МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Л.Я. Фомичова
В.М. Почепов
С.О. Сушко
В.В. Фомичов

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Диференціальне числення у прикладах та задачах

Частина 1

Навчальний посібник

для студентів заочної форми навчання
напряму підготовки 6.050301 Гірництво
галузі знань 0503 Розробка корисних копалин

Дніпропетровськ
НГУ
2012

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11я73
В25

Рекомендовано вченою радою ДВНЗ «НГУ» як навчальний посібник для студентів заочної форми навчання напряму підготовки 6.050301 Гірництво галузі знань 0503 Розробка корисних копалин (протокол № 1 від 14.03. 2012).

Рецензенти:

І.В. Жуковицький, д-р техн. наук, професор (Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна);
Л.Я. Садовська, канд. фіз.-мат. наук, доцент (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара).

В25 **Вища** математика [Текст]. Ч.1. Диференціальне числення у прикладах та задачах: навч. посібник / Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, С.О. Сушко, В.В. Фомичов. – Д.: Національний гірничий університет, 2012. – 153 с.

Викладено набір теоретичних та практичних тестів з диференціального числення функції однієї та багатьох змінних. Докладні відповіді, вказівки, розв’язання типових завдань та достатня кількість прикладів для самостійної роботи дозволяють використовувати посібник для всіх видів занять.

Розраховано на студентів перших курсів технічних вузів.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11я73

З М І С Т

ВСТУП

Найбільш ефективна форма засвоєння математичних дисциплін – самостійна робота студента над навчальним матеріалом, а для студента заочної форми навчання це ще й головна форма навчання.

Призначенням цього посібника є саме підвищення ефективності самостійної роботи.

Мета посібника:

- дати можливість студенту навчитися докладно відповідати на теоретичні питання сформульовані у вигляді тестів;
- навчити самостійно поглиблювати свої знання з вищої математики за допомогою розв'язування чисельних прикладів різної складності.

Відомо, що питання або задача може слугувати не тільки метою, але і засобом навчання. Вчитися давати відповіді на теоретичні питання та розв'язувати практичні задачі за допомогою ключових (опорних, базових) – ідея не нова. Саме тому цей посібник не збірник задач, хоча в ньому їх понад 900. Не дивлячись на велику кількість розв'язаних прикладів, це і не розв'язник. Це книга, за допомогою якої студент зможе навчитися давати змістовні лаконічні відповіді на найголовніші питання з теорії та за схемою розв'язання типових задач буде спроможний розв'язувати подібні.

Посібник відповідає програмі курсу вищої математики для технічних спеціальностей та розроблений у рамках кредитно-модульної системи навчання.

Робота складається з двох частин. У першій (розділи 1−3) наведено велику кількість теоретичних тестів та практичних прикладів за такими темами: вступ до математичного аналізу; диференціальне числення функції однієї змінної; функції багатьох змінних. Друга частина – це докладні відповіді на теоретичні тести, розв'язання або вказівки до більшості типових практичних тестів, а також відповіді для решти.

Для зручного використання посібника номер кожного завдання складається з номера розділу та порядкового номера тесту у цьому розділі.

Посібник призначено в першу чергу студентам заочної форми навчання, а також може бути корисним для всіх, хто вивчає вищу математику.

Розділ 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1.1. Множини

1.1. Чи можна дати строге означення такому поняттю як множина?
1.2. Що називають елементами множини?
1.3. Як позначають множини та їх елементи?
1.4. Яку множину вважають заданою?
1.5. Яку множину називають скінченною (нескінченною)?
1.6. Яку множину називають порожньою та як її позначають?
1.7. Встановити відповідність між операціями над множинами:

I) об'єднання $C = A \cup B$ (сума множин *A* та *B*);

II) переріз $C = A \cap B$ (добуток множин *A* та *B*);

III) різниця $C = A \setminus B$ (різниця множин *A* та *B*)

та діаграмами рис. 1.1.

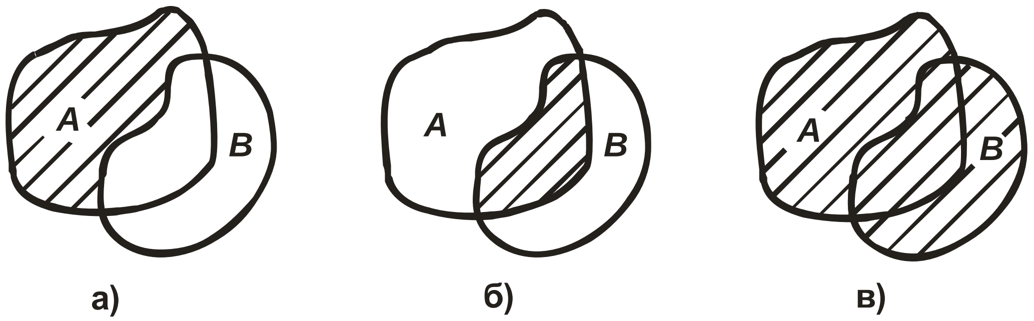


Рис. 1.1

1.8. Який зміст запису $A = \{x \mid P(x)\}$?

1.9. Який з нижченаведених записів задає множину розв'язків нерівності $|x-1| + |x+4| < 7$?

а) $\{x \mid x < 5\}$; **б)** $\{x \mid x > 2\}$; **в)** $\{x \mid -5 < x < 2\}$; **г)** $\{x \mid x < -5, x > 2\} = \varnothing$.

1.10. Дано дві множини: $B = \{1; 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; 37; 41; 45; 49\}$ та $A = \{1; 4; 9; 16; 25; 49\}$. Знайти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

1.11. Множина $Q = \{\frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$ задає множину всіх раціональних чисел. Що описується множиною Z?

1.12. Установити відповідність між сукупностями елементів $\{0;1;2;\ldots;n\ldots\}$; $\{1;2;\ldots;n\ldots\}$; $\{0;\pm1;\pm2;\ldots;\pm n\ldots\}$ та позначками множин N, Z_0, Z.

1.13. Які з числових проміжків: $(-\infty;\infty)$, $(a;b)$, $[a;\infty)$, $[a;b]$, $(-\infty;b)$, $[a;b)$, $(a;\infty)$, $(a;b]$, $(-\infty;b]$ відносяться до відрізків, інтервалів та півінтервалів?

1.14. Що називається δ-околом $(U_\delta(x_0))$ точки x_0?

а) будь-який інтервал, що містить точку x_0;

б) інтервал $(x_0 - \delta\ ;\ x_0 + \delta)$;

в) будь-який відрізок числової осі, довжина якого δ;

г) півінтервал $[x_0 + \delta\ ;\ +\infty)$;

д) півінтервал $(-\infty\ ;\ x_0 - \delta]$.

1.15. Указати проміжок, який являє собою $U_\delta(x_0)$, якщо $x_0 = -3$.

а) $(-3{,}002; -2{,}98)$; **б)** $(-3{,}05\ ; -2{,}95)$; **в)** $(-5;1)$; **г)** $(-7; 0{,}98)$.

1.16. Який зміст запису $\dot{U}_\delta(a)$?

1.17. Що називається модулем дійсного числа x? Який геометричний зміст модуля?

1.18. Які з нижченаведених виразів виконуються для дійсних чисел?

а) $|x| = |-x|$; **б)** $|x| = -|x|$; **в)** $|x + y| \geq |x| + |y|$; **г)** $|x + y| \leq |x| + |y|$;

д) $|x - y| \leq |x| - |y|$; **е)** $|x - y| \geq |x| - |y|$; **ж)** $|xy| = |x||y|$; **и)** $|xy| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

1.19. До якої з нижченаведених нерівностей зводиться нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$?

а) $-\varepsilon + n < x_n < n + \varepsilon$; **б)** $-\varepsilon - a < x_n < a - \varepsilon$;

в) $\varepsilon - a < x_n < a + \varepsilon$; **г)** $-\varepsilon + a < x_n < a + \varepsilon$.

Розв'язати нерівності.

1.20. $|x + 3| \leq 0{,}001$. **1.21.** $\big||x + 2| - |x - 2|\big| < 2$.

Подати перелік усіх елементів для множин.

1.22. $A\{x \in R \mid x^4 + 4x^3 - 5x^2 = 0\}$. **1.23.** $B\{x \in N \mid \log_5(3x - 1) < 1\}$.

1.2. Комплексні числа

1.24. Якщо (x_1, y_1) та (x_2, y_2) – дві пари упорядкованих дійсних чисел, які називаються комплексними числами, то за яким законом для них визначається операція добутку?

а) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$;

б) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = x_1x_2y_1y_2$;

в) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$;

г) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$.

1.25. Який вираз має сенс?

а) $i^2 = 1$; **б)** $i^2 = 0$; **в)** $i^2 = i$; **г)** $i^2 = -1$.

1.26. Яка з нижченаведених послідовностей відповідає правильній послідовності значень i^8, i^9, i^{11}, i^{12}?

а) $1, -1, i, -i$; **б)** $1, i, -i, -1$; **в)** $1, i, -i, 1$; **г)** $1, 0, -i, 1$.

1.27. Вказати назву чисел: $(0;1)$; $(x;0)$; $(0;y)$.

1.28. Серед наведених записів указати правильні та помилкові

а) $(x, y) = x + iy$; **б)** $(0;1) = 1$; **в)** $(0, y) = iy$; **г)** $(1,0) = i^2$;

д) $(0;1) = i$; **е)** $i^2 = -1$; **ж)** $(0, y) = y$; **и)** $(x,0) = xi$.

1.29. Доповнити твердження потрібними словами: «Кожне комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити … площини xOy».

1.30. Який відрізок, з наведених на рис. 1.2, визначає модуль комплексного числа $z = x + iy$ та який кут визначає аргумент цього числа?

а) $|z| = |OA|$; **б)** $|z| = |OB|$; **в)** $|z| = |BM|$;

г) $|z| = |OM|$; **д)** $\arg z = \alpha$; **е)** $\arg z = \beta$;

ж) $\arg z = \varphi$; **и)** $\arg z = \varphi + \beta$.

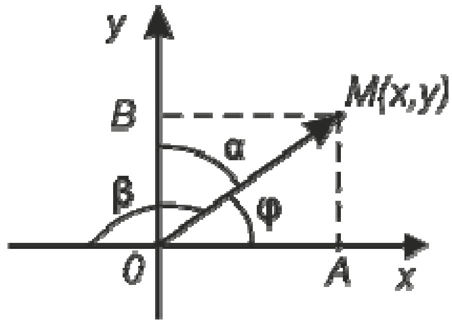


Рис.1.2

1.31. Від початку координат відкладено вгору на осі ординат одиничний вектор. Вказаний вектор розтягли в три рази та повернули на 90^0 за годинниковою стрілкою. Визначити модулі та аргументи комплексних чисел, що відповідають цим векторам.

1.32. Комплексному числу $x + iy$ відповідає точка (x, y) комплексної площини. Як розташовані точки, що відповідають комплексним числам: $z = -x + iy$; $z = -x - iy$; $z = x - iy$; $z = y - ix$?

1.33. За якою формулою обчислюється модуль комплексного числа $z = x + iy$?

а) $|z| = \frac{1}{2}(x + y)$; **б)** $|z| = (x + y)^2$; **в)** $|z| = x^2 + y^2$; **г)** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.34. Аргумент комплексного числа $z = x + iy$ $(x < 0, y > 0)$ задовольняє нерівність $-\pi \le \arg z \le \pi$. Яка з нижченаведених формул згодиться для обчислення $\arg z$?

а) $\arg z = \pi + arctg\,\frac{y}{x}$; **б)** $\arg z = arctg\,\frac{y}{x}$;

в) $\arg z = arctg\,\frac{x}{y}$; **г)** $\arg z = -\pi + arctg\,\frac{y}{x}$.

1.35. На комплексній площині визначено коло з центром у початку координат та радіусом 5. За якої умови точка, що зображує комплексне число $z = x + iy$, лежатиме всередині кола?

а) $x^2 + y^2 > 25$; **б)** $x^2 + y^2 = 25$; **в)** $x^2 + y^2 < 25$; **г)** $x^2 + y^2 < 5$.

1.36. Доповнити твердження потрібними словами: «Корені квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами і від'ємним дискримінантом являють собою … числа».

а) дійсні різні; **б)** комплексні; **в)** дійсні рівні; **г)** комплексні спряжені.

1.37. Вказати відповідність між пронумерованим переліком символічних записів комплексних чисел та переліком позначених буквами назв форми запису цих чисел.

Символічний запис комплексного числа	Назва форми запису комплексного числа
1. $z = x + iy$ 2. $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ 3. $z = re^{i\varphi}$	А. Показникова Б.Тригонометрична В. Алгебраїчна

1.38. Які з наведених записів неможна вважати ані показниковою, ані тригонометричною формою комплексного числа?

а) $3e^{\frac{\pi}{3}}$; **б)** $-3e^{i\frac{\pi}{3}}$; **в)** $3e^{i\frac{\pi}{3}}$; **г)** $3e^{i\frac{100\pi}{3}}$; **д)** $3(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$;

е) $-3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; **ж)** $\sqrt{3}(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4})$; **и)** $\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$.

1.39. Модулі чотирьох комплексних чисел дорівнюють одиниці, а їх аргументи мають значення: φ, $(\frac{\pi}{2} + \varphi)$, $(-\pi + \varphi)$, $(-\frac{\pi}{2} + \varphi)$. Чому дорівнює сума цих чисел?

а) -1; **б)** 0; **в)** 1; **г)** 4.

1.40. Дано два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$, модулі яких відповідно дорівнюють r_1, r_2, а аргументи φ_1, φ_2. Які вирази містять помилку?

а) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$; **б)** $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$;

в) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 \varphi_2))$; **г)** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

д) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$; **е)** $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

ж) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

1.41. Як зміниться модуль та аргумент комплексного числа після множення його на $2i$?

а) модуль не зміниться, а аргумент збільшиться на $\frac{\pi}{2}$;

б) модуль збільшиться у два рази, а аргумент зменшиться на $\frac{\pi}{2}$;

в) модуль зменшиться у два рази, а аргумент зменшиться на $\frac{\pi}{2}$;

г) модуль збільшиться у два рази, а аргумент збільшиться на $\frac{\pi}{2}$.

Звести комплексні числа до тригонометричної форми.

1.42. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. **1.43.** $z = \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$.

1.44. $z = -3\cos\frac{\pi}{9} + 3i\sin\frac{\pi}{9}$. **1.45.** $z = \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}}$.

Обчислити.

1.46. $i + i^{13} + \frac{3-2i}{1+i}$. **1.47.** $(3-2i)(1-4i) + \frac{4+2i}{3-i}$.

1.48. $\frac{2+3i}{i-2} - (\overline{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i})$. **1.49.** $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{60}$. **1.50.** $(\frac{1-i}{\overline{1-\sqrt{3}i}})^{40}$.

Обчислити всі значення коренів та зобразити їх на площині xOy.

1.51. $\sqrt[3]{8i}$. **1.52.** $\sqrt[4]{-81}$. **1.53.** $\sqrt[5]{-i}$.

1.54. $\sqrt[3]{-4 + \sqrt{48}i}$. **1.55.** $\sqrt[6]{1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$.

1.56. При яких дійсних значеннях x та y комплексні числа $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ та $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ будуть спряжені?

1.57. При яких дійсних значеннях x та y комплексні числа $z_1 = x^2 - 7x + 9yi$ та $z_2 = y^2 i + 20i - 12$ мають бути рівними?

1.58. При яких дійсних значеннях x число $z = (2^x + 3) + i(x^2 - x - 6)$ буде дійсним?

Розв'язати рівняння.

1.59. $z^2 - 2iz - 5 = 0$. **1.60.** $2z^2 - (5-i)z + 6 = 0$.

1.61. $z^2 - (8+3i)z + 13 + 13i = 0$. **1.62.** $(1+i)z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0$.

1.3. Числові послідовності та їх границі

1.63. Доповнити твердження необхідними словами: «Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним законом ставиться у відповідність дійсне число x_n, то множину дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називають … і позначають символом $\{x_n\}$».

1.64. Яке твердження помилкове?

а) геометрично послідовність зображається на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності;

б) послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена;

в) послідовність завжди задається формулою її загального члена;

г) послідовність можна задати рекурентно.

1.65. Встановити взаємно однозначну відповідність між заданими першими членами послідовності та її скороченим завданням.

Перші члени послідовності	Скорочене завдання послідовності
1. $1, 3, 1, 3, 1, 3, \ldots$	А. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geq 3$
2. $1, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{17}{4}, \ldots$	Б. $x_n = \frac{2n-1}{4n-3}$
3. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$	В. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = \frac{4x_{n-1} - x_{n-2}}{2}$, $n \geq 3$
4. $1, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{7}{13}, \frac{9}{17}, \ldots$	Г. $x_n = \frac{2n}{(n+1)!}$
5. $1, \frac{4}{3!}, \frac{6}{4!}, \frac{8}{5!}, \frac{10}{6!}, \ldots$	Д. $x_n = \frac{2n + (-1)^n n}{n}$

1.66. Які з формул не визначають числові послідовності?

а) $x_n = (n^2 - 4)$; **б)** $x_n = \frac{1}{n+2}$; **в)** $x_n = \frac{1}{n-2}$;

г) $x_n = \frac{n-2}{n+2}$; **д)** $x_n = \sqrt{n^2 + 3}$; **е)** $x_n = n^2 + 3$;

ж) $x_n = \sqrt{n^2 - 3}$; **и)** $x_n = n^2 - 3$; **к)** $x_n = (n-1)(n-2)$;

л) $x_n = (n+1)(n+2)$; **м)** $x_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$; **н)** $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

п) $x_n = \sqrt{10-n}$; **р)** $x_n = \sqrt{10+n}$; **с)** $x_n = 10-n$.

1.67. Встановити взаємно однозначну відповідність між послідовностями та їх властивостями.

Послідовності	Властивості послідовностей
1. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ 2. $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ 3. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ 4. $-1, 2, -3, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ 5. $x_n = \frac{5+(-1)^n}{2}$	А. Необмежена Б. Обмежена В. Обмежена знизу Г. Обмежена згори

1.68. Яка послідовність називається нескінченно великою?

1.69. Які з нижченаведених послідовностей нескінченно великі?

а) $x_n = -n^5$; **б)** $x_n = n^{-5}$; **в)** $x_n = n!$; **г)** $x_n = n^5 \cos \pi n$.

1.70. Доповнити твердження необхідними словами: «Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається нескінченно малою, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число …, що для всіх $n \geq N(\varepsilon)$ виконується нерівність ….».

1.71. Які твердження правильні?

а) необмежена послідовність є нескінченно великою;

б) нескінченно велика послідовність є необмеженою;

в) якщо послідовність $\{x_n\}$ з відмінними від нуля членами нескінченно велика, то послідовність $\{\alpha_n\} = \{\frac{1}{x_n}\}$ нескінченно мала;

г) добуток нескінченно малої послідовності на нескінченно велику завжди не існує.

1.72. Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика, то що можна сказати про послідовність $\{\frac{1}{x_n}\}$.

1.73. Нехай послідовності α_n, β_n — нескінченно малі, x_n — обмежена, γ_n — нескінченно велика. Встановити серед заданих послідовностей нескінченно малі та нескінченно великі.

а) $\frac{\alpha_n + \beta_n}{x_n}$; **б)** $\frac{\beta_n + 1}{\alpha_n x_n}$; **в)** $\frac{x_n}{\alpha_n \beta_n}$; **г)** $\frac{x_n}{\alpha_n}$; **д)** $\frac{\beta_n}{x_n}$;

е) $\alpha_n \beta_n$; **ж)** $\gamma_n(\alpha_n + x_n)$; **и)** $\alpha_n \gamma_n$.

1.74. Доповнити твердження необхідними виразами: «Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для … числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N(\varepsilon)$, що для всіх … виконується нерівність …».

1.75. Який з нижченаведених записів символізує означення того, що послідовність $\{x_n\}$ має границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

а) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| > \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon$;

в) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon$;

г) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \exists n < N \quad \Rightarrow \quad |x_n| < a$.

1.76. Якщо послідовність має границю, то вона називається

а) спадною; **б)** розбіжною; **в)** збіжною; **г)** сталою.

1.77. Якщо послідовність збігається, то скільки границь вона має?

а) одну; **б)** жодної; **в)** нескінченну кількість; **г)** дві.

1.78. Нехай a – фіксоване число та існують околи точки a, що містять усі члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого з них. Що це означає для цієї послідовності?

а) $x_n = const$; **б)** правильної відповіді немає;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; **г)** послідовність необмежена.

1.79. Яке з наведених тверджень помилкове?

а) якщо число a – границя послідовності $\{x_n\}$, то який би малий ε-окіл точки a не взяти, усі значення x_n, починаючи з деякого з них, повинні попасти в цій окіл;

б) якщо число a – границя послідовності $\{x_n\}$, то у будь-якому околі $(a-\varepsilon\,; a+\varepsilon)$ точки a лежить нескінченна кількість членів цієї послідовності;

в) якщо число a – границя послідовності $\{x_n\}$, то при будь-якому $\varepsilon > 0$ поза околом $(a-\varepsilon\,; a+\varepsilon)$ лежить скінченна кількість членів послідовності;

г) якщо можна вказати один такий ε-окіл точки a, у якому лежать усі члени послідовності $\{x_n\}$, за винятком, можливо, скінченного їх числа, то число a – границя послідовності.

1.80. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$ та $\varepsilon = 0{,}01$. Скільки членів послідовності $\{x_n\}$ лежить поза околом $(0{,}99; 1{,}01)$?

1.81. Границя якої з нижченаведених послідовностей не дорівнює нулю, але довільний окіл точки $x=0$ містить нескінченну кількість членів даної послідовності?

а) $x_n = \frac{10}{n}$; **б)** $x_n = 1+(-1)^n$; **в)** $x_n = 0$; **г)** $x_n = \frac{n-1}{n}$.

1.82. Якщо послідовність не має границі, то вона називається

а) спадною; **б)** розбіжною; **в)** збіжною; **г)** сталою.

1.83. Чи будуть збіжними послідовності, вказані у першому рядку таблиці, якщо $x_n = (-1)^{n-1}$, $y_n = (-1)^n$? Для відповіді треба поставити зірочку у потрібній клітинці таблиці:

Властивість послідовності	Послідовність				
	$\{x_n\}$	$\{y_n\}$	$\{x_n+y_n\}$	$\{x_n y_n\}$	$\{x_n/y_n\}$
Збіжна					
Розбіжна					

1.84. Довести, що послідовність $\{\sin\frac{\pi n}{2}\}$ розбіжна.

1.85. Дана збіжна послідовність $\{x_n\}$, границя якої дорівнює a, $a \neq 0$. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$?

а) 0; **б)** <1; **в)** ∞; **г)** >1; **д)** 1.

1.86. Дана збіжна послідовність $\{x_n\}$, границя якої дорівнює a. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k}$, де k – фіксоване натуральне число?

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a+k$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a+nk$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a-k$.

1.87. Яка послідовність називається зростаючою?

1.88. Доповнити твердження необхідним словом: «Послідовність $\{x_n\}$ називається …, якщо для довільного $n \in N$ виконується нерівність $x_{n+1} < x_n$».

1.89. Які з нижченаведених нерівностей не виконуються для членів послідовностей $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ та $\{y_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$, $n \geq 1$?

а) $x_n < y_n$; **б)** $x_n < x_{n+1}$; **в)** $y_n < y_{n+1}$;

г) $x_n > y_n$; **д)** $y_{n+1} < y_n$; **е)** $x_{n+1} < x_n$.

1.90. Як називається послідовність $\{x_n\}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$?

1.91. Установіть відповідність між заданими нескінченно малими послідовностями та значеннями границь відношень цих послідовностей.

Послідовності	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$
1. $\alpha_n = \frac{5}{n}$, $\beta_n = \frac{n+5}{n^2}$	А. 0
2. $\alpha_n = \frac{5}{n+1}$, $\beta_n = \frac{5}{n^2}$	Б. 5
3. $\alpha_n = \frac{5}{n^2+1}$, $\beta_n = \frac{5}{n}$	В. Не існує
4. $\alpha_n = \frac{5}{n}\cos\pi n$, $\beta_n = \frac{5}{n}$	Г. ∞

1.92. Які з послідовностей не мають границі?

а) $x_n = 0$; **б)** $x_n = \cos\pi n$; **в)** $x_n = \sqrt{2}$; **г)** $x_n = -\sqrt{3}$;

д) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; **е)** $x_n = \left(\frac{139}{140}\right)^n$; **ж)** $x_n = \frac{1000}{n}$; **и)** $x_n = (0{,}999)^n$;

к) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$; **л)** $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; **м)** $x_n = 2 + (-1)^n$;

н) $x_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$; **п)** $x_n = \frac{7+(-1)^n}{n}$; **р)** $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

1.93. Яке твердження помилкове?

а) якщо послідовність, починаючи з деякого номера, монотонна й обмежена, то вона збіжна;

б) неспадні й незростаючі послідовності називаються монотонними;

в) зростаючі послідовності називаються строго монотонними;

г) послідовність $\{x_n\}$ називається неспадною, якщо для довільного $n \in N$ виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$;

д) послідовність $\{x_n\}$ називається незростаючою, якщо для довільного $n \in N$ виконується нерівність $x_{n+1} \le x_n$.

1.94. Довести, що послідовність $x_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$ зростаюча.

1.95. Які з наведених нижче тверджень правильні?
а) якщо послідовність має границю, то вона обмежена;
б) якщо послідовність не має границі, то вона збіжна;
в) якщо послідовність обмежена, то вона розбіжна;
г) якщо послідовність монотонна й обмежена, то вона має границю.

1.96. Послідовність $\{x_n\}$ буде мати границею число a, якщо послідовність $\{\alpha_n\}$ з загальним членом $\alpha_n = x_n - a_n$ буде

а) обмеженою; **б)** зростаючою; **в)** нескінченно малою; **г)** сталою.

Довести.

1.97. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. **1.98.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. **1.99.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. **1.100.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

1.101. Яке твердження помилкове?
а) число e – ірраціональне;
б) основою натуральних логарифмів буде число e;
в) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{1/n} = e$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

1.102. Доповнити твердження необхідним словом: «Дробовий вираз, чисельник і знаменник якого змінні величини, що прямують до нескінченності, називається …».

1.103. Чи будуть необмежені послідовності $x_n = n^2 \cos\dfrac{\pi n}{2}$; $x_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{2}$ та $x_n = n^{(-1)^n}$ нескінченно великими? Пояснити чому.

1.104. Довести, що границя послідовності $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ при $n \to \infty$ дорівнює одиниці. При яких значеннях $n > N(\varepsilon)$ буде виконуватися нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$, якщо ε буде приймати значення: $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}001$?

Довести, що нижченаведені послідовності мають нескінченно великі границі при $n \to \infty$ (будуть нескінченно великими), визначивши для будь-якого $M > 0$ число $N = N(M)$ таке, що $|x_n| > M$ при $n \ge N$.

1.105. $x_n = (-1)^n n$. **1.106.** $x_n = 2^{\sqrt{n}}$. **1.107.** $x_n = \ln(\ln n)$ $(n \ge 2)$.

Обчислити границі послідовностей.

1.108. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}$. **1.109.** $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{\ln(1+e^n)}{n}$. **1.110.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{2n^3+3n^5}{3n^2-1}$.

1.111. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$. **1.112.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

1.113. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-3n}{4n+5}\right)^3\frac{n+2}{n^2+n+1}$. **1.114.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4+100n^2-5n-1}{27n^3+91n^2+5}$.

1.115. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^5 n}{10^5+n}$. **1.116.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+2}}{0{,}1n-3}$.

1.117. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4+5}}$. **1.118.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2+7n+12}\right)^2$.

1.119. $\lim\limits_{n\to+\infty}9^{\frac{5n}{10n-6}}$. **1.120.** $\lim\limits_{n\to+\infty}3^{\frac{6n^3+2n^2-4}{3n^3-5}}$. **1.121.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

1.122. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$. **1.123.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-n)$.

1.124. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n-2)}-n)$. **1.125.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-n\right)$.

1.126. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$. **1.127.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n+5}{n-0{,}5}}$.

1.128. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$. **1.129.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

1.4. Поняття функції

1.130. Доповнити твердження необхідними словами: «Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним законом поставити у відповідність …, то кажуть, що на множині X задана функція $y=f(x)$».

1.131. Що означають букви x, y, f у запису $y=f(x)$?

1.132. Чи обов'язково різним значенням аргументу відповідають різні значення функції?

1.133. Доповнити твердження необхідними словами: «Якщо множина значень функції складається лише з одного числа C, то таку функцію називають … і пишуть $y=C$».

1.134. Що являє собою графік функції $y = 5n + 1$, $n \in N$?

1.135. Змінна x пробігає інтервал $0 < x < 1$. Якій множині належить y, якщо $y = a + (b - a)x$?

а) $[b; a)$ при $a < b$; **б)** $(a; b)$ при $a < b$;

в) $(b; a)$ при $a > b$; **г)** $[a; b]$ при $a < b$.

1.136. Знайти $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & при \quad -\infty < x \le 0, \\ 3^x & при \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

1.137. Знайти $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, якщо $f(x) = x^2$.

1.138. Дано $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Знайти $f(x + 1)$, $f(x) + 1$, $f(\frac{1}{x})$, $\dfrac{1}{f(x)}$, $f(0)$, $f(-x)$.

1.139. Доповнити твердження необхідними словами: «Функцію $f(x)$, визначену на множині X, називають … на цій множині, коли існує таке … M, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$».

1.140. Серед нижченаведених функцій знайти необмежену

а) $y = a^x$; **б)** $y = -2x^2 + 3x - 5$; **в)** $y = \dfrac{1}{x}$; **г)** $y = \sin\sqrt{3}x$.

1.141. Встановити відповідність між формулами, які задають функції, та множинами X — областями визначення функцій, поставивши зірочку у відповідній клітинці таблиці.

Формули, що задають функції	Множини X — області визначення функцій			
	Z_0	$[-1;1) \cup \; x = 2$	$(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$	$[-\frac{1}{3}; 1]$
$y = \arcsin\dfrac{2x}{x+1}$				
$y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$				
$y = \sqrt{3x - x^3}$				
$y = n!$				

1.142. Встановити відповідність між формулами, які задають функції, та множинами Y — областями значення функцій, поставивши зірочку у відповідній клітинці таблиці.

Формули, що задають функції	Множини Y — області значення функцій		
	$[0;\pi]$	$(-\infty;\lg 3]$	$[0;\frac{3}{2}]$
$y=\arccos\frac{2x}{x^2+1}$			
$y=\sqrt{2+x-x^2}$			
$y=\lg(1-2\cos x)$			

1.143. Встановити відповідність між формулами, які задають функції, та їх властивостями, поставивши зірочку у відповідній клітинці таблиці.

Формули, що задають функції	Властивості функцій			
	Обмежена	Необмежена	Обмежена зверху	Обмежена знизу
$y=Arc\cos x$				
$y=-x^2+4x-3$				
$y=\pm\sqrt{25-x^2}$				
$y=e^x$				

1.144. Встановити відповідність між формулами, які задають функції та класами, до яких вони відносяться, поставивши зірочку у відповідній клітинці таблиці.

Функції	Класи функцій			
	Многочлен	Раціональний дріб	Ірраціональна	Трансцендентна
$y=3^x-7x$				
$y=Ax^2+Bx\ \ +C$				
$y=5-\sqrt{x}$				
$y=\frac{2x+9}{3x^3-4x+1}$				

1.145. Знайти $f(a)+f(-a)$, якщо $f(x)=x^3+3x-1$.

1.146. Знайти всі значення a, при яких функція $y=ax^2+(a+3)x+4a$, $x\in R$. Має тільки додатні значення.

1.147. Яке твердження помилкове?

а) функція $y=x^2$ монотонно зростаюча;

б) функція $y=x^2$ монотонно спадна;

в) функція $y = x^2$ монотонно зростаюча при $x \in [0;+\infty)$;

г) функція $y = x^2$ монотонно спадна при $x \in (-\infty;0]$.

1.148. Яка функція називається парною? Чи буде парною функція $y = \pi x^2$, якщо x − радіус кола?

1.149. Доповнити твердження необхідними виразами: «Графік парної функції симетричний відносно …, а графік непарної функції симетричний відносно …».

а) осі Ox; **б)** початку координат; **в)** осі Oy; **г)** осей Ox та Oy.

1.150. Вибрати серед наведених функцій парні

а) $y = 2x + x^5$; **б)** $y = 5^x + 5^{-x}$;

в) $y = \sqrt[5]{(3-x)^2} + \sqrt[5]{(3+x)^2}$; **г)** $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

1.151. Яка функція називається періодичною?

1.152. Вибрати періодичні функцій

а) $y = arctgx$; **б)** $y = 2\pi$; **в)** $y = 2\pi\sqrt{x}$; **г)** $y = \sin\sqrt{3}x + \cos 2\sqrt{3}x$.

1.153. Для того щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, достатньо

а) у виразі $y = f(x)$ записати $\dfrac{1}{f(x)}$замість $f(x)$;

б) у виразі $y = f(x)$ записати $\dfrac{1}{x}$ замість x;

в) у виразі $y = f(x)$ записати y замість x, а замість x написати y;

г) розв’язати рівняння $f(x) = y$ відносно x (якщо це можливо).

1.154. Для функції $y = 3x - 7$ вказати обернену.

а) $y = \dfrac{1}{3x-7}$; **б**) $y = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{7}$; **в**) $x = \dfrac{y+7}{3}$; **г**) $x = \dfrac{1}{3y} + \dfrac{1}{21}$.

1.155. В якому випадку функція $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ збігається з оберненою?

1.156. Яка з функцій **а)** $y = x^3$ на проміжку $[-1;1]$, **б)** $y = x^2$ на $[0;1]$, **в)** $y = x^3$ на $[0;1]$, **г)** $y = x^2$ на $[-1;1]$ не може мати обернену?

1.157. Якщо функція $y = f(u)$ визначена на множині D, а функція $u = \varphi(x)$ на множині D_1, при цьому $\forall x \in D_1$ відповідає значення $u = \varphi(x) \in D$, то кажуть, що на множині D визначена функція $y = f(u(x))$, яку називають …

Побудувати графік складеної функції $y = e^u$ при даних $u(x)$.

1.158. $u = x^2$. **1.159.** $u = \dfrac{1}{x}$. **1.160.** $u = -x^2$. **1.161.** $u = \dfrac{1}{x^2}$.

1.162. Згідно **з** рис. 1.3 встановити відповідність між функціями: 1) $y = e^x$; 2) $y = e^{-x}$; 3) $y = \ln x$; 4) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$ та зображеними графіками.

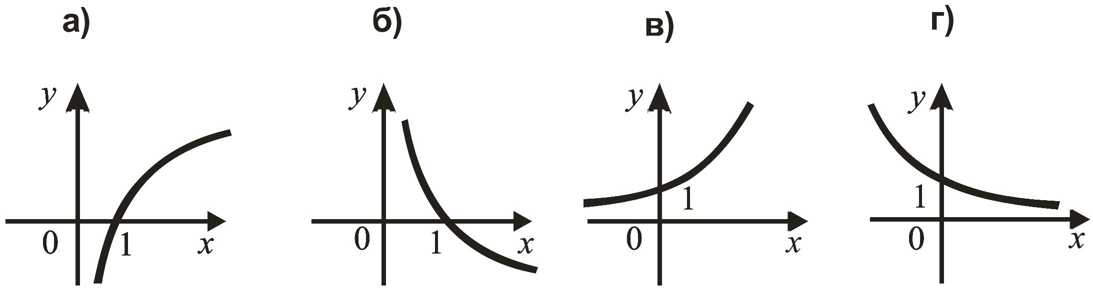


Рис.1.3

1.163. Яка функція називається неявно заданою?

1.164. Як називають функцію, що задається рівняннями $x = \varphi(t),\ y = \phi(t)$?

1.165. Записати рівняння кола з центром у початку координат та радіусом $R = 2$ у вигляді функції: заданої явно; заданої неявно; заданої параметрично.

1.166. Як називають змінну t при параметричному завданні функції?

1.5. Границя функції

1.167. Доповніть означення границі функції у точці потрібними словами або виразами: «Число A називається границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для $\ldots$ числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $\ldots$, виконується нерівність $\ldots$».

1.168. Запишіть мовою ε - δ означення того, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

а) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad x \in \dot{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad (x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| > \varepsilon$;

в) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$;

г) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad x \in \dot{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$.

1.169. Яку з нижченаведених границь функції $f(x)$ можна проілюструвати за допомогою рис. 1.4 ?

а) $\lim\limits_{x \to A} f(x) = x_0$; **б)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{A}$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$;

д) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

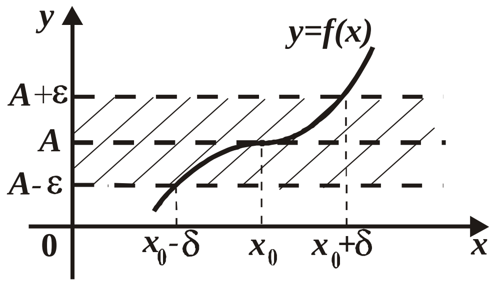


Рис. 1.4

1.170. Встановити взаємно однозначну відповідність між значеннями границь функцій та записом означення границі за допомогою логічних символів.

Значення границі функції	Запис означення границі за допомогою логічних символів
1. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$	А. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M(\varepsilon) > 0 : \lvert x \rvert > M \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$	Б. $\forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > 0 : x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \lvert f(x) \rvert > M$
3. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$	В. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	Г. $\forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow \lvert f(x) \rvert > M$

1.171. Функція $y = f(x)$ визначена в $\overset{\bullet}{U}_\delta(x_0)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Чому дорівнює границя послідовності $\lim\limits_{n \to \infty} \{f(x_n)\}$, якщо $\{x_n\}$ − довільна послідовність, що збігається до числа x_0.

а) a; **б)** $f(x)$; **в)** A; **г)** 0.

1.172. Довести, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, якщо $f(x) = c$.

1.173. Вказати питання, на які можна дати відповідь «Ні».

а) Чи може функція бути невизначеною у точці x_0 і мати у цій точці границю?

б) Чи може функція мати дві різні границі в одній точці?

в) Чи буде функція $f(x)$ обмеженою, якщо існує таке додатне число M, що для всіх значень x з області визначення функції $y = f(x)$ виконується нерівність $\lvert f(x) \rvert \le M$?

г) Чи може змінна x прямувати до числа x_0 довільно, якщо обчислюється границя $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$?

1.174. За даними рис. 1.5 вибрати правильні рівності.

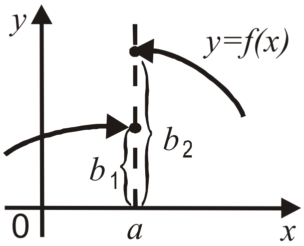


Рис. 1.5

а) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_1$; **б)** $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$;

в) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$; **г)** $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_2$;

д) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$; **е)** $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \dfrac{b_1 - b_2}{2}$.

1.175. В якому випадку границя елементарної функції $f(x)$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці?

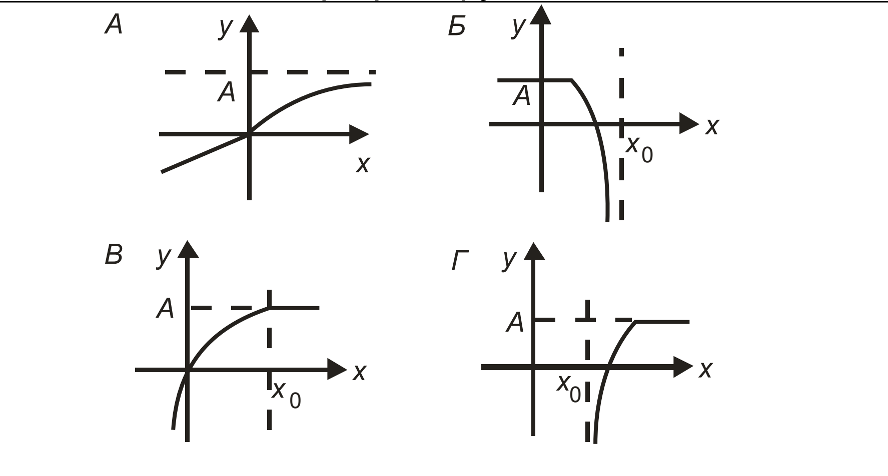
1.176. Якщо функція $f(x)$ визначена в точці x_0 та має скінченну границю в цій точці ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), тоді

а) точка $(x_0, f(x_0))$ ніколи не належатиме прямокутнику, обмеженому прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$;

б) точка $(x_0, f(x_0))$ обов'язково належить прямокутнику, обмеженому прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$;

в) точка $(x_0, f(x_0))$ може належити або не належити прямокутнику, обмеженому прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$.

