewiesen werden.* `(E`$L^\frown\Psi$`G)` *sind die auf* $L^\frown\Psi$ *bezogenen Euler-Lagrange-Gleichungen. Aussage* `b)` *kann nur im Falls* $s \leq m$ *- im Speziellen: im Fall* $s = m$ *- gelten.*

Es gelte:

$\rightarrow$) Γ ist $L, \boldsymbol{\mathcal{D}}, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, D_{\mathtt{vel}}, m$-Koordinatenfunktion

$\rightarrow$) $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$.

$\rightarrow$) Q löst `(E`$L^\frown\Psi$`G)`.

Dann folgt:

`a)` Für $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}(\Psi \circ \gamma))\ |\ \Psi_{,\,\alpha} \circ \gamma\ \rangle = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,Q}.$$

`b)` Ist $\{(\Psi_{,\,1} \circ \gamma)(t), \ldots, (\Psi_{,\,m} \circ \gamma)(t)\}$ für alle $t \in \mathsf{dom}\,Q$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^s$, so gilt

$$\Psi \circ \gamma \text{ löst } \texttt{(ELG)}.$$

<u>Beweis.</u> `a)` Da Q eine Lösung von `(E`$L^\frown\Psi$`G)` ist gilt für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\partial_{v_\alpha}(L^\frown\Psi))^* Q\ \big)^\bullet = (\partial_{x_\alpha}(L^\frown\Psi))^* Q,$$

also auch

$$\big(\ (\partial_{v_\alpha}(L^\frown\Psi))^* Q\ \big)^\bullet - (\partial_{x_\alpha}(L^\frown\Psi))^* Q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,Q},$$

so dass sich via des vorangehenden Satzes die Aussage

$$\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,Q} = \langle\ (\Delta_{\mathtt{elg}}(\Psi \circ Q))\ |\ \Psi_{,\,\alpha} \circ Q\ \rangle\,,$$

ergibt.

`b)` Unter den genannten Voraussetzungen folgt aus der laut `a)` gültigen Gleichung

$$\Delta_{\mathtt{elg}}(\Psi \circ Q)(t) = \vec{0},$$

wobei $t \in \mathsf{dom}\,Q$ und $\vec{0}$ der Null-Vektor des $\mathbb{R}^s$ ist. Hieraus folgt, dass $\Psi \circ Q$ die `(ELG)` löst.

□

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Polarkoordinaten. Kugelkoordinaten. Zylinderkoordinaten.

Ersterstellung: 30/01/14 **Letzte Änderung: 19/02/15**

In diesem Essay sollen die spezielle Koordinatenfunktionen "Polarkoordinaten", "Kugelkoordinaten " und "Zylinderkoordinaten" in die Essays eingebracht werden. Mit den Notationen von **#269** *ist $m = s = 2$ für Polarkoordinaten und $m = s = 3$ für Kugel- und Zylinderkoordinaten. Anders als sonst beziehen sich die genannten Koordinatenfunktionen auf vorab gewählte Orthonormalbasen.*

Polarkoordinaten. Sei $(f_1, f_2) \in \mathsf{ONS2}(\mathbb{R}^2)$ und sei $p \in \mathbb{R}^2$. Der Übergang zu Polarkoordinaten wird durch die Funktion

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Gamma(x) = p + x_1 \cos x_2 \cdot f_1 + x_1 \sin x_2 \cdot f_2,$$

bewerkstelligt. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\Gamma_{,1}(x) = \cos x_2 \cdot f_1 + \sin x_2 \cdot f_2, \quad \Gamma_{,2}(x) = -x_1 \sin x_2 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \cdot f_2,$$

so dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathsf{G}}(x, v) &= \sum_{\alpha=1}^{2} \Gamma_{,\alpha}(x) \cdot v_\alpha = \Gamma_{,1}(x) \cdot v_1 + \Gamma_{,2}(x) \cdot v_2 \\ &= (\cos x_2 \cdot f_1 + \sin x_2 \cdot f_2) \cdot v_1 + (-x_1 \cdot \sin x_2 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \cdot f_2) \cdot v_2 \\ &= (v_1 \cos x_2 - x_1 v_2 \sin x_2) \cdot f_1 + (v_1 \sin x_2 + x_1 v_2 \cos x_2) \cdot f_2.\end{aligned}$$

Bemerkenswerter Weise kann hier auf ein (positives) Vorzeichen von x_1 und eine Einschränkung von x_2 auf eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ verzichtet werden.
Die Vektoren $\Gamma_{,1}(x), \Gamma_{,2}(x)$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, wenn $0 \neq \det(\Gamma_{,1}(x), \Gamma_{,2}(x))$ und dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned}0 &\neq \det(\cos x_2 \cdot f_1 + \sin x_2 \cdot f_2, -x_1 \sin x_2 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \cdot f_2) \\ &= x_1 \cos^2 x_2 \det(f_1, f_2) - (-x_1) \sin^2 x_2 \det(f_2, f_1) \\ &= x_1(\cos^2 x_2 + \sin^2 x_2) \det(f_1, f_2) = x_1 \cdot (\pm 1) = \pm x_1,\end{aligned}$$

also wenn

$$0 \neq x_1,$$

gilt. In Bezug auf **#269** bedeutet dies, dass wenn $Q = (r, \phi) \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^2)$ die zu $L\tilde{\ }\Psi$ - hier ist Ψ eine geeignete Einschränkung von Γ - korrespondierenden Euler-Lagrange-Gleichungen löst, die Kurve

$$\Psi \circ Q = p + r \cos \phi \cdot f_1 + r \sin \phi \cdot f_2,$$

garantiert dann eine Lösung von (`ELG`) ist, wenn

$$0 \neq r \quad \text{auf } J,$$

gilt. Die Stellen $t \in J$ mit $r(t) = 0$ (Durchgang p) müssen im Hinblick auf das Vorliegen einer Lösung von (`ELG`) speziell untersucht werden.

Kugelkoordinaten. Sei $\{f_1, f_2, f_3\}$ eine Ortohnormalbasis des $\mathbb{R}^3$ - es gelte also $\langle\, f_\alpha \mid f_\beta \,\rangle_3 = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ - und sei $p \in \mathbb{R}^3$. Der Übergang zu Kugelkoordinaten wird durch die Funktion

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(x) = p + x_1 \sin x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + x_1 \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_2 + x_1 \cos x_2 \cdot f_3,$$

bewerkstelligt. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\Gamma_{,\,1}(x) = \sin x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_2 + \cos x_2 \cdot f_3,$$
$$\Gamma_{,\,2}(x) = x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \sin x_3 \cdot f_2 - x_1 \sin x_2 \cdot f_3,$$
$$\Gamma_{,\,3}(x) = -x_1 \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_1 + x_1 \sin x_2 \cos x_3 \cdot f_2,$$

so dass für alle $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathtt{G}}(x, v) &= \sum_{\alpha=1}^{3} \Gamma_{,\,\alpha} \cdot v_\alpha = \Gamma_{,\,1}(x) \cdot v_1 + \Gamma_{,\,2}(x) \cdot v_2 + \Gamma_{,\,3}(x) \cdot v_3 \\
&= (\sin x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_2 + \cos x_2 \cdot f_3) \cdot v_1 \\
&\quad + (x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \sin x_3 \cdot f_2 - x_1 \sin x_2 \cdot f_3) \cdot v_2 \\
&\quad + (-x_1 \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_1 + x_1 \sin x_2 \cos x_3 \cdot f_2) \cdot v_3 \\
&= (v_1 \sin x_2 \cos x_3 + x_1 v_2 \cos x_2 \cos x_3 - x_1 v_3 \sin x_2 \sin x_3) \cdot f_1 \\
&\quad + (v_1 \sin x_2 \sin x_3 + x_1 v_2 \cos x_2 \sin x_3 + x_1 v_3 \sin x_2 \cos x_3) \cdot f_2 \\
&\quad + (v_1 \cos x_2 - x_1 v_2 \sin x_2) \cdot f_3
\end{aligned}$$

Bemerkenswerter Weise kann hier sowohl auf ein (positives) Vorzeichen von x_1 und auf Einschränkungen von x_2, x_3 auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ verzichtet werden. Die Vektoren $\Gamma_{,\,1}(x), \Gamma_{,\,2}(x), \Gamma_{,\,3}(x)$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, wenn $0 \neq \det(\Gamma_{,\,1}(x), \Gamma_{,\,2}(x), \Gamma_{,\,3}(x))$ und dies ist genau dann der Fall, wenn …

$$\begin{aligned}0 \neq \det(&\sin x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_2 + \cos x_2 \cdot f_3,\\ &x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \sin x_3 \cdot f_2 - x_1 \sin x_2 \cdot f_3,\\ &- x_1 \sin x_2 \sin x_3 \cdot f_1 + x_1 \sin x_2 \cos x_3 \cdot f_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (\sin x_2 \cos x_3)(-x_1 \sin x_2)(x_1 \sin x_2 \cos x_3) \cdot \det(f_1, f_3, f_2)\\ &+ (\sin x_2 \sin x_3)(-x_1 \sin x_2)(-x_1 \sin x_2 \sin x_3) \cdot \det(f_2, f_3, f_1)\\ &+ (\cos x_2)(x_1 \cos x_2 \cos x_3)(x_1 \sin x_2 \cos x_3) \cdot \det(f_3, f_1, f_2)\\ &+ (\cos x_2)(x_1 \cos x_2 \sin x_3)(-x_1 \sin x_2 \sin x_3) \cdot \det(f_3, f_2, f_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -x_1^2 \sin^3 x_2 \cos^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_3, f_2)\\ &+ x_1^2 \sin^3 x_2 \sin^2 x_3 \cdot \det(f_2, f_3, f_1)\\ &+ x_1^2 \sin x_2 \cos^2 x_2 \cos^2 x_3 \cdot \det(f_3, f_1, f_2)\\ &- x_1^2 \sin x_2 \cos^2 x_2 \sin^2 x_3 \cdot \det(f_3, f_2, f_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -x_1^2 \sin^3 x_2 \cos^2 x_3 \cdot (-\det(f_1, f_2, f_3))\\ &+ x_1^2 \sin^3 x_2 \sin^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\\ &+ x_1^2 \sin x_2 \cos^2 x_2 \cos^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\\ &- x_1^2 \sin x_2 \cos^2 x_2 \sin^2 x_3 \cdot (-\det(f_1, f_2, f_3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x_1^2 \sin^3 x_2 \cos^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\\ &+ x_1^2 \sin^3 x_2 \sin^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\\ &+ x_1^2 \sin x_2 \cos^2 x_2 \cos^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\\ &+ x_1^2 \sin x_2 \cos^2 x_2 \sin^2 x_3 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (&\sin^2 x_2 \cos^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sin^2 x_3 + \cos^2 x_2 \cos^2 x_3 + \cos^2 x_2 \sin^2 x_3)\\ &\cdot (x_1^2 \sin x_2) \cdot \det(f_1, f_2, f_3)\end{aligned}$$

$$= x_1^2 \sin x_2 \cdot \det(f_1, f_2, f_3)$$

$$= x_1^2 \sin x_2 \cdot (\pm 1)$$

$$= \pm x_1^2 \sin x_2.$$

also wenn

$$0 \neq x_1^2 \sin x_2,$$

gilt. In Bezug auf **#269** bedeutet dies, dass wenn $Q = (r, \theta, \phi) \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^3)$ die zu $L^{\sim}\Psi$ - hier ist Ψ eine geeignete Einschränkung von Γ - korrespondierenden Euler-Lagrange-Gleichungen löst, die Kurve

$$\Psi \circ Q = p + r \sin\theta \cos\phi \cdot f_1 + r \sin\theta \sin\phi \cdot f_2 + r \cos\theta \cdot f_3,$$

garantiert dann eine Lösung von (ELG) ist, wenn

$$0 \neq r^2 \sin\theta \quad \text{auf } J,$$

gilt. Die Stellen $t \in J$ mit $r(t) = 0$ (Durchgang p) oder mit $\theta(t) : \pi \in \mathbb{Z}$ (Durchgang Gerade $p + \lambda \cdot f_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$) müssen im Hinblick auf das Vorliegen einer Lösung von (ELG) speziell untersucht werden.

Zylinderkoordinaten. Sei $\{f_1, f_2, f_3\}$ eine Ortohnormalbasis des $\mathbb{R}^3$ - es gelte also $\langle\, f_\alpha \mid f_\beta \,\rangle_3 = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ - und sei $p \in \mathbb{R}^3$. Der Übergang zu Zylinderkoordinaten wird durch die Funktion

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(x) = p + x_1 \cos x_2 \cdot f_1 + x_1 \sin x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3,$$

bewerkstelligt. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\Gamma_{,1}(x) = \cos x_2 \cdot f_1 + \sin x_2 \cdot f_2,$$

$$\Gamma_{,2}(x) = -x_1 \sin x_2 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \cdot f_2,$$

$$\Gamma_{,3}(x) = f_3,$$

so dass für alle $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\Gamma^{\mathtt{G}}(x, v) = \sum_{\alpha=1}^{3} \Gamma_{,\alpha} \cdot v_\alpha = \Gamma_{,1}(x) \cdot v_1 + \Gamma_{,2}(x) \cdot v_2 + \Gamma_{,3}(x) \cdot v_3$$

$$= (\cos x_2 \cdot f_1 + \sin x_2 \cdot f_2) \cdot v_1 + (-x_1 \sin x_2 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \cdot f_2) \cdot v_2 + f_3 \cdot v_3$$

$$= (v_1 \cos x_2 - x_1 v_2 \sin x_2) \cdot f_1 + (v_1 \sin x_2 + x_1 v_2 \cos x_2) \cdot f_2 + v_3 \cdot f_3.$$

Bemerkenswerter Weise kann hier sowohl auf ein (positives) Vorzeichen von x_1 und auf Einschränkungen von x_2, x_3 auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ verzichtet werden. Die Vektoren $\Gamma_{,1}(x), \Gamma_{,2}(x), \Gamma_{,3}(x)$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, wenn $0 \neq \det(\Gamma_{,1}(x), \Gamma_{,2}(x), \Gamma_{,3}(x))$ und dies ist genau dann der Fall, wenn ...

$$
\begin{aligned}
0 &\neq \det(\cos x_2 \cdot f_1 + \sin x_2 \cdot f_2, -x_1 \sin x_2 \cdot f_1 + x_1 \cos x_2 \cdot f_2, f_3) \\
&= (\cos x_2)(x_1 \cos x_2) \cdot \det(f_1, f_2, f_3) + (\sin x_2)(-x_1 \sin x_2) \cdot \det(f_2, f_1, f_3) \\
&= (\cos x_2)(x_1 \cos x_2) \cdot \det(f_1, f_2, f_3) + (\sin x_2)(-x_1 \sin x_2) \cdot (-\det(f_1, f_2, f_3)) \\
&= (\cos x_2)(x_1 \cos x_2) \cdot \det(f_1, f_2, f_3) - (\sin x_2)(-x_1 \sin x_2) \cdot \det(f_1, f_2, f_3) \\
&= x_1 \cos^2 x_2 \cdot \det(f_1, f_2, f_3) + x_1 \sin^2 x_2 \cdot \det(f_1, f_2, f_3) \\
&= (x_1 \cos^2 x_2 + x_1 \sin^2 x_2) \cdot \det(f_1, f_2, f_3) \\
&= x_1 \cdot \det(f_1, f_2, f_3) \\
&= x_1 \cdot (\pm 1) \\
&= \pm x_1,
\end{aligned}
$$

also wenn

$$0 \neq x_1,$$

gilt. In Bezug auf **#269** bedeutet dies, dass wenn $Q = (\rho, \phi, z) \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R}^3)$ die zu $L\tilde{\ }\Psi$ - hier ist Ψ eine geeignete Einschränkung von Γ - korrespondierenden Euler-Lagrange-Gleichungen löst, die Kurve

$$\Psi \circ Q = p + \rho \cos \phi \cdot f_1 + \rho \sin \phi \cdot f_2 + z \cdot f_3,$$

garantiert dann eine Lösung von `(ELG)` ist, wenn

$$0 \neq \rho \quad \text{auf } J,$$

gilt. Die Stellen $t \in J$ mit $\rho(t) = 0$ (Durchgang Gerade $p + \lambda \cdot f_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$) müssen im Hinblick auf das Vorliegen einer Lösung von `(ELG)` speziell untersucht werden.

