

УДК 625.622:689.21

**А.Г. Мона, канд. техн. наук**

(Украина, Днепрпетровск, Национальная металлургическая академия Украины)

## **РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК КАЧЕНИЯ КОЛЕСА ПО РЕЛЬСУ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СРЕДЫ**

Стальные колеса обладают сравнительно стабильными фрикционными свойствами и широко используются на рельсовом транспорте и в подъемно-транспортной технике. Кинематические и динамические свойства фрикционной пары колесо-рельс определяются их геометрическими параметрами, внешними нагрузками и наличием промежуточной среды. Рельсовый путь в шахтах покрыт значительным загрязняющим мелкодисперсным слоем, представляющим собой смесь породы, частиц износа тормозных колодок и колес в почвенных водах. При торможении локомотива жидкая или многодисперсная среда, находящаяся на рельсах, значительно влияет на коэффициент сцепления колеса с рельсом и силу сопротивления качению. В настоящее время процесс взаимодействия колеса с рельсом при наличии промежуточной среды изучен недостаточно.

В работе [1] установлены изменения давления в зоне контакта колеса и рельса при различных характеристиках промежуточной среды. Показано, что при изменении нагрузки на колесо локомотива, движущегося по рельсовому пути, покрытому промежуточной средой, несущая способность вязкопластической среды может уменьшить коэффициент сцепления до величины внутреннего трения среды. При этом колесо будет находиться в режиме гидропланирования. В работе [2] на основании уравнений гидродинамической теории смазки рассмотрено взаимодействие тормозной колодки колесно-колодочного тормоза с колесом при наличии промежуточной среды в виде дисперсии продуктов износа смазочных материалов и неорганических загрязнений в зонах контакта колодка – колесо и колесо – рельс.

**Цель статьи** – разработка, решение и анализ математической модели движения колеса по рельсу при наличии в зоне контакта промежуточной среды.

Данные исследования являются продолжением работ [3, 4]. Здесь в дополнение к ранее проведенным исследованиям рассмотрен процесс разгона колеса при наличии промежуточной среды и выполнен сравнительный анализ характеристик сцепления в режимах разгона и торможения. Для улучшения качества моделирования и уточнения получаемых результатов число точек коллокации увеличено до 15, что привело к большему числу уравнений в системе.

Для установления характеристик качения стального колеса по рельсу при наличии промежуточной среды применена модель движения ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости [5]. К вращающемуся стальному колесу по нормали к рельсу приложена сила, часть которой воспринимается промежуточной средой. В процессе качения колеса на него действует момент разгона или торможения  $M_{рт}$  (рис. 1).

