

Diskrečiosios matematikos žinių tikrinimo testų lygiagrečiųjų variantų lygiavertiškumo tyrimas

Aleksandras KRYLOVAS, Olga SUBOČ, Natalja KOSAREVA (VGTU)
 el. paštas: {akr,os}@fm.vtu.lt

1. Straipsnio autoriai daug metų taiko uždarojo tipo testus su išlygiagretintais klausimų variantais [1], t.y. klausimai turi kelis atsakymų variantus, pateikiami panašaus pobūdžio, tačiau skirtingi klausimai. Studentai gauna skirtingus klausimų rinkinius, todėl atsiranda galimybė egzaminuoti didelius srautus. Nors testų klausimai yra panašūs, jų lygiavertiškumas sunkumo prasme dar nebuvo tiriamas. Šiame darbe mes nagrinėjame du diskrečiosios matematikos testo klausimus, pateiktus 2006–2007 metų pavasario semestro tarpiniame egzamine 405 VGTU studentams.

2. Pirmasis klausimas reikalavo nustatyti, kuri iš dviejų pateiktų Bulio funkcijų sistemų yra pilnoji [2]. Teisingas yra tik vienas iš keturių galimų atsakymų: „pirma“, „antra“, „abi“, „nė viena“. Kiekvienas studentas gavo vieną iš 10 pateiktų 1 lentelėje klausimo variantų.

Skliaustuose nurodyta teisingai atsakiusių į klausimą studentų procentinė reikšmė. Kiekvienas iš šių 10 klausimų buvo pateiktas nuo 39 iki 43 kartų (skirtingiems studentams).

Pastebėsime, kad kai kurių sistemų pilnumas (pvz., $\{\Rightarrow, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\downarrow\}$) yra žinomas, kaip atskiras teorijos faktas ([2], 27 p.), o kitoms (pvz., $\{\oplus, 1, \vee\}$) reikia tikrinti Posto teoremos sąlygas, ir tai galėtų pareikalauti daugiau laiko. Pavyzdžiui, teisingai atsakyti į ⑩ klausimo variantą galėtų studentas, žinantis, kad Šeferio brūkšnelis ($\{\downarrow\}$) sudaro pilnąją Bulio funkcijų sistemą ir kad abi funkcijos \oplus ir \neg yra tiesinės. Taigi,

1 lentelė. Bulio funkcijų sistemos

①	$\{\oplus, 1, \vee\}; \{\Rightarrow, 1\}$	(33, 3%)	②	$\{\oplus, \vee\}; \{\oplus, 1, \&\}$	(25, 6%)
③	$\{\oplus, \Leftrightarrow, \vee\}; \{\vee, \neg\}$	(25, 0%)	④	$\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}; \{\oplus, \Leftrightarrow\}$	(39, 5%)
⑤	$\{\Rightarrow, \neg\}; \{\oplus, \Leftrightarrow\}$	(33, 3%)	⑥	$\{\vee, \&\}; \{\Rightarrow, 0\}$	(25, 0%)
⑦	$\{\vee, \neg\}; \{\oplus, 1, \vee\}$	(12, 5%)	⑧	$\{\Rightarrow, \&\}; \{\Rightarrow, 1\}$	(39, 5%)
⑨	$\{\downarrow\}; \{\Rightarrow, \vee\}$	(32, 5%)	⑩	$\{\oplus, \neg\}; \{\downarrow\}$	(30, 0%)

galima būtų padaryti išvada, kad pirmoji sistema nėra pilnoji, patikrinus tik vieną iš penkių Posto teoremos sąlygų. Tikėtina, kad šis variantas yra lengvesnis, pavyzdžiui, už ④, reikalaujanti patikrinti daugiau sąlygų. Tačiau statistinė analizė rodo, kad taip nėra. 2 lentelėje pateiktas teisingų ($IV20 = 1$) ir klaidingų ($IV20 = 0$) atsakymų pasiskirstymas grupėse pagal variantus.

Pastebėsime, kad šis klausimas yra sunkus, į jį teisingai atsakė tik 119 studentų iš 405 (29,4%). Panašus teisingų atsakymų skaičius būtų, bandant tiesiog atspėti atsakymą, tačiau dėl to, kad bendras testo pažymys yra mažinamas už padarytas klaidas ([3]), 197 studentai (48,6%) net nebandė atsakyti į šį klausimą. Praleistos reikšmės skaičiavimuose laikomos neteisingais atsakymais.

