

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



В.А. Рябчій

В.В. Рябчій

Ю.Є. Трезуб

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПОТВОРЕНЬ

Навчальний посібник

Видання друге доповнене й виправлене

Дніпропетровськ
НГУ
2015

УДК 528.9 (075.8)

ББК 26.1 я73

Р 98

Рекомендовано редакційною радою ДВНЗ «Національний гірничий університет» як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 7 від 28.05.2015).

Рецензенти:

В.В. Артамонов, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри геодезії, землевпорядкування та кадастру Кременчуцького національного університету;

І.В. Калинич, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри землевпорядкування та кадастру Ужгородського національного університету;

М.В. Трегуб, канд. техн. наук, в. о. завідувача кафедри геодезії Державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет».

Рябчій В.А.

Р 98 Основи теорії спотворень : навч. посіб. 2-ге вид. доп. і виправл. / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій, Ю.Є. Трегуб; М-во освіти і науки, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2015. – 110 с.

ISBN 978-966-350-550-3

У цьому виданні викладено основні положення теорії спотворень, що виникають під час відображення поверхні еліпсоїда і поверхні кулі на площині, а також поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Висвітлено загальні відомості про геоцентричні координати й різні загальноземні еліпсоїди та системи координат у світі. Наведено завдання і приклади виконання лабораторних робіт для студентів. Наприкінці кожного розділу подано контрольні питання для самостійної перевірки засвоєного матеріалу, а в кінці навчального посібника – тести і критерії оцінювання знань студентів.

Посібник адресовано студентам, аспірантам, спеціалістам і викладачам, які займаються дослідженнями математичної основи карт і картографічних проекцій.

УДК 528.9 (075.8)

ББК 26.1 я73

ISBN 978-966-350-550-3

© В.А. Рябчій, В.В. Рябчій,

Ю.Є. Трегуб, 2015

© ДВНЗ «Національний гірничий університет», 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
ВСТУП	6
1. ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПЛОЩИНІ	9
1.1. Основні положення	9
1.2. Геометричні елементи земного еліпсоїда	10
1.3. Державна геодезична референцна система координат УСК-2000	13
1.4. Математична основа карт	17
1.5. Окремі масштаби довжин і площ. Спотворення кутів і форм	19
1.6. Масштаб довжин	22
1.7. Відображення азимутів і кутів на площині	25
1.8. Кут між відображенням меридіанів і паралелей	27
1.9. Дослідження масштабу довжин	28
1.10. Еліпс спотворень. Положення Аполлонія	30
1.11. Масштаб площі	33
1.12. Максимальне спотворення кутів	34
1.13. Рівнокутне, рівновелике і довільне відображення поверхні еліпсоїда на площині	36
1.14. Завдання та методичні пояснення до виконання лабораторної роботи № 1	37
1.15. Приклад виконання лабораторної роботи № 1	42
1.16. Контрольні питання	45
2. ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ КУЛІ НА ПЛОЩИНІ	48
2.1. Геометричні елементи земної кулі	48
2.2. Відображення поверхні кулі на площині	49
2.3. Геоцентричні координати	51
2.3.1. Геоцентричні координати земного еліпсоїда	52
2.3.2. Геоцентричні координати земної кулі	53
2.4. Полярні сферичні координати	54
2.5. Контрольні питання	56

3. ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПОВЕРХНІ КУЛІ	59
3.1. Основні положення	59
3.2. Рівнокутне відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	61
3.3. Приклади розрахунків показників рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	64
3.4. Рівновелике відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	69
3.5. Приклади розрахунків показників рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	72
3.6. Рівнопроміжне по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	74
3.7. Приклади розрахунків показників рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	76
3.8. Рівнопроміжне по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	78
3.9. Приклади розрахунків показників рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі	80
3.10. Завдання та методичні пояснення до виконання лабораторної роботи № 2	83
3.11. Приклад виконання лабораторної роботи № 2	87
3.12. Контрольні питання	94
3.13. Тести для самостійної перевірки рівня знань студентів	98
ЛІТЕРАТУРА	103
Додаток А. Вихідні дані до розрахунків лабораторної роботи № 1	104
Додаток Б. Табличні значення елементів земного еліпсоїда для розрахунків лабораторної роботи № 1	109

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів Державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет» усіх форм підготовки напряму 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій», які вивчають дисципліну «Картографія». Посібник висвітлює найголовніші теоретичні і практичні питання, що відносяться до розділу «Теорія спотворень».

Навчальний посібник складається з трьох розділів. У першому розділі розглянуті питання відображення поверхні земного еліпсоїда на площині й основні випадки спотворень довжин, площ, кутів і форм, а також приклади виконання розрахунків під час визначення елементів спотворень на дрібномасштабних картах та при побудові еліпса спотворень.

У другому розділі висвітлені питання відображення поверхні земної кулі на площині та наведені загальні відомості про геоцентричні координати і системи координат.

У третьому розділі розкрито питання відображення поверхні земного еліпсоїда на поверхні кулі, а також приклади основних розрахунків при рівнокутному, рівновеликому, рівнопроміжному по меридіанах і рівнопроміжному по паралелях відображеннях поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

Наприкінці кожного розділу наведені контрольні питання для самостійної перевірки засвоєного матеріалу студентом, а в кінці навчального посібника – тести і критерії оцінювання знань студентів. Для більш глибокого і широкого вивчення даного матеріалу рекомендується використовувати літературу, зазначену наприкінці навчального посібника.

Авторський колектив сподівається, що пропонований навчальний посібник допоможе студентам глибше осмислити основні теоретичні питання й успішно виконувати практичні завдання.

Автори виражають щиру вдячність колегам за рецензування книги та цінні поради щодо її поліпшення.

ВСТУП

Спочатку наведемо узагальнююче поняття про картографію і деякі особливості цієї дисципліни. **Картографія** – наука про карту як особливий спосіб відображення дійсності, її створення і використання або галузь науки техніки та виробництва, що охоплює вивчення, створення і використання картографічних творів. Під картографічними творами розуміють твір у галузі відображення об'єктів природи і суспільства у певній картографічній проекції із застосуванням картографічних умовних знаків (креслення, карта, атлас, ескіз, макет тощо). Предметом картографії є відображення і дослідження об'єктів природи і суспільства, їх розміщення, властивостей, взаємозв'язків і змін у часі і просторі за допомогою карт та інших картографічних творів.

Структура картографії (система наукових і технічних дисциплін) може бути представлена таким чином:

- **загальна теорія картографії** – вивчає загальні проблеми, предмет і метод картографії як науки, питання методології створення і використання карт. Основні розробки з теорії картографії виконуються в межах картознавства – загального вчення про картографічні твори;

- **математична картографія (картознавство)** – дисципліна, що вивчає математичну основу карт і розробляє теорію картографічних проекцій, методи побудови картографічних сіток, аналіз і розподіл спотворень у них;

- **цифрова картографія** – науково-технічна дисципліна, що охоплює теорію та практику створення різноманітних видів цифрових карт і моделей місцевості, автоматизацію картографічних і фотограмметричних робіт;

- **картометрія** – дисципліна про вимірювання й обчислення по картах координат, відстаней, довжин, висот, площ та інших топографічних характеристик, тобто усіх кількісних показників;

- **морфометрія** – дисципліна, що досліджує кількісні показники форми і структури відображених на картах об'єктів – загальний характер їх обрисів, витягнутість, звивистість, кривизну, розчленування тощо;

- **історія картографії** – вивчає історію ідей, подань, методів картографії, розвиток картографічного виробництва, а також старого картографічного добутку;

- **проекування і складання карт** – вивчає та розробляє методи і технології лабораторного (камерального) виготовлення й редагування карт. У свою чергу, підрозділяється на кілька великих розділів, присвячених загальним питанням, проектуванню й складанню карт

загальногеографічних, природи, соціально-економічних, екологічних тощо;

- **оформлення карт (картографічний дизайн)** – вивчає теорію й методи художнього проектування картографічних творів, їх штрихового й кольорового оформлення, у тому числі засобами комп'ютерної графіки;

- **видання карт** – технічна дисципліна, що розробляє технологію карт, атласів та іншої картографічної продукції;

- **використання карт** – розробляє теорію й методи застосування картографічних творів (карт, атласів, глобусів та ін.) у різних сферах практичної, наукової, культурної, освітньої діяльності. Основу цієї дисципліни становить картографічний метод дослідження – метод використання карт для пізнання відображених на них явищ;

- **картографічне джерелознавство** – вивчає та розробляє методи оцінки і систематизації картографічних джерел (карт, знімків, статистичних даних та інших документів), використаних для складання карт;

- **картографічна інформатика** – вивчає та розробляє методи збору, зберігання й надання споживачам інформації про картографічні твори й їх джерела. Розділ, що займається систематизацією виданих карт і атласів, складанням покажчиків, списків, оглядів, називається картобібліографією;

- **картографічна топоніміка** – вивчає географічні назви, їх смислове значення з погляду правильної передачі на картах. До завдань цієї дисципліни входить нормалізація й стандартизація назв і термінів, які наносяться на карти;

- **картографічна семіотика** – розробляє мову карти, теорію й методи побудови систем картографічних знаків, правила їх використання. У рамках картографічної семіотики виділяють три розділи: **картографічну синтактику, семантику й прагматику**, що вивчають співвідношення знаків між собою, їх зв'язок із відображуваними об'єктами, особливості сприйняття читачами, інформаційну цінність знаків тощо;

- **економіка й організація картографічного виробництва** – розділ на стику картографії й економіки, у межах якого вивчаються проблеми оптимальної організації й планування виробництва, використання картографічного устаткування, матеріалів, трудових ресурсів, підвищення продуктивності праці й економічної ефективності тощо.

Оскільки питання, які вивчаються в цьому навчальному посібнику, відносяться до математичної картографії, то розглянемо основні завдання математичної картографії:

- вивчення картографічних проєкцій, їх властивостей і взаємозв'язків, а також їх оптимальне застосування;

- удосконалення наявних картографічних проекцій і розробка нових;
- удосконалення методів дослідження нових картографічних проекцій;
- розроблення нових математичних елементів карт;
- вивчення способів і засобів різних вимірювань по картах з урахуванням властивостей картографічних проекцій;
- вивчення і розв'язання задач математичного характеру, що виникають при складанні карт;
- вивчення способів застосування картографічних проекцій у геодезії;
- розроблення теорії і методів автоматизації в математичній картографії.

1. ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПЛОЩИНІ

1.1. Основні положення

Оскільки поверхню еліпсоїда неможливо розгорнути на площині без розривів або складок, то відображення на площині виходить спотвореним. У картографії існують чотири види спотворень.

Спотворення довжин на карті (площині) виражаються в тому, що масштаб довжин на ній змінюється при переході від однієї точки до іншої, а також при зміні напрямку в даній точці.

Спотворення площ на карті виражаються в тому, що масштаб площі в різних точках карти різний і порушуються співвідношення площ різних географічних об'єктів.

Спотворення кутів на карті виражаються в тому, що кути між напрямками на карті не дорівнюють відповідним кутам на місцевості.

Спотворення форм на карті виражаються в тому, що фігури об'єктів на карті не подібні фігурам відповідних географічних об'єктів на місцевості.

Під час відображення поверхні еліпсоїда на площині задають три **умови безперервності картографічного відображення**:

1. При елементарній (нескінченно малій) зміні координат φ і λ точок поверхні земного еліпсоїда повинні відповідно мінятися на елементарні величини і прямокутні координати x і y точок площини (рис. 1.1).

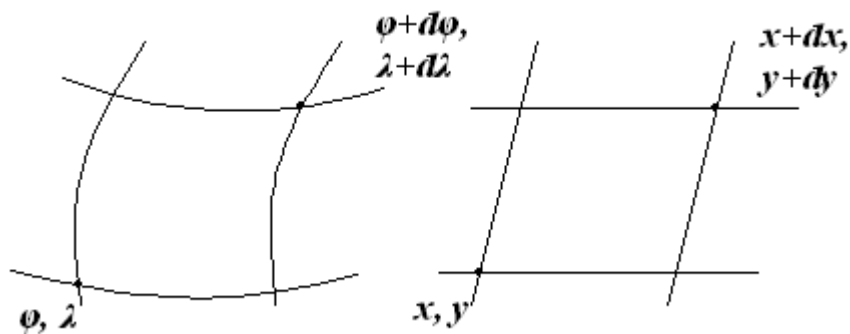


Рис. 1.1. Елементарна ділянка на поверхні еліпсоїда і на площині

2. Елементарний лінійний відрізок на поверхні еліпсоїда повинен бути відображений на площині також елементарним і лінійним (рис. 1.2).

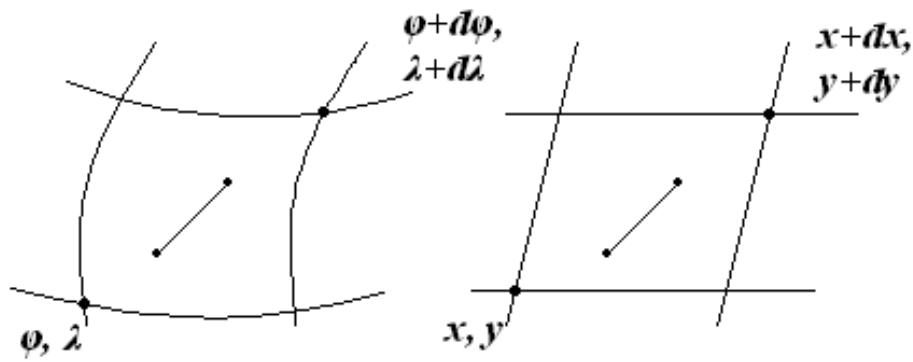


Рис. 1.2. Елементарний відрізок на поверхні еліпсоїда і на площині

3. Два лінійних і паралельних відрізки, взятих у межах елементарної ділянки на поверхні еліпсоїда, на площині повинні бути елементарними і паралельними відрізками (рис. 1.3).

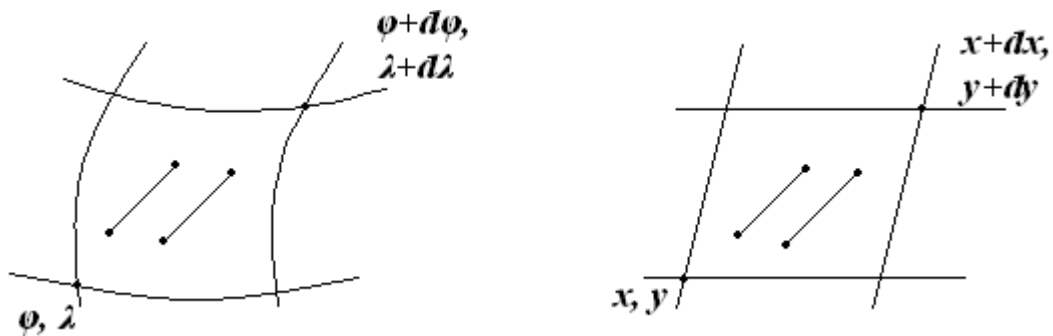


Рис. 1.3. Два паралельних елементарних відрізки на поверхні еліпсоїда і на площині

1.2. Геометричні елементи земного еліпсоїда

Земний еліпсоїд за формою дуже подібний до фігури геоїда і утворюється під час обертання еліпса з невеликим стисненням (рис. 1.4 – для наочності стиснення збільшено) навколо малої осі (рис. 1.5).

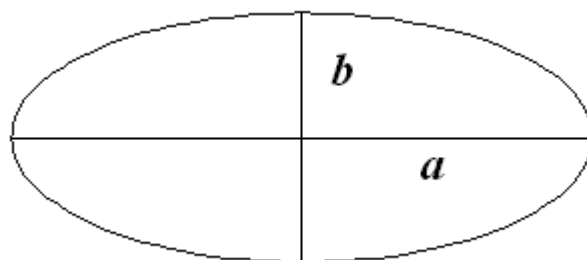


Рис. 1.4. Еліпс з невеликим стисненням

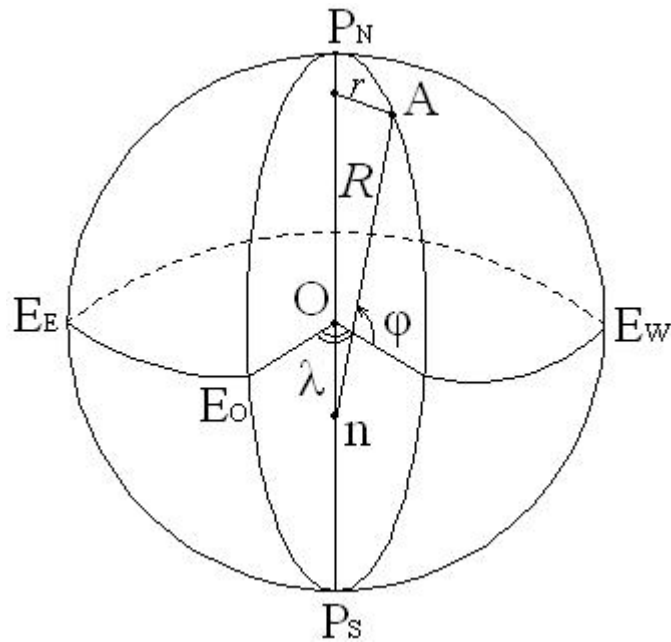


Рис. 1.5. Земний еліпсоїд

Як видно з рис. 1.4 і 1.5, можна виділити такі *геометричні елементи* земного еліпсоїда:

- велика піввісь (a);
- мала піввісь (b);
- полярна вісь ($P_N P_S$);
- екваторіальна вісь ($E_W E_E$);
- нормаль An – перпендикуляр до поверхні еліпсоїда в точці A ;
- меридіан – переріз площини, що проходить через полярну вісь і поверхні еліпсоїда. Він має вигляд еліпса;
 - паралель – переріз площини, що перпендикулярна до полярної осі (паралельна екваторіальній площині) і поверхні еліпсоїда. Вона має форму кола;
- північний і південний полюси (P_N і P_S) – паралелі з нульовим радіусом кривизни;
- екватор ($E_W E_O E_A E_E$) – найбільша паралель або паралель із найбільшим радіусом кривизни, який дорівнює великій півосі a ;
- сфероїдна широта (φ) – кут у площині меридіана точки A від екватора до нормалі в точці A . Існує дві земні півкулі, які поділяються екватором на північну і південну, в яких сфероїдна широта набуває значень від 0 на екваторі до 90° на полюсах;
- сфероїдна довгота (λ) – двогранний кут між площинами Гринвіцького меридіана і меридіана в точці A . Існує дві земні півкулі, які поділяються Гринвіцьким меридіаном на східну і західну, в яких

сфероїдна довгота набуває значень від 0 на Гринвіцькому меридіані до 180° на лінії зміни дат.

Сфероїдні координати φ і λ дозволяють визначити положення тільки нормалі або точки на поверхні земного еліпсоїда.

Розміри еліпсоїда цілком визначаються величинами півосей a і b , але на практиці також застосовують й інші параметри.

1. Полярне стиснення α

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \text{ – перший,}$$

$$\alpha' = \frac{a-b}{b} \text{ – другий.}$$
(1.1)

2. Ексцентриситет e

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ – перший,}$$

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \text{ – другий.}$$
(1.2)

З формул (1.1) і (1.2) випливає, що

$$b = a(1 - \alpha),$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2).$$
(1.3)

Або приблизно

$$\alpha \approx \frac{e^2}{2}.$$
(1.4)

3. Кривизна поверхні еліпсоїда характеризується **головними радіусами кривизни**. Якщо в довільно обраній точці на поверхні еліпсоїда відновити до неї нормаль і через останню провести безліч площин, то кожна площина перетне поверхню по кривій лінії, що називається нормальним перерізом. З них два взаємно перпендикулярних перерізи будуть головними, один із них буде мати найбільшу кривизну, а другий – найменшу. Одним із головних перерізів є **меридіан**, другим буде переріз, перпендикулярний до меридіана. Його називають **нормальним перерізом першого вертикала**.

У картографії обчислюють такі **радіуси кривизни**:

- **меридіана M**

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3};$$
(1.5)

- **першого вертикала N**

$$N = \frac{a}{W};$$
(1.6)

- *паралелі r*

$$r = N \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{W}; \quad (1.7)$$

- *середній R*

$$R = \sqrt{MN} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{W^3} \frac{a}{W}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}, \quad (1.8)$$

тут $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ – допоміжна функція широти.

1.3. Державна геодезична референцна система координат УСК-2000

З 1 січня 2007 р. на території України введено в дію нову систему координат УСК 2000 (табл. 1.1).

Єдина система геодезичних координат 1942 року була введена постановою Ради Міністрів СРСР від 07.04.1946 № 760.

У 70-х роках із упровадженням супутникових та комп'ютерних технологій геодезія стала наукою планетарного масштабу. Національні геодезичні системи відліку перестали задовольняти потреби науки і практики. Замість них розвитку набули загальноземні системи відліку та геодезичні референцні системи координат, утворені на їх основі.

Застосування сучасних супутникових технологій у практиці геодезичного та картографічного забезпечення доводить, що ефективно використання глобальних навігаційних супутникових систем типу GPS і ГЛОНАСС у чинній системі координат 1942 р. в багатьох випадках неможливе. Це пояснюється такими причинами:

- система координат 1942 р. не забезпечує на необхідному рівні точності однозначного переходу до геоцентричної системи координат, у якій функціонують глобальні супутникові навігаційні системи GPS і ГЛОНАСС. Середня квадратична похибка переходу із системи координат 1942 р. до геоцентричної становить близько 4 – 5 м;

- відсутність однозначних параметрів зв'язку з іншими референцними системами, що мають поширення у світі, в тому числі й для забезпечення загальнодержавного картографування;

- похибки взаємного положення пунктів Державної геодезичної мережі в системі координат 1942 р. на відстанях 50 – 100 км можуть сягати 1 м і більше, що не дозволяє в багатьох випадках із необхідною точністю виконувати геодезичну прив'язку до пунктів Державної геодезичної мережі чи інших спеціальних мереж, які будуються з використанням супутникових приймачів Global Positioning System (GPS, США), Глобальна навігаційна супутникова система (ГЛОНАСС, Росія) та Galileo (Європейський союз);

Таблиця 1.1

Значення елементів земних референц-еліпсоїдів

Референц-еліпсоїд	Півосі		Стиснення, α	Країни, де використовується референц- еліпсоїд
	велика a , (м)	мала b , (м)		
Красовського (1940)	6378245	6356863	1:298,3	Країни СНД та Східної Європи, Антарктида
Бесселя (1841)	6377397,2	6356079	1:299,15	Європа й Азія
Хайфорда (1909)	6378388	6356912	1:297,0	Європа, Азія, Південна Америка, Антарктида
Кларка I (1866)	6378206	6356584	1:294,98	Північна і Центральна Америка
Кларка II (1880)	6378249	6356515	1:293,46	Африка, Барбадос, Ізраїль, Йорданія, Іран, Ямайка
Ейрі (1880)	6377491	6356185	1:299,3	Великобританія
Ейрі (№ 1)	6377563,4	6356257	1:298,32	Великобританія
Ейрі (№ 2)	6377340,2	6356034	1:298,32	Ірландія
Евересту (1830)	6377276,3	6356075	1:300,8	Індія, Пакистан, Непал, Шрі- Ланка
Евересту (1956)	6377301,24	6356100	1:300,8	Індія, Непал
Австралійський (1965)	6378160	6356775	1:298,25	Австралія, Папуа-Нова Гвінея
GRS (1980)	6378137	6356752	1:298,26	Аляска, Центральна Америка, Мексика, США, Канада
Міжнародний	6378388	6356912	1:297	
Південноамериканський (1969)	6378160	6356775	1:298,25	Південна Америка
WGS-72	6378135	6356750	1:298,26	
WGS-84	6378137	6356752	1:298,257	
ПЗ-90	6378136	6356751	1:298,258	Росія

- деформація Державної геодезичної мережі в системі координат 1942 р. у межах зон використання місцевих систем координат у багатьох випадках не забезпечує, з необхідною точністю, визначення параметрів переходу до місцевих систем координат.

Удосконалення та розвиток Державної геодезичної мережі України, формування та використання геодезичних ресурсів, створення нової системи координат віднесено до ключових завдань Концепції державної цільової науково-технічної програми розвитку топографо-геодезичної діяльності та національного картографування на 2011-2015 роки, затвердженої розпорядженням Кабінету Міністрів України від 29.12.2010 № 2354-р. Зокрема у програмі визначені такі основні завдання:

- удосконалення нормативно-технічного та організаційного забезпечення геоінформаційної діяльності;
- забезпечення розвитку національної геодезичної системи відліку, пов'язаної з європейськими та світовими системами координат;
- створення геоінформаційних ресурсів і систем;
- забезпечення топографічного картографування території та удосконалення національної системи картографування;
- забезпечення тематичного і спеціального картографування;
- забезпечення розвитку фундаментальних досліджень і прикладних наукових розробок;
- забезпечення міжнародного співробітництва у сфері топографо-геодезичної та картографічної діяльності.

Державна геодезична референсна система координат УСК-2000 встановлена для виконання топографо-геодезичних та картографічних робіт на території України. Вона одержана в результаті спільного вирівнювання пунктів Української перманентної мережі спостережень Глобальних навігаційних супутникових систем та Державної геодезичної мережі 1-4 класів на епоху 2005 року. Система координат 2000 року закріплена пунктами Державної геодезичної мережі. Вона введена в дію постановою Кабінету Міністрів України «Деякі питання застосування геодезичної системи координат» від 22.09.2004 № 1259.

У даний час на території України, як і на всій території колишнього Радянського Союзу, використовується еліпсоїд Красовського (1946). Основні параметри цього еліпсоїда такі:

$$a = 6378245 \text{ м};$$

$$b = 6356863 \text{ м};$$

$$\alpha = 1:298,3;$$

$$e^2 \approx 0,0066934275 \text{ (} e \approx 0,08181337 \text{)}.$$

Система координат УСК-2000 встановлена під умовою паралельності її осей просторовим осям Міжнародної загальноземної референсної

системи координат (ITRS). За поверхню відліку в системі координат УСК-2000 прийнятий референц-еліпсоїд Красовського.

Система координат УСК-2000 року чітко узгоджена з Міжнародною загальноземною референцною системою координат (ITRS) на епоху 2000 року – ITRF2000, що закріплена пунктами космічної геодезичної мережі.

УСК-2000 змодельована відповідно системи ITRS/ITRF2000 за умовами:

- масштаб референцної системи дорівнює масштабу системи ITRS/ITRF2000;
- осі координат референцної системи паралельні осям координат системи ITRS/ITRF2000;
- розміщення центру референцної системи координат (суміщене з центром референц-еліпсоїда) забезпечує оптимальне відхилення поверхні референц-еліпсоїда від реальної поверхні Землі на регіон України, тобто мінімізація поправок за висоти геоїда та відхилення прямовисних ліній.

За поверхню відліку в системі координат УСК-2000 взято референц-еліпсоїд Красовського з такими параметрами:

- велика піввісь 6 378 245 м;
- полярне стиснення 1:298,3.

Положення пунктів у прийнятій системі координат визначається такими координатами:

- просторовими прямокутними координатами X , Y , Z (вісь Z збігається з віссю обертання еліпсоїда, вісь X лежить у площині нульового меридіана, а вісь Y доповнює систему до правої. Початком системи координат є геометричний центр еліпсоїда);
- геодезичними (еліпсоїдальними) координатами: широтою – B , довготою – L , висотою – H ;
- плоскими прямокутними координатами x та y , які обчислюються в проекції Гаусса – Крюгера.