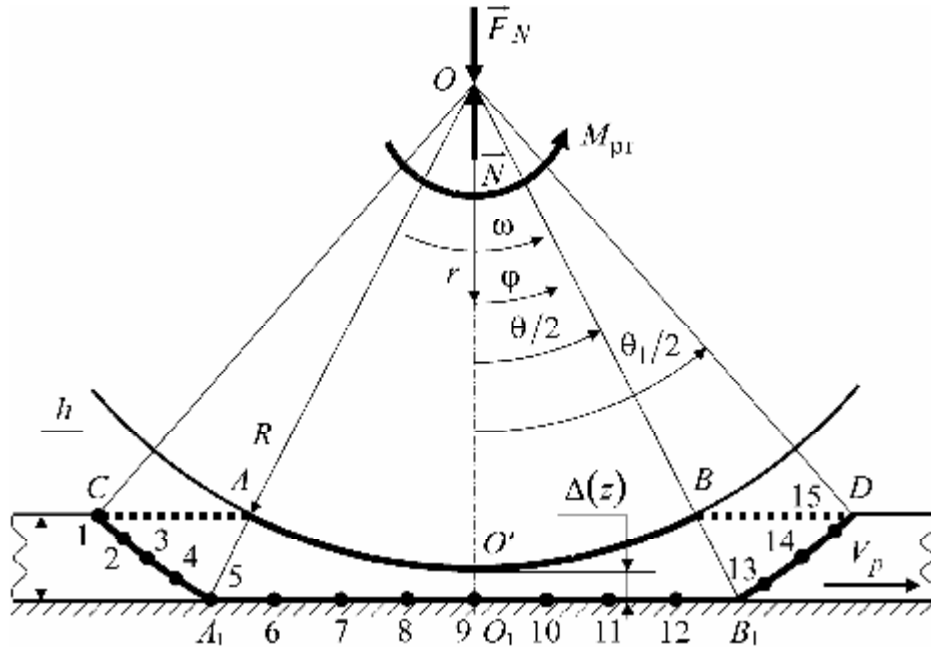


Рис. 1. Расчетная схема движения колеса при наличии промежуточной среды

На рис. 1 приняты следующие обозначения:  $R$  – радиус круга катания колеса;  $\omega$  – угловая скорость колеса;  $\vec{F}_N$  – нормальная сила;  $\vec{N} = \vec{F}_n + \vec{F}_p$ ;  $\vec{F}_n$  – подъемная сила промежуточной среды;  $\vec{F}_p$  – реакция рельса;  $r$  – текущий радиус;  $\varphi$  – текущая угловая координата;  $h$  – толщина слоя промежуточной среды;  $\Delta(z)$  – зазор между колесом и рельсом в плоскости  $z = const$  (ось  $Oz$  направлена перпендикулярно к плоскости рисунка таким образом, что если смотреть из ее конца, то положительные значения угловых перемещений  $\varphi$  представляются происходящими против хода часовой стрелки), заполненный промежуточной средой;  $V_p$  – скорость рельса относительно геометрического центра колеса, равная по абсолютной величине скорости локомотива; 1,2,3,...,15 – точки коллокации;  $\theta$ ,  $\theta_1$  – углы, определяемые геометрически

$$\frac{\theta}{2} = \arccos \frac{R - h + \Delta(z)}{R},$$

$$\frac{\theta_1}{2} = \arccos \frac{R - h + \Delta(z)}{OD} = \arccos \frac{R - h + \Delta(z)}{OB_1} = \arccos \frac{(R - h + \Delta(z)) \cos \frac{\theta}{2}}{OO_1} = \arccos \frac{(R - h + \Delta(z))^2}{R(R + \Delta(z))}.$$

Пренебрегая «концевыми эффектами» и полагая, что колесо и рельс имеют бесконечную длину в направлении оси вращения колеса, будем считать, что движение промежуточной среды в зазоре между колесом и рельсом является плоским. Таким образом, задача сводится к рассмотрению движения вязкой несжимаемой жидкости между колесом, вращающимся с угловой скоростью  $\omega$ , геометрический центр которого неподвижен и является полюсом  $O$  полярной системы координат, и рельсом, движущимся поступательно относительно полюса  $O$  в направлении вращения колеса со скоростью  $V_p$ . Скорость рельса в режиме разгона меньше окружной скорости колеса, а в режиме торможения – превышает ее. Таким образом, между рабочими поверхностями колеса и рельса имеет место проскальзывание.

Воспользуемся уравнениями Навье – Стокса в полярной системе координат [5]:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right);$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \nabla^2 V_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right);$$

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0; \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

где  $V_r$  – проекция вектора скорости в направлении текущего радиуса;  $V_\varphi$  – проекция вектора скорости в направлении текущей угловой координаты;  $t$  – время;  $\rho$  – плотность жидкости;  $p$  – давление;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Зазор между колесом и рельсом является очень малым по сравнению с радиусом колеса  $R$ . Движение жидкости в зазоре будем считать медленным, поскольку инерционными членами по сравнению с членами, учитывающими вязкие силы и изменение давления, можно пренебречь. Тогда линеаризованные уравнения Навье – Стокса, в которых отсутствуют инерционные члены, в полярных координатах примут следующий вид

$$\mu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

где  $\mu = \nu \rho$  – динамический коэффициент вязкости жидкости, зависящий от температуры.