1.177. Встановити відповідність між наведеними графіками функцій та їх границями.

<table>
<tr><th>Графіки функцій</th><th>Границі функцій</th></tr>
<tr><td>
</td><td>1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

2. $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$</td></tr>
</table>

1.178. Відомо, що існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Яке твердження правильне?

а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$; **б)** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq A$; **г)** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$.

1.179. Що називається нескінченно малою функцією при $x \to x_0$?

1.180. Функцію $f(x)$ задано графічно на рис. 1.6. Визначити значення границь: **а)** $\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x)$, **б)** $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to x_4+0} f(x)$, **г)** $\lim\limits_{x\to x_2-0} f(x)$, **д)** $\lim\limits_{x\to x_2} f(x)$, **е)** $\lim\limits_{x\to x_3} f(x)$, **ж)** $\lim\limits_{x\to x_3+0} f(x)$, **и)** $\lim\limits_{x\to x_4-0} f(x)$, **к)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, **л)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, **м)** $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$, **н)** $\lim\limits_{x\to x_4} f(x)$, **п)** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

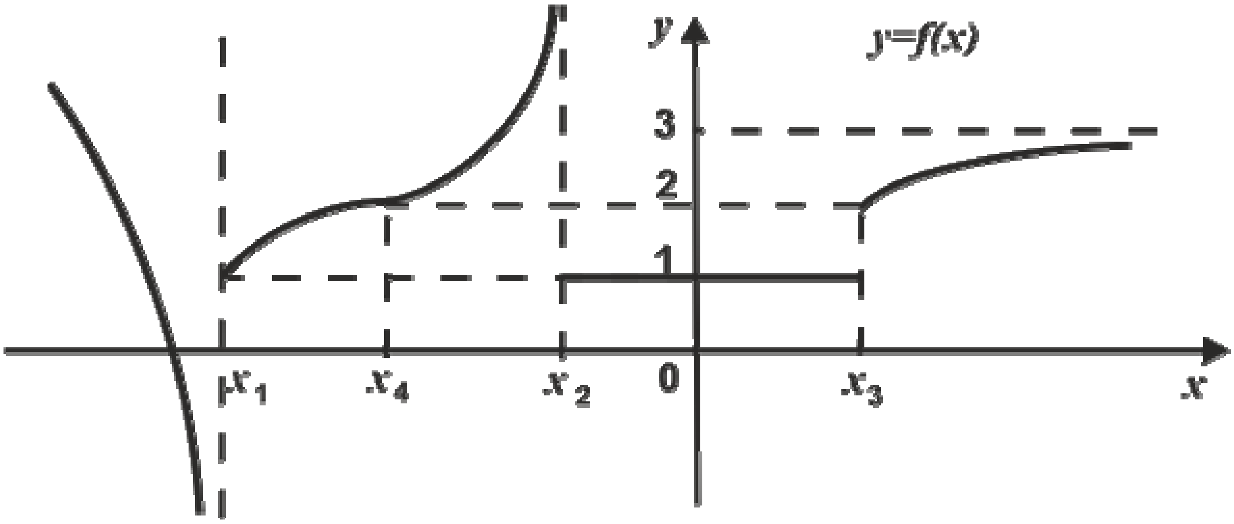


Рис. 1.6

1.181. За якої умови функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$?

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$; **б)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, де $b > a$; **г)** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$.

1.182. Як називається функція $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$?

а) нескінченно малою; **б)** обмеженою;
в) нескінченно великою; **г)** збіжною.

1.183. Нехай функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$. Чи залишиться вона нескінченно малою при $x \to b$?

а) так, обов'язково; **б)** ні, стане нескінченно великою;
в) нічого конкретного сказати неможна;
г) ні, стане обмеженою величиною.

1.184. До чого має прямувати змінна x, щоб функція $f(x)=\dfrac{1}{(x+4)^2}$ була нескінченно малою?

а) $x\to -4$; **б)** $x\to e$; **в)** $x\to 0$; **г)** $x\to\infty$.

1.185. До чого має прямувати змінна x, щоб функція $f(x)=\dfrac{1}{(x+4)^2}$ була нескінченно великою?

а) $x\to -4$; **б)** $x\to 0$; **в)** $x\to e$; **г)** $x\to\infty$.

1.186. Вставити пропущені слова: «Добуток обмеженої величини на нескінченно малу є величина ...».

а) нескінченно велика; **б)** нескінченно мала;
в) обмежена; **г)** еквівалентна множникам.

1.187. При $x\to a$ функції α_1 та α_2 – нескінченно малі, β_1, β_2 – нескінченно великі, а функція z – обмежена. Указати, які з нижченаведених величин обов'язково будуть нескінченно великими, а які нескінченно малими при $x\to a$.

а) $\beta_1\beta_2$; **б)** $z\alpha_1\alpha_2$; **в)** $\beta_1-\beta_2$; **г)** $\alpha_1-\alpha_2$;

д) $\dfrac{1}{\beta_1}+\dfrac{1}{\beta_2}$; **е)** $\beta_1+\beta_2$; **ж)** $z\alpha_1$; **и)** $z\beta_1$;

к) $\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$; **л)** $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$; **м)** $\dfrac{z}{\alpha_1}$; **н)** $\dfrac{z}{\beta_1}-\alpha_1$;

п) $z(\alpha_1+\alpha_2)$; **р)** $z(\beta_1+\beta_2)$; **с)** $\alpha_2\beta_1$; **т)** $z(\alpha_1+\beta_2)$;

у) $\dfrac{1}{\beta_1}-\dfrac{1}{\beta_2}$; **ф)** $\dfrac{z}{\alpha_1+\alpha_2}$; **х)** $\dfrac{z}{\alpha_1\alpha_2}$; **ц)** $\dfrac{1}{\alpha_1}-\dfrac{1}{\alpha_2}$;

ш) $\dfrac{z}{\alpha_1}+\dfrac{z}{\alpha_2}$; **щ)** $\dfrac{z}{\beta_2}+\dfrac{z}{\alpha_1}$; **ю)** $\dfrac{\alpha_1}{z}+\dfrac{\beta_1}{z}$; **я)** $\dfrac{z}{\beta_1\beta_2}$.

1.188. При $x\to a$ функції α_1 та α_2 – нескінченно малі, β_1, β_2– нескінченно великі, а функція z – обмежена. Указати, які з нижченаведених величин обов'язково будуть нескінченно великими, а які нескінченно малими при $x\to a$.

а) $\beta_1-\alpha_1$; **б)** $\alpha_1+\beta_1$; **в)** $\dfrac{z}{\beta_1}+\beta_2$; **г)** $\dfrac{1}{\beta_2}-\dfrac{1}{z}$; **д)** $\dfrac{z}{\beta_1}+\dfrac{z}{\beta_2}$;

е) $\dfrac{\alpha_1}{z}-\dfrac{\alpha_2}{z}$; **ж)** $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$; **и)** $\ln|\beta_1|$; **к)** $\ln|\alpha_1|$; **л)** $\beta_1^{-|z|}$; **м)** $\alpha_1^{-|z|}$;

н) $2^{-|\beta_1|}$; **п)** $2^{-|\alpha_1|}$; **р)** $e^{-|\beta_1|}$; **с)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-|\beta_1|}$; **т)** $\alpha_1^{\alpha_2}$; **у)** $\sin(\alpha_1\cdot\alpha_2)$;

ф) $\sin\left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_2}\right)$; **х)** $arctg\,\beta_1$; **ц)** $arctg\alpha_1$; **ш)** $z\cdot\arcsin\alpha_1$; **щ)** $tg(z\alpha_1)$.

1.189. Встановити відповідність між границями функцій та їх значеннями.

Границі функцій	Значення границь функцій
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$	А. 1 Б. 0 В. Не існує Г. ∞

1.190. Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$, то яке з тверджень помилкове ?

а) $f(x)$ – нескінченно велика функція при $x\to a$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$; **в)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f^2(x)}=+\infty$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}(-f(x))=+\infty$.

1.191. Користуючись означенням нескінченно великої функції, довести, що функція $y=2^{\frac{1}{x^2}}$ нескінченно велика при $x\to 0$.

1.192. Довести, що необмежена функція $y=x\sin x$ при $x\to\infty$ не є нескінченно великою.

1.193. Якщо $\lim\limits_{x\to a}y=A$, то якою має бути величина α, щоб виконувалася рівність $y=A+\alpha$?

а) нескінченно велика при $x\to a$; **б)** обмежена при $x\to a$;
в) еквівалентна величині A при $x\to a$;
г) нескінченно мала при $x\to a$.

1.194. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2}(5+x)=7$.

1.195. Відомо, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$. Яка з рівностей а) – г) буде правильною лише за додаткової умови ?

а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=f(a)+g(a)$; **б)** $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=f(a)-g(a)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=f(a)\cdot g(a)$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$.

1.196. За яких умов виконується рівність $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$?

а) функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі у точці a;

б) $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a}g(x)$; **в)** $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$.

1.197. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=b$ та для будь-якого $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ виконується нерівність $\varphi(x)\le f(x)\le\phi(x)$. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$? Згідно з якою теоремою визначають відповідь?

а) 0; **б)** ∞; **в)** 1; **г)** b; **д)** $b/2$.

1.198. Нехай дано: I. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, II. $A>0$, III. $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$, IV. $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, V. $f(x)\ge g(x)$, VI. $f(x)\le\varphi(x)\le\phi(x)$. Утворити правильні твердження.

а	б	в	г
Якщо справджується вираз I, то	Якщо справджуються вирази I,III,VI, то	Якщо справджуються вирази I, II,то	Якщо справджуються вирази I,IV, V, то

1) $f(x)>0, x\in\dot{U}_\delta(x_0)$. 2) Ця границя єдина.

3) $A\ge B$. 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

Користуючись означенням границі функції в точці, довести рівності.

1.199. $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$. **1.200.** $\lim\limits_{x\to 2}(4x-2)=6$.

1.201. $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. **1.202.** $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}=\sqrt{3}$. **1.203.** $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}$.

Скориставшись теоремами про границі, обчислити.

1.204. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-2}{x^2-x-5}$. **1.205.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-4x^2+2}{x^2+x-2}$.

1.206. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+2}{x^2-x-2}$. **1.207.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+3x-2}$.

1.208. $\lim\limits_{x\to\infty}arctgx$. **1.209.** $\lim\limits_{x\to 9}9^{\frac{\sqrt{x}}{x-9}}$. **1.210.** $\lim\limits_{x\to -\infty}2^{\frac{2x}{7}}$.

1.211. Які з нижченаведених умовних виразів є невизначеностями?

а) $\frac{0}{0}$; **б)** $\frac{\infty}{\infty}$; **в)** $\infty+\infty$; **г)** $\infty-\infty$; **д)** $\infty\cdot\infty$; **е)** $0\cdot 0$;

ж) $0\cdot\infty$; **и)** 1^{∞}; **к)** 0^{0}; **л)** 0^{-1}; м) $\frac{\infty}{0}$.

1.212. Кожна з границь: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3+4x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ містить невизначеність деякого виду. Вибрати спосіб, яким ці невизначеності можна розкрити: А) використати першу важливу границю; Б) помножити й розділити на вираз спряжений з даним; В) скоротити дріб на вираз $(x-x_0)$, де x_0 — корінь многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику; Г) використати другу важливу границю; Д) розділити чисельник та знаменник дробу на змінну у вищому степені.

1.213. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$, якщо $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A\neq 0$, $k\in N$?

а) ∞; **б)** 0; **в)** A; **г)** k.

1.214. При яких значеннях m і n будуть виконуватись рівності 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^m+bx^2+c}{bx^n+x}=\frac{a}{b}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^m+bx^2+c}{x^n+px^2+qx}=0$?

а) $\begin{cases} n=m, \\ m>2, n>2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} m>n, \\ m>2 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} m<n, \\ m>2 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} n>m, \\ n>2 \end{cases}$.

Обчислити границі.

1.215. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x^4+20}$.

1.216. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-100x^2-5x-1}{27x^4+91x^2+5}$.

1.217. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+3)(2x+4)(x+5)}{x^4+x-1}$.

1.218. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^5+1}}{x^3+4}$.

1.219. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+4x+7}{9x^2-2x+3}}$.

1.220. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4+5}}$.

1.221. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt[6]{x^6+1}}{\sqrt[4]{x^4+8}}$.

1.222. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{5x^2+7x+12}\right)^2$.

1.223. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+2^x}{3^x-2^x}$.

1.224. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x^3+3x^5+1}{3x^2-2}$.

1.225. $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\frac{6x^3+2x^2-4}{3x^3-5}}$.

1.226. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x^2+x+6}{2x^2-2}$.

1.227. Для яких функцій виконується рівність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$?

а) $f(x)=x,\quad g(x)=-x$;

б) $f(x)=x^2,\quad g(x)=-x$;

в) $f(x)=-x^3,\quad g(x)=x$;

г) $f(x)=x,\quad g(x)=-x^3$.

1.228. Доповнити твердження потрібними словами: «Різниця та частка двох нескінченно великих функцій … є нескінченно велика функція».

а) завжди; **б)** не обов'язково; **в)** ніколи не.

Обчислити границі.

1.229. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)$.

1.230. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2+1})$.

1.231. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

1.232. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

1.233. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$.

1.234. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{x^2+2x}-x)$.

1.235. Доповнити твердження потрібними словами: «Частка двох нескінченно малих функцій … є нескінченно мала функція».

а) завжди; **б)** ніколи не; **в)** не обов'язково.

1.236. Яке висловлювання помилкове?

а) границя дробу може дорівнювати одиниці, якщо границі чисельника та знаменника дорівнюють нулю;

б) границя дробу може дорівнювати нулю, якщо границі чисельника та знаменника дорівнюють нескінченності;

в) границя дробу дорівнює відношенню границь чисельника та знаменника, якщо вони існують та скінченні і границя знаменника відмінна від нуля;

г) границя дробу завжди дорівнює нулю, якщо границі чисельника та знаменника дорівнюють нулю.

1.237. Чому може дорівнювати границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ за умови, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$?

а) тільки 1; **б)** тільки 0; **в)** тільки ∞; **г)** можливий будь-який результат.

Обчислити границі.

1.238. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

1.239. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

1.240. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}$.

1.241. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$.

1.242. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

1.243. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

1.244. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$.

1.245. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

1.246. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

1.247. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

1.248. За допомогою рис.1.7 вказати нерівність, яку потрібно довести, щоб отримати формулу першої важливої границі.

а) $S_{\Delta AOD}<S_{\text{сектора}AOD}<S_{\Delta BDO}$; **б)** $S_{\Delta AOC}<S_{\text{сектора}AOD}<S_{\Delta BOD}$;

в) $S_{\Delta AOC}<S_{\Delta AOD}<S_{\Delta BOD}$; **г)** $S_{\Delta AOD}\cdot\alpha<S_{\text{сектора}AOD}<S_{\Delta BOD}\cdot\alpha$.

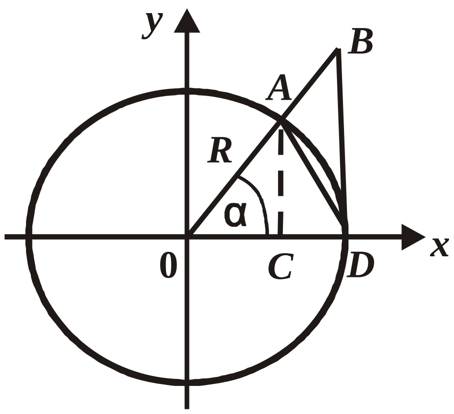


Рис. 1.7

1.249. Заповнити порожню клітинку у формулі $\lim\limits_{x\to \square}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

а) 0; **б)** e; **в)** π; **г)** ∞; **д)** 1.

1.250. Заповнити порожню клітинку у формулі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\square$

а) e; **б)** 1; **в)** 0; **г)** ∞; **д)** $\pi/2$; **е)** π.

Обчислити границі.

1.251. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

1.252. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{\sin^3 3x}$.

1.253. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{\sin 2x}$.

1.254. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$.

1.255. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

1.256. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sin \pi x}$.

1.257. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\pi(2+x))}{4x}$.

1.258. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 3x}$.

1.259. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, 2x}{\sin 4x}$.

1.260. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(2x-1)}{4x^2-1}$.

1.261. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

1.262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}$.

1.263. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin x+\sin 1}{x+1}$.

1.264. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 5x}{2x+\sin 3x}$.

1.265. Заповнити клітинки у формулі $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e.$

а) e; **б)** $1/\alpha$; **в)** α; **г)** β; **д)** x.

1.266. Заповнити клітинки у формулі $\lim\limits_{\alpha\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e.$

а) e; **б)** $1/\alpha$; **в)** α; **г)** $1/\beta$; **д)** $1/x$.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Обчислити границі.

1.267. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, $|b|<1$.

1.268. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, $|b|>1$.

1.269. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$.

Обчислити границі.

1.270. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{ctg^2x}$.

1.271. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$.

1.272. $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{x}{1-x}}$.

1.273. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$.

1.274. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x+1}$.

1.275. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{2x}\right)^{2x+1}$.

1.276. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$.   **1.277.** $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\ln(x-1)-\ln x\right]$.

1.278. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.   **1.279.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{tg5x}$.

1.280. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями. Чи може їх відношення прямувати: **а)** до скінченного числа; **б)** до нескінченності; **в)** до нескінченно малої?

1.281. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ та $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Яка з нижченаведених рівностей виконується, якщо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні функції?

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$;   **б)** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$;   **г)** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$.

1.282. Які пари функцій є нескінченно малими одного порядку при $x\to 0$?

а) $f(x)=x^2$, $g(x)=x$;   **б)** $f(x)=\dfrac{x}{148}$, $g(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{4}$;

в) $f(x)=\sin x^3$, $g(x)=x^2$;   **г)** $f(x)=e^{3x}$, $g(x)=3x^2+50$.

1.283. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=1-\cos x$ та $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

1.284. Які пари містять еквівалентні функції при $x\to 0$?

а) $f(x)=e^x$, $g(x)=1-7x$;   **б**) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $g(x)=\sqrt[4]{x}$;

в) $f(x)=a^x-1$, $g(x)=x$;   **г**) $f(x)=10x+1$, $g(x)=3x^2+50$.

1.285. Порівняти між собою $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x\to a$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$.

а) $\alpha(x)$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$;

б) $\beta(x)$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж $\alpha(x)$;

в) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі одного порядку;

г) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – еквівалентні нескінченно малі.

1.286. Визначити порядок мализни функції $\alpha(x)=\dfrac{x-4}{4+x}$ відносно функції $\beta(x)=\sqrt{x}-2$, які є нескінченно малими при $x\to 4$.

а) $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$;

б) $\beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$;

в) $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі одного порядку;

г) $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ не є нескінченно малими.

1.287. Функції $\alpha(x) = x^2 + 2x - 3$ та $\beta(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3}$ є нескінченно малими при $x \to -3$. Порівняйте їх.

а) еквівалентні; **б)** нескінченно малі одного порядку;

в) $\alpha(x)$ має більш високий порядок мализни;

г) $\beta(x)$ має більш високий порядок мализни.

1.288. Функції $\alpha(x) = 1 - x$ та $\beta(x) = a(1 - \sqrt[k]{x})$, $a \neq 0$, $k \in N$ є нескінченно малими при $x \to 1$. При якому значенні a функції будуть еквівалентними?

а) $2k$; **б)** k; **в)** $k/2$; **г)** 1; **д)** 2; **е)** 0.

1.289. Визначити порядок мализни нескінченно малої функції $y = \dfrac{3x(x-2)}{1+\sqrt[4]{x}}$ при $x \to 0$ відносно функції $y = x$.

1.6. Неперервність функції

1.290. Дати означення неперервності функції в точці.

1.291. Встановити відповідність між пронумерованими умовами та позначеними буквами видами розривів функції.

Умови	Види розривів функції
1. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$	А. x_0 – точка розриву другого роду
2. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$	Б. x_0 – точка усувного розриву
3. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = b$, $a \neq b$	В. x_0 – точка розриву першого роду
4. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$	

1.292. Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, Δx – приріст аргументу в цій точці. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y$?

а) Δx; **б)** Δy; **в)** x_0; **г)** 0.

1.293. Доповнити твердження необхідними словами: «Функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 називається … в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

а) нескінченно великою; **б)** нескінченно малою;
в) неперервною; **г)** незростаючою.

1.294. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, усередині якого є одна точка $x=c$ така, що $f(c)=0$. Що можна сказати про значення такої функції в межових точках відрізку?

а) $f(a)=f(b)$; **б)** $f(a)<0$, $f(b)>0$;
в) $f(a)<f(b)$; **г)** $f(a)>0$, $f(b)<0$.

1.295. Яка вимога повинна виконуватись, щоб функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ обов'язково досягала свого найменшого та найбільшого значень?

1.296. Дана функція $f(x)=2x-1$. Вказавши для приросту аргументу $\Delta x = x-1$ відповідні прирости функції $\Delta y = f(1+\Delta x)-f(1)$, заповнити таблицю

Δx	0,9	0,5	0,1	0,01	$-0{,}9$	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$
Δy								

1.297. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=3^{\frac{1}{x+5}}$.

1.298. При якому значенні a функція $y=\begin{cases}\sin x, & x\le \pi/2,\\ a-x, & x>\pi/2\end{cases}$ буде неперервною?

а) $1+\pi/2$; **б)** $2+\pi$; **в)** $1/2+\pi$; **г)** 1; **д)** $\pi/2$; **е)** 2π.

1.299. При яких значеннях a і b функція $y=\begin{cases}x+3, & x\le 0,\\ a\cos x+b, & 0<x\le\pi,\\ (x-\pi)^2+1, & x>\pi\end{cases}$ буде неперервною?

а) $a=2,\quad b=1$; **б)** $a=1,\quad b=2$; **в)** $a=b=1/2$;
г) $a=3,\quad b=1/3$; **д)** $a=4,\quad b=2/3$; **е)** $a=1/2,\quad b=2$.

1.300. При якому значенні a функція $y=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\ne 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ буде неперервною у точці $x=0$?

а) 0; **б)** $1/2$; **в)** 1; **г)** 2; **д)** e; **е)** $2e/3$.

1.301. Функція $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ невизначена в точці $x=2$. Яким має бути значення $f(2)$, щоб після довизначення функції вона стала неперервною при $x=2$?

а) 0; **б)** $4/3$; **в)** $5/3$; **г)** 2; **д)** $7/3$; **е)** $8/3$.

Знайти точки розриву функції; встановити їх вид; довизначити функцію так, щоб вона стала неперервною в точках усувного розриву; в точках розриву першого роду знайти стрибки функції.

1.302. $f(x) = arctg\dfrac{1}{1-x}$.

1.303. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1.304. $f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$.

1.305. $f(x) = \dfrac{2+x}{8+x^3}$.

1.306. $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.

1.307. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-6}$.

1.308. Довести, що функція $y = x^3$ неперервна в кожній точці $x_0 \in R$.

1.309. Довести, що рівняння $3^x - \frac{1}{3}\sin x - 3 = 0$ має принаймні один дійсний корінь.

1.310. Довести, що рівняння $x^3 + 3x - 8 = 0$ має корінь на відрізку $[1;2]$, знайти його з точністю до $0{,}1$.

Розділ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Похідна функції

2.1. Доповнити означення похідної необхідними словами: «Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення $\ldots$ в цій точці до $\ldots$, коли приріст $\ldots$ прямує до нуля».

2.2. Які дії та в якій послідовності треба виконати, щоб знайти похідну, визначеної на проміжку (a, b), функції $y = f(x)$ в деякій точці $x \in (a, b)$ за допомогою означення похідної.

2.3. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, то який з нижченаведених виразів описує приріст функції у цій точці, що відповідає даному приросту аргументу Δx (вважати, що α − нескінченно мала при $\Delta x \to 0$)?

а) $\Delta y = f(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$; **б)** $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$;

в) $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha$; **г)** $\Delta y = f'(x) \cdot \alpha + \Delta x$.

2.4. Об’єднати пронумеровані та позначені буквами фрази у правильні твердження.

1. Операція знаходження похідної функції − це 2. Геометрично похідна функції $y = f(x)$ − це 3. Необхідна умова диференційованості функції $y = f(x)$ − це 4. Похідна функції $y = f(x)$ згідно з фізичним змістом − це	А. Неперервність функції $y = f(x)$ Б. Швидкість змінювання функції $y = f(x)$ В. Диференціювання функції $y = f(x)$ Г. Тангенс кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ в даній точці з додатним напрямом осі Ox

а) 1−Б, 2−А, 3−В, 4−Г. **б)** 1−В, 2−А, 3−Г, 4−Б. **в)** 1−Г, 2−Б, 3−А, 4−В. **г)** 1−В, 2−Г, 3−А, 4−Б.

Знайти похідні функцій за допомогою означення похідної.

2.5. $y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$. **2.6.** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$.

2.7. $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0.\infty)$; **2.8.** $y = \sin x$, $x \in R$.

2.9. Довести теорему про похідну частки функцій $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, ($v(x) \neq 0$).

2.10. Встановити відповідність між пронумерованими твердженнями та символічними записами, позначеними буквами.

Твердження	Символічний запис
1. Похідна функції $y = f(x)$ у точці x позначається 2. За означенням похідна функції $y = f(x)$ дорівнює 3. Приріст функції Δy, що відповідає приросту аргументу Δx, дорівнює 4. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює	А. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Б. $y'(x_0)$ В. $y(x + \Delta x) - y(x)$ Г. $\frac{dy}{dx}$

а) 1–Б, 2–А, 3–В, 4–Г. **б)** 1–В, 2–А, 3–Г, 4–Б. **в)** 1–Г, 2–А, 3–В, 4–Б. **г)** 1–В, 2–Г, 3–А, 4–Б.

2.11. Встановити відповідність між пронумерованими твердженнями та значеннями похідної, позначеними буквами.

Твердження	Похідна
1. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 утворює гострий кут з віссю Ox 2. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 утворює тупий кут з віссю Ox 3. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 паралельна осі Ox 4. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 не існує 5. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 паралельна осі Oy	А. $f'(x_0) < 0$ Б. $f'(x_0) = 0$ В. $f'(x_0) > 0$ Г. $f'(x_0) = \infty$ Д. $f'(x_0)$ не існує

а) 1–Б, 2–А, 3–В, 4–Г, 5–Д. **б)** 1–В, 2–А, 3–Б, 4–Д, 5–Г. **в)** 1–Г, 2–А, 3–Д, 4–Б, 5–В. **г)** 1–В, 2–Д, 3–Г, 4–Б, 5–А.

2.12. Які з формул містять помилку?

а) $(\cos x)' = \sin x$; **б)** $(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; **в)** $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; **д)** $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; **е)** $(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

2.13. Позначити властивості функцій, вказаних у першому стовпці, поставивши зірочки у відповідних клітинках таблиці.

Функція	Властивість функції				
	Диферен-ційовна в точках $x \in R$	Має скінченну похідну в точці $x = 0$	Має скінченну похідну в точці $x = 1$	Непе-рервна в точці $x = 0$	Непе-рервна в точці $x = 1$
$y = \frac{x+1}{1-x^3}$					
$y = \frac{x-1}{1+x^2}$					
$y = \lvert x \rvert + 1$					
$y = \sqrt[3]{x}$					
$y = 2 - \lvert x-1 \rvert$					
$y = \frac{1}{x}$					
$y = \sqrt[3]{x^5}$					
$y = 2\lvert x-1 \rvert$					
$y = \frac{1}{x-1}$					

2.14. Записати праву частину формул:

$$(u(x) \pm v(x))' =; \qquad (u(x)v(x))' =; \qquad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = .$$

Обчислити похідні функцій $f(x)$ у точці x_0.

2.15. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{\sqrt{x}} - 7x$, $x_0 = 8$.

2.16. $f(x) = (tgx - x)\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2.17. $f(x) = 3x - 2e^x$, $x_0 = \ln 2$.

2.18. $f(x) = 4\arcsin x - 5tgx$, $x_0 = 0$.

2.19. Які з правил диференціювання написано з помилкою?

а) якщо $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

б) якщо $y = f[u(x)]$, тоді $y' = f'_u u'_x$;

в) якщо функція $\varphi(x)$ − обернена до $f(x)$, то $\varphi'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$;

г) якщо $y = [u(x)]^{v(x)}$, то $y' = v(x)[u(x)]^{v(x)-1}$.

2.20. Якщо функція задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то за якою формулою знаходять похідну?

а) $y' = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$; **б)** $y' = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$; **в)** $y' = -\dfrac{\frac{\partial x}{\partial F}}{\frac{\partial y}{\partial F}}$; **г)** $y' = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial F}}{\frac{\partial x}{\partial F}}$.

2.21. Встановити відповідність між пронумерованими функціями та позначеними буквами, формулами, за якими обчислюють похідні цих функцій.

Функція	Формули для обчислення похідних
1. $y = \sin x \ln x$ 2. $y = \sin \ln x$ 3. $y = (\sin x)^{\ln x}$ 4. $x = x(t)$, $y = y(t)$	А. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ Б. $y' = f'_u u'_x$ В. $y' = v' u^v \ln u + v u^{v-1} u'$ Г. $(u v)' = u' v + u v'$

Знайти похідні функцій.

2.22. $y = \dfrac{x^5}{5} - 3x^3 + 4x - \dfrac{2}{3}$.

2.23. $y = 2x^3 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{x^2}{3} + 3$.

2.24. $y = -\dfrac{2\sqrt{x}}{a^2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 7\pi$.

2.25. $y = a\sqrt[5]{x^3} - \dfrac{b}{\sqrt{x^5}}$.

2.26. $y = \dfrac{m + bx}{e^2}$.

2.27. $y = \dfrac{2x - 7}{3\pi}$.

2.28. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2.29. $y = -\dfrac{a}{\sqrt{3x}} + \dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{b}$.

2.30. $y = \dfrac{3 - 2x^3}{\sqrt[3]{\pi}} - \dfrac{5tg1 - 3}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

2.31. $y = \dfrac{7}{x^3 + 3x - 1}$.

2.32. $y = 3^x (7 - 3^{-x} \sqrt[5]{x^2})$.

2.33. $y = (2\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^4}$.

2.34. $y=(2x^3-\sqrt{x})\sin x$.

2.35. $y=(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x})\ \cos x$.

2.36. $y=(e^x+3)(\dfrac{1}{x}-ctgx)$.

2.37. $y=7^x+\dfrac{1}{x^3}\arccos x$.

2.38. $y=\sin e\ln x+\dfrac{5}{x}$.

2.39. $y=(5+x^3)\cos x+4xctgx$.

2.40. $y=\dfrac{\cos x}{4+3tgx}$.

2.41. $y=\dfrac{2^x-5^x}{10^x}$.

2.42. $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

2.43. $y=\dfrac{3^x+\cos x}{x^3+\ln x}$.

2.44. $y=\dfrac{3-\ln x}{x^2+2x-1}$.

2.45. $y=\dfrac{arctgx}{x^3+\ln x}$.

2.46. $y=\dfrac{x\sqrt{x}+e^x}{x-e}$.

Знайти похідні складених функцій.

2.47. $y=e^{\sin x}$.

2.48. $y=(5x^2-3x+1)^2$.

2.49. $y=\ln(x^2+5\sqrt{x}-3)$.

2.50. $y=\cos(x^3-\dfrac{3}{x})$.

2.51. $y=\ln(1+\sin x)$.

2.52. $y=\arcsin\sqrt[3]{x}$.

2.53. $y=\ln\sin(x^3+2)$.

2.54. $y=arctg\,e^{\sin 3x}$.

2.55. $y=\ln\ln\ln\dfrac{1}{x}$.

2.56. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

2.57. $y=\ln ctg^2(\sqrt[5]{x^3}+2)$.

2.58. $y=3^{tgx}\cos^2 x$.

2.59. $y=e^{tgx}\cos^3 x$.

2.60. $y=7^{ctg\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x}$.

2.61. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

2.62. $y=(e^{arctg\sqrt[3]{x}}+1)^3$.

2.63. $y=(\arccos\sqrt{1-4x^2}+1)^2$.

2.64. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2.65. $y=\sin\cos^2 tg^3x^4+10^{\frac{x}{2\pi}}$.

2.66. $y=(\dfrac{a}{b})^x(\dfrac{b}{x})^a(\dfrac{x}{a})^b$.

2.67. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

2.68. $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-\pi}arcctge^{x^2}$.

Знайти похідні неявно заданих функцій.

2.69. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$.

2.70. $y^3-tgy+\cos x-x^3=0$.

2.71. $e^{\frac{y}{x}}-tgx-\cos(x-y)=0$.

2.72. $x^3+x^2y+y^2=0$.

2.73. $tgy - xy = 0$. **2.74.** $x^2 y + arctg\frac{x}{y} = 5x$.

2.75. $e^{x+y} - \ln\sin\frac{y}{x} = 3\pi$. **2.76.** $\sin(x+y) - y = 0$.

Знайти похідні степенево-показникових функцій.

2.77. $y = (x+1)^{ctgx}$. **2.78.** $y = (1+x^2)^{arctg^2 x}$. **2.79.** $y = (\sin 5x)^{x^3-4}$.

2.80. $y = x^x$, $(x > 0)$. **2.81.** $y = (1-x^2)^{\arccos\sqrt{x}}$. **2.82.** $y = (\cos x)^{\sin x}$.

2.83. $y = x^{a^x} + x^{x^a} + a^{x^x}$, $(a > 0, x > 0)$. **2.84.** $y = (arctgx)^{\arcsin^2 x}$.

Знайти похідні параметрично заданих функцій.

2.85. $\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3. \end{cases}$ **2.86.** $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ **2.87.** $\begin{cases} x = \frac{1}{t}e^t, \\ y = (t-1)^2 e^t. \end{cases}$

2.88. $\begin{cases} x = \ln\sin\frac{t}{2}, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$ **2.89.** $\begin{cases} x = arcctg\frac{t}{4}, \\ y = \ln(t^2+16). \end{cases}$ **2.90.** $\begin{cases} x = 3^{tgt}, \\ y = \frac{\ln 3}{\cos t}. \end{cases}$

Обчислити похідну $\frac{dy}{dx}$ при $t = t_0$, якщо функція $y(x)$ задана параметрично.

2.91. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $t_0 = 1$. **2.92.** $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

2.93. $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y = \frac{t^3 - 54}{t}, \end{cases}$ $t_0 = 1$. **2.94.** $\begin{cases} x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases}$ $t_0 = \frac{1}{5}$.

2.2. Диференціал функції

2.95. Доповнити означення диференціала функції необхідними словами: «Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина … функції».

2.96. Яке твердження помилкове?

а) диференціал функції dy дорівнює добутку похідної y' на приріст аргументу Δx, тобто $dy = y' \cdot \Delta x$;

б) диференціал незалежної змінної dx дорівнює її приросту Δx, тобто $dx = \Delta x$;

в) диференціал функції в точці x дорівнює добутку похідної функції в цій точці на диференціал аргументу, тобто $dy = y' \cdot dx$;

г) диференціал незалежної змінної завжди дорівнює диференціалу функції, тобто $dx = dy$.

2.97. Функція $y = f(x)$ диференційована у точці x. Який з виразів описує приріст функції у цій точці, що відповідає приросту аргументу Δx (вважати, що $\alpha \to 0$ при $x \to 0$)?

а) $\Delta y = f(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$; **б)** $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$;

в) $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$; **г)** $\Delta y = f'(x) \cdot \alpha + \Delta x$.

2.98. За якою з формул визначається диференціал функції $y = f(x)$?

а) $dy = f'(x)$; **б)** $dy = f'(x)dx$;

в) $dy = f(x)dx$; **г)** $dy = f'(x)df$.

2.99. Який вираз містить помилку, якщо $y = \ln(1 + \arcsin\sqrt{kx})$ та $k = const$?

а) $dy = d(\ln(1 + \arcsin\sqrt{kx}))$;

б) $dy = \dfrac{1}{1 + \arcsin\sqrt{kx}} d(1 + \arcsin\sqrt{kx})$;

в) $dy = \dfrac{1}{1 + \arcsin\sqrt{kx}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - kx}} d(\sqrt{kx})$;

г) $dy = \dfrac{1}{1 + \arcsin\sqrt{kx}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - kx}} \dfrac{dx}{2\sqrt{kx}}$.

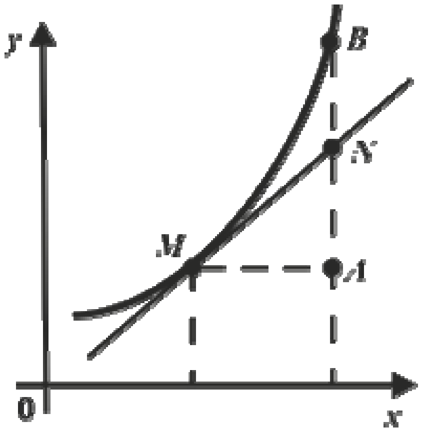


Рис. 2.1

2.100. Визначити відрізки, що відповідають Δy, dy та $\alpha \cdot \Delta x$ для функції $y = f(x)$, зображеної на рис. 2. 1.

У відповіді слід записати $\Delta y = \ldots$, $dy = \ldots$, $\alpha \cdot \Delta x = \ldots$

Знайти диференціали функцій.

2.101. $y = \dfrac{\pi}{x}$. **2.102.** $y = \ln\sin 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}$. **2.103.** $y = arctg\sqrt{x^2 - 1}$.

У вказаних точках знайти диференціали функцій, заданих неявно.

2.104. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$, $(2,1)$. **2.105.** $3^{x+2y} - \sin\dfrac{y}{x} = 9$, $(2, \pi)$.

Знайти диференціали.

2.106. $d(xe^{x})$. **2.107.** $d(\sqrt{a^2-x^2})$. **2.108.** $d(\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}})$.

Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближені значення.

2.109. $\sqrt[3]{26{,}46}$. **2.110.** $\sqrt[3]{65}$. **2.111.** $\sin 29^0$. **2.112.** $\lg 11$.

2.113. Доповнити твердження необхідними словами: «Геометрично диференціал функції dy являє собою … ординати дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці x при зміненні значення … від x до $x+\Delta x$».

2.114. Функція $S(x)$ − це площа квадрата зі стороною x. Знайти приріст функції ΔS та її диференціал dS, що відповідають приросту Δx сторони x.

а) $\Delta S=(\Delta x)^2$, $dS=x^2dx$; **б)** $\Delta S=2x\Delta x$, $dS=xdx$;

в) $\Delta S=2x\Delta x+(\Delta x)^2$, $dS=2xdx$; **г)** $\Delta S=(x+\Delta x)^2$, $dS=xdx$.

2.115. Серед наведених функцій вказати ті, для яких у точці $x_0=0$ виконується рівність $dy=dx$.

а) $y=tgx$; **б)** $y=e^{x}$; **в)** $y=\sin x$; **г)** $y=\sqrt{x}$;

д) $y=\ln x$; **е)** $y=2^{x+1}$; **ж)** $y=\cos x$; **и)** $y=\arcsin x$.

2.3. Похідні та диференціали вищих порядків

2.116. Що називається похідною другого порядку?

Знайти похідні третього порядку.

2.117. $y=x^3+\sin 2x$. **2.118.** $y=\ln\cos x$.

2.119. $y=\sin^2 x$. **2.120.** $y=x e^{-x}$.

Знайти похідні другого порядку неявно заданих функцій.

2.121. $x^2+2x+y^2-5=0$. **2.122.** $e^{y}+y-x=0$.

2.123. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **2.124.** $arctgy-y+x=0$.

Знайти похідні другого порядку параметрично заданих функцій.

2.125. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $t\in(0.\,2\pi)$. **2.126.** $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\ln\cos 2t. \end{cases}$

2.127. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^3}. \end{cases}$ **2.128.** $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t}, \\ y = 2^{\sin^2 t}. \end{cases}$

2.129. Яка з формул дає змогу обчислити диференціал функції однієї змінної n-го порядку?

а) $d^2y = f^n(x)dx^2$; **б)** $d^ny = f^n(x)dx^2$;

в) $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$; **г)** $d^ny = f^n(x)dx$.

Знайти диференціали функцій другого порядку.

2.30. $y = \sin 5x + 3x^4$. **2.131.** $y = \cos x^3$. **2.132.** $y = 2x + tg 2x$.

2.133. $y = (x^2+1)3^{-x}$. **2.134.** $y = xe^{-3x}$. **2.135.** $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$.

Знайти d^2y в точці $(x_0 y_0)$ неявно заданих функцій.

2.136. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $(1,1)$.

2.137. $e^{x-y} = xy$, $(1,1)$.

2.138. $y = 1 + xe^y$, $(-1,0)$.

2.139. $2\ln(y-x) + \sin y = 0$, $(1,0)$.

2.4. Дотична та нормаль до плоскої кривої. Кут між двома кривими

2.140. Яке з рівнянь описує дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0)?