Tikriname hipotezę:

H_0 : Atsakymų į klausimą $KL20$ skirstiniai imtyse pagal variantus yra vienodi.

Alternatyvi hipotezė:

H_1 : Atsakymų į klausimą $KL20$ skirstiniai imtyse pagal variantus skiriasi.

Hipotezės tikrinimui naudosime Kruskalo-Voliso (Kruskal-Wallis) ranginį kriterijų nepriklausomoms imtims. Jei turime k imčių $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$, $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_3})$, ..., iš visų duomenų sudarome jungtinę variacinę eilutę, ranguojame duomenis ir skaičiuojame statistiką:

$$\chi = \frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3 \cdot (n+1),$$

čia k – imčių skaičius, n_j – stebėjimų skaičius j -oje imtyje, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, R_j^2 – j -osios imties rangų sumų kvadratas. Esant teisingai hipotezei H_0 , statistika χ asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal χ^2 skirstinį su $k - 1$ laisvės laipsniais. Skaičiavimų rezultatai pateikti 3 lentelėje.

Esant pasirinktam reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$, atsakymų į klausimą $KL20$ skirstiniai imtyse pagal variantus statistiškai nesiskiria, nes p - reikšmė yra didesnė už α ($p = 0,332$). Taigi, visi dešimt 1-je lentelėje pateikti išlygiagretinti klausimo variantai yra lygiaverčiai sunkumo prasme.

3. Kitame analizuotame klausime reikėjo nustatyti vienos iš 10 pateiktų 4 lentelėje propozicinių formulių gylį (žr [2], 11 p.).

Kiekvienas klausimas buvo pateiktas mažiausiai 39 ir daugiausiai 44 studentams. Skliaustuose nurodytos teisingų atsakymų procentinės reikšmės. Iš viso į šį klausimą

2 lentelė. Kryžminių dažnių lentelė pagal klausimo $KL20$ variantus

Count	$KL20$										Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$IV20 = 0$	28	29	30	26	28	30	35	25	27	28	286
$IV20 = 1$	14	10	10	17	14	10	5	14	13	12	119
Total	42	39	40	43	42	40	40	39	40	40	405

teisingai atsakė 252 (62, 2%) studentai, bandė atsakyti 359 (88, 6%) studentai. Teisingas atsakymas iš pateiktų šešių („nulis“, „vienas“, „du“, „trys“, „keturi“, „penki“) galėjo būti tik „du“ arba „trys“.

3 lentelė. Kruskalo–Voliso kriterijaus rezultatai^a

IV20	
Chi-Square	10,233
df	9
Asymp. Sig.	0,332

^a Grouping Variable: KL20

4 lentelė. Propozicinės formulės

① $\neg u (v \downarrow \neg w)$ (77, 5%)	② $\neg h \& (x \vee r)$ (64, 1%)
③ $(r \oplus p) \Rightarrow \neg w$ (42, 5%)	④ $(\neg r z) \downarrow \neg h$ (64, 3%)
⑤ $\neg y \vee (s \neg h)$ (78, 0%)	⑥ $\neg q \oplus (u h)$ (51, 3%)
⑦ $(x \Leftrightarrow r) \oplus \neg y$ (50, 0%)	⑧ $(\neg r \Rightarrow w) \& \neg t$ (82, 1%)
⑨ $\neg z \& (w \oplus \neg t)$ (61, 5%)	⑩ $\neg w \oplus (z x)$ (52, 4%)

5 lentelė. Kryžminių dažnių lentelė pagal klausimo KL3 variantus

Count	KL3										Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
IV3 0	9	14	23	15	9	19	22	7	15	20	153
1	31	25	17	27	32	20	22	32	24	22	252
Total	40	39	40	42	41	39	44	39	39	42	405

6 lentelė. Kruskalo–Voliso kriterijaus rezultatai^a

IV3	
Chi-Square	28,069
df	9
Asymp. Sig.	,001

^a Grouping Variable: KL3

Statistinė analizė parodė, kad 5 lentelėje pateiktų atsakymų į klausimą *KL3* skirstiniai pagal 10 variantų reikšmingai skiriasi, p -reikšmė ($p = 0,001$) yra mažesnė už reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$.

Pastebėjome, kad teisingą atsakymą „trys“ turi ①, ④, ⑤, ⑧ ir ⑨ formulės. Šį atsakymą teisingai nurodė 146 studentai ir šis skaičius yra didesnis už nurodžiusių teisingą atsakymą „du“ (106 studentai).

