

Métodos computacionales para el análisis de sistemas de potencia

Fernando Toledo Toledo



AM
C1005
3.43



FERNANDO TOLEDO TOLEDO realizó estudios de ingeniería industrial en electricidad en el Tecnológico de Oaxaca y de maestría en ingeniería eléctrica en la ESIME. Desde 1981 es profesor-investigador de la UAM-A, en donde imparte clases en el área de sistemas de potencia. Ha trabajado como asesor e instructor para el Instituto Mexicano del Petróleo y Pemex. Actualmente se dedica al desarrollo de software para aplicaciones en sistemas industriales y de potencia.

MÉTODOS COMPUTACIONALES PARA EL ANÁLISIS
DE SISTEMAS DE POTENCIA

COLECCIÓN
Libros de Texto y Manuales de Práctica

Métodos computacionales para el análisis de sistemas de potencia

Fernando Toledo Toledo



2893050

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Rector General

Dr. Julio Rubio Oca

Secretario General

M. en C. Magdalena Fresán Orozco

UNIDAD AZCAPOTZALCO

Rector

Lic. Edmundo Jacobo Molina

Secretario

Mtro. Jordy Micheli Thiri6n

Coordinador de Extensi6n Universitaria

Lic. Alberto Dogart Murrieta

Jefe de la Secci6n Editorial

Lic. Valent6n Almaraz Moreno

Portada

Virginia Flores/Sans Serif Editores

Composici6n tipogr6fica, dise1o, producci6n y cuidado editorial

Sans Serif Editores, telfax 674 60 91

Primera edici6n 1997

ISBN: 970-654-072-5

© Universidad Aut6noma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo n6m. 180

M6xico, 02200, D.F.

Impreso en M6xico

Printed in Mexico

*Con todo amor al orgullo de mi vida:
Xhivani*

Antes, en todas estas cosas somos más que vencedores por medio de aquel que nos amó.

Por lo cual estoy seguro de que ni la muerte, ni la vida, ni ángeles, ni principados, ni potestades, ni lo presente, ni lo por venir, ni lo alto, ni lo profundo, ni ninguna otra cosa creada nos podrá separar del amor de Dios, que es en Cristo Jesús Señor Nuestro.

Romanos 8.37-39.

PREFACIO

El sistema eléctrico de potencia (SEP) es un conjunto de elementos para convertir, transformar y transmitir energía; su análisis ha sufrido —a raíz del advenimiento de las computadoras digitales— una evolución en sus conceptos, su formulación y su resolución matemática. El ingeniero de sistemas de potencia deberá conocer los métodos para estudiar el SEP operando normalmente (régimen permanente equilibrado) y en condiciones de falla (régimen desequilibrado).

Métodos computacionales para el análisis de sistemas de potencia es un texto que presenta las técnicas computacionales más usuales para el modelado y análisis de sistemas de potencia en régimen permanente equilibrado y desequilibrado. El material puede ser cubierto en un curso de aproximadamente 50 horas.

Es deseable que los estudiantes y lectores estén familiarizados con temas tales como:

- Análisis fasorial de sistemas trifásicos.
- Modelos de representación de componentes de la red.
- Álgebra matricial y compleja.
- Técnicas básicas de programación.

El presente libro surge de la necesidad de tener un texto accesible en español sobre el tema, puesto que la bibliografía de apoyo es cara y difícil de conseguir. Presenta los aspectos fundamentales de los estudios más comunes asociados a redes de potencia, como el modelado de redes de potencia, los flujos de carga y cortocircuito, etc., con un enfoque de solución computacional. Los conceptos son accesibles tanto para el estudiante

como para el ingeniero experimentado, y en cada tema se presentan ejemplos que ilustran los problemas de carácter real.

En la sección de estudios de cortocircuito se incluye la metodología, así como también las principales gráficas y tablas de aplicación de la norma IEEE 141-1986 (R93), de empleo muy difundido en instalaciones eléctricas industriales y como base fundamental para los estudios de protección y coordinación de protecciones de sobrecorriente.

En esta versión se incluyen cuatro apéndices; dos de carácter introductorio al análisis de redes de potencia, un tercero donde se presenta una metodología de estimación de valores de falla, y el último donde se muestran problemas tipo para cada uno de los temas cubiertos:

- Normalización en p.u.
- Componentes simétricas.
- Estimación de las corrientes de falla trifásica y de línea a tierra en plantas industriales.
- Problemario.

La producción de un libro de texto requiere la cooperación y el esfuerzo de muchas personas. Deseo agradecer los comentarios y críticas recibidos de mis alumnos y compañeros profesores del área de investigación a lo largo de años de docencia. También quiero hacer un reconocimiento especial al alumno Kiyoshi Ricardo Me-guro Yuno, por su entusiasmo y colaboración en este proyecto.

Todas las críticas constructivas acerca del presente libro seguirán siendo recibidas con agradecimiento.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I.1. EL SISTEMA DE POTENCIA EN ESTADO ESTABLE. MODELADO DEL SISTEMA

La principal función de un sistema eléctrico de potencia es suministrar energía eléctrica con una adecuada *calidad de servicio*, cuyos elementos básicos son:

- a) Control de la frecuencia.
- b) Regulación del voltaje.
- c) Continuidad del servicio.

Para poder cumplir adecuadamente con estos requisitos es indispensable realizar estudios sobre el sistema que nos permitan predecir su comportamiento bajo distintos *estados de operación*. Esto permitirá que, cuando se presente una contingencia, se tengan definidas estrategias y alternativas de operación que garanticen un número mínimo de usuarios afectados. En términos generales una contingencia es un desequilibrio de potencia (activa, reactiva o ambas).

Un sistema que opera en régimen permanente *equilibrado* es aquel que cumple con las siguientes *restricciones de igualdad*:

- Suma fasorial de corrientes y voltajes igual a cero:

$$V_A + V_B + V_C = 0$$

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

- Impedancias por fase iguales:

$$Z_A = Z_B = Z_C$$

Un sistema que cumpla con estas restricciones puede ser modelado y resuelto mediante una representación monofásica (red de secuencia positiva).

En caso de no cumplir con alguna de estas restricciones se considerará que el sistema está operando en régimen permanente *desequilibrado*, y consecuentemente no se podrá analizar mediante el modelo monofásico simplificado. Se tendrán que utilizar técnicas alternativas, siendo la más común la de *componentes simétricas*.

Por otro lado, existen también las denominadas *restricciones de desigualdad*, que tienen que ver con operación del equipo: sobrecargas, regulación, temperatura operativa, etc. Su representación matemática, como su nombre lo dice, son desigualdades.

I.2. ESTADOS DE OPERACIÓN DE UN SISTEMA DE POTENCIA

Un sistema de potencia puede operar en varios *estados* diferentes, como se muestra en la figura I.1.

Durante más de 99% del tiempo, un sistema se encuentra operando en *estado normal*. Bajo esta condición, la frecuencia y el voltaje de las barras se mantienen en valores predeterminados. Bajo el concepto de *calidad de servicio* la frecuencia no debe variar más de 1%, mientras que las variaciones de voltaje en puntos de utilización no deben ser mayores a 10 por ciento.

Como veremos posteriormente, esta condición de frecuencia y voltaje constante es el resultado de un cuidadoso equilibrio entre las potencias activa y reactiva demandadas por las cargas

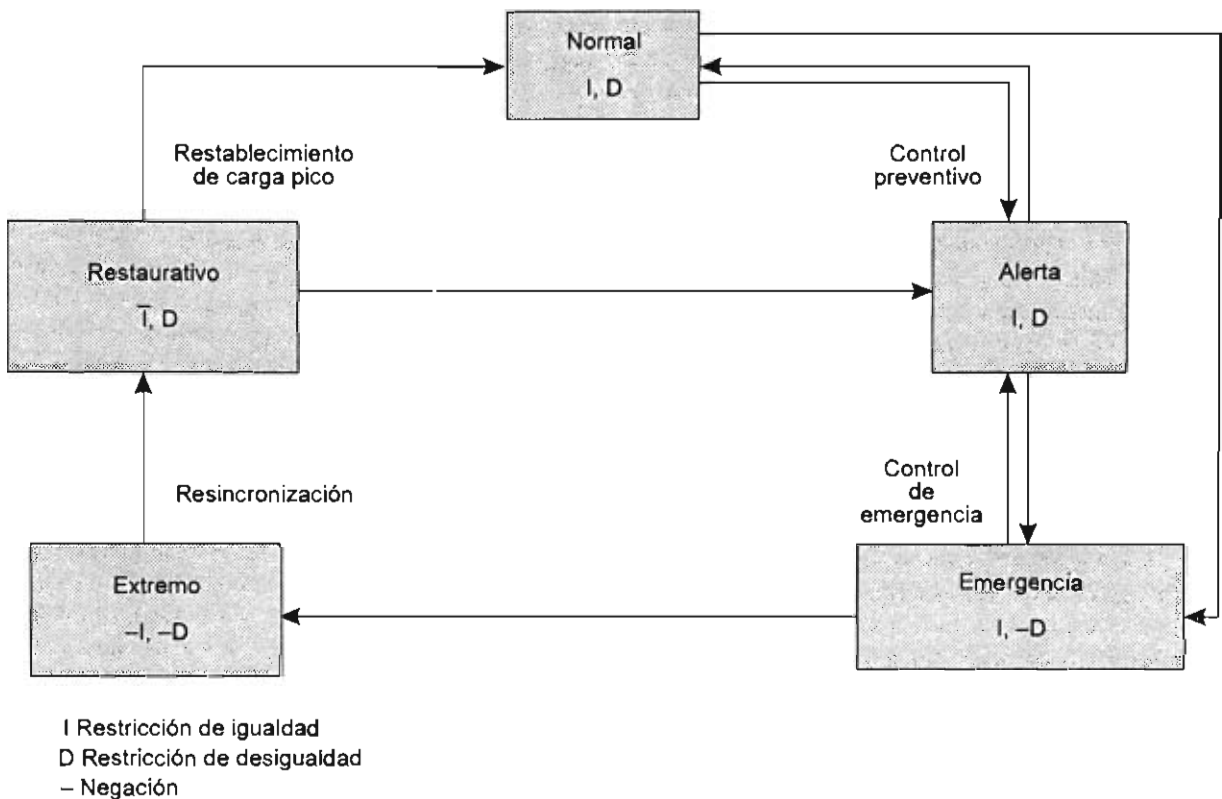


Figura I.1. Diagrama de transición de estado.

y las suministradas por las fuentes de potencia. La problemática de la operación de una red de potencia consiste en tratar de mantener un equilibrio entre la potencia suministrada (tanto P como Q) y la demandada por las cargas junto con las pérdidas y requerimientos reactivos de todos los elementos de transmisión.

Este concepto de *igualdad* entre la generación y la demanda es un prerequisite fundamental para la *normalidad* del sistema, como se indica por el símbolo I (igualdad) en la figura I.1. El segundo símbolo (D , desigualdad) indica que ciertas condiciones —representadas matemáticamente por desigualdades— deben también cumplirse en el estado normal.

Las restricciones de desigualdad D en el sistema se caracterizan por el cumplimiento de ciertas condiciones de operación representadas matemáticamente por desigualdades. Por ejemplo, las cargas a transformadores y generadores no deben exceder las capacidades nominales; las

líneas de transmisión no deben sobrecargarse más allá de sus límites térmicos o de estabilidad en estado estable, las caídas de voltaje o sobrevoltajes no deben sobrepasar los márgenes de regulación, etcétera.

El estado normal también debe poseer cierto nivel de seguridad, el cual requiere determinado *margen de generación* en forma de *reserva rodante* (unidades incorporadas al sistema que no están entregando toda su potencia nominal). Es política común mantener una capacidad rodante equivalente a la capacidad de la unidad más grande que se tenga operando en el sistema; esta capacidad rodante será la suma de las capacidades de reserva de cada una de las unidades generadoras que estén operando en el sistema.

Cuando el margen de generación decrece debido a la presencia de un disturbio que, sin ser severo, reduce el nivel de seguridad, el sistema entra en un *estado de alerta*. Hasta este punto todas las igualdades I y desigualdades D se siguen

cumpliendo, y el sistema sigue operando totalmente sincronizado y —con suerte— así continuará por un largo periodo. Es ahora cuando se deben iniciar las acciones de *control preventivo* para restituir el margen de generación adecuado, eliminar los disturbios, y así regresar el sistema a su estado normal.

Si el control preventivo falla u ocurre un disturbio muy severo, el sistema entrará en un *estado de emergencia*, el cual puede ser regresado directamente hacia el estado normal o de alerta mediante el *control de emergencia*. En el estado de emergencia la generación no es capaz de sostener la carga pero el sistema aún permanece en sincronismo (el símbolo I no ha cambiado pero una o varias componentes del sistema están ahora sobrecargadas) (observe la negación del símbolo D); conforme algunas de esas componentes falle, el sistema perderá coherencia al empezar a desintegrarse. Es urgente que sea regresado a su estado normal o de alerta por medio de acciones de *control emergente*, como por ejemplo: desconexión de la sección fallada, reorientación de flujos de carga, o si estos últimos fallan, la desconexión de cargas (*tiro de carga*).

Si las acciones de control de emergencia fallan, el sistema entrará al *estado extremo*; por ejemplo, la desintegración del sistema en secciones o islas, algunas de las cuales tendrán suficiente generación para alimentar la carga, y en otras en donde los generadores serán esforzados más allá de sus capacidades. Note que tanto I como D están negados en este estado. Como nunca se debe tolerar un estado de sobrecarga a los generadores por la posibilidad de que sufran un daño severo, este

estado marca el preludio a un colapso total del sistema.

La sucesión de eventos que transfieren al sistema de su estado normal al extremo se desarrollan en periodos que van desde unos pocos segundos a varios minutos. Para regresar al estado normal (p.e. a través del estado restaurativo) se requieren intervalos de tiempo mucho mayores, de horas y algunas veces hasta de días para la integración total del sistema generación-carga.

1.3. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN INGENIERÍA

A causa de la complejidad de los sistemas eléctricos de potencia (SEP) —considerados hoy en día los sistemas más grandes que el hombre pretende tener bajo control— se hace insustituible el empleo de metodologías computacionales y ordenadores de gran capacidad y velocidad para realizar el análisis del comportamiento de estos sistemas. Para la solución actual de los problemas de ingeniería y en particular de la ingeniería eléctrica de potencia es indispensable el conocimiento adecuado de herramientas computacionales como: algoritmos, lenguajes de programación, manejo de sistemas operativos, sistemas de adquisición y procesamiento de datos en tiempo real, etcétera.

Los modernos sistemas de control utilizan de manera sistemática todas estas herramientas para cumplir adecuadamente con el compromiso de la calidad de servicio en el suministro de energía eléctrica.

CAPÍTULO II

MATRICES DE INCIDENCIA Y DE RED

II.1. TOPOLOGÍA DE REDES

La formación de un modelo matemático confiable es el primer paso en el análisis de un sistema de potencia. El modelo debe describir las características de cada uno de sus componentes así como las relaciones que gobiernan la conectividad de esos elementos (topología de la red). Una ecuación matricial del sistema provee un conveniente modelo matemático para una solución digital por computadora.

Los elementos de esta matriz del sistema dependen de la selección de las variables independientes, las cuales pueden ser corrientes o voltajes, que serán, respectivamente, impedancias o admitancias.

Las características eléctricas de cada uno de los elementos son presentadas convenientemente en la forma de una *matriz primitiva*. Esta matriz describe adecuadamente las características de admitancia o impedancia propia y mutua para cada componente, pero no provee información relacionada con la conectividad de éstos en el sistema.

Existen dos tipos de matrices primitivas:

- *Matriz de impedancias primitivas* $[z]$
- *Matriz de admitancias primitivas* $[y]$

La construcción de la matriz $[z]$ se realiza mediante el vaciado directo de valores de impedancia primitiva de los elementos: en la diagonal principal valores de impedancia propia, y fuera de la diagonal principal impedancias mutuas. Es así como esta matriz es *cuadrada, simétrica, compleja y no singular* de orden $e \times e$ (donde e representa el número de elementos de la red). Por

inversión de esta matriz se obtiene la *matriz de admitancias nodales* $[y]$, la cual tiene las mismas características matemáticas de la matriz $[z]$.

Partiendo de estas matrices primitivas, es necesario transformarlas en *matrices del sistema* o *matrices de red*, las cuales describen el comportamiento del sistema considerando simultáneamente aspectos de impedancia o admitancia y de conectividad. *Estas matrices pueden ser formadas por simple inspección de la red siempre y cuando no existan elementos acoplados en forma de impedancia*. Por ejemplo, para la matriz Y_{BUS} se tienen las siguientes ecuaciones:

Elementos de la diagonal principal:

$$Y_{pp} = \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^n \frac{1}{z_{pq,rs}} \quad r, s = p; \quad p = 1, 2, \dots, n$$

Elementos fuera de la diagonal principal:

$$Y_{pq} = \sum_{q=1}^n \frac{1}{z_{pq,pq}} \quad p \neq q \quad p = 1, 2, \dots, n$$

La representación de la matriz del sistema depende del *modelo de referencia* empleado (nodal, de malla o de rama). De estos tres modelos el modelo de referencia nodal (BUS) es el más utilizado en la actualidad; en este caso las variables son los voltajes y corrientes de nodo, planteándose en forma de admitancia y resolviéndose en impedancia. La formación de la apropiada matriz del sistema es una parte integral de un programa digital de computadora para la solución de problemas relacionados con la operación de sistemas eléctricos de potencia (SEP).

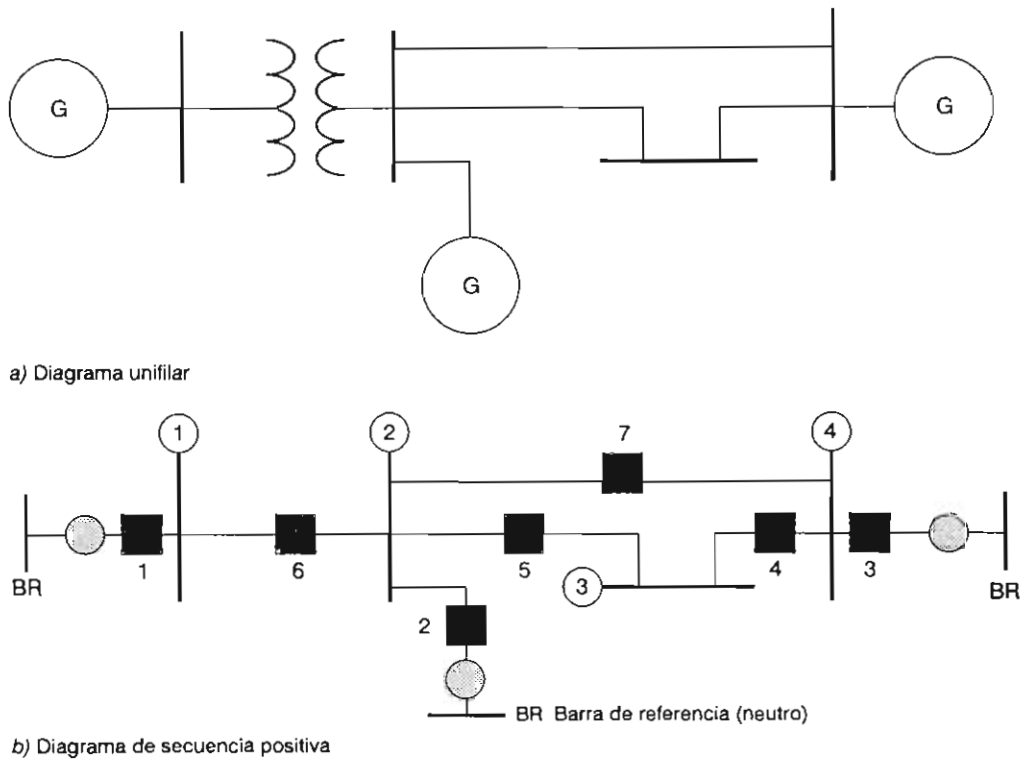


Figura II.1. Representación de un sistema de potencia.

II.2. GRÁFICOS DE UNA RED

Cuando la red analizada contiene elementos acoplados en forma de impedancia, para obtener las matrices de red se utiliza una combinación lineal de matrices primitivas y de incidencia. Estas últimas parten de un modelo gráfico que describe la conectividad de todos sus elementos. Para definir la estructura geométrica de una red eléctrica basta reemplazar los componentes del sistema por simples segmentos de líneas, independientemente de sus características (transformadores, líneas, generadores, etc.). Estos segmentos de líneas son llamados *elementos* y sus terminales *nodos*. Los segmentos de líneas se orientan mediante flechas, siendo esta orientación arbitraria; sin embargo, es conveniente que, estando conectado el elemento a los nodos p y q , se cumpla para simplificación algorítmica que: $q > p$. Se dice entonces que el elemento sale de p y entra a q .

Un nodo y un elemento son incidentes si el nodo es una terminal del elemento. Los nodos

pueden ser incidentes a uno o más elementos. Un *grafo* o gráfico muestra la interconexión geométrica (*topológica*) de una red eléctrica. Un *subgrafo* es cualquier subconjunto de los elementos del grafo. Una *trayectoria* es un subgrafo de elementos conectados con no más de dos elementos conectados a cualquier nodo.

Un grafo es conectado si y sólo si existe al menos una trayectoria entre cualquier par de nodos. Si a cada elemento del grafo conectado se le asigna una dirección, entonces se dice que el grafo es *orientado y conectado*.

Una representación de un sistema se muestra en la figura II.1 y el correspondiente grafo orientado y conectado en la figura II.2.

Un subgrafo conectado, que contiene todos los nodos del grafo y no contiene trayectorias cerradas es un *árbol*. Los elementos de un árbol se llaman *ramas* y forman un subconjunto de los elementos del grafo. El número de ramas b requerido para formar un árbol es:

$$b = n - 1 \quad (\text{II.2.1})$$

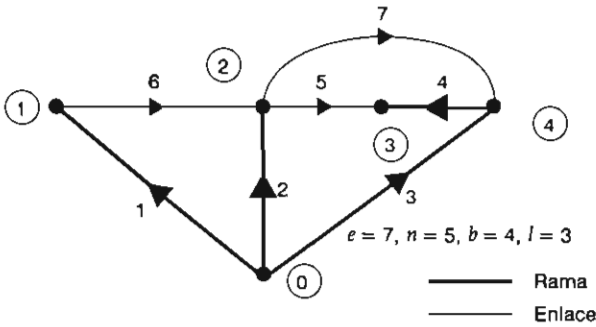


Figura II.2. Árbol y coárbol del grafo orientado.

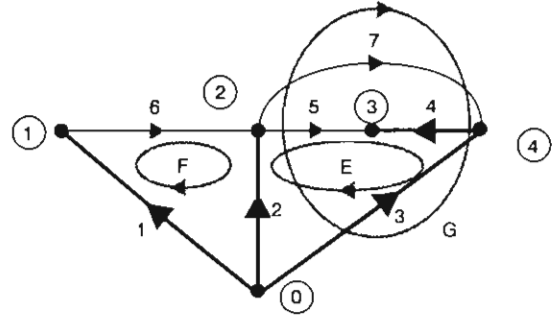


Figura II.3. Mallas básicas.

Donde n es el número de nodos del grafo. Aquellos elementos del grafo conectado que no están incluidos en el árbol se denominan *enlaces* y forman un subgrafo, no necesariamente interconectado, llamado *coárbol*. El número de enlaces l de un grafo conectado con e elementos es:

$$l = e - b \quad (\text{II.2.2})$$

De la ecuación II.2.1 se deduce que:

$$l = e - n + 1 \quad (\text{II.2.3})$$

Un árbol y su correspondiente coárbol del grafo se muestra en la figura II.2. Aquí se observa que la numeración de elementos corresponde en orden *primero a las ramas y después a los enlaces*. Los números de las ramas se eligieron de tal manera que al ir añadiendo al grafo rama a rama se genera un nuevo nodo (también en orden creciente), mientras que al adicionar enlaces no se crea ningún nuevo nodo. De esto se deduce que *antes de numerar los elementos es conveniente seleccionar el árbol del sistema*, puesto que éste no es único.

Si un enlace se añade al árbol, el grafo resultante contiene una trayectoria cerrada llamada *mallá*. La adición de subsecuentes enlaces forma una o más mallas adicionales. *Las mallas que contienen un solo enlace son independientes y se denominan mallas básicas*. Consecuentemente, el número de mallas básicas es igual al número de enlaces dado por la ecuación (II.2.3). La orientación de una malla básica se elige de acuerdo con la orientación de su enlace. Las mallas básicas del grafo (figura II.2) se muestran en la figura II.3.

Un *conjunto cortado* es una colección de elementos que, si son eliminados, dividen un grafo conectado en dos subgrafos conectados. Un grupo de subconjuntos cortados único e independiente puede ser seleccionado si cada conjunto cortado *contiene sólo una rama*. Los conjuntos cortados que contienen una sola rama se llaman *conjuntos cortados básicos*. El número de conjuntos cortados básicos es igual al número de ramas; la orientación de un conjunto cortado básico se elige de acuerdo con la única rama que contiene. Los conjuntos cortados básicos del grafo de la figura II.2 se muestran en la figura II.4.

II.3. MATRICES DE INCIDENCIA

Cuando los elementos que componen un sistema no están acoplados en forma de impedancia, las matrices de red se generan normalmente por inspección. En caso contrario es necesaria la utilización de otras metodologías, dentro de las que destacan las *transformaciones singulares*. Este método parte de la obtención de las *matrices de*

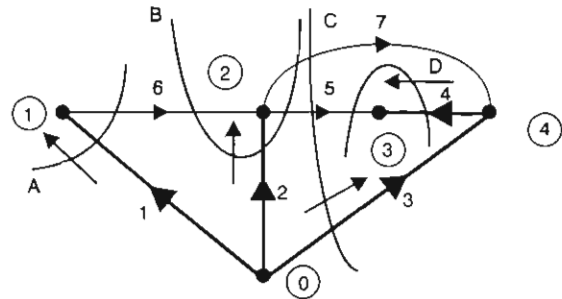


Figura II.4. Conjuntos cortados básicos.

incidencia. Como su nombre lo indica, estas matrices describen, mediante ceros y unos, la conectividad de los elementos hacia componentes de la red (nodos, mallas y ramas); si el elemento no incide al componente se asigna un cero, y si es incidente, dependiendo de su sentido, un uno o un menos uno. El establecimiento de una *matriz de red* tiene implícita la *elección de un modelo de referencia*: nodal, de rama o de mallas. Para cada uno de los casos será necesario que se obtengan las matrices A , B o C respectivamente, de tal manera que para obtener la matriz de red sólo será necesario obtener una matriz de incidencia.

II.3.1. Matriz de incidencia elemento-nodo \hat{A}

La incidencia de los elementos hacia los nodos en un grafo conectado se muestra en la matriz de incidencia elemento-nodo \hat{A} . Los elementos de esta matriz a_{ij} se determinan como sigue:

$a_{ij} = 1$, si el i -ésimo elemento está conectado al nodo j y sale de él.

$a_{ij} = -1$, si el i -ésimo elemento es incidente al nodo j y llega a él.

$a_{ij} = 0$, si el i -ésimo elemento no es incidente al nodo j .

La dimensión de la matriz \hat{A} es de $(e \times n)$, donde e es el número de elementos y n el número de nodos del grafo; la matriz de incidencia elemento-nodo para el grafo de la figura II.2 es:

$e \backslash n$	0	1	2	3	4
1	1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	0	0
3	1	0	0	0	-1
$\hat{A} = 4$	0	0	0	-1	1
5	0	0	1	-1	0
6	0	1	-1	0	0
7	0	0	1	0	-1

Puesto que:

$$\sum a_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, e$$

Las columnas de \hat{A} son linealmente dependientes. Por lo tanto el rango de $\hat{A} < n$.

II.3.2. Matriz de incidencia nodal (o de BUS) A

Cualquier nodo de un grafo conectado puede ser elegido de referencia; no obstante se aconseja siempre elegir el neutro para una red de secuencia positiva o negativa, y la tierra física para la red de secuencia cero. Entonces las variables de los otros nodos, referidos como barras o "buses", pueden ser medidas con respecto a la referencia asignada. La matriz obtenida de \hat{A} eliminando la columna correspondiente al nodo de referencia, es la matriz de incidencia elemento-barra A (elemento-bus), la cual será llamada *matriz de incidencia nodal*.

La dimensión de esta matriz es de $e \times (n - 1)$ y su rango $n - 1 = b$, donde b es el número de ramas en el grafo. Seleccionando al nodo 0 como el de referencia para el gráfico de la figura II.3:

$e \backslash n$	1	2	3	4
1	-1	0	0	0
2	0	-1	0	0
3	0	0	0	-1
$A = 4$	0	0	-1	1
5	0	1	-1	0
6	1	-1	0	0
7	0	1	0	-1

Esta matriz es rectangular y consecuentemente singular

Si las filas de A se acomodan según un árbol en particular, la matriz puede ser particionada en submatrices A_b de dimensión $b \times (n - 1)$ y A_l de dimensión $l \times (n - 1)$, donde las filas de A_b corresponden a ramas y las filas de A_l a enlaces. La matriz particionada para el grafo mostrado en la figura II.2 es la siguiente:

$A =$	n	e	1	2	3	4	Nodos	
	1	-1	0	0	0	0	A_b	↑ Ramas
2	0	-1	0	0	0			
3	0	0	0	-1	0			
4	0	0	-1	1	0			
5	0	1	-1	0	0	0	A_l	↑ Enlaces
6	1	-1	0	0	0			
7	0	1	0	-1	0			

A_b es una matriz cuadrada no singular con rango $(n - 1)$.

II.3.3. Matriz de incidencia rama-trayectoria K

La incidencia de ramas a trayectorias en un árbol se muestra mediante la *matriz de incidencia rama-trayectoria*, donde una trayectoria es un camino —a través del árbol— de cualquier nodo hacia el nodo de referencia.

Los elementos de esta matriz son:

$k_{ij} = 1$, si la i -ésima rama está en la trayectoria desde el BUS j -ésimo y está orientada en la misma dirección.

$k_{ij} = -1$, si la i -ésima rama está en la trayectoria desde el j -ésimo BUS hacia el de referencia, pero está orientada en la dirección opuesta.

$k_{ij} = 0$, si la i -ésima rama no está en la trayectoria del j -ésimo BUS hacia el de referencia.

Con el nodo 0 como referencia, la matriz de incidencia rama-trayectoria asociada al árbol de la figura II.2 es:

		trayectorias			
		1	2	3	4
ramas	1	-1	0	0	0
2	0	-1	0	0	0
3	0	0	-1	-1	0
4	0	0	-1	0	0

Ésta es una matriz cuadrada no singular con rango $(n - 1)$.

La matriz de incidencia rama-trayectoria y la submatriz A_b establecen la relación ramas-trayectorias y ramas-barras, respectivamente. Puesto que existe una correspondencia "uno a uno" entre trayectorias y barras, se cumple:

$$A_b K' = U \quad (II.3.1)$$

Por lo tanto:

$$K' = A_b^{-1} \quad (II.3.2)$$

II.3.4. Matriz de incidencia conjunto cortado básico B

Los elementos de esta matriz son:

$b_{ij} = 1$, si el i -ésimo elemento es incidente y está orientado en la misma dirección que el j -ésimo conjunto cortado básico.

$b_{ij} = -1$, si el i -ésimo elemento es incidente y está orientado en la dirección opuesta al j -ésimo conjunto cortado básico.

$b_{ij} = 0$, si el i -ésimo elemento no es incidente al j -ésimo conjunto cortado básico.

La matriz de incidencia conjunto cortado básico, de dimensión $e \times b$, para el grafo de la figura II.4 es:

	e	conjuntos cortados básicos			
		A	B	C	D
elementos	1	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	-1	1	1	0
6	-1	1	0	0	0
7	0	-1	1	0	0

La matriz B puede ser particionada en submatrices U_b y B_v , donde las filas de U_b corresponden a ramas y las filas de B_v a enlaces.

La matriz particionada es:

e \ b	conjuntos cortados básicos				Ramas	Enlaces
	A	B	C	D		
1	1				↑	U _b
2		1				
3			1			
4				1		
5		-1	1	1	↑	B _l
6	-1	1				
7		-1	1			

La matriz de incidencia U_b muestra la correspondencia uno a uno entre ramas y conjuntos cortados básicos.

La submatriz B_l puede obtenerse de la matriz de incidencia de barra A. La incidencia de ramas a buses está mostrada por la submatriz A_b , puesto que hay correspondencia uno a uno entre ramas y conjuntos cortados básicos. El producto $B_l A_b$ muestra la incidencia de enlaces a buses, esto es:

$$B_l A_b = A_l$$

Por lo que:

$$B_l = A_l A_b^{-1}$$

En suma, en relación con la ecuación (II.3.2):

$$A_b^{-1} = K'$$

$$B_l = A_l K' \quad (\text{II.3.3})$$

II.3.5. Matriz de incidencia a malla básica C

La incidencia de elementos a mallas básicas de un grafo conectado se muestra en la *matriz de incidencia de malla básica C*. Los elementos de esta matriz son:

$c_{ij} = 1$, si el i -ésimo elemento incide y está orientado en la misma dirección que la j -ésima malla básica.

$c_{ij} = -1$, si el i -ésimo elemento incide y está orientado en la dirección opuesta a la j -ésima malla básica.

$c_{ij} = 0$, si el i -ésimo elemento no incide en la j -ésima malla básica.

La matriz de incidencia a malla básica de dimensiones $(e \times l)$ para el grafo que se muestra en la figura II.3 es:

e \ l	E	F	G
1	0	1	0
2	1	-1	1
3	-1	0	-1
4	-1	0	0
5	1	0	0
6	0	1	0
7	0	0	1

Esta matriz C puede ser particionada en submatrices C_b y U_l , donde los renglones de C_b corresponden a ramas y los renglones de U_l a enlaces.

e \ l	E	F	G	
1		1		C _b Ramas
2	1	-1	1	
3	-1		-1	
4	-1			
5	1			U _l Enlaces
6		1		
7			1	

La matriz identidad U_l muestra la correspondencia uno a uno de enlaces hacia mallas básicas.

II.4. MATRICES PRIMITIVAS DE RED

Las representaciones alternativas de un componente de la red se muestran en la figura II.5. Las relaciones tensión-corriente pueden ser expresadas en función de equivalentes Thevenin o Norton; las variables utilizadas son:

- v_{pq} Voltaje a través del elemento $p-q$.
- e_{pq} Fuente de voltaje en serie con el elemento $p-q$.
- i_{pq} Corriente a través del elemento $p-q$.
- j_{pq} Fuente de corriente paralelo del elemento $p-q$.
- z_{pq} Impedancia propia del elemento $p-q$.
- y_{pq} Admitancia propia del elemento $p-q$.

Cada elemento tiene dos variables: v_{pq} e i_{pq} . En estado estable, estas variables y los parámetros de los elementos z_{pq} y y_{pq} son números reales para

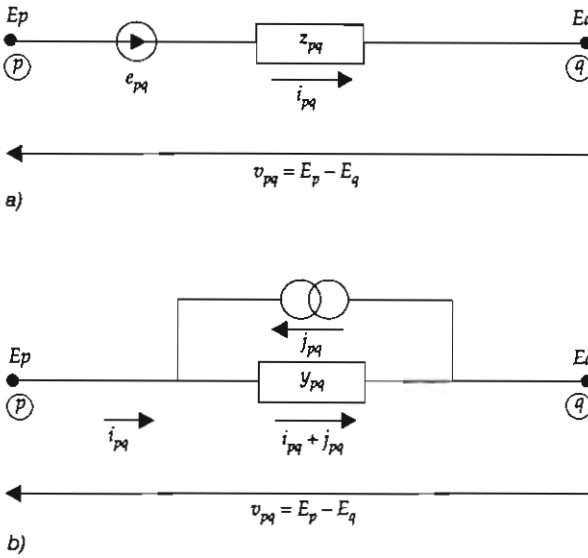


Figura II.5. Representaciones de un componente de red. a) Modelo de Impedancia. b) Modelo de admitancia.

circuitos en corriente directa, y números complejos para circuitos en corriente alterna. La ecuación de comportamiento para el elemento en forma de impedancia es:

$$v_{pq} + e_{pq} = z_{pq} i_{pq} \quad (II.4.1)$$

y en forma de admitancia:

$$i_{pq} + j_{pq} = y_{pq} v_{pq} \quad (II.4.2)$$

Las fuentes de corriente y voltaje empleados en cada representación se relacionan mediante:

$$j_{pq} = -y_{pq} e_{pq}$$

Una red primitiva se define como un conjunto de elementos NO conectados. Las ecuaciones de comportamiento de una red primitiva pueden ser derivadas de las ecuaciones (II.4.1) o (II.4.2), expresando las variables como fasores y los parámetros como matrices. La ecuación de comportamiento en forma de impedancia es:

$$v + e = [z]i$$

y en forma de admitancia:

$$i + j = [y]v$$

Los elementos diagonales de la matriz $[z]$ o $[y]$ de la red primitiva son, correspondientemente, la impedancia propia $z_{pq, pq}$ o la admitancia propia $y_{pq, pq}$. Los elementos fuera de la diagonal representan las impedancias mutuas y las admitancias mutuas $z_{pq, rs}$ y $y_{pq, rs}$ entre los elementos $p-q$ y $r-s$ respectivamente. La matriz de admitancia primitiva $[y]$ puede ser obtenida por inversión de la matriz de impedancias primitiva $[z]$.

