



TITLE:

# Lp-Kato class measures and their relations with Sobolev embedding theorems( Abstract\_要旨 )

AUTHOR(S):

Mori, Takahiro

---

CITATION:

Mori, Takahiro. Lp-Kato class measures and their relations with Sobolev embedding theorems. 京都大学, 2021, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2021-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k22982>

RIGHT:

学位規則第9条第2項により要約公開

( 続紙 1 )

|   |   |    |      |
|---|---|----|------|
| 京都大学  | 博士 ( 理学 )   | 氏名 | 森 隆大 |
| 論文題目  | $L^p$ -Kato class measures and their relations with Sobolev embedding theorems<br>( $L^p$ -加藤クラス測度とソボレフ埋蔵定理の関係について) |    |      |
| (論文内容の要旨)   |   |    |      |
| <p>本論文で森氏は、ディリクレ形式の枠組みでSobolevの埋め込み定理とレゾルベント核の可積分性に関する理論を展開した。さらに氏は、解析学において重要なクラスであるKato-classの一般化であるp-Kato classという測度のクラスを定義し、このクラスにおけるSobolevの埋め込み定理を論じた上で、p-Kato classの部分族に属する測度に関して、対応するintersection measureが時間に関するヘルダー連続性を持つことを示している。</p> <p>以下、論文の結果についてより丁寧に説明する。局所コンパクト距離空間Eとその上のラドン測度<math>m</math>から決まる<math>L^2</math>-空間に対して、局所正則なディリクレ形式が与えられているとする。E上のラドン測度<math>\mu</math>について、次の2つの性質を考える。このディリクレ形式と<math>L^2</math>の和をノルムとしたディリクレ形式の定義域が、<math>L^{2p}(E, \mu)</math>に連続的に埋め込むことができるとき、<math>\mu</math> は性質(Sob)<math>_p</math>を持つと呼ぶことにする。次に、このディリクレ形式から決まる (<math>m</math>に関する) 1次のレゾルベント核 (Green核) が出発点について一様に<math>L^p(E, \mu)</math>-可積分であるとき、<math>\mu</math> は性質(Dyn)<math>_p</math>を持つと呼ぶことにする。(Sob, Dynはそれぞれ、Sobolev埋め込み、Dynkin classから来ている。) 古典的な例は、Eがd次元ユークリッド空間で、<math>m, \mu</math>がともにd次元ルベーグ測度の場合で、この場合(Sob)<math>_p</math>は <math>d-p(d-2) \geq 0</math>の場合に成立し、(Dyn)<math>_p</math>は<math>d-p(d-2) &gt; 0</math>の場合に成立する。この論文の主要定理は、このような関係性の一般化である。具体的には、<math>\mu</math>が(Dyn)<math>_1</math>を満たすという仮定の下、<math>1 \leq p \leq p' &lt; \infty</math>に対して(Dyn)<math>_p</math>ならば(Sob)<math>_p</math>が成り立ち、逆に<math>1 \leq p &lt; p' &lt; \infty</math>に対して(Sob)<math>_p</math>ならば(Dyn)<math>_p</math>が成り立つことが証明されている。</p> <p>この定理を証明する中で森氏は、p-Kato classという、(<math>m</math>に関する) <math>\alpha</math>次のレゾルベント核の<math>\mu</math>に関するp-次モーメントの出発点に関する上限をとったものが、<math>\alpha \rightarrow \infty</math>で0に収束するような測度のクラスを考えた。(これは(Dyn)<math>_p</math>の部分族になる。) 論文では、p-Kato class測度の基本性質を解析した上でこの測度とSobolevの埋め込み定理の関係を明らかにし、さらにp-Kato classで<math>\alpha \rightarrow \infty</math>の時の収束のスピードに条件をつけた部分族を考え、この族とGagliardo-Nirenberg型の補間不等式の関係についても論じている。</p> <p>(Dyn)<math>_p</math>の埋め込みの結果は、<math>p = p' = 1</math>の場合のStollmann-VoigtやShiozawa-Takedaの結果の拡張になっており、またp-Kato classの結果はブラウン運動の場合Aizenman-Simonの結果のある種の拡張になっている。</p> <p>さらに森氏は、上述したp-Kato classの部分族とintersection measureの関係についても議論を行い、部分族に属する測度について、対応するintersection measureのテスト関数とのカップリングが時間に関してヘルダー連続性を持つことを示している。これらの結果は、Kato-classの<math>L^p</math>版という極めて自然な範疇に関する基本的な埋め込み定理を与えており、さらに確率過程の軌跡の交差現象に深く関わるintersection measureの解析につながることから、埋め込み定理の観点からも、確率過程の交差現象の解析の観点からも非常に興味深い結果であると言える。</p> |   |    |      |

