(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	今村　拓万
論文題目	A nonstandard invariant of coarse spaces （粗空間の超準的不変量）		

（論文内容の要旨）

本論文の目的は、粗幾何学の主要概念の一つである粗空間(coarse space)について、超準解析の道具立てを用いて新たな不変量を与えることにある。

ここで粗空間とは、距離空間等の一般化であり空間の大尺度的な性質を捉えることを目的とした概念である。主に関数解析、幾何学的群論や無限組合せ論などに登場する。一様空間と対照的であり、ちょうど一様空間において関数の一様連続性や関数族の同程度連続性について語れるのと同様に、粗空間においては集合の有界性や集合族の一様有界性等の大尺度的性質について十全に語ることができる。

一方で超準解析とは数理論理学に由来する一手法である。標準的ユニバースを超準拡大し（無限小などの）架空対象を追加することにより、厳密でありながら直截的な議論が可能となり、証明の見通しをよくすることができる（無限小実数を導入することで $\varepsilon-\delta$ 論法を回避できるなど）。

粗空間の不変量に関する先行研究としては、Miller et al.(2010)に端を発する一連の研究が挙げられる。このアプローチでは、基点つき粗空間(X,ξ)が与えられたとき、ξ から出発し無限遠に向けて発散する点列（粗点列）全体を考える。そして適当な「同値関係」で割ることにより得られる商集合を$\sigma(X,\xi)$と定める。$\sigma(X,\xi)$は確かに粗同値性により保たれる不変量であるが、粗点列間の「同値関係」を確かめるには任意有限回の点列操作が必要なため、具体的に与えられた粗空間に対して$\sigma(X,\xi)$を厳密に求めるのはかなり煩雑である。

そこで本論文では、超準解析に基づいて新たな不変量ιが提案されている。具体的には、基点つき粗空間(X,ξ)が与えられたとき、その超準拡大に含まれる無限遠点全体を考え、macrochain 連結なものたちを同一視することにより不変量$\iota(X,\xi)$を定める。σの場合の発散点列をその“発散先”にある無限遠点で置き換えて macrochain 連結なものを同一視することにより、より直截的な不変量の計算が可能となっている。

以下本論文の概要を述べる。第 1 章は導入である。第 2 章では、参考論文[2]に基づき、粗空間の超準的取り扱いについて基本事項がまとめられる。とくに重要なのは、粗写像（bornologous かつ proper な写像）の超準的特徴づけである。そしてホモトピーの大尺度版である bornotopy についても特徴づけが与えられる。これらの特徴づけは、（超準解析に慣れてさえいれば）直感的で使いやすいものであり、この使いやすさが不変量にまつわる議論の簡明さにつながっている。

第 3 章では、基点付き粗空間(X,ξ)に対する不変量$\iota(X,\xi)$が定義され、いくつかの具体的な粗空間について$\iota(X,\xi)$の計算例が与えられる。ι は基点付き粗空間の圏から集合圏への関手に拡張できる。さらに bornotopic な粗写像 f,g について $\iota(f)$と$\iota(g)$が等しくなることから、$\iota(X,\xi)$が粗同値性の下で不変であることがただちに従う。

第 4 章では先行研究における不変量との比較が行われる。そのためにまず関手σからιへの自然変換ωが定められる。仮にωが任意の(X, ξ)上で全単射であれば２つの不変量の同等性が導かれるが、実際にはそうはならない。まず、ωが常に全射とはならないことが具体例をもって示される。一方で、固有測地距離空間(proper geodesic metric space)上であればωが全射となることが証明できる。単射性についていえば、先行研究や本論文で検討された具体例すべてについて単射性が成り立つものの、単射性を示すための一般的手法は確立されておらず、また反例も見つかっていない。

最後に第 5 章で展望と未解決問題が述べられて本論文は締めくくられる。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

まず評価の背景として、著者の今村氏は修士・博士課程を通じて、超準解析の手法を位相幾何学の諸問題に適用する研究を首尾一貫して続けてきたことを指摘しておく。一様空間の超準的ホモロジー[1]やpartial metric spaceの非対称的完備化[3]など、出版済みの結果が複数ある。位相空間・一様空間のホモロジーや大尺度構造の超準的取り扱いについては、さらに未出版の成果もある[4],[5]。