а) $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x)_0}(x - x_0)$; **б)** $y = y_0 - y'(x)(x - x_0)$;

в) $y - y_0 = f(x_0)(x - x_0)$; **г)** $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0) (або у точці, яка відповідає параметру t_0).

2.141. $y = x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 4$. **2.142.** $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, $x_0 = -1$.

2.143. $y = \ln(2e - x)$, $x_0 = e$. **2.144.** $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, $y_0 = 3$.

2.145. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, $(1,1)$. **2.146.** $xy + \ln y = 1$, $x_0 = 1$,

2.147. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. **2.148.** $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

2.149. Вибрати помилкове твердження:

а) якщо функція неперервна у точці x_0, то існує дотична до графіка функції в цій точці;

б) пряма, що має більше однієї спільної точки з графіком функції, не може бути дотичною до цього графіка у будь-якій іншій точці;

в) не існує дотичної до графіка функції $|x|$ в точці $x_0 = 0$.

2.150. За графіком функції $y = f(x)$ (рис. 2.2) встановити відповідність між значеннями незалежної змінної x та кутового коефіцієнта дотичної k, поставивши зірочку у необхідній клітинці таблиці.

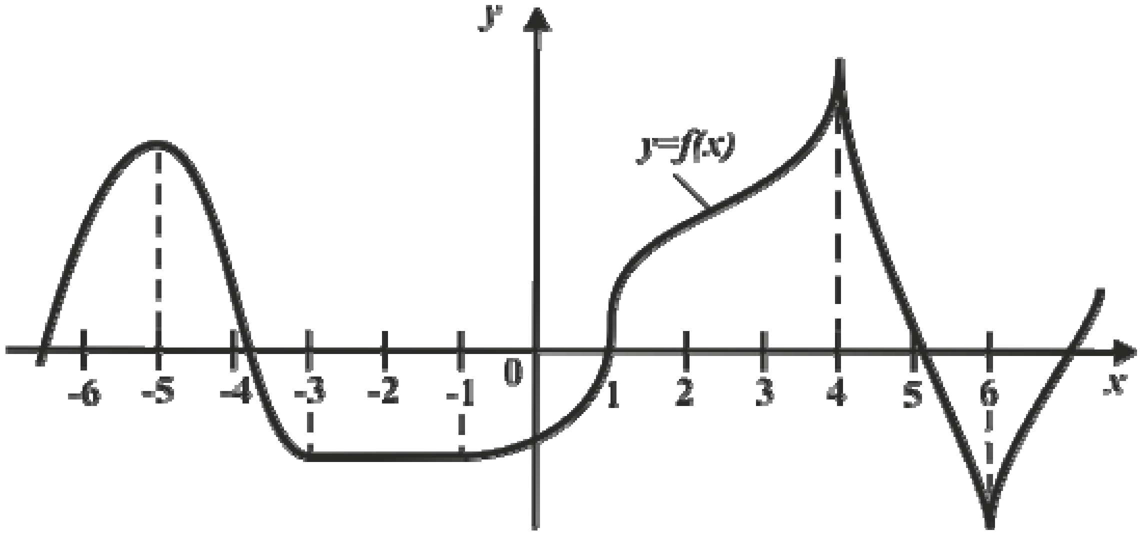


Рис. 2.2

Значення змінної x	Кутовий коефіцієнт дотичної				
	$k<0$	$k>0$	$k=0$	k не існує	$k=\infty$
$(-\infty;-5)$					
$\{-5\}$					
$(-5;-3)$					
$(-3;-1)$					
$(-1;1)$					
$\{1\}$					
$(1;4)$					
$\{4\}$					
$(4;6)$					
$\{6\}$					
$(6;+\infty)$					

2.151. При якому a пряма $y=3x+a$ буде дотичною до графіка функції $y=2x^2-5x+1$?

2.152. На кривій $y=2x^3-5x+4$ знайдіть точки, у кожній з яких дотична паралельна прямій $y=19x$.

2.153. Обчислити тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y=2x^3-5x$ в точці $M(2;6)$.

2.154. Доповнити означення необхідними словами: «Кутом між кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ у точці їх перетину називається … до цих кривих …».

2.155. На яке питання слід дати заперечну відповідь?

а) чи може рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці (x_0,y_0) мати вигляд $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$?

б) чи можна кут φ між кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ у точці (x_0,y_0) обчислити за формулою $tg\varphi=\dfrac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}$?

в) чи можна знайти кут φ між дотичною до графіка функції $y=f(x)$ в точці (x_0,y_0) та додатним напрямом осі Ox за формулою $tg\varphi=f'(x_0)$?

г) чи може рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$ у точці (x_0,y_0) мати вигляд $y=-\dfrac{1}{f'(x)}(x-x_0)+y_0$?

Обчислити кути, під якими перетинаються дані лінії.

2.156. $y=x^2-4x+4$ та $y=-x^2+6x-4$.

2.157. $y=8-x^2$ та $y=x^2$.

2.158. $y=x^3$ та $y=\dfrac{1}{x^2}$.

2.159. $y=x^3-x$ та $y=\dfrac{12}{x}$.

2.160. та $x^2+4y^2=16$.

2.161. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ та $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

2.162. В яких точках графік функції $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ має вертикальні дотичні?

2.163. На лінії $y=x^2-6x+4$ знайти точки, в яких дотична паралельна до прямої $y=2x$.

2.5. Основні теореми диференціального числення

2.164. Серед наведених нижче функцій (рис. 2.3) вибрати ту, яка задовольняє всі умови теореми Ролля. Для інших функцій вказати ту з умов теореми, яка не виконується.

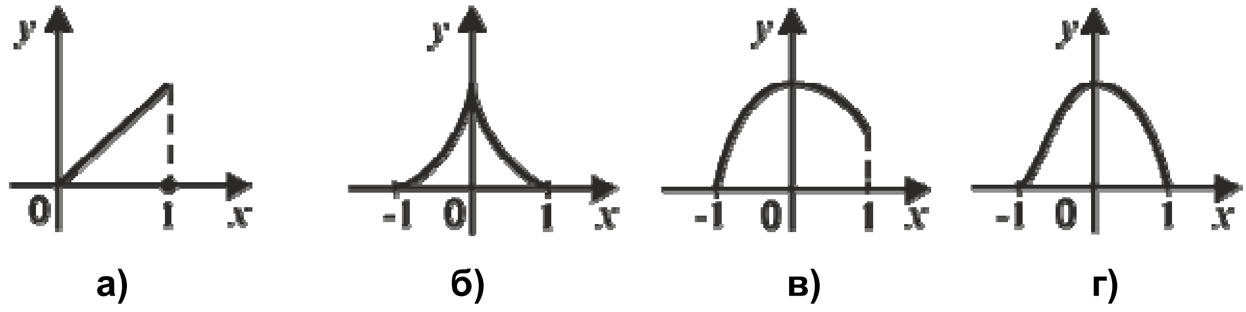


Рис. 2.3

2.165. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

2.166. На відрізку $[-1,1]$ дана функція $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Тоді $f(-1)=f(1)=0$. Але похідна $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ не обертається на нуль у жодній точці цього відрізку. Чи маємо тут суперечність з теоремою Ролля.

2.167. Довести, що корені похідної многочлена $P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ дійсні прості та лежать на відрізках $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$.

2.168. Крива $y=x^2-4x$ сполучає точки $A(1,-3)$ і $B(4,0)$. На дузі AB знайти точку $M_0(x_0,y_0)$, в якій дотична паралельна хорді AB.

2.169. На дузі AB кривої, заданої параметрично рівняннями $x=t^2$, $y=t^3$, знайти точку M, в якій дотична паралельна хорді AB, якщо точкам A та B відповідає значення $t=1$ і $t=3$.

Чи виконуються умови теореми Коші на відрізку $[-1,1]$ для пари функцій.

2.170. $f(x)=x^2$ та $\varphi(x)=x^3$. **2.171.** $f(x)=x^2+x$ та $\varphi(x)=x^3$.

Довести нерівність.

2.172. $|arctgx_2-arctgx_1|\le|x_2-x_1|$, $x_1\in R$, $x_2\in R$.

2.173. $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$. **2.174.** $\ln|1+x|<x$, $x>0$.

2.175. $\left|\cos\frac{1}{4}-\cos\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{36}$.

Обчислити границі за правилом Лопіталя.

2.176. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2+\ln(3-x)}{e^{x-1}-e}$.

2.177. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$.

2.178. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, n – ціле.

2.179. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

2.180. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

2.181. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

2.182. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-5x-1}{\sin^2 3x}$.

2.183. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$.

2.184. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$.

2.185. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

2.186. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot\ln tgx$.

2.187. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$.

2.188. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctg\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

2.189. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

2.190. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$.

2.191. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x\,tgx-\frac{\pi}{2\cos x})$.

2.192. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

2.193. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2\cos x}$.

2.194. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\sin x}$.

2.195. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

2.196. $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{tgx}$.

2.197. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$.

2.198. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{tgx}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

2.199. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}\arccos x)^{\frac{1}{x}}$.

2.200. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$. **2.201.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.202. Чи можливо застосування правила Лопіталя до обчислення границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$?

2.6. Дослідження функції за допомогою похідної

2.203. Як називається функція, якщо для $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$?

а) зростаюча; **б)** спадна; **в)** стала; **г)** диференційовна.

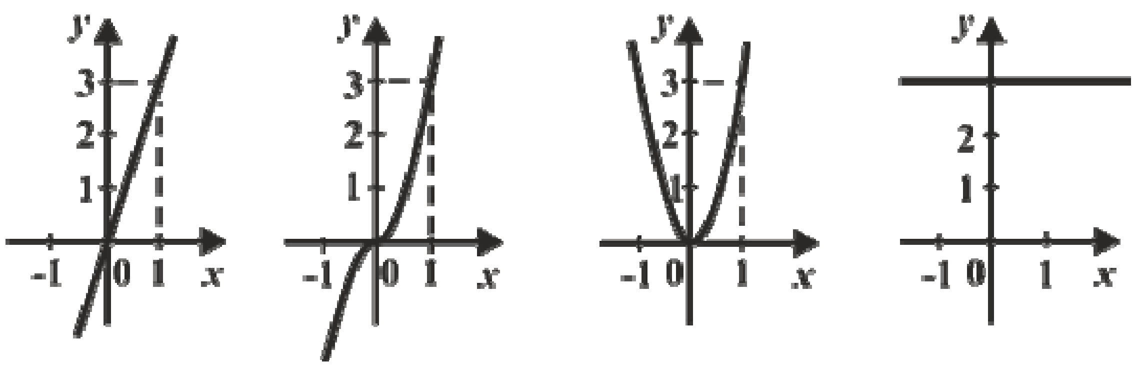
2.204. Доповнити твердження необхідним виразом: «Якщо диференційовна на проміжку (a,b) функція $f(x)$ зростаюча, то … для всіх $x\in(a,b)$».

а) $f'(x)<0$; **б)** $f(x)<0$; **в)** $f(x)\geq 0$; **г)** $f'(x)>0$.

2.205. Як поводить себе похідна $f'(x)$ в точці x_0, якщо ця точка відокремлює проміжки монотонності функції $f(x)$?

а) $f'(x_0)=0$; **б)** $f'(x_0)>0$; **в)** $f'(x_0)$ не існує; **г)** $f'(x_0)\leq 0$.

2.206. Який з графіків рис. 2.4 відповідає похідній функції $y=x^3$?



а) **б)** **в)** **г)**

Рис. 2.4

2.207. Які точки називаються критичними?

2.208. На рис. 2.5 наведено графік похідної $f'(x)$. Визначити, на яких проміжках функція $f(x)$ спадна.

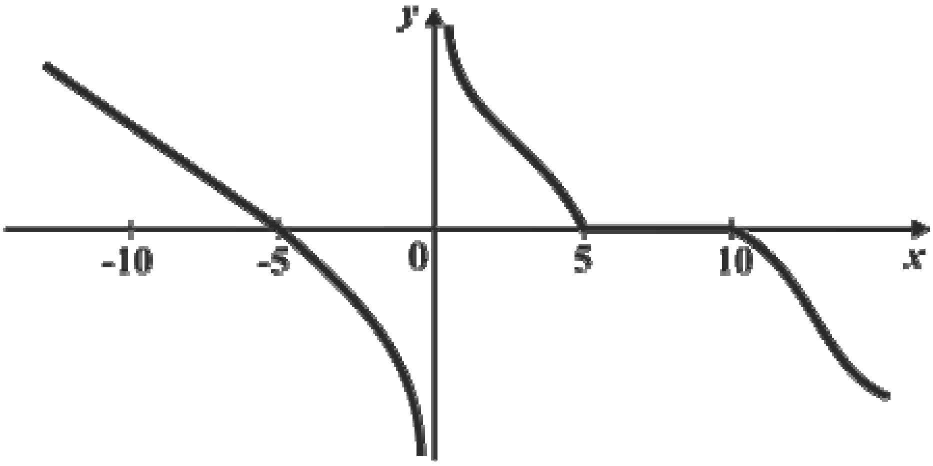


Рис. 2.5

а) $(-10,0)$; **б)** $(0,5)$; **в)** $(10,+\infty)$; **г)** $(0,+\infty)$; **д)** $(-5,0)$; **е)** $(5,10)$.

Визначити проміжки монотонності функції.

2.209. $y = x(1+\sqrt{x})$. **2.210.** $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.

2.211. $y = x\sqrt{1-x^2}$. **2.212.** $y = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$.

2.213. На рис. 2.6 наведено графік похідної $f'(x)$ функції $f(x)$. Чи буде ця функція мати екстремуми і якщо так, то визначити точки та характер екстремуму.

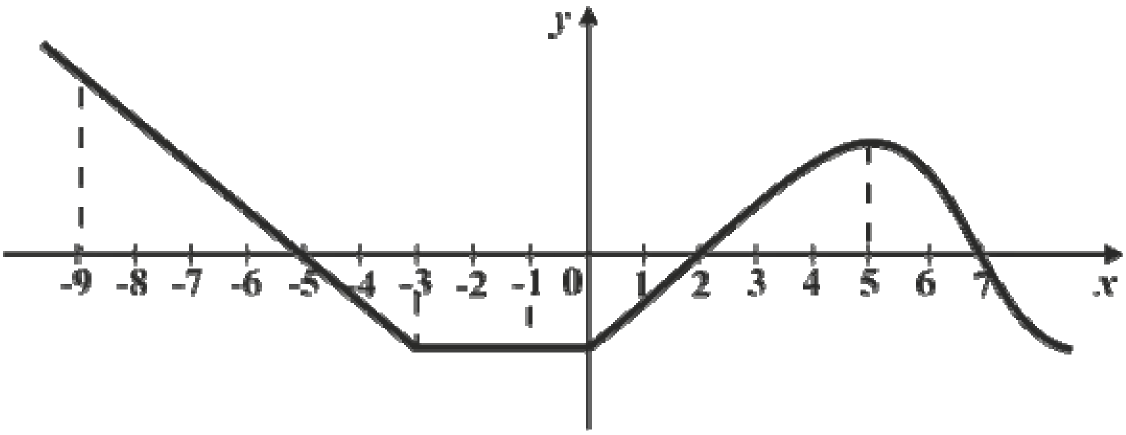


Рис. 2.6

а) $x = -9$ − точка максимуму; **б)** $x = -5$ − точка максимуму;
в) $x = -3$ − точка мінімуму; **г)** $x = -1$ − точка мінімуму;
д) $x = 0$ − точка мінімуму; **е)** $x = 2$ − точка мінімуму;
ж) $x = 5$ − точка максимуму; **и)** $x = 7$ − точка максимуму.

2.214. Який вислів правильний?

а) якщо перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю в точці x_0 ($f'(x_0)=0$), то в цій точці функція має екстремум;

б) якщо перша похідна функції $f(x)$ не існує в точці x_0, то в цій точці функція має екстремум;

в) якщо функція в точці x_0 має додатну похідну ($f'(x_0)>0$), то функція має в цій точці екстремум;

г) якщо диференційована функція $f(x)$ має екстремум в точці, то її похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує.

2.215. Які умови повинні виконуватися, щоб функція $f(x)$ в точці x_0 досягала максимуму?

а) $f'(x_0)=0$; **б)** $f''(x_0)=0$; **в)** $f'(x_0)<0$; **г)** $f''(x_0)<0$.

Знайти точки, в яких функції мають екстремум.

2.216. $y=x^3-4x^2$. **2.217.** $y=\dfrac{1}{x^3-2x^2-x+2}$.

2.2185. $y=e^x\cos x$. **2.219.** $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}$.

Знайти екстремуми функцій.

2.220. $y=(2x-3)e^{2x}$. **2.221.** $y=(x-1)^4$.

2.222. $y=2x^3-15x^2+36x-14$. **2.223.** $y=x^3+3x^2+6x-4$.

2.224. $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$. **2.225.** $y=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

2.226. Що треба знайти аби визначити найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку $[a,b]$?

а) значення похідної функції в межових точках відрізка;

б) значення функції в межових точках відрізка;

в) точки відрізка $[a,b]$, в яких похідна обертається на нуль або не існує;

г) точки відрізка $[a,b]$, в яких похідна має найбільше або найменше значення;

д) значення функції в точках відрізка $[a,b]$, де похідна дорівнює нулю або не існує;

е) значення функції в кожній точці відрізка $[a,b]$.

Знайти найменше та найбільше значення функції на відрізку $[a,b]$.

2.227. $f(x)=2x^3-3x^2-36x-8$, $[-3,6]$.

2.228. $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $[-2,1]$. **2.229.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $[0,4]$.

2.230. $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0,1]$. **2.231.** $f(x)=-3x^4+6x^2$, $[-2,2]$.

2.232. За допомогою якої похідної визначають напрям опуклості графіка функції?

2.233. Якщо x_0 абсциса точки перегину графіка функції $y=f(x)$, то яка умова може виконуватися?

а) $f(x_0)=0$; **б)** $f'(x_0)=0$; в) $f''(x_0)=0$; **г)** $f''(x_0)$ не існує.

2.234. Що змінює знак при переході через точку перегину графіка функції $y=f(x)$?

а) функція; **б)** перша похідна; **в)** друга похідна; **г)** третя похідна.

2.235. Згідно з графіком функції $y=f(x)$ (рис. 2.7) вказати проміжки, в яких $f''(x)>0$.

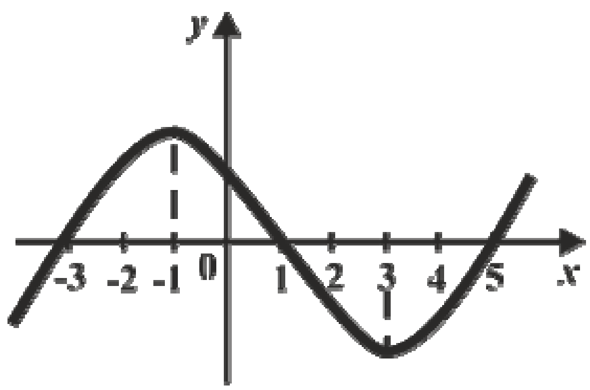


Рис. 2.7

а) $(-\infty,-3]$; **б)** $[-3,-1]$;
в) $[-1,0)$; **г)** $(0,1]$;
д) $[1,\infty)$; **е)** $(1,3]$;
ж) $(1,5)$; **и)** $[3,5)$.

2.236. Для якої з функцій точка $(0,0)$ є точкою перегину? Дати пояснення.

а) $y=\dfrac{1}{x}$; **б)** $y=\sqrt[3]{|x|}$; **в)** $y=x^3$; **г)** $y=\begin{cases}\sin x, & при \quad x\ge 0,\\ x^2, & при \quad x<0.\end{cases}$

2.237. Згідно з графіком другої похідної $f''(x)$ (рис. 2.8) вказати проміжки, на яких функція $f(x)$ опукла вниз.

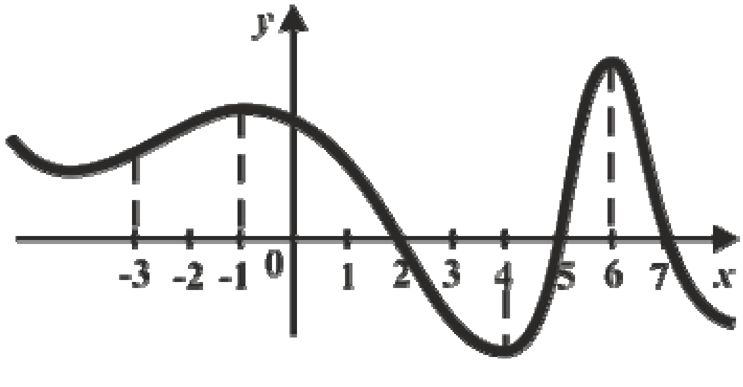


Рис. 2.8

а) $(-3,5)$; **б)** $(-1,4)$;
в) $(-\infty,2)$; **г)** $(7,+\infty)$;
д) $(5,7)$; **е)** $(2,7)$;
ж) $(4,6)$; **и)** $(0,4)$.

2.238. Згідно з графіком другої похідної $f''(x)$ (рис. 2.9) вказати проміжки спаду першої похідної $f'(x)$.

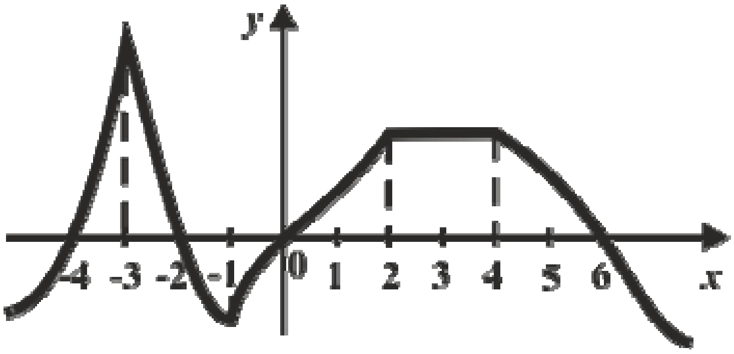


Рис. 2.9

а) $(-4,-2)$; **б)** $(-\infty,-4)$;
в) $(-3,-1)$; **г)** $(4,+\infty)$;
д) $(-2,0)$; **е)** $(2,4)$;
ж) $(-\infty,-3)$; **и)** $(6,+\infty)$.

Визначити напрям опуклості та точки перегину кривих.

2.239. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$. **2.240.** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.

2.241. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. **2.242.** $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$.

2.243. Доповнити твердження необхідним виразом «Для того щоб пряма $y = b$ була горизонтальною асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, необхідно і достатньо, щоб …».

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - b) = \infty$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{b} = \infty$; **г)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.

2.244. Чи буде функція $y = f(x)$ неперервною в точці x_0, якщо пряма $x = x_0$ являє собою вертикальну асимптоту графіка цієї функції?

а) так; **б)** ні, x_0 – точка розриву першого роду;

в) ні, x_0 – точка розриву другого роду;

г) ні, x_0 – точка усувного розриву.

2.245. Якщо пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, то за якими формулами обчислюються величини k та b?

а) $k = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - k]$;

б) $k = \lim\limits_{x\to\infty}(x\, f(x))$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

в) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{f(x)}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[k - f(x)]$;

г) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\qquad b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx]$.

Знайти асимптоти кривих.

2.246. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. **2.247.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+3}$. **2.248.** $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

2.249. $y = \dfrac{2x^2+3}{x^2+5}$. **2.250.** $y = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$. **2.251.** $y = \dfrac{8-x^3}{x^2}$.

Дослідити функції та побудувати графіки.

2.252. $y = 2\ln x - x^2$. **2.253.** $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

2.254. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$. **2.255.** $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

2.256. $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$. **2.257.** $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

2.258. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. **2.259.** $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

2.260. $y = (\dfrac{x}{2} + 3) e^{\frac{1}{2x}}$. **2.261.** $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

2.262. Сформулюйте схему дослідження функції.

Побудувати графіки функцій заданих параметрично.

2.263. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{4(1-t)}, \\ y = \dfrac{t^3}{8(t-1)}. \end{cases}$ **2.264.** $\begin{cases} x = \dfrac{t}{3}(3-t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$ **2.265.** $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\dfrac{1}{3} - t^2). \end{cases}$

2.266. $\begin{cases} x = a(t^2-1), \\ y = \dfrac{a}{3}(t^3 - 3t), \end{cases}$ $a > 0$. **2.267.** $\begin{cases} x = a(t^2-1), \\ y = b(4t - t^3), \end{cases}$ $a > 0, b > 0$.

Розділ 3. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.1. Множини в *n*-вимірному просторі

3.1. Доповнити твердження необхідними словами: «Множина будь-яких упорядкованих сукупностей дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається … та позначається …».

3.2. Якщо точки $M_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ та $M_2(x_1^{11}, x_2^{11}, \ldots, x_n^{11})$ належать n-вимірному евклідовому простору E^n, то за якою формулою обчислюється відстань між ними?

а) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^{11} + x_2^{11} + \ldots + x_n^{11})^2 - (x_1^1 + x_2^1 + \ldots + x_n^1)^2}$;

б) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^{11} - x_1^1) + (x_2^{11} - x_2^1) + \ldots + (x_n^{11} - x_n^1)}$;

в) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^{11})^2 + (x_2^{11})^2 + \ldots + (x_n^{11})^2 - (x_1^1)^2 - (x_2^1)^2 - \ldots - (x_n^1)^2}$;

г) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^{11} - x_1^1)^2 + (x_2^{11} - x_2^1)^2 + \ldots + (x_n^{11} - x_n^1)^2}$.

3.3. Доповнити твердження необхідними словами: «Множина точок $\{M\}$ n-вимірного простору R^n, для яких $\rho(M, M_0) < \delta$, називається … кулею радіуса δ з центром в точці M_0 або … точки M_0 в просторі R^n та позначається $U^n(M_0, \delta)$».

3.4. Замкненою n-вимірною кулею називається множина всіх точок $M \in R^n$, для яких виконується нерівність

а) $\rho(M, M_0) < \delta$; **б)** $\rho(M, M_0) > \delta$;

в) $\rho(M, M_0) \le \delta$; **г)** $\rho(M, M_0) = \delta$.

3.5. Утворити правильні висловлювання, поєднуючи пронумеровані фрази і позначені буквами слова:

1. Відстань між непустими множинами E_1 та E_2 простору R^n визначається як … з відстаней між довільними точками цих множин.

2. Діаметром $d(E)$ множини $E \subset R^n$ називається … відстань між точками даної множини.

А) найменша.

Б) найбільша.

3.6. Знайти відстань між прямими $\Gamma_1 \subset R^4$ та $\Gamma_2 \subset R^4$, заданими параметрично рівняннями $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = 2 + 2t$, $x_4 = 2t$ та $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = 1 + 2t$, $x_4 = t$. Визначити точки $M_1 \in \Gamma_1$ та $M_2 \in \Gamma_2$ такі, що $\rho(M_1, M_2) = d(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

3.7. Знайти відстань між прямими $\Gamma_1 \subset R^3$ та $\Gamma_2 \subset R^3$, заданими параметрично рівняннями $x_1 = 3+t$, $x_2 = 1-t$, $x_3 = 2+2t$ та $x_1 = -t$, $x_2 = 2+3t$, $x_3 = 3t$. Визначити точки $M_1 \in \Gamma_1$ та $M_2 \in \Gamma_2$ такі, що $\rho(M_1, M_2) = d(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

3.8. Знайти відстань між прямими $\Gamma_1 \subset R^n$ та $\Gamma_2 \subset R^n$, заданими параметрично рівняннями $x_1 = t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, …, $x_n = t$ та $x_1 = t$, $x_2 = 1-t$, $x_3 = 0$, …, $x_n = 0$; $t \in R$. Визначити точки $M_1 \in \Gamma_1$ та $M_2 \in \Gamma_2$ такі, що $\rho(M_1, M_2) = d(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

Знайти відстань $d(E_1, E_2)$ між множинами E_1 та E_2.

3.9. $E_1 = \{x \in R^2 | x_2 = x_1^2\}$, $E_2 = \{x \in R^2 | x_2 = x_1 - 2\}$.

3.10. $E_1 = \{x \in R^2 | x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$, $E_2 = \{x \in R^2 | x_1 + 2\sqrt{3}x_2 = 8\}$.

Знайти діаметр множини точок простору R^2, що задовольняють дану умову.

3.11. $4x_1^2 + 3x_2^2 < 2$. **3.12.** $4x_1^2 - 3x_2^2 = 2$.

Знайти діаметр множин точок простору R^3, що задовольняють дану умову.

3.13. $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 - 1 < 0$. **3.14.** $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 1 \le 0$.

3.2. Поняття функції багатьох змінних

3.15. Дати означення функції багатьох змінних.

3.16. Якщо на множині $\{M\}$ задана функція $u(M)$, то множина $\{M\}$ називається

а) областю визначення функції; **б)** множиною значень функції;
в) частинним значенням функції; **г)** границею функції.

3.17. Якщо на множині $\{M\}$ задана функція $u(M)$, то сукупність усіх значень функції $\{u\}$ називається

а) областю визначення функції; **б)** множиною значень функції;
в) частинним значенням функції; **г)** границею функції.

3.18. Що являє собою область визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$?

а) площина xOy; **б)** частина тривимірного простору;
в) частина площини xOy; **г)** деяка поверхня $z = f(x, y)$.

Знайти область визначення функцій.

3.19. $u=\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$. **3.20.** $u=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

3.21. $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$. **3.22.** $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1]$.

3.23. $z=\dfrac{x^2y}{2x+y}$. **3.24.** $z=\arcsin(x+y)$.

3.25. $u=\sqrt{R^2-(x^2+y^2+z^2)}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$, де $r<R$.

Знайти множину значень функцій.

3.26. $u=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$.

3.27. $u=\sqrt{2+x+y-x^2-2xy-y^2}$.

3.28. $u=\ln(2x^2-4xy+2y^2+12x-12y+21)$.

3.29. Що називається графіком функції двох змінних $u=f(x,y)$, $(x,y)\in E\subset R^2$?

Побудувати графіки функцій двох змінних.

3.30. $z=x^2+y^2$. **3.31.** $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3.32. $z=\sqrt{c^2(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2})}$. **3.33.** $z=\sqrt{c^2(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1)}$.

3.34. $z=\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}$. **3.35**. $z=3-\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{18}$. **3.36.** $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1$.

3.3. Границя функції. Неперервність

3.37. Дати означення границі функції $u=f(M)$ в точці $M_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

3.38. Чи залежить границя функції багатьох змінних $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ від шляху, вздовж якого точка $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ прямує до точки $M_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)$?

3.39. Сформулюйте означення повторної границі $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

3.40. Яке твердження правильне?

а) якщо існують повторні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$ та $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$, то існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$;

б) з існування рівних повторних границь, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=$ $=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, не випливає існування границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

в) з існування границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ не випливає існування повторних границь $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ та $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$;

г) якщо існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ та існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ та $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, тоді існують і повторні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

3.41. Відомо, що для функції $f(x,y)$ існують границі: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$. Чи можуть значення будь-яких двох з цих границь бути різними?

3.42. Які умови повинні виконуватися, щоб

$\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\pm g(M)]=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\pm\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$ та

$\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)g(M)]=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$?

3.43. Які умови повинні виконуватися, щоб

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}?$$

3.44. Як пов'язані границя функції $f(M)$ в точці M_0 та обмеженість цієї функції?

3.45. Нехай функція $f(M)$ має границю в точці M_0. Скількох різних значень може набувати ця границя?

3.46. Довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

3.47. Довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ не існує.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ для функцій.

3.48. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

3.49. $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y}{x^3 + y}$.

3.50. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

3.51. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y + xy^2}{x^2 - xy + y^2}$.

3.52. $f(x,y) = \dfrac{x^8 + x^5 + x^4 + y^4 + y^5 - y^8}{x^4 + y^4}$.

3.53. $f(x,y) = x + y\sin\dfrac{1}{x}$.

3.54. $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$.

3.55. $f(x,y) = \dfrac{y}{x} tg\,\dfrac{x}{x+y}$.

3.56. $f(x,y) = \log_{1+x}(1 + x + y)$.

Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\lim\limits_{y\to \infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to \infty}\lim\limits_{x\to \infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x,y)$ для функцій.

3.57. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^3}$.

3.58. $f(x,y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^4}$.

3.59. $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi y^2}{x^2 + 3y^2}$.

3.60. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^3 e^{-x^2 - y^2}$.

3.61. Яка з нижченаведених границь дорівнює 0?

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^y}{1 + x^y}$;

б) $\lim\limits_{y\to +0}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^y}{1 + x^y}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\lim\limits_{y\to -0} \dfrac{x^y}{1 + x^y}$;

г) $\lim\limits_{y\to -0}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^y}{1 + x^y}$.

Знайти границі функцій.

3.62. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3.63. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y + 9} - 3}$.

3.64. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y - x}$.

3.65. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{2 - \sqrt{xy + 4}}$.

3.66. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

3.67. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.68. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} (1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3.69. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

3.70. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+y)}{y}$.

3.71. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{tg 2xy}{xy}$.

3.72. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{x^7 y+xy^2}}$.

3.73. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y}$.

3.74. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1+x)^{\frac{1}{x^2+xy}}$.

3.75. Чи можна в повторних границях функції двох змінних змінити черговість граничних переходів по різних змінних?

3.76. Доповнити твердження потрібним виразом: «Функція $z=f(M)$ називається … в точці M_0, якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$».

3.77. Дати означення елементарної функції багатьох змінних.

3.78. Доповнити твердження потрібним виразом: «Будь-яка елементарна функція багатьох змінних неперервна на множині …».

3.79. Якою є функція $f(x,y)$, якщо вона неперервна в кожній точці (x,y) деякої множини D.

3.80. Яке з тверджень помилкове?

а) функція $z=f(M)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0,y_0)\in D$, якщо виконується рівність $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0$;

б) точки розриву функції $z=f(M)$ можуть утворювати лінії розриву;

в) функція $z=f(M)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо вона визначена в цій точці та її околі, має границю $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ і ця границя дорівнює значенню функції z в точці M_0, тобто $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$;

г) функція неперервна в точці $M_0(x_0,y_0)\in D$ називається неперервною в області деякій області D.

3.81. Яка з нижченаведених функцій має лінію розриву $y = x$?

а) $z = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$; **б)** $z = \dfrac{2}{y-x}$;

в) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2-1)}$; **г)** $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

3.82. Доповнити твердження необхідними виразами: «Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в обмеженій, замкненій області, то вона в цій області … та має точки, в яких набуває свого найменшого m і … M значень в цій області».

3.83. Дослідити на неперервність у точці $(0;0)$ функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}, & \text{якщо} \quad x^3 + y^3 \neq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x^3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

Дослідити на неперервність функції.

3.84. $z = x^2 + 5xy$. **3.85.** $z = \dfrac{x}{x^2 + y^4}$. **3.86.** $z = \dfrac{1}{x^2 - y}$.

3.87. $z = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. **3.88.** $z = \dfrac{xy - 2xy - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$.

3.89. $z = x \sin \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$. **3.90.** $z = \dfrac{1}{\ln\left|1 - x^2 - 4y^2\right|}$.

3.91. Довести, що функція $z = x + 2y + 3$ рівномірно неперервна на всій площині xOy.

З’ясувати обмеженість функцій $z(x,y)$ на вказаних множинах Ω.

3.92. $z = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$, $\Omega = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3.93. $z = x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

3.94. $z = x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 25\}$.

3.95. $z = \dfrac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{xy}$, $\Omega = \{(x,y) : xy \neq 0\}$.

3.96. $z = \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$, $\Omega = \{(x,y) : x \neq y\}$.

3.4. Частинні похідні та диференційовність функції

3.97. Доповнити твердження необхідними словами: «Якщо в функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зафіксувати всі аргументи, за винятком x_k, а змінній x_k надати приросту Δx_k, то функція набуде … в точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за змінною x_k $(k = 1,2,\ldots,n)$».

а) приросту; **б)** повного приросту;
в) загального приросту; **г)** частинного приросту.

3.98. Яка з формул визначає частинний приріст функції $z = f(x, y)$ за змінною y?

а) $\Delta_y z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$;

б) $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$;

в) $\Delta_y z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$;

г) $\Delta_y z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

3.99. Вказати відповідність між пронумерованим переліком позначень приросту функції $u = f(x, y, z)$ та переліком позначених буквами виразів, за якими ці прирости знаходяться.

Позначення приросту функції	Вираз, за яким визначають приріст функції
1. $\Delta_x u$	А. $f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)$
2. $\Delta_y u$	Б. $f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$
3. $\Delta_z u$	В. $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$
4. Δu	Г. $f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$

3.100. Яке з тверджень помилкове?

а) за означенням частинної похідної першого порядку функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за змінною x_k маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k};$$

б) при знаходженні частинної похідної функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за змінною x_k всі інші аргументи вважаються сталими величинами;

в) геометрично частинна похідна функції $z = f(x, y)$ за змінною x у точці $M_0(x_0 y_0)$ дорівнює тангенсу кута між віссю Oy і дотичною в точці $(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ до кривої, утвореної перетином поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $y = y_0$;

г) механічний зміст похідної $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0 y_0)$ – це миттєва швидкість зміни функції у напряму осі Oy, коли $x = x_0$.

Знайти похідні функцій $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, користуючись означенням частинних похідних.

3.101. $z = xy^2$. **3.102.** $z = 2^x \ln y$.

Знайти частинні похідні першого порядку функцій.

3.103. $z = x^2 + y^3 + 3x^5 y^3$. **3.104.** $z = 2\sqrt{x} + \ln y + 4(x + y^2)$.

3.105. $z = x\sin(3x + y)$. **3.106.** $z = (x^2 + 4)\cos(\sqrt[3]{x} + 2y)$.

3.107. $u = xy + yz + zx$. **3.108.** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3.109. $u = xyz + \dfrac{x}{yz}$. **3.110.** $u = yz + \dfrac{x(x - z)}{y^2}$.

3.111. $u = \sin(xy + yz)$. **3.112.** $u = \sin z - x^2 y$.

3.113. $u = \dfrac{\cos x}{\cos y}$. **3.114.** $u = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

3.115. $u = e^x(\cos y + x\sin y)$. **3.116.** $u = xye^{\sin(\pi xy)}$.

3.117. $u = e^{\frac{x}{y}} tg(x + y)$. **3.118.** $u = e^{x^2} ctg(1 + \dfrac{y}{x})$.

3.119. $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **3.120.** $u = arctg\,\dfrac{x}{y}$.

3.121. $u = xy\ln(xy)$. **3.122.** $u = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

3.123. $u = (\dfrac{y}{x})^z$. **3.124.** $u = z^{xy}$.

3.125. $u = (1 + \sin^2 x)^{\ln y}$. **3.126.** $u = x^y y^z z^x$.

3.127. Виберіть правильне твердження.

а) якщо функція $u = f(M)$ диференційовна в точці M, то вона неперервна в цій точці;

б) якщо функція $u = f(M)$ має частинні похідні в точці M, то вона неперервна в цій точці;

в) якщо функція $u = f(M)$ неперервна в точці M, то вона диференційовна в цій точці;

г) якщо функція $u = f(M)$ неперервна та має частинні похідні в точці M , то вона диференційовна в цій точці.

3.128. Якщо функція $u = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ існує дотична площина до поверхні $u = f(x, y)$. Вказати рівняння цієї дотичної площини.

а) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) - (u - f(x_0, y_0) = 0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + (u + f(x_0, y_0) = 0$;

в) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) - (u - f(x_0, y_0) = 0$;

г) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + (u - f(x_0, y_0) = 0$.

3.129. Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ диференційовна в точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вибрати формулу, за якою можна знайти повний приріст цієї функції у даній точці.

а) $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$,

де α_i нескінченно мала при $\Delta x_i \to 0$;

б) $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$,

де α_i нескінченно мала при $\Delta x_i \to 0$;

в) $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$,

де α_i нескінченно мала при $\Delta x_i \to 0$;

г) $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_j$,

де α_i нескінченно мала при $\Delta x_i \to 0$.

3.130. Довести, що функція $f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$ диференційовна в точці $(0;1)$ та знайти $df(0;1)$.

3.131. Утворити правильні висловлювання, поєднуючи пронумеровані фрази та позначені буквами формули:

1. Якщо складена функція $z = f(u(x,y), v(x,y))$ диференційовна в точці (x_0, y_0), то …

2. Якщо складена функція $z = f(x(t), y(t))$ диференційона в точці (t_0), то …

3. Якщо складена функція $z = f(x, y(x))$ диференційовна в точці (x_0), то …

А) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$. Б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

В) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

3.132. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = x - y$, $v = xy$.

3.133. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dt}$ функції $z = e^{xy}$, де $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$.

3.134. Знайти повну похідну функції $z = \dfrac{x + e^{xy}}{y}$, якщо $y = \sqrt{x}$.