(続紙 2 )

(論文審査の結果の要旨)

主論文の主旨は一般化されたKato classとその埋め込みの理論であるが、森氏の研究背景は確率過程の交差現象にあるので、まずその背景から述べる。当該研究は、Dvoretzky, Erdős, KakutaniやTaylorらの50年代後半の研究に端を発し、80年代後半のLe Gallによるスケール極限としてのintersection local time (ILT)の研究を経て、今世紀に入ってから、Bass, X. Chen, Rosenや、Dembo, Peres, Rosen, Zeitouniらによる大偏差原理に関する極めて深い研究が進むなど、著名な研究者による大きな進展がいくつも報告されている。このように進展著しい分野ではあるが、近年の結果はブラウン運動や特別な安定過程に限られており、どのような空間上でいかなる確率過程で成立するかについては、ほとんど研究がない状態であった。森氏は、ディリクレ形式の方法など確率論的ポテンシャル論を用いて、これらの結果を拡張する研究を行ってきた。博士論文の参考文献として提出された論文で森氏は、修士論文で行った研究を推し進め、ILTの大偏差原理について、状態空間が非コンパクトな領域への拡張を行った。Koenig-Mukherjee (CPAM 2013)は、状態空間がコンパクトでブラウン運動の場合にILTの大偏差原理を導き出しているが、この研究で森氏は、Koenig-Mukherjeeの議論の鍵となるsuper-exponential estimateに簡潔な証明を与えることで、これらの結果を(全空間を含む)非コンパクトな領域の大偏差原理に拡張した。これは当該分野の研究者にとって未解決の問題であり、修士課程の時からこの問題を断続的に考え続けてきた森氏の、粘り強い研究態度が生み出した成果である。ILTの研究を一般の確率過程に拡張する研究の中で森氏は、交差現象と深い関わりのあるレゾルベント核の $L^p$ -可積分性に注目し、Kato classの一般化であるp-Kato classの解析にも研究を進めていった。これが主論文につながる成果となり、全体として確率過程の交差現象をキーワードに関数空間論、埋め込み定理にも新たな知見を得るというスケールの大きい仕事を達成したと言える。主論文、参考論文ともに現在国際誌に投稿中であるが、いずれも深い結果であり、良い雑誌に掲載されることが期待できる。

森隆大氏は持ち前の粘り強さと創造力によって当該研究を推し進めており、深い専門知識と技量を持つ優れた若手研究者であると言える。海外研究者との交流を行い、p-Kato classに関連する研究を発展させ桑江一洋教授(福岡大学)と2本の共著論文をまとめるなど、第一線の研究者とコミュニケーションを取り、研究を進める力を備えている。

令和3年1月18日に行われた論文内容の発表とそれに関連した口頭試問においても、非専門家にも分かりやすい形で自身の研究内容をまとめ、試問にも丁寧に答えた。上述した通り森氏は、学術的素養、研究成果のいずれに関しても、博士号を取得するに値すると判断される。よって本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。上述したように、令和3年1月18日論文内容とそれに関連した事項について試問を行い、その結果合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降