Estas matrices $[z]$ y $[y]$ son *matrices diagonales* si no existe acoplamiento mutuo entre elementos. En este caso las impedancias propias son iguales a los recíprocos de las correspondientes admitancias propias.

La matriz de impedancias primitiva $[z]$ se genera por vaciado directo de los valores de impedancia propia y mutua de los componentes de la red; es, como se mencionó anteriormente, una matriz cuadrada, simétrica y no singular de orden $e \times e$, donde e representa el número de elementos de la red. Al invertir esta matriz compleja se obtiene la matriz de admitancias primitiva $[y]$, cuyo grado de dispersidad (número de ceros fuera de la diagonal principal) no necesariamente corresponde al de la matriz $[z]$.

II.5. FORMACIÓN DE MATRICES DE RED POR TRANSFORMACIONES SINGULARES

II.5.1. Ecuaciones de la red

Un sistema está constituido por un conjunto de elementos interconectados. En el modelo de referencia nodal, el comportamiento de una red interconectada se describe mediante $(n - 1)$ ecuaciones independientes, donde n es el número de nodos. En notación matricial, la ecuación en modelo de impedancia es:

$$\tilde{E}_{BUS} = Z_{BUS} \tilde{I}_{BUS}$$

o en modelo de admitancia:

$$\tilde{I}_{BUS} = Y_{BUS} \tilde{E}_{BUS}$$

donde:

- \tilde{E}_{BUS} Vector de voltajes nodales (de bus) medidos con respecto al nodo, barra o bus de referencia.
- \tilde{I}_{BUS} Vector de corriente.
- Z_{BUS} Matriz de impedancias de bus cuyos elementos son impedancias equivalentes de Thevenin y de transferencia.
- Y_{BUS} Matriz de admitancias nodales (de bus) cuyos elementos son admitancias de cortocircuito y de transferencia.

En el modelo de referencia de ramas, el comportamiento de la red interconectada está descrita por b ecuaciones de rama independientes, donde b es el número de ramas (*branches*, en inglés). En notación matricial, las ecuaciones de comportamiento son:

$$\tilde{E}_{\text{BR}} = Z_{\text{BR}} \tilde{I}_{\text{BR}} \quad \text{modelo impedancia}$$

$$\tilde{I}_{\text{BR}} = Y_{\text{BR}} \tilde{E}_{\text{BR}} \quad \text{modelo admitancia}$$

donde:

- \tilde{E}_{BR} Vector de voltajes a través de las ramas.
- \tilde{I}_{BR} Vector de corrientes a través de las ramas.
- Z_{BR} Matriz de impedancias de rama, cuyos elementos son impedancias de circuito abierto y de transferencia de las ramas de la red.
- Y_{BR} Matriz de admitancia de rama, cuyos elementos son admitancias de cortocircuito y de transferencia de las ramas de la red.

En el modelo de referencia de mallas, el comportamiento de la red interconectada está descrita por l ecuaciones independientes de malla, donde l es el número de enlaces (uniones) o mallas básicas. Las relaciones tensión-corriente son:

$$\tilde{E}_{\text{malla}} = Z_{\text{malla}} \tilde{I}_{\text{malla}} \quad \text{modelo impedancia}$$

$$\tilde{I}_{\text{malla}} = Y_{\text{malla}} \tilde{E}_{\text{malla}} \quad \text{modelo admitancia}$$

donde:

- \tilde{E}_{malla} Vector de voltajes de malla básica.
- \tilde{I}_{malla} Vector de corrientes de malla básica.

Z_{malla} Matriz de impedancias de malla.

Y_{malla} Matriz de admitancia de malla

II.5.2. Matrices de admitancia e impedancia nodal (de bus o de barra)

La matriz de admitancia nodal Y_{BUS} puede obtenerse mediante la matriz de incidencia nodal A para relacionar las variables y parámetros de la red primitiva a cantidades de bus (nodales) de la red interconectada. La ecuación de comportamiento de la red primitiva:

$$\tilde{i} + \tilde{j} = [y] \tilde{v}$$

al premultiplicar por A' (transpuesta de A) se obtiene:

$$A' \tilde{i} + A' \tilde{j} = A' [y] \tilde{v} \quad (\text{II.5.1})$$

Puesto que la matriz A muestra la incidencia de los elementos a los buses, $A' \tilde{i}$ es un vector en el que cada elemento es la suma algebraica de las corrientes de los elementos de la red que terminan en un bus. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de corrientes, la suma algebraica de las corrientes en una barra es cero, esto es:

$$A' \tilde{i} = 0 \quad (\text{II.5.2})$$

Similarmente, $A' \tilde{j}$ nos da la suma algebraica de las corrientes hacia las barras y es equivalente al vector de corrientes representativas de cada barra.

$$\tilde{I}_{\text{BUS}} = A' \tilde{j} \quad (\text{II.5.3})$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.5.2) y (II.5.3) en la ecuación (II.5.1) se obtiene:

$$\tilde{I}_{\text{BUS}} = A' [y] \tilde{v} \quad (\text{II.5.4})$$

La potencia compleja en la red es el producto $(\tilde{I}_{\text{BUS}}^*)' \tilde{E}_{\text{BUS}}$ y la de potencias en la red primitiva es $(\tilde{j}^*)' \tilde{v}$. Estas potencias deben ser iguales, es decir, la transformación de variables de potencia debe respetar el equilibrio energético de la red, por lo que:

$$(\tilde{I}_{\text{BUS}}^*)' \tilde{E}_{\text{BUS}} = (\tilde{j}^*)' \tilde{v} \quad (\text{II.5.5})$$

Calculando el conjugado transpuesto de la ecuación (II.5.3)

$$(\tilde{I}_{\text{BUS}}^*)' = (\tilde{j}^*)' A^*$$

A es real, por lo que:

$$A^* = A$$

También:

$$(\tilde{I}_{\text{BUS}}^*)' = (\tilde{j}^*)' A \quad (\text{II.5.6})$$

Sustituyendo la ecuación (II.5.6) en la (II.5.5):

$$(\tilde{j}^*)' A \tilde{E}_{\text{BUS}} = (\tilde{j}^*)' \tilde{v}$$

Puesto que esta ecuación es válida para todos los valores de \tilde{j} se deduce que:

$$A \tilde{E}_{\text{BUS}} = \tilde{v} \quad (\text{II.5.7})$$

Sustituyendo la ecuación (II.5.7) en la (II.5.4):

$$\tilde{I}_{\text{BUS}} = A' [y] A \tilde{E}_{\text{BUS}} \quad (\text{II.5.8})$$

Sabemos que la ecuación de comportamiento de la red:

$$\tilde{I}_{\text{BUS}} = Y_{\text{BUS}} \tilde{E}_{\text{BUS}} \quad (\text{II.5.9})$$

Por analogía en (II.5.8) y (II.5.9):

$$Y_{\text{BUS}} = A' [y] A$$

La matriz de incidencia nodal A es singular, por lo tanto $A' [y] A$ es una *transformación singular* de $[y]$.

La matriz de impedancia nodal (Z_{BUS}) puede ser obtenida mediante:

$$Z_{\text{BUS}} = Y_{\text{BUS}}^{-1} = [A' [y] A]^{-1}$$

II.5.3. Matrices de admitancia e impedancia de rama

La matriz de admitancia de rama Y_{BR} se obtiene utilizando la matriz de incidencia conjunto cortado básico B que refiere las variables y paráme-

tros de la red primitiva a cantidades de rama de la red interconectada. La ecuación de comportamiento de la red primitiva en la forma de admitancia se premultiplica por B para obtener:

$$B' \tilde{i} + B' \tilde{j} = B' [y] \tilde{v} \quad (\text{II.5.10})$$

Puesto que la matriz B muestra la incidencia de elementos a conjuntos cortados básicos. $B' \tilde{i}$ es un vector en el cual cada elemento es la suma algebraica de las corrientes a través de los elementos incidentes a un determinado conjunto cortado básico.

Si removemos los elementos de un conjunto cortado básico dividimos a la red en dos subredes conectadas. Asimismo, un elemento del vector $B' \tilde{i}$ es la suma algebraica de la corriente entrando a una de las subredes y por la ley de Kirchhoff de corrientes es igual a cero:

$$B' \tilde{i} = 0 \quad (\text{II.5.11})$$

Similarmente, $B' \tilde{j}$ es un vector en el que cada elemento es la suma algebraica de corrientes de los elementos incidentes al conjunto cortado básico y es la corriente total en paralelo con una rama, por lo tanto:

$$\tilde{I}_{\text{BR}} = B' \tilde{j} \quad (\text{II.5.12})$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.5.11) y (II.5.12) en (II.5.10) obtenemos:

$$\tilde{I}_{\text{BR}} = B' [y] \tilde{v} \quad (\text{II.5.13})$$

La potencia total de la red es constante y vale $(\tilde{I}_{\text{BR}}^*)' \tilde{E}_{\text{BR}}$:

$$(\tilde{I}_{\text{BR}}^*)' \tilde{E}_{\text{BR}} = (\tilde{j}^*)' \tilde{v}$$

Obteniendo $(\tilde{I}_{\text{BR}}^*)'$ de la ecuación (II.5.12):

$$(\tilde{j}^*)' B^* \tilde{E}_{\text{BR}} = (\tilde{j}^*)' \tilde{v}$$

Como la matriz B es real, $B^* = B$ y:

$$(\tilde{j}^*)' \tilde{v} = (\tilde{j}^*)' B \tilde{E}_{\text{BR}}$$

Siendo que esta ecuación es válida para todos los valores de \tilde{j} , se deduce que:

$$\tilde{v} = B \tilde{E}_{BR} \quad (II.5.14)$$

Sustituyendo la ecuación II.5.14 en la II.5.13:

$$\tilde{I}_{BR} = B' [y] B \tilde{E}_{BR} \quad (II.5.15)$$

La relación entre las corrientes y voltajes de rama está dada por:

$$\tilde{I}_{BR} = Y_{BR} \tilde{E}_{BR} \quad (II.5.16)$$

Por analogía de las ecuaciones (II.5.15) y (II.5.16) se establece que:

$$Y_{BR} = B' [y] B$$

La matriz de incidencia conjunto cortado básico B es singular, por lo que $B' [y] B$ es una *transformación singular de [y]*.

La matriz de impedancia de rama Z_{BR} se obtiene por inversión de Y_{BR} :

$$Z_{BR} = Y_{BR}^{-1} = (B' [y] B)^{-1}$$

II.5.4. Matrices de admitancia e impedancia de malla

La matriz de impedancia de malla (loop) Z_{malla} se obtiene utilizando la matriz de incidencia elemento-malla básica C , que refiere las variables y parámetros de la red primitiva a cantidades de malla de la red interconectada. La ecuación de comportamiento de la red primitiva:

$$\tilde{v} + \tilde{e} = [z] \tilde{i}$$

Se premultiplica por C' para obtener:

$$C' \tilde{v} + C' \tilde{e} = C' [z] \tilde{i} \quad (II.5.17)$$

Como la matriz C describe la incidencia de los elementos a las mallas básicas de la red, $C' \tilde{v}$ es la suma algebraica de los voltajes alrededor de cada una de las mallas básicas.

Según la ley de Kirchhoff de voltajes *la suma algebraica de los voltajes en una malla es igual a cero*.

$$C' \tilde{v} = 0 \quad (II.5.18)$$

Similarmente, $C' \tilde{e}$ es la suma algebraica de los voltajes fuente a lo largo de cada malla básica, por lo que:

$$\tilde{E}_{malla} = C' \tilde{e} \quad (II.5.19)$$

Puesto que la potencia es invariante:

$$(\tilde{I}_{malla}^*)' \tilde{E}_{malla} = (\tilde{i}^*)' \tilde{e}$$

Sustituimos \tilde{E}_{malla} (II.5.19) en esta última ecuación:

$$(\tilde{I}_{malla}^*)' C' \tilde{e} = (\tilde{i}^*)' \tilde{e}$$

Como esta ecuación es válida para todos los valores de \tilde{e} , se deduce que:

$$(\tilde{i}^*)' = (\tilde{I}_{malla}^*)' C'$$

Por lo tanto:

$$\tilde{i} = C^* \tilde{I}_{malla}$$

Pero siendo C una matriz real $C = C^*$ y:

$$\tilde{i} = C \tilde{I}_{malla} \quad (II.5.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.5.18), (II.5.19) y (II.5.20) en la ecuación (II.5.17) determinamos:

$$\tilde{E}_{malla} = C' [z] C \tilde{I}_{malla} \quad (II.5.21)$$

La ecuación de comportamiento de la red en el modelo de referencia de malla es:

$$\tilde{E}_{malla} = Z_{malla} \tilde{I}_{malla} \quad (II.5.22)$$

Por analogía (II.5.21) y (II.5.22) se deduce:

$$Z_{malla} = C' [z] C$$

Puesto que C es una matriz singular, $C' [z] C$ es una *transformación singular de [z]*. Correspon-

dientemente, la *matriz de admitancia de malla* Y_{malla} se obtiene por:

$$Y_{\text{malla}} = Z_{\text{malla}}^{-1} = (C' [z] C)^{-1}$$

Las *transformaciones singulares* para obtener las matrices de red se muestran en el cuadro II.1.

CUADRO II.1. Formación de matrices de red por transformaciones singulares

Matrices de red				
	Primitiva	Malla	Bus	Rama
I N V E R S I O N	$[z]$	$C' [z] C \longrightarrow Z_{\text{malla}}$	Z_{BUS}	Z_{BR}
	\downarrow	$A' [y] A \longrightarrow Y_{\text{malla}}$		
	$[y]$	$\longrightarrow Y_{\text{BUS}}$		
		$B' [y] B \longrightarrow Y_{\text{BR}}$		

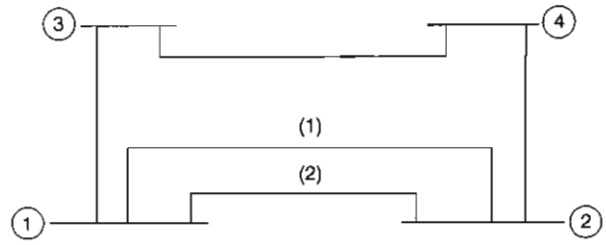
Las relaciones tensión-corriente entre redes primitivas e interconectadas se resumen en el cuadro II.2.

CUADRO II.2. Relaciones tensión-corriente entre redes interconectadas y primitivas

Modelo de referencia			
	Malla	Bus	Rama
Corriente	$\tilde{i} = C \tilde{I}_{\text{malla}}$	$\tilde{I}_{\text{BUS}} = A' \tilde{j}$	$\tilde{I}_{\text{BR}} = B' \tilde{j}$
Voltaje	$\tilde{E}_{\text{malla}} = C' \tilde{e}$	$\tilde{v} = A \tilde{E}_{\text{BUS}}$	$\tilde{v} = B \tilde{E}_{\text{BR}}$

II.6. EJEMPLO DE FORMACIÓN DE MATRICES DE INCIDENCIA Y DE RED

Las matrices de incidencia para un sistema dado *no son únicas* y dependen de la selección del grafo. Así, las matrices de red obtenidas variarán en función de la asignación del número de nodo, el número de elemento, la orientación, etc. Como ejemplo, considérese el sistema:



- Construya las matrices de incidencia \hat{A} , A , K , B y C .
- Forme las matrices Y_{BUS} , Y_{BR} y Z_{malla} por transformaciones singulares.

CUADRO II.3. Datos de impedancia para la red

Número de elemento	Código de barra (BUS)	Propia		Mutua	
		Impedancia $Z_{pq, pq}$	Código de barra	Impedancia $Z_{pq, rs}$	
1	1-2 (1)	0.6			
2	1-3	0.5	1-2 (1)	0.1	
3	3-4	0.5			
4	1-2 (2)	0.4	1-2 (1)	0.2	
5	2-4	0.2			

La red contiene cuatro nodos y cinco elementos, esto es:

$$n = 4 \quad e = 5$$

El número de ramas es: $b = n - 1 = 3$ y el número de mallas básicas es: $l = e - n + 1 = 2$

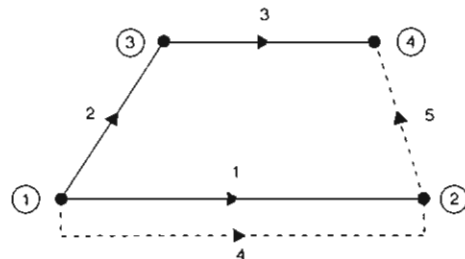


Figura II.8. Árbol y coárbol para el grafo orientado del sistema.

Las ramas y enlaces del grafo orientado y conectado para la red son las que se muestran en la figura II.8. La matriz de incidencia elemento-nodo \hat{A} es:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cccc} & \text{rama} & & & \\ e & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Seleccionando el nodo 1 como referencia (lo cual no es aconsejable),* la matriz de incidencia de bus (incidencia nodal) es:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|ccc} & \text{bus} & & \\ e & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Observe que la primera columna de esta matriz corresponde al nodo número 2, lo que se reflejará posteriormente en la matriz de admitancias nodales Z_{BUS} .

La matriz de incidencia trayectoria-rama es:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccc} & \text{trayectoria} & & \\ e & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Los conjuntos cortados básicos se muestran en la figura II.9.

La matriz de incidencia conjunto cortado básico B es:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|ccc} & \text{rama} & & \\ e & A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

* En un grafo se sugiere, en todos los casos, seleccionar el neutro o la tierra física (según sea el caso) como nodo de referencia, y asignarle el número cero a esta referencia para que las matrices de red Y_{BUS} y Y_{BR} tengan relación uno a uno entre casillas y nodos.

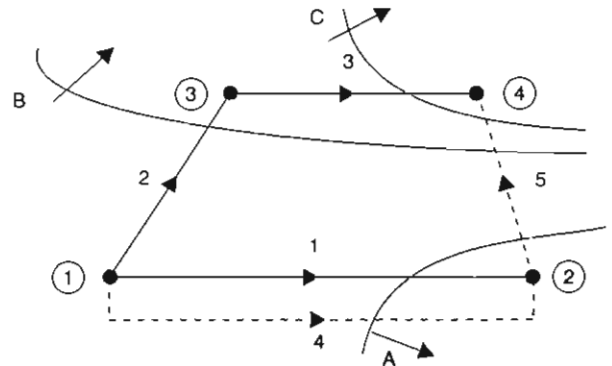


Figura II.9. Conjuntos cortados básicos del grafo orientado conectado del ejemplo.

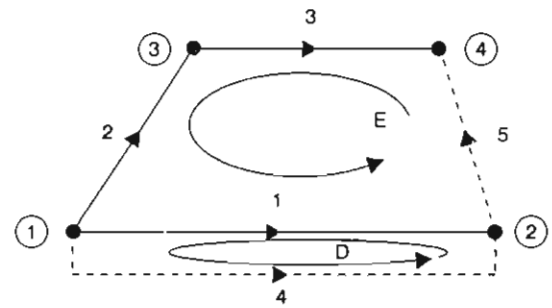


Figura II.10. Mallas básicas para el grafo conectado del ejemplo.

La matriz de incidencia malla básica C , con referencia a la figura II.10 es:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cc} & \text{enlace} & \\ e & D & E \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ \hline 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}$$

$$[\mathbf{z}] = \begin{array}{c|ccccc} & e & & & & \\ e & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 2 & 0.1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 4 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Matriz de impedancias} \\ \text{primitiva} \end{array}$$

Matrices de incidencia y de red

Por inversión la matriz de admitancia primitiva $[y]$ es:

$$[y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2.083 & -0.417 & 0 & -1.042 & 0 \\ -0.417 & 2.083 & 0 & 0.208 & 0 \\ 0 & 0 & 2.000 & 0 & 0 \\ -1.042 & 0.208 & 0 & 3.021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de admitancia nodal Y_{BUS} obtenida por transformación singular es:

$$Y_{BUS} = A' [y] A$$

$$Y_{BUS} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2.083 & -0.417 & 0 & -1.042 & 0 \\ -0.417 & 2.083 & 0 & 0.208 & 0 \\ 0 & 0 & 2.000 & 0 & 0 \\ -1.042 & 0.208 & 0 & 3.021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1.041 & 0.209 & 0 & -1.979 & 5.000 \\ 0.417 & -2.083 & 2.000 & -0.208 & 0 \\ 0 & 0 & -2.000 & 0 & -5.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8.020 & -0.209 & -5.000 \\ -0.209 & 4.083 & -2.000 \\ -5.000 & -2.000 & 7.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de impedancias de malla Z_{malla} por transformaciones singulares es:

$$Z_{malla} = C' [z] C$$

$$Z_{malla} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.4 & -0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & -0.4 & -0.5 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por lo que la matriz de impedancia de malla es:

$$\begin{array}{c} \text{D} \quad \text{E} \\ \text{D} \left| \begin{array}{cc} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 1.6 \end{array} \right| \\ \text{E} \end{array}$$

La matriz de admitancias de rama Y_{BR} por transformaciones singulares es:

$$Y_{BR} = B' [y] B$$

$$Y_{BR} = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2.083 & -0.417 & 0 & -1.042 & 0 \\ -0.417 & 2.083 & 0 & 0.208 & 0 \\ 0 & 0 & 2.000 & 0 & 0 \\ -1.042 & 0.208 & 0 & 3.021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$= \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1.041 & -0.209 & 0 & 1.979 & -5.000 \\ -0.417 & 2.083 & 0 & 0.208 & 5.000 \\ 0 & 0 & 2.000 & 0 & 5.000 \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| =$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \text{A} \left| \begin{array}{ccc} 8.020 & -5.209 & -5.000 \\ -5.209 & 7.083 & 5.000 \\ -5.000 & 5.000 & 7.000 \end{array} \right| \end{array}$$

CAPÍTULO III

ALGORITMOS PARA LA FORMACIÓN DE MATRICES DE RED

III.1. INTRODUCCIÓN

El método de transformaciones singulares presentado en el capítulo II requiere la transformación e inversión de matrices complejas para obtener la matriz de red. Puede emplearse un método alternativo para formar la matriz Z_{BUS} directamente a partir de las impedancias primitivas de los elementos del sistema y de su conectividad a los nodos, considerando ante todo que los elementos de la diagonal principal son impedancias equivalentes de Thevenin y los elementos fuera de ella son impedancias de transferencia.

El principio básico es la formación de matriz Z_{BUS} por pasos, simulando la construcción de la red y añadiendo los elementos uno a uno (algoritmo desarrollado por Brown, Person, Kirchmayer y Stagg en 1960).

III.2. ALGORITMO PARA LA FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIA NODAL Z_{BUS}

III.2.1. Ecuación de comportamiento de una red parcial

Asuma que la matriz de impedancia nodal Z_{BUS} se conoce para una red parcial de m buses y un nodo de referencia 0. La ecuación de comportamiento para esta red es:

$$\tilde{E}_{BUS} = Z_{BUS} \tilde{I}_{BUS}$$

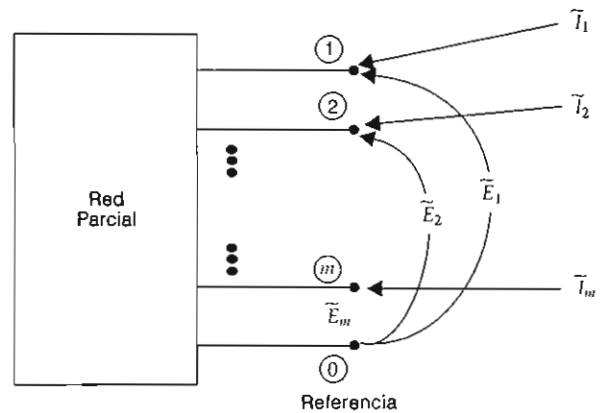


Figura III.1. Representación de una red parcial.

donde:

\tilde{E}_{BUS} Matriz ($m \times 1$) de voltajes de nodo con respecto al nodo de referencia, m número de nodos de la red parcial.

\tilde{I}_{BUS} Matriz ($m \times 1$) de corrientes impulsoras de nodo (o de inyección nodal).

Z_{BUS} Matriz ($m \times m$) de impedancias nodales de la red.

Cuando un elemento conectado a los nodos $p-q$ se añade a la red parcial, puede ser una rama o un enlace, como se muestra en la figura III.2.

Si el elemento $p-q$ es una rama, se tendrá que añadir un nuevo nodo o bus y la matriz de impedancia nodal Z_{BUS} crecerá a una dimensión $(m+1) \times (m+1)$.

Las nuevas matrices (vectores) de corrientes y voltajes serán de orden $(m+1) \times 1$. Para determi-

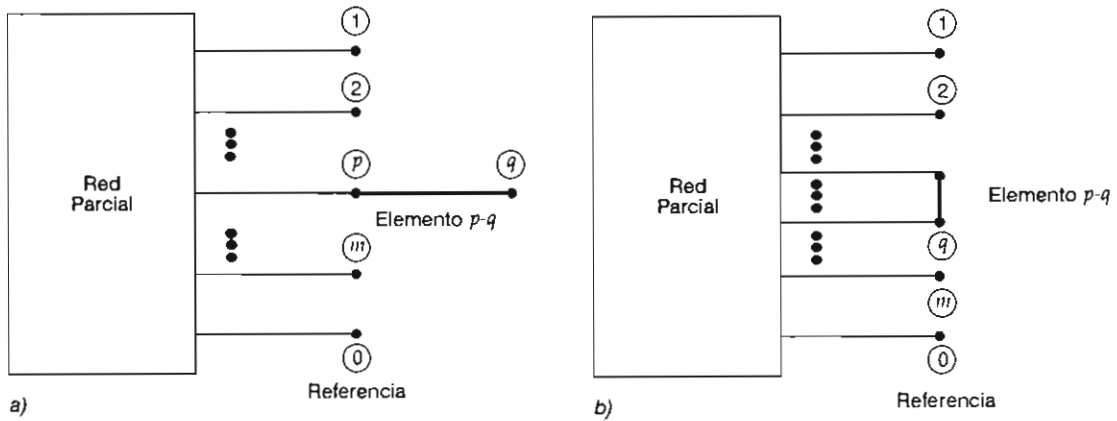


Figura III.2. Representación de una red parcial con la adición de un elemento. a) Rama, b) Enlace.

nar la nueva Z_{BUS} se requiere sólo del cálculo de los elementos de la nueva fila y columna.

Si el elemento $p-q$ es un *enlace*, no hay adición de bus a la red, y permanece el orden anterior de la matriz Z_{BUS} , pero todos los elementos *deben ser recalculados para incluir el efecto del nuevo elemento añadido*.

III.2.2. Adición de una rama

La ecuación de comportamiento de la red parcial con la inclusión de una rama $p-q$ es:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \dots \\ \tilde{E}_p \\ \dots \\ \tilde{E}_m \\ \tilde{E}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & & p & \dots & m & & q \\ & Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1p} & \dots & Z_{1m} & & Z_{1q} \\ & Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2p} & \dots & Z_{2m} & & Z_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & Z_{p1} & Z_{p2} & \dots & Z_{pp} & \dots & Z_{pm} & & Z_{pq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mp} & \dots & Z_{mm} & & Z_{mq} \\ & Z_{q1} & Z_{q2} & \dots & Z_{qp} & \dots & Z_{qm} & & Z_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \dots \\ \tilde{I}_p \\ \dots \\ \tilde{I}_m \\ \tilde{I}_q \end{bmatrix} \quad (III.2.1)$$

Se asume ahora (como es el caso común) que la red está constituida por elementos pasivos bilaterales. Como consecuencia, para la red parcial se cumple que $Z_{qi} = Z_{iq}$ ($i = 1, m$) siendo m el número de nodos de la red parcial (sin incluir el de referencia). La rama añadida $p-q$ se asume que está acoplada mutuamente con otros elementos de la red parcial.

Los elementos Z_{qi} (impedancias de transferen-

cia) pueden determinarse inyectando una corriente en el i -ésimo bus y calculando el voltaje en el q -ésimo bus con respecto al nodo de referencia, como se muestra en la figura III.3.

NOTA: Para las representaciones subsecuentes se omitirá el símbolo \sim para representar a los fasores y el símbolo $-$ se añadirá a las variables que representen a un vector (conjunto de variables subíndicadas), con la finalidad de facilitar la comprensión de las expresiones.

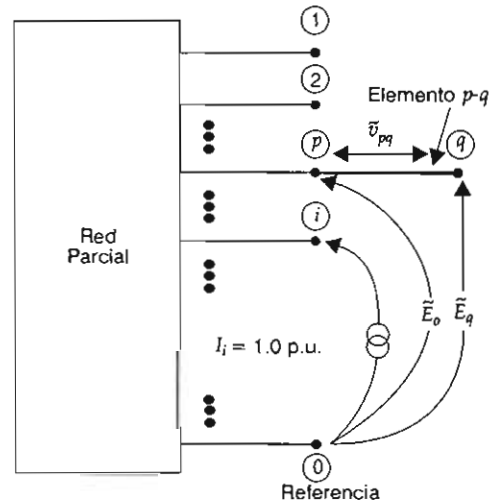


Figura III.3. Corriente inyectada y cálculo de voltajes para determinar Z_{qi} .

Como las corrientes en los otros nodos son cero, de acuerdo con la ecuación (III.2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= Z_{1i} I_i \\
 E_2 &= Z_{2i} I_i \\
 &\dots \\
 E_p &= Z_{pi} I_i \\
 &\dots \\
 E_m &= Z_{mi} I_i \\
 E_q &= Z_{qi} I_i
 \end{aligned} \tag{III.2.2}$$

Sustituyendo $I_i = 1.0$ p.u. en las ecuaciones (III.2.2), Z_{qi} puede obtenerse por cálculo directo de E_q . Los voltajes asociados al elemento añadido (voltaje a través del elemento) están definidos por:

$$E_q = E_p - v_{pq} \tag{III.2.3}$$

Las corrientes en los elementos de la red de la figura III.3 están expresados en términos de las admitancias primitivas y de los voltajes a través de los elementos mediante:

$$\begin{bmatrix} i_{pq} \\ \bar{i}_{p\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{pq,pq} & \bar{\psi}_{pq,p\sigma} \\ \bar{\psi}_{p\sigma,pq} & \bar{\psi}_{p\sigma,p\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{pq} \\ v_{p\sigma} \end{bmatrix} \tag{III.2.4}$$

En la ecuación (III.2.4) pq es un índice compuesto y se refiere al elemento añadido y $p\sigma$ se refiere a todos los elementos restantes (de la red parcial), entonces:

- i_{pq} y α_{pq} Corriente y voltaje a través del elemento añadido.
- $\bar{i}_{p\sigma}$ y $\bar{\alpha}_{p\sigma}$ Corriente y voltaje (vectores) de los elementos de la red parcial.
- $\psi_{pq,pq}$ Admitancia primitiva propia del elemento añadido.
- $\bar{\psi}_{p\sigma,p\sigma}$ Vector de admitancias mutuas entre el elemento añadido $p-q$ y los elementos $p-\sigma$ de la red parcial.
- $\bar{\psi}_{p\sigma,pq}$ Traspuesta del vector $\bar{\psi}_{pq,p\sigma}$.
- $[\psi_{p\sigma,p\sigma}]$ Matriz de admitancias primitiva de la red parcial.

La corriente en la rama añadida, mostrada en la figura de la red es:

$$i_{pq} = 0.0 \tag{III.2.5}$$

Asimismo, α_{pq} es distinto de cero, debido a que la rama añadida está acoplada con uno o más de los elementos de la red parcial:

$$\bar{\alpha}_{p\sigma} = \bar{E}_p - \bar{E}_\sigma \tag{III.2.6}$$

donde \bar{E}_p y \bar{E}_σ son los voltajes en las barras de la red parcial. De las ecuaciones (III.2.4) y (III.2.5):

$$i_{pq} = \psi_{pq,pq} \alpha_{pq} + \bar{\psi}_{pq,p\sigma} \bar{\alpha}_{p\sigma} = 0$$

Por lo tanto:

$$\alpha_{pq} = - \frac{\bar{\psi}_{pq,p\sigma} \bar{\alpha}_{p\sigma}}{\psi_{pq,pq}}$$

Sustituyendo $\bar{\alpha}_{p\sigma}$ de la ecuación (III.2.6):

$$\alpha_{pq} = - \frac{\bar{\psi}_{pq,p\sigma} (\bar{E}_p - \bar{E}_\sigma)}{\psi_{pq,pq}} \tag{III.2.7}$$

Sustituyendo α_{pq} en la ecuación (III.2.3):

$$E_q = E_p + \frac{\bar{\psi}_{pq,p\sigma} (\bar{E}_p - \bar{E}_\sigma)}{\psi_{pq,pq}}$$

Finalmente, sustituyendo E_q , E_p , \bar{E}_p y \bar{E}_σ en la ecuación (III.2.2) con $I_i = 1.0$:

$$Z_{qi} = Z_{pi} + \frac{\bar{\psi}_{pq,p\sigma} (\bar{Z}_{pi} - \bar{Z}_{\sigma i})}{\psi_{pq,pq}} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ i \neq q \end{matrix} \tag{III.2.8}$$

El elemento Z_{qq} se calcula inyectando una corriente en el q -ésimo bus y calculando el voltaje en ese bus. Como todas las corrientes restantes son iguales a cero, de la ecuación (III.2.1) se deduce que:

$$E_1 = Z_{1q} I_q$$

$$E_2 = Z_{2q} I_q$$

$$2893050 \dots$$

$$E_p = Z_{pq} I_q \tag{III.2.9}$$

$$\dots$$

$$E_m = Z_{mq} I_q$$

$$E_q = Z_{qq} I_q$$

Con $I_q = 1.0$ p.u. en las ecuaciones (III.2.9), Z_{qq} se calcula directamente determinando E_q .

Los voltajes en las barras p y q están definidos por la ecuación (III.2.3), y la corriente a través del elemento añadido es:

$$I_{pq} = -I_q = -1.0 \quad (III.2.10)$$

Los voltajes a través de los elementos de la red parcial están dados por la ecuación (III.2.6) y su correspondiente corriente por la ecuación (III.2.4).

De las ecuaciones (III.2.4) y (III.2.10):

$$I_{pq} = \psi_{pq,pq} \alpha_{pq} + \bar{\psi}_{pq,\rho\sigma} \bar{\alpha}_{\rho\sigma} = -1.0$$

Y por lo tanto:

$$\alpha_{pq} = -\frac{1 + \bar{\psi}_{pq,\rho\sigma} \bar{\alpha}_{\rho\sigma}}{\psi_{pq,pq}}$$

Sustituyendo $\bar{\alpha}_{\rho\sigma}$ de la ecuación (III.2.6):

$$\alpha_{pq} = -\frac{1 + \bar{\psi}_{pq,\rho\sigma} (\bar{E}_\rho - \bar{E}_\sigma)}{\psi_{pq,pq}} \quad (III.2.11)$$

Sustituyendo α_{pq} en la ecuación (III.2.3):

$$E_q = E_p + \frac{1 + \bar{\psi}_{pq,\rho\sigma} (\bar{E}_\rho - \bar{E}_\sigma)}{\psi_{pq,pq}}$$

Finalmente, sustituyendo E_q , E_p , \bar{E}_ρ y \bar{E}_σ de la ecuación (III.2.9) con $I_q = 1.0$:

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + \bar{\psi}_{pq,\rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho\rho} - \bar{Z}_{\sigma\sigma})}{\psi_{pq,pq}} \quad (III.2.12)$$

Si no existen acoplamientos mutuos entre la rama añadida y otros elementos de la red parcial, entonces los elementos de $\bar{\psi}_{pq,\rho\sigma}$ son cero y:

$$\bar{\psi}_{pq,pq} = \frac{1}{\psi_{pq,pq}}$$

De la ecuación (III.2.8) se deduce que:

$$Z_{qi} = Z_{pi} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq q$$

y de la ecuación (III.2.12) que:

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \bar{\psi}_{pq,pq}$$

Adicionalmente, si no existen acoplamientos mutuos y p es el nodo de referencia:

$$Z_{pi} = 0.0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq q$$

$$Z_{qi} = 0.0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq q$$

También $Z_{pq} = 0.0$ y consecuentemente:

$$Z_{qq} = \bar{\psi}_{pq,pq}$$

III.2.3. Adición de un enlace

Si el elemento añadido $p-q$ es un enlace, el procedimiento para recalculer los elementos de la matriz de impedancia nodal consiste en conectar en serie con el elemento añadido una fuente de voltaje e_i (figura III.4). Esto crea un nodo ficticio l , el cual deberá ser eliminado posteriormente.