3.135. Для функції $u = x^{y^z}$ знайти частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

3.136. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$.

3.137. Знайти похідну функції $z = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$, де $x = -\cos t$, $y = \cos t$.

Довести, що функція $z(x, y)$ задовольняє вказаним рівнянням.

3.138. $z = y\ln(x^2 - y^2)$, $\quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

3.139. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3.140. $z = e^{xy}$, $\quad \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3.141. $z = \sin\dfrac{x}{y}$, $\quad \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3.142. Рівняння $F(x, y, z) = 0$ описує неявно задану функцію z аргументів x та y. За якими формулами обчислюють частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$?

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y}{F'_z}$; **б)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_z}{F'_x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_z}{F'_y}$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$; **в)** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y}{F'_z}$.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданих функцій.

3.143. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

3.144. $x^4 - 3y^4 - z^2 + 4xyz - 2x + 1 = 0$.

3.145. $yz = arctg(xz)$.

3.146. $z\ln(x+z) - xye^z = 0$.

Знайти у вказаній точці (x_0, y_0) похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $u(x, y)$.

3.147. $u^3 + 3xyu + 1 = 0$. $(0;1)$.

3.148. $e^u - xyu - 2 = 0$. $(1;0)$.

3.149. $u + \ln(x + y + u) = 0$. $(1;-1)$.

3.150. $x\cos y + y\cos u + u\cos x = 1$. $(0;1)$.

Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

3.151. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $N_0(3;4;-7)$.

3.152. $z = xy$, $N_0(1;0;0)$.

3.153. $z = x + y^2$, $N_0(0;1;1)$.

3.154. $z = x^3 + y^3$, $N_0(1;-1;0)$.

3.155. $z = e^{x+y}$, $N_0(1;-1;1)$.

Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $N_0(x_0; y_0; z_0)$.

3.156. $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$, $N_0(1;1;1)$.

3.157. $x^3 + xy^2 + x^2y - z^3 = 7$, $N_0(2;0;1)$.

3.158. $3xyz - z^3 = 27$, $N_0(0;3;-3)$.

3.159. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $N_0(2;2;3)$.

3.160. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $N_0(2;2;1)$.

3.161. Що називається повним диференціалом першого порядку функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці M ?

3.162. Нехай функція $u = f(x, y, z)$ диференційовна в точці $N(x, y, z)$, тоді її повний приріст можна записати у вигляді:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z,$$

де α, β, γ – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Вказати ту частину повного приросту, що являє собою повний диференціал функції трьох змінних.

а) $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha\Delta x$; **б)** $du = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$;

в) $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$; **г)** $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \gamma\Delta z$.

3.163. За якою формулою обчислюється повний диференціал функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$?

а) $du = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$; **б)** $du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i$; **в)** $du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$; **г)** $du = \sum_{i=1}^{n} dx_i$.

3.164. Яке з правил диференціювання функцій декількох змінних u та v містить помилку?

а) $d(u+v) = du + dv$; **б)** $d(uv) = vdu + udv$;

в) $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu + udv}{v^2}$; **г)** $d(Cu) = Cdu$, C – $const$.

3.165. Нехай функція $u = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$. Вибрати умову, при якій виконується рівність $\Delta z \approx dz$.

а) $|\Delta x| \to 0$, $|\Delta y| \to 0$; **б)** $\frac{\partial z}{\partial x} \to 0$; **в)** $\frac{\partial z}{\partial y} \to 0$; **г)** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \to 0$.

3.166. Виділити головну частину приросту функції $z = xy$ в точці $M_0(1;1)$, лінійну відносно Δx, Δy.

3.167. Виділити головну частину приросту функції $z = x^2 y$ в точці $M_0(2;-3)$, лінійну відносно Δx, Δy.

3.168. Знайти повний приріст та повний диференціал функції $z = xy^2$ в точці $M_0(3;2)$ при $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$.

3.169. Знайти повний приріст та повний диференціал функції $z = x^2 + y$ в точці $A(1;2)$ при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Знайти частинний диференціал функцій.

3.170. $z = \dfrac{x^2}{y}$. **3.171.** $z = x\sin 2y$. **3.172.** $u = xyz$. **3.173.** $u = x^{yz}$.

Знайти повний диференціал функцій.

3.174. $z = x^2 y^3$. **3.175.** $z = \ln\dfrac{1}{xy^2}$. **3.176.** $z = 5^{\sqrt{x} - 2y}$.

3.177. $z = \cos^2\dfrac{x}{y}$. **3.178.** $u = ze^{x^3 + y^2}$. **3.179.** $u = e^{xyz}$.

3.180. $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **3.181.** $u = xy + yz + zx$. **3.182.** $u = tx^{\frac{y}{z}}$.

3.183. $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2$. **3.184.** $f(x, y) = (y^3 + 2x^2y + 3)^4$.

3.185. $f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$. **3.186.** $f(x, y) = (1 + xy)^y$.

Знайти диференціал функції $u(x, y, z)$ в точці $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

3.187. $u = \dfrac{yz}{x}$, $N_0(1,2,3)$. **3.188.** $u = \cos(xy + xz)$, $N_0(1, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6})$.

3.189. $u = xyz - x^2 + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{2}$, $N_0(3,2,-2)$.

3.190. $u = \dfrac{x}{z} + \dfrac{1}{x} + \ln y - arctgz$, $N_0(2,-1,1)$.

Знайти диференціал неявно заданих функцій.

3.191. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. **3.192.** $xyz = x + y + z$.

3.193. $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$. **3.194.** $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$.

3.195. На скільки зміниться діагональ та площа прямокутника зі сторонами $x = 6\,м$ і $y = 8\,м$, якщо перша сторона збільшиться на $2\,мм$, а друга зменшиться на $5\,мм$.

3.196. В усіченому конусі радіуси основ $R = 20 см$, $r = 10 см$ а висота $h = 30 см$. Як наближено зміниться об'єм конуса, якщо R збільшиться на $2\ мм$, r – на $3\ мм$ та h зменшиться на $1 мм$?

3.197. При вимірюванні радіуса основи R та висоти H циліндра були отримані такі результати: $R = (2{,}5 \pm 0{,}1)\, м$; $H = (4{,}0 \pm 0{,}2)\, м$. З якою абсолютною похибкою Δ^* та відносною похибкою δ можна обчислити об'єм циліндра?

3.198. Радіус основи конуса $R = (10{,}2 \pm 0{,}1)\, см$, утворююча $l = (44{,}6 \pm 0{,}1)\, см$. Знайти об'єм конуса та вказати похибку підрахунку.

3.199. Сторони трикутника $a = (200 \pm 2)\, м$, $b = (300 \pm 5)\, м$ та кут між ними $\alpha = (60 \pm 1)^0$. З якою абсолютною похибкою $\left|\Delta^* c\right|$ можна обчислити третю сторону трикутника?

Замінюючи приріст функції диференціалом наближено обчислити.

3.200. $1{,}02^{3{,}01}$. **3.201.** $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

3.202. $\sin 29^0 \cdot tg 46^0$. **3.203.** $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

3.5. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

3.204. Скільки похідних другого порядку має функція $u = f(x, y, z)$?

3.205. Нехай $z = f(x, y)$ двічі диференційовна функція. Які твердження правильні?

а) щоб знайти похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ треба знайти похідну по змінній x від похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$;

б) щоб знайти похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ треба знайти похідну по змінній y від похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$;

в) щоб знайти похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ треба знайти похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$ по змінній x;

г) похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ обчислюється як похідна $\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}$.

3.206. Нехай $z = f(x, y)$ двічі диференційовна функція в даній точці $M(x, y)$. Чи є в такому разі серед нижченаведених частинних похідних рівні між собою? Якщо є, вказати які.

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; **б)** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; **в)** $\frac{\partial z}{\partial x}$; **г)** $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; **д)** $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; **е)** $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3.207. Яка формула містить помилку?

а) $d^2u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$;

б) $d^2u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$;

в) $d^2u(x, y) = d(du(x, y))$; **г)** $d^2u(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^2 u$.

3.208. Які з формул правильні?

а) $d^n u(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^n u$;

б) $d^n u(x, y) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} dx^n + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} dy^n$;

в) $d^n u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n)^n u$;

г) $d^n u(x, y, z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} dx^n + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} dy^n + \frac{\partial^n u}{\partial z^n} dz^n$.

3.209. Для функції $u = f(x, y, z)$ записати формулу, за якою можна обчислити диференціал $d^3 u$.

Знайти частинні похідні другого порядку функцій.

3.210. $z = x^2 y^2 - 3x^3 y$. **3.211.** $z = x^5 + y^5 - 5x^3 y^3$.

3.212. $z = (\frac{y}{x})^2$. **3.213.** $z = xy + \frac{y}{x}$.

3.214. $z = x\sin(x + y)$. **3.215.** $z = x\sin^2 y$.

3.216. $z = \ln(x + y^2)$. **3.217.** $z = \ln(x^2 + 4y^3)$.

3.218. $z = arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$.

3. 219. $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.220. $z = xe^{-xy}$.

3.221. $z = xe^{x^2+y^3}$.

3.222. $u = xy + yz + zx$.

3.223. $u = z2^{xy}$.

3.224. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.225. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

Довести, що функції задовольняють відповідні рівняння.

3.226. $z = e^{xy}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3.227. $u = x(x+y)^2 + y(x+y)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3.228. $u = \sqrt{xy} + \dfrac{x}{y}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$,

3.229. $z = \ln(x + e^{-y})$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

3.230. $z = e^{xy}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

3.231. $z = \dfrac{x}{y}$, $\qquad x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3.232. $z = \cos y + (y - x)\sin y$, $\qquad (x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3.233. $z = e^{\frac{x}{y}}$, $\qquad y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

3.234. $z = xe^{\frac{x}{y}}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3.235. $z = \dfrac{xy}{x-y}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}$.

Знайти повні диференціали другого порядку функцій.

3.236. $u = xyz$.

3.237. $u = \sin\sqrt{x^2+y^2}$.

3.238. $u = (x+y)e^z$.

3.239. $u = e^{ax+by+cz}$.

Знайти всі частинні похідні третього порядку функцій.

3.240. $u = x^3 + 4xy^2 + y^3 + xy + x + 2y + 4$.

3.241. $u = \sin(x + yz)$.

3.242. $u = x^3 + y^4 + 2x^3y^4$.

3.243. $u = xy^2z^3 + \dfrac{x}{y^2z^2}$.

3.244. Для функції $z = x^2 + \dfrac{x}{y}$ знайти $d^2z(0;1)$.

Знайти d^3u для функцій.

3.245. $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

3.246. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

3.247. $z = e^y \sin x$.

3.248. $z = 2x^3 + x^2y + xy^2 + 2y^3$.

3.249. $z = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$. Знайти всі частинні похідні четвертого порядку.

3.250. $u = e^{xyz}$. Знайти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3.6. Екстремуми функцій

3.251. Що називається точкою локального мінімуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

3.252. Що називається локальним максимумом функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

3.253. Яка з нерівностей виконується, якщо M_0 − це точка локального максимуму функції $f(x)$, а M − будь-яка точка з околу точки M_0?

а) $f(M) > f(M_0)$; **б)** $f(M) < f(M_0)$;

в) $f(M) = f(M_0)$; **г)** $f(M) \geq f(M_0)$.

3.254. Сформулювати необхідні умови екстремуму функцій n змінних.

3.255. Доповнити твердження необхідними виразами: «Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називають … точками функції».

3.256. Чи може буди екстремум функції не в критичних точках?

3.257. Сформулювати достатні умови існування локального екстремуму багатьох змінних.

3.258. Доповнити речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо в критичній точці M_0 функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ другий диференціал d^2u – знаковизначена квадратична форма від диференціалів dx_1. dx_2, …, dx_n незалежних змінних, то у точці M_0 буде максимум при $\ldots$ та мінімум при $\ldots$».

3.259. Що можна сказати про локальний екстремум функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в критичній точці M_0, якщо другий диференціал d^2u – знакозмінна квадратична форма від диференціалів dx_1. dx_2, …, dx_n незалежних змінних.

3.260. Доповнити речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Нехай функція $z = f(x, y)$ в околі критичної точки $M_0(x_0, y_0)$ має неперервні похідні другого порядку $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$; $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$; $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$. Тоді при $AC - B^2 > 0$, $A > 0$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція набуває $\ldots$, а при $AC - B^2 > 0$, $A < 0$ – $\ldots$»

Дослідити на локальний екстремум функцій.

3.261. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

3.262. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

3.263. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

3.264. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3.265. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$.

3.266. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

3.267. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.268. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

3.269. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

3.270. $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

3.271. Що треба зробити, щоб знайти найменше та найбільше значення диференційовної функції в замкненій та обмеженій області D?

Знайти найбільше та найменше значення функцій в області D.

3.272. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, D: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.
3.273. $z = xy(6 - x - y)$, D: $x \geq 1$, $y \geq 1$, $x + y \leq 8$.
3.274. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y$, D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$.
3.275. $z = x^2 - y^2$, D: $x^2 + y^2 \leq 4$.

Знайти умовний екстремум функцій.
3.276. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2a^2$.
3.277. $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.
3.278. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.
3.279. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.
3.280. $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).
3.281. $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Відповіді. Вказівки. Розв'язки

Розділ 1

1.1. Поняття множини належить до так званих первісних, які не можна виразити через простіші поняття, тому цьому поняттю не можна дати строге означення. **1.2.** Об'єкти, з яких складається множина, називають її елементами. **1.3.** Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими. **1.4.** Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів. **1.5.** Множину, яка містить скінченну кількість елементів, називають скінченною. Множину, яка містить нескінченну кількість елементів, називають нескінченною. **1.6.** Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\varnothing$. **1.7.** І-в; ІІ-б; ІІІ-а. **1.8.** Запис означає множину всіх тих чисел x, для яких виконується властивість $P(x)$. **1.9.** в. **1.10.** $A \setminus B = \{4;16\}$, $A \cup B = \{1;4;5;9;13;16;17;21;25;29;33;37;41;45;49\}$, $A \cap B = \{1;9;25;49\}$. **1.11.** Z — множина цілих чисел. **1.12.** $N = \{1;2;\ldots;n\ldots\}$, $Z_0 = \{0;1;2;\ldots;n\ldots\}$, $Z = \{0;\pm 1;\pm 2;\ldots;\pm n\ldots\}$. **1.13.** $[a;b]$ — відрізок; $(-\infty;\infty)$, $(a;b)$, $(-\infty;b)$, $(a;\infty)$ — інтервали; $[a;\infty)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;b]$ — півінтервали. **1.14.** б. **1.15.** б. **1.16.** Якщо з δ-околу $U_\delta(x_0)$ вилучити x_0, то дістанемо проколений окіл $\dot{U}_\delta(a)$ точки x_0, якому відповідає нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$. **1.17.** Модулем дійсного числа x називають число $|x|$, яке визначається за формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & якщо\ x > 0; \\ 0, & якщо\ x = 0; \\ -x, & якщо\ x < 0. \end{cases}$$

З геометричної точки зору $|x|$ означає відстань від початку відліку 0 до точки, що відповідає числу x на числовій осі. **1.18**. а, г, е, ж. **1.19.** г. **1.20.** $x \in [-3{,}001; -2{,}999]$. **1.21.** $x \in (-1;1)$. **1.22.** $A = \{-5; 0; 1\}$. **1.23.** $B = \{1\}$. **1.24**. в. **1.25.** г. **1.26.** в. **1.27**. $(0;1)$ – уявна одиниця; $(x;0)$ – дійсне число; $(0;y)$ – суто уявне число. **1.28.** а, в, д, е – правильні; б, г, ж, и – помилкові. **1.29**. Точкою. **1.30.** г, ж. **1.31.** $|z_1| = 1$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{2}$; $|z_2| = 3$, $\arg z_2 = 0$. **1.32.** $(-x, y)$ – симетрична точці (x, y) відносно осі Oy; $(-x, -y)$ – симетрична точці (x, y) відносно початку координат; $(x, -y)$ – симетрична точці (x, y) відносно осі Ox; радіуси-вектори точок $(y, -x)$ та (x, y) перпендикулярні. **1.33.** г. **1.34.** а, при $x < 0$, $y > 0$; б, при $x > 0$; г, при $x < 0$, $y < 0$. **1.35.** в. **1.36.** г. **1.37.** 1–В, 2–Б, 3–А. **1.38.** а, б, г, д, е, ж.

1.39. б. **1.40.** в, д. **1.41.** г. **1.42.** $z=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$. *Вказівка*. Тригонометрична форма комплексного числа має вигляд $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де r – модуль, а φ – аргумент числа. Модуль обчислюється за формулою $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=1$. Формула для визначення аргументу залежить від того, в якій чверті лежить число. Вказане число лежить у другій чверті комплексної площини, тому $\varphi=\pi+arctg\frac{y}{x}=\pi+arctg(\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

1.43. $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. *Вказівка*: $\varphi=arctg\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=arctg\,tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{6}$, $r=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}}=1$. **1.44.** $3(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9})$. *Розв'язання:* $r=\sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{9}+9\sin^2\frac{\pi}{9}}=3$, $\varphi=\pi+arctg\frac{3\sin\frac{\pi}{9}}{-3\cos\frac{\pi}{9}}=\pi-arctg\,tg\frac{\pi}{9}=\frac{8\pi}{9}$, $z=3(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9})$. **1.45.** $\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$. *Вказівка*. Звести чисельник та знаменник до тригонометричної форми: $1=\cos 0^0+i\sin 0^0$, $\cos(\frac{4\pi}{3})-i\sin(\frac{4\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})$. **1.46.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. *Розв'язання:*

$$i+i^{13}+\frac{3-2i}{1+i}=i+i+\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2i+\frac{3-3i-2i+2i^2}{2}=2i+\frac{1-5i}{2}=$$

$$=\frac{4i+1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$ **1.47.** $-4-13i$. **1.48.** $-1-i$. *Розв'язання*:

$$\frac{2+3i}{i-2}-\overline{(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i)}=\frac{2+3i}{i-2}-(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i)=\frac{(2+3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}-(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i)=-1-i.$$

1.49. -3^{30}. *Вказівка*. Необхідно використати першу формулу Муавра $z^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$. **1.50.** $\frac{1}{2^{21}}(-1+\sqrt{3}i)$. *Розв'язання*:

$$(\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i})^{40}=(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i})^{40}=\left(\frac{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}\right)^{40}=\frac{1}{2^{20}}(\cos(-\frac{7\pi}{12})+$$

$$+i\sin(-\frac{7\pi}{12}))^{40}=\frac{1}{2^{20}}(\cos(-\frac{70\pi}{3})+i\sin(-\frac{70\pi}{3}))=\frac{1}{2^{20}}(\cos\frac{2\pi}{3}+$$

$$+i\sin\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2^{21}}(-1+\sqrt{3}i).$$

1.51. $z_1=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$,

$z_2=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$, $z_3=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=-2i$.

Вказівка. Число, що стоїть під коренем привести до тригонометричної форми, а потім скористатися формулою

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),\ \ k=0,1,2,\ldots,(n-1).$$

$$\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}=2\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{3},\ \ k=0,1,2.$$

1.52. $z_1=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$,

$z_2=3(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=3(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$,

$z_3=3(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=3(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$,

$z_4=3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

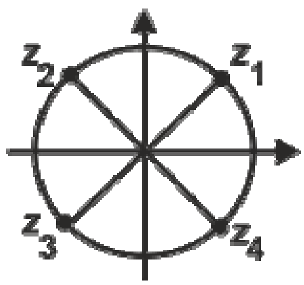


Рис. 1

Корені z_1,z_2,z_3,z_4 зображені на рис. 1.

1.53. $z_1=\cos(-\frac{\pi}{10})+i\sin(-\frac{\pi}{10})$, $z_2=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$, $z_3=\cos\frac{7\pi}{10}+$ $+i\sin\frac{7\pi}{10}$, $z_4=\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}$, $z_5=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$.

1.54. $z_1=2(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9})$, $z_2=2(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9})$, $z_3=2(\cos\frac{14\pi}{9}+$ $+i\sin\frac{14\pi}{9})$. **1.55.** $z_1=\sqrt[12]{3}(\cos\frac{\pi}{36}+i\sin\frac{\pi}{36})$, $z_2=\sqrt[12]{3}(\cos\frac{13\pi}{36}+i\sin\frac{13\pi}{36})$,

$z_3=\sqrt[12]{3}(\cos\frac{25\pi}{36}+i\sin\frac{25\pi}{36})$, $z_4=\sqrt[12]{3}(\cos\frac{37\pi}{36}+i\sin\frac{37\pi}{36})$,

$z_5 = \sqrt[12]{3}(\cos\frac{49\pi}{36} + i\sin\frac{49\pi}{36})$, $z_6 = \sqrt[12]{3}(\cos\frac{61\pi}{36} + i\sin\frac{61\pi}{36})$. *Вказівка*: $\sqrt[6]{1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt[6]{1+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[6]{\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})}$.

1.56. $x = 2$, $y = \pm 2$. *Вказівка*. Якщо квадратний тричлен $z^2 + pz - q$ має комплексні корені, то вони спряжені, тобто $z_1 = x + iy$, $z_2 = x - iy$. За теоремою Вієта $z_1 z_2 = q$, $z_1 + z_2 = -p$. Отже, $2x = -p$, $x^2 + y^2 = q$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $-10x = 20$, $9y^2 - 4 = 8y^2$. **1.57.** $x = 3$, $x = 4$, $y = 4$, $y = 5$. **1.58.** $x = -2$, $x = 3$. *Вказівка*. Комплексне число буде дійсним, коли його уявна частина дорівнює нулю: $x^2 - x - 6 = 0$. **1.59.** $2 + i$, $-2 + i$. *Вказівка*. Дискримінант рівняння дійсний та додатний, тоді за формулою обчислення коренів квадратного рівняння: $z_{1,2} = \dfrac{2i \pm \sqrt{-4+20}}{2} = i \pm 2$.

1.60. $1 + i$, $\frac{3}{2}(1 - i)$. **1.61.** $3 + 2i$, $5 + i$. *Розв'язання*. Аналогічно прикладу 1.56 маємо: $\begin{cases} 2x = 8 + 3i \\ x^2 + y^2 = 13 + 14i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + \frac{3}{2}i \\ y^2 = -\frac{3}{4} + i \end{cases}$. Отже, $y = \sqrt{-\frac{3}{4} + i} =$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}(\cos\frac{\pi - arctg\frac{4}{3} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi - arctg\frac{4}{3} + 2k\pi}{2}),\quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$ дістанемо

$$y_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{arctg\frac{4}{3}}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{arctg\frac{4}{3}}{2})) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sin\frac{arctg\frac{4}{3}}{2} +$$

$$+ i\cos\frac{arctg\frac{4}{3}}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{\frac{1-\cos arctg\frac{4}{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\cos arctg\frac{4}{3}}{2}}) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} +$$

$+ i\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}) = +\dfrac{\sqrt{5}}{2}(\dfrac{1}{\sqrt{5}} + i\dfrac{2}{\sqrt{5}}) = \dfrac{1}{2} + i$, $y_2 = -\dfrac{1}{2} - i$. Отже, $z_1 = 4 + \dfrac{3}{2}i +$

$+ i(\frac{1}{2} + i) = 3 + 2i$, $z_2 = 4 + \frac{3}{2}i - i(\frac{1}{2} + i) = 5 + i$. **1.62.** $1 + i$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. *Розв'язання.* Поділимо дане рівняння на $1 + i$, отримаємо

$z^2-(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i)z+(2-i)=0$. Враховуючи, що $z_{1,2}=x\pm iy$, за теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} 2x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \\ x^2+y^2=2-i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i \\ y^2=\frac{3}{2}+\frac{5}{8}i \end{cases}$. Отже, $y=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{5}{8}i}=$

$$\frac{\sqrt{13}}{8}(\cos\frac{arctg(-\frac{5}{12})+2k\pi}{2}+i\sin\frac{arctg(-\frac{5}{12})+2k\pi}{2}),\ k=0,1.$$

При $k=0$ дістанемо $y_1=\sqrt{\frac{13}{8}}(\cos(\frac{arctg(-\frac{5}{12})}{2})+i\sin(\frac{arctg(-\frac{5}{12})}{2}))=$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{1+\cos arctg\frac{5}{12}}{2}}-i\sqrt{\frac{1-\cos arctg\frac{5}{12}}{2}})=\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}}-i\sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}})=$$

$=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}i$. Аналогічно при $k=1$: $y_2=-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}i$. Тоді $z_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i+$ $+i(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}i)=1+i$, $\quad z_2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i-i(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}i)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$. **1.63.** Числовою послідовністю. **164.** в. **1.65.** 1-Д, 2-В, 3-А, 4-Б, 5-Г. **1.66.** в, ж, м п. Вирази загального члена вказаних послідовностей при деяких значеннях n не мають сенсу.**1.67.** 1-В, 2-Г, 3-Б, 4-А, 5-Б. **1.68.** Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує таке натуральне число $N(M)$, що для усіх $n\geq N(M)$ виконується нерівність $|x_n|>M$. **1.69.** а, в, г. *Вказівка*. Множник $\cos\pi n$ набуває значення 1 або -1, тому $|\cos\pi n|=1$ і $|n^5\cos\pi n|=n^5$. Для довільного числа $M>0$ завжди можна взяти $n>M$, тоді $n^5>n>M$, а це й означає, що послідовність $\{n^5\cos\pi n\}$ нескінченно велика. **1.70.** Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається нескінченно малою, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число $N(\varepsilon)$, що для всіх $n\geq N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|\alpha_n|<\varepsilon$. **1.71.** б, в. *Вказівка.* Необмежена послідовність не завжди є нескінченно великою. Наприклад, послідовність $\{x_n\}=\{\frac{n+(-1)n}{2}\}=\{0,2,0,4,0,6,\ldots\}$ необмежена, але не є нескінченно великою, тому що всі її непарні члени дорівнюють нулю, а це означає, що для довільного числа $M>0$ не можна знайти таке натуральне число $N(M)$, що при $n>N$ буде виконуватися нерівність $|x_n|>M$. Добуток нескінченно великої та нескінченно малої послідовностей є невизначеністю. **1.72.** Нескінченно мала. **1.73**. Нескінченно малі — а, д, е; нескінченно великі — б, в, г, ж. **1.74.** Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ знайдеться натуральне число $N(\varepsilon)$, що для всіх $n\ge N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. **1.75.** б. **1.76.** в. **1.77.** а. **1.78.** в. **1.79.** г. **1.80.** 100. *Вказівка.* Оскільки $|x_n-1|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$, то нерівність $|x_n-1|<0{,}01$ виконуватиметься при $\frac{1}{n}<0{,}01$, звідки $n>100$.

1.81. б. **1.82.** б. **1.83.**

	$\{x_n\}$	$\{y_n\}$	$\{x_n+y_n\}$	$\{x_ny_n\}$	$\{x_n/y_n\}$
Збіжна			✸	✸	✸
Розбіжна	✸	✸			

Вказівка. Послідовності $\{x_n\}=\{1,-1,1,-1,\ldots\}$, $\{y_n\}=\{-1,1,-1,1,\ldots\}$ не мають границі, тому вони розбіжні. Для послідовностей $\{x_n+y_n\}=\{0,0,0,0,\ldots\}$, $\{x_ny_n\}=\{\frac{x_n}{y_n}\}=\{-1,-1,-1,-1,\ldots\}$, маємо границі $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=-1$, тому вони збіжні. **1.84.** *Доведення.* Задана послідовність має вигляд $\{1,-1,1,-1,\ldots(-1)^{n-1},\ldots\}$. Вона не має границі, тому що яке б не було число a, поза його довільним $\varepsilon-$околом, наприклад при $0<\varepsilon<1$, міститься нескінченна кількість членів даної послідовності. **1.85.** д. *Вказівка.* Якщо $\{x_n\}\to a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, звісно і $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$. **1.86.** в. **1.87.** Послідовність $\{x_n\}$ називається зростаючою, якщо для довільного $n\in N$ виконується нерівність $x_{n+1}>x_n$. **1.88.** Послідовність $\{x_n\}$ називається спадною, якщо для довільного $n\in N$ виконується нерівність $x_{n+1}<x_n$. **1.89.** в, г, е. *Вказівка.* Якщо послідовність зростаюча, то $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$. Перевіримо це для $\{x_n\}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n})=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>$$

$>\left\{\begin{matrix}\textit{За біномом Ньютона}\\ (1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}>1-\frac{1}{n+1}\end{matrix}\right\}>(1-\frac{1}{n+1})\frac{n+1}{n}=1$. Отже, послідовність

$\{x_n\}$ – зростаюча ($x_n<x_{n+1}$). Аналогічно, $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=$

$$=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{(1+\frac{1}{n^2+2n})^{n+1}(n+1)}<\frac{(n+2)}{(1+\frac{n+1}{n^2+2n})(n+1)}=$$

$=\frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n+1}=1-\frac{1}{n^3+4n^2+4n+1}<1$, тому $\{y_n\}$ – спадна ($y_n>y_{n+1}$). **1.90.** Нескінченно малою. **1.91.** 1–Б, 2–Г, 3–А, 4–В. **1.92.** б, м, н, с. **1.93.** г. **1.94.** *Доведення.* Різниця $x_{n+1}-x_n=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)+3}-\frac{2n-1}{n+3}=\frac{7}{(n+3)(n+4)}>0$ при довільному $n\in N$. Отже, $\{x_n\}$ — зростаюча послідовність. **1.95.** а, г. **1.96**. в. **1.97.** *Доведення.* Границя послідовності $\{\sqrt[n]{n}\}$ дорівнюватиме одиниці, якщо $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала послідовність з загальним членом $\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$. При $n\ge 2$, $\alpha>0$ маємо $n=(1+\alpha_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ (тут враховано формулу бінома Ньютона), звідси $\alpha_n^2<\frac{2}{n-1}$ і $0<\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. В останній нерівності ліворуч і праворуч стоять нескінченно малі послідовності, тоді за теоремою Гур'єва маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, тобто $\{\alpha_n\}$ − нескінченно мала. Остаточно $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. **1.99.** *Доведення.* Згідно з формулою бінома Ньютона дістанемо

$$2^n = (1+(2-1))^n > \frac{n(n-1)}{2}(2-1)^2 \quad \text{і} \quad 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(2-1)^2} = \frac{2}{n-1}.$$

Зважаючи на те, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ та враховуючи теорему Гур'єва, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. **1.100.** *Вказівка.* При $n \geq 4$ маємо нерівність $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Отже, $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2^{n-3}}{4\cdots n} \leq \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^{n-3} = \frac{32}{3}(\frac{1}{2})^n$ і $0 < \frac{2^n}{n!} < \frac{32}{3}(\frac{1}{2})^n$. **1.101**. в. **1.102.** Дробовий вираз, чисельник і знаменник якого змінні величини, що прямують до нескінченності, називається невизначеністю типу $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. **1.103.** Запишемо по декілька членів кожної з послідовностей $\{n^2 \cos\frac{\pi n}{2}\} = 0, -4, 0, 16, 0, \ldots$, $\{\frac{n+(-1)^n n}{2}\} = 0, 2, 0, 4, 0, \ldots$, $\{\frac{n+(-1)^n n}{2}\} = = 0, 2, 0, 4, 0, \ldots$ Зрозуміло, що вони не є нескінченно великими, тому що при $M > 0$ нерівність $|x_n| > M$ не виконується для елементів x_n з непарними номерами. **1.104.** 10, 100, 1000. *Вказівка.* Щоб довести рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ скористаємося теоремою про зв'язок загального члена x_n послідовності, значення її границі та нескінченно малої послідовності, тобто розглянемо різницю $x_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = = \frac{n-n-1}{n+1} = \frac{-1}{n+1} = \alpha_n$, де α_n — загальний член нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n\}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. За означенням границі маємо $|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ для всіх $n \geq N$. Тобто можна взяти натуральне число $N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1] + 1 = [\frac{1}{\varepsilon}]$, де $[\frac{1}{\varepsilon}]$ — ціла частина числа $\frac{1}{\varepsilon}$. **1.105.** *Доведення.* Нехай довільне число $M > 0$, а N таке натуральне число, що $N > M$. Тоді для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $|(-1)^n n| = n \geq N > M$. Це й означає, що послідовність $\{(-1)^n n\}$

– нескінченно велика ($\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$). **1.106.** *Доведення.* Нехай довільне число $M > 0$. Якщо, наприклад, взяти за $N = [\log_2^2 M] + 1$, де $[\log_2^2 M]$ – ціла частина числа $\log_2^2 M$ ($2^{\sqrt{n}} > M \Rightarrow \sqrt{n}\log_2 2 > \log_2 M$, то $n > \log_2^2 M$), для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\left|2^{\sqrt{n}}\right| = 2^{\sqrt{n}} > 2^{\log_2 M} = M$. Отже, послідовність $\{2^{\sqrt{n}}\}$ – нескінченно велика і $\lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = \infty$. **1.107.** *Доведення.* Для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти натуральне число $N(M)$ (наприклад, $N = [e^{e^M}] + 1$) таке, що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $|\ln(\ln n)| = \ln(\ln n) > \ln(\ln e^{e^M}) = M$. Це означає, що послідовність $\{\ln\ln n\}$ – нескінченно велика і $\lim_{n\to\infty}\ln\ln n = \infty$. **1.108.** 0. *Вказівка.* Величина $\sin n!$ – обмежена, а $\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} \to 0$. **1.109.** 1. **1.110.** ∞.

1.111. 1. *Розв'язання:* $\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi n +$

$+\pi n) = \lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)+\pi n) = \lim_{n\to\infty}[\sin(\pi(\sqrt{n^2+n}-n))\cos\pi n +$

$+\cos(\pi(\sqrt{n^2+n}-n))\sin\pi n]^2 = \lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$= \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1$. **1.112.** 0. **1.113.** 0. **1.114.** ∞. **1.115.** 10^5. **1.116.** 0.

1.117. $\frac{1}{2}$. **1.118.** $\frac{4}{25}$. **1.119.** 3. **1.120.** 9. **1.121.** 5. *Розв'язання:*

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n(1+(\frac{3}{5})^n)} = 5\lim_{n\to\infty}(1+(\frac{3}{5})^n)^{\frac{1}{n}} = 5$. **1.122.** 1.

1.123. 0. **1.124.** -1. **1.125.** 0. **1.126.** 1. *Вказівка*: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n(5+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{5}{n})}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. **1.127.** 1. **1.128.** $\dfrac{1}{2}$. *Вказівка*: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{3}+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(3^{\frac{1}{n}}+1)} = \dfrac{1}{2}$. **1.129.** 3. *Вказівка*: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1)}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1) = 3$. **1.130.** Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним законом поставити у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задана функція $y = f(x)$. **1.131.** x — незалежна змінна або аргумент, y — залежна змінна або функція, f — закон, за яким кожному x відповідає y або оператор функції. **1.132.** Так. **1.133.** Якщо множина значень функції складається лише з одного числа C, то таку функцію називають сталою і пишуть $y = C$. **1.134.** Нескінченна множина ізольованих точок, які лежать на прямій $y = 5n+1$. **1.135.** б, в. **1.136.** $f(-2) = -7$; $f(0) = -3$; $f(1) = 3$. **1.137**. $2x + \Delta x$. *Вказівка:* $f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. **1.138.** $f(0) = 1$; $f(-x) = \dfrac{1+x}{1-x}$; $f(x+1) = -\dfrac{x}{x+2}$; $f(x)+1 = \dfrac{2}{1+x}$; $f(\frac{1}{x}) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1+x}{1-x}$.
1.139. Функцію $f(x)$, визначену на множині X, називають обмеженою на цій множині, коли існує таке число M, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$. **1.140.** в.

1.141.

Формули, що задають функції	Множини X — області визначення функцій			
	Z_0	$[-1;1) \cup x = 2$	$(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$	$[-\frac{1}{3}; 1]$
$y = \arcsin \dfrac{2x}{x+1}$				✸
$y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$		✸		
$y = \sqrt{3x - x^3}$			✸	
$y = n!$	✸			

1.142.

Формули, що задають функції	Множини Y — області значення функцій		
	$[0;\pi]$	$(-\infty;\lg 3]$	$[0;\frac{3}{2}]$
$y=\arccos\frac{2x}{x^2+1}$	✸		✸
$y=\sqrt{2+x-x^2}$			
$y=\lg(1-2\cos x)$		✸	

1.143.

Формули, що задають функції	Властивості функцій			
	Обмежена	Необмежена	Обмежена зверху	Обмежена знизу
$y=Arc\cos x$		✸		
$y=-x^2+4x-3$			✸	
$y=\pm\sqrt{25-x^2}$	✸			
$y=e^x$				✸

1.144.

Функції	Класи функцій			
	Многочлен	Раціональний дріб	Ірраціональна	Трансцендентна
$y=3^x-7x$				✸
$y=Ax^2+Bx\ \ +C$	✸			
$y=5-\sqrt{x}$			✸	
$y=\frac{2x+9}{3x^3-4x+1}$		✸		

1.145. -2. **1.146.** $a>1$. *Вказівка.* Функція буде приймати додатні значення, якщо коефіцієнт при x^2 додатний $(a>0)$ та дискримінант від'ємний, тобто $(a+3)^2-16a^2<0$. **1.147**. а, б. **1.148.** Функцію $y=f(x)$ називають парною, якщо для кожного x із області визначення симетричної відносно початку координат виконується рівність $f(-x)=f(x)$. Ні, тому що область визначення функції є відрізок $(0;+\infty)$. **1.149**. в, б. **1.150.** б, в. **1.151.** Функція $f(x)$, що визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T, що виконується рівність $f(x+T)=f(x)$. **1.152.** б, г. **1.153.** г. **1.154.** в. **1.155.** $a=-d$. **1.156.** г. **1.157**. Складеною функцією. **1.158.** Графік наведено на рис. 2. **1.159.** Графік наведено на рис. 3. **1.160.** Графік наведено на рис. 4. **1.161.** Графік наведено на рис. 5.