Геодезична висота H утворюється як сума нормальної висоти та висоти квазігеоїда над еліпсоїдом Красовського. Нормальні висоти геодезичних пунктів визначаються в Балтійській системі висот 1977 року, вихідним початком якої є нуль Кронштадтського футштока, а висоти квазігеоїда обчислюються над еліпсоїдом Красовського.

Загальноземний еліпсоїд – це еліпсоїд, який найкраще узгоджується з поверхнею геоїда в цілому. Він повинен бути орієнтований у тілі Землі відповідно до таких вимог:

- мала піввісь повинна збігатись з віссю обертання Землі;
- центр еліпсоїда повинен збігатись з центром мас Землі;
- висоти геоїда над еліпсоїдом (так звані аномалії висот) повинні задовольняти умову найменших квадратів.

Параметри загальноземного еліпсоїда WGS-84 такі:

$$a = 6378137 \text{ м};$$

$$b = 6356752,314 \text{ м};$$

$$\alpha = 0,0033528106;$$

$$e^2 \approx 0,0066943799 \text{ (} e \approx 0,08181337 \text{)}.$$

Сучасними загальноземними еліпсоїдами є:

- GRS80 (Geodetic Reference System, 1980) розроблений Міжнародною асоціацією геодезії та геофізики (International Union of Geodesy and Geophysics) і рекомендований для геодезичних робіт;
- WGS84 (World Geodetic System, 1984) застосовується в системі супутникової навігації GPS;
- ПЗ-90 (Параметри Землі 1990 року) використовується на території Росії для геодезичного забезпечення орбітальних польотів. Цей еліпсоїд застосовується в системі супутникової навігації ГЛОНАСС;
- IERS96 (International Earth Rotation Service, 1996) рекомендований Міжнародною службою обертання Землі для обробки РНДБ-спостережень.

Таблиця 1.2

Параметри сучасних загальноземних еліпсоїдів

Назва	Рік	Держава / організація	a , км	Точність m_a , м	$1/f$	Точність m_f
GRS 80	1980	МАГПІ (IUGG)	6378,137	2	298,257222101	0,001
WGS84	1984	США	6378,137	2	298,25722356	0,001
ПЗ-90	1990	СРСР	6378,136	1	298,257839303	0,001
IERS96	1996	МСВЗ (IERS)	6378,13649	-	298,25645	-

1.4. Математична основа карт

Математична основа карт складається із сукупності математичних елементів карти, що визначають математичний зв'язок між картою і відображеною поверхнею, а саме:

- масштаб;
- картографічна проекція;
- координатна сітка;
- номенклатура;
- система розграфлення.

Масштаб карти – це загальний ступінь зменшення горизонтальних прокладень ліній місцевості під час їх відображення на карті.

Картографічна проекція – це математично визначене відображення поверхні еліпсоїда або кулі на площині. **Рівняннями картографічної проекції** називаються два рівняння, що визначають взаємозв'язок між плоскими прямокутними координатами точок на карті (x і y) і сфероїдними координатами цих же точок на поверхні еліпсоїда (φ і λ). Загальні рівняння картографічної проекції мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda), \\ y &= f_2(\varphi, \lambda). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Властивості проекції будуть залежать від властивостей і характеру функцій f_1 і f_2 . Виключивши з рівнянь (1.9) широту φ , одержимо рівняння меридіанів, тобто

$$F_1(x, y, \lambda) = 0, \quad (1.10)$$

а якщо довготу λ , то – рівняння паралелі:

$$F_2(x, y, \varphi) = 0. \quad (1.11)$$

Існують картографічна, прямокутна, кілометрова та інші **координатні сітки**. Відображення ліній меридіанів і паралелей на площині проекції називається **картографічною сіткою**. Кожній проекції відповідає визначена картографічна сітка.

Якщо $x = f_1(\varphi)$ і $y = f_2(\lambda)$, то паралелі й меридіани відображуються прямими лініями (рис. 1.6, а).

Якщо $x = f_1(\varphi)$ і $y = f_2(\varphi, \lambda)$, то паралелі відображуються прямими лініями, а меридіани – кривими (рис. 1.6, б).

Якщо $x = f_1(\varphi, \lambda)$ і $y = f_2(\lambda)$, то паралелі відображуються кривими лініями, а меридіани – прямими (рис. 1.6, в).

Якщо $x = f_1(\varphi, \lambda)$ і $y = f_2(\varphi, \lambda)$, то паралелі й меридіани відображуються кривими лініями (рис. 1.6, г).

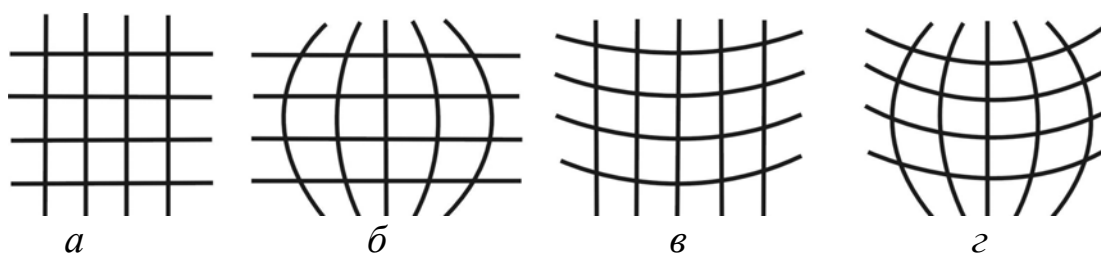


Рис. 1.6. Види картографічних сіток

Прямокутна сітка – це координатна сітка в системі плоских прямокутних координат даної картографічної проекції. **Кілометрова квадратна сітка** – це прямокутна координатна сітка, лінії якої проведені на карті через інтервали, що відповідають визначеному числу кілометрів.

Номенклатурою називається система позначення (нумерації) окремих аркушів топографічних карт різних масштабів. Система їх

взаємного розташування встановлюється прийнятою *системою розграфлення*.

1.5. Окремі масштаби довжин і площ. Спотворення кутів і форм

Кожна карта має *головний масштаб* μ_0 , який показує загальний ступінь зменшення всієї картографованої поверхні або її частини під час відображення на площині. Але він зберігається тільки в окремих точках або на деяких лініях карти. Оскільки головний масштаб не впливає на властивості використовуваної картографічної проекції (1.9), то зазвичай його приймають за одиницю, тобто $\mu_0 = 1$.

Оскільки масштаб на карті є величиною змінною, то введемо поняття окремих масштабів довжин і площ.

Окремим масштабом довжин μ називається відношення елементарного відрізка на карті (площині) dl' до відповідного елементарного відрізка на картографованій поверхні dl , тобто

$$\mu = \frac{dl'}{dl}. \quad (1.12)$$

Окремий масштаб довжин є функцією координат (φ і λ) і азимута напрямку (α), а саме:

$$\mu = F_1(\varphi, \lambda, \alpha). \quad (1.13)$$

Якщо $\alpha = 0^\circ$ (180°), то окремий масштаб називається *масштабом довжин по меридіанах*

$$\mu = m. \quad (1.14)$$

Коли $\alpha = 90^\circ$ (270°), то окремий масштаб довжин називається *масштабом довжин по паралелях*

$$\mu = n. \quad (1.15)$$

Максимальне і мінімальне значення окремого масштабу в точці називаються *екстремальними масштабами довжин* по головних напрямках і позначаються відповідно таким чином:

$$\mu_{max} = a, \quad (1.16)$$

$$\mu_{min} = b. \quad (1.17)$$

Спотворенням довжин v_μ називається різниця між окремим масштабом довжин і одиницею (головним масштабом), яка виражена у частках одиниці або у відсотках

$$v_\mu = (\mu - 1) 100\%. \quad (1.18)$$

Наприклад, коли $\mu = 1,42$, то $v_\mu = +0,42$ або $v_\mu = +42\%$, а якщо $\mu = 0,42$, то $v_\mu = -0,58$ або $v_\mu = -58\%$.

У деяких випадках для визначення спотворення довжин доцільно застосувати таку формулу

$$v_{\mu} = \ln \mu. \quad (1.19)$$

Окремим масштабом площі p називається відношення площі елементарної ділянки на карті dS' до площі відповідної елементарної ділянки на картографованій поверхні dS , тобто

$$p = \frac{dS'}{dS}. \quad (1.20)$$

Окремий масштаб площі залежить тільки від координат (φ і λ) точки, а саме:

$$p = F_2(\varphi, \lambda). \quad (1.21)$$

Спотворенням площі v_p називається різниця між окремим масштабом площі й одиницею, яка виражена в частках одиниці або у відсотках,

$$v_p = (p - 1) 100\%. \quad (1.22)$$

Наприклад, якщо $p = 1,23$, то $v_p = +0,23$ або $v_p = 23\%$, а коли $p = 0,78$, то $v_p = -0,22$ або $v_p = -22\%$.

У деяких випадках, для визначення спотворення площі доцільно застосовувати таку формулу:

$$v_p = \ln p. \quad (1.23)$$

При спільних розрахунках спотворень довжин і площ необхідно використовувати тільки формули (1.18) і (1.22) або (1.19) і (1.23).

Спотворенням кутів ΔU називається різниця між величиною кута на площині U' і величиною відповідного кута на картографованій поверхні U , тобто

$$\Delta U = U' - U. \quad (1.24)$$

Спотворення кутів є функцією координат (φ і λ) і азимута напрямку (α), а саме:

$$\Delta U = F_3(\varphi, \lambda, \alpha). \quad (1.25)$$

За міру кутівих спотворень беруть найбільше з них у такій точці:

$$\Delta U_{max} = \omega. \quad (1.26)$$

Спотворенням форм w називається відношення максимального a і мінімального b масштабів довжин у даній точці, тобто

$$w = \frac{a}{b}. \quad (1.27)$$

Ізоколами називаються лінії, що проходять через точки з однаковими значеннями спотворень довжин або площ.

Ізогами називаються лінії, що проходять через точки з однаковими значеннями спотворень кутів.

За міру спотворень довжин у заданій точці береться величина ε_1 , яка характеризується середніми квадратичними спотвореннями довжин по головних напрямках, а саме:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}((a-1)^2 + (b-1)^2) = \frac{1}{2}(v_a^2 + v_b^2) \quad (1.28)$$

або

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b). \quad (1.29)$$

Також за міру спотворень довжин у заданій точці може братись величина ε_2 , яка характеризується середніми квадратичними спотвореннями довжин у всіх напрямках, тобто

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu-1)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu \mu^2 d\alpha \quad (1.30)$$

або

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 \mu d\alpha. \quad (1.31)$$

Для визначення міри спотворень на всій картографічній площі обчислюють критерій Ейрі таким чином:

$$E_1^2 = \frac{1}{S} \int \varepsilon_1^2 dS \quad (1.32)$$

або критерій Йордана, тобто

$$E_2^2 = \frac{1}{S} \int \varepsilon_2^2 dS. \quad (1.33)$$

Щоб оцінити міру спотворень тільки на окремій ділянці ΔS усієї території S , обчислюють такий параметр:

$$E^2 = \frac{\Delta S}{S} \sum \varepsilon^2. \quad (1.34)$$

Величини спотворень є одними з основних критеріїв оцінки значущості картографічних проєкцій.

1.6. Масштаб довжин

Відповідно до формули (1.12) окремий масштаб довжин $\mu = \frac{dl'}{dl}$.

З огляду на рис. 1.7

$$\begin{aligned} dl' &= \sqrt{dx^2 + dy^2}; \\ dl &= \sqrt{dl_m^2 + dl_n^2}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

де dl_m і dl_n – елементарні відрізки дуг меридіана і паралелі відповідно; $d\varphi$ і $d\lambda$ – приріст координат по широті й довготі відповідно.

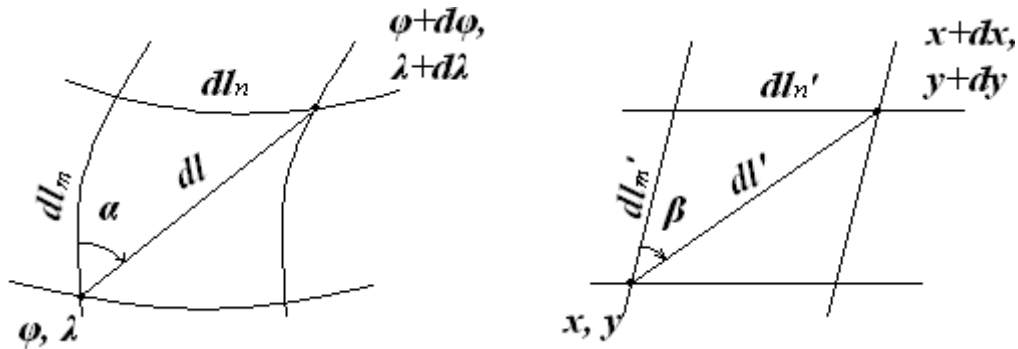


Рис. 1.7. Відображення елементарного відрізка на поверхні еліпсоїда та на площині

При цьому

$$\begin{aligned} dl_m &= M d\varphi, \\ dl_n &= r d\lambda. \end{aligned} \quad (1.36)$$

З урахуванням виразів (1.35) і (1.36) формула (1.12) набуває такого вигляду:

$$\mu^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(M d\varphi)^2 + (r d\lambda)^2}. \quad (1.37)$$

Із загальних рівнянь картографічних проєкцій (1.9) одержимо повні диференціали, а саме:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Піднісши у квадрат і додавши вирази (1.38), одержимо такий результат:

$$\begin{aligned}
 dx^2 + dy^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 = \\
 &= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\varphi^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\varphi d\lambda + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right) d\lambda^2 = \\
 &= ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2. \tag{1.39}
 \end{aligned}$$

Уведемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
 e &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2, \\
 f &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \\
 g &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2, \\
 h &= \sqrt{eg - f^2} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi},
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

де e, f, g, h – коефіцієнти Гаусса.

Також уведемо допоміжну функцію u , тобто

$$u = \frac{d\varphi}{d\lambda}. \tag{1.41}$$

Тоді з урахуванням виразів (1.39) і (1.41) формула (1.37) набуває такого вигляду:

$$\mu^2 = \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2}{(Md\varphi)^2 + (rd\lambda)^2} = \frac{eu^2 + 2fu + g}{M^2u^2 + r^2}. \tag{1.42}$$

Формула (1.42) виражає масштаб довжин як функцію тільки сферодних координат φ і λ . Але, як відомо з виразу (1.13), масштаб довжин також залежить і від азимута напрямку α . Знайдемо значення u з елементарного сферодного трикутника (рис. 1.7). Оскільки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dl_n}{dl_m} = \frac{rd\lambda}{Md\varphi} = \frac{r}{Mu}, \tag{1.43}$$

то

$$u = \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha. \tag{1.44}$$

Тоді з огляду на формулу (1.44) і, враховуючи, що $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, після перетворення вираз (1.42) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned}\mu^2 &= \frac{e\left(\frac{r}{M}ctg\alpha\right)^2 + 2f\frac{r}{M}ctg\alpha + g}{M^2\left(\frac{r}{M}ctg\alpha\right)^2 + r^2} = \\ &= \frac{e}{M^2}\cos^2\alpha + 2\frac{f}{Mr}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{g}{r^2}\sin^2\alpha = \\ &= \frac{e}{M^2}\cos^2\alpha + \frac{f}{Mr}\sin 2\alpha + \frac{g}{r^2}\sin^2\alpha.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Уведемо такі позначення:

$$\begin{aligned}P &= \frac{e}{M^2}, \\ Q &= \frac{f}{Mr}, \\ R &= \frac{g}{r^2}.\end{aligned}\tag{1.46}$$

З урахуванням виразів (1.46) формула масштабу довжин (1.45) набуде остаточного вигляду, тобто

$$\mu^2 = P\cos^2\alpha + Q\sin 2\alpha + R\sin^2\alpha.\tag{1.47}$$

Масштаб довжин по меридіанах

Якщо значення азимута напрямку $\alpha = 0^\circ(180^\circ)$, то відповідно до формули (1.47) $\mu^2 = m^2 = P$. Тоді масштаб довжин по меридіанах можна обчислити за такою формулою:

$$m = \frac{\sqrt{e}}{M}.\tag{1.48}$$

Масштаб довжин по паралелях

Коли значення азимута напрямку $\alpha = 90^\circ(270^\circ)$, то згідно з формулою (1.47) $\mu^2 = n^2 = R$. Тоді масштаб довжин по паралелях можна обчислити за такою формулою:

$$n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{\sqrt{g}}{N\cos\varphi}.\tag{1.49}$$

1.7. Відображення азимутів і кутів на площині

Під час відображення азимута довільного напрямку α з поверхні еліпсоїда на площину будемо його позначати символом β (рис. 1.7).

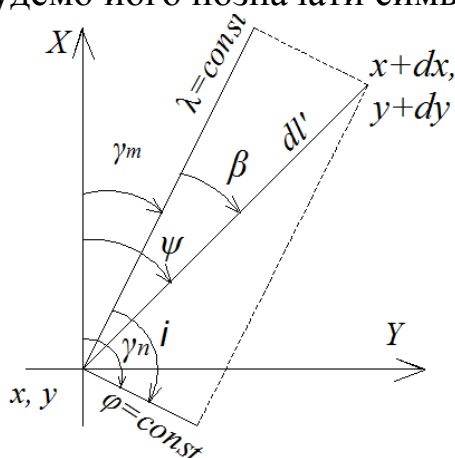


Рис. 1.8. Відображення кутів на площині

З рис. 1.8 знайдемо азимут β елементарного відрізка dl'

$$\beta = \psi - \gamma_m \quad (1.50)$$

або

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \gamma_m}{1 + \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \gamma_m}. \quad (1.51)$$

Знайдемо кут ψ з урахуванням повних диференціалів (1.38)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}. \quad (1.52)$$

Передбачивши у виразі (1.52), що для меридіана $\lambda = \text{const}$, одержимо такий результат:

$$\operatorname{tg} \gamma_m = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}. \quad (1.53)$$

Тоді після перетворення і з урахуванням коефіцієнтів Гаусса (1.40) вираз (1.51) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\beta &= \frac{\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} - \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}}{1 + \frac{\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}} = \\
&= \frac{\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\lambda}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}}{\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}} = \\
&= \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) d\lambda}{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right) d\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) d\lambda} = \frac{hd\lambda}{ed\varphi + fd\lambda}. \quad (1.54)
\end{aligned}$$

Застосувавши допоміжну функцію (1.41), зводимо формулу (1.54) до такого вигляду:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{eu + f}. \quad (1.55)$$

З урахуванням виразу (1.44) формула (1.55) матиме остаточний вигляд, тобто

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{e \frac{r}{M} \operatorname{ctg}\alpha + f} = \frac{hM}{er \operatorname{ctg}\alpha + fM} = \frac{hM \operatorname{tg}\alpha}{er + fM \operatorname{tg}\alpha}. \quad (1.56)$$

За цією формулою обчислюється азимут β елементарного відрізка dl' на площині.

1.8. Кут між відображеннями меридіанів і паралелей

Відповідно до рис. 1.8. кут між відображеннями меридіанів і паралелей

$$i = \gamma_n - \gamma_m. \quad (1.57)$$

Також можна записати, що

$$tgi = \frac{tg\gamma_n - tg\gamma_m}{1 + tg\gamma_n tg\gamma_m}. \quad (1.58)$$

Задавши у виразі (1.52) умову, що для паралелі $\varphi = \text{const}$, отримуємо такий результат:

$$tg\gamma_n = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}. \quad (1.59)$$

Тоді після перетворення і з урахуванням коефіцієнтів Гаусса (1.40) вираз (1.58) набуде такого вигляду:

$$tgi = \frac{\frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} - \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}}{1 + \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}} = \frac{\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}}}{\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}} = \frac{h}{f}. \quad (1.60)$$

Для подальших розрахунків визначимо інші тригонометричні функції кута між відображенням меридіанів і паралелей i , а саме:

$$\sin^2 i = \frac{tg^2 i}{1 + tg^2 i} = \frac{\frac{h^2}{f^2}}{1 + \frac{h^2}{f^2}} = \frac{h^2}{f^2 + h^2} = \frac{h^2}{eg}. \quad (1.61)$$

Звідки

$$\sin i = \frac{h}{\sqrt{eg}}. \quad (1.62)$$

Косинус кута i можна визначити трьома шляхами, тобто

$$\cos i = \frac{\sin i}{tgi} = \sqrt{1 - \sin^2 i} = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 i}} = \dots = \frac{f}{\sqrt{eg}}. \quad (1.63)$$

Оскільки тригонометрична функція косинус – парна, то формула (1.63) дозволяє визначити чверть, у якій знаходиться кут i .

Якщо $f > 0$, то кут i перебуває у I чверті, тобто $i < 90^\circ$ (рис. 1.9, а).

Якщо $f < 0$, то кут i перебуває у II чверті, тобто $i > 90^\circ$ (рис 1.9, б).

Якщо $f = 0$, то кут між відображеннями меридіанів і паралелей $i = 90^\circ$ (рис. 1.9, в), тобто виконується умова ортогональності.

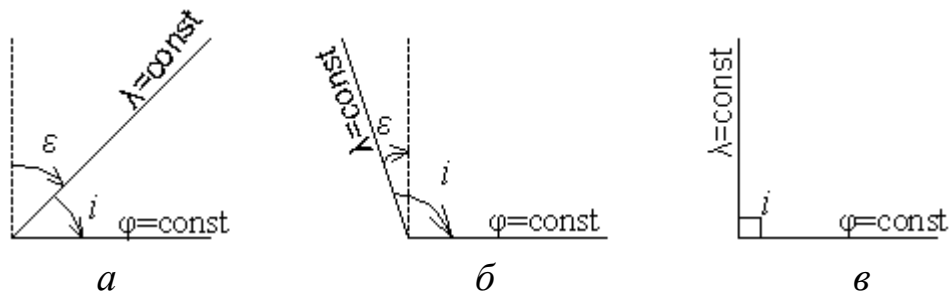


Рис. 1.9. Кут між відображенням меридіанів і паралелей

Коли коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю, тобто

$$f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \quad (1.64)$$

то вираз (1.64) має назву **умови ортогональності**, а кут між відображенням меридіанів і паралелей $i = 90^\circ$.

Відхилення кута i від 90°

Як видно з рис. 1.9, а і 1.9, б, кут між відображенням меридіанів і паралелей i не завжди дорівнює 90° , тому необхідно обчислювати його відхилення від 90° , тобто

$$\varepsilon = i - 90^\circ, \quad (1.65)$$

$$i = 90^\circ + \varepsilon. \quad (1.66)$$

Якщо $i < 90^\circ$, то $\varepsilon < 0$ (рис. 1.9, а), а коли $i > 90^\circ$, то $\varepsilon > 0$ (рис. 1.9, б).

Якщо $\varepsilon = 0$, то також виконується умова ортогональності (рис. 1.9, в).

1.9. Дослідження масштабу довжин

Дослідження характеру змін масштабу довжин μ залежно від напрямку α дозволяє встановити при яких значеннях він досягає найбільшого й найменшого значення. Щоб визначити екстремальні значення масштабу довжин, знайдемо першу похідну від μ^2 по α й прирівняємо її до нуля. Згідно з (1.47)

$$\begin{aligned} \frac{d(\mu^2)}{d\alpha} &= -2P \sin \alpha \cos \alpha + 2Q \cos 2\alpha + 2R \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (R - P) \sin 2\alpha + 2Q \cos 2\alpha = (R - P) \operatorname{tg} 2\alpha + 2Q = 0. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Звідси, з урахуванням (1.46)

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2Q}{P-R} = \frac{2\frac{f}{Mr}}{\frac{e}{M^2} - \frac{g}{r^2}} = \frac{2fMr}{er^2 - gM^2}. \quad (1.68)$$

Значенню $\operatorname{tg}2\alpha$ відповідають два значення α в інтервалі між 0° і 180° , які між собою відмінні на 90° . Знайдемо другу похідну від μ^2 за α й прирівняємо її до нуля, тобто

$$\frac{d^2(\mu^2)}{d\alpha^2} = 2(R-P)\cos 2\alpha - 4Q\sin 2\alpha = 2(R-P-2Q\operatorname{tg}2\alpha)\cos 2\alpha = 0. \quad (1.69)$$

Оскільки вираз у дужках $(R-P-2Q\operatorname{tg}2\alpha)$ на знак не впливає, то формула (1.69) показує, що похідна буде мати протилежні знаки для α і $\alpha+90^\circ$. Таким чином у відображенні даної точки існує два взаємно перпендикулярних напрямки α і $\alpha+90^\circ$, за якими масштаби довжин мають максимальні й мінімальні значення, тобто вони є екстремальними.

Визначимо, під яким кутом будуть перетинатися ці два напрямки α і $\alpha+90^\circ$ на площині. Якщо $\beta_1 = \beta+90^\circ$, то $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta_1 = -1$. Згідно з формулою (1.56)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{hM\operatorname{tg}\alpha}{er + fM\operatorname{tg}\alpha}, \\ \operatorname{tg}\beta_1 &= \frac{-hM\operatorname{ctg}\alpha}{er - fM\operatorname{ctg}\alpha}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Звідки

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 + efMr(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) - f^2M^2}. \quad (1.71)$$

Оскільки

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha, \quad (1.72)$$

то з урахуванням виразу (1.68)

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{er^2 - gM^2}{2fMr}. \quad (1.73)$$

І остаточно, беручи до уваги вирази (1.72) та (1.73),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta_1 &= \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 - 2efMr\operatorname{ctg}2\alpha - f^2M^2} = \\ &= \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 - 2efMr\frac{er^2 - gM^2}{2fMr} - f^2M^2} = \\ &= \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 - e^2r^2 + egM^2 - f^2M^2} = \frac{-h^2}{eg - f^2}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Оскільки, згідно з коефіцієнтами Гаусса (1.40), $f^2 - eg = -h^2$ або $h^2 = eg - f^2$, то $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta_1 = -1$, а значить, $\beta_1 = \beta + 90^\circ$.

Ці два напрямки називаються *головними*. Якщо картографічна сітка ортогональна, то головні напрямки збігаються з меридіанами і паралелями.

1.10. Еліпс спотворень. Положення Аполлонія

Еліпс спотворень – це елементарний еліпс у кожній точці на карті (площині), який є відображенням елементарного кола на поверхні еліпсоїда. Згідно з формулою (1.13), окремий масштаб довжин у точці змінюється залежно від азимуту напрямку. Наприклад, азимуту α_1 на поверхні еліпсоїда відповідає азимут β_1 на площині, азимуту $\alpha_2 - \beta_2$, азимуту $\alpha_3 - \beta_3$ і т.д. Масштаби довжин по цих напрямках позначимо відповідно μ_1, μ_2, μ_3 , (рис 1.10).