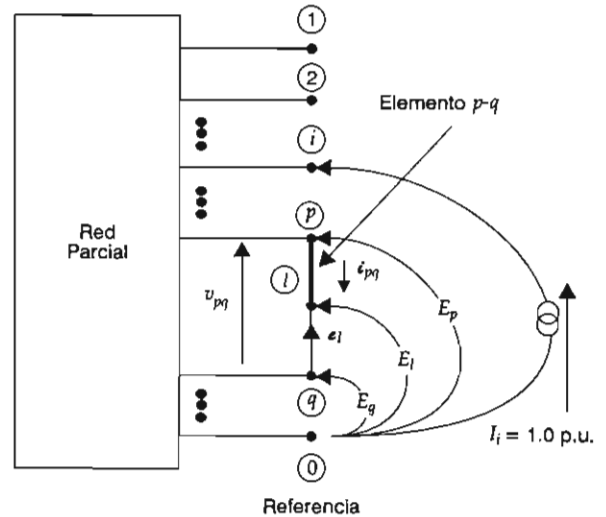


Figura III.4. Fuente de voltaje y corriente inyectada en serie con el enlace añadido y voltajes nodales para el cálculo de Z_{ii} .

La fuente de voltaje e_l se selecciona de tal manera que la corriente a través del enlace añadido sea cero.

La ecuación del comportamiento de la red parcial con el elemento nuevo $p-l$ y la fuente de voltaje serie e_l es:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_p \\ \dots \\ E_m \\ e_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & p & \dots & m & l \\ Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1p} & \dots & Z_{1m} & Z_{1l} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2p} & \dots & Z_{2m} & Z_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \dots & Z_{pp} & \dots & Z_{pm} & Z_{pl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mp} & \dots & Z_{mm} & Z_{ml} \\ Z_{l1} & Z_{l2} & \dots & Z_{lp} & \dots & Z_{lm} & Z_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_p \\ \dots \\ I_m \\ I_l \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.13})$$

Puesto que $e_l = E_l - E_q$, el elemento Z_{li} puede ser determinado inyectando una corriente en el i -ésimo y calculando el voltaje en el l -ésimo nodo, con respecto al bus q , y como la corriente en todas las barras restantes es igual a cero, se deduce de la ecuación (III.2.13) que:

$$E_k = Z_{ki} I_i$$

$$e_l = Z_{li} I_i \quad \text{Para todo } k = 1, 2, \dots, m \quad (\text{III.2.14})$$

Fijando $I_i = 1.0$ en las ecuaciones (III.2.14), Z_{li} se obtiene directamente mediante la determinación de e_l .

La fuente de voltaje en serie vale:

$$e_l = E_p - E_q - \alpha_{pl} \quad (\text{III.2.15})$$

Puesto que la corriente a través del enlace añadido es cero:

$$e_{pq} = 0$$

El elemento $p-l$ puede ser tratado como una rama. La corriente en este elemento en términos de las admitancias primitivas y de los voltajes a través de los elementos es:

$$e_{pl} = \psi_{pl,pl} \alpha_{pl} + \bar{\psi}_{pl,p\sigma} \bar{\alpha}_{p\sigma}$$

donde:

$$e_{pl} = e_{pq} = 0$$

Para esto:

$$\alpha_{pl} = - \frac{\bar{\psi}_{pl,p\sigma} \bar{\alpha}_{p\sigma}}{\psi_{pl,pl}}$$

Puesto que:

$$\bar{\psi}_{pl,p\sigma} = \bar{\psi}_{pq,p\sigma} \quad \text{y} \quad \psi_{pl,pl} = \psi_{pq,pq}$$

entonces:

$$\alpha_{pl} = - \frac{\bar{\psi}_{pq,p\sigma} \bar{\alpha}_{p\sigma}}{\psi_{pq,pq}} \quad (\text{III.2.16})$$

Sustituyendo en orden de las ecuaciones (III.2.16), (III.2.6) y (III.2.14) con $I_i = 1.0$ en la ecuación (III.2.15) se encuentra:

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{\bar{\psi}_{pq,p\sigma} (\bar{Z}_{pi} - \bar{Z}_{\sigma i})}{\psi_{pq,pq}} \quad (\text{III.2.17})$$

$i = 1, 2, \dots, m$
 $i \neq l$

El elemento Z_{li} se calcula inyectando una corriente en el l -ésimo bus con la barra q como referencia y calculando el voltaje en el l -ésimo bus con respecto al bus q . Como las corrientes en las otras barras son cero, se deduce de la ecuación (III.2.13) que:

$$E_k = Z_{kl} I_l$$

$$e_l = Z_{li} I_i \quad k = 1, m \quad (\text{III.2.18})$$

Asignando $I_l = 1.0$ p.u. en la ecuación (III.2.18) Z_{li} se obtiene directamente por cálculo de e_l .

La corriente en el elemento $p-l$ es:

$$e_{pl} = -I_l = -1.0$$

Esta corriente en términos de las admitancias primitivas y de los voltajes a través de los elementos es:

$$e_{pl} = \psi_{pl,pl} \alpha_{pl} + \bar{\psi}_{pl,p\sigma} \bar{\alpha}_{p\sigma} = -1.0$$

De nuevo, puesto que:

$$\bar{\psi}_{pl,p\sigma} = \bar{\psi}_{pq,p\sigma} \quad \text{y} \quad \psi_{pl,pl} = \psi_{pq,pq}$$

entonces:

$$\alpha_{pl} = -\frac{1 + \bar{\psi}_{pq, \rho\sigma} \bar{\alpha}_{\rho\sigma}}{\psi_{pq, pq}} \quad (\text{III.2.19})$$

Sustituyendo en orden de las ecuaciones (III.2.19), (III.2.6) y (III.2.18) con $I_l = 1.0$ en la ecuación (III.2.15) se obtiene:

$$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1 + \bar{\psi}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{pl} - \bar{Z}_{ql})}{\psi_{pq, pq}} \quad (\text{III.2.20})$$

Si no existe acoplamiento mutuo entre el elemento añadido y otros elementos de la red parcial, los elementos de $\bar{\psi}_{pq, \rho\sigma}$ SON CERO y:

$$\bar{\psi}_{pq, pq} = \frac{1}{\psi_{pq, pq}}$$

Se sigue de la ecuación (III.2.17) que:

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq l$$

Y de la ecuación (III.2.20)

$$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \bar{\psi}_{pq, pq}$$

Adicionalmente, si no existe acoplamiento mutuo y p es el nodo de referencia:

$$Z_{pi} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq l$$

y

$$Z_{li} = -Z_{qi} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq l$$

también:

$$Z_{pl} = 0.0$$

Y consecuentemente:

$$Z_{ll} = -Z_{ql} + \bar{\psi}_{pq, pq}$$

III.2.4. Reducción de Kron

Los elementos en las l -ésimas filas y columnas de la matriz de impedancias nodales se determinan mediante las ecuaciones (III.2.17) y (III.2.20). Restaría calcular la matriz Z_{BUS} , que incluye el efecto del nodo añadido. Esto se complementa mediante la modificación de los elementos Z_{ij} , donde $i, j = 1, m$, y eliminando los l -ésimos renglones y columnas correspondientes al *nodo ficticio*.

El nodo ficticio (l -ésimo renglón y columna de Z_{BUS}) se elimina cortocircuitando la fuente de voltaje en serie e_l de la ecuación (III.2.13):

$$\bar{E}_{BUS} = Z_{BUS} \bar{I}_{BUS} + \bar{Z}_{ll} I_l \quad (\text{III.2.21})$$

y

$$e_l = \bar{Z}_{lj} \bar{I}_{BUS} + Z_{ll} I_l = 0 \quad (\text{III.2.22})$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m$$

Resolviendo para I_l de la ecuación (III.2.22) y sustituyendo en la (III.2.21):

$$\bar{E}_{BUS} = \left(Z_{BUS} - \frac{\bar{Z}_{ll} \bar{Z}_{lj}}{Z_{ll}} \right) \bar{I}_{BUS}$$

la cual es la ecuación de comportamiento de la red incluyendo el enlace $p-q$. Se deduce entonces que la Z_{BUS} requerida es:

$$Z_{BUS} (\text{modificada}) = Z_{BUS} (\text{antes de la eliminación}) - \frac{\bar{Z}_{ll} \bar{Z}_{lj}}{Z_{ll}}$$

donde cualquier elemento de $Z_{BUS} (\text{modificada})$ es:

$$Z_{ij} (\text{modificada}) = Z_{ij} (\text{antes de la eliminación}) - \frac{Z_{il} Z_{lj}}{Z_{ll}}$$

Este procedimiento, conocido con el nombre de *reducción de Kron*, se encuentra resumido en el cuadro III.1.

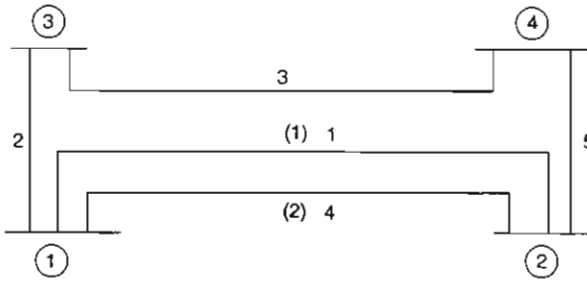
Para las fórmulas anteriores, los términos en Z (mayúscula) corresponden a elementos de la matriz Z_{BUS} y los términos en \bar{z} (minúscula) a valores de impedancias primitivas.

CUADRO III.1. Ecuaciones para la formación de Z_{BUS}

a) Con acoplamiento mutuo	
p no es el nodo de referencia	p es el nodo de referencia
Rama	
$Z_{qi} = Z_{pi} + \frac{\bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho i} - \bar{Z}_{\sigma i})}{y_{pq, pq}}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq q$ $Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + \bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho q} - \bar{Z}_{\sigma q})}{y_{pq, pq}}$	$Z_{qi} = \frac{\bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho i} - \bar{Z}_{\sigma i})}{y_{pq, pq}}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq q$ $Z_{qq} = \frac{1 + \bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho q} - \bar{Z}_{\sigma q})}{y_{pq, pq}}$
Enlace	
$Z_{ii} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{\bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho i} - \bar{Z}_{\sigma i})}{y_{pq, pq}}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq l$ $Z_{il} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{1 + \bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho l} - \bar{Z}_{\sigma l})}{y_{pq, pq}}$	$Z_{ii} = -Z_{qi} + \frac{\bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho i} - \bar{Z}_{\sigma i})}{y_{pq, pq}}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq l$ $Z_{il} = -Z_{qi} + \frac{1 + \bar{y}_{pq, \rho\sigma} (\bar{Z}_{\rho l} - \bar{Z}_{\sigma l})}{y_{pq, pq}}$
b) Sin acoplamiento mutuo	
Rama	
$Z_{qi} = Z_{pi}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq q$ $Z_{qq} = Z_{pq} + g_{pq, pq}$	$Z_{qi} = 0.0$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq q$ $Z_{qq} = g_{pq, pq}$
Enlace	
$Z_{ii} = Z_{pi} - Z_{qi}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq l$ $Z_{il} = Z_{pi} - Z_{ql} + g_{pq, pq}$	$Z_{ii} = -Z_{qi}$ $i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq l$ $Z_{il} = -Z_{ql} + g_{pq, pq}$
Modificación de los elementos para eliminación del nodo l	
$Z_{ij}(\text{modificada}) = Z_{ij}(\text{antes de la eliminación}) - \frac{Z_{il} Z_{lj}}{Z_{ll}}$	

A continuación se presentará el desarrollo de un ejemplo en el que alternativamente se aplican los conceptos de sistema con elementos acoplados en forma de impedancia, y el mismo sistema despreciando los acoplamientos mutuos, práctica común en modelos de SEP.

III.3. EJEMPLO DE FORMACIÓN DE Z_{BUS}



Datos de impedancia

Número de elemento	Propia		Mutua	
	Código de BUS p-q	Impedancia $Z_{pq, pq}$	Código de barra r-s	Impedancia $Z_{pq, rs}$
+1	①-②(1)	0.6		
4	①-②(2)	0.4	①-②(1)	0.2
+2	①-③	0.5	①-②(1)	0.1
+3	③-④	0.5		
5	②-④	0.2		

(+) Ramas

a) Solución (considerando acoplos)

Z_{BUS} será construida añadiendo elementos en el orden indicado por la primera columna del cuadro y seleccionando el nodo 1 como referencia.

Paso 1. Se empieza con el elemento 1, una rama de $p = 1$ a $q = 2$. Los elementos de Z_{BUS} para la red parcial que contienen la rama simple son:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & 1 & 2 \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Puesto que el nodo 1 es la referencia, los elementos de la primera fila (renglón) y columna son cero (impedancias de transferencia y equivalente de Thevenin) y NO necesitan escribirse. En estos términos:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & 2 \\ 2 & \begin{bmatrix} 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 2. Se añade el elemento 4 (un enlace) de $p = 1$ (referencia) a $q = 2$ acoplado mutuamente con el elemento 1. La matriz de impedancia con el nodo ficticio l será:

$$Z_{ii} = -Z_{qi} + \frac{\bar{\psi}_{pi, p\sigma} (\bar{Z}_{pi} - \bar{Z}_{\sigma i})}{\psi_{pq, pq}} \quad i = 2$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_{22} + \frac{\psi_{12(2), 12(1)} (Z_{12} - Z_{22})}{\psi_{12(2), 12(2)}}$$

Recordemos que $Z_{12} = Z_{11} = 0$.

Ahora, para obtener la matriz de admitancias primitivas se invierte la matriz de impedancias primitiva (sólo de la red parcial incluyendo al nuevo elemento):

$$Y_{ps, p\sigma} = \begin{matrix} & 1-2(1) & 1-2(2) \\ 1-2(1) & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \\ 1-2(2) & \end{matrix}$$

$$Y_{ps, p\sigma}^{-1} = Y_{ps, p\sigma} = \begin{matrix} & 1-2(1) & 1-2(2) \\ 1-2(1) & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ 1-2(2) & \end{matrix}$$

Sustituyendo estos valores:

$$Z_{21} = Z_{12} = -0.6 + \frac{(-1)(-0.6)}{3} = -0.4$$

$$Z_{ii} = -Z_{21} + \frac{1 + \psi_{12(2), 12(1)} (Z_{11} - Z_{21})}{\psi_{12(2), 12(2)}}$$

$$Z_{ii} = 0.4 + \frac{1 - 1(0.4)}{3} = 0.6$$

y la correspondiente matriz aumentada es:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & 2 & l \\ 2 & \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ l & \end{matrix}$$

Ahora se procede a eliminar las l -ésima columna y renglón:

$$Z'_{22} = Z_{22} - \frac{Z_{2l}Z_{l2}}{Z_{ll}} = 0.6 - \frac{(-0.4)(-0.4)}{0.6} = 0.333$$

quedando:

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} & 2 \\ 2 & [0.3333] \end{matrix}$$

Paso 3. Se añade el elemento 2, el cual es una rama desde $p = 1$ (referencia) hasta $q = 3$ acoplado mutuamente con el elemento 1. Esto adiciona un nuevo bus y la matriz Z_{BUS} es:

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} & 2 & 3 \\ 2 & [0.3333 & Z_{23}] \\ 3 & [Z_{32} & Z_{33}] \end{matrix}$$

donde:

$$Z_{32} = Z_{23} = \frac{[\varphi_{13,12(1)} \ \varphi_{13,12(2)}] \begin{bmatrix} Z_{12} - Z_{22} \\ Z_{12} - Z_{22} \end{bmatrix}}{\varphi_{13,13}}$$

$$Z_{33} = \frac{1 + [\varphi_{13,12(1)} \ \varphi_{13,12(2)}] \begin{bmatrix} Z_{13} - Z_{23} \\ Z_{13} - Z_{23} \end{bmatrix}}{\varphi_{13,13}}$$

Recordando que $Z_{12} = Z_{13} = 0$, se invierte la matriz de impedancias primitiva para obtener la matriz de admitancias primitiva:

$$Y_{\rho\sigma, \rho\sigma}^{-1} = Y_{\rho\sigma, \rho\sigma} = \begin{matrix} & 1-2(1) & 1-2(2) & 1-3 \\ 1-2(1) & [2.0833 & -1.0417 & -0.4167] \\ 1-2(2) & [-1.0417 & 3.0208 & 0.2083] \\ 1-3 & [-0.4167 & 0.2083 & 2.0833] \end{matrix}$$

Entonces:

$$Z_{32} = Z_{23} = \frac{[-0.4167 \ 0.2083] \begin{bmatrix} -0.3333 \\ -0.3333 \end{bmatrix}}{2.0833} = 0.0333$$

$$Z_{33} = \frac{1 + [-0.4167 \ 0.2083] \begin{bmatrix} -0.3333 \\ -0.3333 \end{bmatrix}}{2.0833} = 0.4833$$

y se obtiene:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.0333 \\ 0.0333 & 0.4833 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 4. Se añade el elemento 3 (rama) desde $p = 3$ a $q = 4$ sin acoplamiento mutuo. Esto adiciona un nuevo modo:

$$Z_{24} = Z_{42} = Z_{32} = 0.0333$$

$$Z_{34} = Z_{43} = Z_{33} = 0.4833$$

$$Z_{44} = Z_{34} + g_{34,34} = 0.4833 + 0.5 = 0.9833$$

quedando la matriz:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.0333 & 0.0333 \\ 0.0333 & 0.4833 & 0.4833 \\ 0.0333 & 0.4833 & 0.9833 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 5. Se añade el elemento 5 (enlace) desde $p = 2$ a $q = 4$ sin acoplamiento mutuo. Los elementos del renglón y la columna l de la matriz aumentada son:

$$Z_{2l} = Z_{l2} = Z_{22} - Z_{42} = 0.3333 - 0.0333 = 0.300$$

$$Z_{3l} = Z_{l3} = Z_{23} - Z_{43} = 0.0333 - 0.4833 = -0.450$$

$$Z_{4l} = Z_{l4} = Z_{24} - Z_{44} = 0.3333 - 0.9833 = -0.950$$

$$Z_{ll} = Z_{2l} - Z_{4l} + g_{24,24} = 0.30 + 0.95 + 0.2 = 1.45$$

La matriz aumentada es:

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & l \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ l \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.0333 & 0.0333 & 0.3000 \\ 0.0333 & 0.4833 & 0.4833 & -0.4500 \\ 0.0333 & 0.4833 & 0.9833 & -0.9500 \\ 0.3000 & -0.4500 & -0.9500 & 1.4500 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Note que la matriz contiene términos negativos.

Ahora se eliminan las l -ésima columna y renglón:

$$Z'_{22} = Z_{22} - \frac{Z_{2l}Z_{l2}}{Z_{ll}} = 0.3333 - \frac{(0.30)(0.30)}{1.45} = 0.2712$$

$$Z'_{23} = Z'_{32} = Z_{23} - \frac{Z_{2l}Z_{l3}}{Z_{ll}} = 0.0333 - \frac{(0.30)(-0.45)}{1.45} = 0.1263$$

Algoritmos para la formación de matrices de red

$$Z'_{24} = Z'_{42} = Z_{24} - \frac{Z_{21} Z_{14}}{Z_{11}} = 0.0333 - \frac{(0.30)(-0.95)}{1.45} = 0.2298$$

$$Z'_{33} = Z_{33} - \frac{Z_{31} Z_{13}}{Z_{11}} = 0.4833 - \frac{(-0.45)(-0.45)}{1.45} = 0.3436$$

$$Z'_{34} = Z'_{43} = Z_{34} - \frac{Z_{31} Z_{14}}{Z_{11}} = 0.4833 - \frac{(-0.45)(-0.95)}{1.45} = 0.1885$$

$$Z'_{44} = Z_{44} - \frac{Z_{41} Z_{14}}{Z_{11}} = 0.9833 - \frac{(-0.95)(-0.95)}{1.45} = 0.3609$$

Finalmente:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2712 & 0.1263 & 0.2298 \\ 0.1263 & 0.3436 & 0.1885 \\ 0.2298 & 0.1885 & 0.3609 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(Observe que ya no hay términos negativos.)

b) Mismo sistema sin acoplamientos

Elemento	Código p-q	Impedancia primitiva
1	1-2(1)	0.6
4	1-2(2)	0.4
2	1-3	0.5
3	3-4	0.5
5	2-4	0.2

Paso 1. Elemento 1, $p = 1$ $q = 2$:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix} = 2 \begin{bmatrix} 0.6 \end{bmatrix}$$

Paso 2. Elemento 4 (enlace), $p = 1$ $q = 2$, p es nodo de referencia:

$$Z_{ii} = -Z_{qi} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq 1$$

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & \begin{bmatrix} 0.6 & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Z_{ll} = -Z_{q_l} + \mathcal{Z}_{pq, pq}$$

Un elemento:

$$Z_{l2} = -Z_{22} = -0.6$$

$$Z_{ll} = -Z_{2l} + \mathcal{Z}_{12(2), 12(2)} = 0.6 + 0.4 = 1.0$$

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} & 2 & l \\ \begin{matrix} 2 \\ l \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 \\ -0.6 & 1.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Eliminando las l -ésimas fila-columna:

$$Z'_{ij} = Z_{ij} - \frac{Z_{il} Z_{lj}}{Z_{ll}}$$

Un cálculo $i = 2 \quad j = 2$:

$$Z'_{22} = Z_{22} - \frac{Z_{2l} Z_{l2}}{Z_{ll}} = 0.6 - \frac{(-0.6)(-0.6)}{1.0} = 0.24$$

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} [0.24]$$

Paso 3. Elemento 2 (rama), $p = 1$ referencia, $q = 3$:

$$Z_{qi} = 0$$

$$Z_{qq} = \mathcal{Z}_{pq, pq} \quad Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} 2 & 3 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.24 & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Un solo cálculo $i = 2 \quad q = 3$

$$Z_{qi} = Z_{23} = Z_{32} = 0.0$$

$$Z_{qq} = Z_{33} = \mathcal{Z}_{13, 13} = 0.5 \quad Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} 2 & 3 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.24 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 4. Elemento 3 (rama), $p = 3, q = 4, \mathcal{Z}_{pq, pq} = 0.5, p$ no es el nodo de referencia:

$$Z_{qi} = Z_{pi} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq q$$

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \mathcal{Z}_{pq, pq}$$

Algoritmos para la formación de matrices de red

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.24 & 0.00 & Z_{24} \\ 0.00 & 0.50 & Z_{34} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$i=2 \quad q=4 \quad Z_{42} = Z_{32} = 0.0 = Z_{24}$$

$$i=3 \quad q=4 \quad Z_{43} = Z_{33} = 0.5 = Z_{34}$$

$$Z_{44} = Z_{34} + \mathcal{F}_{34,34}$$

$$Z_{44} = 0.5 + 0.5 = 1.0$$

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.24 & 0.0 & 0.0 \\ 0.00 & 0.5 & 0.5 \\ 0.00 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 5. Elemento 5 (enlace), $p=2$, $q=4$, $\mathcal{F}_{pq,pq} = 0.2$, p no es nodo de referencia:

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \neq l$$

$$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \mathcal{F}_{pq,pq}$$

$$i=2 \quad p=2 \quad q=4 \quad Z_{12} = Z_{22} - Z_{42} = 0.24 - 0.0 = 0.24$$

$$i=3 \quad p=2 \quad q=4 \quad Z_{13} = Z_{31} = Z_{23} - Z_{43} = 0.0 - 0.5 = -0.5$$

$$i=4 \quad p=2 \quad q=4 \quad Z_{14} = Z_{24} - Z_{44} = 0.0 - 1.0 = -1.0$$

$$Z_{ll} = Z_{21} - Z_{41} + \mathcal{F}_{24,24} = 0.24 - (-1.0) + 0.2 = 1.44$$

$$Z_{\text{BUS}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ l \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.24 & 0.0 & 0.0 & 0.24 \\ 0.00 & 0.5 & 0.5 & -0.50 \\ 0.00 & 0.5 & 1.0 & -1.00 \\ 0.24 & -0.5 & -1.0 & 1.44 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Reducción del nodo l :

$$i, j = 2, 3, 4 \quad Z'_{ij} = Z_{ij} - \frac{Z_{il} Z_{lj}}{Z_{ll}}$$

$$i=2 \quad j=2 \quad Z'_{22} = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{Z_{11}} = 0.24 - \frac{(0.24)(0.24)}{1.44} = 0.2$$

De la misma manera para:

$$i=2 \quad j=3 \quad Z'_{23} = Z'_{32} = 0.083$$

$$i=2 \quad j=4 \quad Z'_{24} = Z'_{42} = 0.1667$$

$$i=3 \quad j=3 \quad Z'_{33} = 0.3263$$

$$i=3 \quad j=4 \quad Z'_{34} = Z'_{43} = 0.1527$$

$$i=4 \quad j=4 \quad Z'_{44} = 0.3055$$

Finalmente:

$$Z_{BUS} = \begin{matrix} & & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} 0.2000 & 0.0830 & 0.1600 \\ 0.0830 & 0.3264 & 0.1528 \\ 0.1600 & 0.1528 & 0.3056 \end{array} \right] \end{matrix}$$

CAPÍTULO IV

ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA

IV.1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de potencia interconectado representa una red eléctrica con una multitud de ramas, enlaces y nodos donde típicamente las líneas de transmisión constituyen las ramas. En lenguaje técnico, los nodos de la red se denominan *buses*. Estas redes eléctricas pueden contener cientos de buses y miles de ramas.

Así como algunos buses inyectan potencia a la red, existen áreas en las cuales la potencia es absorbida por las cargas del sistema. En conjunto la potencia fluirá a través de las mallas del sistema.

Un conjunto dado de cargas puede ser alimentado a través de un conjunto dado de generadores, en un número muy grande de posibilidades, trayectorias o configuraciones de *flujos de potencia*.

El análisis de flujos de potencia no sólo consiste en el estudio del mecanismo que controla el flujo de potencia a través de las mallas, sino que también incluye la forma de seleccionar la óptima configuración de flujo del gran número de posibilidades.

Los aspectos más importantes del análisis de flujos de potencia son:

1. La contribución total de potencia real en la red emana de las estaciones generadoras, cuya localización y tamaño es variable. La generación debe ser igual a la demanda en cada momento y como esta potencia debe ser dividida entre los generadores en un promedio único a fin de mantener una operación económica, se concluye entonces que la aportación de generación de cada

unidad *debe ser mantenida en límites muy restringidos*. Es importante recordar que la demanda del sistema presenta cambios permanentes a lo largo de las 24 horas del día, de tal manera que la generación del sistema debe adaptarse continuamente prediciendo a corto plazo la variación de la carga, cambiando consecuentemente la configuración de los flujos de potencia a lo largo de la red.

2. Los enlaces de transmisión (líneas) tienen límites de cargabilidad en cuanto a los aumentos de potencia transmitida y debemos tener la certeza de no operar a estos enlaces en regiones cercanas a sus límites técnicos o de estabilidad.

3. Es necesario mantener los niveles de voltaje de algunas barras del sistema dentro de rangos muy reducidos. Esto se consigue mediante una adecuada localización de fuentes de reactivos en la red.

4. Si el sistema bajo análisis es sólo una parte de un gran sistema interconectado (subsistema o área), es necesario supervisar adecuadamente los elementos que sirven como enlace entre sectores del gran sistema interconectado, para así controlar los niveles de intercambio de energía entre las áreas.

5. Los disturbios posteriores a la presencia de una falla severa en la red pueden ocasionar salidas de sectores importantes o disgregación del sistema. Este efecto puede minimizarse con una adecuada estrategia de *flujos de prefalla* (aumento de límites de estabilidad).

6. Los análisis de flujos de potencia son vitales en la determinación de estados de operación, en la planeación de nuevos sistemas o para el crecimiento y fortalecimiento de los ya existentes.

IV.1.1. Etapas de un estudio de flujos

El problema de flujos de potencia se divide en los siguientes subproblemas, *cada uno de los cuales puede ser tratado separadamente*.

a) *Formulación de un modelo matemático confiable del sistema*. El modelo debe describir adecuadamente las relaciones entre voltajes y potencias en el sistema interconectado.

b) *Especificación de las restricciones de potencia y voltaje* que deben ser aplicadas a los nodos del sistema.

c) *Cálculo numérico de las ecuaciones de voltaje* sujetas a restricciones establecidas. Estos cálculos deben proporcionar, con suficiente exactitud, los valores de voltaje en todos los nodos.

d) Una vez que todos los voltajes han sido determinados, finalmente se deben *calcular los flujos de potencia* en todos los elementos de la red.

IV.2. ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA (EFP)

El estudio de flujos de carga determina los voltajes nodales y los flujos de potencia para un sistema de potencia sujeto a la capacidad de regulación de generadores, capacitores y transformadores con cambio de derivaciones bajo carga, de conformidad con los intercambios de

potencia especificados para cada una de las áreas de control del sistema.

Esta información es esencial para la evaluación continua del sistema y para analizar la efectividad de planes alternativos para la expansión del sistema o de incrementos de carga conectada. Estos análisis requieren el cálculo de numerosos *flujos de carga* para condiciones operativas normales y de emergencia.

Para la solución del problema de flujos basta una *representación monofásica*, puesto que las condiciones operativas normales son *balanceadas*.

Existen cuatro cantidades asociadas a cada bus.

+ POTENCIA ACTIVA	+ MAGNITUD DE VOLTAJE
+ POTENCIA REACTIVA	+ ÁNGULO DE BASE

Tres tipos de barras (buses) se utilizan para el estudio de flujos, donde se especifican *dos* de las cantidades mencionadas. Es necesario seleccionar un bus llamado *compensador (slack)* para proveer las potencias real y reactiva para alimentar las *pérdidas y balance reactivo de transmisión*, puesto que son desconocidas hasta que se obtiene la solución final. En esta barra se especifican *la magnitud de voltaje y el ángulo de fase*; los buses restantes se especifican como *voltaje controlado y buses de carga*.

En un nodo de voltaje controlado se especifican magnitud de voltaje y potencia real, mientras que en las barras de carga se especifican las potencias activa y reactiva.

Las conexiones en la red se describen mediante *números de código pq* asignados a cada barra. Estos números especifican las terminales de líneas de transmisión y transformadores. Códigos numéricos son usados también para identificar los tipos de barras, la localización de compensadores estáticos, reactores en derivación y aquellos elementos que se utilizan para especificar a los transformadores fuera de su tap nominal.

La formulación matemática del problema de flujos resulta en un *sistema de ecuaciones no lineales*; éstas pueden ser establecidas en los modelos

de referencia nodal o de mallas. La experiencia ha mostrado las ventajas del empleo de la formulación nodal, ya sea con Z_{BUS} o Y_{BUS} . La solución de estas ecuaciones se obtiene mediante una *técnica iterativa* debido a su no linealidad. Esta solución debe cumplir con las leyes de Kirchhoff, usándose en otras etapas como criterio de convergencia en el método computacional. Otras restricciones incluidas en la solución son:

- Límites de cargabilidad de fuentes de potencia reactiva.

- Rango de cambiadores de derivación bajo carga.
- Especificaciones de intercambio entre áreas.

Las ecuaciones que describen el comportamiento de la red para los distintos modelos de referencia son:

Las matrices de impedancia y admitancia nodal pueden construirse para la red *incluyendo el nodo de tierra*, en cuyo caso los elementos de las matrices *incluirán los efectos de los elementos en derivación*, tales como reactores y capacitores, capacitancia de líneas e impedancias de circuito abierto de transformadores.

Forma paramétrica			
Modelo de referencia	Impedancia	Admitancia	Ecuación
Barra	$E_{BUS} = Z_{BUS} I_{BUS}$	$I_{BUS} = Y_{BUS} E_{BUS}$	(IV.2.1)
Malla	$E_{malla} = Z_{malla} I_{malla}$	$I_{malla} = Y_{malla} E_{malla}$	(IV.2.2)

Cuando el nodo de tierra se incluye y además se elige como nodo de referencia, los voltajes de las ecuaciones (IV.2.1) son medidos con respecto a tierra.

Si el nodo de tierra NO se incluye en la red, los elementos de las matrices de impedancia y admitancia *no incluirán* los efectos de los elementos en derivación, y los voltajes de la ecuación (IV.2.1) se miden con respecto al nodo seleccionado como referencia. Adicionalmente, *los efectos de los elementos en derivación se incluirán mediante fuentes de corriente* conectadas a las barras de la red.

Cuando se construyen las matrices de impedancia y admitancia para la red sin incluir los elementos en derivación, la dimensión de las matrices es de $l \times l$, donde l es el número de enlaces (*links*) o mallas básicas, calculadas mediante la expresión:

$$l = e - n + 1$$

En este caso (excluyendo los elementos en derivación), los efectos de estos elementos son tratados como fuentes de corriente en los nodos de la red. Si los elementos en derivación (*shunt*) e_s se incluyen en la construcción de las matrices de malla, el número de elementos de la red se incrementa con e_s . El total de elementos es entonces $e + e_s$ y el número de nodos se incrementa a $n + 1$. Consecuentemente, el número de mallas y la dimensión de las matrices se incrementa por $e_s - 1$.

IV.2.1. Ecuaciones de los nodos

El conjugado de la potencia compleja neta para cualquier nodo está dada por:

$$S_p^* = P_p - jQ_p = E_p^* I_p$$

Esta potencia se obtiene restando a la potencia de generación la potencia de carga. Despejando la corriente:

$$I_p = \frac{P_p - jQ_p}{E_p^*} \quad (IV.2.3)$$

donde I_p representa la corriente inyectora de nodo y se considera positiva cuando fluye hacia el sistema (nodo de generación), y negativa para el caso de un nodo de carga. En la formulación de la ecuación de red, si los elementos en derivación fueron incluidos en los parámetros de la matriz, entonces la ecuación (IV.2.3) es la *corriente total en el bus*. De otro modo la corriente total es:

$$I_p = \frac{P_p - jQ_p}{E_p^*} - \varphi_p E_p$$

donde φ_p es la *admitancia total en derivación* para el bus p , y el término $\varphi_p E_p$ es la *corriente en derivación* fluyendo del bus p hacia tierra.

IV.2.2. Ecuaciones de flujos de potencia (EFP) en líneas

Después de que la solución iterativa de voltajes nodales se completa, se calculan los flujos a través de las líneas. La corriente del bus p , en la línea que enlaza los nodos p y q vale:

$$I_{pq} = (E_p - E_q)Y_{pq} + E_p \frac{I_{pq}'}{2}$$

donde:

- Y_{pq} Admitancia serie de la línea.
- I_{pq}' Admitancia total capacitiva de la línea.
- $E_p \frac{I_{pq}'}{2}$ Contribución de corriente en el bus p debida a la capacitancia de la línea.

El flujo de potencia a través de la línea (p - q) es:

$$P_{pq} - jQ_{pq} = E_p^* I_{pq}$$

O utilizando el valor de I_{pq} :

$$P_{pq} - jQ_{pq} = E_p^* (E_p - E_q)Y_{pq} + E_p^* E_p \frac{I_{pq}'}{2} \quad (IV.2.4)$$

donde:

- P_{pq} Potencia real fluyendo del bus p al bus q .
- Q_{pq} Potencia reactiva fluyendo del bus p al bus q .

Similarmente, para la potencia del bus q al p obtenemos:

$$P_{qp} - jQ_{qp} = E_q^* (E_q - E_p)Y_{pq} + E_q^* E_q \frac{I_{pq}'}{2} \quad (IV.2.5)$$

Las pérdidas y balance reactivo de potencia en la línea p - q son la suma algebraica de los flujos de potencia determinados por las ecuaciones (IV.2.4) y (IV.2.5).

IV.3. TÉCNICAS DE SOLUCIÓN

Las técnicas de solución del problema de flujos se diferencian —y le dan nombre al método— únicamente por la forma en que son calculados los voltajes, ya que una vez obtenidos éstos invariablemente se utilizan las ecuaciones (IV.2.4) y (IV.2.5) para calcular los flujos.

IV.3.1. Método de Gauss- Y_{BUS}

La solución del problema de flujos se inicia asignando voltajes a todos los buses excepto el compensador. En el nodo de referencia el voltaje se fija a un valor que permanece constante. Entonces las corrientes se calculan para todas las barras excepto para el bus compensador (*slack*) denotado s , utilizando la ecuación de nodo:

$$I_p = \frac{P_p - jQ_p}{E_p^*} \quad (IV.3.1)$$

$$p = 1, 2, \dots, n$$

$$p \neq s$$

donde n es el número de barras en la red. El comportamiento de la red puede ser obtenido de la ecuación:

$$I_{BUS} = Y_{BUS} E_{BUS} \quad (IV.3.2)$$

Seleccionando la tierra como nodo de referencia, un conjunto de $n - 1$ ecuaciones puede ser escrito de la forma:

$$E_p = \frac{1}{Y_{pp}} \left(I_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq} E_q \right) \quad (IV.3.3)$$

Las condiciones de bus calculadas de la ecuación (IV.3.1), el voltaje en el nodo compensador y los voltajes estimados, se sustituyen en la ecuación (IV.3.3) para obtener un nuevo conjunto de voltajes de barra. Estos nuevos voltajes se utilizan en la ecuación (IV.3.1) para recalculer las corrientes de nodos para una subsecuente solución de la ecuación (IV.3.3). El proceso continúa hasta que el cambio en los voltajes de bus no es apreciable (*esto implica la utilización de un criterio de convergencia y/o tolerancia*).

Una vez que se obtiene la solución de voltajes es posible calcular las potencias en el nodo compensador y en las líneas. La ecuación de la red (IV.3.3) y la ecuación del bus de carga (IV.3.1) pueden ser combinadas para obtener:

$$E_p = \frac{1}{Y_{pp}} \left(\frac{P_p - jQ_p}{E_p^*} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq} E_q \right) \quad (IV.3.4)$$

La cual involucra sólo los voltajes nodales como variables. Formulando de este modo el problema de flujos que comprende, resulta un conjunto de ecuaciones *no lineales* que puede ser resuelto por un método iterativo.