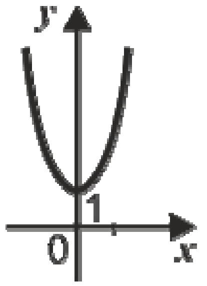


Рис. 2

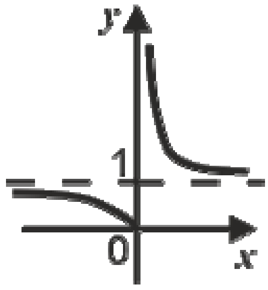


Рис. 3

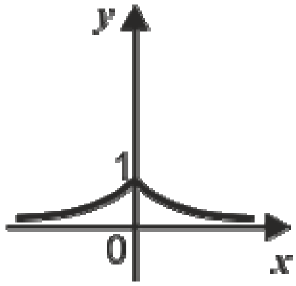


Рис. 4

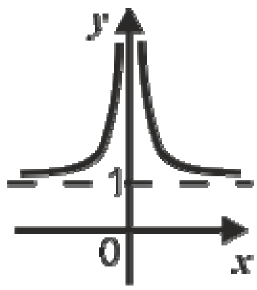


Рис. 5

1.162. 1-в. 2-г, 3-а, 4-б. **1.163.** Якщо функція задається рівнянням $F(x,y)=0$ (рівнянням, не розв'язаним відносно залежної змінної y), то її називають неявно заданою. **1.164.** Параметрично заданою. **1.165.** $y=\pm\sqrt{4-x^2}$; $x^2+y^2=4$; $x=2\cos t,\ y=2\sin t$. **1.166.** t – це параметр. **1.167.** Число A називається границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. **1.168.** г. **1.169.** б. **1.170.** 1-Г, 2-А, 3-В, 4-Б. **1.171.** в. **1.172.** *Доведення.* Для будь-якого $\varepsilon>0$ та $\delta(\varepsilon)>0$ виконується нерівність $|f(x)-c|=c-c=0<\varepsilon$ при $x\in\dot{\bigcup}_\delta(x_0)$. Отже, $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$. **1.173.** б, г. **1.174.** б, в. **1.175.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, якщо точка x_0 разом з деяким околом належить області визначення цієї функції. **1.176.** б. **1.177.** 1-В, 2-Б, 3-Г, 4-А. **1.178.** а. **1.179.** Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою функцією при $x\to x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$ виконується нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$. **1.180.** **а)** $-\infty$; **б)** 1; **в)** 2; **г)** ∞; **д)** не існує; **е)** не існує; **ж)** 2; **и)** 2; **к)** ∞; **л)** 1; **м)** не існує; **н)** 2; **п)** 3. **1.181.** б. **1.182.** а. **1.183.** в. **1.184.** г. **1.185.** а. **1.186.** б. **1.187.** а, е, и, м, р, т, ф, х, ш, щ, ю – нескінченно великі; б, г, д, ж, н, п, у, я – нескінченно малі. **1.188.** а, б, в, ж, и, к, м, с – нескінченно великі; д, е, л, н, р, т, у, ф, ц, ш, щ – нескінченно малі. **1.189.** 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б. *Вказівка.* Множник $\sin x$, по-перше, величина обмежена ($|\sin x|<1$), по-друге, при $x\to 0$ – нескінченно мала ($\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$), а при $x\to\infty$ буде коливатися між -1 та 1, не прямуючи до жодного числа, тобто

$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не існує. **1.190.** в. **1.191.** *Доведення.* Нехай M будь-яке додатне число. Треба довести, що можна знайти таке додатне $\delta(M)>0$, що для всіх x з проміжку $0<|x|<\delta$ виконується нерівність $2^{\frac{1}{x^2}}>M$. Дійсно, при $|x|<\delta$ маємо $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\delta^2}$ та $2^{\frac{1}{x^2}}>2^{\frac{1}{\delta^2}}$, тобто буде виконуватися нерівність $2^{\frac{1}{x^2}}>M$, якщо взяти $M=2^{\frac{1}{\delta^2}}$. Тоді $\frac{1}{\delta^2}=\log_2 M$ і $\delta(M)=\frac{1}{\sqrt{\log_2 M}}$. Таким чином, для будь-якого $M>0$ знайдеться таке $\delta(M)=\frac{1}{\sqrt{\log_2 M}}>0$, що для всіх x з проміжку $0<|x|<\delta$ виконується нерівність $2^{\frac{1}{x^2}}>M$, а це означає, що функція $2^{\frac{1}{x^2}}$ нескінченно велика при $x\to 0$. **1.192.** *Доведення.* Функція $y=x\sin x$ при $x\to\infty$ необмежена, але не є нескінченно великою, тому що вона дорівнює нулю при $x=0,\pi,2\pi,\ldots$ А це означає, що для довільного числа $M>0$ не можна знайти таке число $\delta(M)$, щоб для $|x|>\delta$ виконувалась нерівність $|x\sin x|>M$. **1.193.** г. **1.194.** *Доведення.* Функцію $5+x$ запишемо у вигляді суми числа 7 та нескінченно малої функції $x-2$ (при $x\to 2$), тобто $5+x=7+(x-2)$. Отже, за теоремою про зв'язок функції її границі та нескінченно малої функції маємо $\lim\limits_{x\to 2}(5+x)=7$. **1.195.** г. **1.196.** а, в. **1.197.** г. За теоремою про границю проміжної функції. **1.198.** а-2, б-4, в-1, г-3. **1.199.** *Доведення*. Візьмемо довільне $\varepsilon>0$, знайдемо $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх x з проміжку $0<|x-1|<\delta$ виконується нерівність $|(3x+2)-5|<\varepsilon$. Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. Взявши $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, бачимо, що для всіх x, що задовольняють нерівності $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, виконується нерівність $|(3x+2)-5|<\varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$. **1.201.** *Доведення:* $|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin(\frac{x}{2}-\frac{x_0}{2})\right|\cdot\left|\cos(\frac{x}{2}-\frac{x_0}{2})\right|$, але $\left|\sin(\frac{x}{2}-\frac{x_0}{2})\right|\le\left|\frac{x}{2}-\frac{x_0}{2}\right|$ і

$\left|\cos(\frac{x}{2}-\frac{x_0}{2})\right| \le 1$, тоді $\left|\sin x - \sin x_0\right| \le \left|x - x_0\right|$. Тепер зрозуміло, що при $\delta = \varepsilon > 0$ з нерівності $0 < \left|x - x_0\right| < \delta = \varepsilon$ випливає $\left|\sin x - \sin x_0\right| < \varepsilon$.

1.204. $0{,}6$. *Розв'язання.* Скориставшись теоремами про границю різниці, добутку двох функцій, знаходимо границю знаменника $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x - 5) =$ $= (\lim\limits_{x\to 1} x)(\lim\limits_{x\to 1} x) - \lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 5 = -5$. Границя знаменника не дорівнює нулю, тому за теоремою про границю частки дістанемо $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3 - 4x^2 - 2}{x^2 - x - 5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^3 - 4x^2 - 2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x - 5)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$. **1.205.** $0{,}5$. **1.206.** ∞.

1.207. 0. **1.208.** $\frac{\pi}{2}$. **1.209.** ∞. **1.210.** 0. **1.211.** а, б, г, ж, и. **1.212.** 1-Д, 2-В, 3-А, 4-Г, 5-Б. **1.213.** а. **1.214.** 1 − а, 2 − г. **1.215.** 0. *Розв'язання.* Чисельник та знаменник при $x \to \infty$ це нескінченно великі функції (маємо невизначеність типу $\{\frac{\infty}{\infty}\}$). Тому теорема про границю частки безпосередньо недоречна. Для розкриття такої невизначеності треба в чисельнику та знаменнику винести за дужки змінну у старшому степені, скоротити дріб та до отриманої функції застосувати теорему про границю частки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 12x^4 + 20} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2})}{x^4(\frac{1}{x^2} - 12 + \frac{20}{x^4})} = -\frac{1}{12}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

1.216. $\frac{1}{27}$**. 1.217. 0. 1.218. 0. 1.219.** $\frac{1}{3}$**. 1.220.** $\frac{1}{2}$**. 1.221.** 2**.** *Розв'язання.* Маємо невизначеність. Розкриємо її аналогічно прикладу 1.215:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2} + \sqrt[6]{x^6+1}}{\sqrt[4]{x^4+8}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})} + \sqrt[3]{x^3(1-\frac{1}{x^3})}}{\sqrt[4]{x^4(1+\frac{8}{x^4})}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}}{x\sqrt[4]{1+\frac{8}{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}})}{x\sqrt[4]{1+\frac{8}{x^4}}} = 2.$$ **1.222.** $\frac{4}{25}$.

1.223. 1. *Вказівка*: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x(1+(\frac{2}{3})^x)}{3^x(1-(\frac{2}{3})^x)}$ і врахуємо що $(\frac{2}{3})^x \to 0$ при $x\to\infty$.

1.224. ∞. **1.225.** 9. **1.226.** 0. **1.227.** г. *Вказівка.* По черзі підставляємо під знак границі вказані функції та обчислюємо отримані границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$ і т. д. **1.228**. б. **1.229.** 0. *Розв'язання.* Маємо невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$. Щоб її розкрити, треба перейти до дробу всіма дозволеними способами. В даному випадку помножимо та поділимо на спряжений вираз $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$. **1.230**. -1. **1.231.** $\dfrac{1}{2}$. **1.232.** $\dfrac{5}{2}$. **1.233.** -1.

1.234. -2. *Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{x^2+2x}-x)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^3-2x^2}{x^2+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2(1+\frac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{1+\frac{2}{x}}=-2$. **1.235**. в. **1.236**. г. **1.237.** г. **1.238.** $\dfrac{1}{8}$.

Розв'язання. Підставивши у чисельник та знаменник замість x число 2 $(x\to 2)$, отримаємо невизначеність типу $\{\frac{0}{0}\}$. Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники, скоротимо його на вираз $(x-2)$ і дістанемо кінцевий результат: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)}{(x-10)}=\dfrac{1}{8}$. **1.239.** $\dfrac{4}{5}$. **1.240.** $\dfrac{3}{7}$. **1.241.** $\dfrac{7}{3}$. **1.242.** $\dfrac{1}{2}$. *Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\{\frac{0}{0}\}$. Помножимо чисельник та знаменник на вираз спряжений чисельнику, тобто на $\sqrt{1+x+x^2}+1$, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$. **1.243.** 7. **1.244.** $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$.

1.245. 4. **1.246.** $-\frac{\sqrt{2}}{8}$. **1.247.** $\frac{12}{5}$. *Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\{\frac{0}{0}\}=$

$$\lim_{x\to 8}\frac{(9+2x-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}=\frac{12}{5}.$$

1.248. а. **1.249.** а. **1.250.** б. **1.251.** $\frac{3}{4}$. *Розв'язання.* Якщо невизначеність $\{\frac{0}{0}\}$ утворюється тригонометричними функціями, краще за все скористатися першою важливою границею ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{4\cdot 3x}=\frac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{4}$. **1.252.** $\frac{8}{27}$. **1.253.** 4. **1.254.** $\frac{1}{4}$. **1.255.** $-\frac{7}{2}$.

Вказівка. Немає сенсу використовувати формулу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, бо аргументи функцій $\sin 7\pi x$, $\sin 2\pi x$ не прямують до нуля при $x\to 1$. За допомогою формул зведення спочатку змінимо вигляд функції, а потім перейдемо до першої важливої границі, поділивши та помноживши дріб на $14\pi(1-x)$: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{14\pi(1-x)\sin(7\pi-7\pi x)}{14\pi(1-x)(-\sin(2\pi-2\pi x))}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(-\frac{7}{2})\frac{\sin(7\pi(1-x))}{7\pi(1-x)}\frac{2\pi(1-x)}{\sin(2\pi(1-x))}=-\frac{7}{2}$. **1.256.** $-\frac{1}{\pi}$. **1.257.** $\frac{\pi}{4}$.

Вказівка: $tg(2\pi+\pi x)=tg(\pi x)$. **1.258.** $\frac{8}{3}$. **1.259.** $\frac{1}{2}$. *Вказівка:* $1-\cos 4x=2\sin^2 2x$. **1.260.** $\frac{1}{2}$. *Розв'язання.* Розкладемо знаменник на множники та перейдемо до нової змінної, тоді отримаємо

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(2x-1)}{4x^2-1}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)}=\left\{\begin{matrix} t=\arcsin(2x-1) \\ 2x-1=\sin t\end{matrix}\right\}=$$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{1}{2}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{2}$. **1.261.** 2. *Вказівка.* Врахувати формулу $\sin 5x-\sin 3x=2\sin x\cos 4x$. З неперервності функції $\cos 4x$ випливає $\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x=1$. **1.262.** 1. **1.263.** $\cos 1$. *Розв'язання:* Зваживши на те, що

$\sin x+\sin 1=2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x-1}{2}$ дістанемо $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin x+\sin 1}{x+1}=$

$=2\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x-1}{2}}{x+1}=2\cos(-1)\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}(x+1)}=\cos 1$. **1.264.** $-\frac{4}{5}$.

1.265. в. **1.266.** в. **1.267.** 0. **1.268.** ∞. **1.269.** Будь-якому додатному числу. **1.270.** e. *Вказівка.* Функція $(1+tg^2x)^{ctg^2x}$ являє собою степінь, основа якого прямує до одиниці, а показник – до нескінченності (невизначеність типу $\{1^\infty\}$). Перетворимо функцію так, щоб використати другу важливу границю, дістанемо $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{\frac{1}{tg^2x}}$. **1.271.** e^a. *Розв'язання.* Функція $(1+\frac{a}{x})^x$ являє собою степінь, основа якого прямує до одиниці, а показник – до нескінченності (невизначеність типу $\{1^\infty\}$). Перетворимо функцію так, щоб можна було використати другу важливу границю, дістанемо $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=\{1^\infty\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}\right]^a=e^a$. **1.272.** e^4. *Розв'язання*. Основа функції прямує до 1, показник степеня – до нескінченності, тобто маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$. Ця невизначеність розкривається тільки за допомогою другої важливої границі. Отже, перетворимо функцію:

$$\lim_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{x}{1-x}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to 1}[1+(4-4x)]^{\frac{x}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\left[[1+4(1-x)]^{\frac{1}{4(1-x)}}\right]^{4x}=e^4$$

. **1.273.** e^{-3}. **1.274.** e^3 *Розв'язання*. Діленням чисельника на знаменник виділимо цілу частину й отримаємо невизначеність $\{1^\infty\}$, далі скористаємося другою важливою границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{2x-5}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{6}}\right]^{\frac{6(x+1)}{2x-5}}=e^3.$$

1.275. $\frac{3}{2}$. **1.276.** 4. *Розв'язання*. $\frac{1}{x}\ln(1+4x)=\ln(1+4x)^{\frac{1}{x}}$. З неперервності цієї функції та формули другої важливої границі випливає

$$\lim_{x\to\infty}\ln(1+4x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to\infty}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=\{1^{\infty}\}=\ln\lim_{x\to\infty}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^4=\ln e^4=4.$$

1.277. -3. **1.278.** $e^{-\frac{1}{2}}$. *Розв'язання*: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\{1^{\infty}\}=$

$$=\lim_{x\to 0}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{-\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{4}\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{x}{4}}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$ **1.279.** *Розв'язання.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{tg5x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}(e^{(a-b)x}-1)}{tg5x}=\lim_{x\to 0}e^{bx}\lim_{x\to 0}\left((e^{(a-b)x}-1)\frac{1}{\sin 5x}\right)\lim_{x\to 0}\cos 5x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{(a-b)x}-1)}{5x}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{(a-b)x}-1)}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{(a-b)x}-1)}{5x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} t=e^{(a-b)x}-1\\ x=\dfrac{\ln(1+t)}{a-b}\end{array}\right\}=\frac{a-b}{5}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\frac{a-b}{5}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{a-b}{5\ln e}=\frac{a-b}{5}.$$

1.280. а) так; б) так; в) так. **1.281.** в. **1.282.** б, г. *Вказівка.* Якщо границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, то функції $f(x)$ та $g(x)$ одного порядку мализни.

1.283. *Розв'язання*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{2}=0.$

Границя відношення функцій α та β дорівнює нулю, тому α — нескінченно мала в порівнянні з β. Визначимо порядок мализни α відносно β, для цього знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. Ця границя дорівнює $const$, це означає, що $\alpha(x)$ та $\beta^2(x)$ одного порядку мализни. Але $\beta^2(x)$ другого порядку мализни в порівнянні з $\beta(x)$. Отже, $\alpha(x)$ нескінченно мала другого порядку мализни відносно $\beta(x)$. **1.284.** а, б. *Вказівка.* Якщо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функції $f(x)$ та $g(x)$ еквівалентні.

1.285. г. **1.286.** в. **1.287.** б. **1.288.** $a=k$. *Розв'язання.* Функції будуть еквівалентні, якщо $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{a(1-\sqrt[k]{x})}=1$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{a(1-\sqrt[k]{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x^{1-\frac{1}{k}}+x^{1-\frac{2}{k}}+\ldots+x^{1-\frac{k-1}{k}}+1)}{a(1-x)}=\frac{k}{a}\Rightarrow\frac{k}{a}=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow a=k$. **1.289.** Одного порядку мализни. **1.290.** Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції при $x\to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
1.291. 1–Б, 2–А, 3–В, 4–А. **1.292.** г. **1.293.** в. **1.294.** б, г. **1.295.** Функція $f(x)$ повинна бути неперервною на відрізку $[a,b]$.
1.296.

Δx	0,9	0,5	0,1	0,01	$-0,9$	$-0,5$	$-0,1$	$-0,01$
Δy	1,8	1	0,2	0,02	$-1,8$	-1	$-0,2$	$-0,02$

Вказівка.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)-1-2x+1=2x+2\Delta x-2x=2\Delta x.$$

1.297. *Розв'язання.* Функція не визначена в точці $x=-5$, тому функція в цій точці розривна. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва та справа: $\lim\limits_{x\to -5-0}3^{\frac{1}{x+5}}=0$, $\lim\limits_{x\to -5+0}3^{\frac{1}{x+5}}=+\infty$. Отже, точка $x=-5$ є точкою розриву другого роду. **1.298.** а. *Вказівка.* Функція буде неперервною, якщо $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(a-x)=\sin\frac{\pi}{2}$. **1.299.** б. **1.300.** а.

1.301. е. **1.302.** *Розв'язання.* Функція $f(x)=arctg\frac{1}{1-x}$ не визначена в точці $x=1$ і $\lim\limits_{x\to 1-0}arctg\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1+0}arctg\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x\to 1$ функція має як ліву, так і праву скінченні границі. З того, що границі мають різні значення, випливає: $x=1$ – це точка розриву першого роду. Стрибок функції в точці $x=1$: $\delta=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$.
1.303. $x=0$ – точка розриву першого роду, $\delta=-1$. **1.304.** $x=3$ – точка розриву другого роду. **1.305.** $x=-2$ – точка усувного розриву. Досить покласти $f(-2)=\frac{1}{4}$, щоб функція стала неперервною. **1.306.** $x=0$, $x=1$ – точки усувного розриву; $x=-1$ – точка розриву другого роду. **1.307.** $x=-3$, $x=2$ – точки розриву другого роду. **1.308.** *Доведення.* Для

будь-якої точки $x_0 \in R$ і будь-якого Δx маємо $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$. Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ і за означенням функція $y = x^3$ неперервна в кожній точці $x_0 \in R$. **1.309.** *Доведення.* Функція $f(x) = 3^x - \frac{1}{3} \sin x - 3$ неперервна на R, причому $f(0) = -2 < 0$ та $f(\pi) = 3^\pi - 3 > 0$. Таким чином, існує точка $c \in [0; \pi]$ така, що $f(c) = 0$. **1.310.** *Доведення.* Нехай $f(x) = x^3 + 3x - 8$. Ця функція неперервна на всій числовій осі, а отже, і на відрізку $[1;2]$. Оскільки $f(1) = -4 < 0$, $f(2) = 6 > 0$, то згідно властивості неперервної на відрізку функції, дане рівняння на відрізку $[1;2]$ має корінь. Точкою $x = 1{,}5$ ділимо відрізок $[1;2]$ навпіл і знаходимо $f(1{,}5) = -0{,}125$. Тому що $f(1{,}5) < 0$, то корінь лежить на відрізку $[1{,}5; 2]$. Точкою $x = 1{,}75$ ділимо відрізок $[1{,}5;2]$ навпіл. І знаходимо $f(1{,}75) = 0{,}65234575$. Отже, корінь знаходиться на відрізку $[1{,}5;1{,}75]$. Точкою $x = 1{,}625$ ділимо відрізок $[1{,}5;1{,}75]$ навпіл. Оскільки $f(1{,}625) \approx 0{,}166 > 0$, а $f(1{,}5) < 0$ то корінь лежить на відрізку $[1{,}5;1{,}625]$. При цьому $1{,}625 - 1{,}5 = 0{,}125$, тому довільне число $c \in [1{,}5;1{,}625]$ буде коренем рівняння з точністю до $0{,}125$. Наступна точка поділу $x = 1{,}5625$ буде коренем з точністю до $0{,}0625$. Отже, з точністю до $0{,}1$ коренем даного рівняння є число $1{,}5625$.

Продовжуючи цей процес, можна знайти корінь з будь-якою наперед заданою точністю.

Розділ 2

2.1. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля. **2.2**. Аргументу $x \in (a, b)$ надати приріст Δx: $x + \Delta x \in (a, b)$; знайти відповідний приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; скласти відношення приросту функції до приросту аргументу: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; визначити границю цього відношення при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x та позначають y'. **2.3.** б. **2.4.** г. **2.5.** nx^{n-1}. *Розв'язання*. Довільному значенню аргументу x надамо приріст Δx. Функція $y = x^n$ отримає приріст $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. За формулою бінома

Ньютона: $\Delta y = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n =$

$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} +$ $+ \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}$. Перейшовши в останній рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x +$ $+ \ldots + (\Delta x)^{n-1}) = nx^{n-1}$. Отже, $(x^n)' = nx^{n-1}$. **2.6.** $a^x \ln a$. *Розв'язання*. Надамо аргументу x приріст Δx, тоді $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ і $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\ln a \Rightarrow (a^x)' = a^x\ln a$.

2.7. $\frac{1}{x\ln a}$. *Розв'язання*. Аргумент x отримав приріст Δx, визначимо приріст функції: $\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} =$

$= \log_a\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x\ln a}$. Тобто $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. **2.8.** $\cos x$. *Розв'язання*. Аргумент x отримав приріст Δx, тоді $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$ і

$(\sin x)' = \cos x$. **2.9.** Позначимо $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ і надамо аргументу x приріст Δx. Функції $u(x)$ та $v(x)$ дістануть прирости $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$, а функція $y(x)$ – приріст $\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} =$

$= \dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v^2(x)+v(x)\Delta v}$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta v}$. В останній рівності перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v} = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. **2.10.** в. **2.11.** б. **2.12.** а, б, е.**2. 13.**

Функція	Властивість функції				
	Диференційовна в точках $x \in R$	Має скінченну похідну в точці $x=0$	Має скінченну похідну в точці $x=1$	Неперервна в точці $x=0$	Неперервна в точці $x=1$
$y=\dfrac{x+1}{1-x^3}$		✸		✸	
$y=\dfrac{x-1}{1+x^2}$	✸	✸	✸	✸	✸
$y=\lvert x\rvert+1$			✸	✸	✸
$y=\sqrt[3]{x}$			✸	✸	✸
$y=2-\lvert x-1\rvert$		✸		✸	✸
$y=\dfrac{1}{x}$			✸		✸
$y=\sqrt[3]{x^5}$	✸	✸	✸	✸	✸
$y=2\lvert x-1\rvert$		✸		✸	✸
$y=\dfrac{1}{x-1}$		✸		✸	

2.14. $(u(x)\pm v(x))' == u'(x)\pm v'(x)$; $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$; $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$. **2.15.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}-6$. *Розв'язання*. Запишемо дану функцію у вигляді $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-6x^{-\frac{1}{2}}-7x$. За формулою таблиці похідних $(x^{\mu})' = \mu\, x^{\mu-1}$ візьмемо похідну від кожного доданка і, виносячи постійний множник за знак похідної, дістанемо: $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{3}{2}} - 7 =$

$=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt{x^3}}-7$. Підставимо замість x число 8, отримаємо кінцевий результат. **2.16.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$. **2.17.** (-1). **2.18.** (-1). **2.19.** г. *Вказівка.* Логарифмуємо даний вираз: $\ln y = v(x)\ln u(x))$, візьмемо похідну неявно заданої функції $\frac{1}{y}y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u}u'(x)$, дістанемо $y' = v'(x)[u(x)]^{v(x)}\ln u(x) + u'(x)\,v(x)[u(x)]^{v(x)-1}$. **2.20.** а. **2.21.** 1−Г, 2−Б, 3−В, 4−А. **2.22.** x^4-9x^2+4. *Вказівка*. Скористаймося теоремою про похідну суми функцій $(u \pm v)' = u' \pm v'$ та формулою таблиці для похідної степеневої функції $(x^{\mu})' = \mu\, x^{\mu-1}$. Винесемо постійний множник за знак похідної і врахуємо, що $C'=0$, де $C = const$. **2.23.** $6x^2+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{3}x$. *Вказівка*. У другому доданку підняти знаменник у чисельник: $\frac{2}{x^3}=2x^{-3}$. **2.24.** $-\frac{1}{a^2\sqrt{x}}-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$. *Вказівка*. Записати функцію у вигляді $-\frac{2}{a^2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-7\pi$. **2.25.** $\frac{3a}{5\sqrt[5]{x^2}}+\frac{5b}{2x^3\sqrt{x}}$. **2.26.** $\frac{b}{e^2}$. *Вказівка*: $\frac{m+bx}{e^2}=\frac{m}{e^2}+\frac{b}{e^2}x$. **2.27.** $\frac{2}{3\pi}$. **2.28.** $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **2.29.** $\frac{a}{2x\sqrt{3x}}+$ $+\frac{3}{b\sqrt[4]{x}}$. **2.30.** $\frac{2(5tg1-3)}{x^3}-\frac{6x^2}{\sqrt[3]{\pi}}-\frac{1}{x_2}$. **2.31.** $-\frac{21(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$. *Вказівка*: $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. **2.32.** $7\cdot 3^x\ln 3-\frac{2}{5\,\sqrt[5]{x^3}}$. **2.33.** $4x+10\sqrt[3]{x^2}$. **2.34.** $(6x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}})\sin x+(2x^3-\sqrt{x})\cos x$. *Вказівка*: $(uv)'=u'v+uv'$. **2.35.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}(1+\frac{1}{x\sqrt{x}})-(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})\sin x$. **2.36.** $e^x(\frac{1}{x}-ctgx)+(e^x+3)(-\frac{1}{x^2}+$ $+\frac{1}{\sin^2 x})$. **2.37.** $7^x\ln 7-\frac{3}{x^4}\arccos x-\frac{1}{x^3\sqrt{1-x^2}}$. **2.38.** $\frac{\sin e}{x}-\frac{5}{x^2}$.

2.39. $3x^2\cos x-(5+x^3)\sin x+4ctgx-\dfrac{4x}{\sin^2 x}$. **2.40.** $-\dfrac{(4+3tgx)\sin 2x+6}{2(4+3tgx)^2\cos x}$.

Вказівка: $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ **2.41.** $\dfrac{\ln 2}{2^x}-\dfrac{\ln 5}{5^x}$. **2.42.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$.

2.43. $\dfrac{(3^x\ln 3-\sin x)(x^3+\ln x)x-(3^x+\cos x)(3x^3+1)}{x(x^3+\ln x)^2}$.

2.44. $-\dfrac{7x^2+8x-1-2x(x+1)\ln x}{x(x^2+2x-1)^2}$. **2.45.** $\dfrac{\dfrac{x^3+\ln x}{1+x^2}-(3x^2+\dfrac{1}{x})arctgx}{(x^3+\ln x)^2}$.

2.46. $\dfrac{(3\sqrt{x}+2e^x)(x-e)-2(x\sqrt{x}+e^x)}{2(x-e)^2}$. **2.47.** $e^{\sin x}\cos x$. *Вказівка.* Нехай $y=e^u$, де $u=\sin x$, тоді, використовуючи формулу $y'_x=y'_u\,u'_x$, дістанемо $y'=e^u\cos x=e^{\sin x}\cos x$. **2.48.** $(20x-6)(5x^2-3x+1)$. *Вказівка.* Нехай $y=u^2$, де $u=5x^2-3x+1$, тоді $y'=2u(10x-3)=2(5x^2-3x+1)(10x-3)$.

2.49. $\dfrac{4x\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}(x^2+5\sqrt{x}-3)}$. *Вказівка.* Вважаючи, що $y=\ln u$, де $u=x^2+5\sqrt{x}-3$, маємо $y'=\dfrac{1}{u}(2x+\dfrac{5}{2\sqrt{x}})=\dfrac{1}{x^2+5\sqrt{x}-3}(2x+\dfrac{5}{2\sqrt{x}})$.

2.50. $-3(x^2+\dfrac{1}{x^2})\sin(x^3-\dfrac{3}{x})$. **2.51.** $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. **2.52.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}$.

2.53. $3x^2ctg(x^3+2)$. *Вказівка.* Складена функція може мати декілька проміжних аргументів. У цьому прикладі $y=\ln u$, $u=\sin v$, $v=x^3+2$ і .

2.54. $\dfrac{3\cos 3x\,e^{\sin 3x}}{1+e^{2\sin 3x}}$. **2.55.** $-\dfrac{1}{x\ln\ln\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}}$. **2.56.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

2.57. $-\dfrac{12}{5\sqrt[5]{x^2}\sin(2\sqrt[5]{x^3}+4)}$. **2.58.** $3^{tgx}(\ln 3-\sin 2x)$. *Вказівка.* За теоремами про похідні добутку та похідну складеної функції маємо $y'=3^{tgx}\ln 3\dfrac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x+3^{tgx}\cdot 2\cos x(-\sin x)$.

2.59. $e^{tgx}\cos x(1-\frac{3}{2}\sin 2x)$. **2.60.** $\frac{7^{ctg\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(-\ln 7+\sin 2\sqrt{x})$.

2.61. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2(1-\ln x)-1}{x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$. **2.62.** $\frac{(e^{arctg\sqrt[3]{x}}+1)^2 e^{arctg\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$.

2.63. $\frac{4(\arccos\sqrt{1-4x^2}+1)}{\sqrt{1-4x^2}}$. **2.64.** $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

2.65. $\frac{1}{2\pi}10^{\frac{x}{2\pi}}\ln 10-\frac{12x^3}{\cos^2 x^4}\cos(\cos^2 tg^3x^4)\sin(2tg^3x^4)tg^2x^4$.

2.66. $(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x})$. *Вказівка.* Запишемо дану функцію у вигляді $y=(\frac{a}{b})^x\frac{b^a}{a^b}x^{b-a}$, тоді $y'=\frac{b^a}{a^b}((\frac{a}{b})^x\ln\frac{a}{b}x^{b-a}+(\frac{a}{b})^x(b-a)x^{b-a-1})$.

2.67. $\frac{1}{27\sqrt[3]{(x(1+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}))^2}}$. **2.68.** $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-\frac{2xe^{x^2-\pi}}{1+e^{2x^2}}$. **2.69.** $\frac{1-x}{y+3}$.

Вказівка. Функція неявно задана, тому візьмемо похідні по x обох частин даного виразу, вважаючи, що y є функцією від x. Потім отримане рівняння розв'яжемо відносно похідної y': $2x+2yy'-2+6y'=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow yy'+3y'=1-x \Rightarrow y'(y+3)=1-x$. **2.70.** $\frac{(3x^2+\sin x)\cos^2 y}{3y^2\cos^2 y-1}$.

Розв'язання: $3y^2y'-\frac{1}{\cos^2 y}y'-\sin x-3x^2=0 \Rightarrow y'(3y^2-\frac{1}{\cos^2 y})=$ $=\sin x+3x^2$. **2.71.** $\frac{\cos^2 x(ye^{\frac{y}{x}}-x^2\sin(x-y))+x^2}{x\cos^2 x(e^{\frac{y}{x}}-x\sin(x-y))}$. **2.72.** $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$.

2.73. $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **2.74.** $\frac{(5-2xy)(y^2+x^2)-y}{x^2(y^2+x^2)-x}$. **2.75.** $\frac{x^2e^{x+y}+yctg\frac{y}{x}}{x(ctg\frac{y}{x}-xe^{x+y})}$.

2.76. $\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$. **2.77.** $(x+1)^{ctgx-1}ctgx-(x+1)^{ctgx}\ln(x+1)\frac{1}{\sin^2 x}$.

Розв'язання. Функція $y=(x+1)^{ctgx}$ – степенево-показникова. Похідну такої функції можна знайти користуючись методом логарифмічного диференціювання. Логарифмуючи обидві частини рівності, маємо $\ln y = ctgx \ln(x+1)$. Диференціюючи отриману неявно задану функцію, дістанемо $\dfrac{1}{y}y' = -\dfrac{\ln(x+1)}{\sin^2 x} + \dfrac{ctgx}{x+1}$, звідси $y' = (\dfrac{ctgx}{x+1} - \dfrac{\ln(x+1)}{\sin^2 x})(x+1)^{ctgx}$.

2.78. $2(\ln(1+x^2) + xarctgx)(x^2+1)^{arctg^2 x - 1} arctgx$. *Розв'язання.* На відміну від розв'язання прикладу 2.77, використаємо кінцеву формулу логарифмічного диференціювання $(u^v)' = u \ln u\, v' + v\, u^{v-1} u'$. Отже,

$$((1+x^2)^{arctg^2 x})' = (x^2+1)^{arctg^2 x} \ln(1+x^2) \frac{2arctgx}{1+x^2} + 2x\, arctg^2 x\, (1+$$

$+x^2)^{arctg^2 x - 1}$. **2.79.** $3x^2(\sin 5x)^{x^3-4} \ln \sin 5x + 5(x^3-4)(\sin 5x)^{x^3-5} \cos 5x$.

2.80. $(\ln x + 1)x^x$. **2.81.** $(-\dfrac{\ln(1-x^2)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \dfrac{2x \arccos\sqrt{x}}{1-x^2})(1-x^2)^{\arccos\sqrt{x}}$.

2.82. $(\cos x \ln \cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x})(\cos x)^{\sin x}$. **2.83.** $a^x x^{a^x}(\dfrac{1}{x} + \ln a \ln x) +$ $+ x^{a-1} x^{x^a}(1 + a\ln x) + x^x a^{x^x} \ln a(1 + \ln x)$, ($x > 0$). *Вказівка.* Взяти похідну від кожного доданка за допомогою логарифмічного диференціювання. Розглянемо $y = a^{x^x}$ та логарифмуємо цю функцію $\ln y = x^x \ln a$. Знову маємо степенево-показникову функцію, тому ще раз логарифмуємо отриманий вираз $\ln \ln y = x \ln x + \ln \ln a$. Тепер знайдемо похідну неявно заданої функції $\dfrac{1}{\ln y}\dfrac{1}{y} y' = \ln x + x\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $y' = (\ln x + 1) \ln a^{x^x} a^{x^x} =$ $= x^x a^{x^x} (\ln x + 1) \ln a$. **2.84.** $(arctgx)^{\arcsin^2 x} \ln arctgx \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} 2\arcsin x +$ $+ \dfrac{\arcsin^2 x}{1+x^2}(arctgx)^{\arcsin^2 x - 1}$. **2.85.** t. *Розв'язання.* Функція задана параметрично, похідна такої функції знаходиться за формулою $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, тому спочатку знайдемо похідні x'_t та y'_t: $x'_t = 2 + 6t$, $y'_t = 2t + 6t^2$, а потім скористаємося вказаною формулою. **2.86.** $-tgt$. **2.87.** $t^2(t+1)$. **2.88.** $1 - tg^2 \dfrac{t}{2}$. **2.89.** $-\dfrac{t}{2}$. **2.90.** $3^{-tgt} \sin t$. **2.91.** 1. **2.92.** $2 + \sqrt{3}$. **2.93.** 7. **2.94.** 1. **2.95.** Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції. **2.96.** г. **2.97.** б. **2.98.** б. **2.99.** г. **2.100**. $\Delta y = AB$, $dy = AN$, $\alpha \cdot \Delta x = NB$.

2.101. $-\dfrac{\pi}{x^2}dx$. **2.102.** $\dfrac{4\ln 3}{5\sqrt[5]{x}\cos^2\sqrt[5]{x^4}}3^{tg\sqrt[5]{x^4}}\, ctg 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}\, dx$.

2.103. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$. **2.104.** $-2dx$. **2.105.** $-\dfrac{1}{2}dx$. **2.106**. $e^x(1+x)dx$.

2.107. $-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. **2.108.** $\dfrac{3-2\ln x}{3x\sqrt[3]{x^2}}dx$. **2.109**. $2{,}98$. *Розв'язання.* Розглянемо функцію $y=\sqrt[3]{x}$. При $x=27$ функція $y(27)=\sqrt[3]{27}=3$. Отже, зручно покласти $x+\Delta x = 26{,}46 \Rightarrow \Delta x = 26{,}46-27=-0{,}54$. Обчислюємо похідну $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(27)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\dfrac{1}{27} \Rightarrow \Delta y \approx \dfrac{1}{27}(-0{,}54)=-0{,}02$. Згідно з формулою $y(x+\Delta x)=y(x)+\Delta y$ дістанемо $\sqrt[3]{26{,}46}\approx 3-0{,}02$.

2.110. $4{,}02$. *Розв'язання.* Розглянемо функцію $y=\sqrt[3]{x}$. Якщо покласти $x=64$, то $y(64)=\sqrt[3]{64}=4$. Отже, $\sqrt[3]{65}=y(65)=y(64+1)\approx y(64)+$ $+\,y'(64)\Delta x$. Враховуючи, що $\Delta x = 65-64=1$, $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(64)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\dfrac{1}{48}$, маємо $\sqrt[3]{65}\approx 4+\dfrac{1}{48}=4{,}02$. **2.111.** $0{,}4849$. *Розв'язання*. Замінюючи приріст функції на диференціал ($\Delta y \approx dy$) в формулі $y(x+\Delta x)=y(x)+\Delta y$, отримаємо $y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x$. Розглянемо функцію $y(x)=\sin x$. Покладемо $x=30^0$ тоді $y(30^0)=\dfrac{1}{2}$, $y'(x)=\cos x$, $y'(30^0)=\cos 30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Для застосування формул диференціального числення треба всі кути перевести у радіани: $30^0=\dfrac{\pi}{6}$, $1^0=\dfrac{\pi}{180}$, тоді $\Delta x = 29^0-30^0=-1^0=-\dfrac{\pi}{180}$. За формулою $y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x$, дістанемо $\sin 29^0=\sin(30^0-1^0)\approx \sin 30^0+$ $+\cos 30^0(-\dfrac{\pi}{180})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-\dfrac{\pi}{180})=0,5-0,0151=0,4849$. **2.112.** $1{,}043$.

2.113. Геометрично диференціал функції dy являє собою приріст ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x при зміненні значення аргументу від x до $x + \Delta x$. **2.114.** в. *Вказівка:* $S(x) = x^2$, $dS = 2xdx$. $S(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, тоді $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. **2.115.** а, б, в, и. *Вказівка.* Рівність $dy = dx$ буде виконуватися, якщо $y'(0) = 1$. **2.116.** Похідна від похідної першого порядку $y'(x)$ називається похідною другого порядку $y''(x)$ функції $y(x)$. **2.117.** $6 - 8\cos 2x$. *Вказівка.* Послідовно диференціюючи функцію, матимемо: $y' = 3x^2 + 2\cos 2x$, $y'' = 6x - 4\sin 2x$, $y''' = 6 - 8\cos 2x$.
2.118. $-\dfrac{2tgx}{\cos^2 x}$. **2.119.** $-4\sin 2x$. **2.120.** $e^{-x}(3 - x)$. **2.121.** $-\dfrac{y^2 + (x+1)^2}{y^3}$.
Вказівка. Диференціюючи обидві частини рівності по змінній x та враховуючи, що y є деяка функція від x, маємо $2x + 2 + 2yy' = 0 \Rightarrow \Rightarrow y' = -\dfrac{x+1}{y}$. Останню рівність знову диференціюємо по змінній x, розглядаючи y як функцію від x, дістанемо $y'' = -\dfrac{y - (x+1)y'}{y^2}$. В цій рівності замінимо y' на його вираз з попереднього рівняння, маємо остаточний результат. **2.122.** $-\dfrac{e^y}{(e^y + 1)^3}$. **2.123.** $-\dfrac{b^4}{a^2 y^3}$. *Вказівка*:

$$y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad y'' = \frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{b^2}{a^2 y^2}\left(y - \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{y}\right) = \frac{b^4}{a^2 y^3}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

2.124. $-\dfrac{2(1 + y^2)}{y^5}$. **2.125.** $-\dfrac{1}{(1 - \cos t)^2}$. *Вказівка.* Знайдемо першу похідну за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$: $y'_x = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$. Для знаходження другої похідної використаємо формулу $y''_{xx} = (y'_x)'_t \dfrac{1}{x'_t}$ і отримаємо

$$y''_{xx} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \sin t}{(1 - \cos t)^2}\frac{1}{(1 - \cos t)}.$$

2.126. $-\dfrac{8}{\cos^2 t(1 - tg^2 t)^2}$.

2.127. $\dfrac{6(1 + t^3)^3}{t(2 - t)^3}$. **2.128.** $2^{2 - 3\cos^2 t}$. **2.129.** в. **2.130.** $(36x^2 - 25\sin 5x)dx^2$.

Розв'язання. Згідно з означенням другого диференціала отримаємо

$$d^2y = d(dy) = d(5\cos 5x dx + 12x^3 dx) = 5d(\cos 5x)dx + 12d(x^3)dx =$$

$$= 5(-5\sin 5x dx)dx + 12(3x^2 dx)dx = 36x^2 dx^2 - 25\sin 5x dx^2 = (36x^2 -$$

$-25\sin 5x)dx^2$. **2.131.** $-3x(2\sin x^3 + 3x^3\cos x^3)dx^2$ **2.132.** $\frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}dx^2$.
2.133. $3^{-x}(2 - 4x\ln 3 + (x^2+1)\ln^2 3)dx^2$. **2.134.** $3e^{-3x}(3x-2)dx^2$.
2.135. $\frac{-2\sin\ln x}{x}dx^2$. **2.136.** $-\frac{1}{3}dx^2$. *Розв'язання.* Використаємо формулу $d^2y(x_0, y_0) = y''(x_0, y_0)dx^2$, тобто знайдемо другу похідну даної функції. Диференціюємо обидві частини даного рівняння по x: $2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 4 + 2y' = 0 \Rightarrow x + y + (x + y + 1)y' - 2 = 0$. Отриманий результат диференціюємо ще раз по x: $1 + y' + (x + y + 1)y'' + y'(1 + y') = 0$. Враховуючи, що $x = 1$, $y = 1$, маємо $y'(1;1) = 0$, $y''(1;1) = -\frac{1}{3}$. Отже, $d^2y(1;1) = -\frac{1}{3}dx^2$. **2.137.** $\frac{1}{2}dx^2$.
2.138. $\frac{3}{8}dx^2$. **2.139.** $-2dx^2$. **2.140.** г. **2.141.** $4x - y - 13 = 0$, $x + 4y - 16 = 0$. *Розв'язання.* Підставимо у рівняння функції значення абсциси x_0 точки дотику, визначимо відповідну ординату цієї точки $y_0 = 4^2 - 16 + 3 \Rightarrow y_0 = 3$. Знайдемо похідну даної функції та обчислимо її значення в точці дотику: $y' = 2x - 4$; $y'(4) = 8 - 4 = 4$. Підставляючи в рівняння дотичної $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ отримані значення, дістанемо $y - 3 = 4(x - 4)$. Аналогічно, підставляючи в рівняння нормалі $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ координати точки дотику (4;3) та $y'(4) = 4$, отримаємо $y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 4)$. **2.142.** $14x - y - 1 = 0$, $x + 14y + 211 = 0$.
2.143. $x + ey - 2e = 0$, $ex - y + 1 - e^2 = 0$. **2.144.** $5x + 6y - 13 = 0$, $6x - 5y + 21 = 0$. **2.145.** $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$. **2.146.** $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$. **2.147.** $x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$, $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$. **2.148.** $x + y - 1 = 0$, $x - y = 0$. **2.149.** а. б.