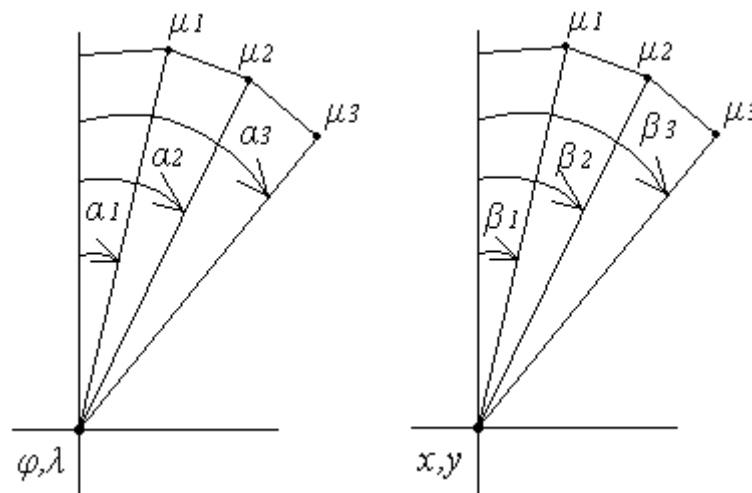


Рис. 1.10. Залежність окремого масштабу довжин від азимуту напрямку

У плоских полярних координатах

$$\begin{aligned} x &= \mu \cos \beta, \\ y &= \mu \sin \beta. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Визначимо орієнтування еліпса спотворень відносно ліній меридіанів і паралелей (рис. 1.11).

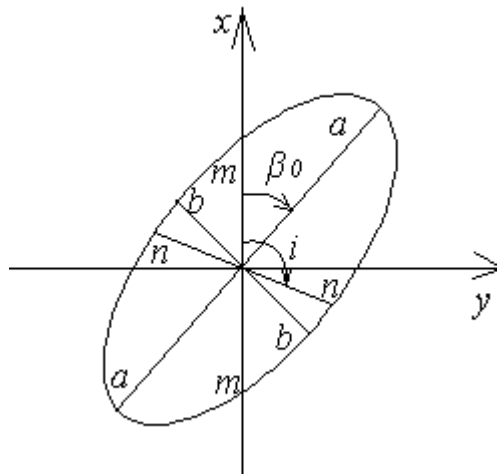


Рис. 1.11. Еліпс спотворень

Загальне рівняння еліпса має такий вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.76)$$

Як видно з рис. 1.10, коли замість μ , підставити масштаб довжин по меридіанах m , то вираз (1.75) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} x &= m \cos \beta_0, \\ y &= m \sin \beta_0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Звідки

$$\frac{m^2 \cos^2 \beta_0}{a^2} + \frac{m^2 \sin^2 \beta_0}{b^2} = 1. \quad (1.78)$$

Виконаємо низку перетворень для визначення кута β_0 , а саме:

$$\begin{aligned} \frac{m^2 \cos^2 \beta_0}{a^2} + \frac{m^2 \sin^2 \beta_0}{b^2} &= \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0, \\ \frac{m^2 \sin^2 \beta_0}{b^2} - \sin^2 \beta_0 &= \cos^2 \beta_0 - \frac{m^2 \cos^2 \beta_0}{a^2}, \\ \sin^2 \beta_0 \left(\frac{m^2}{b^2} - 1 \right) &= \cos^2 \beta_0 \left(1 - \frac{m^2}{a^2} \right), \\ \operatorname{tg}^2 \beta_0 &= \frac{1 - \frac{m^2}{a^2}}{\frac{m^2}{b^2} - 1} = \frac{b^2(a^2 - m^2)}{a^2(m^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Добувши квадратний корінь з лівої і правої частин виразу (1.79), одержимо остаточний результат:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}}. \quad (1.80)$$

Також значення $tg\beta_0$ можна обчислити і через масштаб довжин по паралелях n , тоді

$$tg\beta_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}. \quad (1.81)$$

Як видно з рис. 1.11 і отриманих формул (1.80) і (1.81), для побудови еліпса спотворень необхідно і достатньо знати чотири лінійні a , b , m , n і дві кутові i (або ε) і β_0 величини.

Положення Аполлонія

Сформулюємо два основних положення Аполлонія, застосовані до еліпса спотворень.

1. Сума квадратів спряжених напівдіаметрів еліпса – величина стала, що дорівнює сумі квадратів його півосей, тобто

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2. \quad (1.82)$$

2. Площа паралелограма, побудованого на спряжених напівдіаметрах еліпса, – величина стала, що дорівнює площі прямокутника, побудованого на його півосях, а саме:

$$mn \sin i = ab. \quad (1.83)$$

Розв'яжемо спільно рівняння (1.82) і (1.83), тобто

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 + 2mn \sin i &= a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 = A^2, \\ m^2 + n^2 - 2mn \sin i &= a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = B^2. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Звідки

$$\begin{aligned} A &= a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin i}, \\ B &= a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin i}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{A + B}{2}, \\ b &= \frac{A - B}{2}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Таким чином, за формулами (1.86) обчислюються максимальний та мінімальний масштаби довжин у точці. У тому разі, коли проєкції рівнокутні й $a = b = m = n$, $i = 90^\circ$, то $A = 2a$, $B = 0$.

1.11. Масштаб площі

Відповідно до формули (1.20) окремий масштаб площі $p = \frac{dS'}{dS}$.

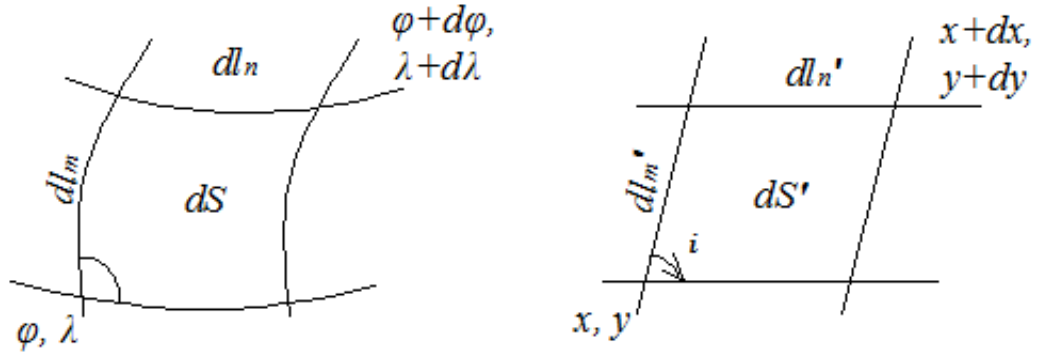


Рис. 1.12. Елементарна ділянка на поверхні еліпсоїда та на площині

З огляду на рис. 1.12

$$\begin{aligned} dS' &= dl'_m dl'_n \sin i, \\ dS &= dl_m dl_n. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Підставивши вирази (1.87) у формулу (1.20), одержимо такий результат:

$$p = \frac{dl'_m dl'_n \sin i}{dl_m dl_n} = \frac{dl'_m}{dl_m} \frac{dl'_n}{dl_n} \sin i = mn \sin i = \frac{\sqrt{e} \sqrt{g} h}{M r \sqrt{eg}} = \frac{h}{Mr} = \frac{h}{MN \cos \varphi}. \quad (1.88)$$

Таким чином, за формулою (1.88) обчислюється окремий масштаб площі.

Коли значення окремого масштабу площі $p = 1$, то з формули (1.88)

$$h = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = Mr = MN \cos \varphi. \quad (1.89)$$

Вираз (1.89) є **умовою рівновеликості**, тобто виконується сталість відношення елементарних площ на поверхні еліпсоїда і площини.

1.12. Максимальне спотворення кутів

Кут U , утворений двома довільними напрямками OA і OB на поверхні еліпсоїда, під час відображення на площині набуває значення U' (рис. 1.13).

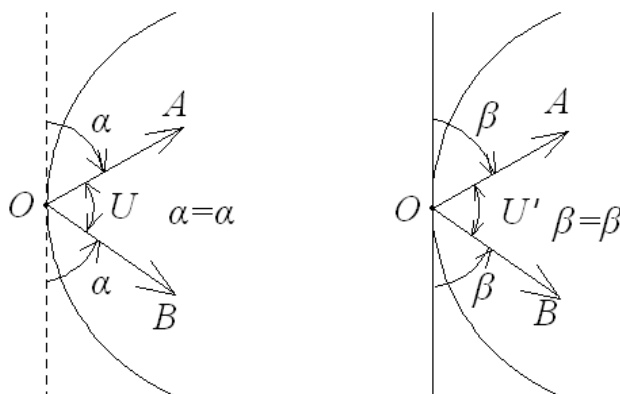


Рис. 1.13. Відображення кута U на поверхні еліпсоїда та кута U' на площині

Спотворення кута обчислюється за формулою (1.24), тобто

$$\Delta U = U' - U.$$

Відповідно до рис. 1.13

$$\begin{aligned} U' &= 180^\circ - 2\beta, \\ U &= 180^\circ - 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.90)$$

З урахуванням виразів (1.90) спотворення кута можна обчислити за такою формулою:

$$\Delta U = 2(\alpha - \beta). \quad (1.91)$$

Звідки

$$\frac{\Delta U}{2} = \alpha - \beta. \quad (1.92)$$

Для проекції з ортогональною сіткою (коли коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю), оскільки головні напрямки збігаються з напрямками меридіанів і паралелей, вираз (1.56) набуде такого вигляду:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{hM\operatorname{tg}\alpha}{er + fM\operatorname{tg}\alpha} = \frac{hM\operatorname{tg}\alpha}{er} = \frac{\sqrt{eg}M\operatorname{tg}\alpha}{er} = \frac{M}{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{g}}{r} \operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{m} \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg}\alpha. \quad (1.93)$$

Ліву і праву частини виразу (1.93) віднімемо від $\operatorname{tg}\alpha$ і додамо до $\operatorname{tg}\alpha$, а саме:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{a-b}{a} \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{a+b}{a} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Відомо, що

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (1.95)$$

Тоді, з урахуванням формули (1.95) вирази (1.94) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \\ \frac{a+b}{a} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Поділивши в (1.96) перше рівняння на друге, одержимо такий результат:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a-b}{a+b}. \quad (1.97)$$

Звідки

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \sin(\alpha + \beta) = \sin \frac{\Delta U}{2}. \quad (1.98)$$

Аналізуючи вираз (1.98), можна дійти висновку, що максимальне значення спотворень кутів буде, коли $\alpha + \beta = 90^\circ$, тобто

$$\sin(\alpha + \beta) = 1. \quad (1.99)$$

Тоді, з урахуванням виразів (1.26) і (1.98)

$$\sin \frac{\Delta U_{\max}}{2} = \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}. \quad (1.100)$$

З виразу (1.100) знайдемо інші тригонометричні функції спотворення кутів, які будуть використані нами пізніше, а саме:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega}{2} &= \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{4} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\omega}{2}}{1 + \cos \frac{\omega}{2}}} = \sqrt{\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{4} + 45^\circ \right) &= \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\omega}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\omega}{4}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

1.13. Рівнокутне, рівновелике і довільне відображення поверхні еліпсоїда на площині

У математичній картографії частіше використовуються рівнокутні і рівновеликі картографічні проекції. **Основною умовою рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на площині є незалежність масштабу довжин від напрямків**, тобто перша похідна масштабу довжин по азимуту буде дорівнювати нулю. З урахуванням формули (1.67)

$$\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\alpha} = (R - P)\sin 2\alpha + 2Q\cos 2\alpha = 0. \quad (1.102)$$

Ця рівність дотримується, якщо $P = R$ і $Q = 0$, або з урахуванням виразу (1.46)

$$\frac{e}{M^2} = \frac{g}{r^2},$$

$$Q = \frac{f}{M \cdot r}.$$

Звідки $m^2 = n^2$ ($m = n$) і $f = 0$.

У рівнокутних проекціях картографічна сітка ортогональна $i = 90^\circ$, максимальний a і мінімальний b масштаби довжин збігаються з напрямками меридіанів і паралелей, тобто $a = b = m = n$, масштаб площі $p = a^2 = m^2$, спотворення форм ($w = 0$) і спотворення кутів ($\omega = 0$) відсутні.

З урахуванням значень коефіцієнтів Гаусса (1.40), тобто коли

$$\begin{cases} f = \frac{\partial x}{\partial\varphi} \frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\varphi} \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0 \\ \frac{1}{M} = \left(\frac{(\partial x)^2}{(\partial\varphi)^2} + \frac{(\partial y)^2}{(\partial\varphi)^2} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{(\partial x)^2}{(\partial\lambda)^2} + \frac{(\partial y)^2}{(\partial\lambda)^2} \right), \end{cases} \quad (1.103)$$

отримаємо остаточний вигляд рівнянь рівнокутної проекції (рівняння Коші – Рімана), а саме:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial\lambda} = -\frac{r}{M} \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\lambda} = +\frac{r}{M} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \end{cases}. \quad (1.104)$$

Для наближених розрахунків при рівнокутному відображенні можна використовувати такі формули:

$$\begin{aligned} v_a &= v_b = v, \\ v_p &= 2v, \\ \omega &= 0. \end{aligned} \quad (1.105)$$

При рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на площині зберігається сталим відношення площі на площині (карті) до відповідної площі на поверхні еліпсоїда, тобто

$$p = mn \sin i = ab = \frac{h}{M \cdot r} = \text{const} = 1,$$

$$a = \frac{1}{b} \text{ і } b = \frac{1}{a},$$

$$h = M r = MN \cos \varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (1.106)$$

$$\text{tg} \left(\frac{\omega}{4} + 45^\circ \right) = \sqrt{\frac{a}{b}} = a.$$

Для наближених розрахунків при рівновеликому відображенні можна використовувати такі формули:

$$v_p = 0,$$

$$v_a + v_b = 0, \quad (1.107)$$

$$\omega = v_a - v_b.$$

У довільних проекціях можуть бути різні умови, наприклад, щоб один із екстремальних масштабів довжин дорівнював одиниці. Якщо, наприклад, $a = 1$, то $p = b$, якщо $b = 1$, то $p = a$. Коли у такій довільній проекції картографічна сітка ортогональна, то дана проекція називається *рівнопроміжною по меридіанах* ($m = 1, p = n, \sin \frac{\omega}{2} = \frac{1-n}{1+n}$) або *рівнопроміжною по паралелях* ($n = 1, p = m, \sin \frac{\omega}{2} = \frac{m-1}{m+1}$).

1.14. Завдання та методичні пояснення до виконання лабораторної роботи № 1

Тема: Дослідження топографічної карти дрібного масштабу.

Завдання:

1. У вказаній на топографічній карті масштабу 1:10 000 000 точці встановити значення таких величин:

- кут між відображенням меридіанів і паралелей i та його відхилення від $90^\circ - \varepsilon$;
- масштаби довжин по меридіанах m і по паралелях n ;
- спотворення довжин по меридіанах v_m і паралелях v_n ;
- масштаби довжин по головних напрямках a і b ;
- спотворення довжин по головних напрямках v_a і v_b ;

- азимут максимального спотворення довжин β_0 ;
- масштаб площі p ;
- спотворення площі v_p ;
- спотворення кутів ω ;
- спотворення форм w .

Значення масштабу довжин по меридіанах m , масштабу довжин по паралелях n , масштабу довжин по головних напрямках, масштабу площі p , спотворення форм w обчислити з точністю до 0,0001; спотворення довжин по меридіанах v_m , спотворення довжин паралелях v_n , довжин по головних напрямках v_a і v_b , спотворення площі v_p – з точністю до 0,01 %; азимут максимального спотворення довжин β_0 – з точністю до 1'; спотворення кутів ω – з точністю до 1".

2. За визначеними параметрами побудувати еліпс спотворень.

Вихідні дані обираються за порядковим номером студента в списку академічної групи (див. додаток А).

Хід роботи

1. Визначення кутів, масштабів та спотворень.

1) Кут між меридіанами і паралелями i визначається на карті за допомогою геодезичного транспортира. Для цього до дуги паралелі, на якій знаходиться задана точка, проводимо дотичну (рис. 1.14). На центр прямої лінійки транспортира нанесена рисочка (центр півкола), а його півколо розділене на 180 частин (градусів). Щоб виміряти кут, необхідно прикласти пряму лінійку транспортира до однієї з його сторін (до меридіана, в нашому випадку) і подивитися, на яку поділку півкола транспортира потрапляє дотична. Значення поділки і буде вимірним кутом i у градусах.



Рис. 1.14. Схема ділянки дрібномасштабної карти

2) Кут між відображенням меридіанів і паралелей i не завжди дорівнює 90° , тому необхідно обчислювати його відхилення від 90° , тобто

$$\varepsilon = i - 90^\circ. \quad (1.108)$$

3) Скориставшись рис. 1.1, визначимо широти паралелей точок А і В, за якими обчислюємо довжину дуги меридіана між паралелями точок А і В навкруги заданої точки (рис. 1.1) за такою формулою:

$$\Delta S_m = S_{m_A} - S_{m_B} = AB_m = S_{m_{півн}} - S_{m_{півд}}, \quad (1.109)$$

де $S_{m_{півн}}$ – довжина дуги меридіана від екватора до північної паралелі (точки А), м; $S_{m_{півд}}$ – довжина дуги меридіана від екватора до південної паралелі (точки В), м.

При цьому значення $S_{m_{півн}}$ і $S_{m_{півд}}$ беруть з додатка Б, відповідно до широти паралелей точок А і В.

4) За даними рис. 1.14 визначимо довготи меридіанів точок С і D та широту паралелі точки О. Оскільки різниця між довготами меридіанів точок С і D становить 6° , то обчислюємо довжину дуги паралелі у межах ділянки навкруги заданої точки за такою формулою:

$$\Delta S_n = CD_m = 6 \cdot S_{n_O}, \quad (1.110)$$

де S_{n_O} – довжина дуги паралелі, на якій знаходяться вказані точки О, С і D, м.

5) Знаходимо числовий масштаб довжин по меридіану, тобто

$$\mu_{мер} = \frac{CD_k}{CD_m} = \frac{1}{CD_m / CD_k}, \quad (1.111)$$

де CD_k – довжина дуги паралелі, виміряна по карті й виражена в метрах.

6) Визначаємо числовий масштаб довжин по паралелі, а саме:

$$\mu_{пар} = \frac{AB_k}{AB_m} = \frac{1}{AB_m / AB_k}, \quad (1.112)$$

де AB_k – довжина дуги меридіана, виміряна по карті й виражена в метрах.

7) Окремий масштаб довжин по меридіанах m обчислюємо з такого виразу:

$$m = \frac{\mu_{мер}}{\mu_0}, \quad (1.113)$$

де $\mu_0 = 10\,000\,000$ – головний масштаб карти.

8) Окремий масштаб довжин по паралелях n визначається за такою формулою:

$$n = \frac{\mu_{пар}}{\mu_0}. \quad (1.114)$$

9) Спотворення довжин по меридіанах v_m розраховується таким чином:

$$v_m = (m - 1)100\%, \quad (1.115)$$

10) Спотворення довжин по паралелях v_n обчислюється за таким виразом:

$$v_n = (n - 1)100 \%. \quad (1.116)$$

11) Масштаби довжин по головних напрямках a і b визначаються за формулами:

$$a = \frac{A + B}{2}, \quad (1.117)$$

$$b = \frac{A - B}{2}, \quad (1.118)$$

тут допоміжні величини A і B розраховують таким чином:

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cdot \sin i}, \quad (1.119)$$

$$B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin i}. \quad (1.120)$$

12) Обчислюємо спотворення довжин по головних напрямках v_a і v_b , а саме:

$$v_a = (a - 1)100 \%, \quad (1.121)$$

$$v_b = (b - 1)100 \%. \quad (1.122)$$

13) Значення азимута максимального спотворення довжин β_0 одержимо з таких виразів:

$$\beta_0 = \arctg \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} \quad (1.123)$$

або

$$\beta_0 = \arctg \frac{b}{a} \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}. \quad (1.124)$$

14) Масштаб площі визначаємо таким чином:

$$p = mn \sin i = ab. \quad (1.125)$$

15) Спотворення площі

$$v_p = (p - 1)100 \%. \quad (1.126)$$

16) Обчислюємо також спотворення кутів ω , а саме:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b}. \quad (1.127)$$

17) Для обчислення спотворення форм скористаємось таким виразом:

$$w = \frac{a}{b}. \quad (1.128)$$

2. Побудова еліпса спотворень.

Еліпс спотворень – це елементарний еліпс у кожній точці на карті (площині), який є відображенням елементарного кола на поверхні

еліпсоїда (рис. 1.11). Він використовується для відображення напрямків величин та характеру спотворень у заданій точці картографічної проекції.

Для побудови еліпса спотворень необхідно і достатньо знати чотири лінійні a, b, m, n та дві кутові i (або ε) і β_0 величини.

1) Визначення і побудова основних напрямків еліпса спотворень.

Для побудови еліпса спотворень треба дотримуватися такої послідовності:

- проводимо вісь x і задаємо, що вона відповідає північному напрямку меридіану, а по ній будемо відкладати спотворення масштабу довжин по меридіанах m ;

- від прийнятого північного напрямку меридіана за допомогою геодезичного транспортира відкладаємо кут i . Отриманий напрямок – паралель, на якій будемо відкладати спотворення масштабу довжин по паралелях n ;

- від прийнятого північного напрямку меридіана за допомогою геодезичного транспортира відкладаємо азимут максимального спотворення довжин β_0 . Отриманий напрямок – велика піввісь a ;

- перпендикулярно до проведеної великої півосі a через центр еліпса спотворень будуємо малу піввісь b .

2. Визначення умовного масштабу для побудови еліпса спотворень.

Помноживши умовний масштаб на масштаби довжин по меридіанах m , по паралелях n , по головних напрямках a і b , отримаємо значення елементів еліпса спотворень a, b, m, n у міліметрах, а саме:

- по меридіану на північ і на південь відкласти відрізок m ;
- по паралелі на схід та захід відкласти відрізок n ;
- по обидві сторони від центральної точки по великій і малій півосі відкласти відрізки a і b відповідно;
- отримані точки з'єднати плавною лінією.

Одержимо еліпс спотворень (рис. 1.15).

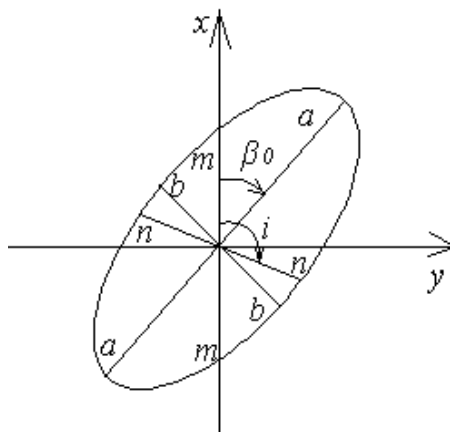


Рис. 1.15. Еліпс спотворень

3. Висновки.

Виходячи з отриманих результатів, студент має оцінити спотворення у заданій точці на топографічній карті дрібного масштабу, а також охарактеризувати параметри, необхідні для побудови еліпса спотворень.

1.15. Приклад виконання лабораторної роботи № 1

Згідно з номером студента в списку академічної групи (додаток А) обирається варіант, де зазначено відповідну точку О (рис. 1.16).

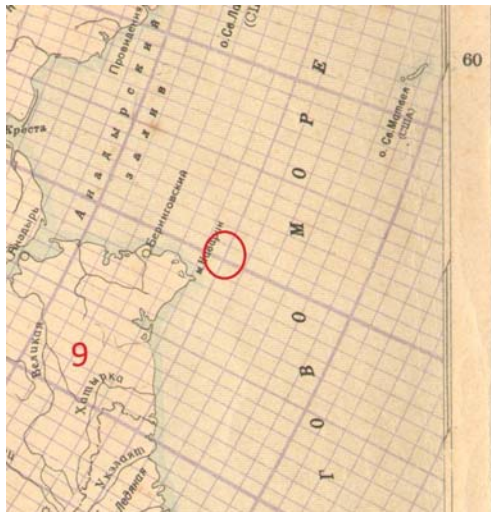


Рис. 1.16. Фрагмент заданої ділянки

Усі обчислені значення величин у цьому та інших прикладах наведені з округленням, але при розрахунках використовувалися більш точні значення.

1. Визначення кутів, масштабів та спотворень.

1) За допомогою геодезичного транспортира вимірюємо кут між відображенням меридіанів і паралелей i на заданій ділянці. У даному випадку $i = 90^\circ 30'$. Обчислюємо його відхилення від 90° за формулою (1.108), тобто $\varepsilon = -0^\circ 30'$.

2) Відповідно до широт точок A і B із додатка Б вибираємо значення $S_{m_{\text{шви}}}$ і $S_{m_{\text{шид}}}$ та за формулою (1.109) обчислюємо довжину дуги меридіана, а саме:

$$AB_m = 5763445 - 5318521 = 444924 \text{ (м)}.$$

3) Згідно з довготою точок C і D , із додатка Б вибираємо значення S_n та обчислюємо довжину дуги паралелі за формулою (1.110), тобто

$$CD_m = 6 \cdot 71697 = 430182 \text{ (м)}.$$

4) На карті вимірюємо лінійкою довжину дуги меридіана AB_k та циркулем-вимірювачем довжину дуги паралелі CD_k у міліметрах, а саме:

$$AB_k = 44,0 \text{ (мм)}; CD_k = 44,1 \text{ (мм)}.$$

5) Обчислюємо числові масштаби довжин по меридіану і паралелі за формулами (1.111) та (1.112) у масштабі карти, тобто

$$\mu_{\text{мер}} = \frac{441000}{430182} = \frac{1}{9754694} \approx \frac{1}{9755000};$$

$$\mu_{\text{пар}} = \frac{440000}{444924} = \frac{1}{10111909} \approx \frac{1}{10112000}.$$

6) Окремий масштаб довжин по меридіанах та по паралелях одержуємо, скориставшись формулами (1.113) і (1.114), а саме:

$$m = \frac{1}{9754694} \div \frac{1}{10000000} = 1,0251;$$

$$n = \frac{1}{10111909} \div \frac{1}{10000000} = 0,9889.$$

7) Спотворення довжин по меридіанах v_m та по паралелях v_n обчислюється за формулами (1.115) і (1.116) відповідно, тобто

$$v_m = (1,0251 - 1)100 \% = 2,51 \%;$$

$$v_n = (0,9889 - 1)100 \% = -1,11 \%.$$

8) Допоміжні величини A і B визначаємо за формулами (1.119) і (1.120), а саме:

$$A = \sqrt{1,0251^2 + 0,9889^2 + 2 \cdot 1,0251 \cdot 0,9889 \sin 90^\circ 30'} = 2,0140;$$

$$B = \sqrt{1,0251^2 + 0,9889^2 - 2 \cdot 1,0251 \cdot 0,9889 \sin 90^\circ 30'} = 0,0372.$$

Тоді масштаби довжин по головних напрямках a і b можна розрахувати за виразами (1.117) і (1.118), тобто

$$a = \frac{2,0140 + 0,0372}{2} = 1,0256;$$

$$b = \frac{2,0140 - 0,0372}{2} = 0,9884.$$

9) Обчислюємо спотворення довжин по головних напрямках v_a і v_b , скориставшись формулами (1.121) та (1.122), а саме:

$$v_a = (1,0256 - 1)100 \% = 2,56 \%;$$

$$v_b = (0,9884 - 1)100 \% = -1,16 \%.$$

10) Значення азимута максимального спотворення довжин β_0 одержимо, застосовуючи формули (1.123) або (1.124), тобто

$$\beta_0 = \arctg \frac{0,9884}{1,0256} \sqrt{\frac{1,0256^2 - 1,0251^2}{1,0251^2 - 0,9884^2}} = 6^\circ 28'.$$

11) Масштаб площі визначається за формулою (1.125), а саме:

$$p = 1,0251 \cdot 0,9889 \sin 90^\circ 30' = 1,0137.$$

12) За формулою (1.126) спотворення площі

$$v_p = (1,0137 - 1)100\% = 1,37\%.$$

13) За формулою (1.127) спотворення кутів

$$\omega = 2 \arcsin \frac{1,0256 - 0,9884}{1,0256 + 0,9884} = 2^\circ 08' 22''.$$

14) Спотворення форм визначаємо, скориставшись виразом (1.128), тобто

$$w = \frac{1,0256}{0,9884} = 1,0376.$$

2. Побудова еліпса спотворень.