7 lentelė yra kryžminių dažnių lentelė: Variantas 2 (teisingas atsakymas „du“) – į klausimą *KL3* 98 atsakė klaidingai ir 106 atsakė teisingai. Variantas 3 (teisingas atsakymas „trys“) – į klausimą *KL3* 55 atsakė klaidingai ir 146 atsakė teisingai.

Tikriname hipotezę: Atsakymų į klausimą *KL3* skirstiniai dvejose imtyse pagal variantus 2 ir 3 yra vienodi.

Alternatyvi hipotezė: Atsakymų į klausimą *KL3* skirstiniai dvejose imtyse pagal variantus 2 ir 3 skiriasi.

Hipotezę tikrinome Mano–Vitnio–Vilkoksono kriterijumi nepriklausomoms imtims. Lyginome atsakymų į klausimą *KL3* skirstinius dvejose imtyse pagal variantus 2 ir 3.

Šio kriterijaus p -reikšmė (Asymp. Sig.) lygi 0. Tai reiškia, kad, pasirinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,01$, nagrinėjamų skirstinių skirtumus dvejose grupėse pagal variantus 2 ir 3 reiktų pripažinti statistiškai reikšmingais.

Šį faktą galima paaiškinti padarius prielaidą, kad dalis studentų mano, kad formulės gylis lygus kintamųjų (raidžių arba simbolių) skaičiui. Šiai prielaidai tikrinti ateityje bus sudaromi nauji testo klausimai. Bet koku atveju reiktų vengti tokių uždarojo tipo testo klausimų, kai neteisingi samprotavimai veda prie teisingo atsakymo (žr. [4]). Taigi, mes siūlome kiekvienai formulei tikrinti 9 lentelėje pateiktus parametrus (dešiniajame stulpelyje pateikti ① varianto parametrai).

7 lentelė. Kryžminių dažnių lentelė pagal klausimo *KL3* galimų atsakymų variantus

Count	<i>KL3</i>		Total
	0	1	
VARIANT 2	98	106	204
3	55	146	201
Total	153	252	405

8 lentelė. Mano–Vitnio–Vilkoksono kriterijaus rezultatai^a

	<i>KL3</i>
Mann–Whitney U	16263,000
Wilcoxon W	37173,000
Z	– 4,286
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

^aGrouping Variable: VARIANT

9 lentelė. Klausimo analizė

Kintamųjų įeičių skaičius	3
Kintamųjų simbolių skaičius	3
Operacijų įeičių skaičius	4
Operacijų simbolių skaičius	3
Atidarančių skliaustų skaičius	1
Uždarančių skliaustų skaičius	1
Visų skliaustų skaičius	2
Visų simbolių skaičius	9
Formulės gylis	3

Taigi, rekomenduotina vengti paskutinės eilutės reikšmės sutapimo su bet kurios kitos eilutės reikšme. Todėl formulės ①, ④, ⑤, ⑧, ⑨ turėtų būti pakeistos, o kitas formules reikėtų papildyti skliaustais. Pavyzdžiui, ② formulę perrašome taip:

$$((\neg h) \& (x \vee r)).$$

Išvados

Išlygiagretinti testų variantai turi būti lygiaverčiai sunkumo prasme. Pasiūlyta kai kurių diskrečiosios matematikos testų klausimų lygiagrečių variantų lygiavertiškumo patikrinimo metodika.

Literatūra

1. A. Krylovas, J. Raulynaitis, Vieno tikimybių teorijos uždavinio išlygiagretinimo patirtis, *Liet. matem. rink.*, **43** (spec.nr.), 357–460 (2003).
2. A. Krylovas, *Diskrečioji matematika*, Paskaitų konspektas, Vilnius (2004).
3. A. Krylovas, O. Suboč, Diskrečiosios matematikos dėstymas VGTU Elektronikos fakulteto pirmakursiams, *Liet. matem. rink.*, **45** (spec.nr.), 266–269 (2005).
4. N.L. Gade, D.C. Berliner, *Pedagoginė psichologija*, Alma Littera, Vilnius (1994).

SUMMARY

A. Krylovas, O. Suboč, N. Kosareva. Analysis of equivalence of parallel variants in discrete mathematics tests

Different students were given questions in 10 variants. It was tested if all parallel variants of test questions were equivalently difficult.

Keywords: discrete mathematics, tests, statistical analysis.