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

Modellierung: Eine Gartenbauformel.

Ersterstellung: 31/01/14 **Letzte Änderung: 19/02/15**

Der Flächeninhalt F eines "Halbmonds" wird auf unkonventionelle Weise berechnet. Der "Halbmond" wird von zwei konkaven, quadratischen Parabeln mit gemeinsamen Nullstellen gebildet. Die Lösung besteht darin, dass erst das jeweilige Maximum der Parabeln - das an jeweils gleicher Stelle zwischen den Nullstellen angenommen wird - berechnet wird, dann die Differenz des größeren und des kleineren Maximums ermittelt wird. Damit wird die Gleichung einer Parabel mit den gleichen Nullstellen und dem Differenz-Maximum als Maximum erhalten und es wird der Flächeninhalt dieser Parabel zwischen den Nullstellen berechnet - mit dem Ergebnis F. Liegt dies zufällig an den Zahlen der Aufgabenstellung oder ist dies immer so? Auf Nachfragen stellt sich heraus, dass diese Vorgehensweise vom Gartenbau her bekannt ist. Auf diese unkonventionelle Weise wird der Flächeninhalt bogenförmig begrenzter - "mondsichelförmiger" - Ornamente ermittelt. Liefert diese Vorgehensweise stets eine akzeptable Approximation derartiger Ornamente?

Fragestellungsfreundliche Beschreibung der Parabeln. Eine konkave Parabel möge die Nullstellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ haben und den maximalen Wert $\mu \in \mathbb{R}$ annehmen. Klarer Weise gilt $0 < \mu$ und das Maximum wird in

$$m := (x_1 + x_2) : 2,$$

angenommen. Auf Grund der Konkavität ist die Parabel-Gleichung von der Gestalt

$$y(x) = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x_2 - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei der Zusammenhang zwischen $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ und μ noch zu ermitteln ist. Eine kurze Rechnung zeigt

$$\mu = y(m) = y((x_1 + x_2) : 2) = \alpha \cdot ((-x_1 + x_2) : 2) \cdot ((x_2 - x_1) : 2)) = \alpha \cdot \Delta^2,$$

wobei ab hier

$$\Delta := (x_2 - x_1) : 2,$$

gesetzt wird. Mit Hilfe von Δ und via $\mu = \ldots = \alpha \cdot \Delta^2$ ergibt sich nach einfacher Umformung via

$$x_1 = m - \Delta, \quad x_2 = m + \Delta,$$

die Parabel-Gleichung

$$y(x) = (\mu : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x - m)^2).$$

Fläche zwischen zwei Parabeln. Soll nun der Flächeninhalt zwischen *zwei* Parabeln der soeben beschriebenen Form zwischen $x_1 = m - \Delta$ und $x_2 = m + \Delta$

ermittelt werden, so ist es erforderlich, das jeweilige Maximum zu kennen. Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ diese Maxima. Es gelte $\mu_1 < \mu_2$ und die Konkavität ergibt $0 < \mu_1, \mu_2$. Offenbar gilt wegen $0 < \mu_1 < \mu_2$,

$$y_1(x) = (\mu_1 : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2) < (\mu_2 : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2) = y_2(x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\Delta^2 - (x-m)^2 > 0$, also exakt für $x_1 < x < x_2$. Damit gilt für den gesuchten Flächeninhalt F die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}(\mu_1, \mu_2, m, \Delta) \\
&\quad = \int_{m-\Delta}^{m+\Delta} \left|(\mu_2 : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2) - (\mu_1 : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2)\right| \, dx \\
&\quad = \int_{m-\Delta}^{m+\Delta} \big((\mu_2 : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2) - (\mu_1 : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2)\big) \, dx \\
&\qquad\qquad = \int_{m-\Delta}^{m+\Delta} ((\mu_2 - \mu_1) : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2) \, dx,
\end{aligned}$$

und dies ist genau die Fläche, die eine konkave Parabel mit Maximum $\mu_2 - \mu_1$ und den Nullstellen $x_1 = m - \Delta$ und $x_2 = m + \Delta$ zwischen den Nullstellen mit der x-Achse einschließt. Die Richtigkeit der Methode ist demnach kein Zufall und die Ausführung der Integration ergibt

$$\tilde{F}(\mu_1, \mu_2, m, \Delta) = \int_{m-\Delta}^{m+\Delta} ((\mu_2 - \mu_1) : \Delta^2) \cdot (\Delta^2 - (x-m)^2) \, dx = (4:3) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1). \tag{6}$$

Die “ Gartenbauformel” mit Daten im (akademischen) Test. Nun soll die “ Gartenbauformel” (6) zur Flächenberechnung eines mondsichelförmigen Ornaments mit Grundlinienlänge= $2\Delta = 2$ Meter und $\mu_2 = 1.5$ Meter und $\mu_1 = 1$ Meter eingesetzt werden. Das prinzipielle Problem bei der Ermittlung einer derartigen Fläche besteht darin, dass die Kurvengleichungen der Berandungslinien der Mondsichel nicht bekannt sind. Bei der “ Gartenbauformel” wird davon ausgegangen, dass beide Berandungslinien durch “ quadratische Interpolation” aus den Spitzen der Mondsichel und dem jeweiligen maximalen Abstand von der Verbindungslinie zwischen den Spitzen der Mondsichel gegeben sind. *Auf Grund dieser Annahme* ergibt sich für die Fläche via (6),

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(1, 1.5, 0, 1) &= (4:3) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1) = (4:3) \cdot 1 \cdot (1.5 - 1) \\
&= 2:3 \ \text{ Quadratmeter} \quad \in 0.66666\ldots \ \text{ Quadratmeter.}
\end{aligned}$$

Beispiel 1. Die exakten Funktionsgleichungen der Berandungslinien seien

$$y_1(x) = \mu_1 \cdot \cos((\pi x) : (2\Delta)), \quad y_2 = \mu_2 \cdot \cos((\pi x) : (2\Delta)).$$

Klarer Weise haben y_1 und y_2 Nullstellen bei $\pm\Delta$, sind zwischen den Nullstellen positiv und nehmen jeweils das Maximum in $m = 0$ an. Auch gilt - wie ohne viel Mühe fest gestellt werden kann - $y_1 < y_2$ auf $]-\Delta|\Delta[$, so dass sich der exakte Flächeninhalt als

$$F_1(\mu_1, \mu_2, m, \Delta) = \int_{-\Delta}^{\Delta} (\mu_2 - \mu_1) \cdot \cos((\pi x) : (2\Delta))\, dx = \ldots = (4 : \pi) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1),$$

also in ziemlicher Nähe zu (6) ergibt. Präziser gesprochen gilt allgemein für den relativen Fehler

$$\begin{aligned} &|F_1(\mu_1, \mu_2, m, \Delta) - \tilde{F}(\mu_1, \mu_2, m, \Delta)| : F_1(\mu_1, \mu_2, m, \Delta) \\ &\quad = |(4 : \pi) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1) - (4 : 3) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1)| : \big((4 : \pi) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1)\big) \\ &\quad = |1 : \pi - 1 : 3| : (1 : \pi) \\ &\quad = |1 - \pi : 3| = \pi : 3 - 1 \in 0.047197\ldots \approx 4.7197\%, \end{aligned}$$

so dass daten-unabhängig(!) eine recht gute Näherung vorliegt.
Für die angegebenen Zahlen gilt

$$\begin{aligned} F_1(1, 1.5, 0, 1) &= (1.5 - 1) \cdot (4 : \pi) \cdot 1 = 2 : \pi \;\; \text{Quadratmeter} \\ &\in 0.63661\ldots \;\; \text{Quadratmeter.} \end{aligned}$$

Beispiel 2. Nun sollen "kettenlinien-artige" Berandungslinien vorliegen. Zum Auffinden der Funktionsgleichungen wird von einem Ansatz der Form

$$y(x, c) = \alpha - \beta \cdot \cosh(cx : \Delta), \quad x \in [-\Delta|\Delta],$$

mit gegebenem, positiven $c \in \mathbb{R}$ und gesuchten, positiven $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ausgegangen. Es soll natürlich wieder $m = 0$ gelten. Das Maximum wird$=\mu$ gesetzt. Es resultieren die Bestimmungsgleichungen

$$y(0, c) = \mu, \quad y(\Delta, c) = 0,$$

so dass zunächst

$$\alpha - \beta = \mu,$$

also

$$y(x, c) = \mu + \beta \cdot (1 - \cosh(cx : \Delta)),$$

folgt, woraus sich via $y(\Delta, c) = 0$ die Gleichung

$$0 = \mu + \beta \cdot (1 - \cosh c),$$

ergibt, woraus

$$\beta = \mu : (\cosh c - 1),$$

und schließlich

$$y(x,c) = \mu \cdot (1 - (1 - \cosh(cx : \Delta)) : (1 - \cosh c)), \quad x \in [\,-\Delta|\Delta\,],$$

oder in freundlicheren positiven Termen,

$$y(x,c) = \mu \cdot (1 - (\cosh(cx : \Delta) - 1) : (\cosh c - 1)), \quad x \in [\,-\Delta|\Delta\,],$$

folgt. Dies ist eine zum Verständnis des Kurvenverlaufs gut brauchbare Möglichkeit, $y(.,c)$ darzustellen. Für das geplante Integrieren ist vermutlich die "auf gemeinsamen Nenner" gebrachte Version

$$y(x,c) = \big(\mu : (\cosh c - 1)\big) \cdot \big(\cosh c - \cosh(cx : \Delta)\big), \quad x \in [\,-\Delta|\Delta\,],$$

passender. Mit $0 < \mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{R}$ und

$$y_{1,2}(x,c) = \big(\mu_{1,2} : (\cosh c - 1)\big) \cdot \big(\cosh c - \cosh(cx : \Delta)\big), \quad x \in [\,-\Delta|\Delta\,],$$

resultiert die allgemeine Flächenformel

$$\begin{aligned} &F_2(\mu_1, \mu_2, 0, \Delta, c) \\ &\qquad = \big((\mu_2 - \mu_1) : (\cosh c - 1)\big) \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} (\cosh c - \cosh(cx : \Delta))\, dx \\ &\qquad = \big((\mu_2 - \mu_1) : (\cosh c - 1)\big) \cdot (2\Delta \cdot \cosh c - (2\Delta : c) \cdot \sinh c) \\ &\qquad\quad = \Big(2 \cdot \big((\cosh c - (\sinh c) : c) : (\cosh c - 1)\big)\Big) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Offensichtlich ist gemäß (7) eine allgemeine - also "c-unabhängige" - Klärung der Approximationsgüte der "Gartenbauformel" nicht möglich, da die Abweichung von (7) und (6) nicht nur von den Daten $\Delta, \mu_{1,2}$, sondern noch vom "Kurvenparameter" c abhängt. Dass laut Appendix die Funktion

$$f : \,]0|+\infty[\, \to \,]4:3|2[, \quad f(x) = 2(\cosh x - (\sinh x) : x) : (\cosh x - 1),$$

streng isoton mit

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 4 : 3, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} f(x) = 2,$$

ist erklärt einerseits den angegebenen Bild-Bereich von f, andererseits stellt sich heraus, dass es zu jedem $c \in \,]0|+\infty[$ genau ein $\theta(c) \in \,]0|1[$, nämlich

$$\theta(c) = (3f(c) - 4) : 2,$$

gibt, so dass $F_2(\mu_1, \mu_2, 0, \Delta, c)$ die Form

$$F_2(\mu_1, \mu_2, 0, \Delta, c) = (4 : 3) \cdot (1 + \theta(c) : 2) \cdot \Delta \cdot (\mu_2 - \mu_1),$$

annimmt. Hieraus kann in Abhängigkeit von c der relative Fehler ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
&|F_2(\mu_1,\mu_2,0,\Delta,c)-\tilde{F}(\mu_1,\mu_2,0,\Delta)| : F_2(\mu_1,\mu_2,0,\Delta,c)\\
&\qquad = |(4:3)\cdot(1+\theta(c):2)\cdot\Delta\cdot(\mu_2-\mu_1)-(4:3)\cdot\Delta\cdot(\mu_2-\mu_1)|\\
&\qquad\qquad : \big((4:3)\cdot(1+\theta(c):2)\cdot\Delta\cdot(\mu_2-\mu_1)\big)\\
&\qquad = (\theta(c):2):(1+\theta(c):2)\\
&\qquad = \theta(c):(2+\theta(c)) \in \,]0|1:3[,
\end{aligned}
$$

so dass der perzuentelle relative Fehler zwischen 0% - c "nahe bei Null " - und 33.333 . . . % - c "nahe bei $+\infty$" - angesiedelt ist. Für die "Test-Werte" $c = 0.1$, $c = 1$ und $c = 10$ ergeben sich die Zahlen

$$\theta(0.1) \in 0.00033321\ldots, \quad \theta(0.1):(2+\theta(0.1)) \in 0.00016658\ldots \approx 0.016658\%,$$

$$\theta(1) \in 0.032181\ldots, \quad \theta(1):(2+\theta(1)) \in 0.015835\ldots \approx 1.5835\%,$$

$$\theta(10) \in 0.70024\ldots, \quad \theta(10):(2+\theta(10)) \in 0.25932\ldots \approx 25.932\%,$$

die sehr unterschiedliche Approximationsgüten sichtbar machen. Der Vollständigkeit halber seien noch die korrespondieren Flächen angegeben,

$$F_2(1,1.5,0,1,0.1) \in 0.66677\ldots \text{ Quadratmeter},$$

$$F_2(1,1.5,0,1,1) \in 0.67739\ldots \text{ Quadratmeter},$$

$$F_2(1,1.5,0,1,10) \in 0.90008\ldots \text{ Quadratmeter},$$

die sich in vergleichsweise moderater Weise ändern.

Allgemeinere Berandungslinien. Zur Vertiefung des Verständnisses der Approximationsgüte der "Gartenbauformel" soll nun der relative Fehler der durch die Approximation durch Parabeln - wovon die "Gartenbauformel " ausgeht - in allgemeinerer Form untersucht werden. Dabei wird von mehreren Annahmen über die Berandungslinien ausgegangen:

a) $m = 0$.

b) Die Berandungslinien sind von der Form $\mu_{1,2}\cdot\gamma(x:\Delta)$, wobei $\gamma : [-1|1] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\gamma(-x) = \gamma(x)$, $x \in [-1|1]$, $0 < \gamma$ auf $]-1|1[$ ist und $\gamma(-1) = \gamma(1) = 0$ gilt.

c) Die "Referenzberandungslinie" γ nimmt das Maximum 1 in $x = 0$ an.