2.150.

Значення змінної x	Кутовий коефіцієнт дотичної				
	$k<0$	$k>0$	$k=0$	k не існує	$k=\infty$
$(-\infty;-5)$		✸			
$\{-5\}$			✸		
$(-5;-3)$	✸				
$(-3;-1)$			✸		
$(-1;1)$		✸			
$\{1\}$					✸
$(1;4)$		✸			
$\{4\}$				✸	
$(4;6)$	✸				
$\{6\}$				✸	
$(6;+\infty)$		✸			

2.151. $a=-7$. **2.152.** $(2;6)$, $(-2;-6)$. **2.153.** $tg\alpha=19$. **2.154.** Кутом між кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ у точці їх перетину називається кут між дотичними до цих кривих у цій точці. **2.155.** г. **2.156.** $arctg\dfrac{6}{7}$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему $\begin{cases} y=x^2-4x+4, \\ y=-x^2+6x-4, \end{cases}$, визначимо точки перетину парабол: $A(1,1)$ та $B(4,4)$. Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до даних кривих у точці $A(1,1)$: $y_1'\big|_{x=1}=(2x-4)\big|_{x=1}=2-4=-2$; $y_2'\big|_{x=1}=(-2x+6)\big|_{x=1}=-2+6=4$, тоді $tg\varphi=\dfrac{y_2'(1)-y_1'(1)}{1+y_1'(1)y_2'(1)}=\dfrac{-2-4}{1+4\cdot(-2)}=\dfrac{6}{7}$. Аналогічно знаходимо, що під таким самим кутом перетинаються криві і в точці $B(4,4)$. **2.157.** $arctg\dfrac{8}{15}$.

2.158. $\dfrac{\pi}{4}$. **2.159.** $arctg\dfrac{7}{16}$. **2.160.** $\dfrac{\pi}{2}$. **2.161.** $arctg\dfrac{175}{288}$. **2.162.** $n\pi$, де $n\in Z$. *Розв'язання.* Кутовий коефіцієнт вертикальних дотичних дорівнює ∞. Зважаючи на те, що $k=y'(x_0)$ і $y'(x)=1-\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, маємо $k=\infty$, якщо $\sin x=0$, це можливо при $x_0=n\pi$, $n\in Z$. **2.163.** $(4,-4)$. *Розв'язання.* Кутовий коефіцієнт прямої $k_{прям}=2$. Дотична буде

паралельна до даної прямої, якщо $k_{дот} = k_{прям} = 2$. Шукаємо $k_{дот}$: $y' = 2x - 6$; $k_{дот} = y'(x_0) = 2x_0 - 6$. Отже, $2x_0 - 6 = 2 \Rightarrow x_0 = 4$. Підставляємо x_0 в рівняння кривої, знаходимо $y_0 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 4 = -4$.
2.164. г. **а)** функція має розрив, а за теоремою Ролля функція повинна бути неперервною; **б)** функція недиференційована в точці $x = 0$, а за теоремою функція повинна мати похідну в кожній точці відрізка; **в)** на кінцях відрізку функція набуває різних значень, що суперечить теоремі.
2.165. Теорема справедлива. *Розв'язання.* Для даної функції виконуються всі умови теореми Ролля на відрізку $[1, 3]$, а саме: $f(x)$ неперервна, диференційована та обертається на нуль в точках $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ цього відрізка, тобто на кінцях відрізків $[1, 2]$, $[2, 3]$ має однакові значення. **2.166.** Ні. *Розв'язання.* В точці $x = 0$ відрізка $[-1, 1]$ похідна не існує, і умови теореми Ролля порушені. **2.167.** *Доведення*. Функція $P(x)$ диференційована на відрізку $[0, 4]$ та обертається на нуль в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ цього відрізка. Отже, на відрізках $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ для функції $P(x)$ виконуються всі умови теореми Ролля. Це означає, що на кожному з вказаних відрізків знайдеться точка $x = \xi_i$ $(i = \overline{1,4})$, в якій похідна $P'(\xi_i) = 0$, тобто похідна многочлена буде мати чотири дійсних, простих кореня. Враховуючи, що $P(x)$ многочлен 5-го степеня, його похідна $P'(x)$ − многочлен 4-го степеня, отже, інших коренів немає. **2.168.** $M_0(\frac{5}{2}, -\frac{15}{4})$. *Розв'язання.* Функція $f(x) = x^2 - 4x$ неперервна і диференційована на відрізку $[1;4]$. Отже, згідно з теоремою Лагранжа існує така точка $x_0 \in (1, 4)$, для якої $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(x_0)$, де $f'(x) = 2x - 4$. Підставивши відповідні значення, дістанемо $\frac{0 - (-3)}{4 - 1} = 2x_0 - 4 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}$, $y_0 = f(\frac{5}{2}) = -\frac{15}{4}$.
2.169. $M(\frac{169}{36}, \frac{2197}{216})$. **2.170.** Ні. *Вказівка.* Враховуючи, що $\varphi(1) - \varphi(-1) = 2 \neq 0$, умову теореми Ролля $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in [-1,1]$ можна замінити більш слабкою $[f'(x)]^2 + [\varphi'(x)]^2 \neq 0$ і саме ця умова не виконується: $[f'(0)]^2 + [\varphi'(0)]^2 = 0$. **2.171.** Так. **2.172.** Нерівність справедлива. *Доведення.* За теоремою Лагранжа для функції $arctgx$ на відрізку $[x_1, x_2]$ знаходимо $arctgx_2 - arctgx_1 = \frac{1}{1 + \xi^2}(x_2 - x_1)$,

$[x_1 < \xi < x_2]$, звідси $|arctgx_2 - arctgx_1| = \dfrac{|x_2 - x_1|}{1+\xi^2} \le |x_2 - x_1|$, тому що $0 \le \dfrac{1}{1+\xi^2} \le 1$. **2.173.** *Вказівка.* $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos\xi$, при $[x_1 < \xi < x_2]$ $\Rightarrow$ $|\sin x_2 - \sin x_1| = |\cos\xi||x_2 - x_1| \le |x_2 - x_1|$, тому що $|\cos\xi| \le 1$. **2.174.** Використовуючи теорему Лагранжа на відрізку $[0, x]$, де $x > 0$, маємо $\ln(1+x) = \dfrac{1}{1+\xi}x$ $\Rightarrow$ $\ln(1+x) < x$, тому що $0 \le \xi \le x$. **2.175.** На відрізку $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ функція $f(x) = \cos x$ задовольняє всі вимоги теореми Лагранжа. Тоді $\cos\frac{1}{3} - \cos\frac{1}{4} = -(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})\sin\xi$, де $\xi \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ і $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} = \frac{1}{12}\sin\xi$. Оскільки $\sin\xi < \xi \le \frac{1}{3}$, маємо $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} < \frac{1}{36}$.

2.176. $-\frac{1}{e}$. *Розв'язання.* Чисельник та знаменник прямують до нуля при $x \to 2$, тому маємо невизначеність виду $\{\frac{0}{0}\}$. Скористаємося правилом Лопіталя, тобто розглянемо границю відношення похідних чисельника та знаменника. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2 + \ln(3-x)}{e^{x-1} - e} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2) - \dfrac{1}{3-x}}{e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{e} = -\dfrac{1}{e}$.

2.177. $\dfrac{49}{198}$. **2.178.** 0. *Розв'язання.* Маємо невизначеність виду $\{\frac{\infty}{\infty}\}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

Тут застосовано правило Лопіталя n раз. **2.179.** $0{,}5$. **2.180.** -2. **2.181.** 1. **2.182.** ∞. **2.183.** 0. **2.184.** $\dfrac{1}{3}$. **2.185.** 0. *Розв'язання.* Безпосереднє використання правила Лопіталя неефективно, тому виконаємо заміну $y = \dfrac{1}{x^2}$ і застосуємо до отриманого виразу 50 разів правило Лопіталя, дістанемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^{50}}{e^y} = 50!\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{e^y} = 0$.

2.186. -1. *Розв'язання.* Невизначеність $\{0\cdot\infty\}$ потребує перетворення добутку функцій на частку, а потім, отримавши невизначеність виду $\{\frac{\infty}{\infty}\}$, використаємо правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot\ln tgx = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{ctg2x} =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 2x}{2tgx\cdot\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 2x}{2\sin x\cdot\cos x} = -1$. **2.187.** 0. **2.188.** 2. **2.189.** $\frac{1}{2}$. *Розв'язання.* Для розкриття невизначеності $\{\infty-\infty\}$ зведемо дроби до спільного знаменника. Отримавши невизначеність $\{\frac{0}{0}\}$, обчислимо границю за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$. **2.190.** 0. **2.191.** -1. **2.192.** 1. *Розв'язання.* Невизначеність виду $\{0^0\}$. Позначимо дану функцію через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і логарифмуємо її $\ln y = x\ln(\sin x)$ $\Rightarrow$ $\ln y = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}$. Обчислимо границю логарифма даної функції, використовуючи правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$. **2.193.** 1. *Розв'язання.* Нехай $y=(tgx)^{2\cos x}$ $\Rightarrow$ $\ln y = 2\cos x\ln(tgx)$. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y =$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(tgx) = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(tgx)}{\frac{1}{\cos x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x}} =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{tgx\ \sin x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$$ **2.194.** 1. **2.195.** 2.

2.196. 1. **2.197.** 1. **2.198.** $e^{\frac{1}{3}}$. *Розв'язання.* Логарифмуючи дану функцію, перетворюючи її на дріб та застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{tgx}{x}}{x^2} = \{\frac{0}{0}\} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{tgx}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2 x} - tgx}{x^2}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - tgx\cos^2 x}{2x^2 tgx\ \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{2x(\sin 2x + x\cos 2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x + x\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3\cos 2x - x\sin 2x} = \frac{1}{3}.$$ Отже, $\lim_{x\to 0} y = e^{\frac{1}{3}}$.

2.199. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **2.200 .** $e^{-\frac{1}{2}}$. **2.201.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **2.202.** Ні. *Вказівка.* Усі умови правила Лопіталя виконуються, крім одного: існування границі відношення похідних. **2.203.** б. **2.204.** г. **2.205.** а, в. **2.206.** в. *Вказівка.* Графіки на рис. 2.4,а,б не можуть бути графіками похідної заданої функції, тому що дана функція зростаюча на всій області визначення і її похідна приймає тільки додатні значення. На рис. 2.4,г зображена стала функція, вона може бути похідною тільки лінійної функції. **2.207.** Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними. **2.208.** в, д. **2.209.** Зростає на всій області визначення. *Вказівка.* Похідна $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ додатна на всій області визначення $[0, +\infty)$. **2.210.** На $(-\infty, 0)$ і $(\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$ функція спадає, на $(0, \frac{2}{\ln 2})$ – зростає. *Вказівка.* Знаходимо похідну $y' = \frac{2^x(2x - x^2\ln 2)}{2^{2x}}$. Ця похідна існує на всій області визначення функції, а в нуль обертається при $x = 0$ та $x = \frac{2}{\ln 2}$, тобто проміжки монотонності будуть $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{2}{\ln 2})$, $(\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$. Визначаємо знак похідної в кожному проміжку: $y'(-1) = \frac{-2-\ln 2}{2^{-2}} < 0$,

$y'(1)=\frac{2-\ln 2}{2}>0$, $y'(3)=\frac{6-9\ln 2}{8}<0$. **2.211.** На $(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ та $(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ функція спадає, на $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ − зростає. *Вказівка.* Область визначення: $(-1,1)$, тому розглядаємо тільки проміжки $(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$**. 212.** На $(-\infty,5)$ та $(15,+\infty)$ функція зростає, на $(5,15)$ − спадає. **2.213.** б, е, и. **2.214.** г. **2.215.** а, г. **2.216.** $x=0$, $x=\frac{8}{3}$. *Вказівка*. Похідна $y'=3x^2-8x$ дорівнює нулю в точках $x=0$, $x=\frac{8}{3}$. Визначаємо знак зліва та справа від цих точок. Якщо при переході через ці точки похідна змінює знак, то саме в них функція має екстремум. **2.217.** $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$. $x_3=-1$, $x_4=1$, $x_5=2$. **2.218.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. **2.219.** $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$. **2.220.** $y_{\min}(1)=-e^2$. *Розв'язання.* Знаходимо похідну даної функції $y'(1)=2e^{2x}+2(2x-3)e^{2x}$. Прирівнюємо її до нуля $(x-1)e^{2x}=0$ і знаходимо корінь цього рівняння $x=1$. Точок, в яких похідна не існує, немає, отже, критична точка тільки одна. Визначимо знак похідної зліва та справа від цієї точки: $y'(0)=-4<0$, $y'(2)=4e^4>0$. При переході через критичну точку $x=1$ похідна змінила знак з мінуса на плюс − це означає, що в цій точці функція має мінімум. **2.221.** $y_{\min}(1)=0$ **2.222.** $y_{\max}(2)=14$, $y_{\min}(3)=13$. **2.223.** Екстремумів немає. **2.224.** $y_{\max}(1)=3$, $y_{\min}(2)=0$. **2.225.** $y_{\min}(\frac{4}{3})=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $y_{\max}(2)=0$. *Вказівка.* Обчислюємо похідну $y'(x)=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}$. В точках $x=1$, $x=2$ похідна не існує, а в точці $x=\frac{4}{3}$ дорівнює нулю. Отже, функція має три критичні точки. При переході через точку $x=1$ похідна не змінює знака − екстремуму немає. При переході через точку $x=\frac{4}{3}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, тому в цій точці мінімум. При переході через точку $x=2$ похідна змінює знак з плюса на мінус − в цій точці максимум. **2.226.** б, в, д. **2.227.** $f_{наим}(3)=-89$, $f_{наиб}(6)=100$. *Розв'язання.* Знаходимо похідну $f'(x)=6x^2-6x-36$, нулю вона дорівнює в точках $x=-2$, $x=3$. Обидві критичні точки належать відрізку $[-3,6]$. Обчислюємо значення функції в цих та межових точках відрізка: $f(-3)=19$, $f(-2)=36$, $f(3)=-89$, $f(6)=100$. Вибираємо з отриманих результатів найбільше та найменше значення. **2.228.** $f_{наиб}(-2)=17$, $f_{наим}(-1)=0$. **2.229.** $f_{наиб}(4)=\frac{3}{5}$, $f_{наим}(0)=-1$. **2.230.** $f_{наим}(\frac{1}{2})=\frac{3}{5}$, $f_{наиб}(0)=f(1)=1$. **2.231.** $f_{наиб}(-1)=f(1)=3$, $f_{наим}(-2)=f(2)=-24$. **2.232.** $f''(x)$. **2.233**. в, г. **2.234.** в. **2.235.** ж. **2.236.** в. *Пояснення.* Функція $y=\frac{1}{x}$ при переході через точку $x=0$ має нескінченну похідну, змінює напрям опуклості, але ця точка не відповідає точці перегину, тому що функція в цій точці має розрив другого роду. Для функції $y=\sqrt[3]{|x|}$ точка $(0,0)$ не є точкою перегину, оскільки при переході через неї напрям опуклості графіка не змінюється (це так звана точка звороту). При переході через точку $(0,0)$ функція $y=\begin{cases}\sin x, & при \quad x\ge 0,\\ x^2, & при \quad x<0.\end{cases}$ змінює напрям опуклості, але ця точка не є точкою перегину, тому що в цій точці функція не має ані скінченної, ані нескінченної похідної (це так звана кутова точка). **2.237.** в, д. **2.238.** б, д, и. **2.239.** $M(1,2)$ − точка перегину, $(-\infty,1)$ − опуклість вгору, $(1,+\infty)$ − опуклість вниз. *Розв'язання.* Знаходимо похідні $y'=15x^4-20x^3$, $y''=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$. Друга похідна існує на всій області визначення ($D\in(-\infty,+\infty)$), а в нуль обертається в точках $x_1=0$ та $x_2=1$. Ці точки належать області визначення функції, отже, можуть бути абсцисами точок перегину. Область визначення точками x_1 та x_2 поділимо на проміжки $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$ і в кожному з них знайдемо знак другої похідної $y''(-1)=-120<0$, $y''(\frac{1}{2})=-\frac{15}{2}<0$, $y''(2)=240>0$. Оскільки при переході через точку $x_2=1$ друга похідна змінила знак з мінуса на плюс, то зліва від цієї точки крива опукла вгору, справа − опукла вниз, а $M(1,2)$ − це точка перегину кривої. **2.240.** $M(1,-2)$ − точка перегину, на проміжку $(-\infty,1)$ крива опукла вгору, на проміжку $(1,+\infty)$ − опукла вниз.

2.241. $M_1(-3,294)$, $M_2(2,114)$ − точки перегину, на проміжках $(-\infty,-3)$ та $(2,+\infty)$ крива опукла вгору, на проміжку $(-3,2)$ крива опукла вниз. **2.242.** $M(0,2)$, на проміжку $(-\infty,0)$ крива опукла вниз, на проміжку $(0,+\infty)$ крива опукла вгору. **2.243.** а. **2.244.** в. **2.245**. г. **2.246.** $x=0$ − вертикальна асимптота, $y=1$ та $y=-1$ − горизонтальні асимптоти. *Розв'язання.* Область визначення функції $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-\infty$, то пряма $x=0$ − вертикальна асимптота графіка. Далі, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-1$, отже, $y=1$ − горизонтальна асимптота при $x\to+\infty$, $y=-1$ − горизонтальна асимптота при $x\to-\infty$. Для знаходження похилих асимптот визначимо $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}=0$. В цьому випадку похилих асимптот графік не має. **2.247.** $x=-3$ − вертикальна асимптота, $y=x-5$ − похила асимптота. **2.248.** $x=2$ − вертикальна асимптота, $y=x+1$ та $y=-x-1$ − похилі асимптоти. **2.249.** $x=\sqrt{5}$ та $x=-\sqrt{5}$ − вертикальні асимптоти, $y=2$ − горизонтальна асимптота. **2.250.** $x=1$ − вертикальна асимптота, $y=x-1$ − похила асимптота. **2.251.** $x=0$ − вертикальна асимптота, $y=-x$ − похила асимптота. **2.252.** Область визначення функції D: $x\in(0,\infty)$. Функція ні парна, ні непарна, не має точок перетину з осями координат (точка $x=0$ не входить до області визначення, а значення $y=0$ не входить в область значень функції), неперервна на всій області визначення (елементарна функція), але $\lim\limits_{x\to+0}(2\ln x-x^2)=-\infty$ і функція має вертикальну асимптоту $x=0$. Похилих асимптот немає, тому що

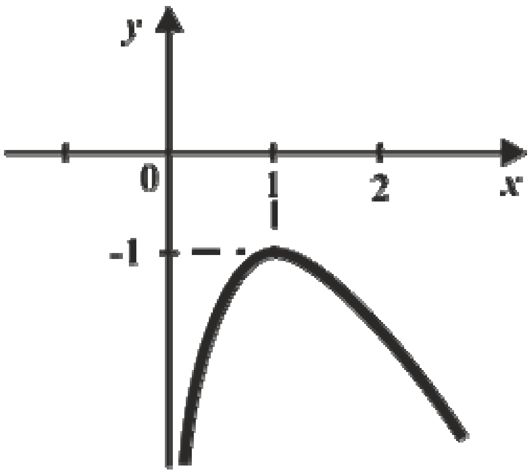


Рис. 6

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x-x^2}{x}=\infty$. Перша похідна $y'=\frac{2}{x}-2x$ не існує в точці $x=0$ та стає нулем в точках $x=\pm1$. До області визначення входить тільки точка $x=1$, яка і поділяє її на проміжки монотонності $(0,1)$ та $(1,\infty)$. Дослідивши знак y' на цих проміжках, отримаємо $y'>0$ на проміжку $(0,1)$, $y'<0$ на проміжку $(1,\infty)$.

Отже, функція зростає на проміжку $(0,1)$, спадає на проміжку $(1,\infty)$ і в точці $x=1$, має екстремум $y_{\max}(1)=-1$.

Подальше дослідження проведемо за допомогою другої похідної $y''=-\dfrac{2}{x^2}-2$. На всій області визначення $y''<0$, це означає, що на проміжку $(0,\infty)$ графік функції опуклий вгору. Побудувавши знайдені точки, асимптоту, врахувавши поведінку кривої біля асимптоти, проміжки монотонності та напрям опуклості кривої, дістанемо графік даної функції (рис. 6). **2.253.** Область визначення функції $D:\ x\in(-\infty,+\infty)$. Функція парна, тому що $y(-x)=y(x)$, перетинає вісь Oy в точці $(0,-1)$, від'ємна на всій області визначення, неперервна, вертикальних асимптот нема. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$:

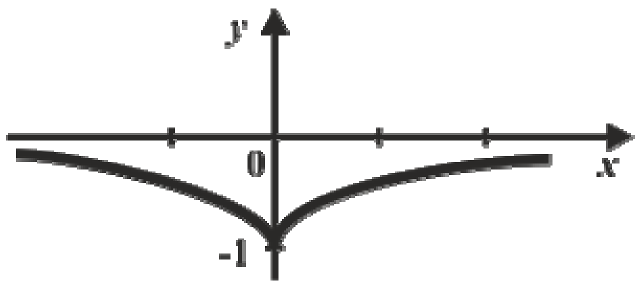


Рис. 7

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\leftarrow\infty}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}=0.$$

Горизонтальна асимптота має рівняння $y=0$. Для визначення проміжків монотонності та екстремумів обчислюємо першу похідну $y'=\dfrac{2(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}-x\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. Функція має нескінченну похідну в точці $x=0$, на проміжку $(-\infty,0)$ похідна $y'<0$, на проміжку $(0,+\infty)$ похідна $y'>0$. Таким чином, $x=0$ − зворотна точка, на проміжку $(-\infty,0)$ функція спадає, на проміжку $(0,+\infty)$ − зростає. Знайдемо напрями опуклості кривої. Оскільки $y''=-\dfrac{2(\sqrt[3]{(x^2+1)^5}+3\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^{10}})}{9\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}}<0$, то графік функції опуклий вгору і точок перегину немає. Згідно з отриманими даними будуємо графік (рис. 7). **2.254.** Область визначення $D:\ x\in(-\infty;+\infty)$. Розв' язуючи системи $\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^3-2x}, \\ x=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^3-2x}, \\ y=0, \end{cases}$ знаходимо точки перетину кривої з осями координат: $(0,0)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},0)$. Отже, крива проходить через початок координат. Функція непарна, на це вказує рівність $y(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-2(-x)}=-\sqrt[3]{x^3-2x}=-y(x)$. Очевидно її графік симетричний відносно початку координат. Функція неперервна, як елементарна. Вертикальних асимптот графік не має. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x}}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3-2x}-$$

$$-x]=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x}+x^2}=0.$$ Отже, $y=x$ – похила асимптота. Визначаємо проміжки монотонності та екстремуми: $y'=\dfrac{3x^2-2}{3\sqrt[3]{(x^3-2x)^2}}$, маємо $y'=0$ при $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. В точках $x=0$ та $x=\pm\sqrt{2}$ похідна не існує. Отриманими точками поділимо область визначення на проміжки $(-\infty,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$, $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\infty)$. В проміжках $(-\infty,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\infty)$ похідна $y'>0$ – функція зростає, в проміжках $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$, $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$ похідна $y'<0$ – функція спадає. При переході через точку $x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці – максимум: $y_{\max}(-\sqrt{\frac{2}{3}})=\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{3}}\approx 1{,}029$. При переході через точку $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, в цій точці – мінімум: $y_{\min}(\sqrt{\frac{2}{3}})=-1{,}029$. При переході через точки $x=\pm\sqrt{2}$, $x=0$ похідна не змінює знак, що означає відсутність екстремумів. Визначимо напрям опуклості кривої та точки перегину: $y''=-\dfrac{4(3x^2+2)}{9\sqrt[3]{(x^3-2x)^5}}$, друга похідна в жодній точці не перетворюється на нуль, але вона не існує в точках $x=\pm\sqrt{2}$ та $x=0$. Область визначення поділимо цими точками на проміжки $(-\infty,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\infty)$ і в кожному з них з'ясуємо знак другої

похідної. В проміжках $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$ маємо $y'' > 0$ − крива опукла вниз, $y'' < 0$ в проміжках $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, \infty)$ − крива опукла вгору. Точки $x = \pm\sqrt{2}$ та $x = 0$ − це точки перегину кривої, тому що y'' при переході через них змінює знак. За отриманими даними будуємо графік функції (рис. 8).

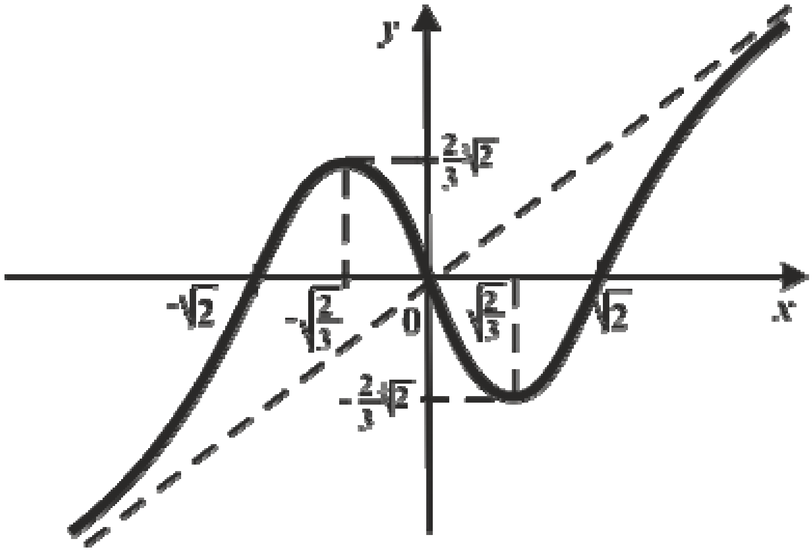


Рис. 8

2.255. Функція визначена при $x \in (-\infty, +\infty)$. Графік у точках $(0, 0)$, $(3, 0)$ перетинає осі координат. Функція загального положення, неперервна,

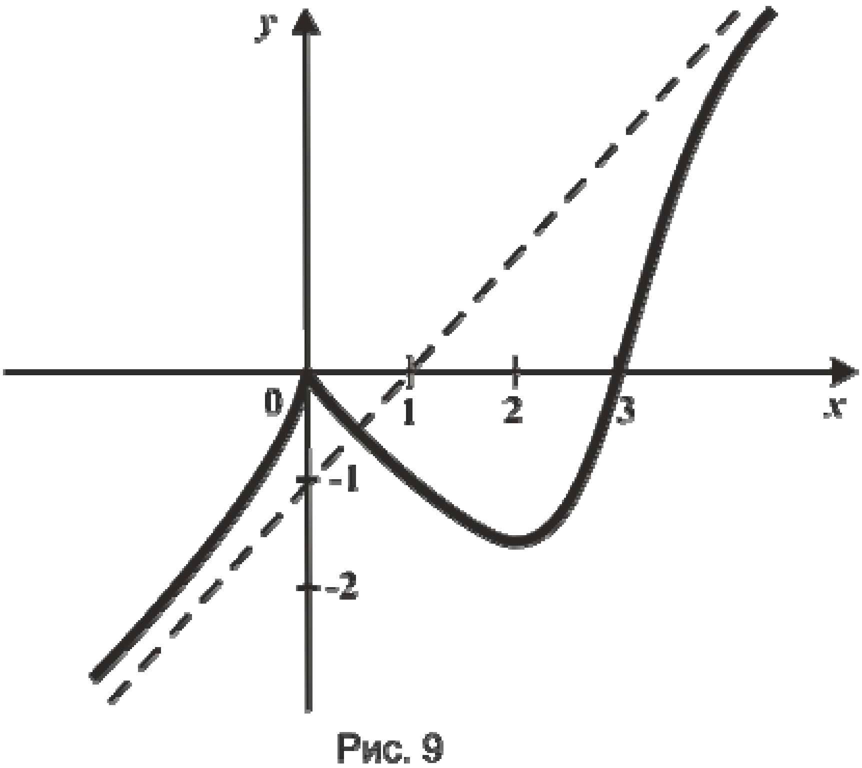


Рис. 9

не має вертикальних асимптот, $y = x - 1$ − похила асимптота. Функція на проміжках $(-\infty, 0)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$ зростає, на проміжку $(0, 2)$ − спадає, $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}(2) = -\sqrt[3]{4}$. На проміжках $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ крива опукла вниз, при $x \in (3, +\infty)$ − опукла вгору, точка перегину $(3, 0)$. Графік наведено на рис. 9. **2.256.** Область визначення функції $D: x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Функція має розрив другого роду в точці $x = 2$ і, оскільки $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} \dfrac{x^3}{4(2-x)^2} = +\infty$, пряма $x = 2$ − вертикальна асимптота графіка. Графік має похилу асимптоту при $x \to \infty$ $(k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{4x(2-x)^2} = \dfrac{1}{4}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{x^3}{4(2-x)^2} - \dfrac{1}{4}x) = 1)$ з рівнянням $y = \dfrac{1}{4}x + 1$. Обчислюємо першу похідну $y' = \dfrac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}$ та з'ясовуємо, що вона дорівнює нулю в точках $x = 0$, $x = 6$ а в точці $x = 2$ похідна не існує. Визначаємо знак похідної на проміжках $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 6)$, $(6, +\infty)$ і доходимо висновку: на проміжках $(-\infty, 2)$, $(6, +\infty)$ функція зростає, на проміжку $(2, 6)$ − спадає, в точці $x = 6$ існує екстремум $y_{\min}(6) = \dfrac{27}{8}$. За допомогою другої похідної $y'' = \dfrac{6x}{(x-2)^4}$ визначаємо напрям опуклості кривої. При $x < 0$ маємо $y'' < 0$ − функція опукла вгору, графік наближається до похилої асимптоти знизу. При $0 < x < 2$ крива опукла вниз ($y'' > 0$). При $x > 2$ крива опукла вниз, графік наближається до похилої асимптоти зверху. Точка перегину $(0, 0)$. Графік наведено на рис. 10.

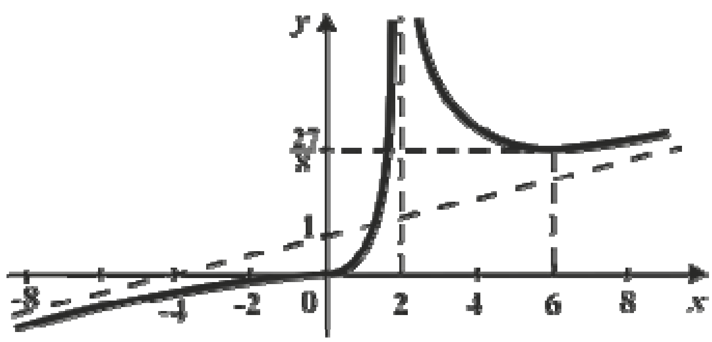


Рис. 10

2.257. Область визначення $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Точка перетину з осями координат $(0, 0)$. Функція непарна $y(-x) = -y(x)$, отже, можна побудувати графік на проміжку $(0, +\infty)$, а потім симетрично відносно початку координат продовжити його на проміжок $(-\infty, 0)$. Функція має нескінченний розрив другого роду в точках $x = \pm\sqrt{3}$. Прямі $x = \pm\sqrt{3}$ − вертикальні асимптоти, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}-0} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}+0} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$. З'ясуємо наявність похилої асимптоти: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(3 - x)^2} = -1$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{x^3}{(3 - x)^2} + x) = 0$, отже, $y = -x$ − похила асимптота при $x \to \infty$. Враховуючи першу похідну $y' = \dfrac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2}$, отримаємо критичні точки $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm 3$. Визначаючи знак похідної на проміжках $(-\infty, -3)$, $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$, $(3, +\infty)$, дістанемо: на проміжках $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, та $(\sqrt{3}, 3)$ функція зростає $(y' > 0)$, на проміжках $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$ ($y' < 0$) функція спадає, в точці $x = 3$ − досягає максимуму $y_{\max}(3) = -4{,}5$, в точці $x = -3$ − досягає мінімуму $y_{\min}(-3) = 4{,}5$. Друга похідна $y'' = \dfrac{6x(9 + x^2)}{(3 - x^2)^3}$ дорівнює нулю при

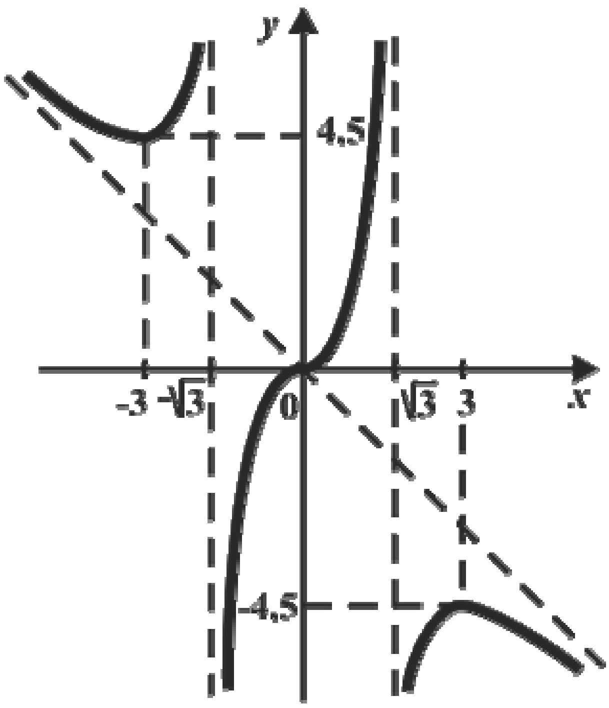


Рис. 11

$x = 0$ і не існує при $x = \pm\sqrt{3}$, тому $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ − це другі критичні точки. На проміжках $(-\infty, -\sqrt{3})$ та $(0, \sqrt{3})$ крива опукла вниз ($y'' > 0$), на проміжках $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, +\infty)$ крива опукла вгору ($y'' < 0$), точка $x = 0$ є точкою перегину: $f(0) = 0$. Графік наведено на рис. 11. **2.258.** Область визначення $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Графік не перетинає осі координат. Функція загального положення, неперервна в області визначення, розривна в точці $x = 0$ і, оскільки $\lim\limits_{x \to -0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x \to +0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, пряма

$x=0$ – вертикальна асимптота. Похила асимптота відсутня, тому що $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2e^{\frac{1}{x}}}{x}=\infty$. Перша похідна має вигляд $y'=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$, отже, вона дорівнює нулю при $x=\dfrac{1}{2}$ і не існує при $x=0$. Проміжки монотонності: $(-\infty,0)$, $(0,\dfrac{1}{2})$, $(\dfrac{1}{2},+\infty)$. При $x\in(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{1}{2})$ функція спадає, тому що $y'<0$, при $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ функція зростає, тому що $y'>0$. В точці $x=\dfrac{1}{2}$ функція має екстремум $y_{\min}(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}e^2$. Друга похідна $y''=\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ завжди додатна, тому графік функції повсюди опуклий вниз (рис. 12).

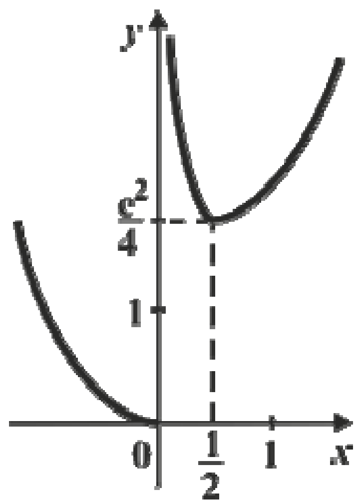


Рис. 12

2.259. Область визначення $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Функція невід'ємна та дорівнює нулю тільки в точці $x=1$, вона неперервна повсюди, крім точки $x=0$, тому вертикальна асимптота може існувати тільки в цій точці. Маємо $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|x-1|}{x^2}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|x-1|}{x^2}=+\infty$, отже , пряма $x=0$ – вертикальна асимптота. Виходячи з того, що $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x-1|}{x^3}=0$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x-1|}{x^2}=0$, пряма $y=0$ є горизонтальною асимптотою при $x\to\infty$. Аналогічно знаходимо, що ця ж пряма є асимптотою при $x\to-\infty$. Обчислюємо першу похідну $y'=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,1),\\ \dfrac{2-x}{x^3}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$ Якщо прирівняти її до нуля, отримаємо $x=2$. Таким чином, критичні точки (враховуючи точки, де похідна не існує) $x=0$, $x=1$, $x=2$. Вони розбивають область визначення функції на чотири проміжки монотонності: $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$. Оскільки $y'>0$ при $x\in(-\infty,0)\cup(1,2)$ і $y'<0$ при $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$, то функція зростає при $x\in(-\infty,0)\cup(1,2)$ і спадає при $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$, в точках $x=1$, $x=2$ має екстремум, причому

$y_{\min}(1)=0$, $y_{\max}(2)=\dfrac{1}{4}$. Інтервали опуклості знаходимо згідно з другою похідною $y''=\begin{cases}\dfrac{2(3-x)}{x^4}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,1),\\ \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$ Ця похідна не існує в точках $x=0$, $x=1$ ($y''_{-}(1)=4$ $y''_{+}(1)=-4$), а в точці $x=3$ дорівнює нулю. Отримали чотири проміжки $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(3,+\infty)$. З дослідження знаку другої похідної на цих проміжках випливає, що графік функції опуклий вниз на проміжках $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(3,+\infty)$ та опуклий вгору на проміжку $(1,3)$. Отже, точки $x=1$, $x=3$ − це точки перегину графіка (рис. 13).

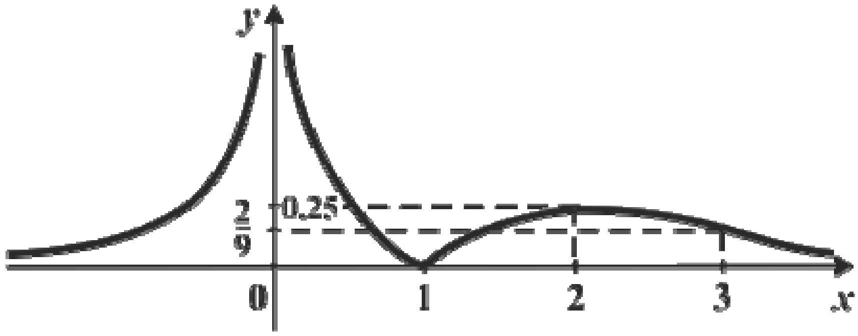


Рис. 13

2.260. $D: x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Графік перетинає вісь Ox в точці $(-6,0)$. Функція загального положення, неперервна в області визначення, має розрив в точці $x=0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+0}(\dfrac{x}{2}+3)e^{\frac{1}{2x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}(\dfrac{x}{2}+3)e^{\frac{1}{2x}}=0$, то пряма $x=0$ являє собою вертикальну асимптоту. З того, що $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\frac{x}{2}+3)}{x}e^{\frac{1}{2x}}=\dfrac{1}{2}$, а $b=\lim\limits_{x\to\infty}[(\dfrac{x}{2}+3)e^{\frac{1}{2x}}-\dfrac{x}{2}]=\dfrac{13}{4}$, випливає рівняння похилої асимптоти $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{4}$. Для визначення проміжків монотонності, екстремумів, проміжків опуклості та точок перегину знайдемо першу та другу похідні даної функції: $y'=\dfrac{2x^2-x-6}{4x^2}e^{\frac{1}{2x}}$; $y''=\dfrac{25x+6}{8x^4}e^{\frac{1}{2x}}$. Розіб'ємо область визначення на проміжки, в яких похідні дорівнюють нулю або не існують, визначимо знак похідних в цих проміжках та для зручності зведемо результати дослідження в таблицю.

x	$(-\infty,-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2},-\frac{6}{25})$	$-\frac{6}{25}$	$(-\frac{6}{25},0)$	0	(0,2)	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	–	–	–	Не існує	–	0	+
y''	–	–	–	0	+	Не існує	+	+	+
y	$\nearrow$ $\cap$	$y_{\max}\approx$ $\approx 1{,}6$	$\searrow$ $\cap$	Точка переги-ну $\approx 0{,}34$	$\searrow$ $\cup$	Не існує	$\searrow$ $\cup$	$y_{\min}\approx$ $\approx 5{,}1$	$\nearrow$ $\cup$

Графік на рис. 14. **2.261.** $D:\ x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Функція загального положення. Точка перетину з осями координат $(0,0)$. Точка нескінченного розриву $x=-1$. Вертикальна асимптота має рівняння $x=-1$, а похила – $y=\frac{1}{2}x-1$. При $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ функція зростає, при $x\in(-3,-1)$ – спадає, $y_{\max}(-3)=-\frac{27}{8}$. При $x\in(0,+\infty)$ графік опуклий вниз, при $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ крива опукла вгору, точка $(0,0)$ є точкою перегину. За результатами дослідження побудовано графік (рис. 15).