При составлении этих уравнений учтена относительная малость зазора по сравнению с радиусом колеса, позволяющая считать, что

$$V_\varphi \gg V_r; \quad \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} \gg \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}, \quad \frac{V_\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \gg \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \frac{V_r}{r^2}; \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} \gg \frac{V_r}{r}; \quad \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \ll \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2}.$$

Из первых двух равенств системы (1) следует, что

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \ll \frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Это позволяет в дальнейшем принять

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad p = p(\varphi).$$

Кроме того, в системе уравнений (1) можно заменить вне знака производной  $r$  на  $R$ , а от переменной  $r$  ( $R \leq r \leq (R + \Delta(z))/\cos(\theta/2)$ ) перейти к переменной  $\zeta = r - R$ , изменяющейся в интервале  $0 \leq \zeta \leq (R + \Delta(z))/\cos(\theta/2) - R$ . Тогда  $\partial/\partial r = \partial/\partial \zeta$  и уравнения Навье – Стокса запишутся так:

$$\mu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{R} \frac{dp}{d\varphi}; \quad \frac{\partial V_r}{\partial \zeta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Нормальные  $\sigma_{rr}$  и касательные  $\tau_{r\varphi}$  напряжения в соответствии с обобщенным законом Ньютона для несжимаемой вязкой жидкости в развернутом виде в полярной системе координат согласно работе [5] определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial \zeta}; \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \zeta} - \frac{V_\varphi}{R} \right). \quad (3)$$

Найдем распределение  $V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi)$ ,  $V_r = V_r(r, \varphi)$ ,  $p = p(\varphi)$  в области  $CABDB_1A_1$ , принадлежащей плоскости  $z = const$  (рис. 1).

При решении конкретных задач, связанных с обтеканием твердых поверхностей вязкой жидкостью, должны быть использованы граничные условия [5]: частицы жидкости «прилипают» к твердой стенке, не проникая сквозь нее, и в точках соприкосновения их скорости совпадают со скоростями точек движущейся поверхности.

шейся твердой поверхности; на удалении от обтекаемого тела задаются скорость и давление, в какой либо точке потока.

Запишем граничные условия с учетом того, что скорость среды на границе среда – колесо равна скорости колеса, на границе среда – рельс равна скорости рельса; среда не проникает через границы; на удалении от колеса скорость среды равна скорости рельса, давление равно нулю. Таким образом:

– при  $\zeta = 0$ ,  $|\varphi| < \theta/2$  (линия  $A'O'B$ )

$$V_\varphi = \omega R = V_p (S + 1), \quad V_r = 0, \quad (4)$$

где  $S = \frac{\omega R - V_p}{V_p}$  – относительное скольжение колеса по рельсу;

– при  $\zeta = \frac{R + \Delta(z)}{\cos \varphi} - R$ ,  $|\varphi| < \theta/2$  (линия  $A_1B_1$ )

$$V_\varphi = V_p \cos \varphi, \quad V_r = V_p \sin \varphi; \quad (5)$$

– при  $\zeta = \frac{(R + \Delta(z))}{\cos(\theta/2)} - R$ ,  $\theta/2 < |\varphi| < \theta_1/2$  (линии  $CA_1$  и  $B_1D$ )

$$V_\varphi = V_p \cos \varphi, \quad V_r = V_p \sin \varphi, \quad p = 0. \quad (6)$$

Аппроксимацию решения, удовлетворяющую уравнениям Навье – Стокса (2) и граничным условиям (4) тождественно, выберем в виде

$$\left. \begin{aligned} V_\varphi &= \omega R + (a\zeta - \zeta^2) \left( \sum_{i=1}^n a_i \cos \frac{2i\varphi\pi}{\theta_1} + \sum_{i=1}^k b_i \sin \frac{2i\varphi\pi}{\theta_1} \right); \\ V_r &= \frac{2\pi}{R\theta_1} \left( \frac{\zeta^3}{3} - \frac{a\zeta^2}{2} \right) \left( -\sum_{i=1}^n a_i i \sin \frac{2i\varphi\pi}{\theta_1} + \sum_{i=1}^k b_i i \cos \frac{2i\varphi\pi}{\theta_1} \right) + f(\varphi); \\ p &= -\frac{\mu R \theta_1}{\pi} \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \sin \frac{2i\varphi\pi}{\theta_1} - \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{i} \cos \frac{2i\varphi\pi}{\theta_1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $a = \Delta(z) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan S \right)$ ;  $f(\varphi) = \begin{cases} V_p \sin(\theta_1(\varphi + \theta/2)/(\theta_1 - \theta)), & \text{при } -\theta_1/2 \leq \varphi < -\theta/2; \\ 0, & \text{при } |\varphi| \leq \theta/2; \\ V_p \sin(\theta_1(\varphi - \theta/2)/(\theta_1 - \theta)), & \text{при } \theta/2 < \varphi \leq \theta_1/2. \end{cases}$