Auf Grund der Annahmen `abc)` ermittelt sich die Fläche des “mondsichelförmigen” Ornaments als

$$F(\mu_1,\mu_2,0,\Delta) = (\mu_2-\mu_1)\cdot\int_{-\Delta}^{\Delta}\gamma(x:\Delta)\,dx$$
$$= (\mu_2-\mu_1)\cdot\Delta\cdot\int_{-1}^{1}\gamma(z)\,dz$$
$$= 2\int_0^1\gamma(z)\,dz\cdot\Delta\cdot(\mu_2-\mu_1).$$

Für den hier am meisten interessierenden relativen Fehler definieren wir zunächst die “Referenzparabel”

$$P:[-1|1]\to[0|1],\quad P(x)=1-x^2,$$

für die - natürlich - die Annahmen `abc)` zutreffen. Damit gilt unter Einsatz der aus (6) mit $m=0$ folgenden Gleichung

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 2:3,$$

für den relativen Fehler die - zugegebenermaßen nur für Orientierungszwecke verwendbare - Abschätzungskette

$$\begin{aligned}
&|F(\mu_1,\mu_2,0,\Delta)-\tilde F(\mu_1,\mu_2,0,\Delta)| : F(\mu_1,\mu_2,0,\Delta)\\
&= \left|(\mu_2-\mu_1)\cdot\int_{-\Delta}^{\Delta}(\gamma(x:\Delta)-P(x:\Delta))\,dx\right| : \big((\mu_2-\mu_1)\cdot\int_{-\Delta}^{\Delta}\gamma(x:\Delta)\,dx\big)\\
&= \left|\int_{-\Delta}^{\Delta}(\gamma(x:\Delta)-P(x:\Delta))\,dx\right| : \big(\int_{-\Delta}^{\Delta}\gamma(x:\Delta)\,dx\big)\\
&= \left|\Delta\cdot\int_{-1}^{1}(\gamma(z)-P(z))\,dz\right| : \big(\Delta\cdot\int_{-1}^{1}\gamma(z)\,dz\big)\\
&= \left|\int_0^1(\gamma(z)-P(z))\,dz\right| : \int_0^1\gamma(z)\,dz\\
&\le \left(\int_0^1|\gamma(z)-P(z)|\,dz\right) : \left(\int_0^1\gamma(z)\,dz\right)\\
&= \left(\int_0^1|\gamma(z)-P(z)|\,dz\right) : \left(\int_0^1(\gamma(z)-P(z))\,dz+\int_0^1P(z)\,dz\right)\\
&\le \left(\int_0^1|\gamma(z)-P(z)|\,dz\right) : \left|\int_0^1|\gamma(z)-P(z)|\,dz-\int_0^1P(z)\,dz\right|\\
&= \left(\int_0^1|\gamma(z)-P(z)|\,dz\right) : \left|\int_0^1|\gamma(z)-P(z)|\,dz-2:3\right|, \qquad (8)
\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite im Fall Nenner= 0 am besten= $+\infty$ gesetzt werden soll. Entsprechend (8) ist es nun angebracht, das Integral

$$\int_0^1 |\gamma(z) - P(z)|\, dz$$

abzuschätzen. Dazu sind zwei Beobachtungen nützlich: γ und P stimmen wegen $\gamma(\Delta) = P(\Delta) = 0$ im Funktions-Wert in $x = \Delta$ überein und γ und P stimmen wegen $\gamma(0) = P(0) = 1$ und $\gamma'(0) = P'(0) = 0$ in $x = 0$ sowohl in Funktions-Wert als auch in der ersten Ableitung überein. Basierend auf der zweiten dieser Beobachtungen ist für jeden Parameter $\vartheta \in \left]0|1\right[$ wegen $P^{(k)}(0) = 0$ für $3 \leq k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\gamma(x)-P(x)| &= |\gamma(0)+\gamma'(0)\cdot x+\gamma''(\xi(x))\cdot x^2 : 2-(P(0)+P'(0)\cdot x+P''(0)\cdot x^2 : 2)| \\
&= |(\gamma(0) - P(0)) + (\gamma'(0) - P'(0)) \cdot x + (\gamma''(\xi(x)) - P''(0)) \cdot x^2 : 2| \\
&= |0 + 0 \cdot x + (\gamma''(\xi(x)) - P''(0)) \cdot x^2 : 2| \\
&= |(\gamma''(\xi(x)) - P''(0)) \cdot x^2 : 2| \\
&= |(\gamma''(\xi(x)) + 2) \cdot x^2 : 2| \leq \|\gamma'' + 2 \text{ auf } [0|\vartheta]\|_\infty \cdot x^2 : 2, \\
&\qquad x \in [0|\vartheta],
\end{aligned}$$

wobei $\xi(x) \in \left]0|x\right[$ und

$$\|\gamma'' + 2 \text{ auf } [0|\vartheta]\|_\infty = \sup\{|\gamma''(\sigma) + 2| : \sigma \in [0|\vartheta]\}.$$

verfügbar. Ähnlich, doch lediglich auf die erste Ableitung bezogen gilt "in der Nähe von $x = 1$",

$$\begin{aligned}
|\gamma(x) - P(x)| &= \left|\gamma(1) - \int_x^1 \gamma'(z)\, dz - P(1) + \int_x^1 P'(z)\, dz\right| \\
&= \left|(\gamma(1) - P(1)) + \int_x^1 (\gamma'(z) - P'(z))\, dz\right| \\
&= \left|0 + \int_x^1 (\gamma'(z) - P'(z))\, dz\right| \\
&= \left|\int_x^1 (\gamma'(z) - P'(z))\, dz\right| = \left|\int_x^1 (\gamma'(z) + 2z)\, dz\right| \leq \int_x^1 |\gamma'(z) + 2z|\, dz \\
&\leq \int_x^1 \|\gamma' + 2z \text{ auf } [1-\vartheta|1]\|_\infty\, dz \\
&= \|\gamma' + 2\mathsf{id} \text{ auf } [1-\vartheta|1]\|_\infty \cdot \int_x^1 dz \\
&= \|\gamma' + 2\mathsf{id} \text{ auf } [1-\vartheta|1]\|_\infty \cdot (1-x), \\
&\qquad x \in [1-\vartheta|1],
\end{aligned}$$

wobei

$$\|\gamma' + 2\mathsf{id} \text{ auf } [1-\vartheta|1]\|_\infty = \sup\{|\gamma'(\sigma)+2\sigma| : \sigma \in [1-\vartheta|1]\}.$$

Mit diesen Abschätzungen ergibt sich mit $\vartheta = 1:2$,

$$\int_0^1 |\gamma(z)-P(z)|\,dz = \int_0^{1:2} |\gamma(z)-P(z)|\,dz + \int_{1-1:2}^1 |\gamma(z)-P(z)|\,dz$$

$$\leq \int_0^{1:2} \|\gamma''+2 \text{ auf } [0|1:2]\|_\infty \cdot z^2 : 2\,dz + \int_{1:2}^1 \|\gamma'+2\mathsf{id} \text{ auf } [1:2|1]\|_\infty \cdot (1-z)\,dz$$

$$= \|\gamma''+2 \text{ auf } [0|1:2]\|_\infty \cdot \int_0^{1:2} z^2 : 2\,dz + \|\gamma'+2\mathsf{id} \text{ auf } [1:2|1]\|_\infty \cdot \int_{1:2}^1 (1-z)\,dz,$$

$$= \|\gamma''+2 \text{ auf } [0|1:2]\|_\infty : 48 + \|\gamma'+2\mathsf{id} \text{ auf } [1:2|1]\|_\infty : 8,$$

und hieraus folgt

> Falls
>
> $$\kappa(\gamma) = \|\gamma''+2 \text{ auf } [0|1:2]\|_\infty : 48 + \|\gamma'+2\mathsf{id} \text{ auf } [1:2|1]\|_\infty : 8,$$
>
> und falls
>
> $$\kappa(\gamma) < 2:3,$$
>
> dann gilt für den relativen Fehler, der bei der Anwendung der “Gartenbauformel” entsteht, die Abschätzung
>
> $$|F(\mu_1,\mu_2,0,\Delta) - \tilde{F}(\mu_1,\mu_2,0,\Delta)| : F(\mu_1,\mu_2,0,\Delta) \leq \kappa(\gamma) : (2:3-\kappa(\gamma)).$$

$\kappa(\gamma)$ **für Beispiel 1.** Hier gilt

$$\gamma(z) = \cos(\pi z:2), \quad \gamma'(z) = -(\pi:2)\cdot\sin(\pi z:2), \quad \gamma''(z) = -(\pi:2)^2\cdot\cos(\pi z:2), \quad z \in [0|1],$$

so dass für alle $z \in [0|1:2]$,

$$|\gamma''(z)+2| = |2-(\pi:2)^2\cdot\cos(\pi z:2)| \leq 2,$$

und

$$|\gamma'(z)+2z| = |2z-(\pi:2)\cdot\sin(\pi z:2)|.$$

Zur Ermittlung der Extremwerte der Funktion zwischen den Betragsstrichen auf $[1:2|1]$ wird zunächst deren Ableitung= 0 gesetzt. Es ergibt sich für mögliche Nullstellen $z^* \in [1:2|1]$,

$$2-(\pi:2)^2\cdot\cos(\pi z^*:2) = 0, \quad z^* \in\,]1:2|1[,$$

also

$$\cos(\pi z^* : 2) = 8 : \pi^2 < \sqrt{2} : 2,$$

so dass

$$\sin(\pi z^* : 2) = \sqrt{1 - 64 : \pi^4} > 0,$$

und somit wegen $z^* \in [0|1 : 2]$ einerseits

$$1 > 2z^* > 2z^* - (\pi : 2) \cdot \sin(\pi z^* : 2),$$

und andererseits via $3 < \pi < \sqrt{10}$

$$\begin{aligned} 2z^* - (\pi : 2) \cdot \sin(\pi z^* : 2) &= 2z^* - (\pi : 2) \cdot \sqrt{1 - 64 : \pi^4} \\ &= 2z^* - (\pi : 2) \cdot (\sqrt{\pi^4 - 64} : \pi^2) = 2z^* - (1 : 2\pi) \cdot \sqrt{\pi^4 - 64} \\ &\geq 2z^* - (1 : 2\pi) \cdot \sqrt{100 - 64} = 2z^* - (1 : 2\pi) \cdot 6 \geq -3 : \pi > -1, \end{aligned}$$

und somit

$$|2z^* - (\pi : 2) \cdot \sin(\pi z^* : 2)| < 1,$$

so dass

$$\max\{|2z^* - (\pi : 2) \cdot \sin(\pi z^* : 2|, |1 - (\sqrt{2} \cdot \pi) : 4|, |2 - \pi : 2|\} < 1.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\|\gamma'' + 2 \text{ auf } [0|1 : 2]\|_\infty \leq 2,$$

und

$$\|\gamma' + 2\mathsf{id} \text{ auf } [1 : 2|1]\|_\infty \leq 1,$$

so dass

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma) = \|\gamma'' + 2 \text{ auf } [0|1 : 2]\|_\infty : 48 + \|\gamma' + 2\mathsf{id} \text{ auf } [1 : 2|1]\|_\infty : 8 \\ \leq 2 : 48 + 1 : 8 = 8 : 48 = 1 : 6 \in 0.16666\ldots, \end{aligned}$$

so dass der relative Fehler der Approximation durch quadratische Polynome gemäß vorhergehender Aussage nach oben durch

$$(1 : 6) : (2 : 3 - 1 : 6) = (1 : 6) : (3 : 6) = 1 : 3 \in 0.33333\ldots \approx 33.333\%,$$

abgeschätzt werden kann. Diese Abschätzung übertrifft den tatsächlichen relativen Fehler um etwas mehr als das Achtfache. Also ist die hier gefundene Abschätzung nicht besonders gut. In der Tat werden bei der Definition von $\kappa(\gamma)$ zunächst die pessimistische Dreiecksungleichung für Integrale und dann die pessimistischen schlechtesten globalen Abschätzungen für die Differenzen der ersten und zweiten Ableitungen eingesetzt. Außerdem wird $\kappa(\gamma)$ durch obere Abschätzungen für die eben angesprochenen $\|. : \ldots\|_\infty$-Normen nochmals nach oben vergrößert, so dass man sich nicht wundern muß, wenn am Ende keine gute Abschätzung herauskommt. Immerhin wird durch $\kappa(\gamma)$ klar, dass der relative Fehler klein wird, wenn erste und zweite Ableitung der Berandungslinien "möglichst gut" durch erste und Ableitung der Parabeln angenähert werden. Die Herleitung und Diskussion verbesserter Abschätzungen sprengt den Rahmen vorliegenden Essays.

Auf eine Diskussion von $\kappa(\gamma)$ für Beispiel 2 wird verzichtet.

Appendix. Es soll bewiesen werden, dass die Funktion

$$f : \mathopen{]}0|+\infty\mathclose{[} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2(\cosh x - (\sinh x) : x) : (\cosh x - 1),$$

streng isoton ist. Zunächst wird die Funktion f in der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= 2((\cosh x - 1) + 1 - (\sinh x) : x) : (\cosh x - 1) \\ &= 2 + 2(1 - (\sinh x) : x) : (\cosh x - 1) \\ &= 2 + 2(x - \sinh x) : (x \cosh x - x), \end{aligned}$$

geschrieben und es bleibt zu zeigen, dass die Funktion

$$g : \mathopen{]}0|+\infty\mathclose{[} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x - \sinh x) : (x \cosh x - x),$$

streng isoton ist. Wegen der offensichtlichen (beliebigen) Differenzierbarkeit von g genügt es,

$$0 < g'(x), \quad x \in \mathopen{]}0|+\infty\mathclose{[},$$

nachzuweisen. Hierzu wird g' in der Form $g'(x) = h(x) : (x \cosh x - x)^2$, $x \in \mathopen{]}0|+\infty\mathclose{[}$, mit ...

