



TITLE:

Markov random dynamical systems of rational maps on the Riemann sphere(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Watanabe, Takayuki

CITATION:

Watanabe, Takayuki. Markov random dynamical systems of rational maps on the Riemann sphere. 京都大学, 2021, 博士(人間・環境学)

ISSUE DATE:

2021-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k23273>

RIGHT:

Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity Nonlinearity Volume 32 (2019) Number 10, pp 3742-3771. DOI: 10.1088/1361-6544/ab231e

(続紙 1)

京都大学	博士 (人間・環境学)	氏名	渡邊天鵬
論文題目	Markov random dynamical systems of rational maps on the Riemann sphere (リーマン球面上の有理写像からなるマルコフ的ランダム力学系)		
(論文内容の要旨)			
<p>本論文ではランダム力学系、特に独立同分布とは限らない、マルコフ的ランダム複素力学系を扱う。</p> <p>一般に、状態がある規則に従って時間とともに変化していくシステムを力学系という。力学系は自然科学、社会科学全般で数理モデルとして扱われるので重要である。ただし自然界、実社会においてはランダム項が多くあるので、上記の規則がランダムに変化するような「ランダム力学系」を扱うことが重要で自然である。また、実直線上の多項式力学系では相空間を複素平面にまで拡張する考えは自然である。ランダム力学系理論では様々な舞台設定があるが、推移作用素やその随伴作用素の作用などを含めた深い解析については、独立同分布の場合を扱ったものが従来では多い。しかし、ランダム性やノイズの出方は独立同分布とは限らないので、枠組みをさらに一般化することが重要となる。そこで渡邊氏はこれまでに行われてきた、独立同分布ランダム複素力学系の研究を一般化して、「マルコフ的ランダム複素力学系」の枠組みを世界で初めて与え、その基礎的なところから全て開拓を行ってきた。ランダム力学系では、決定論的力学系では決して現れえない新しい現象が多くあり、それを「ランダム性誘起現象」または「雑音誘起現象」という。これまでに独立同分布ランダム複素力学系においてランダム性誘起現象が多く発見され様々な解析が行われてきたが、渡邊氏はマルコフ的ランダム複素力学系でもランダム性誘起現象が多く起こることを発見し、そのメカニズムを解明してきた。また、独立同分布ランダム複素力学系では起こりえない、一般のマルコフ的ランダム複素力学系特有の現象も発見し、その解析も行っている。</p> <p>本論文には大きく分けて以下の5つの部分(1)－(5)がある。(1)マルコフ的ランダム力学系とグラフマルコフ的システムの舞台設定と基礎的理論の整備、(2)マルコフ的ランダム複素多項式力学系における核ジュリア集合が空になるための条件と、無限遠点に収束する確率の関数の連続性の関係についての結果、(3)無限遠点に収束する確率の関数について、独立同分布ランダム複素力学系では起こりえない、マルコフ的ランダム力学系特有の新しい現象の発見、(4)マルコフ的ランダム複素多項式力学系全体のなかで、位相的な観点においてほとんどのシステムが「平均安定」という安定的でおだやかな状況を持つという結果、(5)マルコフ的ランダム複素多項式力学系のある種の族において、測度論的な観点においても、ほとんどのシステムが平均安定であると示した結果、である。</p> <p>上記の(1)－(5)を以下に説明する。</p> <p>(1)では、一般のコンパクト距離空間上における独立同分布とは限らないマルコフ的ランダム力学系の舞台設定を行い、その基礎理論を構築した。さらに、マルコフ的ランダム力学系に付随して現れる、「グラフマルコフ的システム」の舞台設定を行い、その基礎理論を構築するとともに、マルコフ的ランダム力学系とグラフマルコフ的システムの両者の理論を相互に行き来する理論展開を行った。</p>			

(2) ではまずグラフマルコフ的システムにおける「核ジュリア集合」の定義を行い、マルコフ的ランダム複素力学系において付随するグラフマルコフ的システムの核ジュリア集合が空になれば、元のマルコフ的ランダム力学系がおだやかになり、そのほとんどすべての許容列に関するジュリア集合の2次元ルベーグ測度が0になることを示した。また、マルコフ的ランダム複素多項式力学系において、その付随するグラフマルコフ的システムの核ジュリア集合が空になるときは、無限遠点に収束する確率の関数がリーマン球面全体で連続になることを示した。これはシステムが穏やかになることを表す一つの現象とも思える。さらに、マルコフ的ランダム複素力学系について、比較的弱い仮定のもとで付随するグラフマルコフ的システムの核ジュリア集合が空集合になることを示した。

(3) では、ある独立同分布ではないマルコフ的ランダム複素多項式力学系において、無限遠点に収束する確率の関数の値が、どの点でも正で、かつ定数1ではなく、さらにこの関数がリーマン球面上で連続である、という状況がありうることを示した。これは独立同分布ランダム複素力学系ではありえない。