Неизвестные коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  определим таким образом, чтобы выбранная аппроксимация решения удовлетворяла граничным условиям (5), (6). Для удовлетворения функций  $V_\varphi$  и  $V_r$  граничным условиям (5) и (6), а также функции  $p$  граничному условию (6) воспользуемся методом взвешенных невязок в виде поточечной коллокации [6]. Точки коллокации выберем на линии  $CA_1B_1D$  несимметрично относительно прямой  $\varphi = 0$ .

Из системы уравнений (7) имеем

$$\sum_{i=1}^n K_{ji} a_i + \sum_{i=1}^k M_{ji} b_i = L_j, \quad (8)$$

где  $K_{ji} = \cos \frac{2i\varphi_j\pi}{\theta_1}$ ,  $M_{ji} = \sin \frac{2i\varphi_j\pi}{\theta_1}$ ,  $L_j = \frac{V_p (\cos \varphi_j - S - 1)}{a\zeta_j - \zeta_j^2}$  – для первого уравнения системы (7);

$K_{ji} = -i \sin \frac{2i\varphi_j\pi}{\theta_1}$ ,  $M_{ji} = i \cos \frac{2i\varphi_j\pi}{\theta_1}$ ,  $L_j = \frac{R\theta_1 (V_p \sin \varphi_j - f(\varphi_j))}{2\pi \left( \frac{\zeta_j^3}{3} - \frac{a\zeta_j^2}{2} \right)}$  – для второго уравнения системы (7);

$K_{ji} = \frac{1}{i} \sin \frac{2i\varphi_j\pi}{\theta_1}$ ,  $M_{ji} = -\frac{1}{i} \cos \frac{2i\varphi_j\pi}{\theta_1}$ ,  $L_j = 0$  – для третьего уравнения системы (7);  $\zeta_j = \frac{R + \Delta(z)}{\cos \varphi_j} - R$

на линии  $A_1B_1$ ;  $\zeta_j = \frac{R + \Delta(z)}{\cos(\theta/2)} - R$  на линиях  $CA_1$  и  $B_1D$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  ( $m$  – общее количество уравнений системы (8)).

В системе линейных алгебраических уравнений (8) суммарное количество неизвестных  $a_i$  и  $b_i$  должно быть равно числу уравнений. Таким образом, число членов рядов в разложениях (7) зависит от количества точек коллокации. Для проведения численных расчетов возьмем 15 точек коллокации. Точки на входе в область  $SABDB_1A_1$  расположим более густо, чем на выходе (рис.1). Тогда система (8) будет состоять из тридцати восьми уравнений и можно принять  $n = 19$ ,  $k = 19$ . Считая  $R = f(z) = const$ ,  $\Delta(z) = const$ , определим подъемную силу промежуточной среды и силу вязкого сопротивления, обусловленного наличием промежуточной среды, как функции относительного скольжения по формулам

$$F_n = b \int_{AB} \sigma_{rr} \cos \varphi dl = \frac{b\mu R^2 \theta_1^2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{i} \left( \frac{1}{2i\pi - \theta_1} \sin \frac{(2i\pi - \theta_1)\theta}{2\theta_1} + \frac{1}{2i\pi + \theta_1} \sin \frac{(2i\pi + \theta_1)\theta}{2\theta_1} \right); \quad (9)$$

$$F_c = b \int_{AB} \tau_{r\varphi} \cos \varphi dl = bR\mu \left( a\theta_1 \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{1}{2i\pi - \theta_1} \sin \frac{(2i\pi - \theta_1)\theta}{2\theta_1} + \frac{1}{2i\pi + \theta_1} \sin \frac{(2i\pi + \theta_1)\theta}{2\theta_1} \right) + 2\omega \sin \frac{\theta}{2} \right); \quad (10)$$