...

$$\begin{aligned}
h(x) &= \big(x-\sinh x\big)'\cdot(x\cosh x-x)-(x-\sinh x)\cdot\big(x\cosh x-x\big)'\\
&= (1-\cosh x)\cdot(x\cosh x-x)-(x-\sinh x)\cdot(\cosh x+x\sinh x-1)\\
&= x\cdot((1-\cosh x)\cdot(\cosh x-1))-(x-\sinh x)\cdot(\cosh x+x\sinh x-1)\\
&= -x\cdot(\cosh x-1)^2-(x-\sinh x)\cdot(\cosh x-1+x\sinh x)\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cdot(\cosh x-1)-(x-\sinh x))-(x-\sinh x)\cdot(x\sinh x)\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cosh x+x-x+\sinh x)-(x^2\sinh x-x\sinh^2 x)\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cosh x+\sinh x)-x^2\sinh x+x\sinh^2 x\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cosh x+\sinh x)-x^2\sinh x+x(\cosh^2 x-1)\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cosh x+\sinh x)-x^2\sinh x+x(\cosh x-1)\cdot(\cosh x+1)\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cosh x+\sinh x+x\cdot(\cosh x+1))-x^2\sinh x\\
&= (\cosh x-1)\cdot(-x\cosh x+\sinh x+x\cosh x+x)-x^2\sinh x\\
&= (\cosh x-1)\cdot(\sinh x+x)-x^2\sinh x\\
&= (\cosh x-1)\cdot\Big(x+\sinh x-(x^2\sinh x):(\cosh x-1)\Big)\\
&= (\cosh x-1)\cdot\Big(x+\sinh x\cdot(1-x^2:(\cosh x-1))\Big)\\
&= x\cdot(\cosh x-1)\cdot\Big(1+((\sinh x):x)\cdot(1-x^2:(\cosh x-1))\Big),\\
&\qquad\qquad x\in\,]0|+\infty[
\end{aligned}$$

geschrieben und es bleibt die Ungleichung

$$1+((\sinh x):x)\cdot(1-x^2:(\cosh x-1))>0,\quad x\in\,]0|+\infty[, \tag{9}$$

zu beweisen. Dazu führen wir der Übersicht halber

$$u=u(x)=(\sinh x):x,\quad v=v(x)=(\cosh x-1):x^2,\quad x\in\,]0|+\infty[,$$

ein und stellen die zu beweisende Ungleichung (9) in der Form

$$1+u(x)\cdot(1-1:v(x))>0,\quad x\in\,]0|+\infty[, \tag{10}$$

dar. Offenbar ist wegen der Positivität von $u(x)$ hier im Fall $v(x) \geq 1$ nichts mehr zu tun und es bleibt der Fall $v(x) < 1$, also

$$1 < 1 : v(x),$$

zu untersuchen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass es sich bei $1 : v$ wegen

$$\begin{aligned} 1 : v(x) = x^2 : (\cosh x - 1) &= x^2 : \big((1 + x^2 : 2! + x^4 : 4! + \ldots) - 1\big) \\ &= x^2 : (x^2 : 2! + x^4 : 4! + x^6 : 6! + \ldots) \\ &= 1 : (1 : 2! + x^2 : 4! + x^4 : 6! + \ldots), \\ & \qquad x \in \,]0| + \infty[, \end{aligned} \tag{11}$$

auf $]0| + \infty[$ um eine streng antitone Funktion mit

$$\lim_{x \downarrow 0} 1 : v(x) = 2, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} 1 : v(x) = 0,$$

handelt. Konsequenter Weise gibt es genau ein $a \in \,]0| + \infty[$ mit

$$\begin{gathered} 2 > 1 : v(x) > 1, \quad \text{auf} \quad]0|a[, \\ 1 : v(a) = 1, \quad \text{also} \quad 1 = 1 : 2! + a^2 : 4! + a^4 : 6! + \ldots, \\ 1 > 1 : v(x), \quad \text{auf} \quad]a| + \infty[. \end{gathered} \tag{12}$$

Demnach ist auch die Funktion

$$\theta : \,]0|a[\, \to \,]0|1[, \quad \theta(x) = 1 : v(x) - 1,$$

streng antiton und unter Einsatz der Potenzreihendarstellung von cosh ergibt sich mit Hilfe von (11)

$$\begin{aligned} \theta(x) = 1 : v(x) - 1 = x^2 : (\cosh x - 1) - 1 = \ldots \\ = 1 : (1 : 2! + x^2 : 4! + \ldots) - 1 = 1 : (1 : 2 + x^2 : 4! + \ldots) - 1 \\ = 2 : (1 + 2x^2 : 4! + 2x^4 : 6! + \ldots) - 1, \quad x \in \,]0|a[, \end{aligned} \tag{13}$$

so dass es ratsam erscheint, zunächst die streng isotone Funktion

$$p : \,]0|a[\, \to \,]0|1[, \quad p(x) = 2x^2 : 4! + 2x^4 : 6! + \ldots, \tag{14}$$

deren Bild-Bereich $]0|1[$ sich mit Hilfe von (12) ergibt, einzuführen und aus (13), (14) die Gleichung

$$\theta(x) = 2 : (1 + p(x)) - 1 = (1 - p(x)) : (1 + p(x)), \quad x \in \,]0|a[, \tag{15}$$

herzuleiten. Aus (13) folgt ohne Weiteres

$$x^2 : (\cosh x - 1) = 1 + \theta(x), \quad x \in \left]0|a\right[,$$

woraus nach elementarer Rechnung

$$\cosh x = 1 + x^2 : (1 + \theta(x)), \quad x \in \left]0|a\right[,$$

folgt und sich

$$\begin{aligned}\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = (1 + x^2 : (1 + \theta(x)))^2 - 1 = \dots \\ = 2x^2 : (1 + \theta(x)) + x^4 : (1 + \theta(x))^2, \quad x \in \left]0|a\right[,\end{aligned}$$

ergibt, woraus

$$\begin{aligned}u^2(x) = (\sinh^2 x) : x^2 = 2 : (1 + \theta(x)) + x^2 : (1 + \theta(x))^2 \\ = (2 + 2\theta(x) + x^2) : (1 + \theta(x))^2, \quad x \in \left]0|a\right[,\end{aligned}$$

folgt und sich wegen der Nicht-Negativität von $u(x)$ die Gleichung

$$u(x) = \sqrt{2 + 2\theta(x) + x^2} : (1 + \theta(x)), \quad x \in \left]0|a\right[,$$

ergibt, so dass die zu beweisende Ungleichung (10) im nur mehr interessierenden Bereich $x \in \left]0|a\right[$ die Form

$$1 + \left(\sqrt{2 + 2\theta(x) + x^2} : (1 + \theta(x))\right) \cdot (-\theta(x)) > 0, \quad x \in \left]0|a\right[, \tag{16}$$

annimmt. Wegen der Nicht-Negativität der involvierten Terme ist (16) äquivalent zu

$$(1 + \theta(x))^2 > \theta^2(x) \cdot (2 + 2\theta(x) + x^2), \quad x \in \left]0|a\right[,$$

und diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$1 + 2\theta(x) + \theta^2(x) \geq 2\theta^2(x) + 2\theta^3(x) + \theta^2(x) \cdot x^2, \quad x \in \left]0|a\right[,$$

und diese Ungeleichung ist äquivalent zu

$$1 + 2\theta(x) \geq \theta^2(x) \cdot (1 + 2\theta(x)) + \theta^2(x) \cdot x^2, \quad x \in \left]0|a\right[,$$

und diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(1 + 2\theta(x)) \cdot (1 - \theta^2(x)) \geq \theta^2(x) \cdot x^2, \quad x \in \left]0|a\right[. \tag{17}$$

Mit Hilfe von (15) nimmt (17) die Gestalt

$$(1+2\cdot(1-p(x)) : (1+p(x)))\cdot(4p(x) : (1+p(x))^2) > ((1-p(x))^2 : (1+p(x))^2)\cdot x^2, \\ x \in \left]0|a\right[,$$

an, aus der äquivalenter Weise die noch zu beweisende Ungleichung

$$((1+p(x)):(1-p(x))+2)\cdot 4p(x) > x^2\cdot(1-p^2(x)),\quad x\in\,]0|a[,\tag{18}$$

folgt. Es liegt nahe, in (18) den Term “x^2” zu eliminieren. Dies gelingt mit Hilfe der Festsetzung

$$q(x) = p(x) : x^2,\quad x\in\,]0|a[,$$

präziser unter Einführung der Funktion

$$q : \,]0|a[\, \to \,]2:4!|1:a^2[,$$
$$q(x) = p(x) : x^2 = 2:4! + 2x^2 : 6! + 2x^4 : 8! + \ldots,$$

die auf Grund der Potenzreihendarstellung offenbar auf $]0|a[$ streng isoton ist, so dass deren Bild-Bereich die angegebene Form hat. Mit Hilfe von q wird (18) auf die äquivalente Form

$$((1+p(x)):(1-p(x))+2)\cdot 4q(x) + p^2(x) - 1 > 0,\quad x\in\,]0|a[,$$

gebracht, bei der auf der linken Seite die Funktion

$$w : \,]0|a[\, \to \,]0|+\infty[,$$
$$w(x) = ((1+p(x)):(1-p(x))+2)\cdot 4q(x) + p^2(x) - 1,\quad x\in\,]0|a[,$$

erscheint, die als Summe und Produkt streng isotoner, nicht-negativer Funktionen ebenfalls streng isoton ist - woraus sich der Bild-Bereich via $q(0) = 1:12$ ermittelt - und somit positiv auf $]0|a[$ ist. $\square$

KLT: $g^*(c|d)$.
(D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$.
$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$.
$(D,G)(\mathtt{HJG})$ von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$.

Ersterstellung: 07/02/14 **Letzte Änderung: 20/02/15**

Notation. Im Folgenden soll - zumeist im Kontext von Hamilton-Funktionen - die Notation

$$g^*(c|d) = \{\omega : (\exists\Omega : \omega = (\Omega, E(\Omega, c(\Omega), d(\Omega))))\},$$

verwendet werden. Es bleibt den Lesern überlassen, sich davon zu überzeugen, dass $g^*(c|d)$ eine Funktion ist und der Definitions-Bereich von $g^*(c|d)$ gleich $\{\omega : (\omega, c(\omega), d(\omega)) \in \mathsf{dom}\, g\}$ ist. Offenbar gilt

$$g^*c = g^*(c|\dot{c}).$$

Für *Funktionen g* kann leicht nachgewiesen werden, dass der Bild-Bereich von $g^*(c|d)$ eine Teil-Klasse von $\mathsf{ran}\, g$ ist.

Beim Übergang vom "Lagrange-Formalismus" - also von der Formulierung der Bewegungs-Gleichungen als (ELG) *- zum "Hamilton-Formalismus" - die korrespondierenden Hamilton-Jacobi-Gleichungen* $(D,G)(\mathtt{HJG})$ *werden im Folgenden hergeleitet - werden die gelegentlich als (System von) ODEs zweiter Ordnung in Erscheinung tretenden* (ELG) *in ein* explizites *System von ODEs erster Ordnung transformiert. Die Transformation ist* nicht *die Standard-Transformation, bei der die erste Ableitung als zusätzliche, unbekannte Funktion definiert wird, sondern involviert einen nicht-linearen Übergang. Es ist nicht zu erwarten, dass "singuläre Effekte" - wie etwa der mögliche Verlust einer Bestimmungs-Gleichung für eine zweite Ableitung - bei dieser Transformation einfach verschwinden. Vielmehr ist zu erwarten, dass die Transformation nur dort funktioniert, wo die* (ELG) *"nicht-singulär" sind, also in bestimmten Teil-Bereichen von* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. *Möglicherweise gelingt die Transformation in verschiedenen Teil-Bereichen von* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *mit unterschiedlichen Transformations-Vorschriften. Dieser Möglichkeit wird dadurch Rechnung getragen, dass von einer lokalen nicht von "der" Transformation in den Hamilton-Formalismus die Rede ist.*

Mit dem Inversions-Paaren soll dem Umstand Rechnung getragen werden, dass die Teilmenge des Geschwindigkeitsraums, auf der bei gegebenen t und x das Impulsfeld $\mathtt{P}$ bezüglich v invertierbar ist, von t und x abhängen kann.

$$(D, G) \text{ ist } \mathtt{v}, \mathtt{P}\text{-Inversions-Paar von } (L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$$

genau dann, wenn gilt:

1. D Funktion.
2. $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.
3. $E_v = \{(t, x, v) : v \in D(t, x)\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{D}}$.
4. $E_p = \{(t, x, \mathtt{P}(t, x, v)) : v \in D(t, x)\}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.
5. $(G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.
6. Für alle $(t, x, v) \in E_v$ gilt
$$G(t, x, \mathtt{P}(t, x, v)) = v.$$
7. Für alle $(t, x, p) \in E_p$ gilt
$$\mathtt{P}(t, x, G(t, x, p)) = p.$$

Bemerkung. Ohne allzu grossen Aufwand kann

$$G(t, x, p) \in E_v, \quad (t, x, p) \in E_p,$$

und

$$\mathtt{P}(t, x, v) \in E_p, \quad (t, x, v) \in E_v,$$

nachgewiesen werden.

Dem lokalen Charakter des Übergangs von Lagrange- zu Hamilton-Formalismus wird durch die folgende Begriffs-Bildung Rechnung getragen.

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} \text{ ist } (D, G)\text{-Hamilton-Funktion von } (L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$$

genau dann, wenn gilt:

1. (D, G) ist $\mathtt{v}, \mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$.
2. $\boldsymbol{\mathcal{H}} : E_p \to \mathbb{R}$,
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(t, x, p) = \langle\, p \mid G(t, x, p) \,\rangle - L(t, x, G(t, x, p)),$$
wobei $E_p = \{(t, x, \mathtt{P}(t, x, v)) : v \in D(t, x)\}$.

Bemerkung. $\boldsymbol{\mathcal{H}}, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$ zwei beliebig (D, G)-Hamilton-Funktionen von $(L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$, so gilt offenbar $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$.

Der Nachweis, dass jede Hamilton-Funktion von L auf D stetig differenzierbar ist, bleibt den Lesern überlassen. Der Nachweis von `bc)` *wird hier erbracht. Die Abkürzung $\nabla_{\mathtt{p}}$ ist analog zu $\nabla_{\mathtt{v}}$ auf* $\mathtt{P}[D]$ *gewählt.*

Es gelte:

→) $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ ist (D, G)-Hamilton-Funktion von $(L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$.

→) $E_p = \{(t, x, \mathtt{P}(t, x, v)) : v \in D(t, x)\}$.

Dann gilt:

`a)` $\boldsymbol{\mathcal{H}} \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R})$.

`b)` Für alle $(t, x, p) \in E_p$ gilt:

$$(\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t, x, p) = -\mathtt{K}(t, x, G(t, x, p)). \tag{19}$$

`c)` Für alle $(t, x, p) \in E_p$ gilt:

$$(\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t, x, p) = G(t, x, p). \tag{20}$$

<u>**Beweis** `bc)`</u> `b)` Für $(t, x, p) \in E_p$ und für $i = 1, \ldots, s$ gilt entsprechend Definition,

$$\begin{aligned}
&(\partial_{x_i}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t, x, p)\\
&\quad= \left(\sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{x_i}G_j)(t, x, p)\right) - (\partial_{x_i}L)(t, x, G(t, x, p))\\
&\qquad - \sum_{j=1}^{s} (\partial_{v_j}L)(t, x, G(t, x, p)) \cdot (\partial_{x_i}G_j)(t, x, p)\\
&\quad= \left(\sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{x_i}G_j)(t, x, p)\right) - \mathtt{K}_i(t, x, G(t, x, p))\\
&\qquad - \sum_{j=1}^{s} \mathtt{P}_j(t, x, G(t, x, p)) \cdot (\partial_{x_i}G_j)(t, x, p)\\
&\overset{\mathtt{v,P}-\text{Inversion}}{=} \left(\sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{x_i}G_j)(t, x, p)\right) - \mathtt{K}_i(t, x, G(t, x, p)) - \sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{x_i}G_j)(t, x, p)\\
&\quad= -\mathtt{K}_i(t, x, G(t, x, p)).
\end{aligned}$$

c) Für $(t,x,p) \in \mathtt{P}[D]$ und für $i = 1,\dots,s$ gilt entsprechend Definition,

$$
\begin{aligned}
(\partial_{p_i}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t,x,p) = G_i(t,x,p) &+ \sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{p_i} G_j)(t,x,p) \\
&- \sum_{j=1}^{s} (\partial_{v_j} L)(t,x,G(t,x,p)) \cdot (\partial_{p_i} G_j)(t,x,p) \\
&= G_i(t,x,p) + \sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{p_i} G_j)(t,x,p) \\
&- \sum_{j=1}^{s} \mathtt{P}_j(t,x,G(t,x,p)) \cdot (\partial_{p_i} G_j)(t,x,p) \\
\overset{\mathtt{v},\mathtt{P}-\text{Inversion}}{=} G_i(t,x,p) &+ \sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{p_i} G_j)(t,x,p) - \left(\sum_{j=1}^{s} p_j \cdot (\partial_{p_i} G_j)(t,x,p) \right) \\
&= G_i(t,x,v).
\end{aligned}
$$

□

Nach Vorbereitungen werden die Hamilton-Jacobi-Gleichungen (D,G)`(HJG)` *von* $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$ *formuliert.*

$$Q, P \text{ lösen } (D,G)\mathtt{(HJG)} \text{ von } (L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$$

genau dann, wenn gilt:

1. $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ ist echtes reelles Intervall.
2. $Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$.
3. (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$.
4. Für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt
$$(t, Q(t), P(t)) \in E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\}.$$
5. Es gilt
$$\begin{array}{rcl} \dot{Q} & = & (\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P) \\ \dot{P} & = & -(\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P) \end{array},$$
wobei $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ die (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$ ist.