Para lograr una reducción significativa en el tiempo de cálculo para una solución se realizan previamente algunos cálculos como son:

$$L_p = \frac{1}{Y_{pp}}$$

Con este valor la ecuación (IV.3.4) puede reescribirse:

$$E_p = \left(\frac{P_p - jQ_p}{E_p^*} \right) L_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq} L_p E_q \quad (IV.3.5)$$

$p = 1, 2, \dots, n$
 $p \neq s$

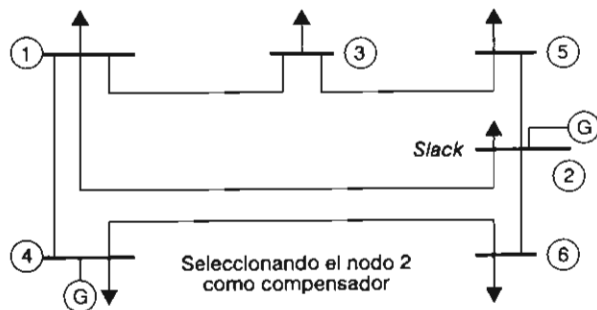
Haciendo $(P_p - jQ_p) L_p = KL_p$ y $Y_{pq} L_p = YL_{pq}$ La ecuación (IV.3.5) se simplifica a:

$$E_p = \frac{KL_p}{E_p^*} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n YL_{pq} E_q \quad (IV.3.6)$$

$p = 1, 2, \dots, n$
 $p \neq s$

El procedimiento normal para un estudio de flujos es asumir que *el sistema está balanceado* y usar una representación monofásica en p.u. (red de secuencia positiva). Como no existe acoplamiento mutuo, la matriz Y_{BUS} puede ser formada por inspección y muchos de sus elementos serán cero.

Por ejemplo, considérese el sistema siguiente:



La solución para el problema de flujos parte de la construcción de la matriz de admitancias nodales Y_{BUS} , la cual se genera *por inspección* debido a que no existen elementos en la red acoplados en forma de impedancia. Observe que en este caso *no se consideran elementos de generación ni de carga*, ya que éstos se modelan en forma de potencia:

$$Y_{BUS} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccccc} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & 0 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & 0 & 0 & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & 0 & Y_{33} & 0 & Y_{35} & 0 \\ Y_{41} & 0 & 0 & Y_{44} & 0 & Y_{46} \\ 0 & Y_{52} & Y_{53} & 0 & Y_{55} & 0 \\ 0 & Y_{62} & 0 & Y_{64} & 0 & Y_{66} \end{array} \right| \end{matrix}$$

Las correspondientes fórmulas para la solución por el método iterativo de Gauss son:

$$E_1^{k+1} = \frac{KL_1}{(E_1^k)^*} - YL_{12} E_2 - YL_{13} E_3 - YL_{14} E_4$$

$E_2 =$ valor especificado

$$E_3^{k+1} = \frac{KL_3}{(E_3^k)^*} - YL_{31} E_1^k - YL_{35} E_5^k$$

$$E_4^{k+1} = \frac{KL_4}{(E_4^k)^*} - YL_{41} E_1^k - YL_{46} E_6^k$$

$$E_5^{k+1} = \frac{KL_5}{(E_5^k)^*} - YL_{52} E_2 - YL_{53} E_3^k$$

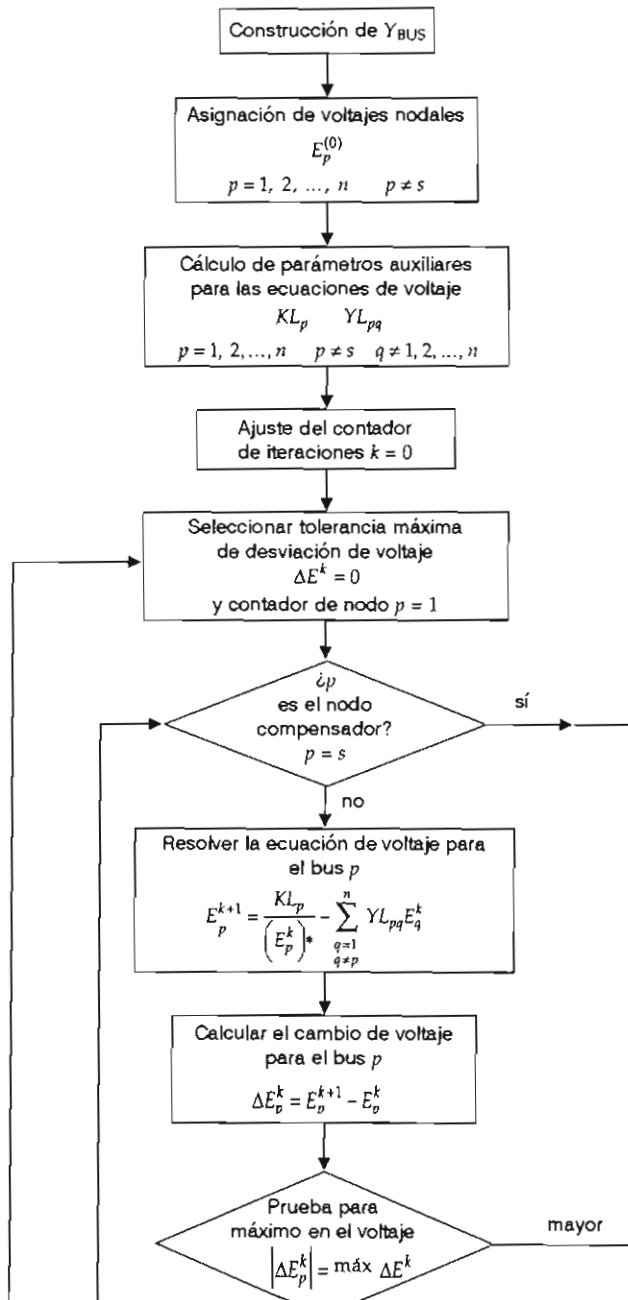
$$E_6^{k+1} = \frac{KL_6}{(E_6^k)^*} - YL_{62} E_2 - YL_{64} E_4^k$$

donde el superíndice k representa el contador de la iteración. Para el caso de la solución por el método de Gauss-Seidel, únicamente es necesario sustituir los voltajes $k + 1$ inmediatamente después de ser calculados, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$E_p^{(k+1)} = \frac{KL_p}{E_p^{(k)*}} - \sum_{q=1}^{p-1} YL_{pq} E_q^{(k+1)} - \sum_{q=p+1}^n YL_{pq} E_q^{(k)} \quad (IV.3.7)$$

$p = 1, 2, \dots, n$
 $p \neq s$





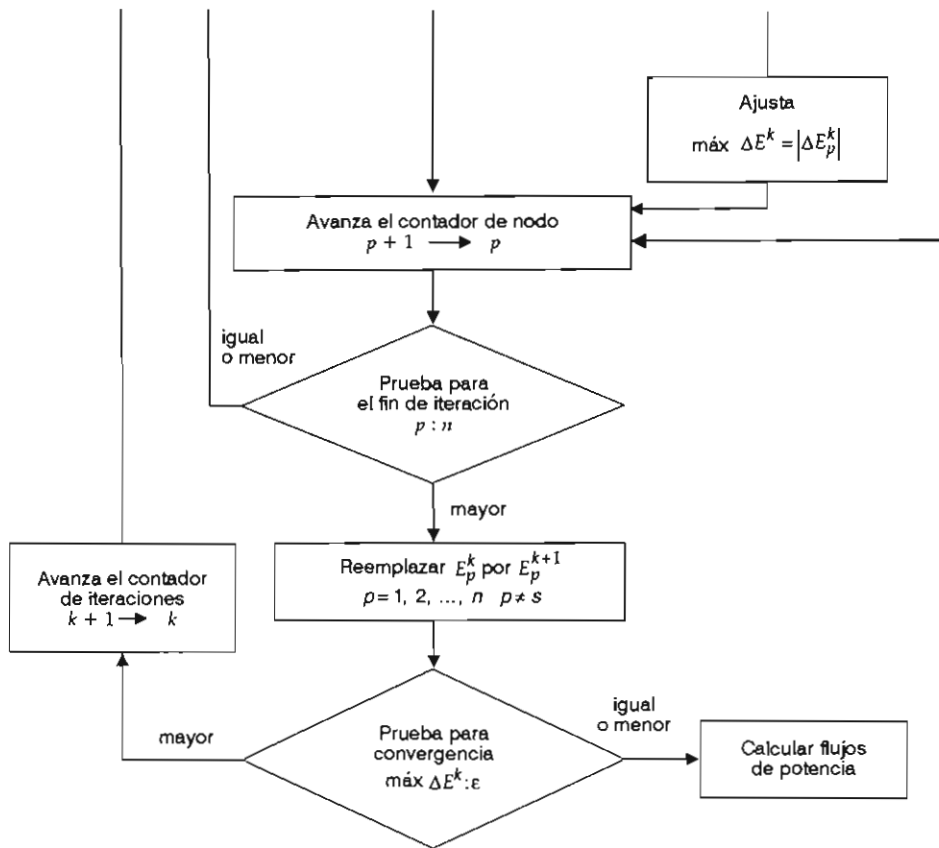


Figura IV.1. Solución del problema de flujos por el método Gauss-Ybus.

El diagrama de flujo para la solución por el método iterativo de Gauss se presenta en la figura IV.1.

IV.3.2. Método de Newton-Raphson
(utilizando Y_{BUS})

El problema de flujos de carga puede ser resuelto por el método de Newton-Raphson utilizando un conjunto de ecuaciones no lineales, las cuales expresan las potencias real y reactiva en términos de los voltajes de barra (Van Ness y Griffin, 1961).

El conjugado de la potencia compleja en el bus p es:

$$S_p^* = P_p - jQ_p = E_p^* I_p \quad (IV.3.8)$$

Sustituyendo I_p de la ecuación de comportamiento de la red:

$$I_{BUS} = Y_{BUS} E_{BUS}$$

$$P_p - jQ_p = E_p^* \sum_{q=1}^n Y_{pq} E_q \quad (IV.3.9)$$

Como $E_p = |E_p| \angle \delta_p$, y $Y_{pq} = |Y_{pq}| \angle -\theta_{pq}$, la ecuación (IV.3.9) puede escribirse como:

$$P_p - jQ_p = \sum_{q=1}^n |E_p E_q Y_{pq}| \angle -(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

Separando las partes real e imaginaria:

$$P_p = \sum_{q=1}^n |E_p E_q Y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$$Q_p = \sum_{q=1}^n |E_p E_q Y_{pq}| \sin(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad (IV.3.10)$$

De esta formulación resulta un conjunto de ecuaciones no lineales, dos para cada barra del sistema. Las potencias real y reactiva (P_p, Q_p) son conocidas, mientras que la magnitud y el ángulo del voltaje ($|E_p|, \delta_p$) son desconocidos para todos los nodos, excepto para el compensador,

donde el voltaje es fijo y permanece constante. Consecuentemente se generan $2(n-1)$ ecuaciones que al resolverse proporcionan los flujos de potencia para la red.

El método de Newton-Raphson requiere la formación de un conjunto de ecuaciones lineales que expresan la relación de la variación de las componentes de la potencia (P y Q) respecto a los componentes de los voltajes nodales ($|E|$ y δ), donde la matriz de coeficientes es el denominado *jacobiano* y el bus n -ésimo es el compensador, como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Lambda \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \Lambda \\ \Delta Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \delta_1} & \Lambda & \frac{\partial P_1}{\partial \delta_{n-1}} & \frac{\partial P_1}{\partial |E_1|} & \Lambda & \frac{\partial P_1}{\partial |E_{n-1}|} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \delta_1} & \Lambda & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \delta_{n-1}} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial |E_1|} & \Lambda & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial |E_{n-1}|} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_1} & \Lambda & \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_{n-1}} & \frac{\partial Q_1}{\partial |E_1|} & \Lambda & \frac{\partial Q_1}{\partial |E_{n-1}|} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial \delta_1} & \Lambda & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial \delta_{n-1}} & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial |E_1|} & \Lambda & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial |E_{n-1}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Lambda \\ \Delta \delta_{n-1} \\ \Delta |E_1| \\ \Lambda \\ \Delta |E_{n-1}| \end{bmatrix} \quad (IV.3.11)$$

En forma simplificada la ecuación (IV.3.11) se representa como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |E| \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones para la determinación de los elementos del jacobiano se obtienen de las ecuaciones de potencia para el bus. La ecuación para la potencia real (IV.3.10) es:

$$P_p = |E_p^2 Y_{pp}| \cos \theta_{pp} + \sum_{q=1, q \neq p}^n |E_p E_q Y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad p = 1, 2, \dots, n-1 \quad (IV.3.12)$$

Diferenciando, los elementos fuera de la diagonal principal de J , son:

$$\frac{\partial P}{\partial \delta_q} = |E_p E_q Y_{pq}| \sin(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad q \neq p \quad (IV.3.13)$$

Y los elementos de la diagonal principal (J_{ii}) son:

$$\frac{\partial P_p}{\partial \delta_p} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_p E_q Y_{pq}| \text{sen}(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad (\text{IV.3.14})$$

De la ecuación (IV.3.12) los elementos fuera de la diagonal de J_2 son:

$$\frac{\partial P_p}{\partial |E_q|} = |E_p Y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad (\text{IV.3.15})$$

$q \neq p$

Y los elementos de la diagonal principal (J_2) son:

$$\frac{\partial P_p}{\partial |E_p|} = 2 |E_p Y_{pp}| \cos \theta_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_q Y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad (\text{IV.3.16})$$

La potencia reactiva de la ecuación (IV.3.10) es:

$$Q_p = |E_p^2 Y_{pp}| \text{sen} \theta_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_p E_q Y_{pq}| \text{sen}(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$p = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{IV.3.17})$

Diferenciando, los elementos fuera de la diagonal principal de J_3 son:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial \delta_q} = - |E_p E_q Y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad q \neq p \quad (\text{IV.3.18})$$

Y los correspondientes a la diagonal principal:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial \delta_p} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_p E_q Y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad (\text{IV.3.19})$$

De la ecuación (4.3.17), los elementos fuera de la diagonal principal de J_4 son:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial |E_q|} = |E_p Y_{pq}| \text{sen}(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$q \neq p \quad (\text{IV.3.20})$

Y los elementos de la diagonal principal de J_4 son:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial |E_p|} = 2 |E_p Y_{pp}| \text{sen} \theta_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_q Y_{pq}| \text{sen}(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad (\text{IV.3.21})$$

De las ecuaciones anteriores se observa que los elementos fuera de la diagonal principal están en función de las admitancias entre nodos. Si no existe conexión directa entre nodos, *los elementos correspondientes serán cero*. Esta situación es común en los SEP, llegando a tener estas submatrices J_i más de 90% de elementos iguales a cero; con esta característica se denominan *matrices dispersas* y existen técnicas numéricas que aprovechan esta propiedad, lo cual facilita su resolución por computadora.

En un conjunto inicial de voltajes de barra, las potencias real y reactiva son calculadas a partir de las ecuaciones (IV.3.10). Los cambios en las potencias son las diferencias entre los valores calculados y los especificados:

$$\Delta P_p^k = P_{p(\text{especificada})} - P_p^k$$

$$\Delta Q_p^k = Q_{p(\text{especificada})} - Q_p^k \quad p = 1, 2, \dots, n-1$$

Los valores de voltaje estimados y las potencias calculadas son utilizadas para evaluar los elementos del jacobiano. El conjunto de ecuaciones lineales (IV.3.11) puede ser resuelto para $\Delta |E_p|$ y $\Delta \delta_p$, $p = 1, 2, \dots, n-1$, mediante un método directo o iterativo. Consecuentemente, los nuevos valores estimados de los voltajes nodales son:

$$|E_p|^{k+1} = |E_p|^k + \Delta |E_p|^k$$

$$\delta_p^{k+1} = \delta_p^k + \Delta \delta_p^k$$

El proceso se repite hasta que los valores de ΔP_p^k y ΔQ_p^k para todos los buses se encuentren dentro de una tolerancia especificada. La secuencia de pasos (diagrama de bloques) para este método se presenta en la figura IV.2.

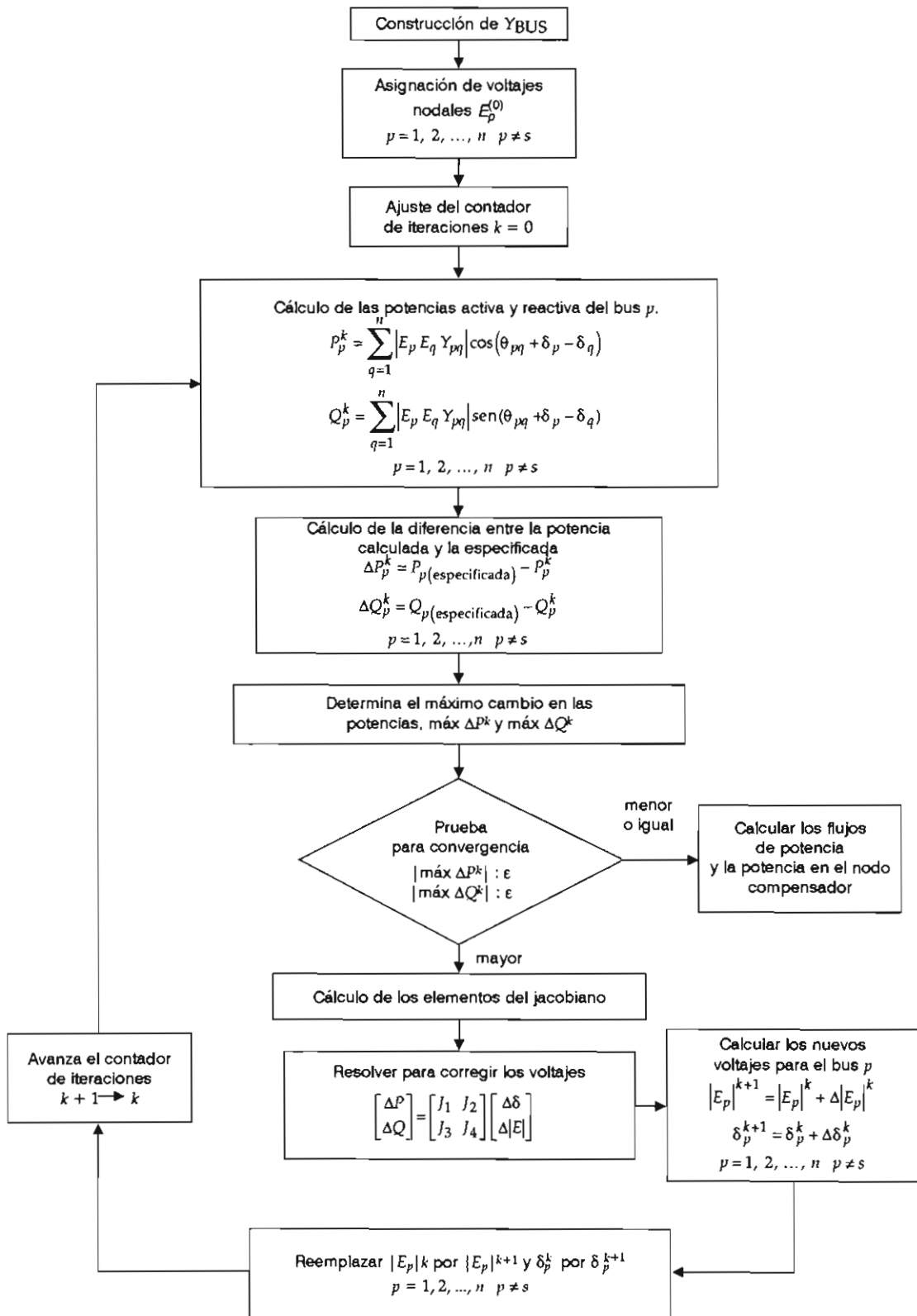


Figura IV.2. Solución del problema de flujos por Newton-Raphson con Y_{BUS} .

El método de Newton-Raphson se aplica también para resolver el problema de flujos de carga cuando las ecuaciones están expresadas en forma rectangular:

$$E_p = e_p + jf_p \quad y \quad Y_{pq} = G_{pq} - jB_{pq}$$

Los cambios de potencia en función de los cambios de las componentes real e imaginaria de los voltajes para el método de Newton-Raphson se representan en forma matricial por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta f \end{bmatrix}$$

IV.3.3. Aproximaciones al método de Newton-Raphson

En general, para un cambio pequeño en la magnitud del voltaje en una barra la potencia real en el mismo no cambia apreciablemente. En forma similar, cuando hay un cambio pequeño en el ángulo del voltaje la potencia reactiva permanece casi constante. Por lo tanto, utilizando coordenadas polares, una solución alternativa al problema de flujos es asumir que los elementos de las submatrices J_2 y J_3 son cero (Carpentier, 1963). La ecuación matricial simplificada es:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta |E| \end{bmatrix}$$

Mediante estas simplificaciones se reduce notablemente el número de iteraciones requeridas para encontrar una solución.

IV.3.4. Método iterativo de Gauss utilizando Z_{BUS}

Seleccionando un conjunto inicial de valores de voltaje, las corrientes en cada barra se calculan de la expresión:

$$I_p = \frac{P_p - jQ_p}{E_p^*} - \sum_{s \neq p} Y_{ps} E_s \quad (IV.3.22)$$

donde las conexiones en derivación son tratadas como fuentes de corriente. Un nuevo estimado de voltajes puede obtenerse mediante la ecuación de la red en el modelo de impedancia nodal:

$$E_{BUS} = Z_{BUS} I_{BUS} + E_R \quad (IV.3.23)$$

en donde E_R es el vector cuyos elementos son todos iguales al voltaje del nodo compensador y la matriz de impedancias nodales Z_{BUS} , utilizando el neutro como nodo de referencia, es de dimensión $(n-1) \times (n-1)$. Los nuevos valores estimados de voltaje son utilizados en la ecuación (IV.3.22) para recalcular las corrientes nodales. El proceso se repite hasta que los cambios en los valores de voltaje se acotan dentro de las especificaciones de tolerancia.

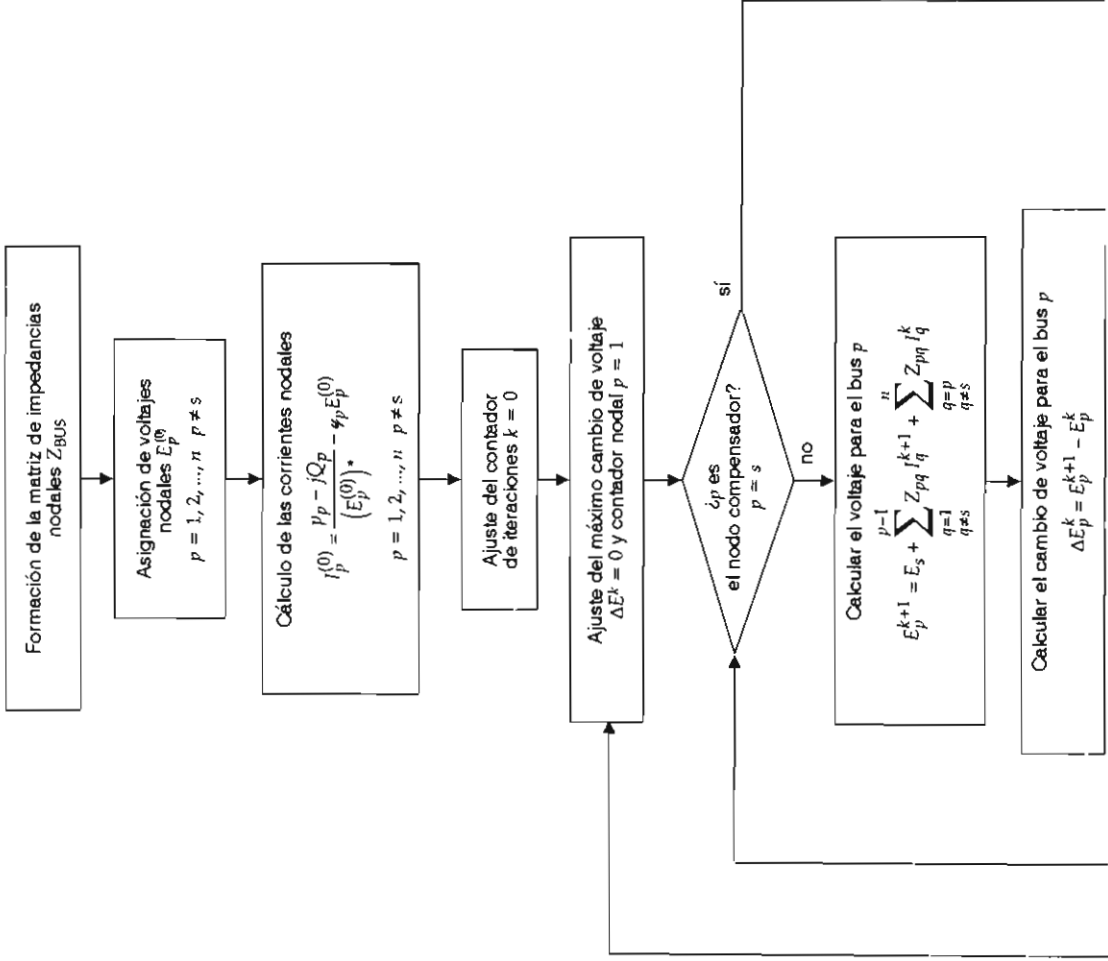
Este algoritmo de solución utiliza el método iterativo de Gauss debido a que las nuevas corrientes nodales son recalculadas sólo al terminar una iteración completa.

IV.3.5. Método iterativo de Gauss-Seidel utilizando Z_{BUS}

El método iterativo de Gauss-Seidel también se utiliza para la solución del problema de flujos en formación con Z_{BUS} (El-Abiad, Watson y Stagg, 1961). Las ecuaciones de voltaje nodales (IV.3.23) son resueltas una a una en un orden preestablecido por el código de bus. Inmediatamente después al cálculo del nuevo estimado de voltaje se calcula la correspondiente corriente del bus. La secuencia de pasos para la solución de flujos por esta metodología se muestra en la figura IV.3.

IV.4. NODOS DE VOLTAJE CONTROLADO

En la operación real de sistemas de potencia, los nodos que contienen generadores son capaces de mantener las condiciones de suministro de



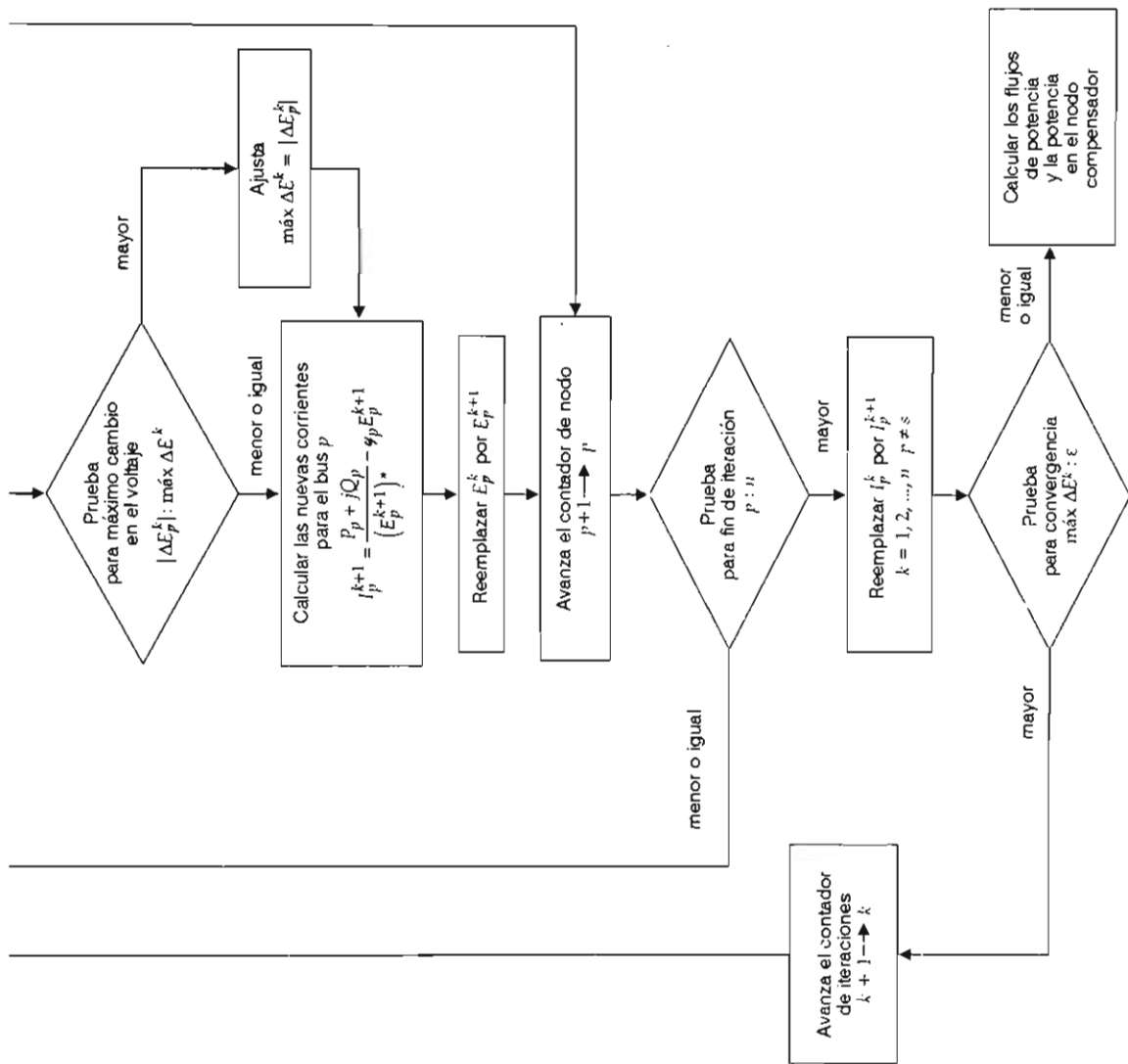


Figura IV.3. Diagrama para la solución del problema de flujos por Gauss-Seidel, utilizando la matriz Zeas.

potencia activa mediante su *gobernador de velocidad*, y el nivel de voltaje en sus terminales mediante el *regulador automático de voltaje*. Para el problema de flujos implica que deben ser considerados estos nodos en donde son especificadas la magnitud de voltaje y la potencia activa; estos nodos se denominan de *voltaje controlado*. En estos nodos la magnitud de voltaje y la potencia real son especificadas, variando δ y $|V|$.

En los métodos de Gauss y Gauss-Seidel, al usar Y_{BUS} la potencia reactiva en el nodo de vol-

taje controlado p debe ser calculada antes de proceder al cálculo de voltaje en ese nodo. Separando las componentes real e imaginaria de la ecuación de conjugado de la potencia neta compleja:

$$P_p - jQ_p = E_p^* \sum_{q=1}^n Y_{pq} E_q$$

la potencia reactiva en el bus es:

$$Q_p = e_p^2 B_{pp} + f_p^2 B_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n [fp(eqGpq + fqBpq) - ep(fqGpq - eqBpq)] \quad (IV.4.1)$$

donde e_p y f_p son las componentes de voltaje del nodo p . Estos valores deben satisfacer la ecuación:

$$e_p^2 + f_p^2 = \{|E_p|_{(especificada)}\}^2 \quad (IV.4.2)$$

a fin de calcular la potencia reactiva del nodo requerida para mantener el voltaje asignado al nodo.

Los valores estimados de e_p^k y f_p^k deben ser ajustados de tal manera que satisfagan la ecuación (IV.4.2). El ángulo del voltaje calculado es el siguiente:

$$\delta_p^k = \arctan(f_p^k/e_p^k)$$

Asumiendo que los ángulos de los voltajes especificados y calculados son iguales, los estimados de e_p^k y f_p^k son:

$$e_p^k \text{ (nuevo)} = |E_p|_{(especificado)} \cos \delta_p^k$$

$$f_p^k \text{ (nuevo)} = |E_p|_{(especificado)} \sin \delta_p^k$$

Sustituyendo $e_p^k \text{ (nuevo)}$ y $f_p^k \text{ (nuevo)}$ en la ecuación (IV.4.1), se determina la potencia reactiva Q_p^k y, en combinación con $E_p \text{ (nuevo)}$ se utiliza para la estimación del nuevo voltaje E_p^{k+1} .

En los SEP, los generadores y otras fuentes de reactivos tales como los Compensadores Estáticos de Vars (CEV) y los condensadores síncronos,

basan su función reguladora de voltaje en la inyección o absorción de reactivos a la red; por esta razón hay que tener muy en cuenta la capacidad o límites de potencia reactiva que tenga el nodo de voltaje controlado bajo consideración. Si la potencia reactiva calculada Q_p^k excede la capacidad de suministro del nodo se toma esta capacidad como la potencia reactiva del nodo; de manera similar se utiliza este criterio para la potencia reactiva mínima. Bajo esta condición (los límites de reactivos han sido excedidos) es imposible obtener una solución con el voltaje especificado y consecuentemente $E_p^k \text{ (nuevo)}$ no puede ser usado en el cálculo de E_p^{k+1} . El diagrama de flujo complementario para nodos de voltaje controlado se muestra en la figura IV.4.

Cuando se emplea el método de Newton-Raphson, las ecuaciones para un nodo p de voltaje controlado son:

$$P_p = \sum_{q=1}^n \{e_p(e_q G_{pq} + f_q B_{pq}) + f_p(f_q G_{pq} - e_q B_{pq})\}$$

y

$$|E_p|^2 = e_p^2 + f_p^2 \quad (IV.4.3)$$

donde la ecuación (IV.4.3) reemplaza la ecuación para la potencia reactiva.

La ecuación matricial (figura IV.4) que relaciona los cambios entre las potencias nodales y el

Estudio de flujos de potencia

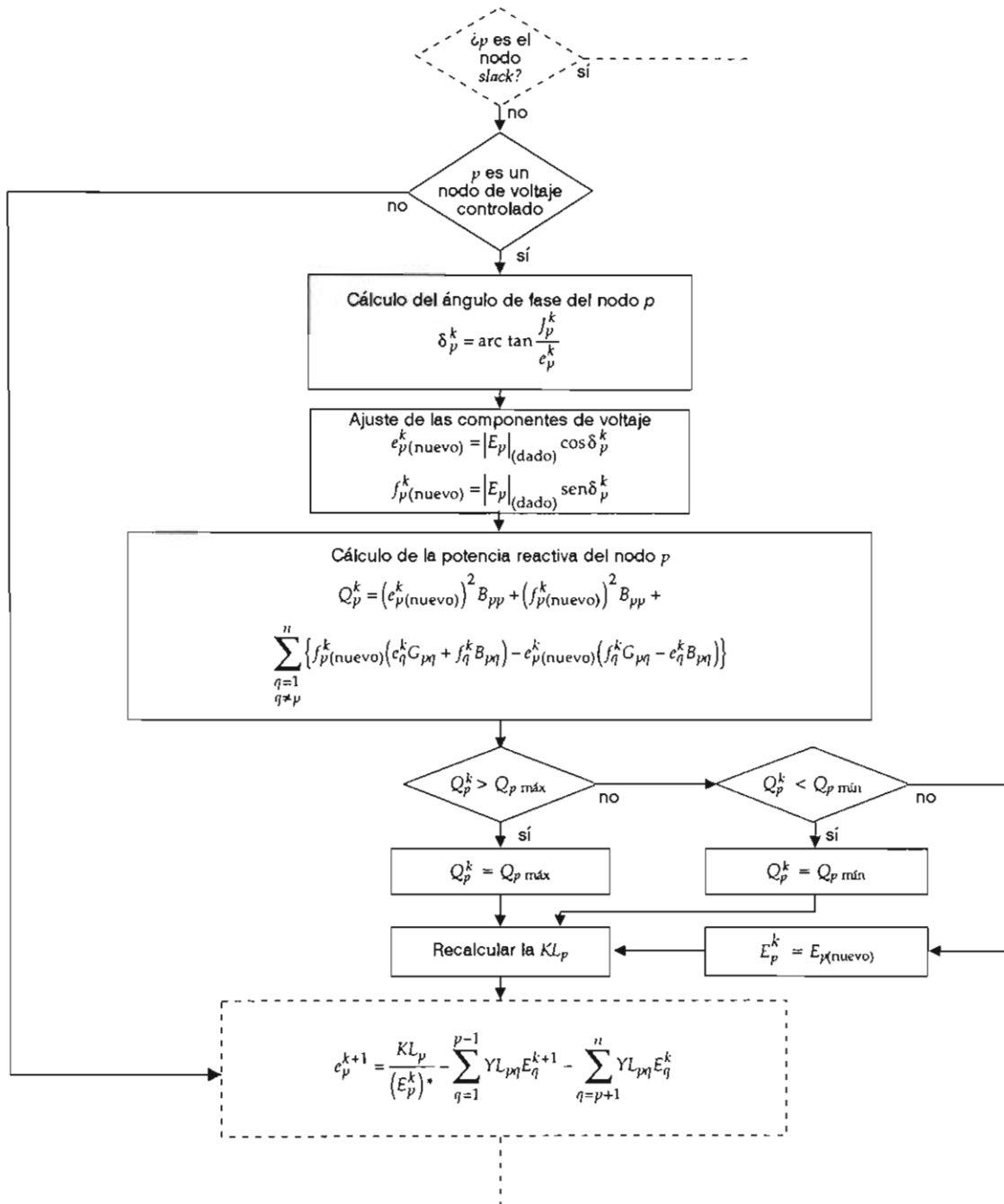


Figura IV.4. Cálculo de la potencia reactiva en nodos de voltaje controlado, para el método de Gauss-Seidel, usando Y_{BUS} .