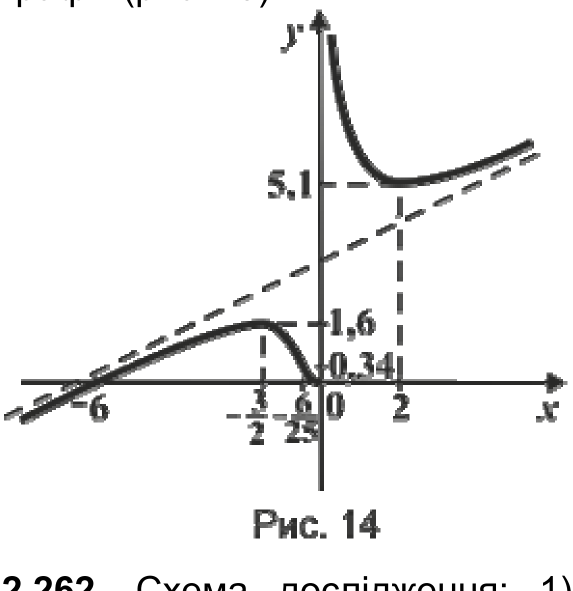


Рис. 14

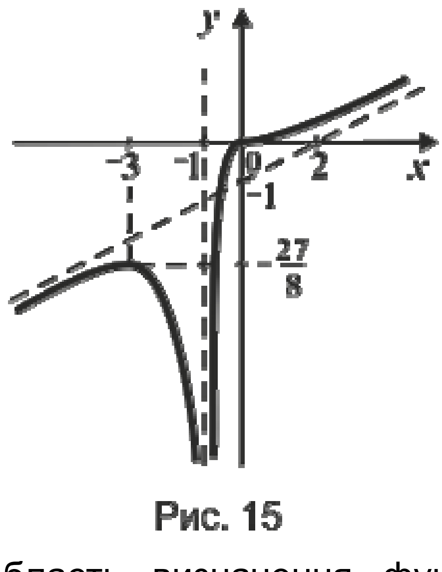
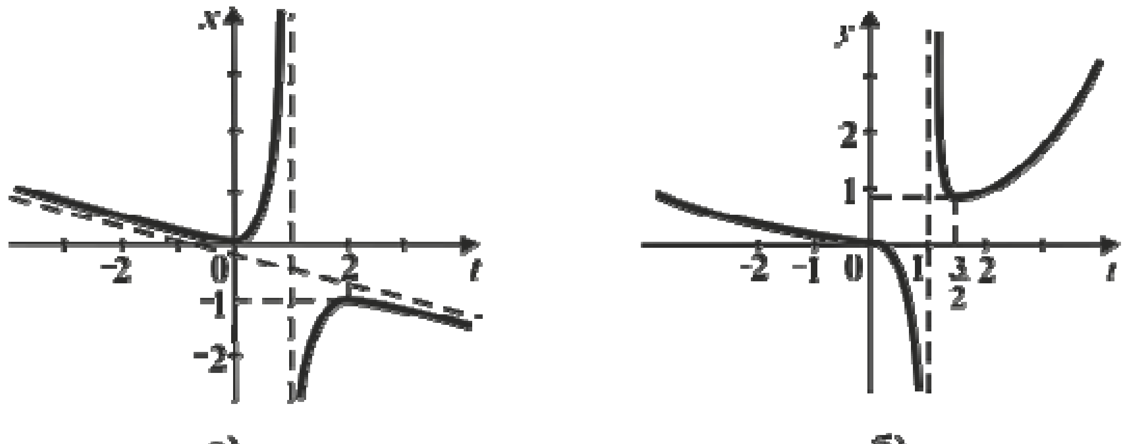


Рис. 15

2.262. Схема дослідження: 1) знайти область визначення функції; 2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями; 3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність; 4) дослідити на неперервність, знайти асимптоти; 5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції у цих точках;

6) знайти напрями опуклості кривої та точки перегину; 7) на основі проведеного дослідження побудувати графік функції. **2.263.** Побудуємо графіки функцій $x(t)$ та $y(t)$ (рис. 16, а, б).



а) б)

Рис. 16

Характерними точками цих графіків розіб’ємо вісь t на проміжки, в кожному з яких обидві функції $x(t)$ та $y(t)$ − монотонні, дістанемо п’ять проміжків: $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, 2)$, $(2, +\infty)$. З’ясуємо поведінку функцій $x(t)$ і $y(t)$ на кожному з проміжків та відобразимо це в таблиці. Для визначення напряму опуклості графіка обчислимо похідні

t	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$(-\infty,0)$	↘	↘
0	0	0
$(0,1)$	↗	↘
$1-0$	$+\infty$	$-\infty$
$1+0$	$-\infty$	$+\infty$
$(1,\frac{3}{2})$	↗	↘
$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{8}$	$\frac{27}{32}$
$(\frac{3}{2},2)$	↗	↗
2	-1	1
$(2,+\infty)$	↘	↗
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$y'_x = -\frac{t(t-\frac{3}{2})}{t-2}, \qquad y''_{xx} = -\frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}.$$

Розглядаючи другу похідну на введених проміжках, встановлюємо, що функція опукла вгору при $t \in (0,1) \cup (2,3)$. При $t \in (-\infty,0)$, $t \in (1, 2)$, $t \in (3, +\infty)$ крива опукла вниз. При $t = 3$ маємо точку перегину $(-\frac{9}{8}, \frac{27}{16})$. Відзначимо, що $\lim\limits_{x\to+0} y'_x = 0$ при $t \to -0$ та $t \to +0$, крім того, $y'_x(-\frac{9}{8}) = 0$, тобто горизонтальні дотичні крива має в точках $(0,0)$ та $(-\frac{9}{8},\frac{27}{32})$. В точці $(-1,1)$ дотична до кривої вертикальна, тому що $\lim\limits_{x\to -1} y'_x = \lim\limits_{t\to 2} y'_x = \infty$. Оскільки $\lim\limits_{t\to 1-0}\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{t\to 1-0}(y(t)+\frac{1}{2}x(t)) = \frac{1}{8}$, і $\lim\limits_{t\to 1+0}\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{t\to 1+0}(y(t)+\frac{1}{2}x(t)) = \frac{1}{8}$, то крива має похилу асимптоту $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$ при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

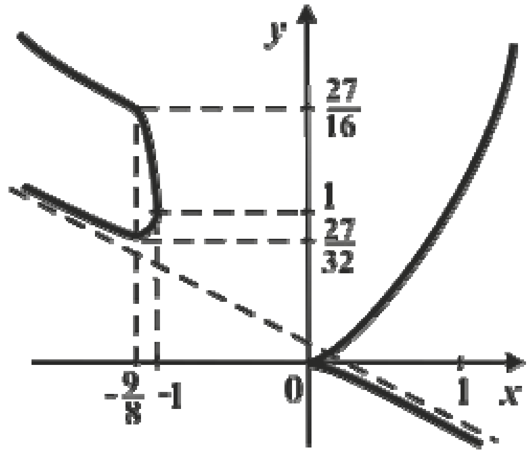


Рис. 17

Враховуючи всі відомості, будуємо графік (рис. 17). **2.264.** Будуємо графіки функцій $x(t)$ та $y(t)$ (рис.18, а, б).

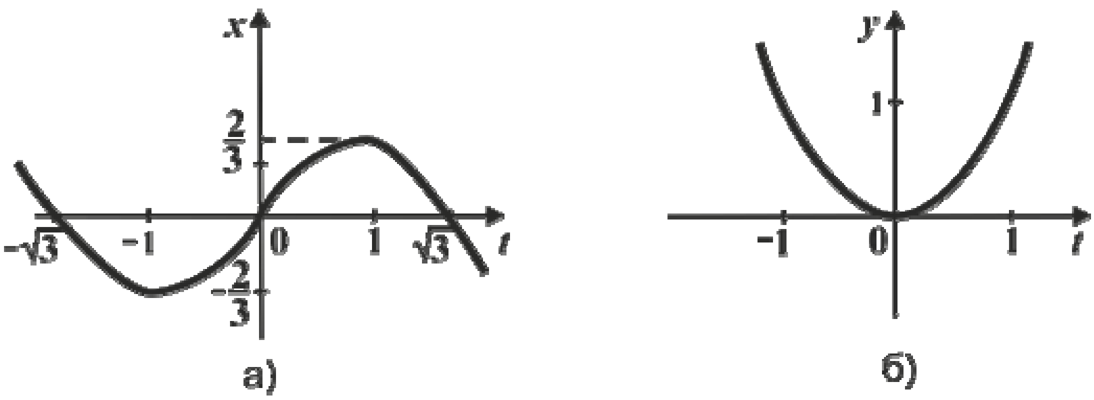


Рис. 18

Аналогічно попередньому прикладу заповнюємо таблицю значень функцій $x(t)$ та $y(t)$ при характерних значеннях t. Точка самоперетину $(0,3)$. За отриманими точками будуємо графік (рис. 19).

t	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\sqrt{3}$	0	3
-1	$-\frac{2}{3}$	1
0	0	0
1	$\frac{2}{3}$	1
$\sqrt{3}$	0	3
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

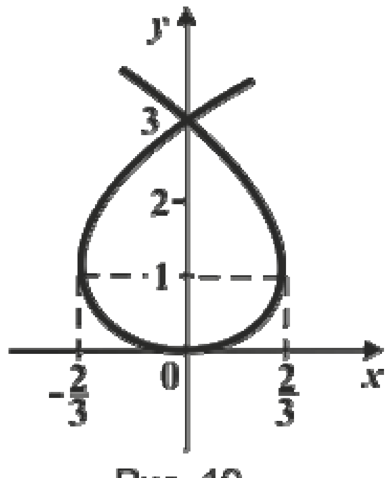


Рис. 19

2.265. Точка самоперетину $(\frac{1}{3},0)$.

Графік на рис. 20.

t	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	0
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{27}$
0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

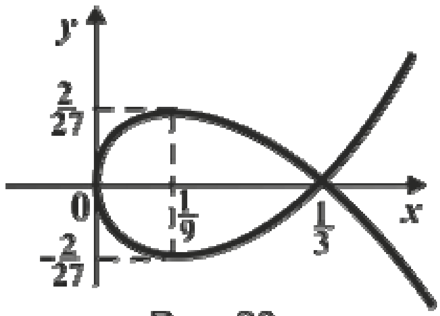


Рис. 20

2.266. Точка самоперетину $(4a,0)$. Графік на рис. 21.

t	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\sqrt{3}$	$4a$	0
-1	$2a$	$\frac{2}{3}a$
0	a	0
1	$2a$	$-\frac{2}{3}a$
$\sqrt{3}$	$4a$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

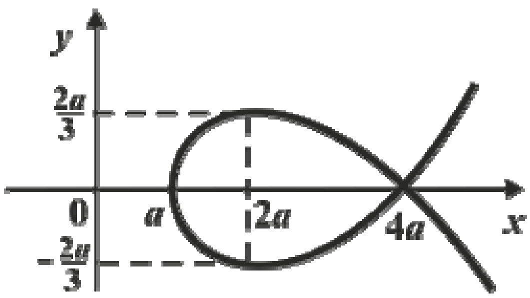


Рис. 21

2.267. Точка самоперетину $(3a,0)$. Графік на рис. 22.

t	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
-2	$3a$	0
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{3}$	$-\frac{16b}{3\sqrt{3}}$
0	$-a$	0
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{16b}{3\sqrt{3}}$
2	$3a$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

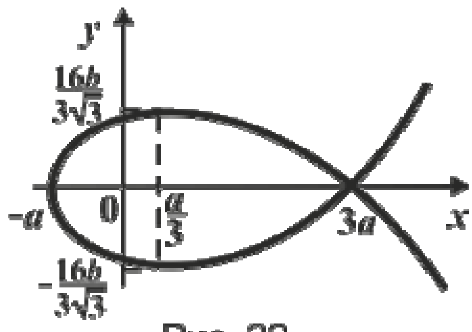


Рис. 22

Розділ 3

3.1. Множина будь-яких упорядкованих сукупностей дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається n-вимірним простором та позначається R^n. **3.2.** г. **3.3.** Множина точок $\{M\}$ n-вимірного простору R^n, для яких $\rho(M, M_0) < \delta$, називається n-вимірною кулею радіуса δ з центром в точці M_0 або δ-околом точки M_0 в просторі R^n та позначається $U^n(M_0, \delta)$. **3.4.** в. **3.5.** Відстань між непустими множинами E_1 та E_2 простору R^n визначається як найменша з відстаней між довільними точками цих множин. Діаметром $d(E)$ множини $E \subset R^n$ називається найбільша відстань між точками даної множини. **3.6.** $\sqrt{\frac{3}{10}}$, $M_1(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{19}{10}, -\frac{1}{10})$, $M_2(1, \frac{3}{10}, \frac{8}{5}, \frac{3}{10})$. *Розв'язання.* Відстань між двома довільними точками $M_1(1+2t, -2t, 2+2t, 2t)$ та $M_2(1, \tau, 1+2\tau, \tau)$ даних прямих буде: $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{4t^2 + (\tau+2t)^2 + (-1+2\tau-2t)^2 + (\tau-2t)^2}$. Перетворюючи вираз під коренем, дістанемо $\rho(M_1, M_2) =$ $= \sqrt{16t^2 - 8t\tau + 6\tau^2 + 4t - 4\tau + 1} = \sqrt{(4t - \tau + \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{5}\tau - \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 + \frac{3}{10}}$.

Відстань між множинами Γ_1 та Γ_2 шукаємо за формулою $d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \inf\limits_{\substack{M_1 \in \Gamma_1 \\ M_2 \in \Gamma_2}} \rho(M_1, M_2)$. Найменше значення $\rho(M_1, M_2)$ маємо при $\begin{cases} 4t - \tau + \frac{1}{2} = 0, \\ \sqrt{5}\,\tau - \frac{3}{2\sqrt{5}} = 0 \end{cases}$ і воно дорівнюватиме $\sqrt{\frac{3}{10}}$. Розв'язуючи отриману систему, знайдемо $\tau = \frac{3}{10}$, $t = -\frac{1}{20}$. Підставивши ці значення в рівняння прямих, отримаємо $M_1(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{19}{10}, -\frac{1}{10})$, $M_2(1, \frac{3}{10}, \frac{8}{5}, \frac{3}{10})$. **3.7.** $\sqrt{\frac{162}{55}}$, $M_1(\frac{89}{55}, \frac{131}{55}, -\frac{42}{55})$, $M_2(\frac{8}{55}, \frac{86}{55}, -\frac{24}{55})$. **3.8.** $\sqrt{\frac{n-2}{2n}}$, $M_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, $M_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$. *Вказівка*. Відстань між довільними точками

$M_1(t,t,t,\ldots,t)$ та $M_2(\tau,1-\tau,0,\cdots,0)$ даних прямих буде $\rho(M_1,M_2)=$
$=\sqrt{(t-\tau)^2+(t-1+\tau)^2+t^2+t^2+\ldots+t^2}=\sqrt{n(t-\frac{1}{n})^2+2(\tau-\frac{1}{2})^2+\frac{n-2}{2n}}$.

3.9. $\frac{7}{8}\sqrt{2}$. *Вказівка.* Відстань між множинами шукаємо за формулою $d(E_1,E_2)=\inf\limits_{\substack{M_1\in E_1\\ M_2\in E_2}}\rho(M_1,M_2)$, де $\rho(M_1,M_2)$ – відстань між довільними точками, що належать даним множинам $M_1(x,x^2)\in E_1$, $M_2(\xi,\xi-2)\in E_2$. Визначимо $\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x-\xi)^2+(x^2-\xi+2)^2}=$

$=\sqrt{(x^2-\xi+\frac{9}{8})^2+(\sqrt{\frac{11}{4}}x-\sqrt{\frac{4}{11}}\xi)^2+\frac{7}{11}(\xi-\frac{11}{8})^2+\frac{98}{64}}$ і $d(E_1,E_2)=\sqrt{\frac{98}{64}}$.

3.10. $\frac{4}{\sqrt{13}}$. **3.11.** $2\sqrt{\frac{2}{3}}$. *Розв'язання.* Запишемо дану множину точок простору $E\subset R^2$ за допомогою параметричних рівнянь $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t$, $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$. Візьмемо дві довільні точки цієї множини $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t)$ та $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\tau,\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\tau)$ і визначимо відстань між ними: $\rho(M_1,M_2)=\sqrt{\frac{(\cos\tau-\cos t)^2}{2}+\frac{2(\sin\tau-\sin t)^2}{3}}$. Перетворимо вираз під коренем: $\sqrt{2\sin^2\frac{\tau+t}{2}\sin^2\frac{\tau-t}{2}+\frac{8}{3}\sin^2\frac{\tau-t}{2}\cos^2\frac{t+\tau}{2}}=$
$=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\sin\frac{\tau-t}{2}\right|\sqrt{3\sin^2\frac{\tau+t}{2}+4\cos^2\frac{\tau+t}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\sin\frac{\tau-t}{2}\right|\sqrt{3+\cos^2\frac{\tau+t}{2}}$.
Шуканий діаметр множини точок знаходимо за формулою $d(E)=\sup\limits_{M_1,M_2\in E}\rho(M_1,M_2)$. Значення кореня буде найбільшим при

$$\cos\frac{\tau+t}{2}=1\Rightarrow\frac{\tau+t}{2}=0\Rightarrow t=-\tau\Rightarrow\rho(M_1,M_2)\le 2\sqrt{\frac{2}{3}}|\sin\tau|,\ |\sin\tau|\le 1$$

і $d(E)=\sup\limits_{M_1,M_2\in E}\rho(M_1,M_2)=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.12.** $+\infty$. **3.13.** $2\sqrt{2}$. **3.14.** 0.

3.15. Якщо кожній точці M з деякої множини $\{M\}$ точок евклідового простору E^n ставиться у відповідність за визначеним законом деяке число u, то кажуть, що на множині $\{M\}$ задана функція точки n-вимірного простору або функція n змінних та позначають $u = f(M)$ або $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При цьому $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають незалежними змінними або аргументами, множину $\{M\}$ називають областю визначення та позначають $D(f)$, множину $\{u\}$ називають областю значень і позначають $E(f)$. **3.16.** а. **3.17.** б. **3.18.** а, в. **3.19.** Точки півплощини $y \geq 0$, виключаючи внутрішні точки кола $x^2 + y^2 = 1$, точки півплощини $y \leq 0$, що лежать всередині кола $x^2 + y^2 = 1$, точки кола не входять до області визначення (рис. 23). *Розв'язання.* Функція визначена тільки в тих точках площини xOy, координати яких задовольняють нерівність $\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0$. Ця нерівність рівнозначна двом системам $\begin{cases} y \geq 0, \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ та $\begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$ Першу систему нерівностей задовольняють координати всіх точок, розташованих вище осі абсцис поза колом з центром у початку координат та радіусом $R = 1$. Другу систему задовольняють усі точки площини xOy, що лежать нижче осі Ox всередині кола з центром у початку координат та радіусом $R = 1$. Усі точки осі Ox належать області визначення, крім точок $(-1, 0)$ та $(1, 0)$. **3.20.** Кут, обмежений променями $y \leq x$, $x \geq 0$ та $y > -x$, $x \geq 0$. Точки променів входять до області визначення (рис. 24).

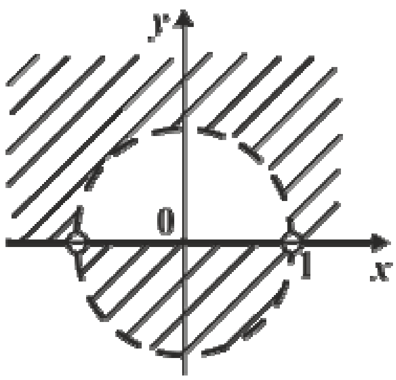


Рис. 23

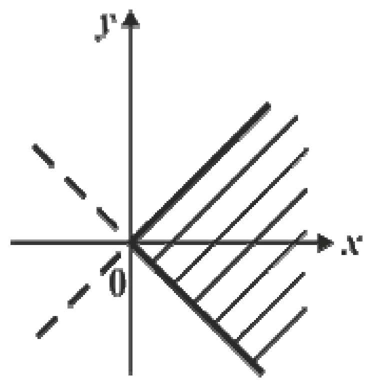


Рис. 24

3.21. Частина площини xOy обмежена параболою та частиною кола, що лежить між гілками параболи. Точки кола та вершина параболи $(0,0)$ не входять до області визначення. *Розв’язання:* $\begin{cases} \ln(1-x^2-y^2)\neq 0, \\ 1-x^2-y^2>0, \\ 4x-y^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2-y^2)\neq 1, \\ x^2+y^2<1, \\ y^2\leq 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2\neq 0, \\ x^2+y^2<1, \\ y^2\leq 4x. \end{cases}$ З першої нерівності випливає, що точка $(0,0)$ не входить до області визначення. Другу нерівність задовольняють точки, які знаходяться всередині кола з центром в точці $(0,0)$ та радіусом $R=1$. Третю нерівність задовольняють точки, що лежать між гілками параболи, та точки самої параболи. Область визначення зображено на рис. 25. **3.22.** Сукупність точок площини, розташованих між прямою $y=0$ та кривою $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, яка називається локоном Аньєзі (рис. 26). *Вказівка.* Якщо $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1]$, то $\sin z=2y(1+x^2)-1$ і $-1\leq 2y(1+x^2)-1\leq 1$, отже, $0\leq 2y(1+x^2)-1\leq 2$ і $0\leq y\leq \dfrac{1}{1+x^2}$. **3.23.** Уся площина xOy, за виключенням прямої $2x+y=0$, в точках якої знаменник функції обертається на нуль. **3.24.** Смуга обмежена прямими $x+y+1=0$ та $x+y-1=0$ (рис. 27).

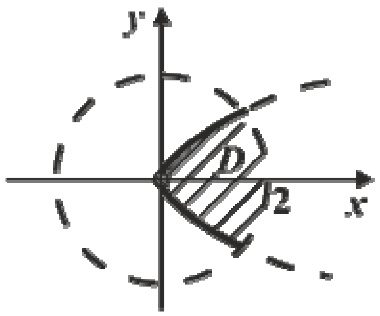


Рис. 25

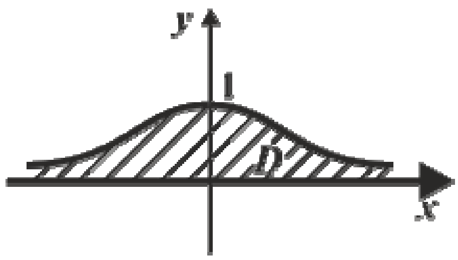


Рис. 26

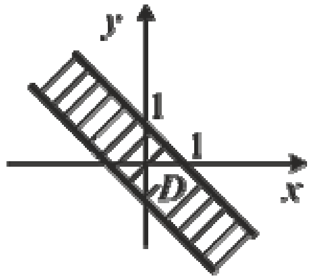


Рис. 27

3.25. Множина точок тривимірного простору, що лежить між сферичними поверхнями з центром в початку координат та радіусами r і R. Точки сфери радіуса r не входять до області визначення. *Вказівка.* Розв’язати систему нерівностей $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq R^2, \\ x^2+y^2+z^2>r^2. \end{cases}$ **3.26.** $[-4,\infty]$. *Вказівка:*

$u=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=(x-y)^2+2(x-y)-3=\{t=x-y\}=$

$=t^2+2t-3=t^2+2t+1-1-3=(t+1)^2-4$. **3.27.** $[0,\frac{3}{2}]$. **3.28.** $[\ln 3,+\infty]$.

3.29. Графіком функції двох змінних $u = f(x,y)$, $(x,y) \in E \subset R^2$ називається множина всіх точок $(x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in E$ простору R^3. Ця множина утворює в просторі R^3 певну поверхню, проекцією якої на площину xOy є множина $D(f)$. **3.30.** Побудова графіків функцій двох змінних пов'язана зі значними труднощами. Тому часто для зображення функцій двох змінних користуються методом перерізів, який дозволяє дослідити вид поверхні за допомогою вивчення ліній перетину поверхні з координатними площинами або площинами їм паралельними. Розглянемо перетин поверхні $z = x^2 + y^2$ площинами, паралельними площині xOy. Кожна така площина описується рівнянням $z = h$, де h – довільне дійсне число, а лінія, яка утворюється в перетині, визначається рівняннями $x^2 + y^2 = h$, $z = h$. При $h = 0$ лінія вироджується в точку $(0,0,0)$, при $h < 0$ рівняння ніякої лінії не визначають, а при $h > 0$ лініями перетину стають кола з центрами у точках $(0,0,h)$ радіуса $R = \sqrt{h}$. Якщо перерізати задану поверхню площинами $y = h_1$ або $x = h_2$, паралельними відповідно координатним площинам xOz та yOz, то в перерізі дістанемо параболи $x^2 = z - h_1^2$, $y = h_1$ та $y^2 = z - h_2^2$, $x = h_2$ з вершинами у точках $(0, h_1, h_1^2)$ та $(h_2, 0, h_2^2)$ (рис. 28). Така поверхня називається параболоїдом обертання навколо осі Oz.

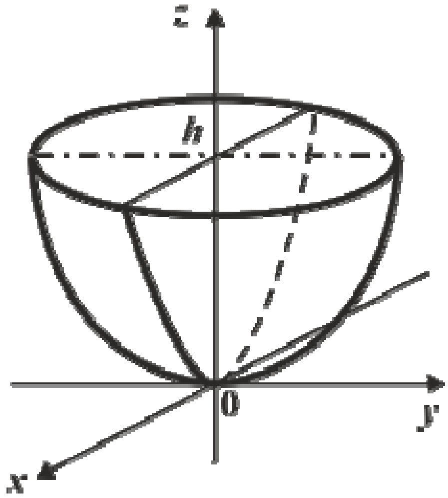


Рис. 28

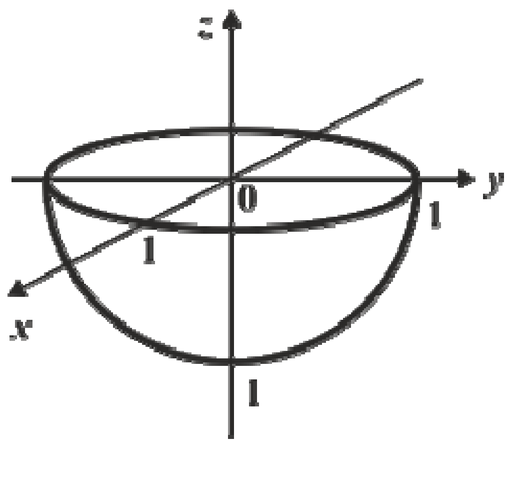


Рис. 29

3.31. В рівнянні даної функції позбавимося кореня, дістанемо $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Визначимо геометричний вигляд цієї поверхні другого порядку, використовуючи метод перерізів. Перетинаючи цю поверхню площиною $z = h$, отримаємо в перерізі лінії $x^2 + y^2 = 1 - h^2$, $z = h$. Якщо $|h| > 1$, ніякої лінії ці рівняння не визначають, якщо $|h| < 1$, маємо кола, найбільше з яких має радіус $R = 1$ при $h = 0$, а при $h = 1$ лінія перетворюється у точку. Аналогічні результати дістанемо, якщо розглянемо перерізи поверхні площинами $y = h_1$ та $x = h_2$. Усі лінії перерізу поверхні та вказаних площин – це кола. Отже, дана поверхня – сфера. Зважаючи на те, що задана функція набуває тільки від'ємних значень, графіком функції буде нижня частина сфери (рис. 29).

3.32. Розглянемо перетин поверхні площинами, паралельними координатній площині xOy. Рівняння таких площин: $z = h$, де h – будь-яке число. Лінія перетину визначається рівняннями $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases}$

або $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$ Досліджуємо отримані рівняння: якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 0$ і точок перетину не існує; якщо $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, то $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, лінія перетину вироджується у дві точки $(0, 0, c)$ та $(0, 0, -c)$, площини $z = c$, $z = -c$ дотикаються даної поверхні; якщо $|h| < c$, то рівняння лінії перетину можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}} + \dfrac{y^2}{b^2\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Отже, лінія перетину – еліпс (рис. 30) з півосями $a_1 = a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$ та $b_1 = b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$. Причому, чим менше $|h|$, тим більші півосі a_1 та b_1. При $h = 0$ вони досягають своїх найбільших значень $a_1 = a$, $b_1 = b$. Рівняння лінії перетину набувають вигляду $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ Аналогічні результати отримаємо, якщо розглянемо переріз поверхні площинами $x = h_1$ та $y = h_2$. Таким чином, розглянуті перетини дозволяють зробити висновок, що ця поверхня –

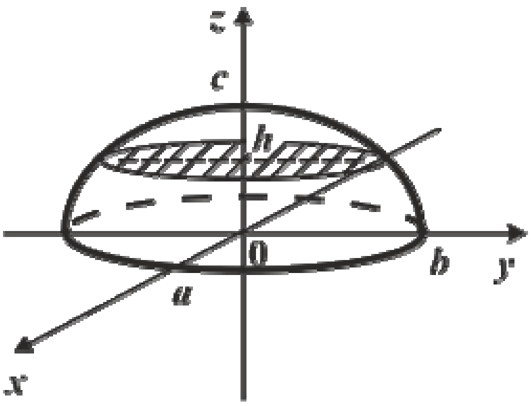


Рис. 30

тривісний еліпсоїд, коли a, b, c мають різні значення, еліпсоїд обертання, якщо будь-які дві з величин a, b, c рівні та сферою при $a=b=c$. Задана функція набуває тільки додатних значень, тому її графіком буде верхня частина вказаної поверхні (рис. 30).

3.33. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Перетинаємо дану поверхню площиною $z=h$ і отримуємо лінію перетину, рівняння якої мають вигляд $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$ Це еліпс з півосями $a_1=a\sqrt{1+\frac{h}{c^2}}$ та $b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, які досягають свого найменшого значення при $h=0$: $a_1=a$, $b_1=b$. При збільшені $|h|$ півосі будуть зростати. Якщо перетнути поверхню площинами $x=h_1$ або $y=h_2$, то в перетині отримаємо гіперболи. Знайдемо, наприклад, лінію перетину поверхні з площиною yOz, рівняння якої $x=0$. Ця лінія є гіперболою, яка описується рівняннями $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1,\\ x=0.\end{cases}$ Аналіз перетинів показує, що поверхня має форму нескінченної розширюваної трубки і називається однопорожнинним гіперболоїдом, але в нашому випадку $z\geq 0$, тому графіком функції буде частина поверхні, що лежить вище площини xOy (рис. 31).

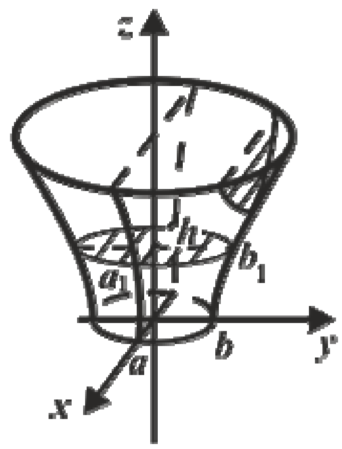


Рис. 31

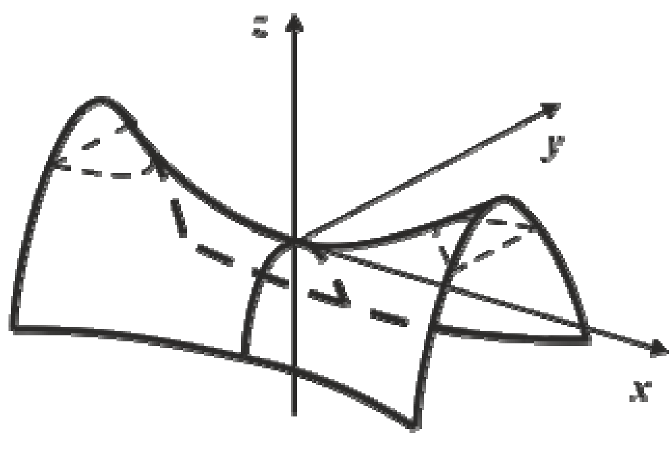


Рис. 32

3.34. Гіперболічний параболоїд (рис. 32). **3.35.** Еліптичний параболоїд з вершиною в точці $(0,0,3)$ (рис. 33). **3.36.** Еліптичний параболоїд з вершиною в точці $(0,0,-1)$ (рис. 34).

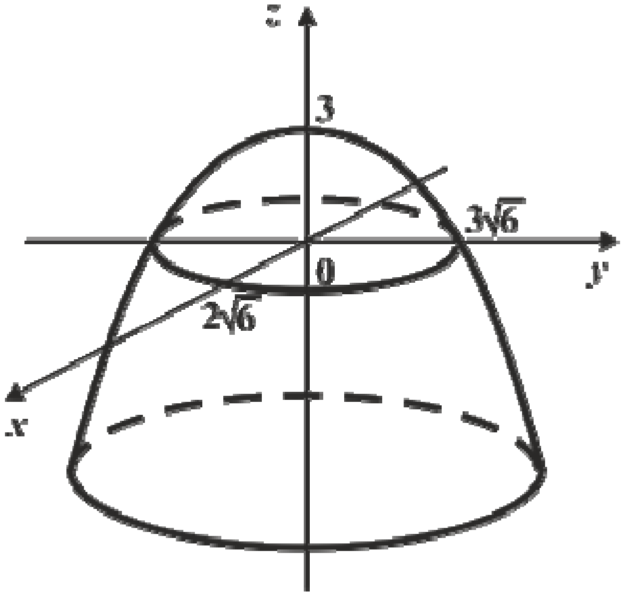


Рис. 33

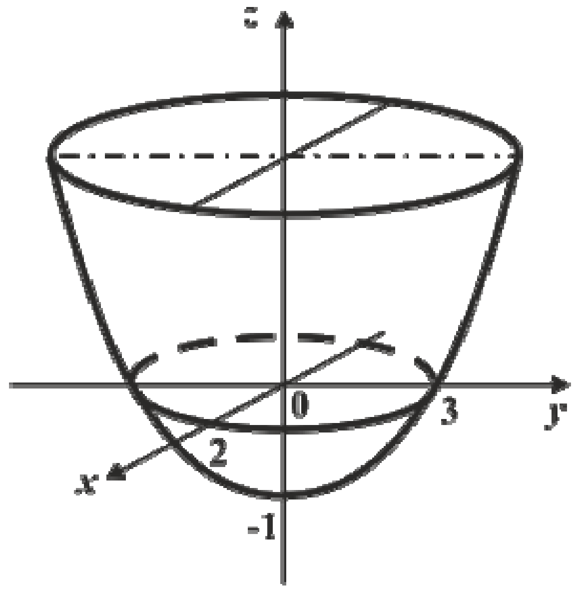


Рис. 34

3.37. Число A називається границею функції $u = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо функція визначена в деякому околі точки M_0, крім, можливо самої точки M_0, та для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок, які задовольняють нерівність $0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$. **3.38.** Ні. *Вказівка.* Якщо значення границі $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ змінюється в залежності від шляху, за яким точка M прямує до точки M_0, то це означає, що $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ не існує. **3.39.** Якщо функція $f(x, y)$ визначена у прямокутному проколотому околі $U = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta_1,\ |y - y_0| < \delta_2\}$ і для кожного фіксованого значення x, що задовольняє нерівність $0 < |x - x_0| < \delta_1$, існує границя функції $f(x, y)$ при $y \to y_0$ ($\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x - фікс.}} f(x, y) = \varphi(x)$) та існує границя функції $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b$), то вважають, що в точці $M_0(x_0, y_0)$ існує повторна границя функції $f(x, y)$ і пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = b$. **3.40.** б, в, г. **3.41.** Ні. **3.42.** Функції $f(M)$ та $g(M)$ повинні бути визначені на одній і тій самій множині D і мати в точці M_0 скінченні границі.

3.43. Функції $f(M)$ та $g(M)$ повинні бути визначені на одній і тій самій множині D і мати в точці M_0 скінченні границі та $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) \neq 0$.

3.44. Якщо функція $u = f(M)$ має границю в точці M_0, то в деякому околі цієї точки функція обмежена. **3.45.** Границя єдина. **3.46.** Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ $(\delta = \varepsilon)$ таке, що для всіх точок (x, y), що задовольняють нерівність $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ та відмінних від початку координат, виконується нерівність $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0\right| = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}|y| \leq |y| \leq$ $\leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$. **3.47.** Для впевненості в тому, що дана границя не існує, достатньо отримати різні значення границі, наближаючись до точки $(0,0)$ по різних лініях, які проходять через цю точку. Спочатку будемо наближатися до $(0,0)$ по прямій $y = kx$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \{y = kx\} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx}{x^2 + k^2} = 0$. Отже, границя функції в точці $(0,0)$ по кожній прямій, що проходить через цю точку дорівнює нулю. Але, наближаючись до точки $(0,0)$ по параболі $y = x^2$, дістанемо зовсім інший результат: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \{y = x^2\} =$ $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$. Таким чином, границя не існує. **3.48.** 1; -1; не існує. *Розв'язання:* $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x - y}{x + y} = \lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ x - фікс.}} \dfrac{x - y}{x + y} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$;

$\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - y}{x + y} = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y - фікс.}} \dfrac{x - y}{x + y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y}{y} = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x - y}{x + y} = \{y = kx) =$ $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - kx}{x + kx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - k}{1 + k} = \dfrac{1 - k}{1 + k}$, величина границі залежить від значення k. Отже, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x - y}{x + y}$ не існує. **3.49.** 1; -1; не існує. *Вказівка:*

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y}{x^3+y} = \{y = kx^3\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-kx^3}{x^3+kx^3} = \dfrac{1-k}{1+k}$. Результат залежить від k, тобто значення границі змінюється в залежності від лінії, вздовж якої точка $M(x,y)$ прямує до точки $M_0(0,0)$, а це означає, що дана границя не існує. **3.50.** 0; 0; не існує. **3.51.** 0; 0; 0. *Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x-фікс}} \dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-xy+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$; $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y-фікс}} \dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-xy+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$.

Щоб знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-xy+y^2}$, перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = \rho\dfrac{\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{1-\sin\varphi\cos\varphi} =$ $=\rho\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$, а умова $M(x,y)\to 0$ еквівалентна умові $\rho\to 0$. Перший множник $\rho\to 0$, а другий множник обмежений ($|f(\varphi)|\le 2$, $g(\varphi)\ge\dfrac{1}{2}>0$ при $0\le\varphi\le 2\pi$), звідси випливає, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = 0$. **3.52.** 1; 1; 1.

3.53. 0; не існує; 0. *Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x-фікс}} (x+y\sin\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$; границя $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y-фікс}} (x+y\sin\dfrac{1}{x})$ не існує, тому що множник $\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі при $x\to 0$ (в будь-якому малому околі точки $x=0$ функція $\sin\dfrac{1}{x}$ приймає всі значення від -1 до 1); $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y\sin\dfrac{1}{x}) = 0$. **3.54.** не існує; не існує; 0. **3.55.** 0; 1; не існує. **3.56.** 1; ∞; не існує. **3.57.** 0; 1; не існує. *Вказівка :* $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{\substack{y\to\infty\\ x-фік}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^3}\right) = 0$; $\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^3} =$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{\substack{x\to\infty \\ y-\hat{o}^3\hat{e}}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^3}\right)=1; \qquad \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^3}=\{y=kx\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^3x^3}=0,$$

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^3}= \ \{y=k\sqrt[3]{x^2}\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-k^2\sqrt[3]{x^4}}{x^2+k^3x^2}=\dfrac{1}{1+k^3}$. Таким чином, при русі довільної точки $M(x,y)$ по різних лініях, дістали різні значення границі даної функції при $x\to\infty$, $y\to\infty$. Звідси випливає, що ця границя не існує. **3.58.** 0; ∞; не існує. **3.59.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 0; не існує. **3.60.** 0; 0; 0. *Розв'язання.* Запишемо функцію у вигляді $f(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2)^3}{e^{x^2+y^2}}$, тоді

$\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{(x^2+y^2)^3}{e^{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{\substack{y\to\infty \\ x-фік}}\dfrac{(x^2+y^2)^3}{e^{x^2+y^2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}0=0$; аналогічно

$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+y^2)^3}{e^{x^2+y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y-фік}}\dfrac{(x^2+y^2)^3}{e^{x^2+y^2}}\right)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\dfrac{(x^2+y^2)^3}{e^{x^2+y^2}}=$

$=\left\{\begin{matrix} z=x^2+y^2 \\ z\to\infty \end{matrix}\right\}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^3}{e^z}=0$. **3.61**. г. **3.62.** Не існує. *Вказівка:.* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\{y=kx\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$. **3.63.** 6. *Розв'язання.* Помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений із знаменником, дістанемо: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y)(\sqrt{x^2+y+9}+3)}{x^2+y}=6$.