Bemerkung. Erfüllen Q, P die Bedingungen `1.`,`2.`,`4.`, dann gilt entsprechend der bereits bekannten Eigenschaften der (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^*(Q|P) \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}).$$

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen `(ELG)` *und* (D,G)`(HJG)` *hergestellt.*

Es gelte:

→) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$.

→) q löst `(ELG)`.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t), \dot{q}(t)) \in E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^*q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$".

Beweis. Offenbar sind durch $q, \mathtt{P}^*q$ die Bedingungen `1.,2.,3.` einer Lösung von (D,G)`(HJG)` von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$ erfüllt. Nun wird für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gerechnet.

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &\overset{\mathtt{v},\mathtt{P}-\text{Inversion}}{=} G(t,q(t),\mathtt{P}(t,q(t),\dot{q}(t))) = G(t,q(t),(\mathtt{P}^*q)(t)) \\ &\overset{(20)}{=} (\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t,q(t),(\mathtt{P}^*q)(t)) = ((\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(q|\mathtt{P}^*q))(t),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^*q)^\bullet(t) &\overset{(\mathtt{ELG})}{=} (\mathtt{K}^*q)(t) = \mathtt{K}(t,q(t),\dot{q}(t)) \\ &\overset{\mathtt{v},\mathtt{P}-\text{Inversion}}{=} \mathtt{K}(t,q(t),G(t,q(t),\mathtt{P}(t,q(t),\dot{q}(t)))) = \mathtt{K}(t,q(t),G(t,q(t),(\mathtt{P}^*q)(t))) \\ &\overset{(19)}{=} -(\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t,q(t),(\mathtt{P}^*q)(t)) = -(\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(q|\mathtt{P}^*q)(t).\end{aligned}$$

□

Nun soll der Zusammenhang von Lösungen von (D,G)`(HJG)` *von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$ mit Lösungen von* `(ELG)` *untersucht werden.*

Es gelte:

$\rightarrow$) Q,P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$.

Dann folgt:

a) $Q\in\mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\,Q:\mathbb{R}^s)$.

b) Q löst `(ELG)`.

c) $P=\mathtt{P}^*Q$.

Beweis. Klarer Weise ist $J=\mathsf{dom}\,Q$ ein echtes reelles Intervall und entsprechend Definition (D,G)`(HJG)` von $(L,\boldsymbol{\mathcal{D}})$ gilt

$$(t,Q(t),P(t))\in E_p=\{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)):v\in D(t,x)\},$$

sowie $Q\in\mathsf{C}^1(J:\mathcal{O})$ und $\dot{Q}=(\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)$, woraus via (20) die Gleichung $\dot{Q}(t)=G(t,Q(t),P(t))$ folgt und sich hieraus entsprechend wegen der stetigen Differenzierbarkeit von G,Q,P das Resultat $\dot{Q}\in\mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\,Q:\mathbb{R}^s)$ ergibt. Damit gilt $Q\in\mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\,Q:\mathbb{R}^s)$ und hiermit ist `a)` bewiesen.
Auf Grund von $(t,Q(t),P(t))\in E_p$ ergibt sich - wie bereits früher fest gestellt - $G(t,Q(t),P(t))\in E_v=\{(t,x,v):v\in D(t,x)\}$, so dass es sich bei Q um eine L-Zustandskurve.
Nun wird für alle $t\in\mathsf{dom}\,Q=\mathsf{dom}\,(\mathtt{P}^*Q)=\mathsf{dom}\,(\mathtt{K}^*Q)=\mathsf{dom}\,P$ gerechnet.

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^*Q)(t)=\mathtt{P}(t,Q(t),\dot{Q}(t))&\overset{(D,G)(\mathtt{HJG})}{=}\mathtt{P}(t,Q(t),((\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P))(t))\\&=\mathtt{P}(t,Q(t),(\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t,Q(t),P(t)))\\&\overset{(20)}{=}\mathtt{P}(t,Q(t),G(t,Q(t),P(t)))\overset{\mathtt{v,P}-\text{Inversion}}{=}P(t),\end{aligned}\tag{21}$$

womit `c)` bewiesen ist und weiter

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^*Q)^\bullet(t)&\overset{(21)}{=}\dot{P}(t)\overset{(D,G)(\mathtt{HJG})}{=}\big(-(\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)\big)(t)=-(\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t,Q(t),P(t))\\&\overset{(19)}{=}\mathtt{K}(t,Q(t),G(t,Q(t),P(t)))\overset{(20)}{=}\mathtt{K}(t,Q(t),(\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})(t,Q(t),P(t)))\\&=\mathtt{K}(t,Q(t),((\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P))(t))\overset{(D,G)(\mathtt{HJG})}{=}\mathtt{K}(t,Q(t),\dot{Q}(t))\\&=(\mathtt{K}^*Q)(t),\end{aligned}$$

woraus `b)` folgt. □

Die nachfolgende Formel ist das vielleicht bekannteste Resultat von "Hamilton-Jacobi-Systemen". Sie besagt, dass die Änderungsrate von $\boldsymbol{\mathcal{H}}^*(Q|P)$ für Lösungen Q, P von (D, G)(HJG) von $(L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ gleich $(\partial_{\mathtt{t}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)$ ist.

Es gelte:

→) Q, P lösen (D, G)(HJG) von $(L, \boldsymbol{\mathcal{D}})$.

Dann folgt "$\big(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*(Q|P)\big)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)$".

Beweis. Für $t \in \operatorname{\mathsf{dom}} Q = \operatorname{\mathsf{dom}} P = \operatorname{\mathsf{dom}}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*(Q|P)) = \operatorname{\mathsf{dom}}((\partial_{\mathtt{t}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P))$ wird gerechnet,

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*(Q|P)\big)^\bullet(t)\\
&\quad = \Big\langle\ (\nabla_{\mathtt{x}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)(t) \mid \dot{Q}(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ (\nabla_{\mathtt{p}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)(t) \mid \dot{P}(t)\ \Big\rangle\\
&\qquad\qquad + (\partial_{\mathtt{t}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)(t)\\
&\quad \overset{(\mathrm{D,G})(\mathtt{HJG})}{=} \Big\langle -\dot{P}(t) \mid \dot{Q}(t)\ \Big\rangle + \Big\langle\ \dot{Q}(t) \mid \dot{P}(t)\ \Big\rangle + (\partial_{\mathtt{t}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)(t)\\
&\qquad\qquad = (\partial_{\mathtt{t}}\boldsymbol{\mathcal{H}})^*(Q|P)(t).
\end{aligned}$$

□

Literatur.

L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

Ersterstellung: 12/02/14 **Letzte Änderung: 25/02/15**

Einige Lagrange-Funktionen weisen eine spezielle Struktur auf, die nun vorgestellt werden soll. Weitere Spezialisierung - etwa auf "zeitunabhängige Potentiale" - folgen.

$$\text{Standard } L \text{ auf } C \times \mathbb{R}^s \text{ mit } M_{..}(t,x), V(t,x),$$

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.

2. $0 \neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

3. $(V \downharpoonleft C) \in \mathsf{C}^1(C : \mathbb{R})$.

4. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft C) \in \mathsf{C}^1(C : \mathbb{R})$.

5. Für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonleft C) = (M_{ji} \downharpoonleft C)$.

6. $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(t,x).$$

Bemerkenswerter Weise treten im Kotext von Standard L die Christoffel-Symbole erster Art der Differentialgeometrie - siehe etwa **H.Brauner**, *Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.- auf*

$$\Gamma_{ijk} = (1:2) \cdot (-M_{ij\,,k} + M_{ki\,,j} + M_{jk\,,i}),$$

wobei $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ und aus Gründen der Vereinfachung vorübergehend auf die Argumente von $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ijk}(t,x)$ und von $M_{ij,\,k} = M_{ij,\,k}(t,x)$ verzuichtet wird. Wie für alle Trilinearformen gilt unter anderem für alle $u \in \mathbb{R}^s$,

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k = \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ki,\,j} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k = \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{jk,\,i} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k,$$

sowie

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{kij} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{jki} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k,$$

und hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
(1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k
&= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) + 0 \\
&= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) \\
&\quad + \left((1:2) \cdot \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) - (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) \\
&= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) \\
&\quad + \left((1:2) \cdot \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ki,\,j} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) - (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{jk,\,i} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right) \\
&= (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} (M_{ij,\,k} + M_{ki,\,j} - M_{jk,\,i}) \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{s} (1:2) \cdot (M_{ij,\,k} + M_{ki,\,j} - M_{jk,\,i}) \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{s} (1:2) \cdot (-M_{jk,\,i} + M_{ij,\,k} + M_{ki,\,j}) \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{jki} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k,
\end{aligned}
$$

also in Kurzform

$$
(1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k.
$$

Unter Einsatz der Linearen Algebra wird im Rahmen von Standard L von Invertierbarkeit gesprochen.

$$M_{ij} \text{ auf } C_{\texttt{inv}} \text{ invertierbar}$$

genau dann, wenn gilt:

1. $C_{\texttt{inv}} \subseteq C$.
2. Für $(t, x) \in C_{\texttt{inv}}$ und $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es $M^{ij}(t, x)$, so dass für alle $k, l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t, x) \cdot M^{il}(t, x) = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Ist M_{ij} auf $C_{\texttt{inv}}$ invertierbar, so gelten wegen der Symmetrie von M_{ij} und auf Grund von bekannten Aussagen der Linearen Algebra für $(t, x) \in C_{\texttt{inv}}$ und $k, l \in \{1, \ldots, s\}$ die Formeln

$$M^{kl}(t, x) = M^{lk}(t, x),$$

sowie

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t, x) \cdot M^{il}(t, x) = \sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t, x) \cdot M^{li}(t, x) = \sum_{i=1}^{s} M_{ik}(t, x) \cdot M^{il}(t, x)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} M_{ik}(t, x) \cdot M^{li}(t, x) = \delta_k{}^l,$$

und

$$\sum_{i=1}^{x} M^{ki}(t, x) \cdot M_{il}(t, x) = \sum_{i=1}^{x} M^{ki}(t, x) \cdot M_{li}(t, x) = \sum_{i=1}^{x} M^{ik}(t, x) \cdot M_{il}(t, x)$$

$$\sum_{i=1}^{x} M^{ik}(t, x) \cdot M_{li}(t, x) = \delta^k{}_l.$$

Liegt im Rahmen von Standard L die Invertierbarkeit von M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ vor, so kann auf $C_{\mathtt{inv}}$ zu den Christoffel-Symbolen zweiter Art übergegangen werden, indem für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ auf $C_{\mathtt{inv}}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \cdot M^{\alpha k},$$

gesetzt wird. Ähnlich wird für $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ auf $C_{\mathtt{inv}}$

$$(\partial_{\mathtt{t}} M)^{i}_{\ j} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha j},$$

und für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V^{i}_{,} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\,\alpha},$$

gesetzt.

Auf den Beweis dieser naheliegenden Aussagen wird verzichtet.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(C : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$,
so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{i} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} M)^{i}_{\ j} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Die bislang vorgestellten Variablen und Gleichungen sowie die Transformation in die Hamilton-Darstellung werden nun im Fall Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$ diskutiert. Dabei werden etliche Rechnungen den Lesern überlassen.

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V)(t,x).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{K}_\alpha(t,x,v) &= (\partial_{x_\alpha} L)(t,x,v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (V_{,\,\alpha})(t,x). \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{K}(t,x,v) &= (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t,x,v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V)(t,x). \end{aligned}$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$ gilt wegen $M_{\alpha i} = M_{i\alpha}$, $i \in \{1,\ldots,s\}$,

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t,x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{E}(t,x,v) &= \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t,x).\end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{T}(t,x,v) &= (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &= (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$. Es fällt der Wechsel des Definitions-Bereichs vom Übergang von V zu $\mathbf{\Phi}$ auf.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(t,x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u, w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)(t, x, v) \\
&\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle \\
&\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\
&\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t, x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t, x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot u_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t, x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, \nabla_{\mathtt{x}} V(t, x) \mid u \,\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei auffällt, dass hier *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)(t, x, v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t, x, v) \,\rangle\ \text{”},$$

also

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t, x, v) \,\rangle \\
&= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}
\end{aligned}$$

gelten muss.

Gilt Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$, so muss auf den Geschwindigkeitsraum bei $C \times \mathbb{R}^s$-Kurven keine Rücksicht genommen. Auf den Beweis wird verzichtet.

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Im Rahmen von Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$ nimmt $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)$ für $C \times \mathbb{R}^s$-Kurven c eine bemerkenswerte Gestalt an.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i\right) + V_{,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

b) Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $(t, c(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}_{\ i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i\right) + (V_{,}^{\ \alpha}) \circ (\mathtt{t}, c),$$

wobei

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i.$$

<u>Beweis.</u> a) Entsprechend Definition gilt

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = (\mathtt{P}^*_\alpha c)^\bullet - \mathtt{K}^*_\alpha c$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i\right)^\bullet - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j\right) + V_{,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c)$$

$$= \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\ldots = & \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \\
& + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \\
& - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \\
= & \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \\
& - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
& + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \\
= & \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \\
& + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
& + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \\
= & \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \\
& + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) \\
& - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
& = \ldots
\end{aligned}
$$

$$\ldots \overset{\mathrm{i}\leftrightarrow\mathrm{j}}{=} \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i$$

$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j\right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha j,\, i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_i\right)$$

$$- (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$\overset{\dot{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}} \cdot \dot{\mathrm{c}}_{\mathrm{i}} = \dot{\mathrm{c}}_{\mathrm{i}} \cdot \dot{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}}}{=} \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i$$

$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j\right) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha j,\, i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j\right)$$

$$- (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i$$

$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{\alpha i,\, j} + M_{\alpha j,\, i} - M_{ij,\, \alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$\overset{\mathrm{M}_{\alpha \mathrm{j},\, \mathrm{i}} = \mathrm{M}_{\mathrm{j}\alpha,\, \mathrm{i}}}{=} \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i$$

$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{\alpha i,\, j} + M_{j\alpha,\, i} - M_{ij,\, \alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{s} ((1:2) \cdot (M_{\alpha i,\, j} + M_{j\alpha,\, i} - M_{ij,\, \alpha})) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i + V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

`b)` Einerseits gilt gemäß des bereits bewiesenen `a)` für alle $k \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_k = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) + V_{,\,k} \circ (\mathtt{t}, c),$$

andererseits gilt für alle $\alpha, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$\sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot M_{kj} \circ (\mathtt{t}, c) = \delta^k{}_j,$$

auf E, so dass auf E gerechnet werden kann:

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) + V_{,\,k} \circ (\mathtt{t}, c) \right)$$

$$= \ldots$$

$$\begin{aligned}
\ldots = \sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) \\
+ \sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) \\
+ \sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) \\
+ \sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (V_{,\, k} \circ (\mathtt{t}, c)) \\
= \sum_{k,i=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot M_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \\
+ \sum_{k,i,j=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
+ \left(\sum_{k,i=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) + (V_{,}^{\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \\
= \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot M_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \right) \cdot \ddot{c}_i \\
+ \sum_{i,j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \right) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
+ \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{s} M^{\alpha k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ki} \circ (\mathtt{t}, c) \right) \cdot \dot{c}_i \right) + V_{,}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \\
= \left(\sum_{i=1}^{s} \delta^{\alpha}{}_{i} \cdot \ddot{c}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}{}_{i} \cdot \dot{c}_i \right) + V_{,}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \\
= \ddot{c}_{\alpha} + \left(\sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}{}_{i} \cdot \dot{c}_i \right) + V_{,}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).
\end{aligned}$$

$\square$

Im Folgenden ist es gelegentlich von Interesse, die zweite Ableitung von $C \times \mathbb{R}^s$-Kurven c mit Hilfe von $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)$ darzustellen. Dies gelingt ohne viel Weiteres mit Hilfe des vorhergehenden Satzes. Der Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t,x)$.