とくに参考論文[2]では、粗空間や有界型空間に付随する諸概念に超準的特徴づけが与えられ、これら大尺度構造を柔軟に取り扱うための地盤が整えられている。「大尺度構造＋超準解析」というあまり先行研究の多くない分野のため、この辺りの基盤整備は（一部の例外を除き）今村氏がほぼ独力で成し遂げたものであるといっても過言ではない。際立った成果というわけではないが、このような地道な土台づくりにも一定の評価は与えられてしかるべきである。

これらの基盤整備を踏まえた上で、その格好の応用先として選ばれたのが、本論文のテーマである粗空間の不変量である。粗空間の不変量としては、先行研究で確立されたσが挙げられるが、公開講演で今村氏が指摘した通り、σはなかなか扱いが難しいものである。実際、点列間の同値関係が「有限回の操作で一方を他方に移せること」と定義されているため、非同値性を示すのが煩雑である。超準解析は、このような状況で効力を発揮する。実際、超準拡大により粗空間に無限遠点を追加することで、点列をその“発散先”である無限遠点で置き換えることができる。列が点で置き換えられることで同値性の定義が簡明になる。結果として不変量の計算が厳密かつ直截的に行えることは、論文中の具体例で示された通りである。これは超準解析の精神にのっとった自然なアプローチであり、超準解析の応用先として本題材を見出した着眼点は評価に値する。とはいえ超準解析に対するある程度の習熟が必要であり、それゆえ慣れない者にとっては技術的・心理的困難が残るであろうことは指摘しておかねばならない。

第4章で行われたσとιの比較については、固有測地距離空間の場合に前者から後者への全射が存在するという結果が証明されているが、それ以外の場合についてはよくわかっていない。とくに単射性が成り立つための一般的な十分条件が与えられていないのが残念であり、この問題については継続して研究する必要がある。

同時に、より広い文脈との関わり合いも重要である。関数解析や幾何学的群論においては、粗空間そのものではなく、より豊富な構造を兼ね備えた空間・対象が主題となることが多いであろう。そのような広い文脈で本研究のアプローチがどの程度効力を持つのかについては、今後重点的に研究されるべきかと思われる。

なお公開講演中に言及されたように、今村氏の最近の研究（投稿準備中）では、粗空間に対する超準的ホモロジーが提案されている（McCord (1972)による位相空間の超準的ホモロジーの大尺度版）。ここで0次ホモロジー群は本論文の不変量ιから“生成”されるものと見なせる。従ってより高次のホモロジー群（の“生成”元）は、ある意味でιの高次版と解することが可能である。同様にしてσの高次版も考えられないか？高次元におけるσとιとの関係はどうなるか？などの疑問が自然に湧いてくる。このようにして、本論文にはさらなる発展可能性があることも指摘しておく。

　まとめると、本論文は粗空間に対して超準的不変量を新たに提案するものであり、先行研究を踏まえた着眼点は評価に値する。また不変量計算の簡明化もある程度達成されているように思われる。より広い数学分野における意義はさておくとして、少なくとも粗空間そのものに対する研究としては十分な意義を持つといってよい。最後に本論文の背景には、粗空間の超準的取り扱いに関する確固たる基盤があり、その整備は今村氏がほぼ独力で成し遂げたものであることも付言しておく。

　以上より、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和３年１月１２日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

[1] Takuma Imamura. Nonstandard homology theory for uniform spaces. *Topology Appl*. 209:22-29, 2016.

[2] Takuma Imamura. Nonstandard methods in large-scale topology. *Topology Appl*. 257:67-84, 2019.

[3] Takuma Imamura. Asymmetric Completions of Partial Metric Spaces. *Topology Proceedings* 58:1-12, 2020.

[4] Takuma Imamura. Relationship among various Vietoris-type and microsimplicial homology theories. arXiv:1606.01673.

[5] Takuma Imamura. Nonstandard methods in large-scale topology II. arXiv:2002.12803.

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降