Виконавши наведені вище розрахунки, ми отримали необхідні величини для побудови еліпса спотворень, а саме: a, b, n, m, i, β_0 .

Тепер необхідно виконати подані вище методичні рекомендації (пункт 2 цього підрозділу) щодо визначення положення й орієнтування осей лінійних елементів a, b, n, m еліпса спотворень.

Обираємо умовний масштаб.

Перемножимо всі лінійні величини на масштаб та виконаємо дії, описані в пункті 2 побудови еліпса спотворень.

Виконавши всі рекомендації у заданій послідовності, будемо еліпс спотворень (рис. 1.17).

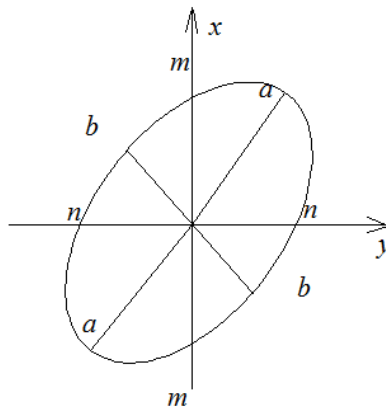


Рис. 1.17. Побудований еліпс спотворень

3. Висновки.

Побудований еліпс спотворень використовується для відображення величини спотворення в заданій точці картографічної сітки. У нашому випадку спотворення у заданій точці на топографічній карті дрібного масштабу близькі до значення одиниці. Це говорить про те, що картографічну проекцію заданої карти можна вважати рівнокутною.

1.16. Контрольні питання

1. Дайте визначення дисципліни картографії.
2. Що розуміють під картографічними творами?
3. Що є предметом картографії?
4. Що вивчає загальна теорія картографії?
5. Наведіть визначення математичної картографії.
6. Що вивчає цифрова картографія?
7. Дайте визначення картометрії.
8. Що досліджує морфометрія?
9. Наведіть визначення історії картографії.
10. Що вивчають проектування і складання карт?
11. Дайте визначення оформленню карт (картографічному дизайну).
12. Що розробляє дисципліна видання карт?
13. Що являє собою використання карт?
14. Що вивчає картографічне джерелознавство?
15. Дайте визначення картографічної інформатики.
16. Що розробляє картографічна семіотика?
17. Наведіть визначення картографічної топоніміки.
18. Що вивчає економіка й організація картографічного виробництва?
19. Наведіть основні завдання математичної картографії.
20. Які види спотворень під час відображення поверхні еліпсоїда на площині ви знаєте?
21. Який вид спотворень під час відображення поверхні еліпсоїда на площині є основним?
22. Наведіть умови безперервності відображення поверхні еліпсоїда на площині.
23. У чому виражається спотворення довжин?
24. У чому виражається спотворення площ?
25. У чому виражається спотворення кутів?
26. У чому виражається спотворення форм?
27. Дайте визначення земного еліпсоїда.
28. Перелічіть геометричні елементи земного еліпсоїда.
29. Що таке сфероїдні координати?
30. Дайте визначення сфероїдної широти.
31. Яких значень може набувати сфероїдна широта?
32. Який вигляд мають паралелі еліпсоїда?
33. Дайте визначення сфероїдної довготи.
34. Яких значень може набувати сфероїдна довгота?
35. Який вигляд мають меридіани еліпсоїда?
36. Дайте визначення полярного стиснення?

37. Що таке ексцентриситет?
38. Які радіуси кривизни еліпсоїда ви знаєте?
39. Наведіть параметри загальноземного еліпсоїда.
40. Який еліпсоїд використовуються на території України?
41. Укажіть параметри еліпсоїда, що використовуються на території України.
42. Наведіть математичні елементи карти.
43. Що таке масштаб карти?
44. Що таке картографічна проекція?
45. Дайте визначення рівнянь картографічної проекції.
46. Що таке координатна сітка?
47. Наведіть визначення картографічної сітки.
48. Що таке прямокутна сітка?
49. Що таке кілометрова квадратна сітка?
50. Що таке головний масштаб карти?
51. Що називається номенклатурою карти?
52. Дайте визначення системи розграфлення карти.
53. Наведіть визначення окремого масштабу довжин.
54. Від яких величин залежить значення окремого масштабу довжин?
55. При яких значеннях азимута напрямку окремий масштаб довжин називається масштабом довжин по меридіанах?
56. При яких значеннях азимута напрямку окремий масштаб довжин називається масштабом довжин по паралелях?
57. Напишіть формули для визначення коефіцієнтів Гаусса.
58. Що таке спотворення довжин?
59. Дайте визначення окремого масштабу площі.
60. Від яких величин залежить значення окремого масштабу площі?
61. Що таке спотворення площі?
62. Що таке спотворення кутів?
63. Від яких величин залежить значення спотворення кутів?
64. Що таке спотворення форм?
65. Від яких величин залежить значення спотворення форм?
66. Що таке ізоколи?
67. Що таке ізогони?
68. Сформулюйте основні критерії оцінки значущості картографічних проекцій.
69. При якому значенні кута між відображенням меридіанів і паралелей виконується умова ортогональності?
70. Що таке відхилення кута між відображенням меридіанів і паралелей від 90° ?
71. Коли коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю, то що це значить?
72. Із якою метою досліджують масштаб довжин?

73. Дайте визначення еліпса спотворень.
74. Які величини необхідно знати для побудови еліпса спотворень.
75. Які величини впливають на розмір еліпса спотворень?
76. Які величини впливають на орієнтування еліпса спотворень?
77. Сформулюйте положення Аполлонія.
78. Напишіть основні формули положень Аполлонія.
79. Що таке умова рівновеликості?
80. Від яких величин залежить максимальне спотворення кутів у точці?
81. Які види відображення поверхні еліпсоїда на площині ви знаєте?
82. Наведіть основну умову рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на площині.
83. Яка основна умова рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на площині.
84. Яка основна умова рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на площині?
85. Наведіть основну умову рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на площині.

2. ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ КУЛІ НА ПЛОЩИНІ

2.1. Геометричні елементи земної кулі

Основний геометричний елемент земної кулі, як видно з рис. 2.1, – її радіус R . Крім нього, можна виділити такі геометричні елементи земної кулі, аналогічні геометричним елементам земного еліпсоїда:

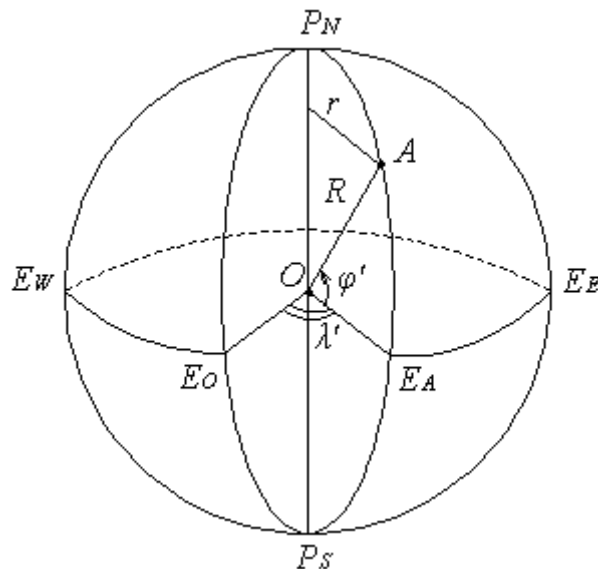


Рис. 2.1. Геометричні елементи земної кулі

- нормаль AO – перпендикуляр до поверхні кулі в точці A ;
- полярна вісь ($P_N P_S$);
- північний і південний полюси (P_N і P_S) – паралелі з нульовим радіусом кривизни;
 - екватор ($E_W E_O E_A E_E$) – найбільша паралель або паралель з найбільшим радіусом кривизни, який дорівнює радіусу кулі R ;
 - меридіани і паралелі – мають вигляд кіл;
 - сферична широта (φ') – кут у площині меридіану точки A від екватора до нормалі в точці A . Існує дві земні півкулі, які поділяються екватором на північну і південну, в яких сферична широта набуває значень від 0° на екваторі до 90° на полюсах;
 - сферична довгота (λ') – двогранний кут між площинами Гринвіцького і меридіана точки A . Існує дві земні півкулі, які поділяються Гринвіцьким меридіаном на східну і західну, в яких сферична довгота набуває значень від 0° на Гринвіцькому меридіані до 180° на лінії зміни дат.

Сферичні координати φ' і λ' дозволяють визначити положення тільки нормалі або точки на поверхні земної кулі.

Для земної кулі не характерні поняття полярного стиснення і ексцентриситету, тобто $\alpha = 0$ і $e = 0$.

Радіуси кривизни меридіана (1.5) і першого вертикала (1.6) земної кулі дорівнюють її радіусу, тобто

$$M = N = R. \quad (2.1)$$

Радіус кривизни паралелі земної кулі обчислюється за формулою, аналогічною виразу (1.7), у якому $W = 1$, а саме:

$$r = R \cos \varphi'. \quad (2.2)$$

2.2. Відображення поверхні кулі на площині

Як і поверхню еліпсоїда, поверхню кулі також неможливо розгорнути на площині без розривів або складок. Тому відображення поверхні кулі на площині виходить спотвореним. Аналогічно відображенню поверхні еліпсоїда на площині можна виділити чотири види спотворень:

- спотворення довжин;
- спотворення площ;
- спотворення кутів;
- спотворення форм.

Під час відображення поверхні кулі на площині також задано три умови безперервності (див. підрозділ 1.1).

Картографічна сітка для відображення поверхні кулі на площині є **ортогональною**, тобто виконується умова (1.64).

Загальні рівняння картографічної проекції (1.9) для відображення поверхні кулі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi', \lambda'), \\ y &= f_2(\varphi', \lambda'). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Окремий масштаб довжин

Окремий масштаб довжин (1.45) на поверхні кулі обчислюється за такою формулою:

$$\mu^2 = \frac{1}{R^2} \left(e \cos^2 \alpha + \frac{f}{\cos \varphi'} \sin 2\alpha + \frac{g}{\cos^2 \varphi'} \sin^2 \alpha \right). \quad (2.4)$$

Масштаб довжин по меридіанах

Якщо значення азимута напрямку $\alpha = 0^\circ$ (180°), то відповідно до формули (2.4) $\mu^2 = m^2 = \frac{e}{R^2}$. Тоді масштаб довжин по меридіанах можна обчислити за таким виразом:

$$m = \frac{\sqrt{e}}{R}. \quad (2.5)$$

Це рівняння також можна вивести, підставивши у формулу (1.48) вираз (2.1).

Масштаб довжин по паралелях

Якщо значення азимута напрямку $\alpha = 90^\circ$ (270°), то згідно з формулою (2.4) $\mu^2 = n^2 = \frac{g}{(R \cos \varphi')^2}$. Тоді масштаб довжин по паралелях можна обчислити таким чином:

$$n = \frac{\sqrt{g}}{R \cos \varphi'}. \quad (2.6)$$

Цю формулу також можна вивести, підставивши у рівняння (1.49) вираз (2.1).

Масштаб площі

При відображенні поверхні кулі, скориставшись виразом (1.88), масштаб площі обчислюють за такою формулою:

$$p = mn = \frac{h}{R^2 \cos \varphi'} = \frac{\sqrt{eg}}{R^2 \cos \varphi'}. \quad (2.7)$$

Азимут довільного напрямку

Азимут довільного напрямку на поверхні кулі (1.43) розраховують таким чином:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R \cos \varphi' d\lambda'}{R d\varphi'} = \frac{\cos \varphi' d\lambda'}{d\varphi'} = \frac{\cos \varphi'}{u}. \quad (2.8)$$

Азимут довільного напрямку на площині (1.56), з урахуванням виразу (2.8), обчислюють за таким рівнянням:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h R \operatorname{tg} \alpha}{e R \cos \varphi'} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{e \cos \varphi'} = \frac{\sqrt{g} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{e} \cdot \cos \varphi'} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{e} u}. \quad (2.9)$$

Спотворення кутів

Спотворення кутів при відображенні поверхні кулі обчислюють за аналогічною формулою (1.100), а саме:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{m-n}{m+n}.$$

2.3. Геоцентричні координати

Геоцентричні координати – це просторові прямокутні координати X, Y, Z , що віднесені до центра земного еліпсоїда або кулі.

На даний час у глобальній системі позиціонування GPS використовується світова геодезична система WGS-84 (G873), глобальна узгодженість якої становить близько 0,1 м. Світова геодезична система WGS-84 є загальноземною референчною системою. Визначення цієї системи дано Міжнародною службою обертання Землі. Її основні ознаки такі:

- система геоцентрична (визначаючи центр мас, враховують також маси океанів та атмосфери);
- її масштаб такий, як і в локальній системі координат з урахуванням релятивістської теорії гравітаційного поля;
- орієнтація системи відбувається за визначенням Міжнародного бюро часу на епоху 1984 року;
- зміни положення системи в часі мають узгоджуватися з рухом земної кори.

Система WGS-84 є правостороння ортогональна система координат, початок якої суміщений із центром мас Землі (рис. 2.2).

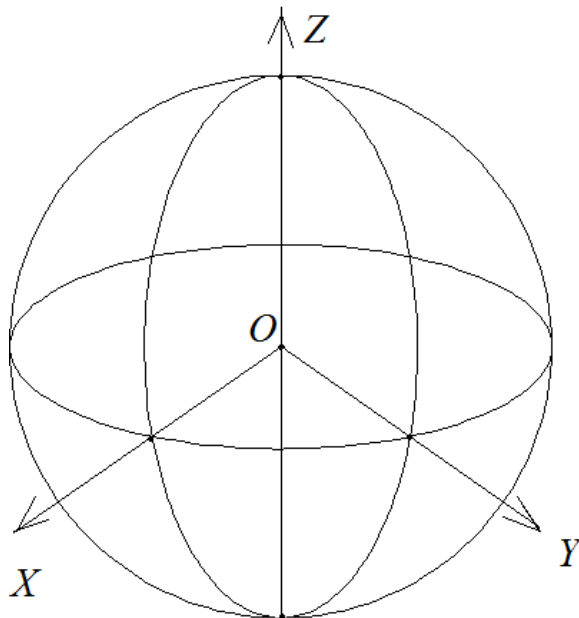


Рис. 2.2. Система координат WGS-84

Систему WGS-84 задають таким чином (рис. 2.2):

- за початок координат береться центр мас Землі;
- вісь Z спрямована на умовний земний полюс, як рекомендовано Міжнародною службою обертання Землі. Цей напрямок відповідає

напрямку на загальноземний полюс за визначенням Міжнародного бюро часу на епоху 1984 року з похибкою 0,005";

- вісь X спрямована в точку перетину нульового (Гринвіцького) меридіана з площиною екватора, що встановлено Міжнародною службою обертання Землі;

- вісь Y завершує правосторонню ортогональну систему координат з початком у центрі мас Землі. Вона розміщена в площині екватора під кутом 90° на схід від осі X .

Координатна система WGS-84 суміщена з геометричним центром загальноземного еліпсоїда WGS-84, а вісь Z – з віссю обертання цього еліпсоїда.

2.3.1. Геоцентричні координати земного еліпсоїда

Рівняння для опису земного еліпсоїда в геоцентричних координатах X, Y, Z має такий вигляд:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1. \quad (2.10)$$

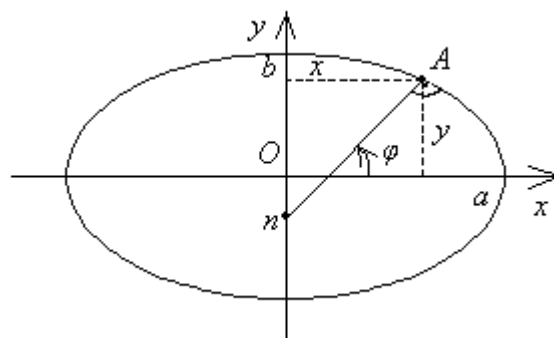


Рис. 2.3. Відображення меридіанного еліпса

За даними рис. 2.3 рівняння меридіанного еліпса набуває такого вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.11)$$

Між геоцентричними координатами X, Y, Z еліпсоїда й плоскими прямокутними координатами x, y еліпса існує зв'язок (рис. 2.4), звідки

$$\begin{aligned} X &= x \cos \lambda, \\ Y &= x \sin \lambda, \\ Z &= y, \end{aligned} \quad (2.12)$$

де λ – сферойдна довгота (двогранний кут між площиною меридіана даної точки й площиною меридіана, який проходить через вісь X).

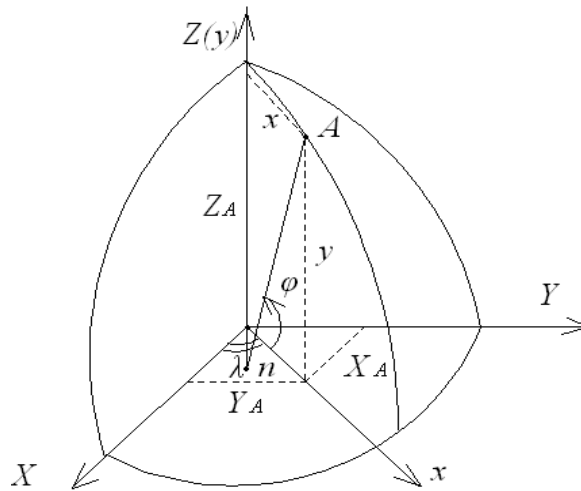


Рис. 2.4. Зв'язок між геоцентричними та плоскими прямокутними координатами

З урахуванням параметрів земного еліпсоїда і даних рис. 2.4

$$\begin{aligned}
 x = r = N \cos \varphi &= \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi}{W}, \\
 y = N(1 - e^2) \sin \varphi &= \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W}.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Підставивши вирази (2.13) у рівняння (2.12), одержимо остаточні формули для обчислення геоцентричних координат еліпсоїда, а саме:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{W}, \\
 Y &= \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{W}, \\
 Z &= \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W}.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

2.3.2. Геоцентричні координати земної кулі

Рівняння земної кулі радіуса R у геоцентричних координатах має такий вигляд:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2. \tag{2.15}$$

Рівняння меридіанного кола набуває такого вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2.16}$$

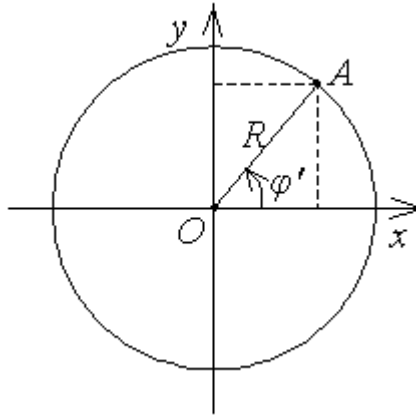


Рис. 2.5. Відображення меридіанного кола

Згідно з даними рис. 2.5

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, \\ y &= R \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Підставивши вирази (2.17) у рівняння (2.12), одержимо остаточні формули для обчислення геоцентричних координат земної кулі, а саме:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= R \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= R \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4. Полярні сферичні координати

За поверхню Землі в косих і поперечних картографічних проекціях береться тільки поверхня кулі, радіус якої залежить від якоїсь заданої умови (рівнокутне, рівновелике, рівнопроміжне по меридіанах або рівнопроміжне по паралелях відображення).

У косих і поперечних картографічних проекціях нормальна сітка не збігається з основною. Нормальною в цих проекціях буде сітка вертикалів і альмукантаратів.

Вертикали – це великі кола, що перетинаються в точках полюсів Q і Q' косої або поперечної систем координат.

Альмукантарати – це малі кола, перпендикулярні вертикалам.

Сітку вертикалів і альмукантаратів можна відобразити як зміщену сітку меридіанів і паралелей, у якій замість географічного полюса P , наявний полюс Q (φ_0, λ_0) косої або поперечної системи координат (рис. 2.6).

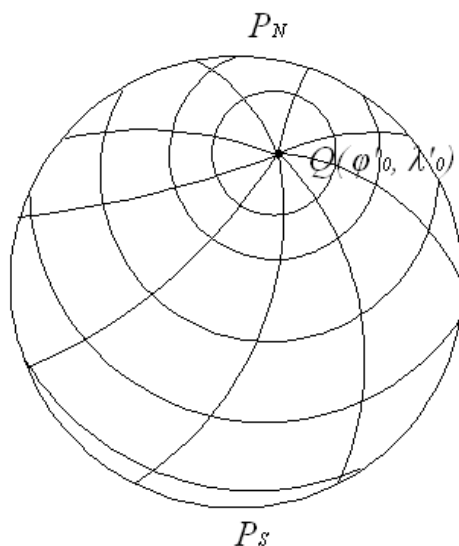


Рис. 2.6. Сітка вертикалів та альмукартарів

Положення вертикалів на картографічній поверхні визначається азимутом a , який дорівнює двогранному куту між площинами початкового і поточного вертикалів (рис. 2.7). Значення азимута a може бути від 0 до 360° . **Початковим** називається вертикал, який збігається з меридіаном полюса Q косої або поперечної системи координат, тобто має довготу λ_0 .

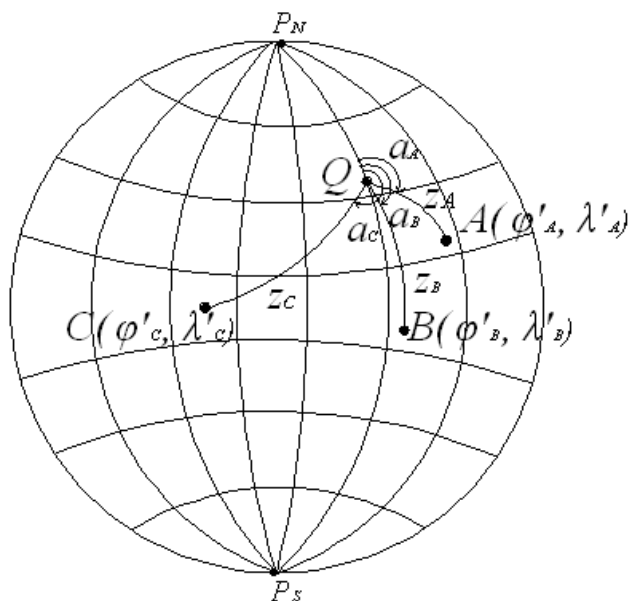


Рис. 2.7. Положення довільних точок у полярній сферичній системі координат

Положення альмукартарату на картографічній поверхні визначається зенітною відстанню z , що дорівнює дузі вертикала від полюса косої або поперечної систем координат Q до поточного альмукартарату (рис. 2.7). Зенітна відстань може набувати значень від 0° на полюсі Q до 180° на полюсі Q' .

Перехід від сферичних координат до сферичних полярних координат косої або поперечної проекції здійснюється за відомими формулами сферичної тригонометрії, а саме:

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin \varphi' \sin \varphi'_0 + \cos \varphi' \cos \varphi'_0 (\lambda'_0 - \lambda'), \\ \sin z \sin a &= \cos \varphi' \sin (\lambda'_0 - \lambda'), \\ \sin z \cos a &= \sin \varphi' \cos \varphi'_0 - \cos \varphi' \sin \varphi'_0 \cos (\lambda'_0 - \lambda').\end{aligned}\quad (2.19)$$

Поділивши у виразі (2.19) другу формулу на третю, одержимо таке співвідношення:

$$\operatorname{tga} = \frac{\cos \varphi' \sin (\lambda'_0 - \lambda')}{\sin \varphi' \cos \varphi'_0 - \cos \varphi' \sin \varphi'_0 \cos (\lambda'_0 - \lambda')}.\quad (2.20)$$

Для переходу до полярних сферичних координат необхідно знати координати φ'_0 і λ'_0 полюса Q . У косих картографічних проекціях вони задаються якоюсь умовою або визначаються за такими формулами:

$$\varphi'_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi'_i}{n},\quad (2.21)$$

$$\lambda'_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda'_i}{n},\quad (2.22)$$

де φ'_i , λ'_i – сферичні координати контура картографованої території, взяті через якийсь невеликий інтервал.

У поперечних картографічних проекціях довгота полюса Q визначається за аналогічною формулою (2.21), а його широта завжди дорівнює нулю ($\varphi'_0 = 0$).

2.5. Контрольні питання

1. Наведіть геометричні елементи земної кулі.
2. Який геометричний елемент земної кулі є основним? Поясніть свою відповідь?
3. Що таке сферичні координати?
4. Який вигляд мають паралелі при відображенні поверхні кулі на площині?
5. Дайте визначення сферичної широти.
6. Які значення може набувати сферична широта?
7. Який вигляд мають меридіани при відображенні поверхні кулі на площині?
8. Дайте визначення сферичної довготи.
9. Яких значень може набувати сферична довгота?

10. Який вигляд має картографічна сітка під час відображення поверхні кулі на площині?
11. Коли коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю, то що це значить?
12. Яких значень може набувати полярний стиснення?
13. Яких значень може набувати ексцентриситет?
14. Якому значенню дорівнює радіус кривизни меридіана?
15. Якого значення набуває радіус кривизни першого вертикала?
16. Які параметри з використаних для опису земного еліпсоїда не потрібні при описі земної кулі?
17. Які види спотворень виникають при відображенні поверхні кулі на площині?
18. Дайте визначення кожного виду спотворення.
19. Який вид спотворень відображеної поверхні кулі на площині є основним?
20. У чому виражається спотворення довжин?
21. У чому виражається спотворення площ?
22. У чому виражається спотворення кутів?
23. У чому виражається спотворення форм?
24. Наведіть умови безперервності відображення поверхні кулі на площині.
25. Дайте визначення окремого масштабу довжин.
26. Від яких величин залежить значення окремого масштабу довжин?
27. При яких значеннях азимута напрямку окремий масштаб довжин називається масштабом довжин по меридіанах?
28. Від яких величин залежить масштаб довжин по меридіанах під час відображення поверхні кулі на площині?
29. При яких значеннях азимута напрямку окремий масштаб довжин називається масштабом довжин по паралелях?
30. Від яких величин залежить масштаб довжин по паралелях під час відображення поверхні кулі на площині?
31. Що таке спотворення довжин?
32. Дайте визначення окремого масштабу площі.
33. Від яких величин залежить значення окремого масштабу площі?
34. Що таке спотворення площі?
35. Що таке спотворення кутів?
36. Від яких величин залежить значення спотворення кутів?
37. Що таке спотворення форм?
38. Від яких величин залежить значення спотворення форм?
39. Що таке геоцентричні координати?
40. Яким чином будують вісь X геоцентричних координат?
41. Яким чином будують вісь H геоцентричних координат?
42. Яким чином будують вісь Z геоцентричних координат?