$\rightarrow$) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a)
$$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j - \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

b)
$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$= \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k - \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und hieraus ergibt sich

$$(L^*c)^{\bullet} = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right)^{\bullet} - (V \circ (\mathtt{t}, c))^{\bullet}$$

$$\begin{aligned}
&= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\
&\quad + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \ddot{c}_j \\
&\quad - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle \\
&\overset{\mathrm{i} \leftrightarrow \mathrm{j}}{=} (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&\quad + (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\
&\quad + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ji} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_j \cdot \ddot{c}_i \\
&\quad - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

$$\ldots \overset{\dot{c}_j \cdot \ddot{c}_i = \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j}{=} (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ji} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle$$

$$\overset{M_{ji} = M_{ij}}{=} (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle$$

$$= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (1:2) \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} M_{ij,\,k} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle$$

$$= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle,$$

woraus durch Umstellen

$$(L^* c)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle,$$

folgt und andererseits unter Einsatz von…

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ - \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle ,$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} (L^* c)^{\bullet} &= \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\quad + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\quad - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle \\ &= \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\quad - \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\quad + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\quad - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle \\ &= \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\quad - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle , \end{aligned}$$

also kurz

$$(L^* c)^{\bullet} = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c}\, \rangle ,$$

folgt.

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^* c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^* c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt nach kurzer Rechnung auch

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

$$\mathtt{K}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und hieraus ergibt sich

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right)^\bullet$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und andererseits folgt durch Einsatz von $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)$ die Gleichung

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c$$

$$= (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1 : 2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot c_j \right) - V_{,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, c).$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^* c)^\bullet &= (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c \\ &= (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c),\end{aligned}$$

und aus all diesen Resultaten folgt mit kurzer Rechnung

$$\begin{aligned}&\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\ &\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\qquad + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\quad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle \,.\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, c),$$

und hieraus ergibt sich $\mathtt{E}^*c = L^*c + 2 \cdot V \circ (\mathtt{t}, c)$ und ähnlich wie bei L^*c folgt

$$\begin{aligned}(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ + (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle \,,\end{aligned}$$

und andererseits erscheint unter Einsatz von $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)$ die Gleichung

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und hieraus ergibt sich $\mathtt{T}^*c = L^*c + V \circ (\mathtt{t}, c)$ und ähnlich wie bei L^*c folgt

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und andererseits erscheint unter Einsatz von $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)$ die Gleichung

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$- \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*c = V \circ (\mathtt{t}, c),$$

so dass ohne viel Zutun

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, c) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid \dot{c} \,\rangle,$$

folgt.

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{dom} c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*c \\
&\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&+ \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\
&- \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle ,
\end{aligned}$$

wobei auffällt, dass hier *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

also

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad & \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\operatorname{dom} c} \quad \text{”}
\end{aligned}$$

gelten muss.

Bei Lösungen q von (ELG) *muss nicht auf den Geschwindigkeitsraum Rücksicht genommen werden. Allgemein gilt für derartige Lösungen $(\Delta_{\mathtt{elg}} q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$. Mit diesen Vorbemerkungen kann der Beweis wird den Lesern überlassen.*

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

... sind die Aussagen i), ii) äquivalent:

i) q löst (ELG).

ii) $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

$$= - \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \right) - V_{,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls M_{ij} auf $C_{\texttt{inv}}$ invertierbar ist, so folgt für Lösungen q von `(ELG)` *mit verzichtbarem Beweis eine explizite Darstellung von $\ddot{q}$.*

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) q löst `(ELG)`.

→) $(t, q(t)) \in C_{\texttt{inv}}$.

→) $\alpha \in \{1, \dots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = -\left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\texttt{t}} M)^{\alpha}{}_{i}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \right) - V_{,}{}^{\alpha}(t, q(t)).$$

Die vorangehend Aussage hat in gewissem Sinn eine Umkehrung.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -\left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}_{\ i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \right) - V_{,}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q),$$

Dann folgt “ q löst `(ELG)`” .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$\begin{aligned}(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) &+ \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ &+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ &- (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle ,\end{aligned}$$

und unter Verwendung von $(\Delta_{\mathtt{elg}} q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$ folgt

$$\begin{aligned}(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) - 2 \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle .\end{aligned}$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^* q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V_{,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt auch

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$
$$\mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und hieraus ergibt sich

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und andererseits folgt durch Einsatz von $(\Delta_{\mathtt{elg}} q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$ die Gleichung

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot q_j \right) - V_{,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, q).$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q),$$

und auch via $(\Delta_{\mathtt{elg}} q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$ ergibt sich

$$\langle\ (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\begin{aligned} \langle\ (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle &= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ &= \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\ (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q}\ \rangle\,. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{E}^*q)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) &+ \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ &+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ &+ (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle ,\end{aligned}$$

und andererseits erscheint unter Einsatz von $(\Delta_{\mathtt{elg}} q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$ die Gleichung

$$(\mathtt{E}^*q)^{\bullet} = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q).$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und andererseits erscheint unter Einsatz von $(\Delta_{\mathtt{elg}} q) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$ die Gleichung

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ (\mathtt{t}, q),$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = (\partial_{\mathtt{t}} V) \circ (\mathtt{t}, q) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid \dot{q} \,\rangle\,.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^* q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u, w)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)^* q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^* q)^{\bullet} = \mathtt{M}(u, w)^* q.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so ist q eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve und auf Grund der bisherigen Erkenntnisse gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^* q \\
&\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&+ \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\
&- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle
\end{aligned}$$

wobei auffällt, dass hier *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle\ \text{”},$$

also

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad & \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle \\
&\qquad = \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}
\end{aligned}$$

gelten muss.

Liegt Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$ vor, so muss bei der Untersuchung von Transformationsfamilien auf den Geschwindigkeitsraum keine Rücksicht genommen werden. Der Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Auch bei “linearen” Transformationsfamilien vereinfacht sich bei Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$ Einiges. Der Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

$\rightarrow$) $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow$) $P \subseteq E$.

$\rightarrow$) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow$) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.

$\rightarrow$) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow$) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow$) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow$) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt “A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie”.

Im vielleicht bekanntesten Anwendungsfall "Invarianz unter einer linearen Transformationsfamilie" werden Drehungen senkrecht zu $\mathsf{span}\{u,w\}$, $u,w\in\mathbb{R}^s$, *betrachtet. Vorliegende Aussage zielt auf diesen Fall ab. Als einfache Folgerung eines Resultats aus* **#268** *bleibt der Beweis den Lesern überlassen.*

Es gelte:

→) Standard L auf $C\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

→) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0\neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\mathtt{zeit}}\times E_{\mathtt{ort}}\subseteq C$.

→) $u,w\in\mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi\in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}]\subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

→) Für alle $(\phi,t,x)\in P\times E_{\mathtt{zeit}}\times E_{\mathtt{ort}}$ und für alle $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gilt

$$M_{ij}(t,(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x))=M_{ij}(t,x).$$

→) Für alle $(\phi,t,x)\in P\times E_{\mathtt{zeit}}\times E_{\mathtt{ort}}$ gilt

$$V(t,(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x))=V(t,x).$$

→) Für alle $(\phi,t,x,v)\in P\times E_{\mathtt{zeit}}\times E_{\mathtt{ort}}\times\mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(t,x)\cdot(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v)\cdot(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v)=\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(t,x)\cdot v_i\cdot v_j.$$

→) q löst `(ELG)`.

→) $\mathsf{dom}\,q\subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.

→) Für alle $t\in\mathsf{dom}\,q$ gilt $q(t)\in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: …

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$\begin{aligned}(1:2)\cdot\langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ - (1:2)\cdot\langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\ - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \\ = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.\end{aligned}$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^{\bullet} = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),$$

also

$$\begin{aligned}\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, q(t)) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j(t) \\ - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, q(t)) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j(t) \\ = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma, q(\sigma)) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j(\sigma) \\ - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma, q(\sigma)) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j(\sigma),\end{aligned}$$

Die Verifikation der definierenden Eigenschaften von Koordinatenfunktionen vereinfacht sich bei Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$. Der Beweis bleibt den Lesern überlassen.

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\texttt{zeit}}, D_{\texttt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\texttt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\texttt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\texttt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\texttt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $O_{\texttt{zeit}} \times \Psi[D_{\texttt{ort}}] \subseteq C$.

Bei Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t,x)$ liegen, wenn M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist, kanonische $\mathtt{v}, \mathtt{P}$*-Inversions-Paare vor.*

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t,x)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v}, \mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

<u>Beweis.</u> Offenbar handelt es sich bei D um eine Funktion mit $\mathsf{dom}\, D = C_{\texttt{inv}} \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$ und $D(t,x) = \mathbb{R}^s$ für alle $(t,x) \in C_{inv}$. Damit gilt $E_v = C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s$, so dass $E_v \subseteq C \times \mathbb{R}^s$ folgt. Entsprechend bekannter Resultate der Linearen Algebra ist wegen der Invertierbarkeit von M_{ij} auf $C_{\texttt{inv}}$ die lineare Abbildung

$$A(t,x) : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s,$$

$$A(t,x)(v) = \mathsf{P}(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M_{si}(t,x) \cdot v_i \right),$$

bijektiv, woraus ohne allzu viel Mühe $E_p = C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ folgt. Da $C_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$ ist, ist E_p offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$. Wegen $M^{ij} \in \mathsf{C}^1(C_{\texttt{inv}} : \mathbb{R})$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ und $\mathsf{dom}\, G = C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s = E_p$ gilt $G = (G \downharpoonleft E_p)$ und $G \in \mathsf{C}^1(E_p; \mathbb{R}^s)$. Offenbar ist für $(t,x) \in C_{\texttt{inv}}$ die Funktion

$$G(t,x,.) : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s,$$

$$G(t,x,.)(v) = G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M_{si}(t,x) \cdot v_i \right),$$

die Inverse von $A(t,x)$. Hieraus folgen `fg)`. Aus `abcdefg)` folgt per definitionem `h)`. □

Unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes kann die (D, G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$ einfach angegeben werden.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t,x),$$

ist (D, G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

__**Beweis.**__ Gemäß bereits Bekanntem ist (D, G) ein $\mathtt{v}, \mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$ mit

$$E_p = \{(t, x, \mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist die (D, G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$ gegeben durch

$$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = \langle\, p \mid G(t,x,p)\, \rangle - L(t,x,G(t,x,p)),$$

und nun wird durch Rechnung für alle $(t,x,p) \in C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$,

$$\mathcal{H}(t,x,p) = \langle\, p \mid G(t,x,p)\, \rangle - L(t,x,G(t,x,p))$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i=1}^{s} p_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_j \right) - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot \left(\sum_{l=1}^{s} M^{il}(t,x) \cdot p_l \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{s} M^{jk}(t,x) \cdot p_k \right) - V(t,x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} p_i \cdot M^{ij}(t,x) \cdot p_j - (1:2) \cdot \sum_{i,j,l,k=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot M^{il}(t,x) \cdot p_l \cdot M^{jk}(t,x) \cdot p_k - V(t,x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j - (1:2) \cdot \sum_{j,l,k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot M^{il}(t,x) \right) \cdot p_l \cdot M^{jk}(t,x) \cdot p_k - V(t,x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j - (1:2) \cdot \sum_{j,l,k=1}^{s} {\delta_j}^{l} \cdot p_l \cdot M^{jk}(t,x) \cdot p_k - V(t,x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j - (1:2) \cdot \sum_{j,k=1}^{s} p_j \cdot M^{jk}(t,x) \cdot p_k - V(t,x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j - (1:2) \cdot \sum_{j,k=1}^{s} M^{jk}(t,x) \cdot p_j \cdot p_k - V(t,x)$$

$$= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t,x),$$

ermittelt. □

Unter diesen Essays kanonischen Voraussetzungen werden (D, G)`(HJG)`*-Lösungen von* $(L, C \times \mathbb{R}^s)$ *charakterisiert.*

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t, x), V(t, x)$.

$\rightarrow\!)$ M_{ij} auf $C_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow\!)$ $C_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow\!)$ $D = \{((t, x), \mathbb{R}^s) : (t, x) \in C_{\texttt{inv}}\}$.

$\rightarrow\!)$ $G : C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t, x, v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t, x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t, x) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D, G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C_{\texttt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ & & \qquad\qquad -V_{,\,\alpha}(t, Q(t)) \end{array}.$$

Beweis. Da der Ortsraum gleich $\mathbb{R}^s$ ist bleibt auf Grund bereits getätigter Vorarbeiten für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ und $(t, x, p) \in C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ verbleibt nur die Verifikation der beiden Gleichungen

$$\partial_{p_\alpha} \mathcal{H}(t, x, p) = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t, x) \cdot p_i,$$

und

$$-\partial_{x_\alpha} \mathcal{H}(t, x, p) = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t, x) \cdot p_i \cdot p_j \right) - V_{,\,\alpha}(t, x).$$

$\square$

Gilt Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$, so ergeben sich für den Übergang von (D,G)`(HJG)` *von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$ zu* `(ELG)` *gegenüber* **#272** *keine neuen Erkenntnisse. Der Weg von* `(ELG)` *zu (D,G)*`(HJG)` *von $(L; C \times \mathbb{R}^s)$ ist hier wegen geringerer Anforderungen - der Geschwindigkeitsraum ist $\mathbb{R}^s$ - hier angegeben. Der Beweis wird den Lesern überlassen.*

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t,x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt " $q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$" .