где  $b$  – ширина зоны контакта колеса и промежуточной среды;  $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = R d\varphi$  – дифференциал дуги кривой.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (8) было выполнено методом Гаусса для величин относительного скольжения, изменяющихся в интервале от минус единицы (режим юза) до двух (боксование в режиме тяги с окружной скоростью колеса, в три раза превышающей скорость рельса относительно колеса). Далее с учетом формул (9) и (10) были найдены относительная подъемная сила промежуточной среды  $F_n^* = F_n / F_N$ , относительная сила вязкого сопротивления, обусловленная наличием промежуточной среды,  $F_c^* = F_c / F_N$  и отношение увеличения относительной подъемной силы к увеличению относительной силы вязкого сопротивления по сравнению со значениями этих величин при свободном качении

$$F_{\Delta}^* = \frac{F_n^*(S) - F_n^*(0)}{F_c^*(S) - F_c^*(0)}$$

как функции относительного скольжения при следующих исходных данных:  $R = 0,27$  м;  $V_p = 5$  м/с;  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\Delta(z) = 10^{-3}$  м;  $b = 5 \cdot 10^{-2}$  м;  $F_N = 1,25 \cdot 10^4$  Н;  $\mu = 5,214$  Н·с/м<sup>2</sup>. Расчеты проводились с помощью стандартного пакета прикладных программ «Mathematika 7.0» для 15 точек коллокации (рис. 1). Увеличение числа точек коллокации (более 15) существенно не повлияет на решение, так как

даже при девяти точках коллокации [3] отличие решения не превышает 7%. Это говорит о хорошей сходимости рядов (7).

Из рис. 2 видно, что зависимости относительной подъемной силы и относительной силы вязкого сопротивления возрастают с увеличением  $|S|$ . Причем, на промежутке  $0 < |S| < 0,05$  возрастание функции  $F_c^* = F_c^*(S)$  достигает большей величины, чем возрастание функции  $F_n^* = F_n^*(S)$ . При относительном скольжении, равном  $\pm 0,05$ , функция  $F_\Delta^* = F_\Delta^*(S)$  имеет минимумы ( $F_{\Delta^* min} = 0,62$  и  $F_{\Delta^* min} = 0,64$  соответственно). На промежутке  $0,05 < |S| < 0,2$  график функции  $F_n^*(S)$  имеет существенно более резкий подъем, чем график функции  $F_c^*(S)$ . На этом промежутке значения функции  $F_\Delta^*(S)$  увеличиваются в режиме торможения в 5,6 раза (с 0,64 до 3,60), проходя через единицу при  $S = -0,085$  и в режиме разгона – в 6,2 раза (с 0,62 до 3,87), проходя через единицу при  $S = 0,085$ . Это способствует уменьшению абсолютной величины коэффициента сцепления  $\psi$ . Далее, при  $0,2 < |S| < 1$  значение функции  $F_\Delta^*(S)$  изменяется незначительно и составляет приблизительно 3,65 в режиме торможения и 3,9 в режиме разгона. При  $1 < S < 2$  значение функции  $F_\Delta^*(S)$  приблизительно равно 3,85. Функция  $F_\Delta^*(S)$  при  $0 < |S| < 0,1$  в режиме разгона принимает меньшие значения, чем в режиме торможения, а при  $0,1 < |S| < 1$  наоборот – большие значения.