43. Складіть рівняння для опису земного еліпсоїда в геоцентричних координатах.
44. Побудуйте меридіанний еліпс.
45. Напишіть рівняння меридіанного еліпса.
46. Який зв'язок існує між геоцентричними і плоскими прямокутними координатами земного еліпсоїда?
47. Напишіть рівняння земної кулі в геоцентричних координатах.
48. Накресліть меридіанне коло.
49. Напишіть рівняння меридіанного кола.
50. Який зв'язок існує між геоцентричними і плоскими прямокутними координатами земної кулі?
51. Чим відрізняються формули для обчислення геоцентричних координат поверхні еліпсоїда і кулі?
52. Що являє собою полярні сферичні координати?
53. Дайте визначення вертикалам.
54. Що таке початковий вертикал?
55. Дайте визначення альмукантарату.
56. Що таке азимут a полярних сферичних координат?
57. Яких значень може набувати азимут a ?
58. Що являє собою зенітна відстань z полярних сферичних координат?
59. Яких значень може набувати зенітна відстань z ?
60. Який вигляд має картографічна сітка в косих проекціях?
61. Яким чином визначають полюс у косих картографічних проекціях?
62. За якими формулами обчислюються координати полюса косих картографічних проекцій?
63. Який вигляд має картографічна сітка в поперечних проекціях?
64. Яким чином визначають полюс у поперечних картографічних проекціях?
65. За якими формулами обчислюють координати полюса поперечних картографічних проекцій?

3. ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПОВЕРХНІ КУЛІ

3.1. Основні положення

Картографічні проєкції можуть бути побудовані шляхом безпосереднього відображення поверхні еліпсоїда на площині (розділ 1) або *способом подвійного відображення*, коли поверхню еліпсоїда відображають на поверхні кулі, а потім останню відображають на площині. У більшості випадків спосіб подвійного відображення є більш простим і ефективним.

Загальні рівняння відображення еліпсоїда на поверхні кулі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi' &= f_1(\varphi, \lambda), \\ \lambda' &= f_2(\varphi, \lambda).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Якщо екваторіальні площини еліпсоїда і кулі та їх центри збігаються, то

$$\begin{aligned}\varphi' &= f(\varphi), \\ \lambda' &= \alpha\lambda,\end{aligned}\quad (3.2)$$

тут

$$\alpha = \frac{d\lambda'}{d\lambda}\quad (3.3)$$

– коефіцієнт пропорційності довгот, причому $\alpha \leq 1$.

Найбільш простим є спосіб, який дозволяє знехтувати полярним стисненням, тоді

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi, \\ \lambda' &= \lambda.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Радіус земної кулі залежить від поставленої умови, наприклад:

- рівність об'ємів кулі й еліпсоїда ($V_k = V_{el}$, тоді $R = \sqrt[3]{a^2b} = 6371108$ м);
- рівність площ поверхонь кулі й еліпсоїда ($P_k = P_{el}$, тоді $R = 6371116$ м);
- рівність довжини екваторів кулі й еліпсоїда або рівність радіуса кулі та великої півосі еліпсоїда ($R = a = 6378245$ м);
- рівність радіуса кулі та малої півосі еліпсоїда ($R = b = 6356863$ м);
- рівність довжин дуг меридіанів ($S_k^{90} = S_{el}^{90}$, тоді $R = 6367558$ м) або паралелей кулі й еліпсоїда тощо.

Наприклад, коли радіус кулі $R = a$, то спотворення довжин $\nu_\mu = -0,3 \div +0,7$ %, спотворення площ $\nu_p = \pm 0,7$ %, спотворення кутів

$\omega = 0,4^\circ$. А якщо радіус $R = \frac{a+b}{2}$, то спотворення довжин $\nu_\mu = \pm 0,5\%$, спотворення площ $\nu_p = -1,0 \div +0,4\%$, спотворення кутів $\omega = 0,4^\circ$.

Стосовно невеликих територій радіус кулі обчислюють за такими формулами:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{M_0 N_0}, \\ R &= \sqrt{R_N R_S}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

де M_0 і N_0 – радіуси кривизни меридіана (1.5) і першого вертикала (1.6) центральної точки відображуваної території еліпсоїда відповідно; R_N і R_S – середні радіуси кривизни (1.8) північної і південної точок відображуваної території еліпсоїда відповідно.

Виведемо основні формули для визначення масштабів і спотворень, що виникають під час відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

Окремий масштаб довжин

Згідно з формулою (1.12), окремий масштаб довжин

$$\mu = \frac{dl'}{dl} = \frac{\sqrt{dl_m'^2 + dl_n'^2}}{\sqrt{dl_m^2 + dl_n^2}}, \quad (3.6)$$

де dl – елементарний відрізок на поверхні еліпсоїда; dl' – відповідний елементарний відрізок на поверхні кулі; dl_m' і dl_n' – елементарні відрізки дуг меридіана і паралелі на поверхні кулі відповідно; dl_m і dl_n – елементарні відрізки дуг меридіана і паралелі на поверхні еліпсоїда (1.36) відповідно.

При цьому

$$\begin{aligned} dl_m' &= R d\varphi', \\ dl_n' &= R \cos \varphi' d\lambda'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

З урахуванням виразів (3.7) і (1.36) формула для визначення окремого масштабу довжин (3.6) набуде такого вигляду:

$$\mu^2 = \frac{R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2}{(Md\varphi)^2 + (rd\lambda)^2} = \frac{R^2 (d\varphi'^2 + \cos^2 \varphi' d\lambda'^2)}{(Md\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2}. \quad (3.8)$$

Масштаб довжин по меридіанах

Якщо $\lambda = \text{const}$, то з огляду на формулу (3.8) масштаб довжин по меридіанах можна обчислити, скориставшись таким виразом:

$$m = \frac{R d\varphi'}{M d\varphi}. \quad (3.9)$$

Масштаб довжин по паралелях

Коли $\varphi = \text{const}$, то згідно з формулою (3.8) масштаб довжин по паралелях обчислюємо таким чином:

$$n = \frac{R \cos \varphi' d\lambda'}{rd\lambda} = \alpha \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}. \quad (3.10)$$

Масштаб площі

З урахуванням формул (3.9) і (3.10) масштаб площі розраховуємо за таким виразом:

$$p = mn = \alpha \frac{R^2 \cos \varphi' d\varphi'}{MN \cos \varphi d\varphi}. \quad (3.11)$$

Спотворення кутів

Спотворення кутів обчислюється за вже відомою формулою (1.100), а саме:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{m-n}{m+n}.$$

Як видно з формул (3.8 – 3.11), при відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Звідси, максимальних значень масштаби довжин і площ набувають на полюсах, а мінімальних – на екваторі.

У математичній картографії найбільш поширені способи рівнокутного, рівновеликого та рівнопроміжного по меридіанах або паралелях відображення.

3.2. Рівнокутне відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда поверхні кулі ставиться умова незалежності масштабу довжини від напрямку, тобто зберігається подібність елементарних фігур ($w = 1$) і відсутні спотворення кутів ($\omega = 0$), тобто

$$\mu = m = n. \quad (3.12)$$

Підставивши у вираз (3.12) формули (3.9) і (3.10), одержимо таке співвідношення:

$$\frac{Rd\varphi'}{Md\varphi} = \alpha \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}. \quad (3.13)$$

Перетворимо вираз (3.13) таким чином, щоб ліворуч були елементи тільки сферичної широти, а праворуч – сфероїдної широти, а саме:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \alpha \frac{Md\varphi}{N \cos\varphi}. \quad (3.14)$$

З урахуванням формул (1.5) і (1.6)

$$\frac{M}{N} = \frac{1-e^2}{W^2} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (3.15)$$

Беручи до уваги формулу (3.15), вираз (3.14) записуємо таким чином:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \alpha \frac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)\cos\varphi}. \quad (3.16)$$

Помножимо e^2 у чисельнику формули (3.16) на вираз $(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$ і виконаємо таке перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} &= \alpha \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi)d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)\cos\varphi} = \\ &= \alpha \left(\frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)\cos\varphi} - \frac{(e^2 \cos^2 \varphi)d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)\cos\varphi} \right) = \\ &= \alpha \left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e \frac{e \cos\varphi d\varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уведемо таку умову:

$$\sin\psi = e \sin\varphi, \quad (3.18)$$

де ψ – функція широти, яка дорівнює нулю на екваторі, тобто при $\varphi = 0^\circ$.

Тепер

$$d(e \sin\varphi) = e \cos\varphi d\varphi = d(\sin\psi) = \cos\psi d\psi. \quad (3.19)$$

З урахуванням рівнянь (3.18) і (3.19) вираз (3.17) набуде такого вигляду:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \alpha \left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e \frac{\cos\psi d\psi}{1-\sin^2\psi} \right) = \alpha \left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e \frac{d\psi}{\cos\psi} \right). \quad (3.20)$$

Після інтегрування виразу (3.20)

$$\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) = \alpha \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) - \alpha e \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) + \ln C, \quad (3.21)$$

звідки

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) = CU^\alpha, \quad (3.22)$$

де U – ізометрична широта, що обчислюється за такою формулою:

$$U = \frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right)} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin\varphi}{1+e \sin\varphi} \right)^{\frac{e}{2}}. \quad (3.23)$$

У 1807 р. К.Б. Моллвейде було встановлено, а в 1825 р. К.Ф. Гауссом доведено, що рівнокутне відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується такими початковими умовами: на екваторі довжини не мають спотворень, $\varphi_0' = \varphi_0 = 0^\circ$ і $\lambda' = \lambda$, звідки $C = 1$ і $\alpha = 1$.

Значення сферичної широти з точністю до $0,1''$ може бути обчислене таким чином:

$$\varphi' = \varphi - A \sin 2\varphi + B \sin 4\varphi, \quad (3.24)$$

тут

$$A = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 \right) \rho = 692,23'',$$

$$B = \frac{5}{48} e^4 \rho = 0,96''.$$

Наближене значення сферичної широти можна знайти за такою формулою:

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{2} \rho \sin 2\varphi. \quad (3.25)$$

Наприклад, якщо значення сфероїдної широти $\varphi \approx 45^\circ$, то максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 12'$.

Радіус кулі

Радіус кулі обчислюється таким чином:

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_0 \right). \quad (3.26)$$

Тоді, якщо $\varphi_0 = 0^\circ$, то $R = a = 6378245$ м.

Масштаб довжин

Окремий масштаб довжин розрахуємо за такою формулою:

$$\mu = m = n \approx \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right). \quad (3.27)$$

Якщо $R = a$, то

$$\mu = m = n \approx 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi. \quad (3.28)$$

Наприклад, коли $\varphi = 90^\circ$, то $\mu_{\max} = 1,003$ або $\nu_{\mu_{\max}} = +0,3\%$.

Масштаб площі

Для обчислення цього параметра скористаємось такою формулою:

$$p = m^2 \approx \frac{R^2}{a^2} (1 + e^2 \sin^2 \varphi). \quad (3.29)$$

Коли $R = a$, то

$$p = m^2 \approx 1 + e^2 \sin^2 \varphi. \quad (3.30)$$

Наприклад, якщо $\varphi = 90^\circ$, то $p_{\max} = 1,007$ або $v_{p_{\max}} = +0,7\%$.

Основні формули для визначення рівнокутного відображення еліпсоїда

1. $\varphi' = \varphi - 692,23'' \sin 2\varphi + 0,96'' \sin 4\varphi$.
 2. $\lambda' = \lambda$.
 3. $R = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_0 \right)$, якщо $\varphi_0 = 0$, то $R = a = 6378245$ м.
 4. $\mu = m = n \approx \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right)$.
 5. $p = m^2 \approx \frac{R^2}{a^2} (1 + e^2 \sin^2 \varphi)$.
 6. $\omega = 0$.
- (3.31)

Як видно з основних формул (3.31), при рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі її радіус, масштаби довжин і площ залежать тільки від широти. Максимальні значення масштабів довжин і площ мають місце на полюсах, а мінімальні – на екваторі. Ізоколи мають вигляд концентричних кіл, що збігаються з паралелями.

3.3. Приклади розрахунків показників рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення значень радіуса земної кулі, сферичної широти, масштабів та спотворень при рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей зі значенням сферичної широти φ від екватора (0°) до полюса (90°) через 15° .

Значення сферичної широти φ' обчислюється за формулою (3.24). Результати розрахунків наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Значення сферичної довготи φ'

$\varphi, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
φ'	0°00'00"	14°54'15"	29°50'02"	44°48'28"	59°50'00"	74°54'14"	90°00'00"
$\varphi - \varphi'$	0°00'00"	0°05'45"	0°09'58"	0°11'32"	0°10'00"	0°05'46"	0°00'00"

За даними табл. 3.1 побудовано графік залежності різниці ($\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$) від значення сфероїдної широти φ (рис. 3.1).

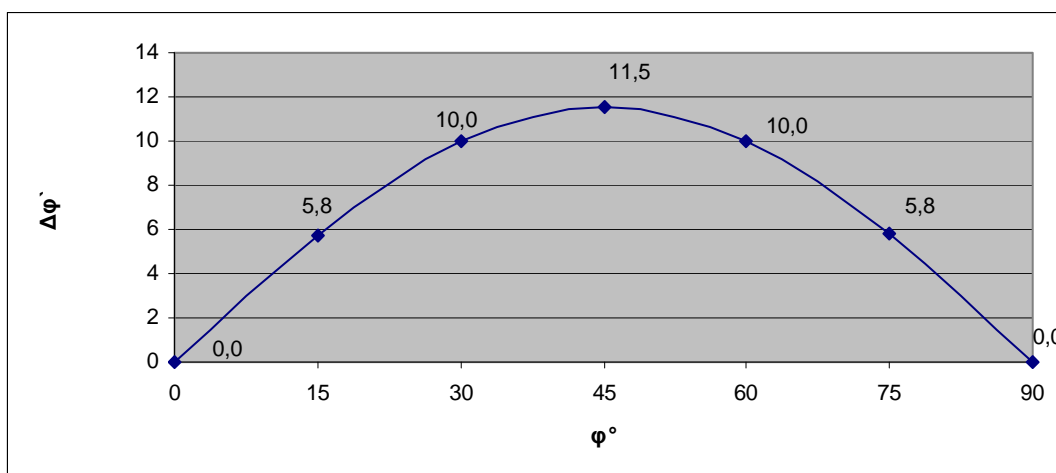


Рис. 3.1. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

Значення радіуса кулі обчислюється за формулою (3.26), якщо $e^2 = 0,0066934275$. Результати розрахунків наведені у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Значення радіуса земної кулі R

$\varphi_0, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
$R, \text{ м}$	6 378 245	6 372 720	6 367 572	6 363 151	6 359 759	6 357 626	6 356 899

За даними табл. 3.2 побудовано графік залежності радіуса земної кулі R від сфероїдної широти φ (рис. 3.2).

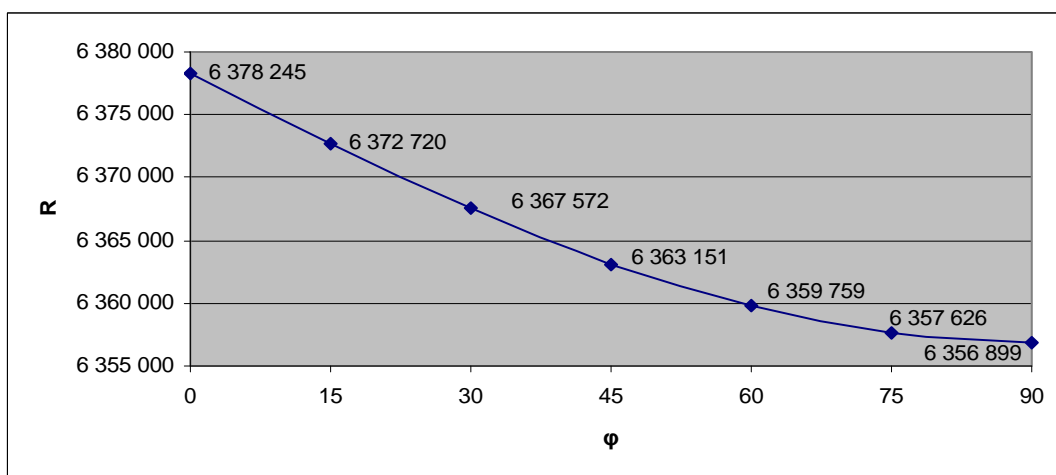


Рис. 3.2. Графік залежності R від широти φ

Для кожного значення R обчислимо по сім значень масштабів довжин та площ за формулами (3.27) і (3.29) відповідно. Результати розрахунків подано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Значення масштабів довжин і площ рівнокутного відображення
поверхні еліпсоїда

$R, \text{ м}$	$\varphi, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
6378245	m	1,000000	1,000224	1,000837	1,001673	1,002510	1,003123	1,003347
	p	1,000000	1,000448	1,001673	1,003347	1,005020	1,006245	1,006693
6372720	m	0,999134	0,999358	0,999970	1,000806	1,001642	1,002254	1,002478
	p	0,998268	0,998716	0,999939	1,001609	1,003280	1,004503	1,004950
6367572	m	0,998327	0,998550	0,999162	0,999997	1,000832	1,001444	1,001668
	p	0,996656	0,997103	0,998324	0,999992	1,001659	1,002880	1,003327
6363151	m	0,997634	0,997857	0,998468	0,999303	1,000138	1,000749	1,000972
	p	0,995273	0,995719	0,996938	0,998604	1,000269	1,001488	1,001934
6359759	m	0,997102	0,997325	0,997936	0,998770	0,999604	1,000215	1,000439
	p	0,994212	0,994658	0,995875	0,997539	0,999203	1,000421	1,000866
6357626	m	0,996767	0,996991	0,997601	0,998435	0,999269	0,999880	1,000103
	p	0,993545	0,993991	0,995208	0,996870	0,998533	0,999750	1,000195
6356899	m	0,996653	0,996877	0,997487	0,998321	0,999155	0,999765	0,999989
	p	0,993318	0,993763	0,994980	0,996642	0,998304	0,999521	0,999966

За даними табл. 3.3 побудовані графіки залежності масштабів довжин m та площ p від значення сферічної широти φ (рис. 3.3 – 3.9).

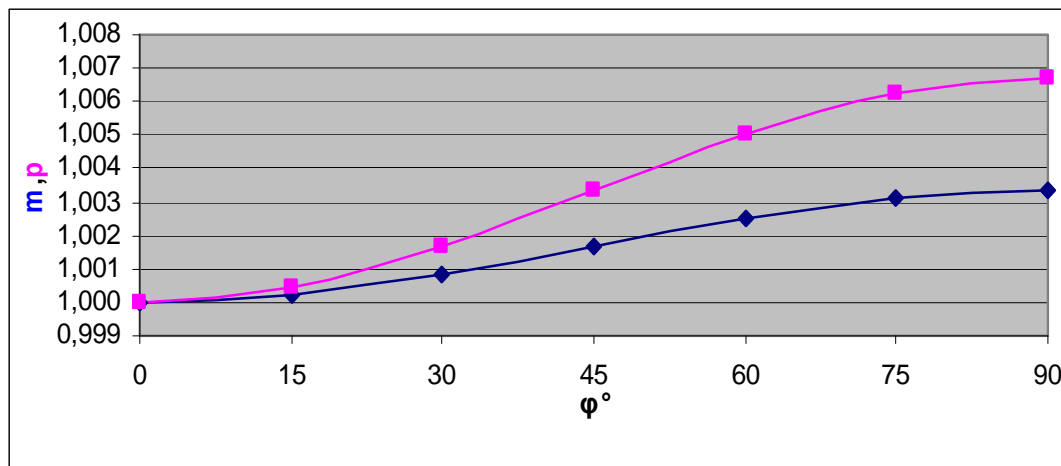


Рис. 3.3. Графік залежності m і p від широти φ , коли $R = 6378245$ м

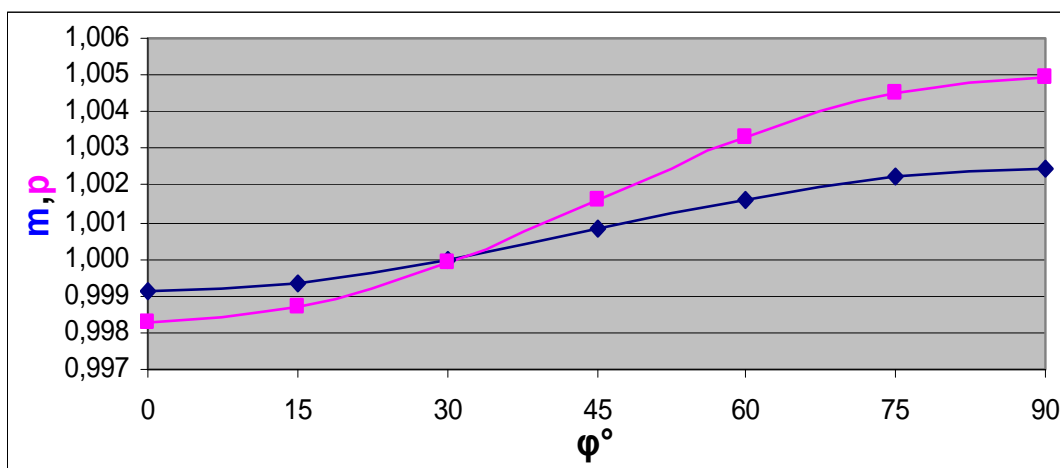


Рис. 3.4. Графік залежності m і p від широти φ , якщо $R = 6372521$ м

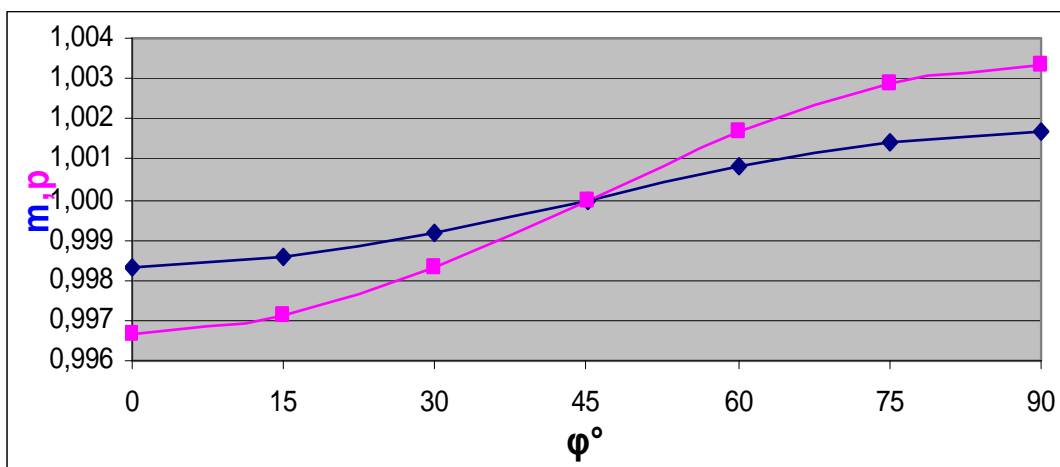


Рис. 3.5. Графік залежності m і p від широти φ , коли $R = 6367188$ м

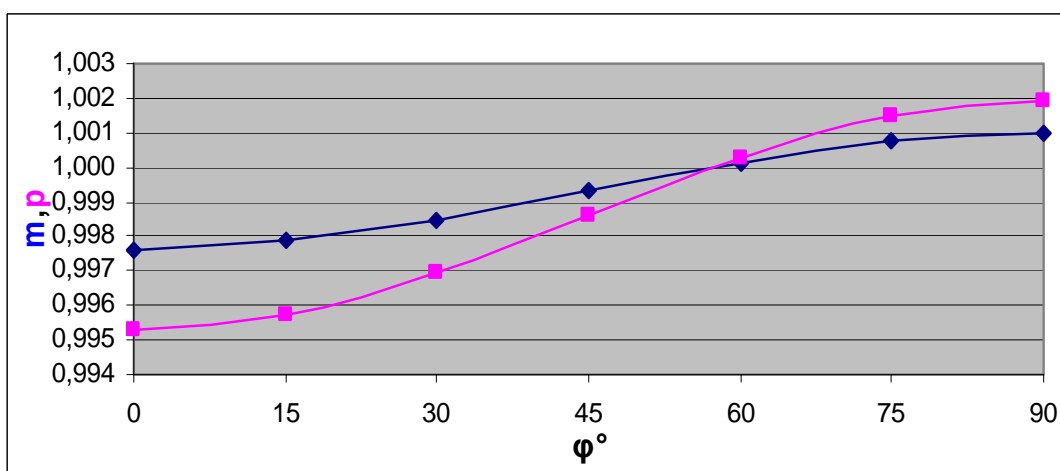


Рис. 3.6. Графік залежності m і p від широти φ , якщо $R = 6362608$ м

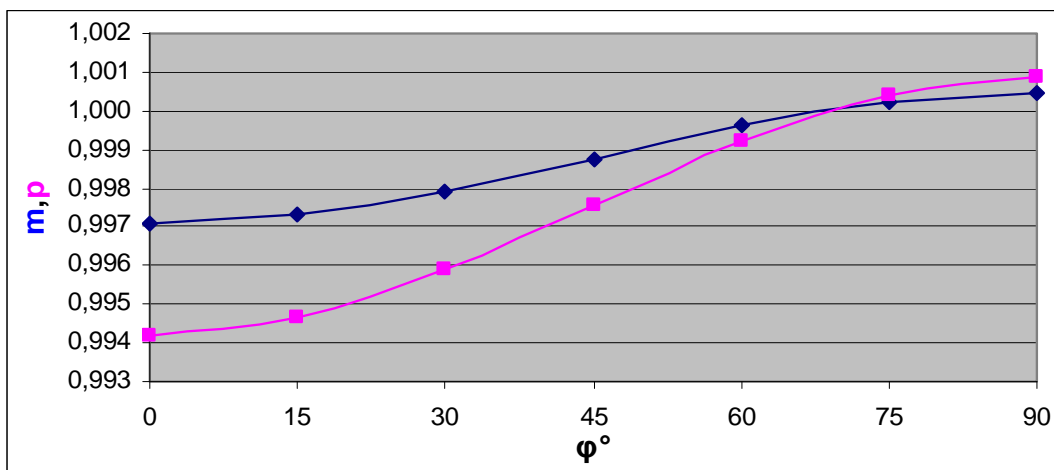


Рис. 3.7. Графік залежності m і p від широти φ , коли $R = 6359094$ м

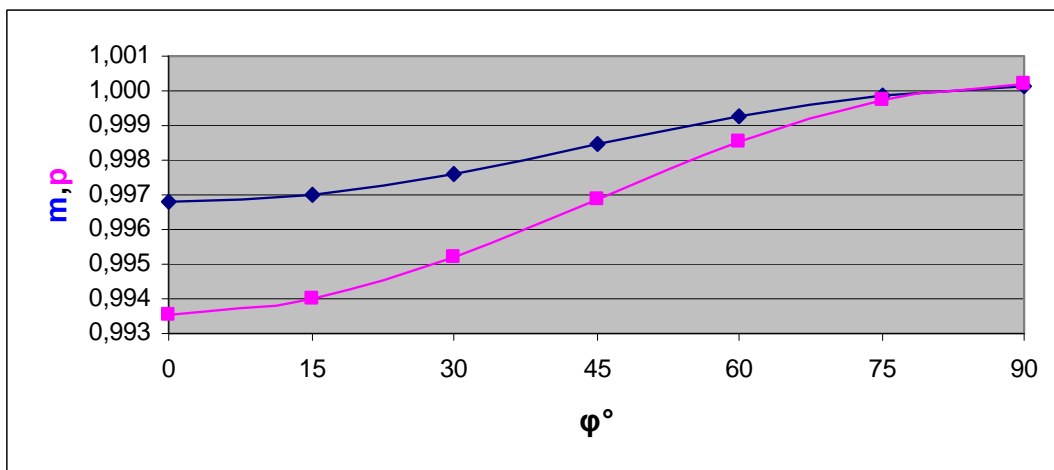


Рис. 3.8. Графік залежності m і p від широти φ , якщо $R = 6356885$ м

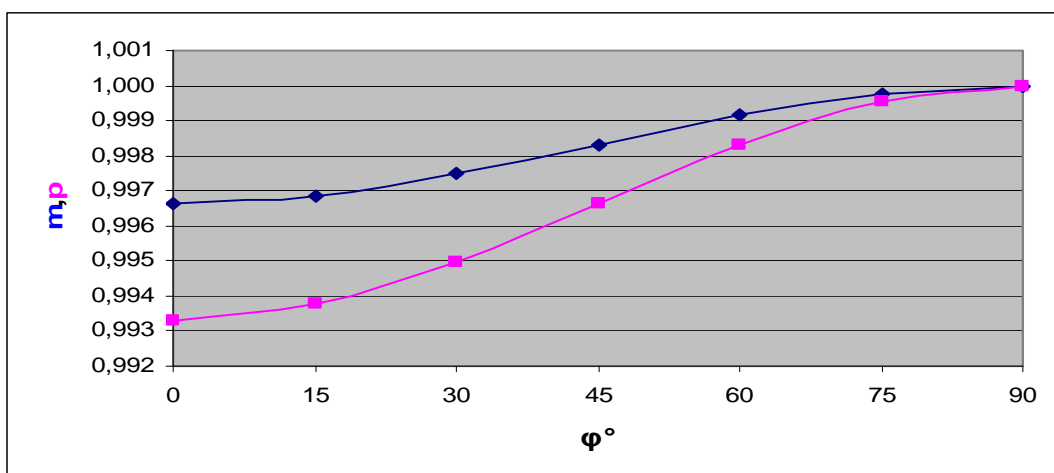


Рис. 3.9. Графік залежності m і p від широти φ , коли $R = 6356131$ м

Як видно з даних табл. 3.3 і рис. 3.3 – 3.9, висновки попереднього підрозділу підтверджено, а саме: при рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами буде у середніх широтах; радіус земної кулі, масштаби довжин і площ залежать тільки від широти. Максимальні значення масштабів довжин і площ мають місце на полюсах, а мінімальні – на екваторі.