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $C\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x),V(t)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 25/02/15**

Standard L auf $C\times\mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x),V(t)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1\le s\in\mathbb{N}$.
2. $0\neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.
3. $(V\downharpoonright I)\in\mathsf{C}^1(I:\mathbb{R})$, wobei $I=\{t:(\exists x:(t,x)\in C)\}$.
4. Für $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gilt $(M_{ij}\downharpoonright C)\in\mathsf{C}^1(C:\mathbb{R})$.
5. Für $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gilt $(M_{ij}\downharpoonright C)=(M_{ji}\downharpoonright C)$.
6. $L:C\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$,
$$L(t,x,v)=(1:2)\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(t,x)\cdot v_i\cdot v_j\right)-V(t).$$

M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $C_{\mathtt{inv}}\subseteq C$.
2. Für $(t,x)\in C_{\mathtt{inv}}$ und $i,j\in\{1,\dots,s\}$ gibt es $M^{ij}(t,x)$, so dass für alle $k,l\in\{1,\dots,m\}$
$$\sum_{i=1}^{s}M_{ki}(t,x)\cdot M^{il}(t,x)=\delta_k{}^l,$$
gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $C_{\mathtt{inv}}$ …

$$\Gamma_{ij}{}^k=\sum_{\alpha=1}^{s}\Gamma_{ij\alpha}\cdot M^{\alpha k},$$

$$(\partial_{\mathtt{t}}M)^i_j=\sum_{\alpha=1}^{s}M^{i\alpha}\cdot(\partial_{\mathtt{t}}M)_{\alpha j},$$

$$V^i_{,}=\sum_{\alpha=1}^{s}M^{i\alpha}\cdot V_{,\,\alpha}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(C : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$,
so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} M)^i_{\ j} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R})$,

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V^{\bullet}(t).$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R})$,

$$\mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{x_\alpha} L)(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Es gilt

$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$,

$$\mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t, x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathtt{E}(t, x, v) &= \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(t). \end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathtt{T}(t, x, v) &= (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 \\ &= (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(t).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j. \end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\ &\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\ &\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j, \end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned} \text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

$\rightarrow\!)$ c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i.$$

`b)` Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $(t, c(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}{}_{i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j - \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k - \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_\mathtt{t} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_\mathtt{t} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_\mathtt{t} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_\mathtt{t} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$
$$(\partial_\mathtt{t} L)^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_\mathtt{t} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla_\mathtt{x} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$\begin{aligned} &((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet \\ &= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i, \end{aligned}$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot c_j.$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$\begin{aligned} &\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\ &\quad \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\qquad\qquad + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad\qquad\qquad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{E}^*c)^\bullet = &\left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t},\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle - (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^{\bullet} = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^{\bullet} = (V^{\bullet}) \circ \mathtt{t}.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u, w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \mathtt{I}(u, w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j, \end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^*c)^{\bullet} = \mathtt{M}(u, w)^*c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^*c$ **längs** c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^*c \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^*c \\
&\qquad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\
&\qquad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&+ \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u, w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“ }\quad & \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\operatorname{\mathsf{dom}} c} \text{ ”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

$$= -\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = -\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}{}_{i}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = - \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}_{\ i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

Dann folgt " q löst `(ELG)`" .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \mathtt{K}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i\right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot q_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$\langle\ (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\ (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j\right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k.$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ \mathtt{t},$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = (V^\bullet) \circ \mathtt{t}.$$

(u, w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u, w)^* q$**,** q **löst** (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u, w)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$,

$$\mathtt{I}(u, w)^* q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{I}(u, w)^* q)^\bullet = \mathtt{M}(u, w)^* q.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* q$**,** q **löst** (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u, w)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^* q \\
&\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&+ \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&- \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\
&- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad & \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* q \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\quad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonright P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

$\rightarrow$) $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow$) $P \subseteq E$.

$\rightarrow$) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow$) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.

$\rightarrow$) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow$) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow$) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow$) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- $\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.
- $\rightarrow\!)$ $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow\!)$ $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$.
- $\rightarrow\!)$ $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $(\phi, t, x) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(t, x).$$

- $\rightarrow\!)$ Für alle $(\phi, t, x, v) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow\!)$ q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\texttt{zeit}}$.
- $\rightarrow\!)$ Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$
\begin{aligned}
&(1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad - (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad + \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\
&\qquad\qquad\qquad = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.
\end{aligned}
$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^{\bullet} = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$,

$$
(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),
$$

also

$$
\begin{aligned}
&\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, q(t)) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j(t) \\
&\qquad - \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, q(t)) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j(t) \\
&\qquad = \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma, q(\sigma)) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j(\sigma) \\
&\qquad\qquad - \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma, q(\sigma)) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j(\sigma),
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung . . .

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

. . . sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \restriction D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq C$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$
offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V(t),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & \displaystyle -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(t)$.

→) M_{ij} auf $C_{\texttt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\texttt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\texttt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\texttt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

→) q löst `(ELG)`.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C_{\texttt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 25/02/15**

Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$,

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.
3. $(V \downharpoonright O) \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$, wobei $O = \{x : (\exists t : (t,x) \in C)\}$.
4. Für $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonright C) \in \mathsf{C}^1(C : \mathbb{R})$.
5. Für $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonright C) = (M_{ji} \downharpoonright C)$.
6. $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V(x).$$

M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar

genau dann, wenn gilt:

1. $C_{\mathtt{inv}} \subseteq C$.
2. Für $(t,x) \in C_{\mathtt{inv}}$ und $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gibt es $M^{ij}(t,x)$, so dass für alle $k,l \in \{1,\ldots,m\}$

$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t,x) \cdot M^{il}(t,x) = \delta_k{}^l,$$

gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $C_{\mathtt{inv}}$ ...

$$\Gamma_{ij}{}^k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \cdot M^{\alpha k},$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} M)^i_j = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha j},$$

$$V^i_{,} = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot V_{,\,\alpha}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonright C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(C : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$,
so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$,

$$V_{,}^{i} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} M)^{i}_{j} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^{k} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t,x,v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \\
&\qquad \mathtt{K}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{x_\alpha} L)(t,x,v) \\
&\qquad\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (V_{,\,\alpha})(x).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s), \\
&\qquad \mathtt{K}(t,x,v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t,x,v) \\
&\qquad\qquad = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - (\nabla V)(x).
\end{aligned}$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t,x,v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t,x,v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t,x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{E}(t,x,v) &= \langle\, \mathtt{P}(t,x,v) \mid v \,\rangle - L(t,x,v) \\ &= (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) + V(x).\end{aligned}$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{T}(t,x,v) &= (\mathtt{E}(t,x,v) + L(t,x,v)) : 2 \\ &= (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t,x,v) = (\mathtt{E}(t,x,v) - L(t,x,v)) : 2 = V(x).$$

(u,w)**Drehimpulsdichte $\mathtt{I}(u,w)$.** Für $u, w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\quad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\
&\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\
&\quad\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\
&\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\
&\quad\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\quad\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j \\
&\quad\quad - \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V)(x) \mid w \,\rangle + \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V)(x) \mid u \,\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad & \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\
&= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\
&\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(x)$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(x)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^s M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i,j=1}^s \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \left(\sum_{i=1}^s (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i\right) + V_{,\alpha} \circ c.$$

`b)` Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $(t, c(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i,j=1}^s \Gamma_{ij}{}^\alpha \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \left(\sum_{i=1}^s (\partial_{\mathtt{t}} M)^\alpha_i \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i\right) + V_,^\alpha \circ c,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^s M^{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(x)$.

→) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j - \left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \right) - V_{,\,\alpha} \circ c.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k - \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c}\,\rangle.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V \circ c,$$

und

$$\begin{aligned}(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ - 2 \cdot \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle.\end{aligned}$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ c.$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\langle\, \mathtt{K}^* c \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle,$$

und

$$\mathtt{K}^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

$$\mathtt{K}^* c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\nabla V) \circ c.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c$$

$$= (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot c_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ c.$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^*c)^\bullet &= (\Delta_{\mathtt{elg}}c) + \mathtt{K}^*c \\ &= (\Delta_{\mathtt{elg}}c) + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - (\nabla V) \circ c,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\langle\, (\mathtt{P}^*c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \\ &\langle\, (\mathtt{P}^*c)^\bullet \mid \dot{c} \,\rangle = \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\qquad + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot{c} \,\rangle + \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \right) - \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle \,.\end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V \circ c,$$

und

$$\begin{aligned}(\mathtt{E}^*c)^\bullet &= \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\qquad + (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle \,,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}}c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j$$
$$- \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*c = V \circ c,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*c)^\bullet = \langle\, (\nabla V) \circ c \mid \dot{c} \,\rangle.$$

(u,w)**Drehimpusdichte $\mathtt{I}(u,w)^*c$ längs c**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$
$$\mathtt{I}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle$$
$$= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j$$
$$- \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u, w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u, w)^* c$ **längs** c**.**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u, w)^* c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u, w)^* c \\
&\quad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&+ \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ c \mid w \,\rangle + \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ c \mid u \,\rangle,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u, w)^* c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^* c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^* c \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}\quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$
$$= -\left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i\right) - V_{,\alpha} \circ q.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q löst `(ELG)`.

→) $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

→) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij}{}^{\alpha}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t)$$
$$= -\left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}{}_{i}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t)\right) - V_{,}{}^{\alpha}(q(t)).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -\left(\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}_{\ i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \right) - V_{,}^{\alpha} \circ q,$$

Dann folgt "q löst `(ELG)`".

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V \circ q,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle,$$

und

$$(L^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - 2 \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}}L)^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}}L)^*q \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}}L)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}}M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} q : \mathbb{R}),$$
$$(\mathtt{K}_\alpha)^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} q : \mathbb{R}),$$
$$\langle\, \mathtt{K}^*q \mid \dot{q} \,\rangle = \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\,,$$

und

$$\mathtt{K}^*q \in \mathsf{C}(\operatorname{\mathsf{dom}} q : \mathbb{R}^s),$$
$$\mathtt{K}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\nabla V) \circ q.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot q_j \right) - V_{,\,\alpha} \circ q.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - (\nabla V) \circ q,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \langle\, (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q} \,\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ &= \left(\sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) - \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle\, . \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V \circ q,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \circ q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \langle\, (\nabla V) \circ q \mid \dot{q} \,\rangle.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*q &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\ &= \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\ &\qquad - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*q \\
&\quad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&+ \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad - \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid u \,\rangle,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&\qquad = \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot q_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

`ii)` $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.
- `c)` Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

→) $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

→) $P \subseteq E$.

→) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.

→) $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

→) $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

→) Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

→) Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

- $\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.
- $\rightarrow$) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.
- $\rightarrow$) $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.
- $\rightarrow$) $u, w \in \mathbb{R}^s$.
- $\rightarrow$) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.
- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, t, x) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(t,x).$$

- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, x) \in P \times E_{\mathtt{ort}}$ gilt

$$V((\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = V(x).$$

- $\rightarrow$) Für alle $(\phi, t, x, v) \in P \times E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

- $\rightarrow$) q löst `(ELG)`.
- $\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\mathtt{zeit}}$.
- $\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt: ...

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^* q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, also

$$
\begin{aligned}
(1:2)\cdot\langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
- (1:2)\cdot\langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\
+ \langle\, \dot{q} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j \\
- \langle\, \dot{q} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j \\
- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla V) \circ q \mid u \,\rangle \\
= \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.
\end{aligned}
$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^* q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}$, so dass für alle $t, \sigma \in \mathsf{dom}\, q$,

$$
(\mathtt{I}(u,w)^* q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^* q)(\sigma),
$$

also

$$
\begin{aligned}
\langle\, q(t) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, q(t)) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j(t) \\
- \langle\, q(t) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, q(t)) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j(t) \\
= \langle\, q(\sigma) \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma, q(\sigma)) \cdot w_i \cdot \dot{q}_j(\sigma) \\
- \langle\, q(\sigma) \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(\sigma, q(\sigma)) \cdot u_i \cdot \dot{q}_j(\sigma),
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

...sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

- `a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.
- `b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq C$.

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j\right) + V(x),$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i\right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & \displaystyle -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\alpha}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \\ & & \qquad\qquad -V_{,\alpha}(Q(t)) \end{array}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V(x)$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x),\mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \dots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i\right).$$

→) q löst (ELG).

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^*q$ lösen (D,G)(HJG) von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

KLT: Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

Ersterstellung: 25/02/15 **Letzte Änderung: 25/02/15**

$$\text{Standard } L \text{ auf } C \times \mathbb{R}^s \text{ mit } M_{..}(t,x), V(),$$

genau dann, wenn gilt:

1. $1 \leq s \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq C$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.
3. $V \in \mathbb{R}$.
4. Für $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonright C) \in \mathsf{C}^1(C:\mathbb{R})$.
5. Für $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gilt $(M_{ij} \downharpoonright C) = (M_{ji} \downharpoonright C)$.
6. $L : C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,
$$L(t,x,v) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j \right) - V().$$

$$M_{ij} \text{ auf } C_{\mathtt{inv}} \text{ invertierbar}$$

genau dann, wenn gilt:

1. $C_{\mathtt{inv}} \subseteq C$.
2. Für $(t,x) \in C_{\mathtt{inv}}$ und $i,j \in \{1,\ldots,s\}$ gibt es $M^{ij}(t,x)$,
so dass für alle $k,l \in \{1,\ldots,m\}$
$$\sum_{i=1}^{s} M_{ki}(t,x) \cdot M^{il}(t,x) = \delta_k{}^l,$$
gilt.

Bemerkung. Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar, dann auf $C_{\mathtt{inv}}$ ...

$$\Gamma_{ij}{}^k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \cdot M^{\alpha k},$$

$$(\partial_{\mathtt{t}} M)^i_j = \sum_{\alpha=1}^{s} M^{i\alpha} \cdot (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha j}.$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

Dann folgt:

a) L ist eine klassische Lagrange-Funktion mit s Freiheitsgraden auf $C \times \mathbb{R}^s$.

b) $\mathsf{dom}\, L = C \times \mathbb{R}^s$.

c) $L = (L \downharpoonleft C \times \mathbb{R}^s)$.

d) Für $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(C : \mathbb{R})$.

e) Ist M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar
und ist $0 \neq C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$,
so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$M^{ij} \in \mathsf{C}^1(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} M)^i_{\ j} \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}),$$

und für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$

$$\Gamma_{ij}{}^k \in \mathsf{C}(C_{\mathtt{inv}} : \mathbb{R}).$$

Zeitliche Ableitung $\partial_{\mathtt{t}} L$.

$$\partial_{\mathtt{t}} L \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{K}_\alpha \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{K}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{x_\alpha} L)(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\,\alpha}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Es gilt

$$\mathtt{K} \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s),$$

$$\mathtt{K}(t, x, v) = (\nabla_{\mathtt{x}} L)(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}$. Für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\mathtt{P}_\alpha \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathtt{P}_\alpha(t, x, v) = (\partial_{v_\alpha} L)(t, x, v) = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i}(t, x) \cdot v_i.$$

Energiefeld $\mathtt{E}$.

$$\mathtt{E} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{E}(t, x, v) = \langle\, \mathtt{P}(t, x, v) \mid v \,\rangle - L(t, x, v) = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}$.

$$\mathtt{T} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\mathtt{T}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) + L(t, x, v)) : 2 = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t, x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{\Phi} \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}(t, x, v) = (\mathtt{E}(t, x, v) - L(t, x, v)) : 2 = V.$$

(u,w)**Drehimpulsdichte** $\mathtt{I}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{I}(u,w) \in \mathsf{C}^1(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)(t,x,v) &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j.\end{aligned}$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)$**.** Für $u,w \in \mathbb{R}^s$ gilt

$$\mathtt{M}(u,w) \in \mathsf{C}(C \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}&\mathtt{M}(u,w)(t,x,v) \\ &\quad = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &\quad = (1:2) \cdot \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \mid w \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\ &\quad\quad - (1:2) \cdot \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij})(t,x) \mid u \,\rangle \cdot v_i \cdot v_j \\ &\quad\quad + \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\quad\quad\quad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j,\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“ } \mathtt{M}(u,w)(t,x,v) = \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, x \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}(t,x,v) \,\rangle \text{ ”},$$

$$\begin{aligned}\text{“}\quad &\langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}(t,x,v) \,\rangle \\ &= \langle\, v \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot w_i \cdot v_j \\ &\qquad - \langle\, v \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot u_i \cdot v_j = 0 \quad \text{”}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

…sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

`ii)` $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall
und $c \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s)$
und für alle $t \in \mathsf{dom}\, c$ gilt $(t, c(t)) \in C$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

$\rightarrow\!)$ c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow\!)$ $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

`a)` $$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha = \left(\sum_{i=1}^s M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i\right) + \sum_{i,j=1}^s \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \sum_{i=1}^s (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i.$$

`b)` Falls M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar ist
und falls $(t, c(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ für alle $t \in E$,
so gilt auf E

$$(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \ddot{c}_\alpha + \sum_{i,j=1}^s {\Gamma_{ij}}^\alpha \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j + \sum_{i=1}^s (\partial_{\mathtt{t}} M)^\alpha{}_i \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

wobei $(\Delta_{\mathtt{elg}} c)^\alpha = \sum_{i=1}^s M^{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_i$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V()$.