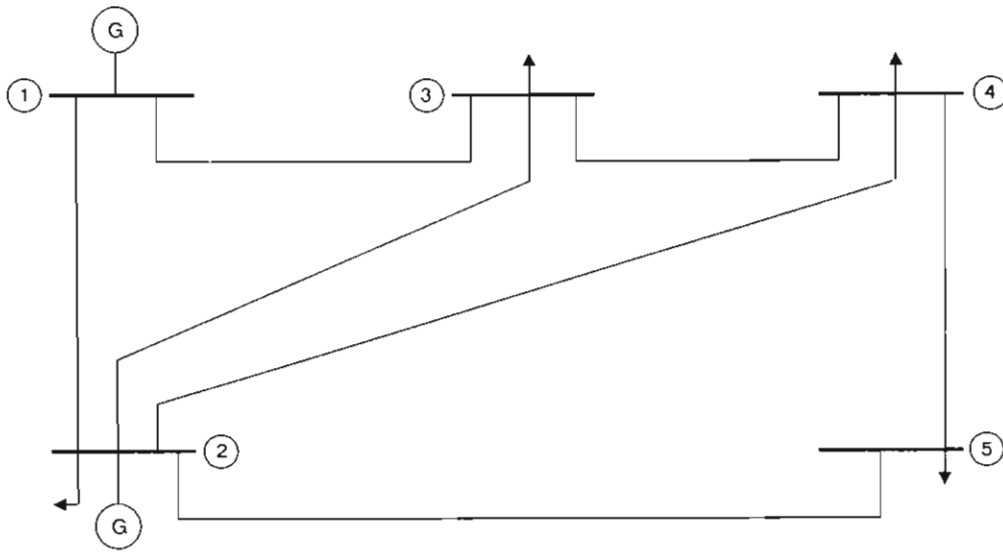


Figura IV.5a. Sistema base para el estudio de flujos de potencia.

cuadrado de las magnitudes de voltaje con respecto a los cambios en las componentes real e imaginaria de voltaje es:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta |E|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix}$$

Los elementos de las submatrices J_1, J_2, J_3 y J_4 se calculan conforme a lo descrito en la sección IV.3.2, para las restantes J_5 y J_6 .

Los elementos fuera de la diagonal principal ($q \neq p$) de J_5 son:

$$\frac{\partial |E_p|^2}{\partial e_q} = 0$$

de J_6 son:

$$\frac{\partial |E_p|^2}{\partial f_q} = 0$$

Y los elementos de la diagonal principal de J_5 son:

$$\frac{\partial |E_p|^2}{\partial e_p} = 2e_p$$

y de J_6 son:

$$\frac{\partial |E_p|^2}{\partial f_p} = 2f_p$$

El cambio en el cuadrado de las magnitudes de voltaje del nodo p es:

$$\Delta |E_p^k|^2 = (|E_p|_{\text{especificado}})^2 - |E_p^k|^2$$

En los casos en los que se sobrepase la capacidad reactiva del nodo, la potencia reactiva será fijada en el límite, siendo este nodo tratado como un nodo de carga con la potencia reactiva variable.

IV.5. EJEMPLO DE CÁLCULO DE FLUJOS DE POTENCIA

Seleccionando el nodo 1 de la figura IV.5a como compensador, utilice el método de Gauss-Seidel para obtener la solución de flujos de carga.

Utilice factores de aceleración* de 1.4 y 1.4 y

* En algunos casos el promedio de convergencia de un proceso iterativo se incrementa mediante la aplicación de un *factor de aceleración* a la solución aproximada obtenida; por consiguiente se asignan factores (α y β) de aceleración para las componentes real e imaginaria de los voltajes respectivamente. La expresión de corrección de voltajes nodales utilizando únicamente el factor α es:

$$E_p^{(k+1)} = E_p^{(k)} + \alpha \Delta E_p^{(k)}$$

CUADRO IV.1

Código de bus p-q	Impedancia Z_{pq}	Admitancia paralelo $y_{pq}/2$
1-2	$0.02 + j0.06$	$0.0 + j0.030$
1-3	$0.08 + j0.24$	$0.0 + j0.025$
2-3	$0.06 + j0.18$	$0.0 + j0.020$
2-4	$0.06 + j0.18$	$0.0 + j0.020$
2-5	$0.04 + j0.12$	$0.0 + j0.015$
3-4	$0.01 + j0.03$	$0.0 + j0.010$
4-5	$0.08 + j0.24$	$0.0 + j0.025$

tolerancias de 0.0001 y 0.0001 en p.u. para las componentes real e imaginaria de los voltajes del cuadro IV.2.

$$E_4^{k+1} = KL_4/(E_4^k)^* - YL_{42} E_2^{k+1} - YL_{43} E_3^{k+1} - YL_{45} E_5^k$$

$$E_5^{k+1} = KL_5/(E_5^k)^* - YL_{52} E_2^{k+1} - YL_{54} E_4^{k+1}$$

Solución

Las impedancias serie y admitancias paralelo de las líneas en p.u. a una base de 100 MVA se muestran en cuadro IV.1.

Los valores de generación y carga, así como también los voltajes asignados se muestran en el cuadro IV.2.

Las ecuaciones para la solución iterativa de Gauss-Seide, utilizando los números código de bus de la figura IV.4, son:

$$E_1 = 1.0 + j0.0$$

$$E_2^{k+1} = KL_2/(E_2^k)^* - YL_{21} E_1 - YL_{23} E_3^k - YL_{24} E_4^k - YL_{25} E_5^k$$

$$E_3^{k+1} = KL_3/(E_3^k)^* - YL_{31} E_1 - YL_{32} E_2^{k+1} - YL_{34} E_4^k$$

Para calcular los parámetros de estas ecuaciones es necesario determinar previamente los elementos de la matriz de admitancia nodal Y_{BUS} a partir de las impedancias serie y paralelo de la línea. Como para los estudios de flujos de potencia es usual despreciar los efectos de acoplamiento mutuos, la matriz, en este caso, se obtiene por inspección. Tomando el neutro como nodo de referencia, las admitancias serie de las líneas obtenidas a partir de la inversión de valores de impedancia se muestran en el cuadro IV.3. Puesto que no existe acoplamiento mutuo en el sistema, el elemento de la diagonal principal (1,1), admitancia propia del nodo 1, vale:

$$Y_{11} = y_{12} + y_{13} + y_1$$

donde y_1 (figura IV.5b) representa la suma de las admitancias paralelo incidentes al nodo 1 (para

CUADRO IV.2

Código de bus p	Voltaje asumido del bus	Generación		Carga	
		Megawatts	Megavars	Megawatts	Megavars
1	$1.0 + j0.0$	0	0	0	0
2	$1.0 + j0.0$	40	30	20	10
3	$1.0 + j0.0$	0	0	45	15
4	$1.0 + j0.0$	0	0	40	5
5	$1.0 + j0.0$	0	0	60	10

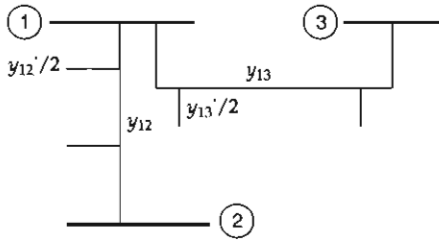


Figura IV.5b.

este caso, los valores de admitancia capacitiva ($y_{pq}'/2$) de las líneas 1-2 y 1-3).

Sustituyendo valores (cuadro IV.3), Y_{11} vale:

$$Y_{11} = (5.00 - j15.0) + (1.25 - j3.75) + j0.055$$

$$Y_{11} = 6.25000 - j18.69500$$

Los elementos fuera de la diagonal principal asociados al bus 1:

$$Y_{12} = Y_{21} = -y_{12} = -5.00000 + j15.00000$$

$$Y_{13} = Y_{31} = -y_{13} = -1.25000 + j3.75000$$

CUADRO IV.3. Admitancias de línea y admitancias a tierra del sistema bajo estudio

Código de bus p-q	Admitancia de línea y_{pq}
1-2	5.0000 - j15.00
1-3	1.2500 - j3.7500
2-3	1.66667 - j5.0000
2-4	1.66667 - j5.0000
2-5	2.5000 - j7.5000
3-4	10.0000 - j30.00
4-5	1.2500 - j3.7500

Código de bus p	Admitancia a tierra y_p
1	0.0 + j0.05500
2	0.0 + j0.08500
3	0.0 + j0.05500
4	0.0 + j0.05500
5	0.0 + j0.04000

Realizando este procedimiento para los demás elementos se obtiene la matriz de admitancia nodal Y_{BUS} del sistema:

	1	2	3	4	5
1	6.25 - j18.695	-5.000 + j15.000	-1.250 + j3.75	0.000 + j0.00	0.000 + j0.00
2	-5.00 + j15.000	10.833 - j32.415	-1.666 + j5.00	-1.666 + j5.00	-2.500 + j7.500
3	-1.25 + j3.750	-1.666 + j5.0000	12.916 - j38.695	-10.00 + j30.00	0.00 + j0.00
4	0.00 + j0.000	-1.666 + j5.000	-10.000 + j30.00	12.916 - j38.695	-1.25 + j3.75
5	0.00 + j0.000	-2.500 + j7.500	0.00 + j0.000	-1.25 + j3.75	3.75 - j11.21

Ahora se procede al cálculo de los coeficientes KL_p de acuerdo con la ecuación:

$$KL_p = (P_p - jQ_p) L_p = (P_p - jQ_p) / Y_{pp}$$

$$p = 1, n \quad L_p = 1/Y_{pp}$$

donde $P_p - jQ_p$ es el conjugado de la potencia compleja neta en el p-ésimo bus.

Esta ecuación para el bus 2 es:

$$KL_2 = (P_2 - jQ_2) / Y_{22}$$

Del cuadro IV.2:

Carga en el bus 2: 20 + j10 MVA
 Generación en el bus 2: 40 + 30 MVA

En por unidad: $MVA_{BASE} = 100$

Carga:

$$(20 + j10) (MVA) / 100 (MVA) = 0.20 + j0.1 (p.u.)$$

Generación:

$$= 0.4 + j0.3 \text{ (p.u.)}$$

$$\text{Potencia neta: } (0.4 + j0.3)_{\text{generación}} - (0.2 + j0.1)_{\text{carga}} = 0.2 + j0.2$$

* El valor neto de Q_2 es positivo, pero de acuerdo con la fórmula debe aplicarse un signo negativo:

$$P_2 - jQ_2 = 0.2 - j0.2$$

$$KL_2 = (0.2 - j0.2)/(10.833 - j32.415) = 0.0074 + j0.0037$$

Los parámetros KL_p para todos los buses son:

CUADRO IV.4

Código de bus p	KL_p
1	$0.00000 + j0.00000$
2	$0.00740 + j0.00370$
3	$-0.00698 - j0.00930$
4	$-0.00427 - j0.00891$
5	$-0.02413 - j0.04545$

Los coeficientes YL_{pq} se obtienen de la ecuación:

$$YL_{pq} = Y_{pq} L_p = Y_{pq} / Y_{pp} \quad p, q = 1, n$$

Para el elemento 1-2:

$$YL_{12} = (-5.000 + j15.000)/(6.2500 - j18.695)$$

$$YL_{12} = -0.80212 + j0.00071$$

Con el mismo procedimiento se obtienen los demás elementos (cuadro IV.5.)

No es necesario calcular los parámetros asociados al nodo compensador para la solución del problema de flujos. Para los estudios de planeación y operación, el nodo compensador comúnmente se cambia de ubicación (en todos los nodos que contengan generación) para determinar las opciones más convenientes de flujos de potencia. Este tipo de cambios es accesible siempre y cuan-

CUADRO IV.5

Código de bus $p-q$	YL_{pq}
1-2	$-0.80212 + j0.00071$
1-3	$-0.20053 + j0.00018$
2-1	$-0.46263 + j0.00036$
2-3	$-0.15421 + j0.00012$
2-4	$-0.15421 + j0.00012$
2-5	$-0.23191 + j0.00018$
3-1	$-0.09690 + j0.00004$
3-2	$-0.12920 + j0.00006$
3-4	$-0.77518 + j0.00033$
4-2	$-0.12920 + j0.00006$
4-3	$-0.77518 + j0.00033$
4-5	$-0.09690 + j0.00004$
5-2	$-0.66881 + j0.00072$
5-4	$-0.33440 + j0.00036$

do los resultados obtenidos estén apropiadamente almacenados en bases de datos.

El primer paso en la solución iterativa es calcular una nueva estimación de voltaje para el bus 2, utilizando la ecuación:

$$E_2^{(1)} = KL_2 / (E_2^{(0)})^* - YL_{21} E_1 - YL_{23} E_3^{(0)} - YL_{24} E_4^{(0)} - YL_{25} E_5^{(0)}$$

Sustituyendo valores:

$$E_2^{(1)} = (0.00740 + j0.00370)/(1.0 - j0.0)$$

$$-(-0.46263 + j0.00036) (1.0 + j0.0)$$

$$-(-0.15421 + j0.00012) (1.0 + j0.0)$$

$$-(-0.15421 + j0.00012) (1.0 + j0.0)$$

$$-(-0.23131 + j0.00018) (1.0 + j0.0)$$

$$E_2^{(1)} = 1.00976 + j0.00292$$

El cambio en el voltaje es:

$$\Delta E_2^{(1)} = E_2^{(1)} - E_2^{(0)}$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta E_2^{(1)} = 0.00976 + j0.00292$$

El valor acelerado del voltaje de bus se obtiene de:

$$E_{p, \text{acelerado}}^{(k+1)} = E_p^{(k)} + \alpha \Delta E_p^{(k+1)}$$

$$E_{2, \text{acelerado}}^{(1)} = E_2^0 + \alpha \Delta E_2^{(1)}$$

Que sustituyendo valores nos da:

$$E_{2, \text{acelerado}}^{(1)} = 1.0 + j0.0 + 1.4 (0.00976 + j0.00292)$$

$$E_2^{(1)} = 1.01366 + j0.00409$$

Éste reemplaza al valor inicial estimado del voltaje del bus 2 y se empleará en los subsecuentes cálculos de voltaje para los buses restantes.

Para el bus 3 el nuevo valor de voltaje se obtiene de la ecuación:

$$E_3^{(1)} = KL_3 / (E_3^{(0)})^* - YL_{31} E_1 - YL_{32} E_2^{(1)} - YL_{34} E_4^{(0)}$$

Que sustituyendo valores nos da:

$$\begin{aligned} E_3^{(1)} &= (-0.00698 - j0.00930) / (1.0 - j0.0) \\ &\quad - (-0.09690 + j0.00004) (1.0 + j0.0) \\ &\quad - (-0.12920 + j0.00006) (1.01366 + j0.00409) \\ &\quad - (-0.77518 + j0.00033) (1.0 + j0.0) \end{aligned}$$

$$E_3^{(1)} = 0.99607 - j0.00920$$

El cambio en el voltaje es:

$$\Delta E_3^{(1)} = -0.00393 - j0.00920$$

El valor acelerado del voltaje en el bus se obtiene de:

$$E_{3, \text{acelerado}}^{(1)} = E_3^{(0)} + \alpha \Delta E_3^{(1)}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} E_{3, \text{acelerado}}^{(1)} &= 1.0 + j0.0 + 1.4 (-0.00393 - j0.00920) \\ &= 0.99449 - j0.01288 \end{aligned}$$

Este valor reemplaza el valor inicial estimado para el voltaje del bus 3. El proceso continúa para los buses restantes hasta completar una iteración. Si el proceso no ha convergido se calcularán nuevos voltajes para todas las barras, comenzando nuevamente del bus 2. Los voltajes para todas las iteraciones se dan en el cuadro IV.6 y los correspondientes cambios en los voltajes en el cuadro IV.7. Estos cambios se establecen a partir de la diferencia entre los valores acelerados. Para determinar la convergencia, la prueba de tolerancia se realiza con valores de voltaje sin acelerar.

Los flujos de potencia en las líneas se calculan a partir de los voltajes finales de bus (renglón número 10) y utilizando las impedancias (o admitancias) serie y paralelo de las líneas de acuerdo con la ecuación:

$$P_{pq} - jQ_{pq} = E_p^* (E_p - E_q) y_{pq} + E_p^* E_p (y_{pq}' / 2)$$

Para la línea $p = 1, q = 2$ sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} P_{12} - jQ_{12} &= (1.0 - j0.0) [(1.0 + j0.0) \\ &\quad - (0.98318 - j0.05389)] (5.0 - j15.0) \\ &\quad + (1.0 - j0.0) (1.0 + j0.0) (0.0 + j0.03) \end{aligned}$$

$$P_{12} - jQ_{12} = 0.892 + j0.047 \text{ (por unidad)}$$

Este valor expresado en MVA (multiplicándolo por la potencia base) $MVA_{\text{BASE}} = 100 \text{ MVA}$

$$\begin{aligned} P_{12} - jQ_{12} &= 89.2 + j4.7 \text{ MVA} \\ (P_{12} = 89.2 \text{ MW} \quad Q_2 = -4.7 \text{ MVAR}) \end{aligned}$$

Los flujos de potencia del nodo 2 al nodo 1 son:

$$\begin{aligned} P_{21} - jQ_{21} &= (0.98318 + j0.05389) \\ &\quad [(0.98318 - j0.05389) - (1.0 + j0.0)] \\ &\quad (5.0 - j15.0) + (0.98318 + j0.05389) \\ &\quad (0.98318 - j0.05389) (0.0 + j0.3) \end{aligned}$$

$$P_{21} - jQ_{21} = -0.876 - j0.036 \text{ (p.u.)}$$

Estudio de flujos de potencia

CUADRO IV.6 Valores de voltajes nodales para cada iteración

Contador de iteraciones k	Voltajes de bus			
	Bus 2	Bus 3	Bus 4	Bus 5
0	$1.0 + j0.0$	$1.0 + j0.0$	$1.0 + j0.0$	$1.0 + j0.0$
1	$1.01366 + j0.00409$	$0.99449 - j0.01288$	$0.99230 - j0.02632$	$0.97990 - j0.07366$
2	$0.99866 - j0.0299$	$0.98539 - j0.04237$	$0.97967 - j0.06385$	$0.96256 - j0.09191$
3	$0.99466 - j0.03696$	$0.97410 - j0.07238$	$0.96883 - j0.08504$	$0.95877 - j0.10133$
4	$0.99032 - j0.04829$	$0.96556 - j0.08520$		
5	$0.98681 - j0.05197$	$0.96094 - j0.09014$		
6	$0.98523 - j0.05273$	$0.95799 - j0.09261$		
7	$0.98425 - j0.05363$	$0.95627 - j0.09326$		
8	$0.98366 - j0.05373$	$0.95542 - j0.09357$	$0.95378 - j0.09984$	$0.94573 - j0.11466$
9	$0.98340 - j0.05380$	$0.95496 - j0.09374$	$0.95342 - j0.09994$	$0.94551 - j0.11481$
10	$0.98325 - j0.05388$	$0.95472 - j0.09380$	$0.95325 - j0.10000$	$0.94536 - j0.11485$
11	$0.98318 - j0.05389$	$0.95461 - j0.09384$	$0.95316 - j0.10004$	$0.94529 - j0.11487$

CUADRO IV.7 Cambios en los voltajes nodales

Contador de iteraciones k	Cambios en los voltajes de bus			
	Bus 2	Bus 3	Bus 4	Bus 5
0	$0.0 + j0.0$	$0.0 + j0.0$	$0.0 + j0.0$	$0.0 + j0.0$
1	$0.00976 + j0.00292$	$-0.00394 - j0.00920$	$-0.00549 - j0.01879$	$-0.01435 - j0.05261$
2	$-0.01072 - j0.02426$	$-0.00650 - j0.02107$	$-0.00903 - j0.02681$	$-0.01239 - j0.01304$
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9	$-0.00019 - j0.00005$	$-0.00033 - j0.00012$	$-0.00026 - j0.00007$	$-0.00016 - j0.00011$
10	$-0.00010 - j0.00006$	$-0.00017 - j0.00004$	$-0.00013 - j0.00004$	$-0.00011 - j0.00003$
11	$-0.00006 - j0.00001$	$-0.00008 - j0.00003$	$-0.00006 - j0.00003$	$-0.00005 - j0.00001$

CUADRO IV.8. Flujos de potencia del sistema (compensador nodo 1)

Código de bus <i>p-q</i>	Flujos de potencia	
	Megawatts	Megavars
1-2	89.2	-4.7
1-3	40.9	2.8
2-1	-87.6	3.6
2-3	24.7	4.2
2-4	28.0	3.7
2-5	54.9	8.5
3-1	-39.5	-3.5
3-2	-24.3	-6.8
3-4	18.9	-4.6
4-2	-27.5	-6.0
4-3	-18.9	2.8
4-5	6.3	-1.9
5-2	-53.7	-7.5
5-4	-6.3	-2.6

Expresado en MVA:

$$P_{21} - jQ_{21} = -87.6 - j3.6 \text{ (MVA)}$$

$$(P_{21} = -87.6 \text{ MW} \quad Q_{21} = 3.6 \text{ MVAR})$$

Todos los flujos del sistema se resumen en el cuadro IV.8.

La potencia del nodo compensador se obtiene sumando los flujos de las líneas que salen de ese bus 1:

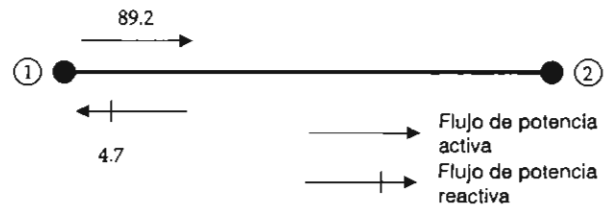
Potencia real: $89.2 + 40.9 = 130.1 \text{ MW}$
 Potencia reactiva: $-4.7 + 2.8 = -1.9 \text{ MVAR}$
 Suministra 130.1 MW y absorbe 1.9 MVAR.

IV.6. INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Una vez obtenida la solución analítica del problema de flujos es usual representar gráficamente estos resultados mediante la llamada *carta o diagrama de flujos*. Partiendo de los nodos 1 y 2 se tienen los siguientes resultados:

Elemento	Flujo de potencia activa	Flujo de potencia reactiva
1-2	$P_{12} = 89.2 \text{ MW}$	$Q_{12} = -4.7 \text{ MVAR}$
2-1	$P_{21} = -87.6 \text{ MW}$	$Q_{21} = 3.6 \text{ MVAR}$

Se observa que para los flujos del bus 1 al bus 2 el valor del flujo de potencia activa es positivo, esto indica que la potencia real sí sale del bus 1 y llega al bus 2, a diferencia del valor de Q_{12} , que es negativo, lo cual implica que el sentido es negativo. Como no se utilizan valores negativos en esta representación, el sentido de la flecha de la potencia reactiva se invierte, como se muestra a continuación:



De manera similar se vacían los valores correspondientes a los flujos de los buses 2 a 1:

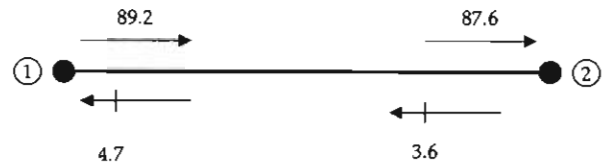


Figura IV.6. Flujos de potencia correspondientes al enlace de los nodos 1 y 2.

Analizando el comportamiento de los flujos se observa que del bus 1 se envían 89.2 MW y que en el bus 2 se reciben 87.6 MW; esto implica que existen $P_{12} + P_{21} = 89.2 + (-87.6) = 1.6 \text{ MW}$ de pérdidas en este elemento. En el caso de la potencia reactiva $Q_{12} + Q_{21} = (-4.7) + (3.6) = -1.1 \text{ MVAR}$ de balance reactivo, el signo negativo significa que la línea tiene exceso de reactivos, lo cual se debe fundamentalmente a que está operando ligeramente por debajo de su potencia natural (SIL). Aplicando los mismos principios para los restantes elementos se obtiene el diagrama de flujos completo de la figura IV.6. Como un caso especial, el enlace entre los nodos 4 y 5 muestra valores negativos en ambos casos; gráficamente se observa que la potencia reactiva fluye hacia ambos extremos de la línea, operativamente significa que tiene un superávit muy grande de reactivos, resultado de un nivel muy bajo de carga.

Estudio de flujos de potencia

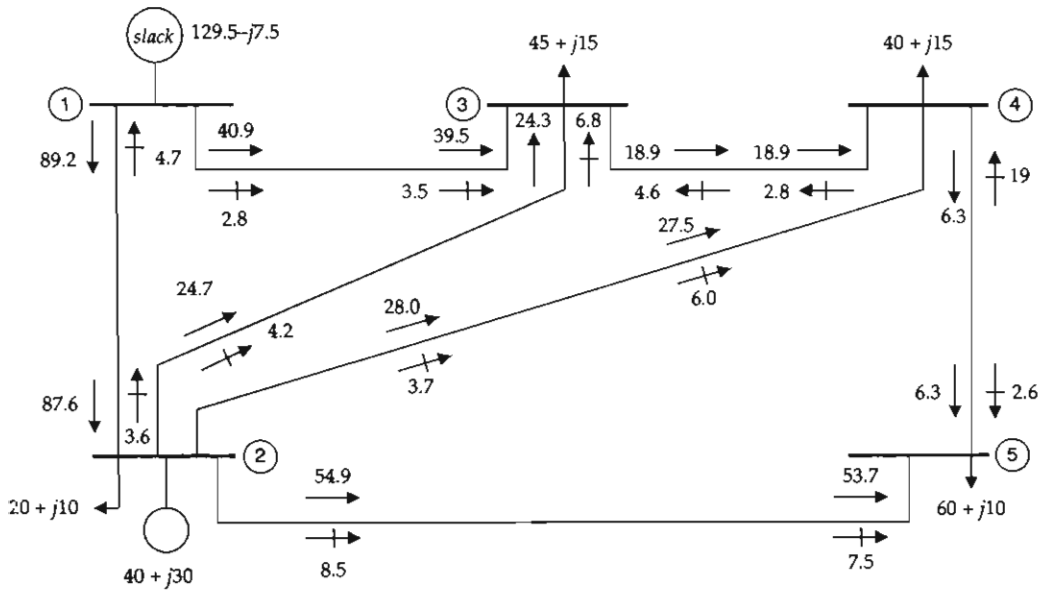


Figura IV.7. Diagrama de flujos de potencia para el sistema analizado.

CAPÍTULO V

ESTUDIO DE CORTOCIRCUITO

V.1. INTRODUCCIÓN

Aun en los sistemas eléctricos mejor diseñados, ocasionalmente llegan a experimentarse fallas de cortocircuito, lo que ocasiona corrientes anormalmente grandes. Los dispositivos de protección, tales como interruptores, fusibles y demás, deben aislar la falla con un mínimo de daño a los circuitos y con un reducido tiempo de salida de operación del sistema.

Otras partes del sistema tales como cables, buses e interruptores, deben ser capaces de soportar los esfuerzos mecánicos y térmicos que resultan del flujo máximo de corriente de falla a través de ellos. Las magnitudes de esta corriente de falla se estiman usualmente mediante cálculos. El equipo se selecciona basándose en los resultados de estos cálculos.

El flujo de corriente durante una falla en cualquier punto del sistema está limitado por la impedancia equivalente de Thevenin de los circuitos y el equipo vistos desde la fuente hasta el punto de falla, y no está directamente relacionado con las condiciones de carga del sistema. Por otro lado, las modificaciones del sistema tendientes a aumentar la capacidad de suministro de carga (inclusión de nuevas acometidas o generadores) no afectan a la carga ya existente y pueden aumentar drásticamente la magnitud de la corriente de falla. Consecuentemente, si un sistema existente se amplía, o bien se instala un nuevo sistema, las corrientes de falla se recalcularán para una selección y ajuste correcto de los dispositivos de protección contra sobrecorriente.

V.2. FUENTES DE LA CORRIENTE DE FALLA

La magnitud y frecuencia de las corrientes que fluyen durante una falla dependen de las máquinas eléctricas rotatorias (generadores y motores) y de los sistemas de suministro (acometidas). Los capacitores de potencia también pueden producir corrientes transitorias extremadamente grandes, pero por lo general éstas son de corta duración y de frecuencia natural mucho mayor que la frecuencia de la fuente, por lo que para el estudio de cortocircuito *su contribución se desprecia*.

La magnitud de la corriente de falla en cada máquina rotatoria está limitada por la impedancia de la propia máquina y la impedancia entre la máquina y la falla (circuito equivalente de Thevenin). La impedancia de una máquina rotatoria no es un valor simple, es complejo y variable en el tiempo.

V.2.1. Cortocircuito trifásico en las terminales de un generador síncrono

Los generadores síncronos usados en las plantas generadoras de un sistema eléctrico constan de un rotor, que contiene una serie de bobinas (el campo o inductor), recorrido por una corriente continua, la cual produce un flujo constante que gira con el rotor, y un estator o armadura de acero laminado con tres embobinados, en los que se inducen tres fuerzas electromotrices alternas de igual magnitud y desplazadas 120° eléctricos.

Al conectar una carga trifásica equilibrada al

generador circulan por los embobinados del estator tres corrientes alternas que constituyen un sistema trifásico equilibrado. Las fuerzas magnetomotrices producidas por estas tres corrientes dan lugar a una fuerza magnetomotriz resultante que, en las condiciones normales de funcionamiento, o sea cuando la máquina gira a la velocidad de sincronismo, producen un flujo (la reacción de armadura) que gira a la misma velocidad y en el mismo sentido que el rotor y que se combina con el flujo producido por el campo para dar el flujo resultante en el entrehierro.

Los generadores movidos por turbinas de vapor o de gas giran a gran velocidad, su rotor es una pieza cilíndrica de acero con polos lisos y tienen generalmente un par de polos. Por su velocidad de rotación son más estables en cuanto a su frecuencia y características de sincronismo con respecto a otros tipos de generadores de la red. Por su bajo momento de inercia (con respecto a las unidades hidráulicas) son empleados para compensar las desviaciones de frecuencia causadas por la natural desviación de la demanda de potencia activa del sistema.

Los generadores impulsados por turbinas hidráulicas giran más lentamente y tienen un número elevado de pares de polos. En este caso el rotor se construye con polos salientes de acero laminado; además de las bobinas que constituyen el campo, existen bobinas conectadas en cortocircuito, llamadas amortiguadores y que tienen por objeto principal amortiguar las oscilaciones del rotor y facilitar la sincronización de la máquina.

V.2.1.1. Corrientes de cortocircuito trifásico

Si se establece súbitamente un cortocircuito trifásico en las terminales de un generador que está operando en vacío y se registran los oscilogramas de las corrientes en las fases se obtendrán, por fase, curvas similares a la que se muestra para una fase en la figura V.1.

Las líneas AA' y BB' son las envolventes de la corriente alterna y MM' es la línea mediana entre las envolventes.

La corriente asimétrica $i(t)$ de la figura V.1 tiene dos componentes:

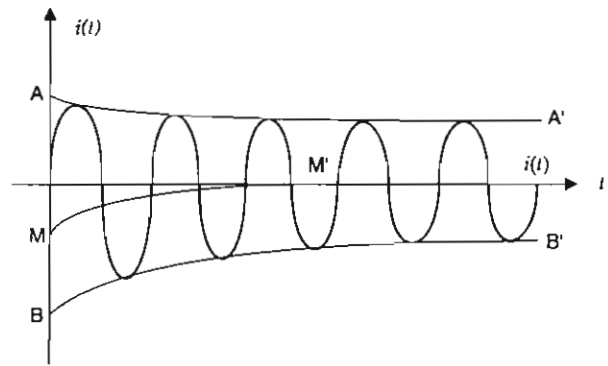


Figura V.1. Corriente de falla típica de un sistema.

a) Una corriente continua amortiguada cuya magnitud en función del tiempo está representada por la línea MM'.

b) Una corriente alterna simétrica de frecuencia fundamental que se obtiene restando de la corriente $i(t)$ la componente de corriente continua.

V.2.1.2. Componente de corriente continua

Para explicar la presencia de una componente de corriente continua en la corriente de cortocircuito considérese el circuito equivalente de la figura V.2, el cual representa una fase de un generador síncrono trifásico. R y L son, respectivamente, la resistencia y la inductancia por fase del generador.

Inicialmente, si el generador está funcionando en vacío (sin carga conectada), la fuerza electromotriz inducida ϵ es una función armónica del tiempo con un valor de cresta E :

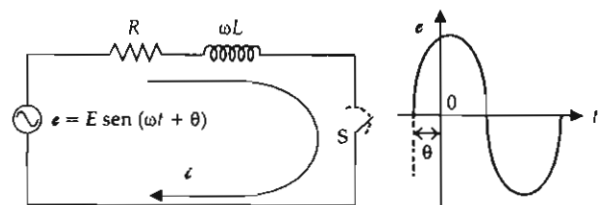


Figura V.2. Circuito Inductivo excitado por una fuerza electromotriz senoidal.

En el instante $t = 0$ se produce un cortocircuito trifásico en las terminales del generador repre-

sentado en el circuito equivalente de la figura V.2 por el cierre del contacto S.

La ecuación diferencial que describe las condiciones del circuito al establecerse el cortocircuito es:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \sin(\omega t + \theta) \quad (V.2.1.)$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es:

$$i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[\sin \left(\omega t + \theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) - \sin \left(\theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (V.2.2)$$

La ecuación anterior muestra que la expresión de la corriente i consta de dos términos:

1) El término

$$-\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left(\theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (V.2.3)$$

que es una corriente amortiguada que decae con la constante de tiempo $\frac{L}{R}$

2) El término

$$\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \left(\omega t + \theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \quad (V.2.4)$$

que es una corriente alterna simétrica de frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ciclos por segundo.

Para $t = 0$ los dos términos son de igual magnitud pero de signo contrario, de manera que el valor correspondiente de la corriente total i es igual a cero.

En un generador síncrono la reactancia inductiva ωL es mucho mayor que la resistencia R y por lo tanto puede considerarse que:

$$\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \approx 90^\circ \quad (V.2.5)$$

Si el cortocircuito se establece en el instante en que $\theta = 90^\circ$, o sea, cuando la fuerza electromotriz tiene su valor máximo, se tendrá:

$$\sin(90^\circ - 90^\circ) = 0 \quad (V.2.6)$$

y por lo tanto no existirá en este caso componente de corriente continua.

Si el cortocircuito se establece en el instante en que $\theta = 0^\circ$, o sea cuando la fuerza electromotriz pasa por cero, se tendrá

$$\sin(0^\circ - 90^\circ) = -1 \quad (V.2.7)$$

y la componente de corriente continua alcanzará su valor inicial máximo, que es:

$$\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (V.2.8)$$

Tener una respuesta en corriente variable en el tiempo implica que la impedancia equivalente también es un parámetro dependiente del tiempo, como puede observarse. Al principio de la falla la máquina presenta una impedancia menor y al ir transcurriendo el transitorio aumenta su impedancia hasta llegar al valor en estado estable (impedancia síncrona). Para simplificar el cálculo de las corrientes de falla esta impedancia se considera constante por intervalos.

Los estándares industriales han establecido tres nombres específicos para valores de esta reactancia variable:

- 1) Reactancia subtransitoria
- 2) Reactancia transitoria
- 3) Reactancia síncrona

x_d'' Reactancia subtransitoria. Determina la corriente durante el primer ciclo después de ocurrida la falla. En 0.1 segundos la reactancia se incrementa a:

x_d' Reactancia transitoria. Se asume para determinar la corriente después de varios ciclos a 60 Hz. De 1/2 a 2 segundos la reactancia se incrementa a:

x_d Reactancia síncrona. Éste es el valor que determina el flujo de corriente después de que la condición de estado estable se ha alcanzado.

Como la mayoría de los dispositivos de protección, tales como interruptores y fusibles, operan mucho antes de que se alcancen las condiciones de estado estable, la reactancia síncrona del generador es raramente usada en el cálculo de corrientes de falla para la selección y ajuste de estos dispositivos.

V.2.2. Motores y condensadores síncronos

Los motores síncronos suministran corriente a una falla en la misma forma que un generador. Cuando una falla causa una caída de voltaje en el sistema, el motor síncrono recibe menos energía para mover su carga.

Al mismo tiempo, el voltaje interno causa una corriente que fluye del sistema a la falla. La inercia del motor y su carga actúan como un primo motor, y con una excitación de campo sostenida el motor actúa como un generador para alimentar la corriente de falla. Esta corriente de falla disminuye con el decaimiento del campo magnético de la máquina.