3.4. Рівновелике відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ставиться умова збереження сталості відношення площ відображення і відображуваної поверхні, тобто масштаб площі є сталою величиною і, зокрема, дорівнює одиниці ($p = mn = const = 1$) або

$$p = \alpha \frac{R^2 \cos \varphi' d\varphi'}{MN \cos \varphi d\varphi} = 1. \quad (3.32)$$

Перетворимо вираз (3.32) таким чином, щоб ліворуч були елементи тільки сферичної широти, а праворуч – сфероїдної широти, тобто

$$\cos \varphi' d\varphi' = \frac{MN}{\alpha R^2} \cos \varphi d\varphi. \quad (3.33)$$

З урахуванням формул (1.5) і (1.6)

$$MN = \frac{a^2(1-e^2)}{W^4} = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2}. \quad (3.34)$$

З огляду на формулу (3.34) вираз (3.33) набуде такого вигляду:

$$\cos \varphi' d\varphi' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2}. \quad (3.35)$$

Розклавши праву частину виразу (3.35) в ряд Тейлора, робимо такий висновок:

$$\cos \varphi' d\varphi' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2} (1 + 2e^2 \sin^2 \varphi + 3e^4 \sin^4 \varphi + 4e^6 \sin^6 \varphi + \dots) \cos \varphi d\varphi. \quad (3.36)$$

Унаслідок інтегрування виразу (3.36) випливає, що

$$\sin \varphi' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2} \left(1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \sin^6 \varphi + \dots \right) \sin \varphi + C. \quad (3.37)$$

При рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі передбачають такі початкові умови: $\varphi_0' = \varphi_0 = 0^\circ$, $\varphi_{90^\circ}' = \varphi_{90^\circ} = 90^\circ$ і $\lambda' = \lambda$, тоді $C = 0$ і $\alpha = 1$.

Радіус кулі визначається з умови рівності площ поверхонь кулі й еліпсоїда ($P_k = P_{el}$), тобто

$$4\pi R^2 = 4\pi a^2(1 - e^2) \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right). \quad (3.38)$$

Виконавши деякі перетворення, одержимо такий вираз:

$$R^2 = a^2(1 - e^2) \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right) \quad (3.39)$$

або

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360}e^4 - \dots \right) = 6371116 \text{ м.} \quad (3.40)$$

Унаслідок підстановки отриманого виразу (3.39) у (3.37) випливає, що

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \frac{1 + \frac{2}{3}e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{5}e^4 \sin^4 \varphi + \frac{4}{7}e^6 \sin^6 \varphi + \dots}{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots}. \quad (3.41)$$

Значення сферичної широти з точністю до 0,1" може бути обчислене за формулою (3.24), а саме:

$$\varphi' = \varphi - A \sin 2\varphi + B \sin 4\varphi,$$

тут

$$A = \left(\frac{e^2}{3} + \frac{31}{180}e^4 \right) \rho = 461,81'',$$

$$B = \frac{17}{360}e^4 \rho = 0,44''.$$

Для наближених розрахунків сферичної широти можна застосовувати таку формулу:

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{3} \rho \sin 2\varphi. \quad (3.42)$$

Наприклад, якщо значення сфероїдної широти $\varphi \approx 45^\circ$, то максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 8'$.

Масштаб довжин по паралелях

З урахуванням виразу (3.41) масштаб довжин по паралелях (3.10) обчислюється за такою формулою:

$$n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi} \approx 1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi. \quad (3.43)$$

Наприклад, коли $\varphi = 0^\circ$, то $n_{\min} = 0,999$ або $v_{n \max} = -0,1\%$.

Масштаб довжин по меридіанах

Оскільки $p = m n = 1$, то

$$m = \frac{1}{n} \approx 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi. \quad (3.44)$$

Наприклад, якщо $\varphi = 0^\circ$, то $m_{\max} = 1,001$ або $v_{m_{\max}} = +0,1\%$.

Спотворення кутів

Для визначення цього показника, замість формули (1.100), краще використовувати формулу (1.99), тобто

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{m}{n}} = m \approx 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi \quad (3.45)$$

або

$$\omega = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi. \quad (3.46)$$

Наприклад, коли $\varphi = 0^\circ$, то максимальне спотворення кутів $\omega_{\max} \approx 8'$.

Основні формули для визначення рівновеликого відображення еліпсоїда

1. $\varphi' = \varphi - 461,81'' \sin 2\varphi + 0,44'' \sin 4\varphi.$

2. $\lambda' = \lambda.$

3. $R = a \left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360} e^4 \right) = 6371116 \text{ м.}$

4. $m = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi. \quad (3.47)$

5. $n = 1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi.$

6. $p = 1.$

7. $\omega = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi.$

Як видно з основних формул (3.47), у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин по меридіанах і по паралелях та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин та кутів мають місце на екваторі, на полюсах спотворень немає. Ізоколи й ізогони являють собою концентричні кола, що збігаються з паралелями.

3.5. Приклади розрахунків показників рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення величин сферичної широти, масштабів та спотворень при рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей із значенням сферичної широти φ від екватора (0°) до полюса (90°) через 15° , причому $e^2 = 0,0066934275$.

Значення сферичної широти φ' обчислюється за формулою (3.24), а саме: $\varphi' = \varphi - 461,81'' \sin 2\varphi + 0,44'' \sin 4\varphi$. Результати розрахунків наведено у табл. 3.4.

Значення масштабів довжин по меридіанах m та по паралелях n обчислено за формулами (3.44) і (3.43) відповідно. Результати розрахунків наведено у табл. 3.4.

Для порівняння значень спотворення кутів ω їх обчислено за трьома формулами (3.46), (1.100) і (3.45). Результати розрахунків наведено у табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Зведені результати обчислень показників рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда

$\varphi, ^\circ$	φ'			$\Delta\varphi$			m	n	ω								
									ρ			sin			tg		
	°	'	''	°	'	''			°	'	''	°	'	''	°	'	''
0	0	0	0	0	0	0	1,00112	0,99888	0	07	40	0	07	40	0	07	39
15	14	56	09	0	03	51	1,00104	0,99896	0	07	9	0	07	09	0	07	09
30	29	53	20	0	06	40	1,00084	0,99916	0	05	45	0	05	45	0	05	45
45	44	52	18	0	07	42	1,00056	0,99944	0	03	50	0	03	50	0	03	50
60	59	53	19	0	06	41	1,00028	0,99972	0	01	55	0	01	55	0	01	55
75	74	56	08	0	03	52	1,00007	0,99993	0	00	30	0	00	30	0	00	30
90	90	0	0	0	0	0	1,00000	1,00000	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Відповідно до результатів, наведених у табл. 3.4, були побудовані три графіки залежності показників рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда від значень сферичної широти φ , а саме: різниці ($\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$) на рис. 3.10, масштабу довжин по меридіанах m і масштабу довжин по паралелях n (рис. 3.11) та спотворень кутів ω (рис. 3.12).

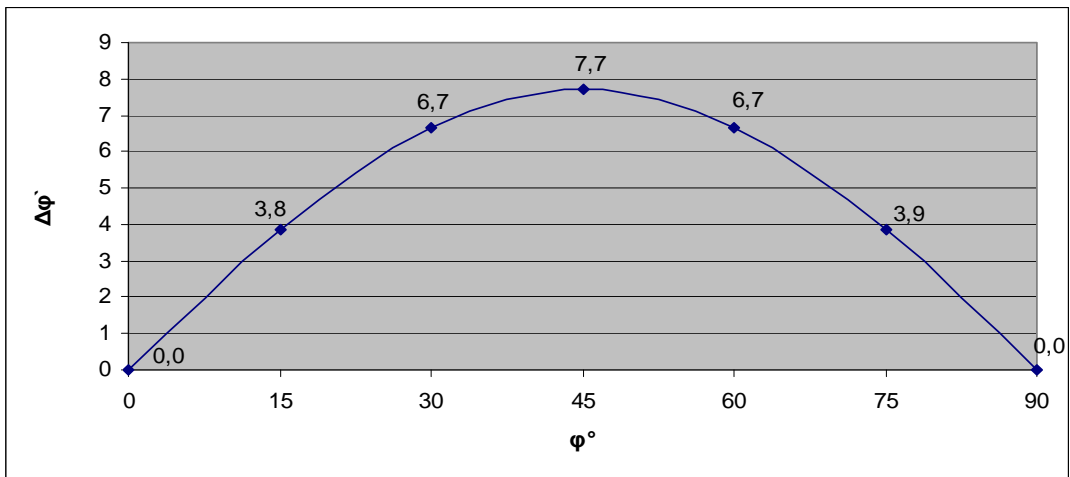


Рис. 3.10. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

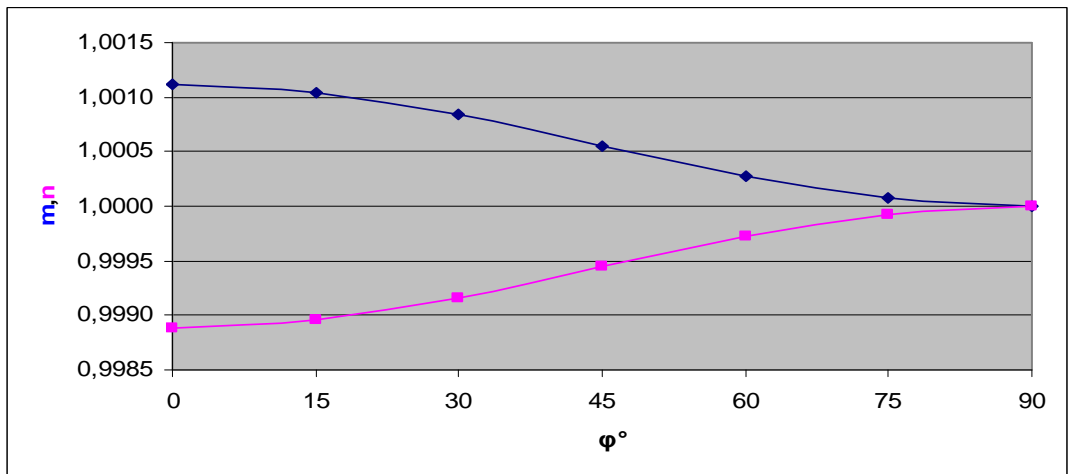


Рис. 3.11. Графік залежності m і n від широти φ

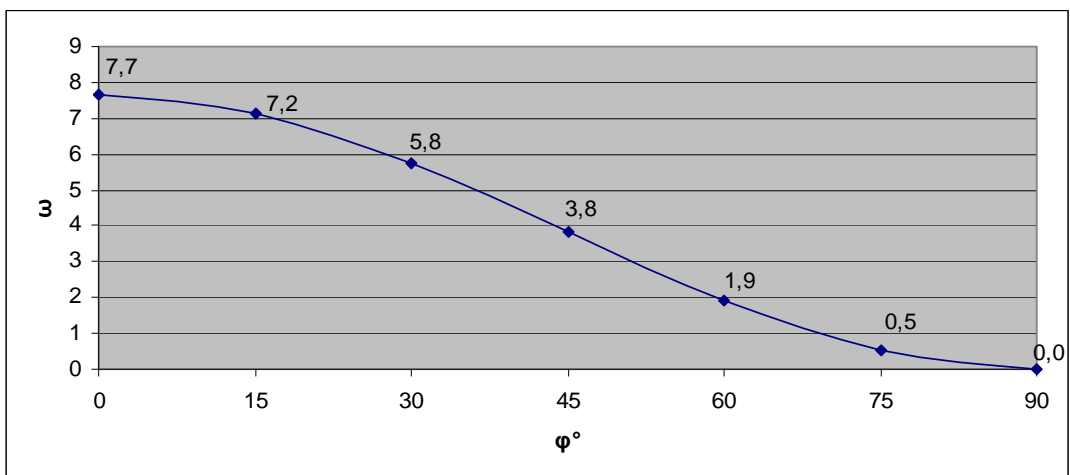


Рис. 3.12. Графік залежності ω від широти φ

Як видно з даних табл. 3.4 і рис. 3.10 – 3.12, висновки попереднього підрозділу підтвердились, а саме: при рівновеликому відображенні

поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами буде в середніх широтах; масштаби довжин по меридіанах і паралелях та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин та кутів мають місце на екваторі й відсутні на полюсах.

3.6. Рівнопроміжне по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ставиться умова рівності довжин меридіанів еліпсоїда і кулі, коли масштаб довжин по меридіанах дорівнює одиниці, тобто

$$m = \frac{Rd\varphi'}{Md\varphi} = 1. \quad (3.48)$$

Звідки

$$d\varphi' = \frac{Md\varphi}{R}. \quad (3.49)$$

Після інтегрування виразу (3.49) одержимо такий результат:

$$\varphi' = \frac{1}{R} \int_0^{\varphi} Md\varphi = \frac{S_{\varphi}}{R} + C, \quad (3.50)$$

тут $S_{\varphi} = \int_0^{\varphi} Md\varphi$ – довжина дуги меридіана від екватора до паралелі з широтою φ .

При рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі беруться до уваги такі початкові умови: $\varphi_0' = \varphi_0 = 0^{\circ}$, $\varphi_{90}' = \varphi_{90} = 90^{\circ}$, $\lambda' = \lambda$, тоді $C = 0$ і $\alpha = 1$.

Наприклад, якщо значення сфероїдної широти $\varphi \approx 45^{\circ}$, то максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 9'$.

Радіус кулі

Для визначення радіуса кулі ставиться умова, щоб довжини дуг меридіанів еліпсоїда і кулі від екватора до полюса були між собою рівні, тобто $S_{\kappa}^{90} = S_{el}^{90}$ або

$$R\varphi_{90^{\circ}} = S_{90^{\circ}}. \quad (3.51)$$

Звідки

$$R = \frac{S_{90^{\circ}}}{\varphi_{90^{\circ}}} = 6367558 \text{ м.} \quad (3.52)$$

Масштаб довжин по паралелях

Цей показник обчислюється за вже відомою формулою (3.10), тобто

$$n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}. \quad (3.53)$$

Наприклад, коли $\varphi = 0^\circ$, то $n_{\min} = 0,998$ або $v_{n \max} = -0,2 \%$.

Масштаб площі

Масштаб площі обчислюють за аналогічною формулою, а саме:

$$p = n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}. \quad (3.54)$$

Наприклад, якщо $\varphi = 0^\circ$, то $p_{\min} = 0,998$ або $v_{p \max} = -0,2 \%$.

Спотворення кутів

Спотворення кутів обчислюється за такими формулами:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{1-n}{1+n} = \frac{N \cos \varphi - R \cos \varphi'}{N \cos \varphi + R \cos \varphi'} \quad (3.55)$$

або

$$\omega = \frac{e^2}{4} \rho \cos^2 \varphi. \quad (3.56)$$

Наприклад, коли $\varphi = 0^\circ$, то максимальне спотворення кутів $\omega_{\max} \approx 6'$.

Основні формули для визначення параметрів рівнопряміжного по меридіанах відображення еліпсоїда

1. $\varphi' = \frac{S_\varphi}{R}$.
 2. $\lambda' = \lambda$.
 3. $R = \frac{S_{\varphi_{90^\circ}}}{\varphi_{90^\circ}} = 6367558$ м.
 4. $m = 1$.
 5. $n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}$.
 6. $p = n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}$.
 7. $\omega = \frac{e^2}{4} \rho \cos^2 \varphi$.
- (3.57)

Як видно з основних формул (3.57), у рівнопряміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби

довжин по паралелях і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Спотворення довжин по паралелях, площ та кутів на екваторі максимальні, а на полюсах їх немає. Ізоколи й ізогони являють собою концентричні кола, що збігаються з паралелями.

3.7. Приклади розрахунків показників рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення величин сферичної широти, масштабів та спотворень рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей зі значенням сферичної широти φ від екватора (0°) до полюса (90°) через 15° , коли $e^2 = 0,0066934275$.

Значення сферичної широти φ' обчислюється за формулою (3.50), а саме:

$$\varphi' = \frac{S_\varphi}{R}.$$

Результати розрахунків наведено в табл. 3.5.

Значення масштабів довжин по паралелях n та площ p обчислено за формулами (3.53) та (3.54). Результати розрахунків наведено у табл. 3.5.

Для порівняння значень спотворень кутів ω , їх обчислено за двома формулами (3.55) і (3.56). Результати розрахунків наведено в табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Зведені результати обчислень показників
рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда

$\varphi, ^\circ$	φ'			$\Delta\varphi$			n, p	ω					
								ρ			sin		
	°	'	"	°	'	"		°	'	"	°	'	"
0	0	0	0	0	0	0	0,998324	0	05	45	0	05	45
15	14	55	41	0	04	19	0,998436	0	05	22	0	05	22
30	29	52	31	0	07	29	0,998741	0	04	18	0	04	19
45	44	51	21	0	08	39	0,999159	0	02	52	0	02	53
60	59	52	30	0	07	30	0,999579	0	01	26	0	01	26
75	74	55	40	0	04	20	0,999886	0	00	23	0	00	23
90	90	0	0	0	0	0	1,000000	0	0	0	0	0	0

Відповідно до результатів, наведених у табл. 3.5, були побудовані три графіки залежності показників відображення поверхні еліпсоїда від значень сфероїдної широти φ , а саме: різниці ($\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$) на рис. 3.13, масштабу довжин по паралелях n і масштабу площ p (рис. 3.14) та спотворень кутів ω (рис. 3.15).

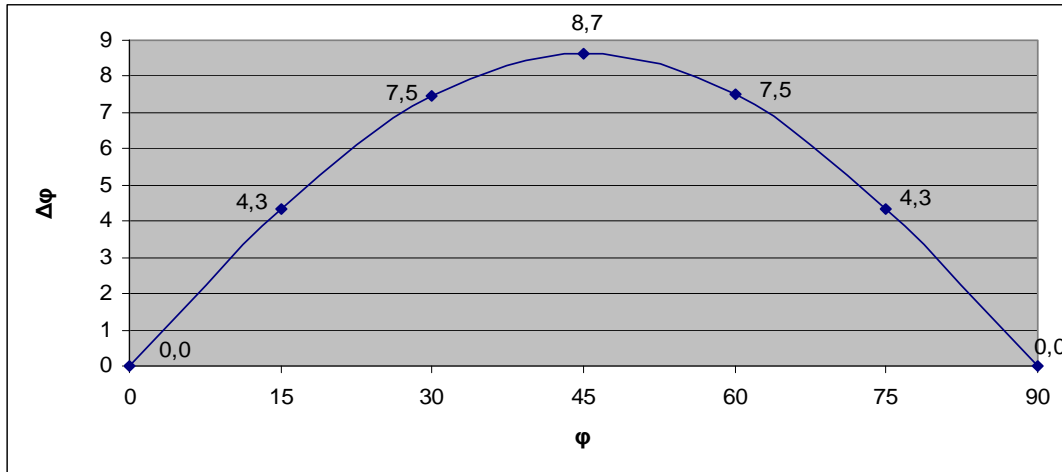


Рис. 3.13. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

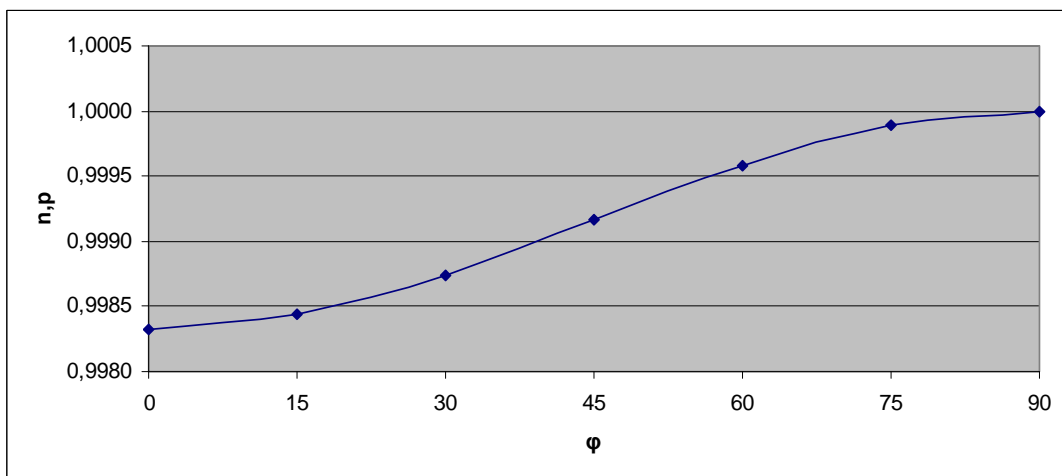


Рис. 3.14. Графік залежності n і p від широти φ

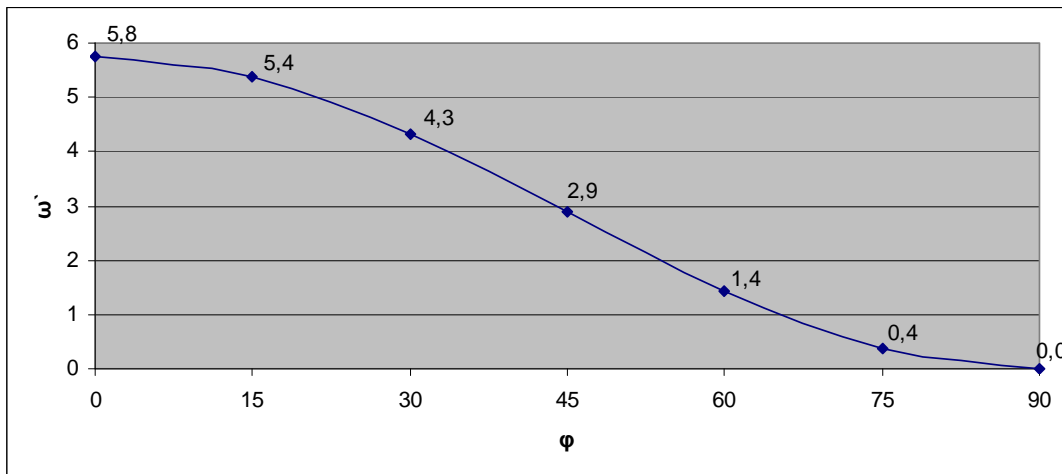


Рис. 3.15. Графік залежності ω від широти φ

Як видно з даних табл. 3.5 і рис. 3.13 – 3.15, висновки попереднього підрозділу підтверджено, а саме: при рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами спостерігається у середніх широтах; масштаби довжин по паралелях і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Спотворення довжин по паралелях, площ і кутів сягають максимальних значень на екваторі, на полюсах їх немає.

3.8. Рівнопроміжне по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ставиться умова рівності довжин паралелей еліпсоїда і кулі, коли масштаб довжин по паралелях дорівнює одиниці, тобто

$$n = \alpha \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi} = 1. \quad (3.58)$$

Звідки

$$\cos \varphi' = \frac{N}{\alpha R} \cos \varphi. \quad (3.59)$$

Виконуючи відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, передбачають такі початкові умови: $\varphi_0' = \varphi_0 = 0^\circ$, $\varphi_{90}' = \varphi_{90} = 90^\circ$ і $\lambda' = \lambda$, тоді $\alpha = 1$ і $R = a = 6378245$ м.

З урахуванням (1.6) вираз (3.59) набуде такого вигляду:

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3.60)$$

Для одержання більш простої формули обчислення сферичної широти рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі знайдемо $tg\varphi'$, а саме:

$$\begin{aligned} tg\varphi' &= \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi'}}{\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}}}{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}} = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi-e^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = \sqrt{1-e^2}tg\varphi. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Наприклад, коли значення сфероїдної широти $\varphi \approx 45^\circ$, то максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 6'$.

Масштаб довжин по меридіанах

Масштаб довжин по меридіанах з урахуванням виразу (1.5) обчислюється за такою формулою:

$$m = \frac{Rd\varphi'}{Md\varphi} = \frac{(\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi})^3 d\varphi'}{(1-e^2)d\varphi} = \dots = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (3.62)$$

Наприклад, коли $\varphi = 0^\circ$, то $m_{\max} = 1,003$ або $v_{m\max} = +0,3\%$.

Масштаб площі

Масштаб площі обчислюється за аналогічною формулою, тобто

$$p = m = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (3.63)$$

Наприклад, якщо $\varphi = 0^\circ$, то $p_{\max} = 1,003$ або $v_{p\max} = +0,3\%$.

Спотворення кутів

Цей показник обчислюється за такими формулами:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{m-1}{m+1} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-e^2}} \quad (3.64)$$

або

$$\omega = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2\varphi. \quad (3.65)$$

Наприклад, коли $\varphi = 0^\circ$, то максимальне спотворення кутів $\omega_{\max} \approx 12'$.

Основні формули для визначення показників рівнопроміжного по паралелях відображення еліпсоїда

1. $\operatorname{tg} \varphi' = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi$.
2. $\lambda' = \lambda$.
3. $R = a = 6378245$ м.
4. $m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2}}$.
5. $n = 1$.
6. $p = m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2}}$.
7. $\omega = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi$.