3.64. Не існує. **3.65.** -4. **3.66.** 1. *Розв'язання:* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}(x^2+$ $+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=\left\{\begin{matrix} z=x^2+y^2 \\ z\to\infty \end{matrix}\right\}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}}=1$. **3.67.** $\ln 2$. **3.68.** e.

3.69. a. **3.70.** Не існує. **3.71.** 2. **3.72.** e^3. **3.73.** 1. **3.74.** e. **3.75.** Ні. **3.76.** Функція $z=f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо

$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$. **3.77.** Елементарною функцією багатьох змінних називається функція, утворена з основних елементарних функцій (кожна з яких залежить від однієї змінної) за допомогою чотирьох арифметичних дій та композиції основних елементарних функцій. **3.78.** Будь-яка елементарна функція багатьох змінних неперервна на множині свого визначення. **3.79.** Неперервною на множині D. **3.80.** г. **3.81.** г. *Вказівка.* Функція може бути розривною там, де вона невизначена. Отже, для функції $z = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ це точка $(1;-1)$ (знаменник обертається на нуль при $x = 1$, $y = -1$). Для функції $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ це коло $x^2 + y^2 = 1$ (аргумент логарифму обертається на нуль $1 - x^2 - y^2 = 0$). Функція $z = \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2 - 1)}$ має дві лінії розриву, параболу $y^2 = x$ та пряму $y = -x$. Функція $z = \dfrac{2}{y - x}$ невизначена в точках прямої $y = x$, тому ця пряма і є лінією розриву. **3.82.** Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в обмеженій, замкненій області, то вона в цій області обмежена та має точки, в яких набуває свого найменшого m і найбільшого M значень в цій області. **3.83.** Має розрив в точці $(0;0)$. *Розв'язання.* Знайдемо границю даної функції, коли змінна точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(0;0)$. Будемо вважати, що це відбувається вздовж прямої $y = kx$. Тоді $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - k^3 x^3}{x^3 + k^3 x^3} = \dfrac{1 - k^3}{1 + k^3}$. Результат має різні значення залежно від вибраної прямої, тобто границя залежить від способу прямування точки $M(x, y)$ до точки $M_0(0;0)$, а це означає, що функція в точці $(0;0)$ границі не має. Отже, задана функція має розрив у цій точці. **3.84.** Неперервна на всій площині xOy. **3.85.** Точка розриву $(0;0)$. **3.86.** Лінія розриву □ парабола $x^2 = y$. **3.87.** $(0;0)$ □ точка усувного розриву. **3.88.** $(1;2)$ □ точка розриву. **3.89.** $(0;0)$ □ точка усувного розриву. **3.90.** Точки розриву □ це всі точки двох еліпсів $x^2 + 4y^2 = 1$, $\dfrac{x^2}{2} + 2y^2 = 1$ та точка $(0;0)$; в точках еліпса $x^2 + 4y^2 = 1$ розрив усувний. **3.91.** *Доведення.* Скористаємося означенням рівномірної неперервності функції. Нехай маємо довільне

$\varepsilon > 0$ та припустимо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тоді для будь-яких точок $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$, що задовольняють нерівність $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$, виконуватимуться нерівності $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$ і, таким чином, $|z(M_1) - z(M_2)| = |x_1 + 2y_1 - x_2 - 2y_2| \leq$ $\leq |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| < \delta + 2\delta = \varepsilon$. За означенням маємо, що функція $z = x + 2y + 3$ рівномірно неперервна на всій площині. **3.92.** Обмежена. *Вказівка.* Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді $z = \rho^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = \rho^2(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi)$. За умовою задачі для кожної точки $M_1(x_1, y_1) \in \Omega$ виконується нерівність $0 < \rho^2 \leq 1$, $0 < 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2\varphi \leq 1$, маємо $0 < z \leq 1$, тобто функція $z = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ обмежена на множині Ω. **3.93.** Обмежена. **3.94.** Необмежена. **3.95.** Обмежена. **3.96.** Необмежена. **3.97.** г. **3.98.** б. **3.99.** 1-Б, 2-А, 3-Г, 4-В. **3.100.** в. **3.101.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2^x \ln 2 \ln y$. *Розв'язання*. Зафіксуємо аргумент y та надамо аргументу x приріст Δx, тоді $z(x + \Delta x, y) = (x + \Delta x)y^2$, $\Delta_x z = (x + \Delta x)y^2 - xy^2 = y^2\Delta x$, $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{y^2\Delta x}{\Delta x} = y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} y^2 = y^2$. Зафіксуємо аргумент x та надамо аргументу y приріст Δy, $z(x, y + \Delta y) = x(y + \Delta y)^2$, $\Delta_y z = x(y + \Delta y)^2 - xy^2 = 2xy\Delta y + x(\Delta y)^2$, $\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \dfrac{2xy\Delta y + x(\Delta y)^2}{\Delta y} = 2xy + x\Delta y$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0}(2xy + x\Delta y) = 2xy$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy$. **3.102.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2^x \ln 2 \ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2^x}{y}$. **3.103.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 15x^4y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x^5y^2$. *Розв'язання*. Щоб знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, треба взяти звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ по змінній x, вважаючи y сталою величиною: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const} = (x^2)'_x + (y^3)'_x + (3x^5y^3)'_x = 2x + 15x^4y^3$;

при визначенні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ беремо звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ по змінній y та вважаємо x сталою величиною: $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const} = (x^2)'_y + (y^3)'_y + (3x^5 y^3)'_y = 3y^2 + 9x^5 y^2$. **3.104.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} + 8y$. **3.105.** $\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(3x + y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(3x + y) + 3x\cos(3x + y)$.

3.106. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(\sqrt[3]{x} + 2y) - (x^2 + 4)\frac{\sin(\sqrt[3]{x} + 2y)}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2(x^2 + 4)\sin(\sqrt[3]{x} + 2y)$. **3.107.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y + x$.

3.108. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3.109. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz + \frac{1}{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz - \frac{x}{y^2 z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy - \frac{x}{yz^2}$. **3.110.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x - z}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = z - \frac{2x(x - z)}{y^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y - \frac{x}{y^2}$. **3.111.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(xy + yz)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x + z)\cos(xy + yz)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y\cos(xy + yz)$. **3.112.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -2xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \cos z$. **3.113.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sin x}{\cos y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$. **3.114.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

3.115. $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(\cos y + (x + 1)\sin y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-\sin y + x\cos y)$. **3.116.** $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\sin \pi xy}(y + \pi xy^2 \cos \pi xy)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\sin \pi xy}(x + \pi x^2 y \cos \pi xy)$. **3.117.** $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}}(\frac{tg(x + y)}{y} + \frac{1}{\cos^2(x + y)})$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}(-\frac{x\,tg(x + y)}{y^2} + \frac{1}{\cos^2(x + y)})$.

3.118. $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2}(2x\,ctg(1 + \frac{y}{x}) + \frac{y}{x^2 \sin^2(1 + \frac{y}{x})})$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x^2}\frac{1}{x\sin^2(1 + \frac{y}{x})}$.

3.119. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$. **3.120.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$. **3.121.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y(\ln xy+1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x(\ln xy+1)$. **3.122.** $\frac{\partial u}{\partial x}=$ $=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$ **3.123.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-(\frac{y}{x})^z\frac{z}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(\frac{y}{x})^z\frac{z}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(\frac{y}{x})^z\ln\frac{y}{x}$. **3.124.** $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$.

3.125. $\frac{\partial u}{\partial x}=(1+\ \sin^2 x)^{\ln y-1}\sin 2x\ln y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y}(1+\sin^2 x)^{\ln y}\ln(1+\sin^2 x)$.

3.126. $\frac{\partial u}{\partial x}=x^{y-1}y^{z+1}z^x+x^y y^z z^x\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=z^x x^y y^z\ln x+x^y y^{z-1}z^{x+1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=$ $=z^x x^y y^z\ln y+x^{y+1}y^z z^{x-1}$. **3.127.** а. **3.128**. г. **3.129.** а. **3.130.** $df(0;1)=$ $=2dx+4dy$. *Розв'язання*. Фіксуємо змінну y, знаходимо $\frac{\partial f}{\partial x}=1+\frac{1}{x+y^2}$.

Фіксуємо змінну x, знаходимо $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+\frac{2y}{x+y^2}$. В точці $(0;1)$ обидві частинні похідні неперервні. Отже, функція $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$ диференційовна в точці $(0;1)$, її диференціал можна обчислити за формулою $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$. Враховуючи, що $\frac{\partial f(0;1)}{\partial x}=2$ та $\frac{\partial f(0;1)}{\partial y}=4$, маємо $df(0;1)=2dx+4dy$. **3.131.** 1-Б, 2-В, 3-А.

3.132. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2(x-y)+2xy^2}{(x-y)^2+x^2y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2(x-y)+2x^2y}{(x-y)^2+x^2y^2}$. *Вказівка*. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2v}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial v}{\partial x}=y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=x$, то за формулою $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$ дістанемо результат. **3.133.** $\frac{dz}{dt}=$ $=2e^{\frac{1}{2}\sin 4t}\cos 4t$. *Вказівка*. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$, $\frac{dx}{dt}=2\cos 2t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$, то за формулою $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ дістанемо результат. **3.134.** $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x+e^{x\sqrt{x}}(3x\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$. **3.135.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln y\ln x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{y^z}y^{z-1}\ln x$. **3.136.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+2\dfrac{\ln(x+y)}{x+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos y+2\dfrac{\ln(x+y)}{x+y}$. **3.137.** $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}$. **3.138.** *Розв'язання*:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\ln(x^2-y^2)-\dfrac{2y^2}{x^2-y^2}$. Підставимо знайдені вирази в ліву частину рівняння: $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2xy}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{y}(\ \ln(x^2-y^2)-\dfrac{2y^2}{x^2-y^2})=\dfrac{z}{y^2}\ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ y\ln(x^2-y^2)=z\ \Rightarrow\ z\equiv z$, що і треба було довести. **3.142.** в. **3.143.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x}{6x-y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1-4y-z}{6x-y}$. *Розв'язання*. Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x,y,z)$ та знайдемо частинні похідні $F'_x=2x$, $F'_y=-4y-z+1$, $F'_z=6z-y$. За формулами $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$ дістанемо результат. **3.144.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{4x^3+4yz-2}{4xy-2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4xz-12y^3}{4xy-2z}$. **3.145**. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{y(1+x^2z^2)-x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z(1+x^2z^2)}{y(1+x^2z^2)-x}$. **3.146.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(x+z)e^z-z}{(x+z)(\ln(x+z)-xye^z)+z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^z(x+z)}{(x+z)(\ln(x+z)-xye^z)+z}$.

3.147. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$. *Розв'язання*. Функція неявно задана, тому похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ можна знайти за формулою $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_u}$, де $F(x,y,u)$ □ ліва частина рівняння $u^3+3xyu+1=0$, а можна взяти похідну по x обох частин даного рівняння, вважаючи, що u є функцією від x,y. Потім отриманий вираз розв'язати відносно похідної: $3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3yu+3xy\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$,

$(3u^2+3xy)\dfrac{\partial u}{\partial x}=-3yu$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{3yu}{3u^2+3xy}=-\dfrac{yu}{u^2+xy}$. Підставляючи $x_0=0$ та $y_0=1$ в дане рівняння, знаходимо аплікату заданої точки $u_0=-1$. Отже, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{1\cdot(-1)}{(-1)^2+0\cdot 1}=1$. Аналогічно $3u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+3xu+$ $+3xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{3xu}{3u^2+3xy}=-\dfrac{xu}{u^2+xy}$, $\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{0\cdot(-1)}{(-1)^2+0\cdot 1}=0$.

3.148. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\dfrac{\ln 2}{2}$. **3.149.** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}}=-\dfrac{1}{1+u_0}$, де u_0 — корінь рівняння $u+\ln u=0$. **3.150.** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\cos 1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$.

3.151. $17x+11y+5z-60=0$, $\quad \dfrac{x-3}{17}=\dfrac{y-4}{11}=\dfrac{z+7}{5}$. *Розв'язання*. Обчислимо частинні похідні функції $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в точці $N_0(3;4;-7)$: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=3\\y=4}}=\left.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\right)\right|_{\substack{x=3\\y=4}}=-\dfrac{17}{5}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=3\\y=4}}=-\dfrac{11}{5}$. Рівняння дотичної площини має вигляд: $z-z_0=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)$;

$z+7=-\dfrac{17}{5}(x-3)-\dfrac{11}{5}(y-4)$; $17x+11y+5z-60=0$. Рівняння нормалі $\dfrac{x-x_o}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}}=\dfrac{z-z_0}{-1}$, тоді $\dfrac{x-3}{17}=\dfrac{y-4}{11}=\dfrac{z+7}{5}$. **3.152.** $y-z=0$, $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$. **3.153.** $x+2y-z-1=0$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **3.154.** $3x-3y-$ $-z=0$, $\quad \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{-1}$. **3.155.** $x+y-z+1=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

3.156. $3x-2y-2z+1=0$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-2}$. *Розв'язання*. Обчислимо частинні похідні функції $F(x,y,z)=3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1$ і знайдемо їх значення в точці $N_0(1;1;1)$: $F'_x=12x^3+4z^2y-4z^3$, $F'_y=-12y^2z+4z^2x$, $F'_z=-4y^3+8xyz-12z^2x$, $F'_x(1;1;1)=12$, $F'_y(1;1;1)=-8$, $F'_z(1;1;1)=-8$. Рівняння дотичної площини має вигляд: $F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$; $12(x-1)-8(y-1)-8(z-1)=0 \Rightarrow 3x-2y-2z+1=0$. Рівняння нормалі $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}$ **3.157.** $12x+4y-3z-21=0$, $\frac{x-2}{12}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}$. **3.158.** $x+z+3=0$, $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+3}{1}$. **3.159.** $2x+2y-3z+1=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$. **3.160.** $x+y-4z=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$.

3.161. Повним диференціалом першого порядку функції $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ у точці M називається головна частина її повного приросту, лінійна відносно приростів усіх аргументів: $\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots\Delta x_n$. **3.162.** в. **3.163.** б, в. **3.164.** в. **3.165.** а. **3.166.** $\Delta x+\Delta y$. *Розв'язання*. Складемо повний приріст функції в точці $M_0(1;1)$. Маємо $\Delta z=(1+\Delta x)(1+\Delta y)-1\cdot 1$. Спростимо останній вираз: $\Delta z=1+\Delta x+\Delta y+$ $+\Delta x\Delta y-1=\Delta x+\Delta y+\Delta x\Delta y$. Головною частиною приросту функції $z=xy$ в точці $M_0(1;1)$ лінійною відносно Δx та Δy буде $\Delta x+\Delta y$. **3.167.** $-12\Delta x+4\Delta y$. **3.168.** $\Delta z=4{,}928$; $dz=4{,}4$. *Розв'язання*: $\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=2xy\Delta y+xy^2+x(\Delta y)^2+y^2\Delta x+2y\Delta x\Delta y+$ $+(\Delta y)^2\Delta x-xy^2=2xy\Delta y+y^2\Delta x+x(\Delta y)^2+2y\Delta x\Delta y+(\Delta y)^2\Delta x$; $\Delta z\big|_{M_0}=$ $=2\cdot 3\cdot 2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}3^2+2\cdot 2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3+(0{,}3)^2\cdot 0{,}2=4{,}928$; $dz=$ $y^2dx+2xydy=y^2\Delta x+2xy\Delta y$; $dz\big|_{M_0}=4\cdot 0{,}2+12\cdot 0{,}3=4{,}4$. **3.169.** $\Delta z=$ $=0{,}41$ $dz=0{,}4$. **3.170.** $d_xz=\frac{2x}{y}dx$, $d_yz=-\frac{x^2}{y^2}dy$. **3.171.** $d_xz=\sin 2ydx$, $d_yz=2x\cos 2ydy$. **3.172.** $d_xu=yzdx$, $d_yu=xzdy$, $d_zu=yxdz$. **3.173.** $d_xu=yzx^{yz-1}dx$, $d_xu=yzx^{yz-1}dx\; d_yu=x^{yz}z\ln xdy$, $d_zu=$ $=x^{yz}y\ln xdz$. **3.174.** $dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy$. *Розв'язання*. Оскільки функція z залежить від двох аргументів, то знайдемо дві частинні похідні

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$. Скориставшись формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, дістанемо результат $dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$. **3.175.** $dz = -\frac{1}{x}dx - \frac{2}{y}dy$. **3.176.** $dz = 5^{\sqrt{x}-2y}\ln 5(\frac{dx}{2\sqrt{x}} - 2dy)$. **3.177.** $dz = -\frac{1}{y}\sin\frac{2x}{y}(dx - \frac{x}{y}dy)$. **3.178.** $du = e^{x^3+y^2}(3zx^2dx + 2yzdy + dz)$ **3.179.** $du = e^{xyz}(yzdx + xzdy + + xydz)$. **3.180.** $du = -\frac{xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{yz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy + \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.181. $du = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$. **3.182.** $du = x^{\frac{y}{z}}(dt + \frac{ty}{xz}dx + + \frac{t}{z}\ln xdy - \frac{ty}{z^2}\ln xdz)$. **3.183.** $df = (8x^3 - 6xy^2)dx - 6x^2ydy$. **3.184.** $df = = 4(y^3 + 2x^2y + 3)^3(4xydx + (2x^2 + 3y^2)dy)$. **3.185.** $df = \frac{x^2 - y^2}{xy}(\frac{dx}{x} - - \frac{dy}{y})$. **3.186.** $df = (1+xy)^{y-1}(y^2dx + (xy + (1+xy)\ln(1+xy))dy)$. **3.187.** $du\big|_{N_0} = -6dx + 3dy + 2dz$. *Розв'язання*. Знаходимо частинні похідні першого порядку та обчислюємо їх значення в точці N_0: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{yz}{x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{N_0} = -6$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{N_0} = 3$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{N_0} = 2$. Остаточно маємо $du\big|_{N_0} = -6dx + 3dy + 2dz$. **3.188.** $du\big|_{N_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{3}dx + dy + dz)$. **3.189.** $du\big|_{N_0} = -10dx - \ -4dy + 8dz$. **3.190.** $du\big|_{N_0} = \frac{3}{4}dx - dy - \frac{5}{2}dz$. **3.191.** $dz = -\frac{c^2}{z}(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy)$. *Вказівка*: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. **3.192.** $dz = \frac{1-yz}{1-xy}dx + \frac{1-xz}{1-xy}dy$. **3.193.** $dz =$

$= \dfrac{z}{y(x+z)}(ydx + zdy)$. **3.194.** $du = \dfrac{u^2(dx+dy) - z^2dz}{u^2 - 2u(x+y)}$. **3.195.** Діагональ зменшиться на $0{,}28\ см$, а площа зменшиться на $140\ см^2$. *Розв'язання*. Діагональ прямокутника можна обчислити за формулою $c = \sqrt{x^2 + y^2}$. Знайдемо приріст цієї функції за формулою в $\Delta c \approx dc = \dfrac{\partial c}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial c}{\partial y}\Delta y$. Враховуючи, що $\dfrac{\partial c}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial c}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x = 6$, $y = 8$, $\Delta x = 0{,}002$, $\Delta y = -0{,}005$ дістанемо $\Delta c = \dfrac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}0{,}002 - \dfrac{8 \cdot 0{,}005}{10} =$ $= -0{,}28\,см$. Аналогічно знаходимо змінення площі, розглядаючи функцію $S = xy$. Обчислюємо похідні $\dfrac{\partial S}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial S}{\partial y} = x$, тоді $\Delta S = 8 \cdot 0{,}002 -$ $- 6 \cdot 0{,}005 = -0{,}014\,м^2 = -140\,см^2$. **3.196.** $617{,}5\ см^3$. *Вказівка.* Формула для обчислення об'єму усіченого конуса має вигляд $V = \dfrac{1}{3}\pi\, h(R^2 + Rr + r^2)$. **3.197.** $\left|\Delta^* V\right| \approx 10{,}2\ м^3$, $\left|\delta^* V\right| \approx 13\%$. *Розв'язання*. Максимальна абсолютна похибка $\left|\Delta^* V\right|$ функції $V(R,H) = \pi R^2 H$ обчислюється за формулою $\left|\Delta^* V\right| = \left|\dfrac{\partial V}{\partial R}\right|\left|\Delta^* R\right| + \left|\dfrac{\partial V}{\partial H}\right|\left|\Delta^* H\right|$, де $\left|\Delta^* R\right|$ та $\left|\Delta^* H\right|$ максимальна абсолютна похибка змінних R і H відповідно. Враховуючи, що $\dfrac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH$; $\dfrac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2$; $R = 2{,}5$; $H = 4{,}0$; $\left|\Delta^* R\right| = 0{,}1$; $\left|\Delta^* H\right| = 0{,}2$; $\pi = 3{,}1416$, маємо $\left|\Delta^* V\right| = 3{,}1416(2 \cdot 4 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}1 + 2{,}5^2 \cdot 0{,}2) \approx$ $\approx 10{,}2$. Щоб оцінити максимальну відносну похибку $\left|\delta^* V\right|$ функції $V(R,H)$, скористаємося формулою $\left|\delta^* V\right| = \left|\Delta^* \ln\left|V\right|\right| \cdot 100\%$ (максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці). Таким чином, при $\ln V = \ln\pi + 2\ln R + \ln H$ маємо $\left|\delta^* V\right| =$ $= (\dfrac{2}{R}\left|\Delta^* R\right| + \dfrac{1}{H}\left|\Delta^* H\right|) \cdot 100\% = (\dfrac{2 \cdot 0{,}1}{2{,}5} + \dfrac{0{,}2}{4}) \cdot 100\% = 13\%$. **3.198.** $(4730 \pm$

$\pm 100)\,см^2$. *Вказівка.* Об'єм конуса можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{3}\pi R\sqrt{l^2 - R^2}$. **3.199.** $\Delta = 7{,}6\ м$. *Вказівка.* Третю сторону можна обчислити за формулою $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}$ та вважати $1^0 = \frac{\pi}{180^0} \approx 0{,}017453$. **3.200.** $1{,}06$. *Розв'язання.* Розглянемо функцію $z = x^y$, тоді $1{,}02^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$, де $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Скористаємося формулою $z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + \Delta z$, де $z(1;3) = 1$, $\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, а $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=3}} = 3$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=3}} = 0$, маємо $1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 3\cdot 0{,}02 = 1{,}06$. **3.201.** $2{,}95$. **3.202.** $0{,}502$. **3.203.** $108{,}972$. **3.204.** 9. **3.205.** б, в, г. **3.206.** За теоремою Шварца $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, якщо ці похідні неперервні в точці $M(x, y)$. **3.207.** а. **3.208.** а, в. **3.209.** $d^3u(x, y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + {}$ ${} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3$. **3.210.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 - 18xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4xy - 9x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$. *Розв'язання:* $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 - 9x^2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 3x^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial(2x^2y - 3x^3)}{\partial x} = 4xy - 9x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial(2xy^2 - 9x^2y)}{\partial y} = 4xy - 9x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 - 18xy$. **3.211.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 - 30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20y^3 - 30x^3y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -45x^2y^2$. **3.212.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6y^2}{x^4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{4y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2}$. **3.213.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **3.214.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin(x + y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$

$= \cos(x+y) - x\sin(x+y)$. **3.215.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin 2y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\cos 2y$. **3.216.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. **3.217.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{8y^3-2x^2}{(x+4y^3)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-24xy^2}{(x+4y^3)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{24x^2y-48y^4}{(x+4y^3)^2}$. **3.218.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$, $(xy \neq 1)$. **3.219.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ $= \dfrac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $(y \neq 0)$. **3.220.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\,e^{-xy}(xy-2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xe^{-xy}(xy-2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3\,e^{-xy}$. **3.221.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x(3+$ $+2x^2)e^{x^2+y^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3y^2(1+2x^2)e^{x^2+y^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3xy(2+3y^3)e^{x^2+y^3}$.

3.222. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} =$ $=1$. **3.223.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = zy^2 2^{xy}\ln^2 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zx^2 2^{xy}\ln^2 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} =$ $= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z2^{xy}(1+xy\ln 2)\ln 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y2^{xy}\ln 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} =$ $= x2^{xy}\ln 2$. **3.224.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =$ $= -\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3.225.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$= \frac{y}{zx^2}(\frac{y}{z} - 1)u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu \ln x}{z^4}(2z + y \ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u \ln^2 x}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$
$= \frac{(z + y \ln x)u}{xz^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{yu(z + y \ln x)}{xz^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{u(z + y \ln x) \ln x}{z^3}$.

3.226. *Розв'язання:* $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$. Підставимо значення других частинних похідних в дане рівняння: $x^2 y^2 e^{xy} - y^2 x^2 e^{xy} = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0$. Отримана тотожність вказує на те, що дана функція задовольняє вказане рівняння. **3.236.** $d^2 z = 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$. *Розв'язання.* Оскільки функція u залежить від трьох аргументів, то частинних похідних першого порядку буде три: $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$. Знайдемо похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x$. За формулою $d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz$ дістанемо результат. **3.237.** $(\frac{y^2 \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x^2 \sin\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2})dx^2 - \frac{xy}{x^2 + y^2}(\frac{\cos\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin\sqrt{x^2 + y^2})dxdy + (\frac{x^2 \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^2 \sin\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2})dy^2$. **3.238.** $d^2 u = e^z((x + y)dz^2 + 2dxdz + 2dydz)$.
3.239. $d^2 u = e^{ax + by + cz}(a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + c^2 dz^2 + 2abdxdy + 2acdxdz + 2bcdydz$. **3.240.** *Розв'язання.* Знаходимо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 4y^2 + y + 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 8xy + 3y^2 + x + 2$. Знаходимо частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 8y + 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x + 6y$

і третього порядку: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=8$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=6$.

3.241. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=-z^3\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=-y^3\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=-z\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=-z^2\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=-\sin(x+yz)-$ $-zy\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}=-y\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=-y^2\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z}=-2z\sin(x+yz)-z^2y\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial y}=-2y\sin(x+yz)-$ $-zy^2\cos(x+yz)$. **3.242.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6+12y^4$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=24y+48x^3y$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=48xy^3$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=72x^2y^2$. **3.243.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}=0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=-\frac{24x}{y^5z^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=6xy^2-\frac{24x}{y^2z^5}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=2z^3+\frac{6}{y^4z^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=6y^2z+$ $+\frac{6}{y^2z^4}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}=12xyz-\frac{12x}{y^3z^4}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=6yz^2+\frac{4}{y^3z^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z}=6xz^2-$ $-\frac{12x}{y^4z^3}$. **3.244.** $d^2z(0;1)=2(dx-dy)dx$. *Розв'язання:* $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}$, $d^2z=2dx^2-\frac{2}{y^2}dxdy+$ $+\frac{2x}{y^3}dy^2$. Замість x та y підставимо відповідно 0 та 1 і дістанемо остаточний результат. **3.245.** $d^3u=6(dx^3-3dx^2dy+3dxdy^2+dy^3)$.

3.246. $d^3u=6(dx^3+dy^3+dz^3-3dxdydz)$. *Розв'язання:* $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6z$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=6$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=6$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-3z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=-3y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-3x$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=-3$,

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = 0$. За формулою для третього диференціала функції трьох змінних $d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 + $ $+ \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} dz^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} dx^2 dz + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} dy^2 dz +$ $+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} dx dz^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} dy dz^2 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz$ маємо результат. **3.247.** $d^3 z = e^y(-\cos x dx^3 - 3\sin x dx^2 dy + 3\cos x dx dy^2 +$ $+\sin x dy^3)$. **3.248.** $d^3 z = 12dx^3 + 2dx^2 dy + 2dx dy^2 + 12dy^3$. **3.249.** $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} =$ $= 24$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 6$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 6$, $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 24$. **3.250.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} =$ $= (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}$. **3.251.** Якщо функція $u = f(M)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ зі своїм околом належать цій області і для будь-якої точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з цього околу виконується нерівність $f(M) > f(M_0)$, то точка M_0 називається точкою локального мінімуму. **3.252.** Якщо функція $u = f(M)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ зі своїм околом належать цій області і для будь-якої точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$, то число $f(M_0)$ називається локальним максимумом. **3.253.** б. **3.254.** Якщо функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x_i дорівнюють нулю або не існують. **3.255.** Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називають критичними точками функції. **3.256.** Ні. **3.257.** Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має всі неперервні другі похідні в околі своєї критичної точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Тоді, якщо у цій точці другий диференціал $d^2 u$ − знаковизначена квадратична форма від диференціалів dx_1, dx_2, …, dx_n незалежних змінних, то функція матиме у точці M_0 локальний екстремум. **3.258.** Якщо в критичній точці M_0 функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ другий диференціал $d^2 u$ − знаковизначена квадратична форма від диференціалів dx_1, dx_2, …, dx_n незалежних змінних, то у точці M_0 буде максимум при $d^2u<0$ та мінімум при $d^2u>0$. **3.259.** Екстремуму немає. **3.260.** Нехай функція $z=f(x,y)$ в околі критичної точки $M_0(x_0,y_0)$ має неперервні похідні другого порядку $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$; $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$; $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}$. Тоді при $AC-B^2>0$, $A>0$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ функція набуває мінімуму, а при $AC-B^2>0$, $A<0$ – максимуму. **3.261.** $z_{\min}(1;0)=-1$. *Розв'язання.* Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x-1$. Критичні точки знаходимо із системи: $\begin{cases}2x+y-2=0,\\ 2y+x-1=0,\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=1$, $y=0$. Отже, $M(1;0)$ – критична точка. Знайдемо значення других похідних функції z у точці $M(1;0)$: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$. Оскільки $AC-B^2=4-1>0$ і $A>0$, то $M(1;0)$ – точка локального мінімуму, $z_{\min}(1;0)=-1$. **3.262.** $z_{\max}(0;0)=10$. **3.263.** $z_{\min}(1;\frac{1}{2})=0$, в точці (0;0) екстремуму немає. *Розв'язання:* $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=24y^2-6x$; $\begin{cases}3x^2-6y=0,\\ 24y^2-6x=0,\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=\frac{1}{2}$. Отже, $M_1(0;0)$, $M_2(1;\frac{1}{2})$ – критичні точки. Знайдемо другі похідні функції z: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6$. Обчислимо значення других похідних у точці $M_1(0;0)$: $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=0$, $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=0$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6$. Оскільки $AC-B^2<0$, то в цій точці екстремуму немає. Для точки $M_2(1;\frac{1}{2})$ маємо:

$A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 24$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$ і $AC - B^2 = 108 > 0$, крім того, $A > 0$, то в цій точці буде локальний мінімум, $z_{\min}(1; \frac{1}{2}) = 0$.

3.264. $z_{\max}(2;-2) = 8$. **3.265**. $u_{\min}(6;-18;2) = -112$, у точці $(0;0;2)$ екстремуму немає. *Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні першого порядку $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6y$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z - 4$. Розв'язок системи $\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0, \\ 2y + 6x = 0, \\ 2z - 4 = 0 \end{cases}$ дає критичні точки $M_1(6;-18;2)$ та $M_2(0;0;2)$. Інших критичних точок функція не має. Обчислюємо частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$ та складаємо матрицю Гессе $\begin{pmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. У точці $M_1(6;-18;2)$ її головні мінори $\Delta_1 = 6x$, $\Delta_2 = 12x - 36$, $\Delta_3 = 24x - 72$ будуть додатними. Отже, згідно з критерієм Сильвестра у цій точці $d^2 u > 0$ і функція має мінімум $u_{\min}(6;-18;2) = -112$. Щодо дослідження функції у точці $M_2(0;0;2)$, застосувати критерій Сильвестра тут неможливо, оскільки $\Delta_1 = 0$. В цій точці, проте, екстремуму немає, тому що приріст функції $\Delta u = u(\varepsilon;0;2) - u(0;0;2) = \varepsilon^3 - 4 - (-4) = \varepsilon^3$ додатний при $\varepsilon > 0$ та відємний при $\varepsilon < 0$. **3.266.** $z_{\min}(2;1) = -28$, $z_{\max}(-2;-1) = 28$, в точках $(1;2)$, $(-1;-2)$ екстремуму немає. **3.267.** $z_{\min}(0;0) = 0$, в точках $(-\frac{5}{3};0)$, $(1;4)$, $(1;-4)$ екстремуму немає. **3.268.** $z_{\min}(0;-\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$, в точці $(2;-\frac{2}{3})$ екстремуму немає. **3.269.** $u_{\min}(2;-3;1) = -14$. **3.270.** $u_{\max}(\frac{1}{7};\frac{1}{7};\frac{1}{7}) = \frac{1}{7^7}$.

3.271. Знайти стаціонарні точки, що належать області D, й обчислити значення функції у цих точках; знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області; з усіх знайдених значень вибрати найбільше та найменше. **3.272.** $z_{найб}(0;4) = 16$,

$z_{найм}(\frac{8}{3};\frac{4}{3}) = -\frac{16}{3}$. *Розв'язання.* Знайдемо стаціонарні точки: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y$; $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}, \\ x = \frac{8}{3}. \end{cases}$ Обчислимо значення функції в точці $(\frac{8}{3};\frac{4}{3})$: $z(\frac{8}{3};\frac{4}{3}) = -\frac{16}{3}$. Знаходимо стаціонарні точки на прямих, що обмежують область. Вісь Ox: $y = 0 \Rightarrow z = x^2 - 4x$, $0 \le x \le 6$, $\frac{dz}{dx} = 2x - 4$, $\frac{dz(2)}{dx} = 0$. Тобто точка $(2;0)$ − стаціонарна, $z(2;0) = -4$. Крім того, на кінцях проміжку $z(0;0) = 0$, $z(6;0) = 12$. Вісь Oy: $x = 0 \Rightarrow z = y^2$, $0 \le y \le 4$, $\frac{dz}{dy} = 2y$, $\frac{dz(0)}{dy} = 0$, тоді $(0;0)$− стаціонарна точка. На кінцях проміжку $z(0;4) = 16$. На прямій $2x + 3y - 12 = 0$: $z = \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16$, $\frac{dz}{dx} = \frac{38}{9}x - \frac{40}{3}$, $\frac{38}{9}x - \frac{40}{3} = 0$, $x = \frac{60}{19}$, $y = \frac{36}{19}$, $z(\frac{60}{19};\frac{36}{19}) = -\frac{96}{19}$. Вибираємо серед знайдених значень найбільше і найменше. **3.273.** $z_{найб}(2;2) = 8$, $z_{найм}(4;4) = -32$. *Розв'язання.* Знайдемо стаціонарні точки всередині вказаної області D, для чого обчислимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 6y - 2xy - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x - x^2 - 2xy$ і складемо систему рівнянь $\begin{cases} 6y - 2xy - y^2 = 0, \\ 6x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ 6 - x - 2y = 0 \end{cases}$ (тут враховано, що всередині області D $x \ne 0$ та $y \ne 0$).

Розв'язок системи: $x_0 = 2$, $y_0 = 2$. Отже, точка $M_0(2;2)$ − стаціонарна, $z_1(2;2) = 8$. При $x = 1$ $(1 \le y \le 7)$ дана функція перетворюється на функцію однієї змінної y: $z = 5y - y^2$, $\frac{dz}{dy} = 5 - 2y$, $5 - 2y = 0$, $y = \frac{5}{2}$, $z_2(1;\frac{5}{2}) = \frac{25}{4}$. На кінцях відрізку $z_3(1;1) = 4$, $z_4(1;7) = -14$. При $y = 1$ $(1 \le x \le 7)$ дана функція має вигляд $z = 5x - x^2$. Похідна $\frac{dz}{dx} = 5 - 2x$

перетворюється в нуль при $x=\frac{5}{2}$ і $z_5(\frac{5}{2};1)=\frac{25}{4}$. При $x+y=8$ $(1\le x\le 7)$ дана функція має вигляд $z=2x^2-16x$. Похідна $\frac{dz}{dx}=4x-16$ перетворюється в нуль при $x=4$, тоді $y=4$ і $z_6(4;4)=-32$. На правому кінці відрізка $z_7(7;1)=-14$. Порівнюючи значення функції z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, можна зробити висновок, що $z_{найб}(2;2)=8$, а $z_{найм}(4;4)=-32$. **3.274.** $z_{найб}(-3;0)=z_{найб}(0;-3)=6$, $z_{найм}(-1;-1)=$ $=-1$. **3.275.** $z_{найб}(2;0)=z_{найб}(-2;0)=4$, $z_{найм}(0;2)=z_{найм}(0;-2)=-4$.
3.276. $z_{\max}(a;a)=z_{\max}(-a;-a)=a^2$, $z_{\min}(-a;a)=z_{\min}(a;-a)=-a^2$. *Розв'язання.* Запишемо функцію Лагранжа $F(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^2+$ $-2a^2)$. Складемо систему для визначення стаціонарних точок:
$$\begin{cases} y+2\lambda x=0, \\ x+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=2a^2. \end{cases}$$
Її розв'язки: $\lambda=\frac{1}{2}$, $x=\mp a$, $y=\pm a$; $\lambda=-\frac{1}{2}$, $x=\pm a$, $y=\mp a$. При $\lambda=-\frac{1}{2}$ маємо точки $M_1(a;a)$, $M_2(-a;-a)$; при $\lambda=\frac{1}{2}$ маємо точки $M_3(-a;a)$, $M_4(a;-a)$. Диференціюємо останню рівність системи $2xdx+2ydy=0$, звідси $dx=-\frac{y}{x}dy$; $d^2F(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+$ $+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2=2\lambda\frac{y^2}{x^2}dy^2-\frac{y}{x}dy^2+2\lambda dy^2$; $d^2F(M_1)=-dy^2-$ $-dy^2-dy^2<0$ $\Rightarrow$ $M_1(a;a)$ – точка умовного максимуму; $d^2F(M_2)=-dy^2-dy^2-dy^2<0$ $\Rightarrow$ $M_2(-a;-a)$ – точка умовного максимуму; $d^2F(M_3)=d^2F(M_4)=dy^2+dy^2+dy^2>0$, тому точки $M_3(-a;a)$ та $M_4(a;-a)$ – це точки умовного мінімуму.
3.277. $z_{\max}(1;2)=5$, $z_{\min}(-1;-2)=-5$. **3.278.** $z_{\min}(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})=-\frac{19}{4}$.
3.279. $z_{\max}(\frac{1}{3};\frac{1}{3})=\frac{1}{27}$, $z_{\min}(1;1)=0$. **3.280.** $u_{\max}(2;2;2)=2^6$.
3.281. $u_{\max}(4;2;-4)=18$, $u_{\min}(-4;-2;4)=-18$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ильин В.А. Основы математического анализа [Текст]. Ч.1: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1982. – 616 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математичного аналіза [Текст]. Т.1.: ученик / А.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1981, Т.1. – 687 с.

3. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость [Текст]: учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин; под.. общ. ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984. – 592 с.

4. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных [Текст]: учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин; под. общ. ред. Л.Д. Кудрявцева. – Санкт-Петербург: Техническая книга, 1994. – 496 с.

5. Сушко С.О. Математика для економічних спеціальностей [Текст]: навч. посібник / С.О. Сушко, Л.Я. Фомичова, Т.С. Кагадий; МОН України. – Д.: НГА України, 1999. – 375 с.

6. Дубовик В.П. Вища математика [Текст]: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Вид. А.С.К., 2003. – 648 с.

7. Овчинников П.П. Вища математика [Текст]. Ч.1: підручник / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; за заг. ред.. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000. – 552 с.

8. Дюженкова Л.І. Вища математика. Приклади і задачі [Текст]: навч. посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін; за заг. ред. Г.О. Михаліна. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Фомичова Людмила Яківна
Почепов Віктор Миколайович
Сушко Світлана Олександрівна
Фомичов Вадим Володимирович

Вища математика

Диференціальне числення у прикладах та задачах

Частина 1

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 14. 03. 2012. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 8,5.
Обл.-вид. арк. 8,5. Тираж 150 прим. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Державному ВНЗ «Національний гірничий університет»
Свідотцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842
від 11.06.2004

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.