El circuito equivalente del generador se usa para máquinas síncronas; nuevamente, una fuente de voltaje y las mismas tres reactancias x''_d , x'_d y x_d se usan para establecer valores de corriente para tres puntos en el tiempo.

V.2.3. Motores de inducción

Un motor de inducción jaula de ardilla aporta corriente de falla cuando existe una falla en el sistema. Ésta se genera por la inercia del motor en presencia de un flujo de campo, producido por inducción del estator, más que por la corriente directa del devanado de campo de los motores síncronos. Ya que este flujo decae por la pérdida de la fuente de voltaje provocada por la falla en las terminales del motor, la contribución de un motor de inducción a la corriente de falla se reduce y desaparece por completo después de pocos ciclos. Debido a que la excitación del campo no se mantiene, no hay un valor de corriente de falla en estado estable, como en las máquinas síncronas. De nuevo se utiliza el

mismo circuito equivalente, pero los valores de la reactancia transitoria y síncrona se aproximan rápidamente al infinito. Como consecuencia, a los motores de inducción se les asigna únicamente un valor de reactancia subtransitoria x''_d . Este valor es casi igual a la reactancia de rotor bloqueado.

Para el cálculo de fallas, un generador de inducción puede tratarse de la misma manera que un motor de inducción. Los motores de inducción de rotor devanado que operan con alguna resistencia externa en los circuitos del rotor pueden tener lo suficientemente bajas las constantes de tiempo de cortocircuito, así, su contribución a la falla no es significativa y puede ignorarse. Aunque la capacidad del motor es un parámetro fundamental, deberá hacerse una investigación específica para determinar cuándo ignorar la contribución de un motor de rotor devanado a la corriente de cortocircuito.

V.2.4. Sistemas de servicio eléctrico

Los generadores distantes del sistema eléctrico de distribución son una fuente de corriente de cortocircuito, frecuentemente entregada a través de un transformador. El circuito equivalente del generador puede usarse para representar el sistema de distribución (con una impedancia constante).

Casi siempre, los generadores empleados están lejos de las plantas industriales. La contribución de corriente a la falla en las plantas lejanas parece ser únicamente un pequeño incremento en la corriente de carga para una gran estación generadora, y esta contribución de corriente tiende a permanecer constante. Por consiguiente, el sistema eléctrico es representado en general por un solo valor de impedancia equivalente *constante* referida al punto de conexión.

V.3. TIPOS DE FALLAS A CONSIDERAR

En un sistema industrial las condiciones de falla trifásica y de línea a tierra son las que más se consideran, ya que de éstas resultan las condiciones de falla más severas y comunes.

La corriente de falla entre líneas corresponde aproximadamente al 87% del valor de la corriente de falla trifásica.

Si asumimos una condición de falla trifásica los cálculos resultan más simplificados. El sistema, incluyendo la falla, permanece simétrico con respecto al neutro, independientemente del tipo de conexión (delta o estrella) o de la forma de aterrizamiento.

La corriente trifásica balanceada puede calcularse utilizando un circuito monofásico, el cual tendrá sólo un voltaje de línea a neutro y una impedancia monofásica.

Para el cálculo de la corriente máxima se considera una impedancia nula sin efecto limitador de corriente, es decir, se considera una *falla franca*.

No obstante debe tomarse en cuenta que la presencia de arqueado en las fallas reduce considerablemente la magnitud de la corriente de falla. En sistemas de baja tensión, los valores mínimos de la corriente de falla algunas veces se calculan incluyendo los efectos conocidos del arqueado. Estudios analíticos indican que las corrientes de falla con arqueado en por unidad, de valores de falla franca, se reducen a valores tan bajos como:

- 1) 0.89 a 480 V y 0.12 a 208 V, para arqueado trifásico.
- 2) 0.74 a 480 V y 0.02 a 208 V, para arqueado entre líneas.
- 3) 0.38 a 277 V y 0.01 a 120 V, para arqueado línea-neutro.

V.4. TRANSITORIOS POR SWITCHEO MÚLTIPLE

Es práctica común que el analista considere que el transitorio por switcheo ocurra una sola vez durante un flujo de corriente de cortocircuito. Una inspección de los oscilogramas representativos de la corriente de cortocircuito mostrará frecuentemente casos de interrupciones momentáneas de corriente. En la maniobra de un interruptor, en especial cuando éste se encuentra en el circuito de un capacitor, pueden observarse dos o tres recierres antes de que la interrupción sea total. El recierre se da cuando la diferencia de potencial a través de los contac-

tos del interruptor es elevada. Es posible que los valores correspondientes a las oscilaciones transitorias por switcheo de corrientes directa y alterna se reinserten en las corrientes del circuito varias veces durante un solo caso de flujo de corriente de cortocircuito.

V.5. APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES IMPUESTAS

Como hemos visto, el énfasis se ha centrado en la importancia de respetar las restricciones impuestas por el procedimiento analítico para obtener resultados válidos. Se ha hecho mención de numerosas circunstancias en el análisis del cortocircuito, por ejemplo, dónde deben introducirse artificialmente las correcciones aplicadas cuando se han violado las restricciones analíticas. Otra área asociada con el análisis del cortocircuito es la que implica la utilización de impedancias variables en el tiempo.

Cuando un arco se convierte en un componente en serie de la impedancia del circuito, la R que lo representa no es constante. Para corrientes de 1 amper es probable que sea de 100 ohms, pero para una corriente de 1 000 amperes puede ser de 0.1 ohms. Durante cada medio ciclo de flujo de corriente la resistencia del arco puede atravesar este rango.

Es difícil determinar un valor apropiado de la resistencia de arco para introducirla en un sistema de 60 Hz. La variación de R disminuye la magnitud de la impedancia para grandes valores de corriente, lo cual resulta en una forma de onda mucho más aguda que una onda senoidal. La corriente contiene ahora términos de armónicas. Ya que esto resultó de una violación de las restricciones analíticas, no aparecerán en los resultados calculados, consecuentemente, su magnitud y características deben determinarse mediante otros procedimientos y el resultado final deberá modificarse para obtener el valor correcto de corriente de falla.

Un tipo similar de no linealidad se encuentra en elementos electromagnéticos en los cuales el comportamiento del acero influye en el valor de L . Si las partes ferrosas están sujetas a grandes

exposiciones de flujo magnético, el valor de L puede modificarse cuando la densidad de flujo llega a la región de saturación. El efecto de esta violación a las restricciones impuestas será como en el caso de la R variable, aparecerán componentes armónicas en la corriente verdadera del circuito.

V.6. FALLA TRIFÁSICA

Existen cuatro tipos de fallas de cortocircuito:

- 1) Cortocircuito trifásico
- 2) Cortocircuito de dos fases a tierra
- 3) Cortocircuito de dos fases
- 4) Cortocircuito de fase a tierra

Mayor grado de incidencia	$\left. \begin{array}{l} \text{(CC3F)} \\ \text{(CC2FT)} \\ \text{(CC2F)} \\ \text{(CC1FT)} \end{array} \right\}$	Mayor severidad
------------------------------------	---	--------------------

Como se observa, la falla más severa es la trifásica, aunque es la menos frecuente, mientras que la monofásica es la menos severa pero de mayor probabilidad de incidencia. Para un estudio de cortocircuito, basta con estudiar la falla trifásica y la de línea a tierra, pues con base en ellas se realizan las acciones de selección y ajuste de las protecciones (fundamentalmente las de sobrecorriente), asegurándose así que el sistema está bien protegido. De las fallas consideradas, la trifásica es la única que mantiene la simetría de las relaciones

tensión-corriente del sistema, por lo que se le denomina *falla balanceada*.

Existen casos en los que la falla monofásica es mayor que la trifásica (esto ocurre en nodos cercanos a la generación), por lo que para reducir su magnitud el aterrizamiento del sistema se realiza por medio de una impedancia (véase norma ANSI/IEEE Std 142-1982).

En la figura V.3.a se representa una falla trifásica que pone en cortocircuito las tres fases de una línea de transmisión.

Este caso es el único que no introduce ningún desequilibrio en las relaciones tensión-corriente del sistema trifásico y por lo tanto no existen corrientes ni voltajes de secuencia negativa y cero, independientemente de que la falla trifásica esté conectada a tierra o no. Todas las cantidades que intervienen en el cálculo son de secuencia positiva.

En el punto de la falla se verifica que:

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

$$V_a = V_b = V_c = 0$$

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas se reducen en este caso a:

$$\begin{aligned} E_a^1 - V_a^1 &= Z_{11} I_a^1 \\ -V_a^2 &= Z_{22} I_a^2 = 0 \\ -V_a^0 &= Z_{00} I_a^0 = 0 \end{aligned}$$

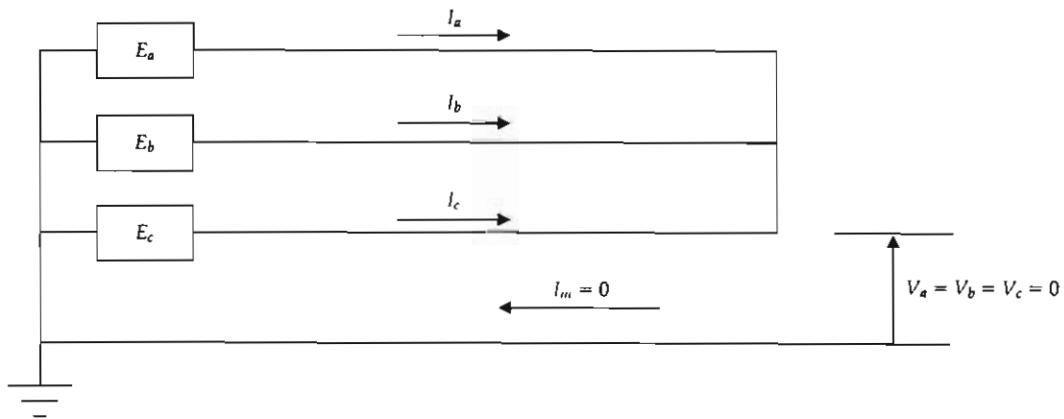


Figura V.3.a. Falla trifásica.

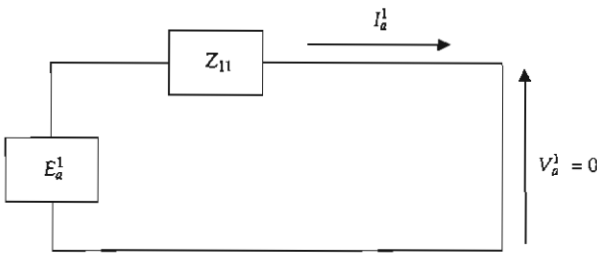


Figura V.3.b. Conexión del circuito de secuencia positiva para el caso de una falla trifásica.

Como en este caso sólo existen cantidades de secuencia positiva, en el punto de la falla se tienen las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas:

$$I_a^1 = I_a$$

$$V_a^1 = V_a = 0$$

Las condiciones impuestas por la falla trifásica se satisfacen conectando el circuito de secuencia positiva como se muestra en la figura V.3.b

En el circuito de la figura V.3.b se verifica que:

$$I_a^1 = \frac{E_a^1}{Z_{11}} \quad (V.6.1)$$

Como:

$$I_a^2 = 0$$

$$I_a^0 = 0$$

se tiene:

$$I_a = I_a^1$$

$$I_b = a^2 I_a^1$$

$$I_c = a I_a^1 \quad (V.6.2)$$

$$V_a = V_a^1 = 0$$

$$V_b = a^2 V_a^1 = 0$$

$$V_c = a V_a^1 = 0$$

El propósito de esta revisión de fundamentos es obtener un mejor entendimiento de las complejidades básicas del análisis del cortocircuito en sistemas de corriente alterna. Cuando sean problemas prácticos, el analista deberá enfocarse en los siguientes puntos:

1) Seleccionar la localización óptima y el tipo de falla para satisfacer el propósito de los cálculos.

2) Establecer el modelo más simple del circuito eléctrico del sistema estudiado, con lo cual minimizará la complejidad de la solución.

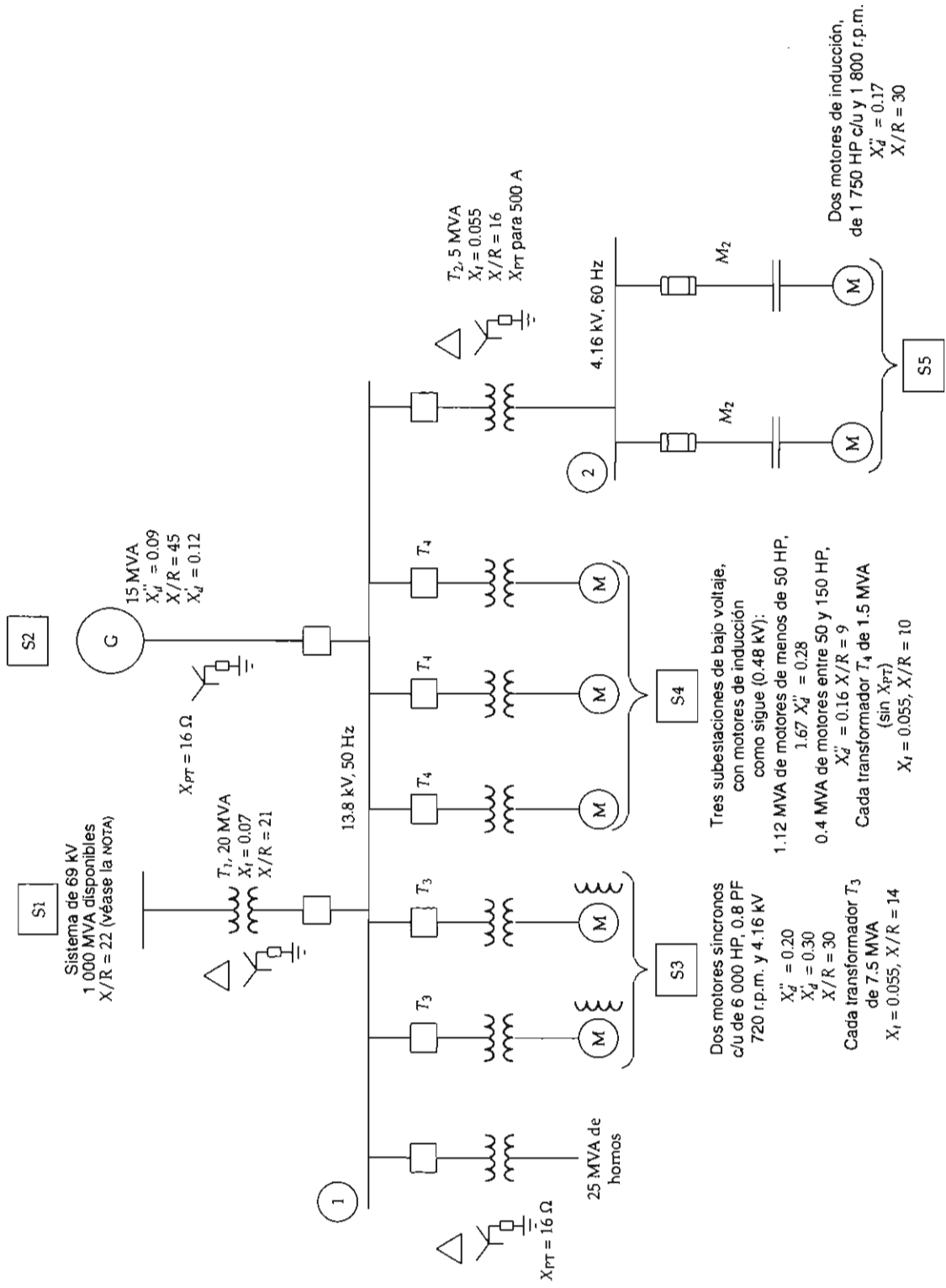
3) Reconocer la presencia de las condiciones del sistema que violan las restricciones impuestas por el método analítico utilizado.

4) Insertar artificialmente las correcciones en los resultados calculados, si estas condiciones son lo suficientemente significativas para ser consideradas.

En la sección V.2. Fuentes de la corriente de falla, se asumió una falla trifásica balanceada y se describió un circuito equivalente simple. La corriente calculada E/Z con el circuito equivalente de Thevenin es una corriente RMS alterna simétrica, puesto que E es un voltaje RMS. Esta corriente simétrica puede compararse directamente con las características interruptivas del equipo que se expresan como corrientes RMS simétricas.

Ahora bien, el análisis anterior de transitorios por switcheos en un circuito resistivo-inductivo indica que los procedimientos simplificados deben reconocer la asimetría como una condición del sistema y considerarla para compensar la onda de corriente de cortocircuito, integrada por dos componentes:

- La componente simétrica de corriente alterna E/Z .
- La componente de corriente directa, que aparecerá inicialmente en su magnitud máxima posible, y será igual al pico de la componente inicial simétrica de la corriente alterna.



Nota: La relación X/R se obtuvo sólo para este sistema en particular.
No use el valor de este ejemplo como valor típico.

Figura V.4. Sistema industrial típico.

Para cualquier instante después de que la falla ocurre, la corriente total es la suma de las componentes de corriente directa y alterna. Esto se observa en la figura V.1.

Debido a que la resistencia siempre está presente en el sistema, la componente de corriente directa decae a cero conforme la energía almacenada que representa se transforma en pérdidas $I^2 R$. Se asume que el decaimiento es exponencial, y su constante de tiempo es proporcional a la razón de X/R obtenida a través de la impedancia equivalente de Thevenin del punto de falla. Conforme la componente de corriente directa decae, la corriente total pasa a ser simétrica.

Para procedimientos de cálculo simplificados, la asimetría de la falla puede ser tomada en cuenta aplicando factores de multiplicación de la corriente alterna simétrica. El resultado estimado de la corriente RMS asimétrica es utilizado para la comparación de especificaciones, capacidades interruptivas o características de comportamiento de equipo, que son expresadas en función de corrientes RMS totales (asimétricas).

V.8. PROCEDIMIENTO DETALLADO

El procedimiento para el cálculo de corrientes de cortocircuito en sistemas industriales consiste en los siguientes pasos:

- 1) Preparar los diagramas del sistema.
- 2) Reunir y convertir los datos de impedancia.
- 3) Combinar impedancias.
- 4) Calcular la corriente de cortocircuito.

Primer paso. Preparar los diagramas del sistema.

El primer paso es desarrollar el diagrama unifilar. Este diagrama deberá mostrar todas las fuentes a la corriente de cortocircuito y todos los elementos significativos del sistema.

La información de las impedancias puede variarse en el diagrama unifilar después de la recopilación inicial de los datos y de las conversiones pertinentes.

Algunas veces, es conveniente preparar un diagrama separado, mostrando únicamente las impedancias después de la conversión. Hay que considerar que el circuito original puede ser complejo y que se requerirán varios pasos de

simplificación; cada paso se deberá dibujar en diagramas adicionales de impedancias de acuerdo con el progreso de los cálculos (véase el ejemplo).

Los diagramas de impedancia pueden mostrar reactancias únicamente, o mostrar reactancias y resistencias (impedancias complejas), si es que se requiere un cálculo fasorial. Esta representación es la más aconsejable, puesto que se utiliza en el estudio tanto la Z (impedancia compleja) como la relación X/R .

Segundo paso. Recopilar y convertir los datos de impedancia de aquellos elementos que se consideran relevantes. Estos datos deberán convertirse en por unidad sobre las bases seleccionadas para el estudio.

Tercer paso. Obtener el *circuito equivalente de Thevenin en forma de impedancia o de reactancia y resistencia* para aplicarse al punto de falla como un solo equivalente de la red. Los tres elementos de las ramas que forman una configuración delta o estrella pueden reducirse con el uso de fórmulas apropiadas.

Cuarto paso. Calcular la corriente de cortocircuito. Las impedancias de las máquinas rotatorias usadas en el circuito para calcular la corriente de cortocircuito dependen del objetivo del estudio.

Se examinarán *tres redes* básicas, seleccionando las impedancias utilizadas para obtener los resultados deseados:

1) La **primera red** sirve para calcular la corriente de cortocircuito que se utilizará en la selección de fusibles e interruptores (estos últimos sólo en baja tensión), la cual se presentará durante el primer ciclo después de que ocurra la falla.

2) La corriente de cortocircuito obtenida a partir de la **segunda red** se aplicará en la determinación de esfuerzos de apertura y cierre en interruptores en mediana y alta tensión.

3) La corriente de cortocircuito calculada con la **tercera red** se utilizará en aplicaciones con dispositivos relevadores con retardo de tiempo.

Las tres redes contienen los mismos elementos, a excepción de los valores de impedancias para las máquinas rotatorias. La aplicación de las diferentes impedancias en las redes está basada en guías normalizadas para la utilización de equipo interruptivo.

V.8.1. Primera red

En esta red se calculará la corriente de cortocircuito para compararla con la capacidad interruptiva de los fusibles en alto o bajo voltaje, o bien para la selección de los interruptores de bajo voltaje.

Para efectos del análisis de esta primera red se utilizarán las impedancias o reactancias subtransitorias para representar todas las máquinas rotatorias de la red en el circuito equivalente. Esta consideración está hecha de acuerdo con las siguientes normas:

- ANSI C37.41 1969 (R-1974). *Design Test for Distribution Cutouts and Fuse Link, Secondary Fuse. Distribution Enclosed Single Pole Air Switches, Power Fuses, Fuses, Disconnecting Switches and Accesories.*
- IEEE STD. 20-1973. *Low Voltage AC Power Circuit Breakers used in Enclosures* (ANSI C37.13-1980).
- NEMA AB 1-1975. *Molded-Case Circuit Breakers.*
- NEMA SG 3-1975, *Low Voltage Power Circuit Breakers.*

Las normas para equipo interruptivo de bajo voltaje permiten modificar la reactancia subtransitoria para un grupo de motores de inducción o síncronos, siempre que estén alimentados desde una subestación de baja tensión. Si la capacidad total de los motores en caballos de fuerza (HP) es aproximadamente igual a la capacidad del transformador de la subestación con autoenfriamiento en kVA, puede usarse una reactancia (o impedancia) de 0.25 p.u. referida a la capacidad del transformador para representar al grupo de motores.

Ahora bien, la corriente de cortocircuito en alta tensión calculada utilizando estas impedancias se aplicará en la selección de fusibles en alta tensión y para especificar potencias de cortocircuito en sistemas de alta tensión, para usarse como especificación de la acometida o suministro en subsecuentes cálculos en baja tensión.

Para el cálculo de esfuerzos debidos a la corriente de cortocircuito, para ser comparados

exclusivamente con las capacidades interruptivas de cierre y mantenimiento de la corriente de falla (interruptores con especificación posterior al año 1964) o para la capacidad momentánea de los interruptores (con especificaciones anteriores a 1964), se multiplicará la impedancia de las máquinas rotatorias por un factor obtenido del cuadro V.1 en su columna *1a red*. Esta consideración se lleva a cabo de acuerdo con las normas: ANSI/IEEE C37.010-1979 y ANSI/C37.5-1979. Para los motores, esta consideración modela el decaimiento de la componente de corriente directa en la corriente de cortocircuito que aporta el motor.

En las normas ANSI/IEEE C37.010-1979 y ANSI/IEEE C37.5-1979 se describe el procedimiento para la aplicación de interruptores de alto voltaje. Este procedimiento considera tres grupos de capacidades en motores de inducción y recomienda despreciar los motores cuya capacidad sea menor de 50 HP y que se aplique un factor multiplicativo de 1.2 o 1.0 a las impedancias subtransitorias de motores de mayor capacidad.

La norma ANSI/IEEE C37.13 1981 para interruptores en bajo voltaje recomienda utilizar reactancias subtransitorias en los cálculos; además nos dice que la contribución a la corriente de cortocircuito que aportan los motores en baja tensión conectados a una subestación será cuatro veces la corriente nominal, lo que resulta equivalente a considerar al grupo de motores como una sola impedancia de 0.25 en p.u. Esta consideración se fundamenta en el hecho de que en los sistemas industriales los grupos típicos de motores conectados están formados en un 75% de motores de inducción, cuya contribución a la corriente de cortocircuito es de aproximadamente 3.6 veces la corriente nominal de los motores, y en un 25% de motores síncronos cuya contribución a la corriente de cortocircuito es de aproximadamente 4.8 veces la corriente nominal, por lo que al estimar un valor de cuatro veces la corriente nominal del grupo de motores es un valor promedio aproximado de los grupos de motores conectados.

En la actualidad se acostumbra utilizar motores de inducción de grandes capacidades que

trabajan en baja tensión en lugar de motores síncronos, pero estos motores de inducción tienen una contribución de mayor magnitud y de mayor duración a la corriente de cortocircuito, por lo que es aceptable considerar una contribución a la corriente de cortocircuito de cuatro veces la corriente nominal del grupo de motores que en su mayor parte son de inducción, y más cuando la carga la componen motores de inducción de los que no se tienen datos nominales.

Como se mencionó anteriormente, el cálculo de la corriente de cortocircuito en esta primera red puede ser utilizado para seleccionar la capacidad interruptiva de dispositivos interruptores (fusibles) en alta tensión, o bien para ser comparada con el dimensionamiento de interruptores en baja tensión. Este hecho implica que se tengan dos análisis de esta primera red: uno en baja tensión y otro en alta tensión. Si se sigue correctamente el procedimiento recomendado por las normas en cuanto a la contribución de los motores a la corriente de cortocircuito, el análisis por separado de la primera red puede simplificarse a un solo análisis. Esto se debe a que la contribución inicial a la corriente RMS simétrica de cortocircuito de un motor típico es de seis veces su corriente nominal, y la contribución de un motor de inducción grande (50 HP y mayores) a la corriente de cortocircuito en el primer ciclo es de 4.8 veces su corriente nominal, que resulta aproximadamente lo mismo que afectar su impedancia subtransitoria por un factor de 1.2, por lo que el procedimiento en baja y alta tensión para este grupo de motores resulta similar. Para motores de inducción más pequeños, según las normas, considerar una contribución de 3.6 veces la corriente nominal es un poco conservativo y similar a considerar su impedancia subtransitoria multiplicada por 1.67.

Teniendo en cuenta estas consideraciones en el tratamiento de los motores de inducción para el análisis de la primera red, se puede resumir:

a) Se deben incluir todos los motores de inducción de menos de 50 HP, afectando su reactancia subtransitoria por un factor multiplicativo de 1.67 si se disponen de los datos del motor; o bien utilizar una impedancia de 0.28 p.u. para una estimación de la primera red. Esto implica que

este tipo de motores aportarán a la falla, en promedio, $1/0.28 = 3.6$ veces su corriente nominal.

b) Para motores de mayor capacidad hay que utilizar los factores multiplicativos del cuadro V.1. La mayoría de los motores que trabajan en baja tensión de 50 HP y mayores se les debe aumentar su reactancia subtransitoria en 1.2 veces, o bien utilizar una impedancia de 0.2 p.u. para los cálculos de la primera red. Esto implica que este tipo de motores aportarán a la falla, en promedio, $1/0.2 = 5$ veces su corriente nominal.

Las dos últimas filas del cuadro V.1 se amplían en el cuadro V.2.

Al utilizar el cuadro V.2 para obtener un solo análisis para la solución de la primera red en alto y bajo voltaje se obtiene una corriente de cortocircuito de un valor más objetivo. La corriente calculada para esta primera red resulta más realista puesto que se están considerando las contribuciones de todos los motores de inducción de baja capacidad en baja tensión, adicionalmente a los motores de inducción de gran capacidad que trabajan en baja tensión.

Una vez establecida la primera red se reduce a una impedancia equivalente de Thevein a cada punto de la falla que se va a estudiar; la corriente de cortocircuito se obtiene al dividir el voltaje de pre-falla en el punto de falla $E_{p.u.}$ entre la impedancia equivalente $Z_{p.u.}$ multiplicando por la corriente base I_{BASE} :

$$I_{CCsim} = \frac{E_{p.u.}}{Z_{p.u.}} I_{BASE}$$

donde:

I_{CCsim} es el valor RMS de la corriente trifásica de cortocircuito simétrica del primer ciclo considerando una falla franca.

Cuando se considere una falla en algún bus en baja tensión, la corriente I_{CCsim} obtenida podrá aplicarse directamente para ser comparada con capacidades interruptivas utilizadas en el dimensionamiento de interruptores en baja tensión, fusibles o algún otro dispositivo cuya especificación se exprese como una corriente RMS simétrica.

CUADRO V.1. Factores multiplicativos de reactancia (o impedancia) para máquinas rotatorias

Tipo de máquina	1a. red	2a. red
Todos los turbogeneradores, todos los generadores hidroeléctricos con devanados amortiguadores y condensadores síncronos.	$1.0 x_d''$	$1.0 x_d''$
Hidrogeneradores sin devanado amortiguador.	$0.75 x_d'$	$0.75 x_d'$
Todos los motores síncronos.	$1.0 x_d''$	$1.5 x_d''$
Motores de inducción:		
Arriba de 1 000 HP a 1 800 rpm o menos.	$1.0 x_d''$	$1.5 x_d''$
Arriba de 250 HP a 3 600 rpm.	$1.0 x_d''$	$1.5 x_d''$
Restantes, 50 HP y mayores.	$1.2 x_d''$	$3.0 x_d''$
Todos los menores de 50 HP.	ninguno	ninguno

CUADRO V.2. Factores multiplicativos de reactancia (o impedancia) para máquinas rotatorias (cambios del cuadro V.1 para cálculos en sistemas multivoltaje)

Tipo de máquina	1a. red	2a. red
Motores de inducción:		
Restantes, 50 HP y mayores.	$1.2 x_d''^*$	$3.0 x_d''^{**}$
Todos los menores de 50 HP.	$1.67 x_d''^{***}$	ninguno

* O un estimado para la primera red de $Z = 0.20$ p.u. a la base del motor.

** O un estimado para la segunda red de $Z = 0.50$ p.u. a la base del motor.

*** O un estimado de primera red de $Z = 0.28$ p.u. a la base del motor.

En el caso de que la calibración de algún dispositivo se exprese como una corriente RMS total, la I_{CCsim} deberá ser afectada por un factor multiplicativo proporcionado por las normas ANSI/IEEE C37.010-1979 y ANSI/IEEE C37.5-1979, y de esta manera obtener la **corriente RMS total o asimétrica** del primer ciclo. Este factor multiplicativo será, según las normas, de aproximadamente 1.6 para sistemas industriales, por lo que para la corriente total asimétrica de falla franca I_{CC101} , se tiene:

$$I_{CC101} = \frac{E_{pu}}{X_{p.u.}} \times F_{1R} \times I_{BASE} \quad (*)$$

* Valores de F_{1R} :

1.55 para baja tensión

1.60 para alta tensión

2.70 para valores de cresta

V.8.2. Segunda red

La corriente de cortocircuito calculada en esta red se emplea en la determinación de los esfuerzos interruptivos para interruptores en alta tensión (por arriba de 1KV incluyendo mediana tensión).

Las impedancias de las máquinas rotatorias que se utilizarán en esta segunda red se afectarán por factores multiplicativos que se obtendrán de los cuadros V.1 y V.2 en sus columnas 2a. red. En esta red se requerirá el valor de las resistencias de los componentes de la red, y en el caso de las máquinas rotatorias, su resistencia deberá ser afectada por el mismo valor por el que se afectó su reactancia.

Una vez determinados los componentes de las redes (reactancias y resistencias) se calculará la impedancia equivalente de Thevenin (cuyos componentes son $X_{p.u.}$ y $R_{p.u.}$), con la cual se ob-

tiene la relación $X_{p.u.}/R_{p.u.}$ en el punto de falla. En esta red se utilizará también el voltaje de prefalla en el punto de falla, cuyo valor es generalmente de 1.0 p.u.

El cociente $E_{p.u.}/X_{p.u.}$ se afectará por un factor multiplicativo, que obtendremos de las figuras V.5, V.6 y V.7. Para utilizar adecuadamente estas gráficas debemos conocer:

- La especificación de corriente interruptiva del dispositivo. Si su especificación de capacidad interruptiva es anterior al año 1964 se utilizarán las gráficas de la figura V.5; en caso contrario se utilizarán las curvas de las figuras V.6 y V.7.
- La razón $X_{p.u.}/R_{p.u.}$ del nodo de falla bajo análisis.
- La caracterización local o remota de la falla. La generación se considera remota cuando ésta alimenta la falla a través de dos o más etapas de transformación, o bien cuando presenta una reactancia externa en serie de un valor igual o mayor a 1.5 veces la reactancia subtransitoria del generador. Se considera una generación local cuando los generadores alimentan la falla a través de no más de una etapa de transformación, o bien cuando el punto de falla presente una reactancia en serie menor de 1.5 veces el valor de la reactancia subtransitoria del generador. Estas consideraciones se basan en la norma ANSI/IEEE C37.5-1979.
- Los tiempos mínimos de apertura de contactos de cada interruptor en alta tensión.

—Si se trata con interruptores con especificación anterior a 1964 este tiempo se determina a partir de su velocidad nominal de operación en combinación con el cuadro V.3.

—Para interruptores de especificación posterior se utiliza como tiempo mínimo de apertura de contactos el representado por la curva marcada con un cuadro para cada velocidad nominal (figuras V.6 y V.7), o en su defecto el especificado por el fabricante.

CUADRO V.3. Definición del tiempo mínimo de apertura de contactos para interruptores en alta tensión (AC)

Tiempo promedio de interrupción ciclos/60 Hz	Tiempo mínimo de apertura de contactos en ciclos a 60 Hz
8	4
5	3
3	2
2	1.5

Una vez obtenidos estos factores se determina:

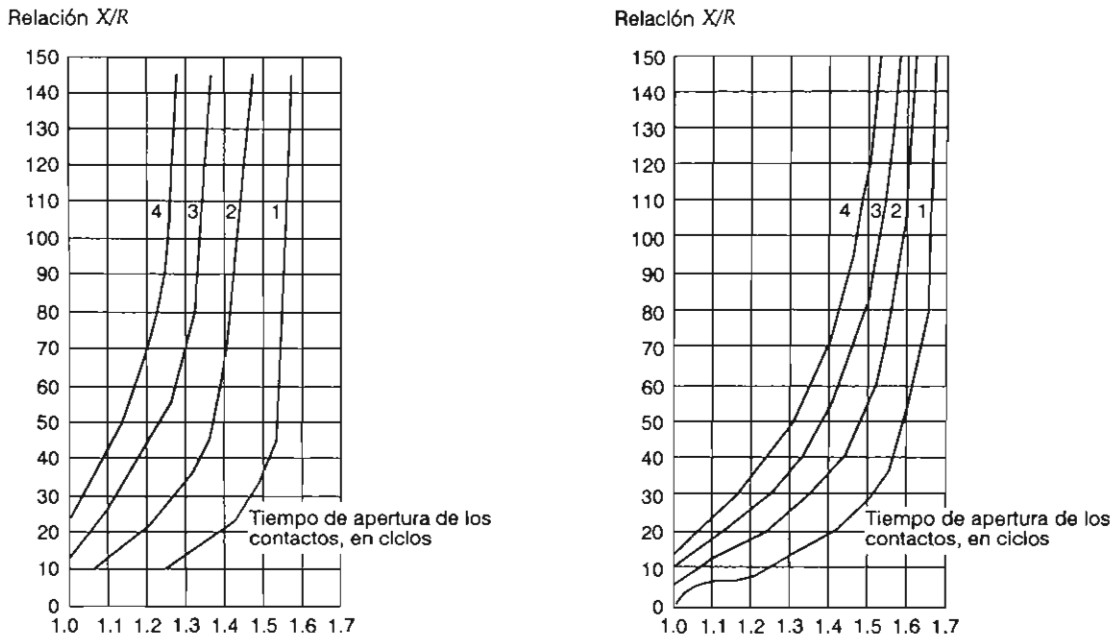
$$I_{CC} = \frac{E_{p.u.}}{X_{p.u.}} \times \text{factor multiplicativo} \times I_{BASE}$$

Este producto representa la corriente total rms, que se utiliza para compararse con la capacidad interruptiva de interruptores en alta tensión. Es importante mencionar que la corriente I_{CC} es simétrica únicamente cuando el factor por el que se afecta el cociente $E_{p.u.}/X_{p.u.}$ es igual a 1. Como por lo general este factor es distinto de 1, representará la corriente asimétrica. Este concepto es muy importante pues la especificación de capacidad interruptiva de los interruptores en alto voltaje se expresa tanto en kA simétricos como en asimétricos.