(3.66)

Як видно з основних формул (3.66), у рівнопроміжному по паралелях відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин по меридіанах і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин по меридіанах, площ та кутів спостерігаються на екваторі, на полюсах спотворень немає. Ізоколи й ізогони являють собою концентричні кола, що збігаються з паралелями.

3.9. Приклади розрахунку показників рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення величин сферичної широти, масштабів та спотворень рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей зі значенням сферичної широти φ від екватора (0°) до полюса (90°) через 15° , коли $e^2 = 0,0066934275$.

Значення сферичної широти φ обчислюється за формулою (3.61). Результати розрахунків наведено у табл. 3.6.

Значення масштабів довжин по меридіанах m та площ p обчислені за формулами (3.62) та (3.63). Результати розрахунків подано у табл. 3.6.

Для порівняння, значення спотворень кутів ω обчислено за двома формулами (3.65) і (3.64). Результати розрахунків зведено у табл. 3.6.

Зведені результати обчислень показників
рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда

$\varphi, ^\circ$	φ'			$\Delta\varphi$			m, p	ω					
								ρ			sin		
	°	'	''	°	'	''		°	'	''	°	'	''
0	0	0	0	0	0	0	1,0033636	0	11	30	0	11	30
15	14	57	08	0	02	52	1,0031386	0	10	44	0	10	40
30	29	55	01	0	04	59	1,0025238	0	08	37	0	08	37
45	44	54	14	0	05	46	1,0016832	0	05	45	0	05	45
60	59	55	00	0	05	0	1,0008420	0	02	52	0	02	52
75	74	57	07	0	02	53	1,0002257	0	00	46	0	00	46
90	90	0	0	0	0	0	1,0000000	0	0	0	0	0	0

Відповідно до результатів, наведених у табл. 3.6, були побудовані три графіки залежності показників відображення поверхні еліпсоїда від значень сфероїдної широти φ , а саме: різниці ($\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$) на рис. 3.16, масштабу довжин по меридіанах m і масштабу площ p (рис. 3.17) та спотворень кутів ω (рис. 3.18).

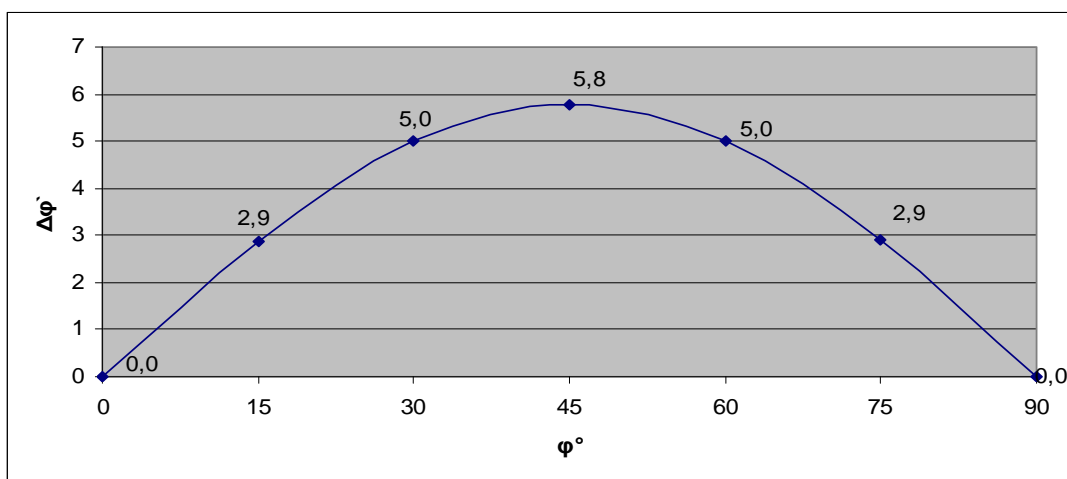


Рис. 3.16. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

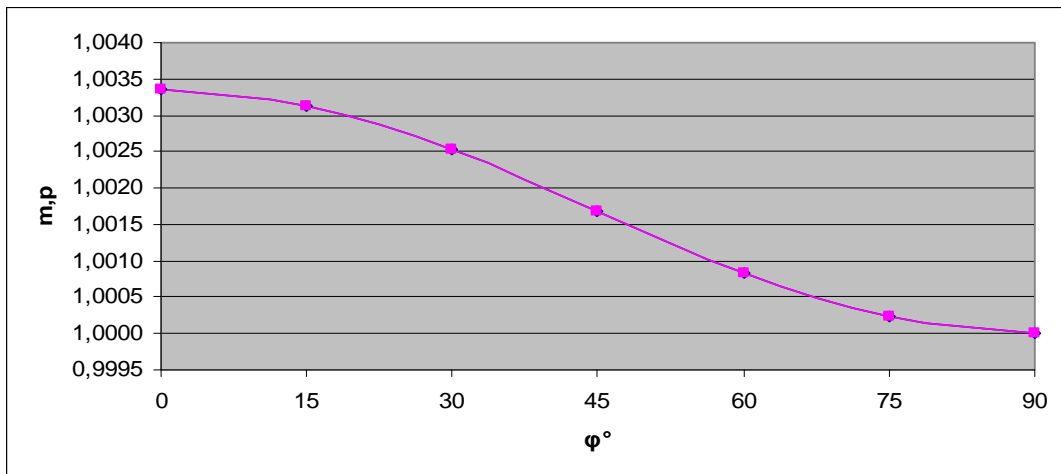


Рис. 3.17. Графік залежності n і p від широти φ

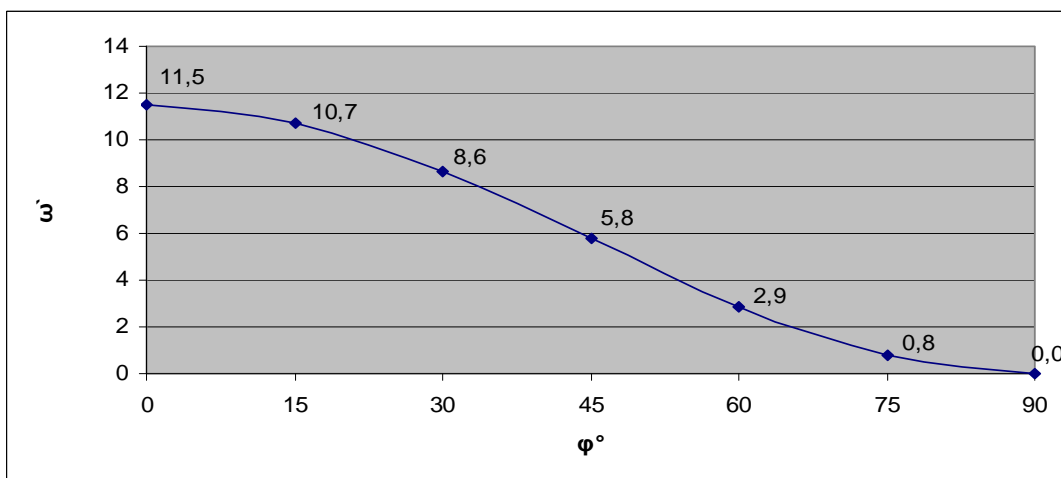


Рис. 3.18. Графік залежності ω від широти φ

Як видно з даних табл. 3.6 і рис. 3.16 – 3.18, висновки попереднього підрозділу підтверджено, а саме: у рівнопроміжному по паралелях відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдною і сферичною широтами спостерігається в середніх широтах; масштаби довжин по меридіанах і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин по меридіанах і площ та кутів мають місце на екваторі, на полюсах спотворень немає.

3.10. Завдання та методичні пояснення до виконання лабораторної роботи № 2

Тема: Дослідження рівнокутного, рівновеликого, рівнопроміжного по меридіанах і рівнопроміжного по паралелях відображень поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

Завдання: Скориставшись картографічною сіткою, меридіани якої мають такі значення довготи: $\lambda_1 = 30^\circ$, $\lambda_2 = 33^\circ$, $\lambda_3 = 36^\circ$, а паралелі – широти: $\varphi_s = 5^\circ + 3^\circ n$, $\varphi_0 = 8^\circ + 3^\circ n$, $\varphi_N = 11^\circ + 3^\circ n$ (де n – порядковий номер студента у списку академічної групи), перейти на поверхню кулі шляхом:

1. рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на кулі;
2. рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на кулі;
3. рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на кулі;
4. рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на кулі.

Значення сфероїдної широти φ , сферичної широти φ' , різниці широт $\Delta\varphi$, максимального спотворення кутів ω обчислити з точністю до 1"; значення масштабу довжин по меридіанах m , масштабу довжин по паралелях n , масштабу площі p – з точністю до 0,0001; значення радіуса земної кулі R – з точністю до 1 м.

Хід роботи

1. Рівнокутне відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

- 1) Значення сферичної широти обчислюють за такою формулою:

$$\varphi' = \varphi - 692,23'' \sin 2\varphi + 0,96'' \sin 4\varphi. \quad (3.67)$$

- 2) Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдної довготи, тобто

$$\lambda' = \lambda. \quad (3.68)$$

- 3) Різниці між сфероїдною та сферичною широтою обчислюють таким чином:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'. \quad (3.69)$$

- 4) Радіус кулі розраховують, скориставшись такою формулою:

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_0 \right), \quad (3.70)$$

тут $a = 6378245$ м – велика піввісь еліпсоїда; $e^2 = 0,0066934275$ – квадрат ексцентриситету земного еліпсоїда.

- 5) Масштаби довжин по меридіанах та по паралелях дорівнюють один одному, їх визначають за таким виразом:

$$m = n = \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi\right). \quad (3.71)$$

6) Значення масштабів площі розраховують таким чином:

$$p = m^2 = \frac{R^2}{a^2} \left(1 + e^2 \sin^2 \varphi\right). \quad (3.72)$$

7) Спотворення кутів відсутнє, тому

$$\omega = 0.$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.7.

2. Рівновелике відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Значення сферичної широти обчислюють за такою формулою:

$$\varphi' = \varphi - 461,81'' \sin 2\varphi + 0,44'' \sin 4\varphi. \quad (3.73)$$

2) Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдної довготи, його знаходять за формулою (3.68), тобто

$$\lambda' = \lambda.$$

3) Різниці між сфероїдною та сферичною широтою обчислюють за формулою (3.69), а саме:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'.$$

4) Радіус земної кулі за умови рівновеликого відображення еліпсоїда на поверхні кулі:

$$R = 6371116 \text{ м.}$$

5. Масштаби довжин по меридіанах визначають з такого виразу:

$$m = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi. \quad (3.74)$$

6) Масштаби довжин по паралелях обчислюють таким чином:

$$n = \left(1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi\right). \quad (3.75)$$

7) Масштаб площі є сталою величиною, тобто

$$p = 1.$$

8) Максимальні спотворення кутів визначають за формулою:

$$\omega = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi, \quad (3.76)$$

тут $\rho = 206265''$ – радіан у секундах.

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.7.

3. Рівнопроміжне по меридіанах відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Радіус земної кулі за умови рівнопроміжного по меридіанах відображення еліпсоїда на кулі

$$R = \frac{S_{90^\circ}}{90^\circ} = \frac{S_{90^\circ}}{\pi} 2 = 6367558 \text{ м}, \quad (3.77)$$

тут $S_{90} = 10002137$ м – значення довжини дуги меридіана від екватора до полюса, взяте з додатка Б до лабораторної роботи № 1.

2) Значення сферичної широти обчислюють таким чином:

$$\varphi' = \frac{S_\varphi}{R}, \quad (3.78)$$

де S_φ – довжина дуги меридіана від екватора до паралелі з широтою φ .

3) Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдної довготи та обчислюють за формулою (3.68), тобто

$$\lambda' = \lambda.$$

4) Різниці між сфероїдною та сферичною широтою визначають за виразом (3.69), а саме:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'.$$

5) Масштаб довжин по меридіанах у рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі – величина стала, тобто

$$m = 1.$$

6) Масштаби довжин по паралелях обчислюють таким чином:

$$n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}, \quad (3.79)$$

тут $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ – радіус кривизни першого вертикала (1.6).

7) Масштаби площі також визначають за формулою (3.79), тобто

$$p = n = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}.$$

8) Для розрахунку максимальних спотворень кутів скористаємось таким виразом:

$$\omega = \frac{e^2}{4} \rho \cos 2\varphi. \quad (3.80)$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.7.

4. Рівнопроміжне по паралелях відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Значення сферичної широти обчислюють за такою формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.81)$$

2) Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдної довготи, його обчислюють за формулою (3.68), тобто

$$\lambda' = \lambda.$$

3) Різниці між сфероїдною та сферичною широтою обчислюють за

формулою (3.69), а саме:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$$

4) Радіус земної кулі за умови рівнопроміжного по паралелях відображення еліпсоїда на поверхні кулі

$$R = a = 6378245 \text{ м.}$$

5) Масштаби довжин по меридіанах обчислюють таким чином:

$$m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (3.82)$$

6) Масштаб довжин по паралелях у рівнопроміжному по паралелях відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі – величина стала, тобто

$$n = 1.$$

7) Значення масштабу площі обчислюють за формулою (3.82), а саме:

$$p = m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

8) Максимальні спотворення кутів знаходимо таким чином:

$$\omega = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi. \quad (3.83)$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Результати розрахунку показників відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Вид відображення	Параметри і значення спотворень							
	$\varphi, ^\circ$	$\varphi, ^{\circ\prime\prime}$	$\Delta\varphi, ^{\prime\prime}$	$R, \text{ м}$	m	n	p	$\omega, ^{\circ\prime\prime}$
Рівнокутне	φ_N							$0^{\circ} 00'00''$
	φ_0							
	φ_S							
Рівновелике	φ_N			6371116			1,0000	
	φ_0							
	φ_S							
Рівнопроміжне по меридіанах	φ_N			6367558	1,0000			
	φ_0							
	φ_S							
Рівнопроміжне по паралелях	φ_N			6378245		1,0000		
	φ_0							
	φ_S							

Висновки

Студент має охарактеризувати всі чотири способи відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі за характером і розрахованими величинами спотворень.

3.11. Приклад виконання лабораторної роботи № 2

Вихідні дані: $\lambda_1 = 30^\circ$, $\lambda_2 = 33^\circ$, $\lambda_3 = 36^\circ$, $\varphi_s = 5^\circ$, $\varphi_0 = 8^\circ$, $\varphi_N = 11^\circ$.

Усі обчислені значення величин у цьому прикладі та інших даємо округленими, але в розрахунках використовувалися точніші значення.

Хід роботи

1. Рівнокутне відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67), а саме:

$$\varphi'_s = \varphi_s - 692,23'' \sin 2\varphi_s + 0,96'' \sin 4\varphi_s = 4^\circ 59' 58'',$$

$$\varphi'_0 = \varphi_0 - 692,23'' \sin 2\varphi_0 + 0,96'' \sin 4\varphi_0 = 7^\circ 59' 57'',$$

$$\varphi'_N = \varphi_N - 692,23'' \sin 2\varphi_N + 0,96'' \sin 4\varphi_N = 10^\circ 59' 55''.$$

2) Значення сферичної довготи дорівнюють значенням сфероїдної довготи (3.68), тобто

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30^\circ,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33^\circ,$$

$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36^\circ.$$

3) Різниці між сфероїдною та сферичною широтами обчислюються за формулою (3.69) таким чином:

$$\Delta\varphi_s = \varphi_s - \varphi'_s = 0^\circ 00' 02'',$$

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0^\circ 00' 03'',$$

$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0^\circ 00' 05''.$$

4) Радіус кулі знаходять за формулою (3.70), а саме:

$$R_0 = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_0 \right) = 6377832 \text{ м.}$$

5) Масштаби довжин по меридіанах та по паралелях рівні між собою і визначаються за формулою (3.71), тобто

$$m_s = n_s = \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_s\right) = 1,00000000,$$

$$m_0 = n_0 = \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_0\right) = 1,000000000,$$

$$m_N = n_N = \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_N\right) = 0,99999999.$$

6) Масштаб площі обчислюється за формулою (3.72), а саме:

$$p_s = m_s^2 = \frac{R^2}{a^2} \left(1 + e^2 \sin^2 \varphi_s\right) = 1,000000000,$$

$$p_0 = m_0^2 = \frac{R^2}{a^2} \left(1 + e^2 \sin^2 \varphi_0\right) = 0,999999999$$

$$p_N = m_N^2 = \frac{R^2}{a^2} \left(1 + e^2 \sin^2 \varphi_N\right) = 0,999999997.$$

7) Максимальні спотворення кутів відсутні, тому

$$\omega = 0.$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.8.

2. Рівновелике відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67) таким чином:

$$\varphi'_s = \varphi_s - 461,81'' \sin 2\varphi_s + 0,44'' \sin 4\varphi_s = 4^\circ 59' 59'',$$

$$\varphi'_0 = \varphi_0 - 461,81'' \sin 2\varphi_0 + 0,44'' \sin 4\varphi_0 = 7^\circ 59' 58'',$$

$$\varphi'_N = \varphi_N - 461,81'' \sin 2\varphi_N + 0,44'' \sin 4\varphi_N = 10^\circ 59' 57''.$$

2) Значення сферичної довготи дорівнюють значенню сфероїдної довготи та обчислюються за формулою (3.68), а саме:

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30^\circ,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33^\circ,$$

$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36^\circ.$$

3) Різниці між сфероїдною та сферичною широтами визначають за формулою (3.69) таким чином:

$$\Delta\varphi_s = \varphi_s - \varphi'_s = 0^\circ 00' 01'',$$

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0^\circ 00' 02'',$$

$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0^\circ 00' 03''.$$

4) Радіус земної кулі за умови рівновеликого відображення еліпсоїда на поверхні кулі

$$R = 6371116 \text{ м.}$$

5) Масштаби довжин по меридіанах визначаються за формулою (3.74), а саме:

$$m_s = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi_s = 1,0011,$$

$$m_0 = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi_0 = 1,0011,$$

$$m_N = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi_N = 1,0011.$$

6) Масштаби довжин по паралелях знаходять за формулою (3.75) таким чином:

$$n_s = (1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi_s) = 0,9989,$$

$$n_0 = (1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi_0) = 0,9989,$$

$$n_N = (1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi_N) = 0,9989.$$

7) Масштаб площі являє собою сталу величину, тобто

$$p = 1.$$

8) Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою (3.76), а саме:

$$\omega_s = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi_s = 0^\circ 07' 37'',$$

$$\omega_0 = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi_0 = 0^\circ 07' 31'',$$

$$\omega_N = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi_N = 0^\circ 07' 23''.$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.8.

3. Рівнопроміжне по меридіанах відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Радіус земної кулі за умови рівнопроміжного по меридіанах відображення еліпсоїда на кулі визначається за формулою (3.77), а саме:

$$R = \frac{S_{90^\circ}}{90^\circ} = \frac{S_{90}}{\pi} 2 = 6367558 \text{ м.}$$

2) Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67) таким чином:

$$\varphi'_s = \frac{S_{\varphi_s}}{R} = 4^\circ 58' 30'',$$

$$\varphi'_0 = \frac{S_{\varphi_0}}{R} = 7^\circ 57' 37'',$$

$$\varphi'_N = \frac{S_{\varphi_N}}{R} = 10^\circ 56' 46''.$$

3) Значення сферичної довготи дорівнюють значенню сфероїдної довготи та обчислюються за формулою (3.68), тобто

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30^\circ,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33^\circ,$$

$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36^\circ.$$

4) Різниці між сфероїдною та сферичною широтами розраховують, скориставшись формулою (3.69), а саме:

$$\Delta\varphi_s = \varphi_s - \varphi'_s = 0^\circ 01' 30'',$$

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0^\circ 02' 23'',$$

$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0^\circ 03' 14''.$$

5) Масштаб довжин по меридіанах у рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі:

$$m = 1.$$

6) Для обчислення масштабу довжин по паралелях необхідно знайти радіуси кривизни першого вертикала N таким чином:

$$N_s = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_s}} = 6378407 \text{ м},$$

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} = 6378658 \text{ м},$$

$$N_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_N}} = 6379022 \text{ м}.$$

Тоді значення масштабів довжин по паралелях обчислюються за формулою (3.79), а саме:

$$n_s = \frac{R \cos \varphi'_s}{N_s \cos \varphi_s} = 0,9983,$$

$$n_0 = \frac{R \cos \varphi'_0}{N_s \cos \varphi_0} = 0,9984,$$

$$n_N = \frac{R \cos \varphi'_N}{N_s \cos \varphi_N} = 0,9984.$$

7) Значення масштабів площ також обчислюються за формулою (3.79) таким чином:

$$p_s = n_s = \frac{R \cos \varphi'_s}{N_s \cos \varphi_s} = 0,9983,$$

$$p_0 = n_0 = \frac{R \cos \varphi'_0}{N_s \cos \varphi_0} = 0,9984,$$

$$p_N = n_N = \frac{R \cos \varphi'_N}{N_s \cos \varphi_N} = 0,9984.$$

8) Максимальні спотворення кутів знаходять за формулою (3.80), тобто

$$\omega_s = \frac{e^2}{4} \rho \cos 2\varphi_s = 0^\circ 05' 40'',$$

$$\omega_0 = \frac{e^2}{4} \rho \cos 2\varphi_0 = 0^\circ 05' 32'',$$

$$\omega_N = \frac{e^2}{4} \rho \cos 2\varphi_N = 0^\circ 05' 20''.$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графі табл. 3.8.

4. Рівнопроміжне по паралелях відображення еліпсоїда на поверхні кулі.

1) Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67) таким чином:

$$\varphi'_s = \arctg(\sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \varphi_s) = 4^\circ 58' 59'',$$

$$\varphi'_0 = \arctg(\sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \varphi_0) = 7^\circ 58' 25'',$$

$$\varphi'_N = \arctg(\sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \varphi_N) = 10^\circ 57' 50''.$$

2) Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдної довготи, його розраховують за формулою (3.68), а саме:

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30^\circ,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33^\circ,$$

$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36^\circ.$$

3) Різниці між сфероїдною та сферичною широтою визначають за формулою (3.69), тобто

$$\Delta \varphi_s = \varphi_s - \varphi'_s = 0^\circ 01' 01'',$$

$$\Delta \varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0^\circ 01' 35'',$$

$$\Delta \varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0^\circ 02' 10''.$$

4) Радіус земної кулі за умови рівнопроміжного по паралелях відображення еліпсоїда на кулі

$$R = a = 6378245 \text{ м.}$$

5) Масштаби довжин по меридіанах обчислюються за формулою (3.82) таким чином:

$$m_s = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_s}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,0033,$$

$$m_0 = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,0033,$$

$$m_N = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_N}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,0032.$$

6) Масштаб довжин по паралелях при рівнопроміжному по паралелях відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі:

$$n = 1.$$

7) Значення масштабів площ обчислюються за формулою (3.82), а саме:

$$p_s = m_s = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_s}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,0033,$$

$$p_0 = m_0 = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,0033,$$

$$p_N = m_N = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_N}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,0032.$$

8) Максимальні спотворення кутів знаходять за формулою (3.83) таким чином:

$$\omega_s = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi_s = 0^\circ 11' 25'',$$

$$\omega_0 = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi_0 = 0^\circ 11' 17'',$$

$$\omega_N = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi_N = 0^\circ 11' 05''.$$

Результати розрахунків заносимо у відповідні графи табл. 3.8.

Таблиця 3.8

Результати розрахунку показників відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Вид відображення	Параметри і значення спотворень							
	φ°	$\varphi', ''$	$\Delta\varphi, ''$	$R, \text{ м}$	m	n	p	$\omega, ''$
Рівнокутне	5	4°59'58"	0°00'05"	6377832	1,00000000	1,00000000	1,00000000	0°00'00"
	8	7°59'57"	0°00'03"		1,00000000	1,00000000	0,99999999	
	11	10°59'55"	0°00'02"		0,99999999	0,99999999	0,99999997	
Рівновелике	5	4°59'59"	0°00'01"	6371116	1,00111	0,99889	1,0000	0°07'37"
	8	7°59'58"	0°00'02"		1,00109	0,99891		0°07'31"
	11	10°59'57"	0°00'03"		1,00107	0,99893		0°07'23"
Рівнопроміжне по меридіанах	5	4°58'30"	0°01'30"	6367558	1,0000	0,9983	0,9984	0°05'40"
	8	7°57'37"	0°02'23"			0,9984		0°05'32"
	11	10°56'46"	0°03'14"			0,9984		0°05'20"
Рівнопроміжне по паралелях	5	4°58'59"	0°01'01"	6378245	1,0033	1,0000	1,0033	0°11'25"
	8	7°58'25"	0°01'35"		1,0033		1,0033	0°11'17"
	11	10°57'50"	0°02'10"		1,0032		1,0032	0°11'05"

Висновки

Як видно з результатів розрахунків і даних табл. 3.8, виконані за допомогою картографічної сітки меридіанів, значення довготи яких $\lambda_1 = 30^\circ$, $\lambda_2 = 33^\circ$, $\lambda_3 = 36^\circ$, і паралелей, широти яких $\varphi_s = 5^\circ$, $\varphi_0 = 8^\circ$, $\varphi_N = 11^\circ$, рівнокутне відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується такими ознаками:

- незначна різниця між сфероїдною та сферичною широтами;
- спотворення довжин по меридіанах m , спотворення довжин по паралелях n , спотворення площ p практично відсутні;
- спотворення кутів дорівнюють нулю, тобто $\omega = 0$.

Рівновелике відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі має такі характеристики:

- різниці між сфероїдною та сферичною широтами практично відсутні;
- спотворення довжин по меридіанах m , довжин по паралелях n та площ p незначні;
- спотворення кутів ω – досить суттєві і сягають значень понад $7,5'$.

Рівнопроміжне по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі набуває таких ознак:

- значна різниця між сфероїдною та сферичною широтами, що становить понад $3'$;

- спотворень довжин по меридіанах m немає, а спотворення довжин по паралелях n і спотворення площ p – дуже малі;

- спотворення кутів ω – значні й перевищують $5,5'$.

Рівнопроміжне по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі має такі характеристики:

- значна різниця між сфероїдною та сферичною широтами, яка становить понад $2'$;

- спотворень довжин по паралелях n немає, а спотворення довжин по меридіанах m і спотворення площ p – незначні;

- спотворення кутів ω – дуже суттєві і сягають майже $11,5'$.

3.12. Контрольні питання

1. Якими способами можуть бути побудовані картографічні проєкції?

2. Який спосіб побудови картографічних проєкцій є найбільш ефективним? Обґрунтуйте свою відповідь.

3. У чому полягає сутність способу подвійного відображення?

4. Напишіть загальні рівняння картографічних проєкцій при відображенні еліпсоїда на поверхні кулі.

5. Запишіть загальні рівняння картографічних проєкцій при відображенні еліпсоїда на поверхні кулі в найпростішому вигляді.

6. Які найбільш поширені умови обчислення радіуса кулі для відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

7. Що являє собою параметр α ?

8. Яких значень може набувати параметр α ?

9. Яких максимальних значень можуть набувати спотворення довжин у відображенні еліпсоїда на поверхні кулі?

10. У яких межах можуть перебувати максимальні значення спотворень площ у відображенні еліпсоїда на поверхні кулі?

11. Які максимальні значення можуть мати спотворення кутів у відображенні еліпсоїда на поверхні кулі?