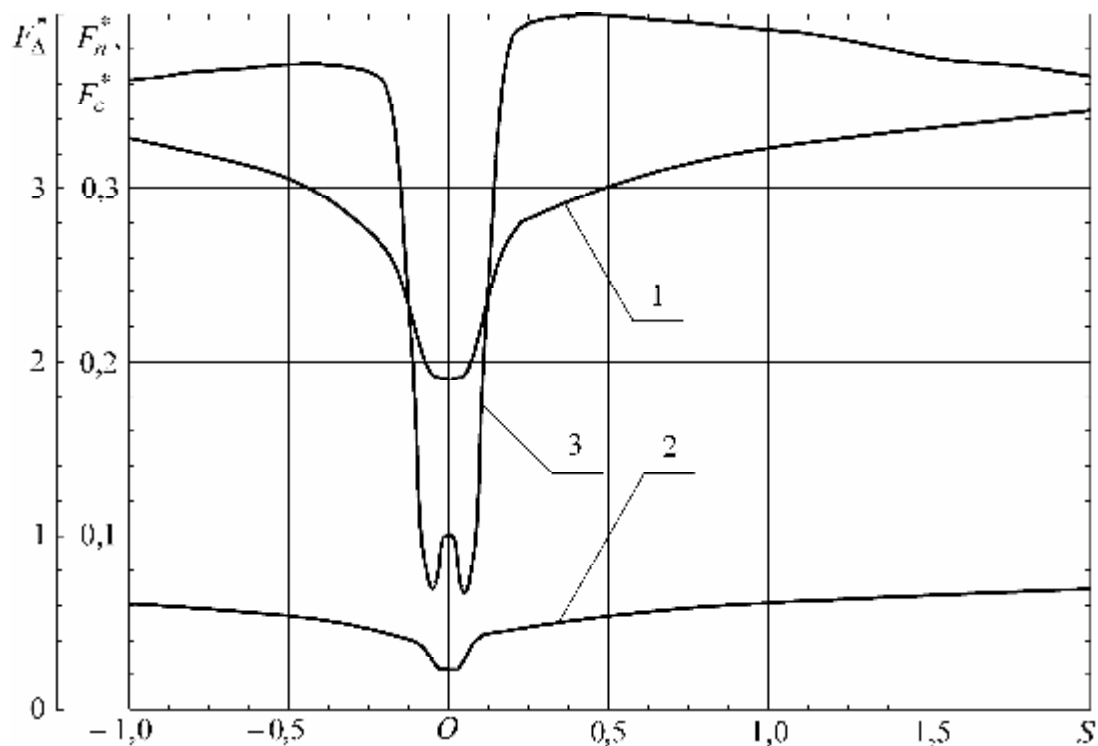


Рис. 2. Зависимости относительной подъемной силы и относительной силы вязкого сопротивления от относительного скольжения: 1 - относительная подъемная сила  $F_n^*$ ; 2 - относительная сила вязкого сопротивления  $F_c^*$ ; 3 - отношение увеличения относительной подъемной силы к увеличению относительной силы вязкого сопротивления  $F_D^*$

## Выводы

1. На основе проведенных расчетов и анализа установлено, что при наличии промежуточной среды в режимах разгона и торможения относительное скольжение по-разному влияет на коэффициент сцепления колес с рельсами;

2. Для стабилизации коэффициента сцепления  $\psi$  во время разгона и торможения при наличии между колесом и рельсом промежуточной среды необходимо ограничивать абсолютное значение относительного скольжения величиной 8,5%.

#### Список литературы

1. Сердюк, А.А. Качение колеса по рельсу с разделяющей их промежуточной средой [Текст] / А.А. Сердюк // Науковий вісник НГА України. – 1999. – №2. – С.77-79.
2. Таран, И.А. Влияние промежуточной среды на взаимодействие тормозной колодки и колеса [Текст] / И.А. Таран // Metallurgical and Mining Industry (Special Issue). – 1997. – № 1-2. – С. 33-35.
3. Сердюк, А.А. О качении колеса по рельсу с отрицательным относительным скольжением при наличии промежуточной среды [Текст] / А.А. Сердюк, А.Г. Моця // Науковий вісник Національного гірничого університету. – 2003. – №2. – С. 59-62.
4. Моця, А.Г. Математическая модель качения колеса по рельсу при наличии разделяющей их промежуточной среды [Текст] / А.Г. Моця, И.А. Таран // Збірник наукових праць Національного гірничого університету. – 2006. – №24. – С. 97-105.
5. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
6. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст]: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

*Рекомендовано до друку: проф. Шкрабцем Ф.П.*