Para interruptores antiguos, cuya capacidad interruptiva se expresa como MVA, se calcula la capacidad interruptiva en kA dividiendo la capacidad dada en MVA entre el producto de $\sqrt{3}$ por el voltaje operativo en kV, siempre y cuando este voltaje se encuentre entre el mínimo y máximo operativo del equipo:

Capacidad interruptiva asimétrica (kA)

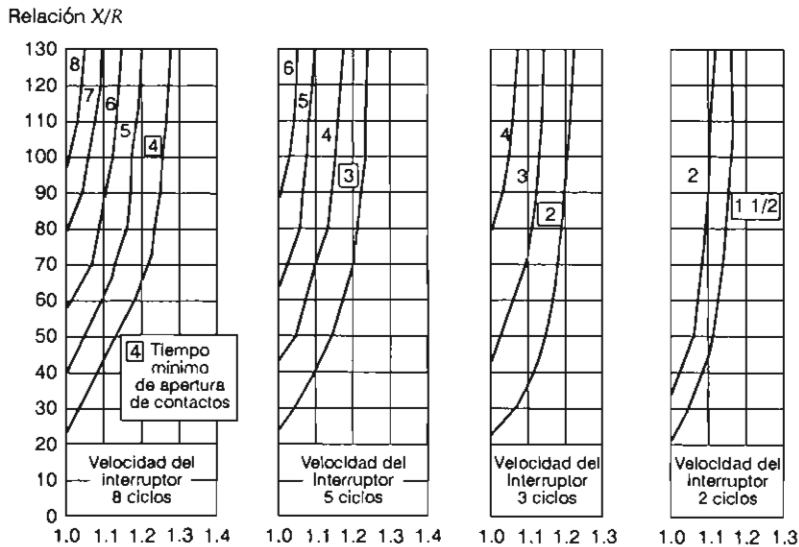
$$= \frac{\text{Capacidad interruptiva (MVA)}}{\sqrt{3} \times \text{Voltaje operativo (kV)}}$$



NOTA: Para fallas alimentadas predominantemente por generadores a través de no más de una etapa de transformación o en los casos en que la reactancia en serie es menor a 1.5 veces la reactancia subtransitoria del generador (falla local) (ANSI/IEEE C37.5-1979).

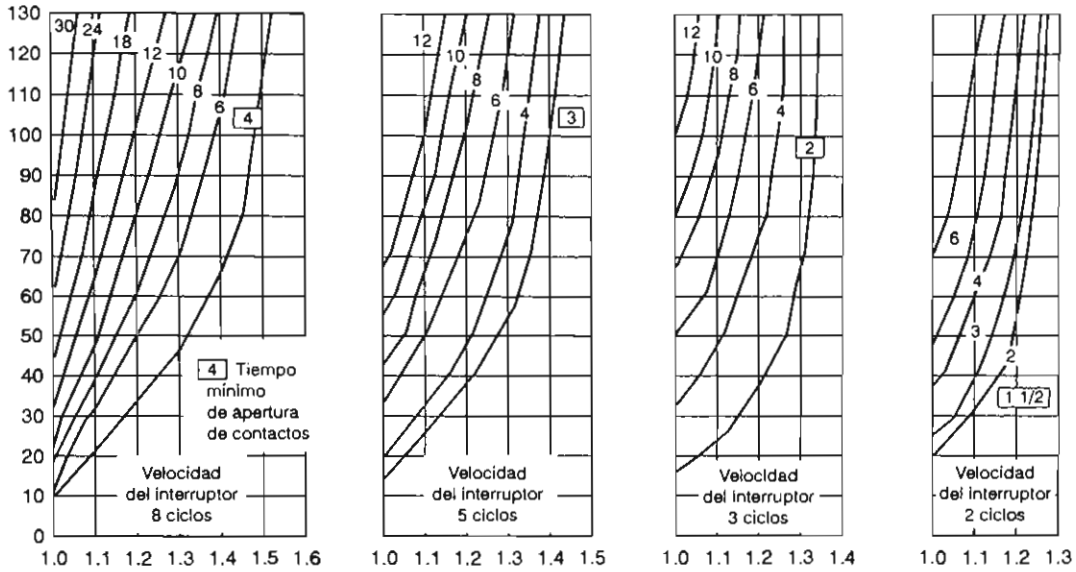
NOTA: Para fallas alimentadas predominantemente por generadores a través de dos o más etapas de transformación o en los casos en que la reactancia en serie es mayor o igual a 1.5 veces la reactancia subtransitoria del generador (falla remota) (ANSI/IEEE C37.5-1979).

Figura V.5. Factores de multiplicación para fallas trifásicas y de línea a tierra (dispositivos con especificación anterior a 1964).



NOTA: Para fallas alimentadas predominantemente por generadores a través de no más de una etapa de transformación o en los casos en que la reactancia en serie es menor de 1.5 veces la reactancia subtransitoria del generador (falla local) (ANSI/IEEE C37.010-1979).

Figura V.6. Factores de multiplicación para corrientes trifásicas. Falla local (bases posteriores a 1964).



NOTA: Para fallas alimentadas predominantemente por generadores a través de dos o más etapas de transformación o en los casos en que la reactancia en serie es mayor o igual a 1.5 veces la reactancia subtransitoria del generador (falla remota) (ANSI/IEEE C37.010-1979).

Figura V.7. Factores de multiplicación para corrientes trifásicas (falla remota) y de línea a tierra (posteriores a 1964).

El valor de la capacidad interruptiva requerida del dispositivo bajo análisis se calcula mediante la expresión:

$$I_{CC \text{ simétrica}} = \frac{I_{CC} \times E_{\text{máximo}}}{E_{\text{operación}}}$$

donde:

- $E_{\text{máximo}}$ es el voltaje máximo de operación del dispositivo (normalmente el nominal), y
- $E_{\text{operación}}$ es el voltaje en el punto de utilización del interruptor.

V.8.3. Tercera red

En esta red se calcula la corriente de cortocircuito para ajustar dispositivos relevadores con retardo de tiempo. Una aplicación con retardo de tiempo opera después de 6 ciclos de que ocurre la condición de anomalía en el sistema. *Hay relevadores que operan instantáneamente; para su ajuste se utilizará la corriente de cortocircuito calculada en la primera red.*

Los componentes de esta tercera red son únicamente los generadores y los elementos pasivos que componen el sistema estudiado, tales como transformadores, cables y los enlaces restantes entre elementos activos y el punto de falla. Los generadores se representarán utilizando su impedancia transitoria, o bien una reactancia mayor, que puede ser la reactancia síncrona, dependiendo del tiempo que se considere el retardo.

Todos los motores se omiten de esta red y sólo se considerará la contribución de los generadores a la corriente de cortocircuito. En el tiempo en el que este análisis es válido (mayor de 6 ciclos) la componente de corriente directa (DC) ha decaído a un valor cercano a cero y no se considera, por lo que la corriente de cortocircuito simétrica será:

$$I_{\text{SIM}} = \frac{E_{p.u.}}{X_{p.u.}} \times I_{\text{BASE}}$$

donde nuevamente $E_{p.u.}$ es la tensión de pre-falla y $X_{p.u.}$ es la reactancia equivalente de Thevenin al punto de falla, ambas en por unidad.

CUADRO V.4. Valores típicos de reactancia para máquinas de inducción y síncronas, en p.u.

($kVA_{BASE} = kVA_{máquina}$)

	x_d''	x_d'
Turbina generador ¹		
2 polos	0.09	0.15
4 polos	0.15	0.23
Generadores de polos salientes son devanados amortiguadores:		
12 polos o menos	0.16	0.33
14 polos o más	0.21	0.33
Motores síncronos		
6 polos	0.15	0.23
8-14 polos	0.20	0.30
16 polos o más	0.28	0.40
Condensadores síncronos ¹	0.24	0.37
Convertidores síncronos ¹		
600 V de alimentación en C.D.	0.20	—
250 V de alimentación en C.D.	0.33	—
Motores de inducción grandes, usualmente arriba de 600 V	0.17	—
Motores pequeños, usualmente menores de 600 V	(véanse los cuadros V.1 y V.2)	—

NOTAS:

- 1) La x_d' no es usada normalmente en estudios de cortocircuito.
- 2) Para los motores síncronos, los kVA_{BASE} pueden obtenerse de los HP de la máquina: Con f.p. = 0.8; $kVA_{BASE} = HP$. Con f.p. = 1.0, $kVA_{BASE} = 0.8 \cdot HP$

V.9. FALLAS DESBALANCEADAS

El método de las componentes simétricas es especialmente útil para el cálculo de los sistemas desequilibrados debidos a cortocircuito entre fases o de fases a tierra.

V.9.1. Falla monofásica a tierra (CC1FT)

La asimetría debida a la falla de la fase *a* a tierra queda definida por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_a \neq 0 \quad V_a &= 0 \\ I_b &= 0 \quad V_b \neq 0 \\ I_c &= 0 \quad V_c \neq 0 \end{aligned} \quad (V.9.1)$$

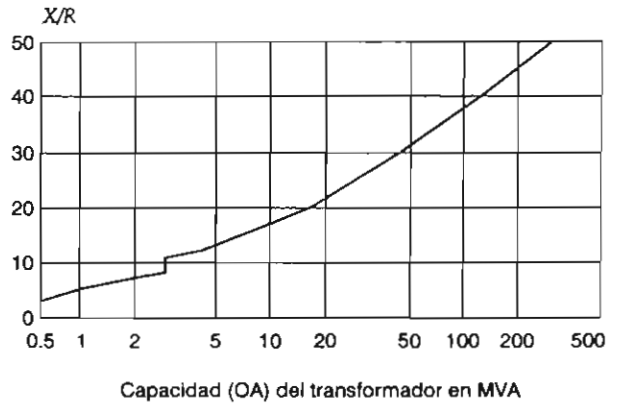


Figura V.8. Relación X/R de transformadores (basado en ANSI/IEEE C37.010-1979).

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico, en función de las componentes simétricas, son:

$$\begin{aligned} E_a^1 - V_a^1 &= Z_{11} I_a^1 && Z_{11}, Z_{22}, Z_{00} \text{ impedancias equivalentes} \\ -V_a^2 &= Z_{22} I_a^2 && \text{de Thevenin de secuencia} \\ -V_a^0 &= Z_{00} I_a^0 && \text{positiva, negativa y cero} \end{aligned} \quad (V.9.2)$$

En el punto donde ocurre la asimetría, o sea en el punto de falla, se pueden escribir las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas:

$$V_a = V_a^1 + V_a^2 + V_a^0 = 0$$

$$I_a^1 = \frac{I_a + a I_b + a^2 I_c}{3}$$

$$I_a^2 = \frac{I_a + a^2 I_b + a I_c}{3}$$

$$I_a^0 = \frac{I_a + I_b + I_c}{3}$$

y como $I_b = 0$ e $I_c = 0$:

$$I_a^1 = I_a^2 = I_a^0 = \frac{I_a}{3}$$

Estudio de cortocircuito

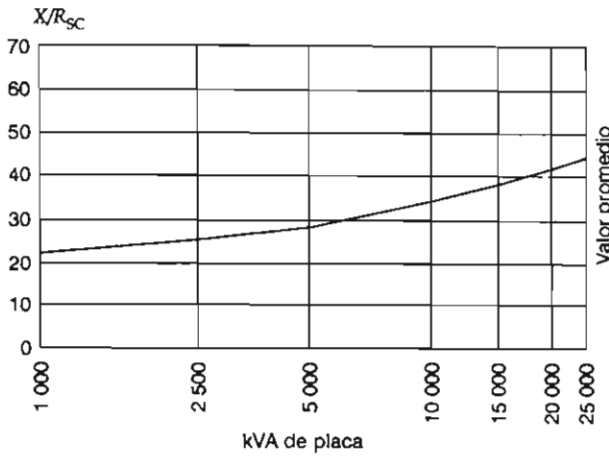


Figura V.9. Relación X/R para generadores pequeños y motores síncronos (rotor liso o con los polos salientes) (basado en ANSI/IEEE C37.010-1979).

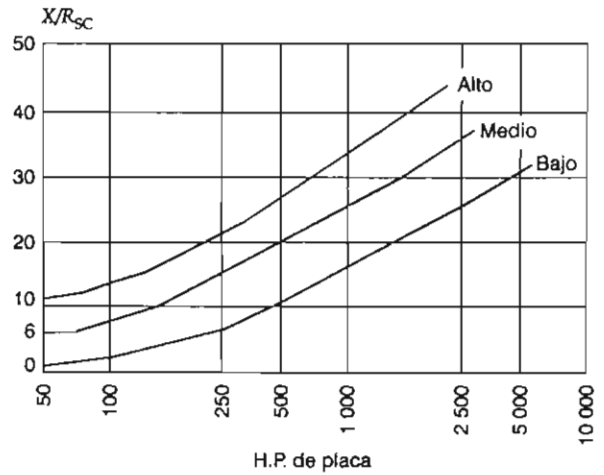


Figura V.10. Relación X/R para motores de inducción trifásicos (basado en ANSI/IEEE C37.010-1979).

El problema consiste en determinar el valor de las componentes simétricas de las corrientes y de los voltajes $I_a^1, I_a^2, I_a^0, V_a^1, V_a^2, V_a^0$, que constituyen las seis incógnitas. Pueden obtenerse resolviendo el siguiente sistema de seis ecuaciones independientes:

$$E_a^1 - V_a^1 = Z_{11} I_a^1$$

$$-V_a^2 = Z_{22} I_a^2$$

$$-V_a^0 = Z_{00} I_a^0$$

$$V_a^1 + V_a^2 + V_a^0 = 0$$

$$I_a^1 = I_a^2 = \frac{I_a}{3}$$

$$I_a^0 = \frac{I_a}{3} \quad (V.9.3)$$

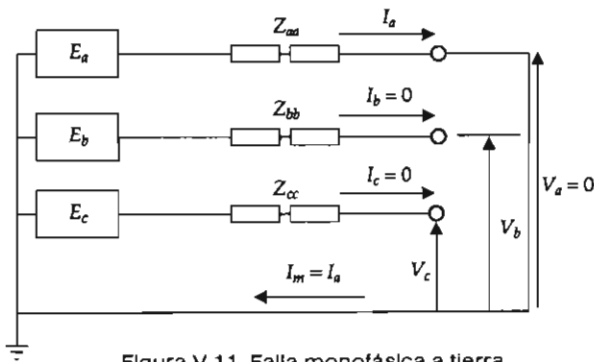


Figura V.11. Falla monofásica a tierra.

En lugar de resolver algebraicamente el sistema de seis ecuaciones simultáneas con seis incógnitas, puede establecerse un circuito equivalente en el que se verifiquen esas ecuaciones. Esto se logra conectando en serie los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero, como se muestra en la figura V.12.

De esta figura se deducen las siguientes relaciones:

$$I_a^1 = I_a^2 = I_a^0 = \frac{E_a^1}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}}$$

$$V_a^1 = E_a^1 - Z_{11} I_a^1 \quad V_a^2 = -Z_{22} I_a^2 \quad V_a^0 = -Z_{00} I_a^0$$

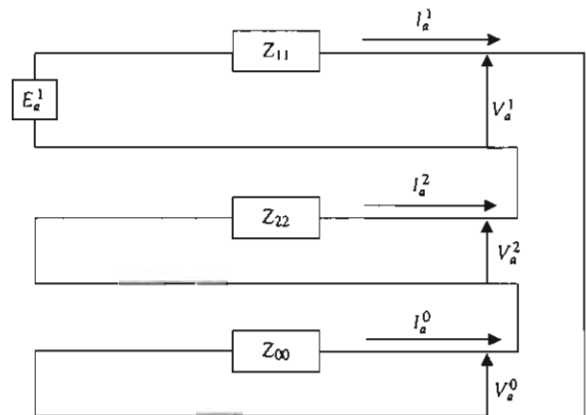


Figura V.12. Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso de una falla monofásica a tierra.

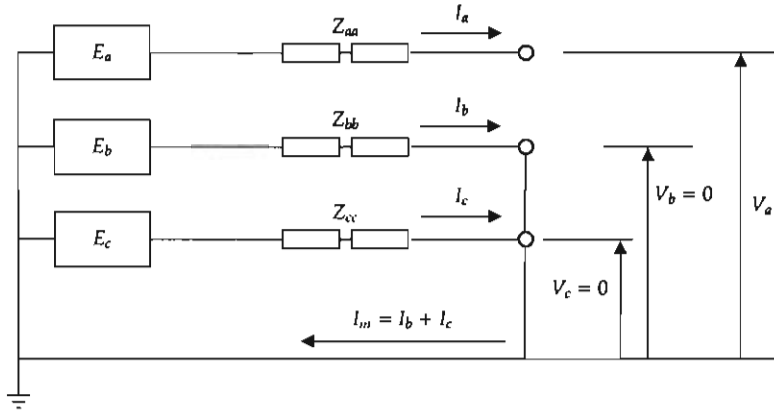


Figura V.13. Falla bifásica a tierra.

Conocidas las componentes simétricas de la corriente de falla de la fase a y del voltaje al neutro de la fase a , en el punto de falla, pueden calcularse las corrientes: I_a , I_b e I_c y los voltajes al neutro en el punto de falla: V_a , V_b y V_c de la siguiente forma:

$$I_a = I_a^1 + I_a^2 + I_a^0 = \frac{3E_a^1}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}}$$

$$I_b = a^2 I_a^1 + a I_a^2 + I_a^0 = I_a^1 (a^2 + a + 1) = 0$$

$$I_c = a I_a^1 + a^2 I_a^2 + I_a^0 = I_a^1 (a + a^2 + 1) = 0 \quad (V.9.4)$$

$$\begin{aligned} V_a &= V_a^1 + V_a^2 + V_a^0 = E_a^1 - Z_{11} I_a^1 - Z_{22} I_a^2 - Z_{00} I_a^0 = \\ &= E_a^1 - (Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}) \frac{E_a^1}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_b &= a^2 V_a^1 + a V_a^2 + V_a^0 = a^2 (E_a^1 - Z_{11} I_a^1) - a Z_{22} I_a^2 - Z_{00} I_a^0 = \\ &= a^2 E_a^1 - (a^2 Z_{11} + a Z_{22} + Z_{00}) \frac{E_a^1}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} \end{aligned}$$

$$V_b = \left(\frac{(a^2 - a) Z_{22} + (a^2 - 1) Z_{00}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} \right) E_a^1$$

$$\begin{aligned} V_c &= a V_a^1 + a^2 V_a^2 + V_a^0 = a (E_a^1 - Z_{11} I_a^1) - a^2 Z_{22} I_a^2 - Z_{00} I_a^0 = \\ &= a E_a^1 - (a Z_{11} + a^2 Z_{22} + Z_{00}) \frac{E_a^1}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} \end{aligned}$$

$$V_c = \left(\frac{(a - a^2) Z_{22} + (a - 1) Z_{00}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} \right) E_a^1$$

V.9.2. Falla bifásica a tierra

La asimetría debida a la falla a tierra de las líneas b y c queda definida por las siguientes ecuaciones:

$$I_a = 0 \quad V_a \neq 0$$

$$I_b \neq 0 \quad V_b = 0$$

$$I_c \neq 0 \quad V_c = 0$$

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son:

$$E_a^1 - V_a^1 = Z_{11} I_a^1$$

$$-V_a^2 = Z_{22} I_a^2$$

$$-V_a^0 = Z_{00} I_a^0 \quad (V.9.5)$$

En el punto de la falla pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas, teniendo en cuenta que $I_a = 0$ y $V_b = V_c = 0$:

$$I_a^1 + I_a^2 + I_a^0 = 0$$

$$V_a^1 = V_a^2 = \frac{V_a}{3}$$

$$V_a^0 = \frac{V_a}{3}$$

Las condiciones impuestas por las seis ecuaciones anteriores se satisfacen conectando los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero de acuerdo con la figura V.14.

De esta figura se deducen las siguientes expresiones:

$$I_a^1 = \frac{E_a^1}{Z_{11} + \frac{Z_{22} + Z_{00}}{Z_{22} Z_{00}}} = \frac{Z_{22} + Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1$$

$$I_a^2 = -I_a^1 \frac{Z_{00}}{Z_{22} + Z_{00}} = -\frac{Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1$$

$$I_a^0 = -I_a^1 \frac{Z_{22}}{Z_{22} + Z_{00}} = -\frac{Z_{22}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1$$

De dicho circuito se deduce también que:

$$\begin{aligned} V_a^1 = V_a^2 = V_a^0 = E_a^1 - Z_{11} I_a^1 = -Z_{22} I_a^2 = -Z_{00} I_a^0 \\ = \frac{Z_{22} Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1 \end{aligned}$$

Conocidas las componentes simétricas de la corriente de falla de la fase a y del voltaje al neutro de la fase a en el punto de la falla, pueden calcularse las corrientes I_a , I_b e I_c y los voltajes al neutro V_a , V_b y V_c en la siguiente forma:

$$I_a = I_a^1 + I_a^2 + I_a^0 = 0$$

$$I_b = a^2 I_a^1 + a I_a^2 + I_a^0 = \frac{(a^2 - 1) Z_{22} + (a^2 - a) Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1$$

$$I_c = a I_a^1 + a^2 I_a^2 + I_a^0 = \frac{(a - 1) Z_{22} + (a - a^2) Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1$$

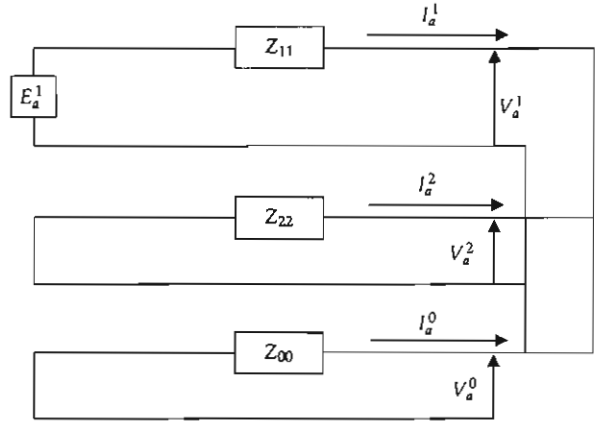


Figura V.14. Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso de una falla bifásica a tierra.

$$V_a = V_a^1 + V_a^2 + V_a^0 = \frac{3 Z_{22} Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} E_a^1$$

$$V_b = a^2 V_a^1 + a V_a^2 + V_a^0 = 0$$

$$V_c = a V_a^1 + a^2 V_a^2 + V_a^0 = 0 \quad (V.9.6)$$

V.9.3. Falla bifásica

La asimetría debida a la falla de aislamiento entre las fases b y c queda definida por las siguientes ecuaciones:

$$I_a = 0 \quad V_a \neq 0$$

$$I_b = I_c \quad V_b = V_c \neq 0$$

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son:

$$E_a^1 - V_a^1 = Z_{11} I_a^1$$

$$-V_a^2 = Z_{22} I_a^2$$

$$-V_a^0 = Z_{00} I_a^0$$

$$(V.9.7)$$

En el punto de la falla pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase

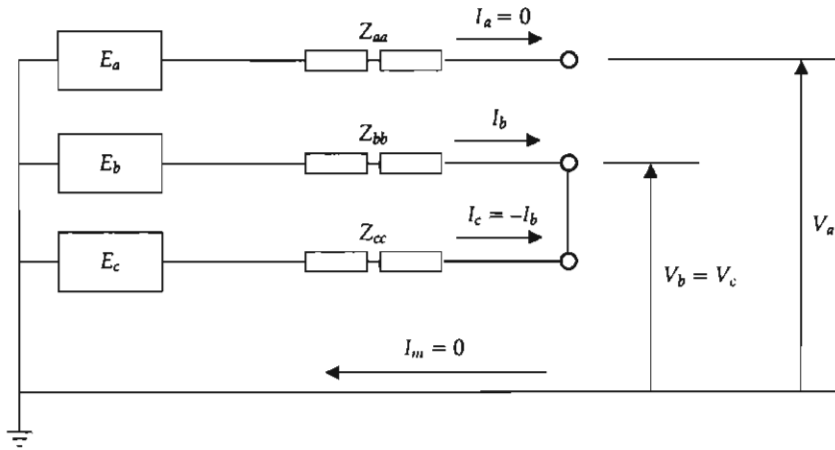


Figura V.15. Falla bifásica.

y sus componentes simétricas. Puesto que no hay conexión a tierra en el punto de falla:

$$I_a^0 = 0$$

Se tiene también que:

$$I_a = I_a^1 + I_a^2 + I_a^0 = 0$$

y por lo tanto, de las ecuaciones anteriores:

$$-I_a^1 = I_a^2$$

Los voltajes de secuencia positiva y negativa tienen los siguientes valores:

$$V_a^1 = \frac{1}{3} (V_a + a V_b + a^2 V_c)$$

$$V_a^2 = \frac{1}{3} (V_a + a^2 V_b + a V_c)$$

y como $V_b = V_c$:

$$V_a^1 = \frac{1}{3} (V_a + (a + a^2) V_c)$$

$$V_a^2 = \frac{1}{3} (V_a + (a^2 + a) V_c)$$

y por lo tanto:

$$V_a^1 = V_a^2$$

Puesto que $I_a^0 = 0$, no puede haber caídas de voltaje de secuencia cero y en consecuencia:

$$V_a^0 = 0$$

Las condiciones impuestas por las ecuaciones anteriores se satisfacen conectando los circuitos equivalentes de secuencia positiva y negativa como se indica en la figura V.16.

Del circuito de la figura V.16 se deduce que:

$$I_a^1 = \frac{E_a^1}{Z_{11} + Z_{22}}$$

$$I_a^2 = -\frac{E_a^1}{Z_{11} + Z_{22}}$$

$$I_a^0 = 0$$

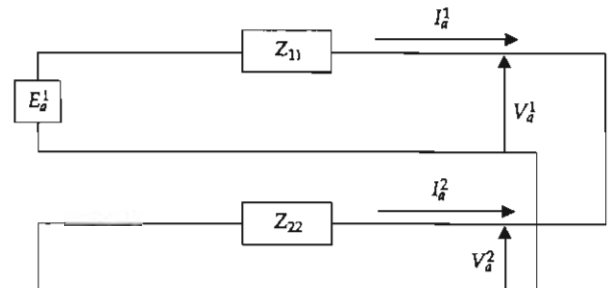


Figura V.16. Conexión de los circuitos de secuencia positiva y negativa para el caso de una falla bifásica.

$$V_a^1 = V_a^2 = E_a^1 - Z_{11} I_a^1 = -Z_{22} I_a^1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

$$V_a^0 = 0$$

Las corrientes I_a, I_b, I_c y los voltajes al neutro V_a, V_b y V_c en el punto de falla tienen los siguientes valores:

$$I_a = I_a^1 + I_a^2 + I_a^0 = 0$$

$$I_b = a^2 I_a^1 + a I_a^2 + I_a^0 = \frac{a^2 - a}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

$$I_c = a I_a^1 + a^2 I_a^2 + I_a^0 = \frac{a - a^2}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

Si se considera para esta última ecuación que $Z_{11} = Z_{22}$, situación que se presenta comúnmente en sistemas industriales, el valor de la corriente de falla bifásica se expresa como:

$$I_c = (E_a^1 / Z_{11}) [(a - a^2) / 2]$$

De esta expresión, el término (E_a^1 / Z_{11}) corresponde al valor de la corriente de cortocircuito trifásico, y el término $(a - a^2) / 2$, tiene en magnitud un valor de 0.866, lo que comprueba que "la corriente de cortocircuito bifásica (I_{CC2F}) es de aproximadamente 87% del valor de la falla trifásica (I_{CC3F})" (sección V.3).

$$|I_{CC2F}| = 0.866 |I_{CC3F}| \quad (V.9.8)$$

Las expresiones para el cálculo de los correspondientes voltajes por fase son:

$$V_a = V_a^1 + V_a^2 + V_a^0 = \frac{2 Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

$$V_b = a^2 V_a^1 + a V_a^2 + V_a^0 = (a^2 + a) \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

$$= -\frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

$$V_c = a V_a^1 + a^2 V_a^2 + V_a^0 = (a + a^2) \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

$$= -\frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} E_a^1$$

Recordemos que para los casos de falla bifásica y bifásica a tierra, las fases bajo fallas son b y c , por lo que el voltaje de la fase a permanece constante.

V.10. CÁLCULO DE LAS CORRIENTES Y VOLTAJES EN UN CORTOCIRCUITO USANDO UNA COMPUTADORA DIGITAL

Si el sistema bajo análisis comprende una red interconectada de cierta magnitud (más de cinco nodos) la solución numérica del problema, basada en la obtención de impedancias equivalente de Thevenin para todos los nodos, requiere utilizar métodos sistemáticos que se presten al empleo de computadoras digitales.

El método más utilizado actualmente es el de la matriz de impedancias nodales Z_{BUS} (cuya construcción se vio en el capítulo III). Nuevamente, la forma fasorial de la ley de Ohm (E/Z) será la relación básica que se utilizará. Primero se estudiará su aplicación al cálculo de fallas trifásicas equilibradas y después se generalizará para cualquier tipo de falla desequilibrada.

V.10.1. Fallas trifásicas

Para estudiar en forma completa el comportamiento de un sistema bajo condiciones de falla es necesario analizar la ocurrencia de fallas en distintos puntos del sistema. Por lo general se considera en cada caso una sola falla, ya que la probabilidad de que ocurran dos o más simultáneamente es muy baja.

Una vez calculada la corriente de falla en cada punto considerado es necesario determinar los voltajes resultantes en los diferentes nodos y las corrientes que circularán por las distintas ramas de la red.

En el caso de un cortocircuito trifásico las corrientes de falla son de la misma magnitud y constituyen un sistema de corrientes trifásicas equilibradas. Por lo tanto, el análisis se realizará considerando únicamente el circuito equivalente de secuencia positiva.

Como se vio en las secciones anteriores, la corriente en el punto de falla puede calcularse con el teorema de Thevenin:

$$I_f = \frac{V_0}{Z_T + Z_f} \quad (\text{V.10.1})$$

donde:

- I_f Corriente de falla en p.u.
- V_0 Voltaje al neutro en el punto de falla antes de que ocurra la falla.
- Z_T Impedancia equivalente de Thevenin de la red vista desde el punto de la falla.
- Z_f Impedancia de la falla (se asume igual a cero para una falla franca).

Debe recordarse que para el cálculo de las corrientes de cortocircuito los generadores y los motores se representan por una fuente de voltaje de magnitud igual a la fuerza electromotriz inducida que existía inmediatamente antes de producirse el cortocircuito, conectada en serie con la reactancia subtransitoria si se trata de calcular la corriente de cortocircuito para primera o segunda red, o con la reactancia subtransitoria de los generadores eliminando todos los motores si se trata de determinar los valores de falla para un estudio de coordinación de dispositivos relevadores con retardo de tiempo.

Por lo tanto, los cambios en los voltajes y corrientes que se deban a un cortocircuito trifásico en uno de los nodos o de los buses de un sistema interconectado pueden determinarse mediante el cálculo de la red pasiva —formada por las impedancias de secuencia positiva de las líneas y transformadores, las reactancias subtransitorias de los generadores y las reactancias subtransitorias o transitorias de los motores—, alimentada por una fuente de corriente igual a la corriente de falla trifásica en ese punto del sistema, como se muestra en la figura V.17.

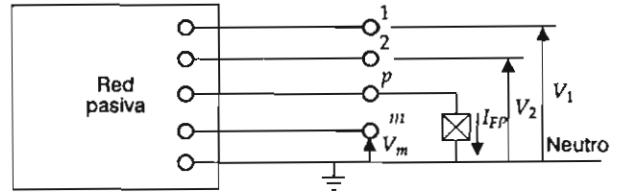


Figura V.17.

Para la red de la figura V.17 puede escribirse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_{F1} + Z_{12} I_{F2} + \dots + Z_{1p} I_{Fp} + \dots + Z_{1n} I_{Fn} \\ V_2 &= Z_{21} I_{F1} + Z_{22} I_{F2} + \dots + Z_{2p} I_{Fp} + \dots + Z_{2n} I_{Fn} \\ &\dots \dots \dots \\ V_p &= Z_{p1} I_{F1} + Z_{p2} I_{F2} + \dots + Z_{pp} I_{Fp} + \dots + Z_{pn} I_{Fn} \quad (\text{V.10.2}) \\ &\dots \dots \dots \\ V_{n1} &= Z_{n1} I_{F1} + Z_{n2} I_{F2} + \dots + Z_{np} I_{Fp} + \dots + Z_{nn} I_{Fn} \end{aligned}$$

Utilizando notación matricial abreviada:

$$[V] = [Z_{BUS}] [I_f] \quad (\text{V.10.3})$$

donde:

- $[V]$ Es la matriz columna de los voltajes de los nodos.
- $[Z_{BUS}]$ Es la matriz de impedancias de bus formada por las impedancias puntuales equivalentes de Thevenin y las impedancias de transferencia.
- $[I_f]$ Es la matriz columna de las fuentes inyectoras de corriente.

Las ecuaciones (V.10.2) permiten calcular los cambios de los voltajes en todos los nodos de la red que se deben a la presencia del cortocircuito, si se conocen las impedancias puntuales (de Thevenin) y de transferencia y las fuentes de corriente.

Si únicamente existe una fuente de corriente, conectada al nodo p , las ecuaciones (V.10.2) se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{1p} I_{Fp} \\ V_2 &= Z_{2p} I_{Fp} \\ &\dots \dots \dots \\ V_p &= Z_{pp} I_{Fp} \quad (\text{V.10.4}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$V_{ii} = Z_{np} I_{Fp}$$

Para calcular los voltajes en los distintos buses o nodos de la red durante la falla hay que tener en cuenta que inmediatamente antes de ocurrir la falla esos nodos tenían voltajes al neutro que llamaremos $V_{10}, V_{20} \dots V_{p0} \dots V_{n0}$. Los voltajes durante la falla en los distintos nodos de la red se obtienen superponiendo a los voltajes existentes antes de la falla los cambios de voltaje producidos por la falla, que están dados por las ecuaciones (V.10.4).

$$\begin{aligned} V_{F1} &= V_{10} - V_1 = V_{10} - Z_{1p} I_{Fp} \\ V_{F2} &= V_{20} - V_2 = V_{20} - Z_{2p} I_{Fp} \\ &\dots \\ V_{Fp} &= V_{p0} - V_p = V_{p0} - Z_{pp} I_{Fp} \quad (\text{V.10.5}) \\ &\dots \\ V_{Fn} &= V_{n0} - V_n = V_{n0} - Z_{np} I_{Fp} \end{aligned}$$

El signo menos (-) asignado en las expresiones anteriores a los cambios de voltaje producidos por la falla se debe al sentido de la corriente de falla I_{Fp} señalado en la figura V.17, que está saliendo del nodo p .

$$V_{Fp} = Z_F I_{Fp} \quad (\text{V.10.6})$$

donde Z_F es la impedancia de la falla.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (V.10.4) correspondiente a V_{Fp} :

$$\begin{aligned} Z_F I_{Fp} &= V_{p0} - Z_{pp} I_{Fp} \\ I_{Fp} &= \frac{V_{p0}}{Z_{pp} + Z_F} \quad (\text{V.10.7}) \end{aligned}$$

La expresión (V.10.7) permite calcular la corriente en el punto de la falla. Una vez conocida esta corriente pueden calcularse los voltajes V_f en los distintos nodos durante la falla mediante las ecuaciones (V.10.5).

Comparando las ecuaciones (V.10.1) y (V.10.7) se ve que:

$$Z_T = Z_{pp} \quad (\text{V.10.8})$$

Sustituyendo el valor de I_{Fp} dado por la ecuación (V.10.7) en las ecuaciones (V.10.5):

$$\begin{aligned} V_{F1} &= V_{10} - \frac{Z_{1p}}{Z_{pp} + Z_F} V_{p0} \\ V_{F2} &= V_{20} - \frac{Z_{2p}}{Z_{pp} + Z_F} V_{p0} \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{V.10.9})$$

$$V_{Fp} = V_{p0} - \frac{Z_{pp}}{Z_{pp} + Z_F} V_{p0} = \frac{Z_F}{Z_{pp} + Z_F} V_{p0}$$

$$V_{Fn} = V_{n0} - \frac{Z_{np}}{Z_{pp} + Z_F} V_{p0}$$

Si la falla está sólidamente establecida, o sea, si la impedancia $Z_F = 0$, las expresiones (V.10.9) se reducen a:

$$\begin{aligned} V_{F1} &= V_{10} - \frac{Z_{1p}}{Z_{pp}} V_{p0} \\ V_{F2} &= V_{20} - \frac{Z_{2p}}{Z_{pp}} V_{p0} \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{V.10.10})$$

$$V_{Fp} = 0$$

$$V_{Fn} = V_{n0} - \frac{Z_{np}}{Z_{pp}} V_{p0}$$

Una vez calculados los voltajes existentes en los distintos nodos de la red afectada por una falla en uno de sus nodos se calculan las corrientes que circulan por las distintas ramas de la red durante el cortocircuito mediante la siguiente expresión:

$$I_{jk} = Y_{jk} (V_j - V_k) \quad (\text{V.10.11})$$

donde:

- V_j Voltaje al neutro del nodo j .
- V_k Voltaje al neutro del nodo k .

El método para el cálculo de una red afectada por un cortocircuito trifásico que se acaba de describir es un método exacto que no requiere hacer simplificaciones.

La matriz Z_{BUS} se obtiene, dependiendo del algoritmo computacional desarrollado, por la inversión de la matriz Y_{BUS} o por la construcción paso a paso (capítulos II y III).

$$[Z_{BUS}] = [Y_{BUS}]^{-1} \quad (V.10.12)$$

A su vez, la matriz $[Y_{BUS}]$ se obtiene por inspección o a partir de la matriz primitiva de admitancias y la matriz de incidencia nodal A (método de transformaciones singulares):

$$[Y_{BUS}] = [A^t] [y] [A] \quad (V.10.13)$$

Los voltajes en los distintos puntos de unión antes de la falla se calculan mediante un estudio de flujos de potencia.