12. Напишіть у загальному вигляді рівняння для розрахунку масштабу довжин для відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

13. Запишіть загальне рівняння для обчислення масштабу довжин по меридіанах для відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

14. Який вигляд має загальне рівняння для визначення масштабу довжин по паралелях у відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

15. Якого вигляду набуває загальне рівняння для розрахунку масштабу площ у відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

16. Запишіть загальне рівняння для визначення спотворення кутів у відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

17. Які найбільш поширені способи відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ви знаєте?

18. Яка основна умова рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

19. Які початкові умови потрібні для рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

20. Від чого залежать значення радіуса кулі, масштабів і спотворень рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

21. Від якої умови залежить радіус кулі у рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

22. Яких значень може набувати радіус кулі у рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

23. У яких широтах спостерігаються максимальні значення радіуса кулі рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

24. Яких значень може набувати радіус кулі на екваторі й полюсі в рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

25. У яких широтах мають місце максимальні значення спотворень довжин рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

26. Яких значень можуть набувати спотворення довжин на екваторі й полюсі у рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

27. У яких широтах спостерігаються максимальні значення спотворень площ рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

28. Яких значень можуть набувати спотворення площ на екваторі й полюсі в рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

29. У яких широтах спостерігаються максимальні значення спотворень кутів рівнокутного відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

30. Яких значень можуть набувати спотворення кутів на екваторі й полюсі в рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

31. Який вигляд мають ізоколи в рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

32. Якої форми набувають ізогони в рівнокутному відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

33. Яка основна умова висувається до рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

34. Які початкові умови передбачено для рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
35. З якої умови визначають радіус кулі для рівновеликого відображення поверхні еліпсоїда на її поверхні?
36. Яким має бути значення радіуса кулі в рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на її поверхні?
37. Від чого залежать значення масштабів і спотворень у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
38. У яких широтах спостерігаються максимальні значення спотворень довжин у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?
39. Яких значень можуть набувати спотворення довжин на екваторі й полюсі у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
40. У яких широтах мають місце максимальні значення спотворень площ у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?
41. Які значення спотворення площ мають місце на екваторі й полюсі у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
42. У яких широтах спотворення кутів у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі набувають максимальних значень, а в яких – мінімальних?
43. Які значення спотворення кутів на екваторі й полюсі мають місце у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
44. Який вигляд мають ізоколи у рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
45. Як виглядають ізогони в рівновеликому відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
46. Сформулюйте основну умову рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.
47. Які початкові умови використовують для рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
48. Яку умову враховують, визначаючи радіус кулі рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на її поверхні?
49. Яке значення радіуса кулі передбачають у рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на її поверхні?
50. Від яких показників залежать значення масштабів і спотворень у рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
51. У яких широтах значення спотворень довжин рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальні, а в яких – мінімальні?

52. Яких значень можуть набувати спотворення довжин на екваторі й полюсі в рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

53. У яких широтах значення спотворень площ рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальні, а в яких – мінімальні?

54. Яких значень можуть набувати спотворення площ на екваторі й полюсі у рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

55. У яких широтах значення спотворень кутів рівнопроміжного по меридіанах відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальні, а в яких – мінімальні?

56. Яких значень можуть набувати спотворення кутів на екваторі й полюсі у рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

57. Який вигляд мають ізоколи в рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

58. Якої форми набувають ізогони в рівнопроміжному по меридіанах відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

59. Назвіть основну умову для рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

60. Які початкові умови потрібні для рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

61. Яку умову беруть до уваги, визначаючи радіус кулі рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на її поверхні?

62. Яким чином визначають радіус кулі для рівнопроміжного по паралелях відображенні поверхні еліпсоїда на її поверхні?

63. Від яких параметрів залежать значення масштабів і спотворень у рівнопроміжному по паралелях відображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

64. У яких широтах значення спотворень довжин рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальні, а в яких – мінімальні?

65. Яких значень можуть набувати спотворення довжин на екваторі й полюсі у рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

66. У яких широтах спостерігаються максимальні значення спотворень площ рівнопроміжного по паралелях відображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

б) різниця між площею елементарної ділянки на площині та площею відповідної ділянки на поверхні еліпсоїда;

в) відношення елементарного відрізка на карті до відповідного елементарного відрізка на поверхні еліпсоїда;

г) відношення максимальних і мінімальних масштабів площ елементарних ділянок.

6. Які кутові величини необхідно й достатньо знати для побудови еліпса спотворень?

а) i, ε ;

б) φ, λ ;

в) β, ψ ;

г) i, β_0 .

7. Яку величину в математичній картографії позначають символом α ?

а) Коефіцієнт пропорційності довгот;

б) полярне стиснення;

в) кут між відображенням меридіанів і паралелей;

г) довготу.

8. Про що свідчить рівність коефіцієнта Гаусса f нулю?

а) Картографічна сітка ортогональна;

б) картографічна сітка нормальна;

в) картографічної сітки немає;

г) відображень меридіанів і паралелей немає.

9. Яку умову не використовують для рівнокутного відображення еліпсоїда на площині?

а) $m = n$;

б) $w = 1$;

в) $m = 1$;

г) $\omega = 0$.

10. Яких значень може набувати сфероїдна довгота λ ?

а) Від 0° до 90° ;

б) від 90° до 180° ;

в) від 0° до 180° .

г) від 0° до 360° .

11. Яких значень може набувати сфероїдна широта φ ?

а) Від 0° до 90° ;

б) від 90° до 180° ;

в) від 0° до 180° .

г) від 0° до 360° .

12. Які лінійні величини необхідно й достатньо знати для побудови еліпса спотворень?

а) m, n ;

б) a, b ;

в) a, b, m, n ;

г) i, β_0 .

21. Яке з понять не відноситься до геометричних елементів земної кулі?

- а) Сфероїдна широта;
- б) сферична широта;
- в) екватор;
- г) нормаль.

22. До видів спотворень у відображенні поверхні еліпсоїда на площині не відносять:

- а) спотворення кутів;
- б) кривизну першого вертикала;
- в) спотворення площ;
- г) спотворення довжин.

23. Яких значень може набувати зенітна відстань z у полярних сферичних координатах?

- а) Від 0° до 90° ;
- б) від 90° до 180° ;
- в) від 0° до 180° .
- г) від 0° до 360° .

24. Яких значень може набувати азимут a в полярних сферичних координатах?

- а) Від 0° до 90° ;
- б) від 90° до 180° ;
- в) від 0° до 180° .
- г) від 0° до 360° .

25. Ізоколи – це

- а) допоміжні лінії, паралельні меридіанам еліпсоїда;
- б) лінії, що з'єднують точки з однаковими значеннями спотворення кутів;
- в) лінії, що з'єднують точки з однаковими значеннями спотворень довжин і площ;
- г) допоміжні лінії, паралельні паралелям еліпсоїда.

Кожна правильна відповідь оцінюється в чотири бали. Помноживши кількість правильних відповідей на чотири, студент може дізнатися про рівень засвоєння матеріалу за критеріями, що подані в табл. 3.9.

Таблиця 3.9

Підсумки засвоєних знань за результатами тестування

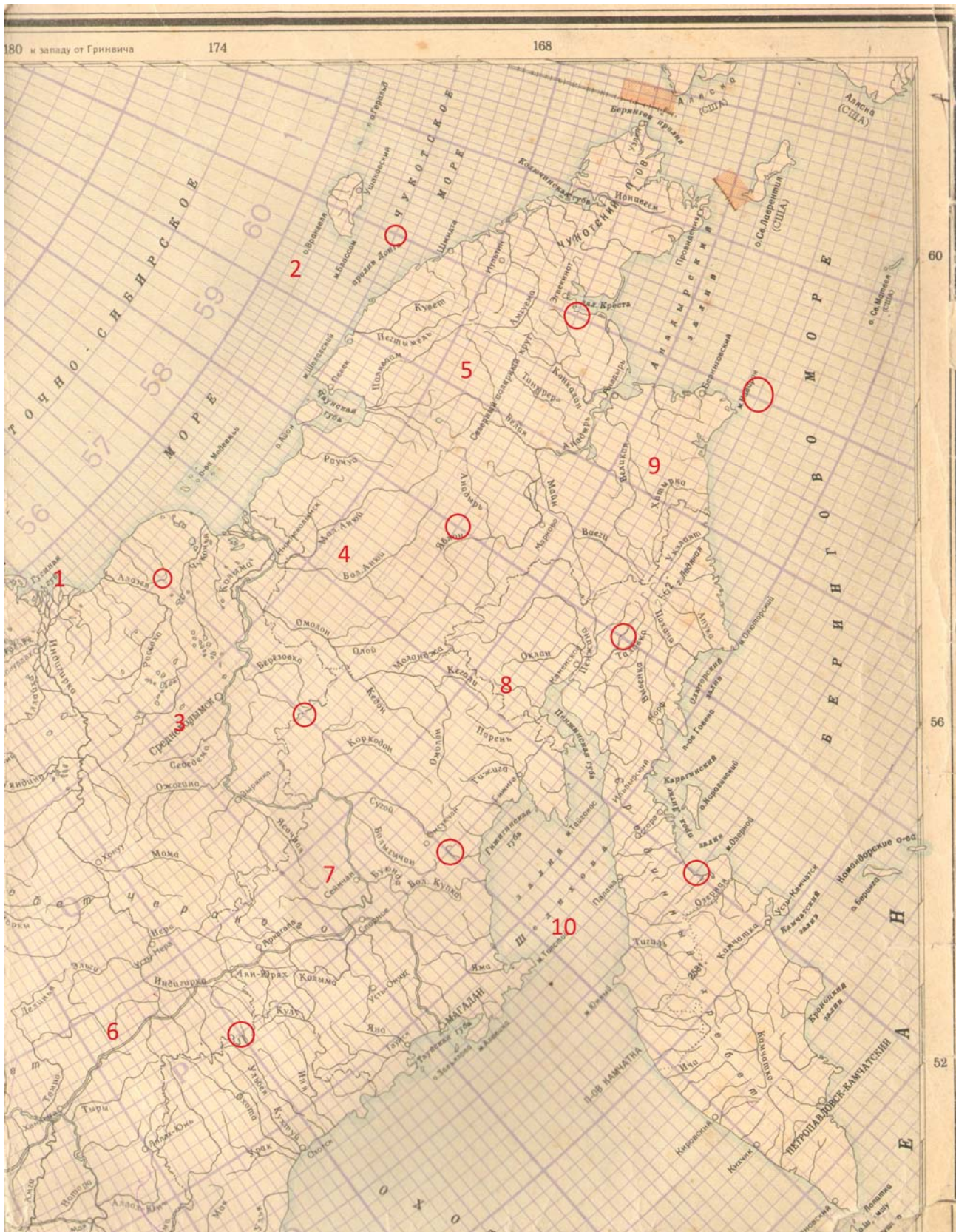
Сума балів	Оцінка за шкалою ECTS	Оцінка за національною шкалою
90 – 100	A	відмінно
82 – 89	B	добре
74 – 81	C	
64 – 73	D	задовільно
60 – 63	E	
35 – 59	FX	незадовільно
1 – 34	F	

ЛИТЕРАТУРА

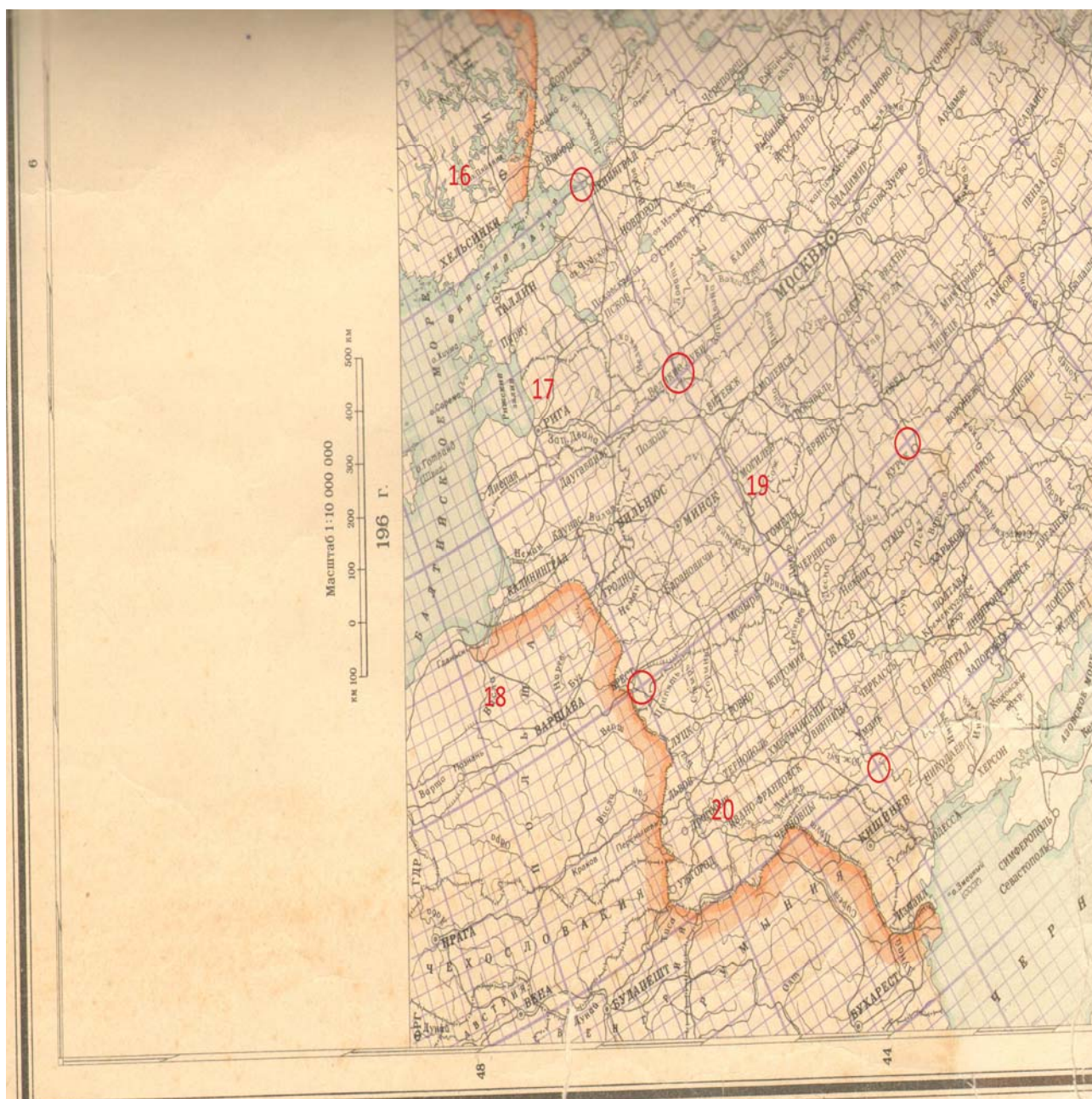
1. Берлянт А.М. Картография: учеб. для вузов / А.М. Берлянт; М-во образования РФ. – М. : Аспект Пресс, 2001. – 336 с.
2. Вахрамеева Л.А. Картография: учеб. для вузов / Л.А. Вахрамеева. – М. : Недра, 1981. – 224 с.
3. Вахрамеева Л.А. Математическая картография: учеб. для вузов / Л.А. Вахрамеева, Л.М. Бугаевский, З.Л. Казакова. – М. : Недра, 1986. – 286 с.
4. Геодезия. Том VI. Картография: Справочное руководство / Под общ. ред. М.Д. Бонч-Бруевича. – М. : Изд-во Наркомхоза РСФСР, 1939. – 164 с.
5. Каврайский В.В. Общая теория картографических проекций / В.В. Каврайский // Избр. труды. Том 2. – М. : Изд-во Гидрограф. службы ВМФ, 1958. – 312 с.
6. Мещеряков Г.А. Теоретические основы математической картографии: учеб. для вузов / Г.А. Мещеряков. – М. : Недра, 1984. – 248 с.
7. Павлов А.А. Практическое пособие по математической картографии / А.А. Павлов. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. – 171 с.
8. Салищев К.А. Картоведение: учеб. для ун-тов / К.А. Салищев; М-во высш. и сред. спец. образования СССР, Моск. гос. ун-т. – М. : МГУ, 1990. – 400 с.
9. Салищев К.А. Картография: учеб. для ун-тов / К.А. Салищев. – М. : Высш. шк., 1982. – 272 с.
10. Соловьев М.Д. Математическая картография: учеб. для ун-тов / М.Д. Соловьев. – М. : Недра, 1969. – 288 с.
11. Соловьев М.Д. Практическое пособие по математической картографии / М.Д. Соловьев. – М. : Изд-во геодез. и картограф. лит-ры, 1952. – 178 с.
12. Справочник по картографии / Под ред. Е.И. Халугина. – М. : Недра, 1988. – 427 с.
13. Толстоухов А.С. Картография: Конспект лекций / А.С. Толстоухов, М-во высш. и сред. спец. образования РСФСР, Ин-т инженер. геодез., аэрофосъемки и картогр. – М. : МИИГАиК, 1978. – 66 с.

Додаток А

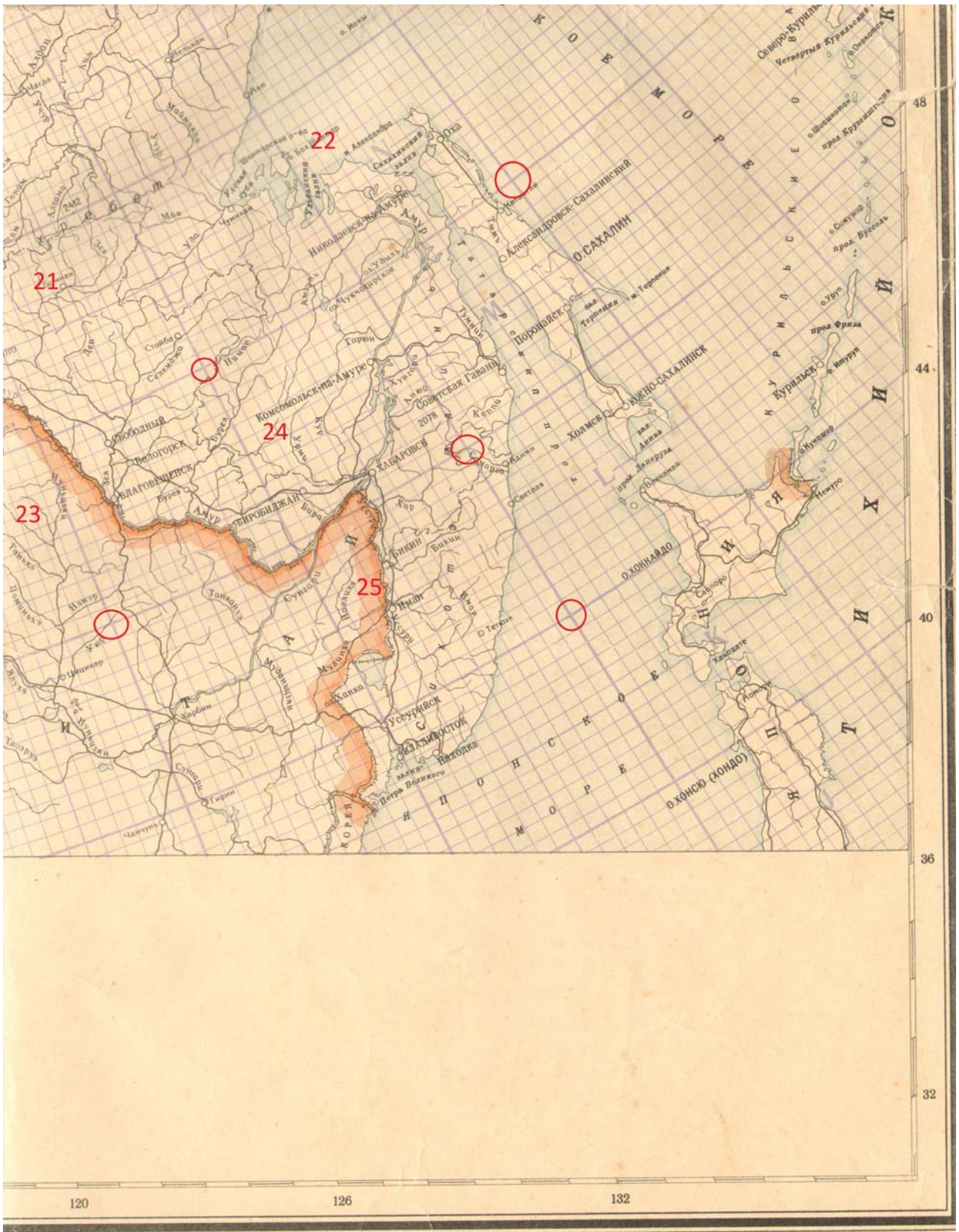
ВИХІДНІ ДАНІ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 1
Варіанти 1 – 10



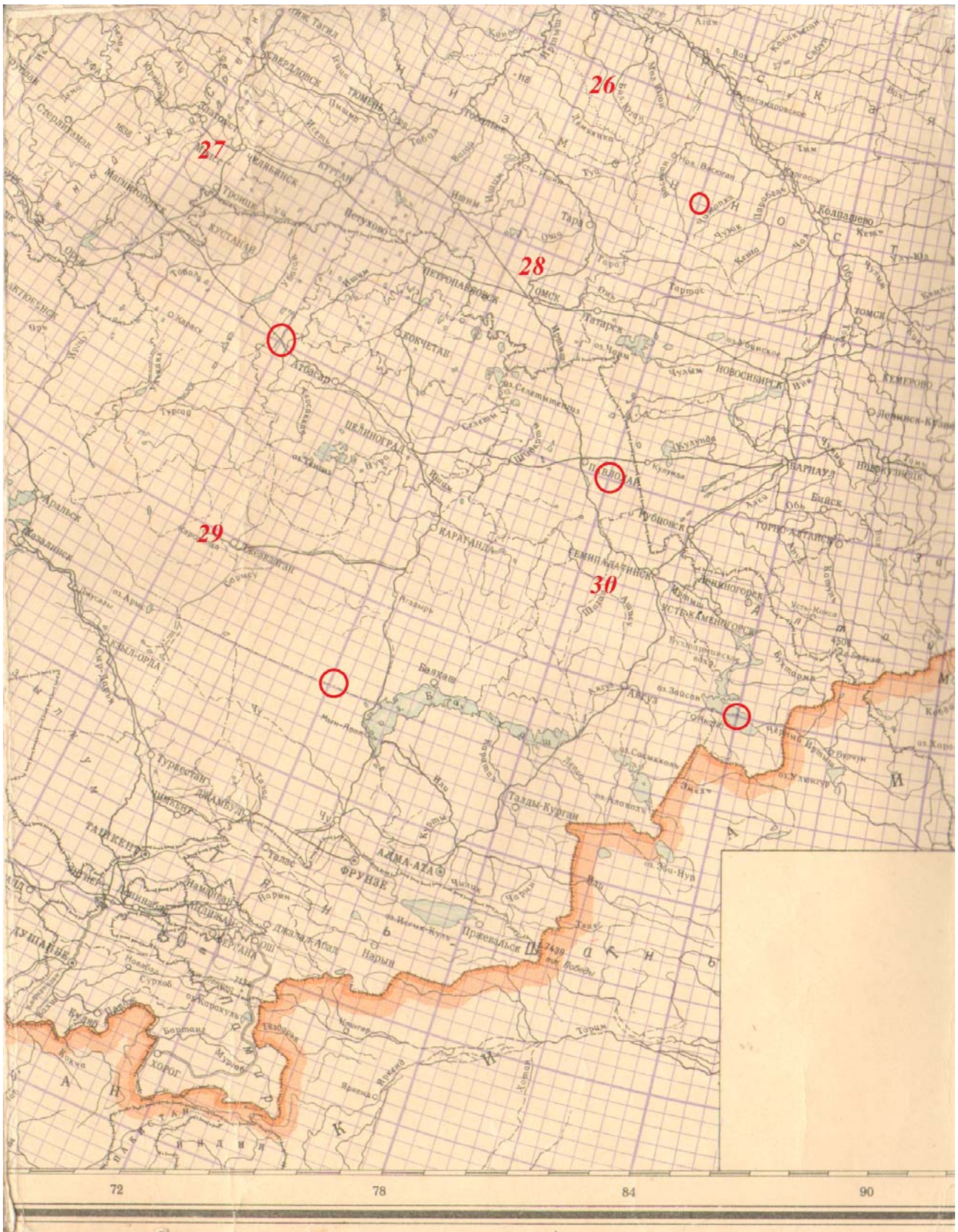
Варианти 16 – 20



Варианты 21 – 25



Варианты 26 – 30



**ТАБЛИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА
ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 1**

$\varphi, ^\circ$	$S_m, \text{ м}$	$S_n, \text{ м}$	$\varphi, ^\circ$	$S_m, \text{ м}$	$S_n, \text{ м}$
1	110576	111305	46	5096176	77465
2	221153	111254	47	5207339	76057
3	331732	111170	48	5318521	74627
4	442312	111052	49	5429723	73173
5	552895	110901	50	5540944	71697
6	663482	110716	51	5652185	70199
7	774072	110497	52	5763445	68679
8	884668	110245	53	5874723	67138
9	995268	109960	54	5986021	65577
10	1105875	109641	55	6097337	63995
11	1216488	109289	56	6208672	62394
12	1327108	108904	57	6320025	60773
13	1437737	108487	58	6431395	59134
14	1548373	108036	59	6542783	57476
15	1659019	107552	60	6654189	55801
16	1769675	107036	61	6765612	54108
17	1880341	106488	62	6877051	52399
18	1991017	105907	63	698506	50674
19	2101706	105294	64	7099978	48933
20	2212406	104649	65	7211465	47176
21	2323118	103972	66	7322967	45405
22	2433844	103264	67	7434483	43621
23	2544583	102524	68	7546014	41822
24	2655336	101753	69	7657558	40011
25	2766103	100992	70	7769116	38187
26	2876886	100119	71	7880686	36352
27	2987683	99257	72	7992268	34505
28	3098497	98364	73	8103862	32647
29	3209326	97441	74	8215467	30780
30	3320172	96488	75	8327082	28902
31	3431035	95506	76	8438707	27016
32	3541915	94495	77	8550341	25122
33	3650813	93455	78	8664984	23219
34	3763728	92386	79	8773635	21310
35	3874662	91290	80	8885293	19394
36	3985613	90165	81	8996958	17472
37	4096584	89013	82	9108629	15544
38	4207573	87834	83	9220306	13612
39	4318580	86628	84	9331987	11675
40	4429607	85395	85	9443673	9735
41	4540654	84137	86	9555362	7791
42	4651719	82852	87	9667053	5846
43	4762804	81542	88	9778747	3898
44	4873908	80208	89	9890442	1949
45	4985032	78848	90	10002137	0

Навчальне видання

Рябчій Валерій Архипович

Рябчій Владислав Валерійович

Трегуб Юлія Євгенівна

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПОТВОРЕНЬ

Навчальний посібник

Видання друге доповнене й виправлене

Редактори В.І. Луценко, О.Н. Ільченко

Підп. до друку 22.04.2015. Формат 30x42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 6,2.
Обл.-вид. арк. 8,1. Тираж 50 пр. Зам. № .

Підготовлено до друку та видруковано
в Національному гірничому університеті.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК від 11.06.2004 № 1842.

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.