$\rightarrow$) c ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha - \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j - \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i.$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k - \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Lagrange-Funktion L^*c längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$L^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad L^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(L^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^*c \mid \dot{c} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s), \quad \mathtt{K}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^*c = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (\mathtt{K}_\alpha)^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c)_\alpha + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot c_j.$$

Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* c)^\bullet = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + \mathtt{K}^* c = (\Delta_{\mathtt{elg}} c) + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$\langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \langle\, (\mathtt{P}^* c)^\bullet \mid \dot{c}\, \rangle &= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k \\ &\qquad + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\ &= \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c}\, \rangle + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*c = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{E}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*c = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \ddot{c}_i \cdot \dot{c}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \cdot \dot{c}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*c)^\bullet = \langle\, (\Delta_{\mathtt{elg}} c) \mid \dot{c} \,\rangle - (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j.$$

pEnergiefeld $\boldsymbol{\Phi}^*c$ längs c.
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\Phi}^*c = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, c,$$

und

$$(\boldsymbol{\Phi}^*c)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*c$ **längs** c
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*c \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}\mathtt{I}(u,w)^*c &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\ &= \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\ &\qquad - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,\end{aligned}$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*c)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*c.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*c$ **längs** c**.**
Falls c eine $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$$\mathtt{M}(u,w)^*c \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*c \\
&\qquad = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle \\
&\qquad + \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid w \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, c) \mid u \,\rangle \cdot \dot{c}_i \cdot \dot{c}_j \\
&+ \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j,
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*c = \langle\, c \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle - \langle\, c \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*c \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*c \,\rangle \\
&= \langle\, \dot{c} \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot w_i \cdot \dot{c}_j \\
&\qquad - \langle\, \dot{c} \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, c) \cdot u_i \cdot \dot{c}_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, c} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` q löst `(ELG)`.

`ii)` $\mathsf{dom}\, q$ echtes reelles Intervall und
$q \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C$ und
für alle $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i\right) + \sum_{i,j=1}^{s} \Gamma_{ij\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

$$= -\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

$\rightarrow$) $\alpha \in \{1, \dots, s\}$

Dann folgt

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) = -\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}{}_{i}(t, q(t)) \cdot \dot{q}_i(t).$$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) q ist $C \times \mathbb{R}^s$-Kurve.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$.

→) Für alle $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\ddot{q}_\alpha + \sum_{i,j=1}^{s} {\Gamma_{ij}}^{\alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = -\sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)^{\alpha}_{\ i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

Dann folgt “q löst `(ELG)`” .

Lagrange-Funktion L^*q, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$L^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad L^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) - V,$$

und

$$(L^*q)^{\bullet} = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
$$+ (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(L^*q)^{\bullet} = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Zeitliche Ableitung $(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q$, q löst `(ELG)`.
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Kraftfeld $\mathtt{K}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$,

$$(\mathtt{K}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M_{ij,\,\alpha}) \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \langle\, \mathtt{K}^* q \mid \dot{q} \,\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k,$$

und

$$\mathtt{K}^* q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s), \mathtt{K}^* q = (1:2) \cdot \sum_{i=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

Impulsfeld $\mathtt{P}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt für $\alpha \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\mathtt{P}_\alpha)^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad (\mathtt{P}_\alpha)^* q = \sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} M_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{\alpha i,\, j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{\alpha i} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i,$$

und

$$((\mathtt{P}_\alpha)^* q)^\bullet = (\mathtt{K}_\alpha)^* q = (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij,\, \alpha} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot q_j.$$

Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{P}^* q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}^s),$$

und

$$(\mathtt{P}^* q)^\bullet = \mathtt{K}^* q = (1 : 2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\nabla_{\mathtt{x}} M)_{i,j} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$\langle\ (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} \langle\ (\mathtt{P}^* q)^\bullet \mid \dot{q}\ \rangle = & \left(\sum_{i=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + 2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ & + \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \\ = & \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Energiefeld $\mathtt{E}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{E}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{E}^*q = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + V,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{E}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

kEnergiefeld $\mathtt{T}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathtt{T}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathtt{T}^*q = (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = \left(\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \ddot{q}_i \cdot \dot{q}_j \right) + \sum_{i,j,k=1}^{s} \Gamma_{ijk} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + (1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j,$$

und

$$(\mathtt{T}^*q)^\bullet = -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (\partial_{\mathtt{t}} M)_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j.$$

pEnergiefeld $\mathbf{\Phi}^*q$, q löst (ELG).
Falls q eine Lösung von (ELG) ist, so gilt

$$\mathbf{\Phi}^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}), \quad \mathbf{\Phi}^*q = V \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

und

$$(\mathbf{\Phi}^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q}.$$

(u,w)**Drehimpusdichte** $\mathtt{I}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{I}(u,w)^*q \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$,

$$\mathtt{I}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle\,,$$

und

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathtt{M}(u,w)^*q.$$

(u,w)**Drehmomentdichte** $\mathtt{M}(u,w)^*q$**,** q **löst** `(ELG)`**.**
Falls q eine Lösung von `(ELG)` ist, so gilt für alle $u, w \in \mathbb{R}^s$,

$\mathtt{M}(u,w)^*q \in \mathsf{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&\mathtt{M}(u,w)^*q \\
&\qquad = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle \\
&\qquad + \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&= (1:2) \cdot \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&- (1:2) \cdot \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} M_{ij}) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle \cdot \dot q_i \cdot \dot q_j \\
&\quad + \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot q_j \\
&- \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid w \,\rangle + \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, (\nabla_{\mathtt{x}} V) \circ (\mathtt{t}, q) \mid u \,\rangle
\end{aligned}$$

wobei *nicht unbedingt*

$$\text{“}\ \mathtt{M}(u,w)^*q = \langle\, q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle - \langle\, q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{K}^*q \,\rangle\ \text{”},$$

$$\begin{aligned}
\text{“}\quad &\langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \langle\, w \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \langle\, u \mid \mathtt{P}^*q \,\rangle \\
&\qquad = \langle\, \dot q \mid u \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot w_i \cdot \dot q_j \\
&\qquad\qquad - \langle\, \dot q \mid w \,\rangle \cdot \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij} \circ (\mathtt{t}, q) \cdot u_i \cdot \dot q_j = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\, q} \quad \text{”}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung …

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

…sind die Aussagen i), ii) äquivalent:

i) Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie.

ii) $P, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle und
$0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$ und
$E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft P \times E_{\mathtt{ort}})$ gilt:

a) $\Psi \in \mathsf{C}^2(P \times E_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

b) $\Psi^{1|0} = \mathsf{id}_{E_{\mathtt{ort}}}$.

c) Für alle $\xi \in P$ gilt $\Psi^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

$\rightarrow\!)$ $P, E, E_{\mathtt{zeit}}$ sind echte reelle Intervalle.

$\rightarrow\!)$ $P \subseteq E$.

$\rightarrow\!)$ $0 \neq E_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^s$.

$\rightarrow\!)$ $E_{\mathtt{zeit}} \times E_{\mathtt{ort}} \subseteq C$.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{C}^2(E \times \mathbb{R}^s : \mathbb{R}^s)$.

$\rightarrow\!)$ $A^{1|0} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^s}$.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in E$ ist $A^{1|\xi}$ linear.

$\rightarrow\!)$ Für alle $\xi \in P$ gilt $A^{1|\xi}[E_{\mathtt{ort}}] \subseteq E_{\mathtt{ort}}$.

Dann folgt "A ist $L, C \times \mathbb{R}^s, P, E_{\mathtt{zeit}}, E_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s$-Transformationsfamilie".

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

→) $P, E_{\texttt{zeit}}$ sind echte reelle Interwalle.

→) $0 \neq E_{\texttt{ort}}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^s$.

→) $E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \subseteq C$.

→) $u, w \in \mathbb{R}^s$.

→) Für alle $\phi \in P$ gilt $(\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}[E_{\texttt{ort}}] \subseteq E_{\texttt{ort}}$.

→) Für alle $(\phi, t, x) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}}$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$M_{ij}(t, (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})^{1|\phi}(x)) = M_{ij}(t, x).$$

→) Für alle $(\phi, t, x, v) \in P \times E_{\texttt{zeit}} \times E_{\texttt{ort}} \times \mathbb{R}^s$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_i^{1|\phi}(v) \cdot (\overset{s,u,w}{\mathsf{dreh}})_j^{1|\phi}(v) = \sum_{i,j=1}^{s} M_{ij}(t,x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

→) q löst `(ELG)`.

→) $\mathsf{dom}\, q \subseteq E_{\texttt{zeit}}$.

→) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt $q(t) \in E_{\texttt{ort}}$.

Dann folgt: …

...

...

a) $\mathtt{M}(u,w)^*q = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, also

$$(1:2)\cdot\langle\, q \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla_{\mathtt{x}}M_{ij})\circ(\mathtt{t},q)\mid w\,\rangle\cdot\dot q_i\cdot\dot q_j$$
$$-(1:2)\cdot\langle\, q \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}\langle\,(\nabla_{\mathtt{x}}M_{ij})\circ(\mathtt{t},q)\mid u\,\rangle\cdot\dot q_i\cdot\dot q_j$$
$$+\langle\,\dot q \mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ(\mathtt{t},q)\cdot w_i\cdot\dot q_j$$
$$-\langle\,\dot q \mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}\circ(\mathtt{t},q)\cdot u_i\cdot\dot q_j$$
$$= \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}.$$

b) $(\mathtt{I}(u,w)^*q)^\bullet = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,q}$, so dass für alle $t,\sigma\in\mathsf{dom}\,q$,

$$(\mathtt{I}(u,w)^*q)(t) = (\mathtt{I}(u,w)^*q)(\sigma),$$

also

$$\langle\, q(t)\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(t,q(t))\cdot w_i\cdot\dot q_j(t)$$
$$-\langle\, q(t)\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(t,q(t))\cdot u_i\cdot\dot q_j(t)$$
$$=\langle\, q(\sigma)\mid u\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(\sigma,q(\sigma))\cdot w_i\cdot\dot q_j(\sigma)$$
$$-\langle\, q(\sigma)\mid w\,\rangle\cdot\sum_{i,j=1}^{s}M_{ij}(\sigma,q(\sigma))\cdot u_i\cdot\dot q_j(\sigma),$$

Unter der Voraussetzung …

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Γ ist $L, C \times \mathbb{R}^s, O_{\mathtt{zeit}}, D_{\mathtt{ort}}, \mathbb{R}^s, m$-Koordinatenfunktion.

`ii)` $1 \leq m \in \mathbb{N}$ und
$0 \neq O_{\mathtt{zeit}}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und
$0 \neq D_{\mathtt{ort}}$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und
für $\Psi = (\Gamma \downharpoonleft D_{\mathtt{ort}})$ gilt:

`a)` $\Psi \in \mathsf{C}^2(D_{\mathtt{ort}} : \mathbb{R}^s)$.

`b)` $O_{\mathtt{zeit}} \times \Psi[D_{\mathtt{ort}}] \subseteq C$.

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x),\mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x)\cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x)\cdot v_i\right).$$

Dann folgt:

a) D Funktion.

b) $\mathsf{dom}\, D \subseteq \mathbb{R}^{1+s}$.

c) $E_v = \{(t,x,v) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \subseteq C \times \mathbb{R}^s$.

d) $E_p = \{(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) : v \in D(t,x)\} = C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+2s}$.

e) $G = (G \downharpoonleft E_p) \in \mathsf{C}^1(E_p : \mathbb{R}^s)$.

f) Für alle $(t,x,v) \in E_v$ gilt

$$G(t,x,\mathtt{P}(t,x,v)) = v.$$

g) Für alle $(t,x,p) \in E_p$ gilt

$$\mathtt{P}(t,x,G(t,x,p)) = p.$$

h) (D,G) ist $\mathtt{v},\mathtt{P}$-Inversions-Paar von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$

Es gelte:

→) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

→) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

→) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

→) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

→) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

Dann folgt:

$$\mathcal{H} : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{H}(t,x,p) = (1:2) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{s} M^{ij}(t,x) \cdot p_i \cdot p_j \right) + V,$$

ist (D,G)-Hamilton-Funktion von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{\cdot\cdot}(t,x), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i \right).$$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` äquivalent:

`i)` Q, P lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$.

`ii)` $\mathsf{dom}\, Q = \mathsf{dom}\, P$ echtes reelles Intervall und
$Q, P \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R}^s)$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$ gilt $(t, Q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}$ und
für alle $t \in \mathsf{dom}\, Q$, $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_\alpha(t) & = & \sum_{i=1}^{s} M^{\alpha i}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \\ \dot{P}_\alpha(t) & = & -(1:2) \cdot \sum_{i,j=1}^{s} (M^{ij})_{,\,\alpha}(t, Q(t)) \cdot P_i(t) \cdot P_j(t) \end{array}.$$

Es gelte:

$\rightarrow$) Standard L auf $C \times \mathbb{R}^s$ mit $M_{..}(t,x), V()$.

$\rightarrow$) M_{ij} auf $C_{\mathtt{inv}}$ invertierbar.

$\rightarrow$) $C_{\mathtt{inv}}$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{1+s}$.

$\rightarrow$) $D = \{((t,x), \mathbb{R}^s) : (t,x) \in C_{\mathtt{inv}}\}$.

$\rightarrow$) $G : C_{\mathtt{inv}} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$,

$$G(t,x,v) = \left(\sum_{i=1}^{s} M^{1i}(t,x) \cdot v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{s} M^{si}(t,x) \cdot v_i\right).$$

$\rightarrow$) q löst `(ELG)`.

$\rightarrow$) Für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ gilt

$$(t, q(t)) \in C_{\mathtt{inv}}.$$

Dann folgt "$q, \mathtt{P}^* q$ lösen (D,G)`(HJG)` von $(L, C \times \mathbb{R}^s)$".

Literatur.

H.Brauner, Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.
L.D.Landau & E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik, *Akademie-Verlag Berlin*, 1984(11).

- **C. Bandelow**, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **H.B. Mann & D.R. Whitney**, *On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947).
- **R. Mlitz**, *Analysis 1.2.3*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.