(4) では、まずマルコフ的ランダム複素力学系全体 Y に自然な位相を与えた。その位相に関してジェネリックなマルコフ的ランダム多項式力学系は「平均安定」であってシステムの平均化の観点では穏やかとなり、核ジュリア集合が空となることを示した。さらに Y のなかのある稠密な部分集合 A があり、 A に属するマルコフ的ランダム複素力学系は、平均安定であるか、または相空間全体でカオス性を持つ、という結果を出した。

(5) ではマルコフ的ランダム多項式力学系の族を考え、パラメータ空間に適当な測度が与えられたときに、ある状況下ではその測度に関してほとんどすべてのパラメータについて付随するマルコフ的ランダム多項式力学系が平均安定となることを示した。

(論文審査の結果の要旨)

従来のランダム力学系の研究では、推移作用素やその随伴作用素の作用などを含めた深い解析については、独立同分布の場合を扱ったものが多かった。ランダム複素力学系の研究については、1991年のFornaessとSibonyによるものが最初のものであり、その後、Bruck, Bugerらが2次多項式の場合を深く掘り下げ、さらに角が一般の有理写像のランダム複素力学系の理論を扱ったが、舞台設定は独立同分布の場合のものであった。しかしノイズの入り方は独立同分布以外の場合もあるために、より一般的なランダム力学系のシステムの詳細を調べることが重要であると思われていた。そこでこの論文において一步踏み込んでマルコフ的ランダム力学系においても理論の枠組みを与えたところが新しくかつ重要な点の一つである。以下に論文内容の要旨の各項目(1)―(5)における論文の新規性、重要性と渡邊氏の果たした役割を述べていく。

(1)ではまず一般のコンパクト距離空間上のマルコフ的ランダム力学系とグラフマルコフ的システムの枠組を新たに与え、基礎理論を展開した。これは角による独立同分布ランダム力学系と写像半群の力学系の枠組みを大きく一般化するものである。さらに、独立同分布の場合には、推移作用素の作用の仕方については一つの作用素の反復合成を見れば解析できたのに対し、マルコフ的ランダム力学系では、素直な設定ではそのようにならず、解析が難しく思われる。そこで、相空間を若干変更して、その空間で付随するマルコフ連鎖を考え、一つの作用素の反復合成を考えることで推移作用素の作用の解析を行えるようにしたことが新しく、重要である。

(2)では実際にその相空間を変更した推移作用素の解析を通して、核ジュリア集合が空になる場合に平均化システムが穏やかになること(推移作用素の随伴作用素の反復合成が確率測度の空間において穏やかに作用すること)を見通し良く示すことに成功している。さらに、核ジュリア集合が空になったときの帰結やマルコフ的ランダム複素多項式力学系において核ジュリア集合が空になるための十分条件などについて、それまで角が得ていた独立同分布ランダム複素力学系の結果を大きく一般化することに成功した。なお、一つの2次以上の有理写像の反復合成による決定論的力学系では、核ジュリア集合は決して空にはならず、また、その有理写像が多項式写像のときには、無限遠点に収束する確率の関数がリーマン球面全体で連続になることはありえないので、(1)(2)によって、一般のマルコフ的ランダム複素力学系においても、決定論的複素力学系ではありえないようなランダム力学系特有の新しい現象が豊富にあることがわかった。このことにより(1)(2)の結果は大変重要である。

また、(3)においては、独立同分布のシステムでは起こりえない、一般のマルコフ的ランダム複素力学系特有の現象を発見することに成功した。このことにより、この論文は、一般のマルコフ的ランダム複素力学系が非常にバラエティに富んでいて興味深い研究対象であることを示唆することとなった。

なお、(1) (2) (3)の内容をまとめたものが角との共著の査読有論文として雑誌Nonlinearityに出版された。この雑誌は力学系、フラクタル、応用数学関係の一流学術雑誌として世界的に高く評価されているものである。この論文において渡邊氏は舞台設定や基礎理論の構築、主結果の証明の詳細の記述、論文全体の執筆などを行っており、渡邊氏の寄与は8割程度ある。

(4)の結果は、角が以前に示していた、独立同分布ランダム複素力学系の結果を大幅に一般化するものである。(4)によって、決定論的複素多項式力学系が決して持ちえない「平均安定性」という性質を、位相的にジェネリックなマルコフ的ランダム複素多項式力学系が持つ、ということがわかったので、大変重要であり、非常に興味深い。

(5)においては、マルコフ的ランダム複素力学系の族について、ある状況下では、測度論的にも、ほとんど全てのシステムが「平均安定性」という決定論的複素力学系が持たない性質を持つと示しているのも、やはり大変重要であり、非常に興味深い。なお、(5)の結果は、独立同分布の場合に限っても、新しい結果である。

(4) (5)の結果をまとめたものを、角との共著の論文として雑誌に投稿している。渡邊氏は各定理の証明の詳細の詰めや、論文全体の執筆を行っており、渡邊氏の寄与は7割程度ある。

以上から、(1)から(5)のいずれの内容においても、渡邊氏は研究上本質的な寄与を行い、氏の独創的なアイデアと深い知識を活かして多くの画期的な興味深い結果を導き出すに至っているといえる。また各研究の今後の発展も大いに期待できる。

よって、本論文は博士(人間・環境学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和3年1月25日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 令和 年 月 日以降