# A survey on Uncertainty Theory

影山正幸 * Baoding Liu†

**概要**

本発表では, Liu [1] により構築された Uncertainty Theory について紹介する. Uncertainty Theory は確率論の枠組みでは記述することが困難な現象, 特に人間の意思決定の不確実性を記述するために考案された理論である. Zadeh [3] により提案されたファジイ理論は, 広く普及し, 数学, 工学, 経済, OR 様々な分野で広く発展を遂げてきた. Uncertainty Theory は確率論の議論と並行する形で展開される.

## 1 Uncertainty measure

Uncertainty Theory の中核をなすのが以下の公理で定義される Uncertainty measure である.

**Axiom 1.** *(Normality Axiom)* $M\{\Gamma\} = 1$ *for* $\Gamma$.

**Axiom 2.** *(Duality Axiom)* $M\{\Lambda\} + M\{\Lambda^c\} = 1$ *for any event* $\Lambda$.

**Axiom 3.** *(Subadditivity Axiom) For every countable sequence of events* $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots$ *we have*

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\}. \tag{1.1}$$

**Axiom 4.** *(Product Axiom)* Let $(\Gamma_k, L_k, M_k)(k = 1, 2, \cdots)$ be uncertainty spaces for $k = 1, 2, \cdots$ The product uncertain measure $M$ is an uncertain measure satisfying

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}, \tag{1.2}$$

where $\Lambda_k$ are arbitrarily chosen events from $L_k$ for $k = 1, 2, \cdots$, respectively.

一般の $\sigma$-algebra には以下のように拡張することができる.

$$M\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup\limits_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda} \min\limits_{k\geq 1} M_k\{\Lambda_k\}, \\ \qquad \text{if} \sup\limits_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda} \min\limits_{k\geq 1} M_k\{\Lambda_k\} > 0.5 \\ 1 - \sup\limits_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda^c} \min\limits_{k\geq 1} M_k\{\Lambda_k\}, \\ \qquad \text{if} \sup\limits_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda^c} \min\limits_{k\geq 1} M_k\{\Lambda_k\} > 0.5 \\ 0.5, \qquad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.3}$$

* 名古屋市立大学, 清華大学 (中国)
† 清華大学 (中国)

定義 1 Event $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ が independent であるとは次式が成り立つことである.

$$M\left\{\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i^*\right\} = \bigwedge_{i=1}^{n} M\{\Lambda_i^*\} \tag{1.4}$$

ただし, $\Lambda_i^*$ は $\{\Lambda_i, \Lambda_i^c, \Gamma\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ から選ばれた任意の event とし, $\Gamma$ は universal set とする.
定理 2 Event $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ が independent であるための必要十分条件は次式が成り立つことである.

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i^*\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} M\{\Lambda_i^*\} \tag{1.5}$$

ただし, $\Lambda_i^*$ は $\{\Lambda_i, \Lambda_i^c, \emptyset\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ から選ばれた任意の event とする.

## 2 Conditional uncertain measure

定義 3 [2] $(\Gamma, L, M)$ を uncertainty space とし, $\Lambda, A \in L$ とする. このとき, $A$ が生起したときの $\Lambda$ の conditional uncertain measure を次式で定義する.

$$M\{\Lambda|A\} = \begin{cases} \dfrac{M\{\Lambda \cap A\}}{M\{A\}}, & \text{if } \dfrac{M\{\Lambda \cap A\}}{M\{A\}} < 0.5 \\ 1 - \dfrac{M\{\Lambda^c \cap A\}}{M\{A\}}, & \text{if } \dfrac{M\{\Lambda^c \cap A\}}{M\{A\}} < 0.5 \\ 0.5, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし, $M\{A\} > 0$.

## 3 おわりに

[1] は 500 ページに及ぶ大著であり, 到底紙面の都合上, 全てを紹介することは不可能である. しかし, 著者は非常に興味深い理論であり, 例えば, [1] では, Uncertain Variable, Uncertain Programming, Uncertain Regression Analysis, Uncertain Renewal Process, Uncertain Differential Equation, etc. など, 非常に多岐にわたる応用が議論されている.

## 参考文献


[1] B. Liu, Uncertainty Theory, 5th Edition, Uncertainty Theory Laboratory, 2020.
[2] B. Liu, Uncertainty Theory, 2th ed, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
[3] Zadeh L.A., ”Fuzzy sets”, Information and Control, 1965, 338-353.