V.10.2. Simplificaciones en el cálculo computacional de fallas

Aunque, como se dijo antes, el método que se acaba de describir es un método exacto, es frecuente que en el cálculo de fallas se realicen las siguientes simplificaciones que no afectan en forma apreciable los resultados:

1) No se toman en cuenta las cargas conectadas al sistema que no sean motores, ni otras conexiones de fase a neutro, como las que representan la capacitancia de las líneas de transmisión o la excitación de los transformadores. Esto equivale a considerar que antes de la falla no circula ninguna corriente por la red. El algoritmo permite simular ambas condiciones, es decir, *pueden incluirse en el cálculo de impedancias equivalentes de Thevenin, cualquier impedancia conectada en derivación y así poder comparar los efectos sobre el valor final del cortocircuito.*

Esta simplificación es posible porque las corrientes debidas a la falla son mucho mayores que las corrientes que circulan por los elementos capacitivos o inductivos conectados en paralelo, y además porque las corrientes de falla toman las cargas y están atrasadas cerca de 90° con respecto al voltaje, mientras que el factor de potencia de las corrientes de carga es bastante elevado.

2) Si no se conocen los voltajes que existen en los distintos puntos de la red antes de que ocurra la falla puede considerarse que su valor expresado en por unidad es igual a uno.

3) En las redes de potencia en donde por la capacidad de los equipos la relación $X/R \gg 1$, es posible despreciar la resistencia de los elementos de la red, que en el caso de los generadores, los transformadores y las líneas de alta tensión, es mucho menor que la reactancia inductiva de los mismos.

4) La impedancia de falla se considera igual a cero ya que para esta condición se tiene el valor máximo de la corriente de falla.

Las simplificaciones 1 y 2 permiten realizar una representación monofásica muy sencilla de una red trifásica afectada por un cortocircuito trifásico. Como se han despreciado todos los elementos pasivos conectados entre fase y neutro, incluso las cargas, antes de que se produzca el cortocircuito el sistema puede representarse como se indica en la figura V.18.

En la figura V.18 los generadores y motores están representados por una fuente de voltaje constante en serie con una impedancia, la cual queda incluida en la red pasiva. Todas las fuentes de voltaje tienen un valor de 1 en por unidad y están en fase, por lo que pueden sustituirse por una sola fuente de voltaje. Adicionalmente, las impedancias de la red pasiva pueden representarse por la matriz de impedancias de bus (como la falla es equilibrada, el cálculo de la corriente de cortocircuito se realiza empleando únicamente la red de secuencia positiva). Bajo estas condiciones se obtiene el circuito equivalente de la figura V.19.

Si en la figura V.19 se produce un cortocircuito en el nodo p , la corriente de falla resulta ser:

Estudio de cortocircuito

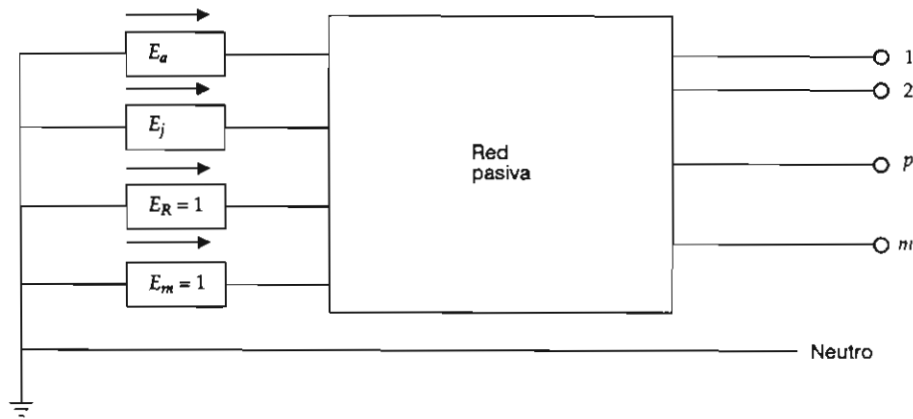


Figura V.18. Representación monofásica de la red trifásica simplificada.

$$I_{fp} = \frac{1}{Z_{pp}} \quad (V.10.14)$$

La expresión (V.10.14) es igual que la (V.10.7) para \$V_{p0} = 1\$ y \$Z_F = 0\$.

Los voltajes en los otros nodos durante la falla en el nodo \$p\$ están dados por las siguientes expresiones:

$$V_{F1} = 1 - Z_{1p} I_{fp} = \frac{Z_{1p}}{Z_{pp}}$$

$$V_{F2} = 1 - Z_{2p} I_{fp} = \frac{Z_{2p}}{Z_{pp}} \quad (V.10.15)$$

.....

$$V_{Fn} = 1 - Z_{np} I_{fp} = \frac{Z_{np}}{Z_{pp}}$$

Las ecuaciones (V.10.15) son iguales a las (V.10.10) para \$V_{10} = 1\$:

$$V_{20} = 1, \quad V_{p0} = 1, \quad V_{n0} = 1$$

V.10.3. Fallas desequilibradas

Para el cálculo de fallas desequilibradas por el método de las componentes simétricas es necesario establecer los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero del sistema e

interconectarlos de acuerdo con el tipo de falla, como se vio en la sección V.9.

En este caso se puede sistematizar el cálculo generalizando el método de la matriz de impedancias de bus de secuencia positiva, negativa y cero. Algorítmicamente y en función de las normas, se consideran iguales las impedancias de secuencia positiva y negativa. (Recuerde que las impedancias de la diagonal principal son las impedancias equivalentes de Thevenin en ese bus, mientras que el resto son las impedancias de transferencia.)

$$[Z_{BUS}^1] = \begin{bmatrix} Z_{11}^1 & Z_{12}^1 & \dots & Z_{1n}^1 \\ Z_{21}^1 & Z_{22}^1 & \dots & Z_{2n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}^1 & Z_{n2}^1 & \dots & Z_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

$$[Z_{BUS}^2] = \begin{bmatrix} Z_{11}^2 & Z_{12}^2 & \dots & Z_{1n}^2 \\ Z_{21}^2 & Z_{22}^2 & \dots & Z_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}^2 & Z_{n2}^2 & \dots & Z_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$[Z_{BUS}^0] = \begin{bmatrix} Z_{11}^0 & Z_{12}^0 & \dots & Z_{1n}^0 \\ Z_{21}^0 & Z_{22}^0 & \dots & Z_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}^0 & Z_{n2}^0 & \dots & Z_{nn}^0 \end{bmatrix}$$

Haciendo las simplificaciones 1 y 2 mencionadas en la sección anterior, dichas matrices de impedancia de bus pueden representarse por circuitos equivalentes, como los que se muestran

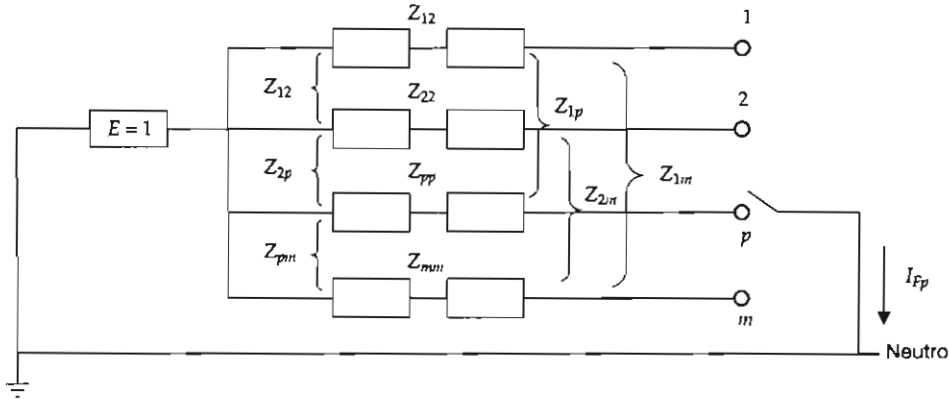


Figura V.19. Representación esquemática de una red trifásica afectada por un cortocircuito en el nodo p .

en la figura V.20. En dicha figura se han interconectado los tres circuitos equivalentes para representar una falla monofásica en el nodo p .

En el circuito de la figura V.20 se verifica que:

$$I_p^1 = I_p^2 = I_p^0 = \frac{1}{Z_{pp}^1 + Z_{pp}^2 + Z_{pp}^0}$$

Los tres circuitos equivalentes podrían haberse interconectado para representar una falla bifásica a tierra en el nodo p , en cuyo caso las componentes simétricas de la corriente de falla serían:

$$I_p^1 = \frac{1}{Z_{pp}^1 + \frac{Z_{pp}^2 Z_{pp}^0}{Z_{pp}^2 + Z_{pp}^0}}$$

$$I_p^2 = \frac{Z_{pp}^0}{Z_{pp}^2 + Z_{pp}^0} I_p^1$$

$$I_p^0 = \frac{Z_{pp}^2}{Z_{pp}^2 + Z_{pp}^0} I_p^1$$

La conexión correspondiente al caso de una falla entre dos fases en el nodo p resultaría en las siguientes componentes simétricas de la corriente de falla:

$$I_p^1 = -I_p^2 = \frac{1}{Z_{pp}^1 + Z_{pp}^2}$$

$$I_p^0 = 0$$

Estas ecuaciones se simplifican de manera análoga a las expresiones de la sección V.9.3.

Una vez calculadas las componentes simétricas de la corriente de falla, las corrientes de fase correspondientes en el nodo p se obtienen por la transformación:

$$\begin{bmatrix} I_p^a \\ I_p^b \\ I_p^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p^1 \\ I_p^2 \\ I_p^0 \end{bmatrix}$$

Las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de los voltajes en los nodos $1, 2, \dots, n$, durante una falla en p se obtienen restando de los voltajes de prefalla, las caídas de voltajes de secuencia, los cuales se obtienen a su vez mediante las impedancias de transferencia correspondientes. Por ejemplo, para el nodo n :

$$\begin{bmatrix} V_n^1 \\ V_n^2 \\ V_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{np}^1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{np}^2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{np}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p^1 \\ I_p^2 \\ I_p^0 \end{bmatrix}$$

Una vez calculadas las componentes simétricas del voltaje en un nodo, los voltajes de fase se calculan mediante la transformación:

$$\begin{bmatrix} V_n^a \\ V_n^b \\ V_n^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^1 \\ V_n^2 \\ V_n^0 \end{bmatrix}$$

Estudio de cortocircuito

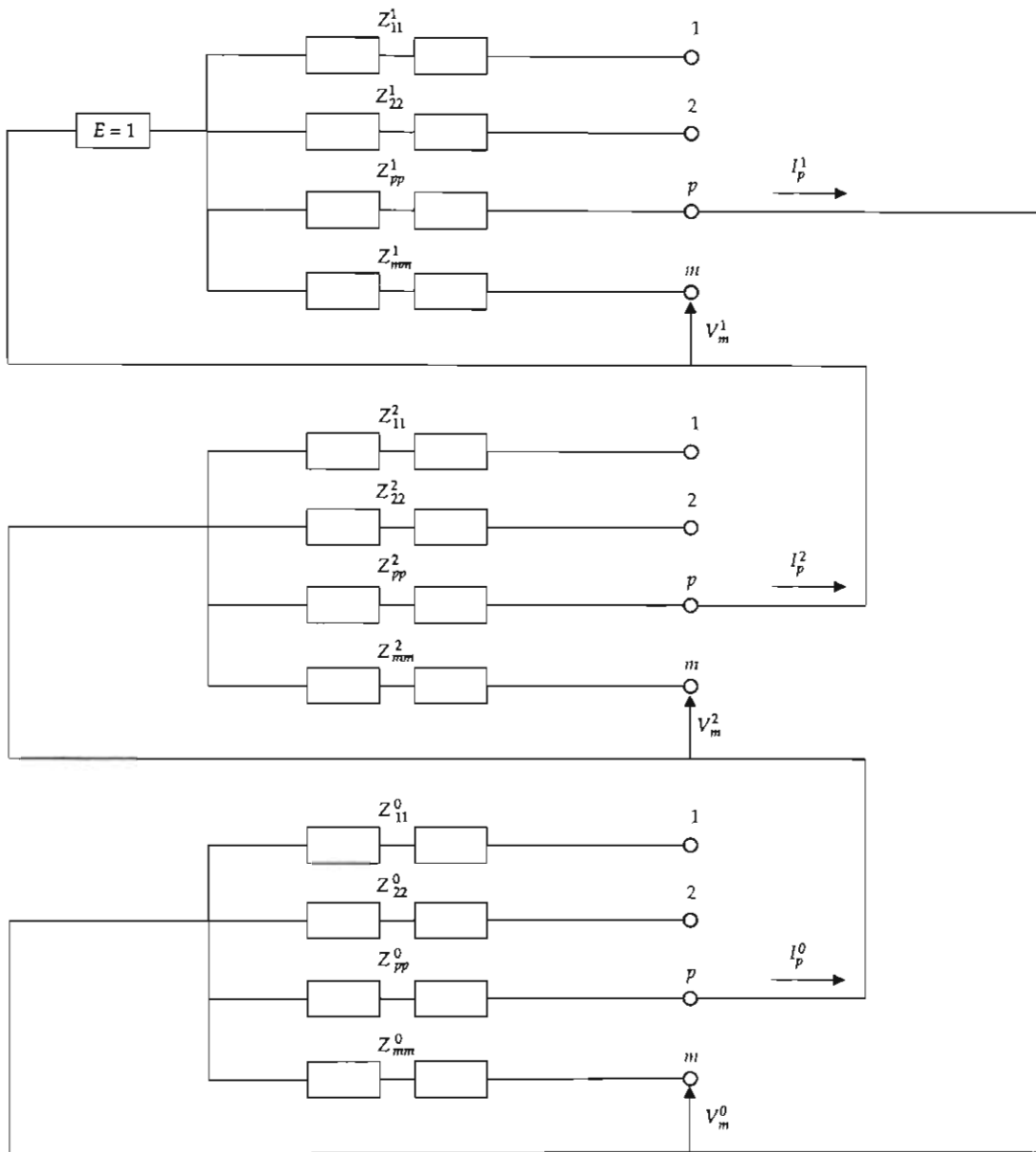


Figura V.20. Interconexión de los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero para representar las condiciones debidas a una falla monofásica a tierra en el punto p .

Una vez calculados los voltajes de secuencia positiva, negativa y cero en cada nodo de la red, se calculan las corrientes de secuencia positiva, negativa y cero que circulan por cada rama de la red durante el cortocircuito mediante la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} I_{jk}^1 \\ I_{jk}^2 \\ I_{jk}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{jk}^1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{jk}^2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{jk}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i^1 - V_k^1 \\ V_i^2 - V_k^2 \\ V_i^0 - V_k^0 \end{bmatrix}$$

donde:

- $Y_{jk}^1, Y_{jk}^2, Y_{jk}^0$ Admitancias de secuencia positiva, negativa y cero de la rama comprendida entre el nodo j y el nodo k .
- V_j^1, V_j^2, V_j^0 Voltajes de secuencia positiva, negativa y cero del nodo j .
- V_k^1, V_k^2, V_k^0 Voltajes de secuencia positiva, negativa y cero del nodo k .
- $I_{jk}^1, I_{jk}^2, I_{jk}^0$ Corrientes de secuencia positiva, negativa y cero que circulan por la rama comprendida entre el nodo j y el nodo k .

Una vez conocidas las componentes simétricas de las corrientes en la rama jk , las corrientes de fase se calculan mediante la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} I_{jk}^a \\ I_{jk}^b \\ I_{jk}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{jk}^1 \\ I_{jk}^2 \\ I_{jk}^0 \end{bmatrix}$$

Este método es particularmente útil cuando se desea conocer el comportamiento de voltajes nodales y corrientes circulantes de falla en cada elemento de la red, ya que la metodología descrita en las secciones anteriores limita el análisis a la determinación de las corrientes llamadas "puntuales", y no se obtienen los voltajes en los nodos no fallados.

V.11. EJEMPLO DE CÁLCULO PARA EL ESTUDIO DE CORTOCIRCUITO

Se calcularán las corrientes trifásicas (1a, 2a, y 3a. red) y de línea a tierra para el bus 1 del sistema industrial de la figura V.4. Para una estimación de valores se sugiere consultar el apéndice 3.

Primer paso. Preparación de los diagramas del sistema

Nomenclatura:

- BR Barra de referencia (neutro).
- Z_{RED} Impedancia equivalente de Thevenin del sistema de alimentación (69 kV).
- Z_G Impedancia del generador.
- Z_{T1}, Z_{T2} Impedancias de los transformadores T_1 y T_2 .
- Z_{T3}, Z_{T4} Impedancias de los transformadores T_3 y T_4 .
- Z_{MS} Impedancia de los motores síncronos de 6 000 HP.

- Z_{50} Impedancia de los motores entre 50 y 150 HP (0.4 MVA total).
- Z_{M50} Impedancia de los motores de menos de 50 HP (1.12 MVA total).
- Z_{M1750} Impedancia del motor de inducción 1 750 HP.

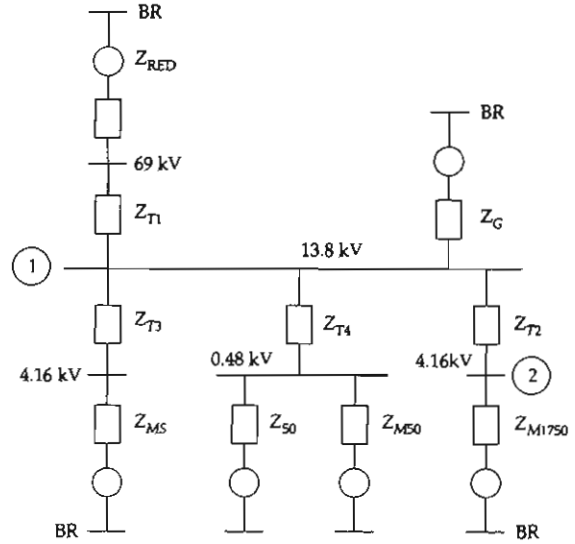


Figura V.21. Diagrama de secuencia positiva.

Nomenclatura (adicional):

- BR Barra de referencia (tierra física).
- X_{PT} Reactancia de puesta a tierra.

Segundo paso. Reunir y convertir los datos de impedancia.

Normalización en por unidad (véase el apéndice 1).

$$S_{BASE} = 10 \text{ MVA} \quad V_{BASE} = \text{los nominales}$$

Sistema de alimentación.

Para obtener la impedancia Z_{RED} basta con dividir los MVA base entre los MVA disponibles del sistema, cuyo ángulo es especificado por la relación X/R:

$$Z_{red} = \left(\frac{10}{1000} \right) \left| \arctg 22 \right.$$

$$= 0.01 \left| 87.39^\circ \right. = 4.540 \times 10^{-4} + j9.989 \times 10^{-3}$$

Estudio de cortocircuito

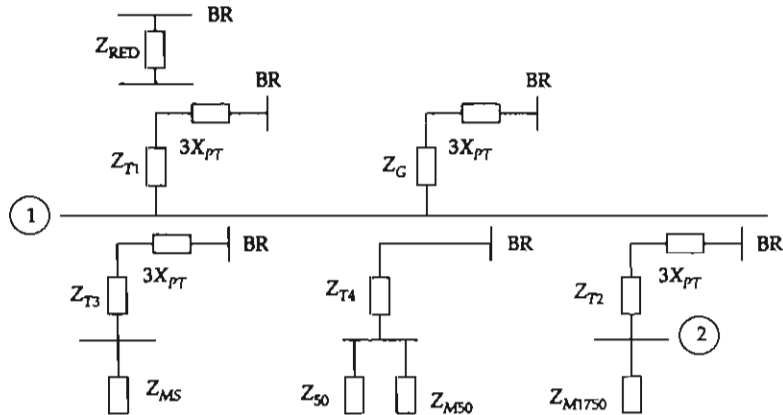


Figura V.22. Diagrama de secuencia cero.

Elementos pasivos.

De la relación X/R y de la reactancia X se obtienen las componentes de la impedancia mediante la expresión:

$$Z = \left(\frac{X}{X/R} + jX \right)$$

por lo que los valores de las impedancias normalizadas en p.u. son:

$$\begin{aligned} Z_{T1} &= \left(\frac{0.07}{21} + j0.07 \right) \left(\frac{10}{20} \right) \\ &= 1.66 \times 10^{-3} + j0.35 = 0.03504 \angle 87.273^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{T2} &= \left(\frac{0.055}{16} + j0.055 \right) \left(\frac{10}{5} \right) \\ &= 6.88 \times 10^{-3} + j0.11 = 0.11021 \angle 86.424^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{T3} &= \left(\frac{0.055}{14} + j0.055 \right) \left(\frac{10}{7.5} \right) = 5.24 \times 10^{-3} + j0.073 \\ &= 0.7352 \angle 85.914^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{T4} &= \left(\frac{0.055}{10} + j0.055 \right) \left(\frac{10}{1.5} \right) = 36.66 \times 10^{-3} + j0.366 \\ &= 0.3685 \angle 84.289^\circ \end{aligned}$$

(Todos estos valores permanecen fijos para el estudio de las tres redes.)

Máquinas rotatorias.

- Generador
- Primera red:

$$\begin{aligned} Z_G &= \left(\frac{0.09}{45} + j0.09 \right) \left(\frac{10}{15} \right) = 1.33 \times 10^{-3} \\ &+ j0.06 = 0.06001 \angle 88.727^\circ \end{aligned}$$

Este valor es el mismo para la segunda red (véase cuadro V.1).

Tercera red:

$$\begin{aligned} Z_G &= \left(\frac{0.12}{45} + j0.12 \right) \left(\frac{10}{15} \right) = 1.77 \times 10^{-3} \\ &+ j0.08 = 0.08002 \angle 88.727^\circ \end{aligned}$$

- Motor síncrono de 6 000 HP (f.p. = 0.8).

$$S = \frac{(6\,000 \text{ HP}) \times (0.746 \text{ kW})}{0.8} = 5.595 \text{ MVA}$$

Primera red:

$$\begin{aligned} Z_{MS} &= \left(\frac{0.20}{30} + j0.20 \right) \left(\frac{10}{5.595} \right) \\ &= 0.012 + j0.357 = 0.3571 \angle 88.088^\circ \end{aligned}$$

Segunda red: (véase el cuadro V.1)

$$Z_{MS} = 1.5(0.012 + j0.357) \\ = 0.018 + j0.5355 = 0.5356 \angle 88.088^\circ$$

Para el estudio de la tercera red no se considera.

- Motores entre 50 y 150 HP (0.4 MVA totales).

Primera red: (véase el cuadro V.2)

$$Z_{50} = \left(\frac{0.20}{9} + j0.20 \right) \left(\frac{10}{0.4} \right) = 0.555 + j5.0 = 5.03 \angle 83.66^\circ$$

Segunda red: (véase el cuadro V.2)

$$Z_{50} = \left(\frac{3}{1.2} \right) (0.555 + j5.0) = 1.388 + j12.5 \\ = 12.575 \angle 83.66^\circ$$

Para la tercera red no se consideran.

- Motores de menos de 50 HP (1.12 MVA totales).

Primera red: (véase el cuadro V.2)

$$Z_{M50} = \left(\frac{0.28}{6} + j0.28 \right) \left(\frac{10}{1.12} \right) \\ = 0.416 + j2.5 = 2.534 \angle 80.53^\circ$$

Para la segunda y tercera red no se consideran.

- Motor de inducción de 1750 HP (HP = kVA).

$$S = \frac{(6000 \text{ HP}) \times (0.746 \text{ kW})}{0.8} = 5.595 \text{ MVA}$$

Primera red:

$$Z_{M1750} = (1.2) \left(\frac{0.17}{30} + j0.17 \right) \left(\frac{10}{1.75} \right) = 0.0388 + j1.165 \\ = 1.166 \angle 88.088^\circ$$

Segunda red: (véase el cuadro V.1)

$$Z_{M1750} = \left(\frac{3}{1.2} \right) (0.0388 + j1.165) = 0.097 + j2.9125 \\ = 2.9141 \angle 88.088^\circ$$

Para la tercera red no se considera.

Red de secuencia cero:

Los valores no especificados se considerarán iguales a los de secuencia positiva. Se calculan adicionalmente los valores de la reactancia de puesta a tierra (16 Ω del generador y de los transformadores T_1 y T_2 , y limitación de falla a tierra a 500 amp en T_2 .

- Generador y transformador

$$T_1 (V_{BASE} = 13.8 \text{ kV})$$

$$Z_{BASE} = \frac{(13.8 \text{ kV})^2}{10 \text{ MVA}} = 19.044 \Omega$$

$$X_{PT} = \frac{16}{19.044} = 0.84 \quad 3 X_{PT} = 2.52047$$

- Transformador T_3 ($V_{BASE} = 4.16 \text{ kV}$)

$$Z_{BASE} = \frac{(4.16 \text{ kV})^2}{10 \text{ MVA}} = 1.73 \Omega$$

$$X_{PT} = \frac{16}{1.73} = 9.245 \quad 3 X_{PT} = 27.736$$

- Transformador T_2 ($V_{BASE} = 4.16 \text{ kV}$)

Se tiene que X_{PT} limita a 500 amperes, por lo que:

$$X_{PT} = \frac{4.16 \text{ kV}}{\sqrt{3} \times 500 \text{ A}} = 4.803 \Omega$$

Normalizado a p.u.:

$$Z_{BASE} = 1.73 \Omega$$

$$X_{PT} = \frac{4.803}{1.73} = 2.77 \quad 3 X_{PT} = 8.33$$

Tercer paso. Circuito equivalente de impedancias.

Primera red:

Para este caso se considerará la simplificación de la red de secuencia positiva a las siguientes ramas:

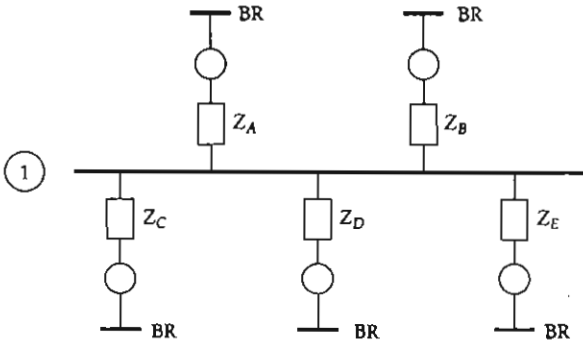


Figura V.23. Diagrama simplificado de elementos activos.

donde:

- Z_A Suma de las impedancias Z_{RED} y Z_{T1} .
- Z_B Impedancia del generador (ya calculada).
- Z_C Impedancia equivalente de las dos subestaciones T_3 , cada una con la suma de Z_{T3} y Z_{M5} :

$$Z_C = \frac{Z_{T3} + Z_{M5}}{2}$$

- Z_D Impedancia equivalente para las subestaciones con transformadores T_4 con el paralelo de las impedancias Z_{50} y Z_{M50} en serie con Z_{T4} . Tres subestaciones:

$$Z_D = \frac{(Z_{50} \parallel Z_{M50}) + Z_{T4}}{3}$$

- Z_E Impedancia equivalente de la subestación que contiene al transformador T_2 con dos motores de inducción de 1 750 HP:

$$Z_E = Z_{T2} + \frac{Z_{M1750}}{2}$$

Realizando las correspondientes operaciones se obtienen los siguientes resultados:

$$Z_A = (4.54 \times 10^{-4} + j9.989 \times 10^{-3}) + 1.66 \times 10^{-3} + j0.035)$$

$$= 2.114 \times 10^{-3} + j0.044989$$

$$= 0.04503 \angle 87.309^\circ$$

$$Y_A = 22.2074 \angle -87.309^\circ = 1.04262 - j22.182928$$

$$Z_B = 1.33 \times 10^{-3} + j0.06 = 0.06001 \angle 88.727^\circ$$

$$Y_B = 16.663 \angle -88.727^\circ = 0.3702 - j16.659$$

$$Z_C = 8.62 \times 10^{-3} + j.0215 = 0.21517 \angle 87.704^\circ$$

$$Y_C = 4.6474 \angle -87.704^\circ = 0.18618 - j4.6437$$

$$Z_D = 0.0945 + j0.67782 = 0.68438 \angle 82.0626^\circ$$

$$Y_D = 1.46117 \angle -87.0626^\circ = 0.201777 - j1.44717$$

$$Z_E = 0.0263 + j0.69285 = 0.693348 \angle 87.826^\circ$$

$$Y_E = 1.4422 \angle -87.826^\circ = 0.05471 - j1.44123$$

Admitancia equivalente de Thevenin al nodo 1 Y_{TH1} :

$$Y_{TH1} = Y_A + Y_B + Y_C + Y_D + Y_E$$

$$= 1.85548 - j46.374028 = 46.41113 \angle -87.708^\circ$$

$$Z_{TH1} = 0.021546 \angle 87-708^\circ = 8.6167 \times 10^{-4} + j0.021528$$

Segunda red:

- Se eliminan los motores de menos de 50 HP.
- Se modifican las impedancias de motores de 50 HP y mayores.

Partiendo de la figura V.23 se modifican (por incluir motores) las impedancias Z_C , Z_D y Z_E .

$$Z_C = \frac{Z_{T3} + Z_{M5}}{2}$$

Sustituyendo valores:

$$Z_C = 0.5(5.24 \times 10^{-3} + j0.073 + 0.018 + j0.5355)$$

$$= 0.01162 + j0.30425 = 0.304471 \angle 87.812^\circ$$

$$Y_C = 3.28437 \angle -87.812^\circ = 0.1253926 - j3.28198$$

$$Z_D = \frac{Z_{T4} + Z_{50}}{3} = \frac{(36.66 \times 10^{-3} + j0.366) + (1.388 + j12.5)}{3}$$

$$= 0.474888 + j4.2886 = 4.31487 \angle 83.6814^\circ$$

$$Y_D = 0.231756 \angle -83.6814^\circ = 0.025506 - j0.230348$$

$$Z_E = Z_{T2} + \frac{Z_{M1750}}{2} = 6.88 \times 10^{-3} + j0.11$$

$$+ (0.0485 + j1.455)$$

$$= 0.05538 + j1.565 = 1.566 \angle 87.97^\circ$$

$$Y_E = 0.638569 \angle -87.97^\circ = 0.022619 - j0.638168$$

Admitancia equivalente de Thevenin del nodo 1:

$$Y_{TH1} = Y_A + Y_B + Y_C + Y_D + Y_E$$

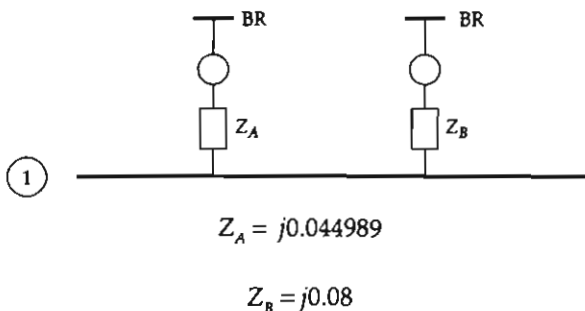
$$= 1.587 - j42.766 = 42.8 \angle -87.87^\circ$$

$$Z_{TH1} = 0.02336 \angle 87.87^\circ = 8.6838 \times 10^{-4} + j0.023348$$

Tercera red:

- Se eliminan todos los motores.
- Cambia la impedancia del generador.
- Se desprecian todas las resistencias.

Con referencia a la figura V.23, las ramas correspondientes a Z_C , Z_D y Z_E para la falla en el nodo 1 *no se consideran*.



Reactancia equivalente de Thevenin

$$X_{TH1} = 0.02879$$

Red de secuencia cero:

De la figura V.22 se observa que:

$$Z_{TH0} = (Z_{T1} + 3X_{PT}) \parallel (Z_C + 3X_{TP})$$

$$= [(1.66 \times 10^{-3} + j0.035) + j2.52047] \parallel [(1.33 \times 10^{-3} + j0.06) + j2.52047]$$

donde:

Z_{TH0} Impedancia equivalente de Thevenin de secuencia cero para el nodo 1.

$$Z_{TH0} = 1.283955 \angle 89.96^\circ = 8.963 \times 10^{-4} + j1.28395$$

Cuarto paso. Cálculo de la corriente de cortocircuito.

Primera red:

El valor de cortocircuito trifásico de primera red corresponde a:

$$I_{CC3F1} \cdot red = \frac{E_{TH}}{Z_{TH}} = Y_{TH} = 46.411 \angle -87.708^\circ$$

En amperes:

$$I_{BASE(13.8\text{ kV})} = \frac{10\text{ MVA}}{\sqrt{3}13.8\text{ kV}} = 418.37\text{ amp.}$$

$$I_{CC3F1} \cdot red = (46.411 \angle -87.708^\circ)$$

$$(418.37\text{ amp}) = 19.4169 \angle -87.708^\circ\text{ kA simétricos}$$

El valor asimétrico es:

$$I_{CCF} = 1.6(19.4169 \angle -87.708^\circ\text{ kA}) =$$

$$= 31.067 \angle -87.708^\circ\text{ kA asimétricos}$$

Segunda red:

$$Z_{TH1} = 8.6838 \times 10^{-4} + j0.023348$$

$$X_{TH1} = 0.023348$$

$$X/R = 0.023348 / 8.6838 \times 10^{-4} = 26.88$$

Para este caso se considera adicionalmente que los interruptores para este nivel de tensión (13.8 kV) tienen una velocidad nominal de 5 ciclos con una especificación posterior a 1964.

$$\frac{E_{p.u.}}{X_{p.u.}} = \frac{1.0}{0.023348} = 42.829$$

De la figura V.6 (falla local) se obtiene para la gráfica del interruptor de 5 ciclos, la curva de 3 (tiempo mínimo de apertura) y con $X/R = 27$, un factor multiplicativo de 1.04, por lo que el valor asimétrico de falla es:

$$\begin{aligned} I_{SC} &= \frac{E_{p.u.}}{X_{p.u.}} \times \text{factor multiplicativo} \times I_{BASE} \\ &= (42.829) (1.04) (418.37) \\ &= 18.635 \text{ kA asimétricos.} \end{aligned}$$

La corriente simétrica se obtiene eliminando del producto el factor multiplicativo:

$$I_{SC \text{ simétrica}} = 17.918 \text{ kA simétricos}$$

Tercera red:

$$I_{SC} = \frac{E}{X} I_{BASE} = \frac{1.0}{0.02879} (418.37 \text{ amp}) = 14.529 \text{ kA}$$

Falla de línea a tierra:

$$I_{CCIFT_{p.u.}} = \frac{3.0E_{TH}}{2Z_{TH}^1 + Z_{TH}^0}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3.0}{2(8.1667 \times 10^{-4} + j0.021528) + (8.963 \times 10^{-4} + j1.28395)} \\ &= \frac{3.0}{2.619 \times 10^{-3} + j1.327} = 2.2607 \angle -89.88^\circ \\ I_{CCIFT} &= I_{CCIFT_{p.u.}} I_{base} = (2.2607 \angle -89.88^\circ) (418.37A) \\ &= 945.82 \angle -89.88^\circ A \end{aligned}$$

Para el cálculo de la corriente de falla de línea a tierra simétrica se emplea el factor multiplicativo que se obtiene en las gráficas mostradas en las figuras V.5 y V.7. Debido a que por normas la corriente de cortocircuito trifásico es la de mayor magnitud, el empleo de la $I_{CCIFT_{asim}}$ para la selección de interruptores en mediana y alta tensión no es frecuente. El cálculo del factor multiplicativo se realiza empleando la relación X/R obtenida en la segunda red.

Considerando que los interruptores para este nivel de tensión (13.8 kV) tienen una velocidad nominal de 5 ciclos con una especificación posterior a 1964, de la figura V.7 se obtiene para la gráfica del interruptor de 5 ciclos, la curva 3 (tiempo mínimo de apertura) y con $X/R = 27$, un factor multiplicativo de 1.22, por lo que el valor asimétrico de falla es:

$$I_{CCIF_{asim}} = (1.22) (945.82) = 1153.9A \text{ asimétricos}$$

Como puede observarse, este valor es menor al de la falla trifásica (18.635 kA asimétricos), por lo que no tiene aplicación en la selección o verificación de la capacidad interruptiva del dispositivo.

VALORES EN POR UNIDAD (P.U.)

U

1.1. INTRODUCCIÓN

n sistema eléctrico está formado por diversos elementos: generadores, motores, transformadores, conductores, etc. Para el análisis de su comportamiento bajo diferentes condiciones de operación, la representación de estos equipos debe hacerse de una manera consistente. Por lo general, los fabricantes expresan las impedancias, reactancias o resistencias, según sea el caso, en por ciento, por unidad o en ohms, referidos a las bases nominales del equipo (tensión, potencia). Por la diferencia de unidades, el manejo de esta información tal cual resultaría complicado para llevarlo a cabo de una manera eficiente.

Debido a esto se ha generalizado el empleo de las cantidades en p.u. (por unidad) en el análisis de los sistemas eléctricos. De esta manera todos los datos están referidos a las mismas bases, lo que da por resultado un tratamiento consistente de la información y más simplificado.

En este apéndice se presentan los lineamientos básicos para la transformación o normalización de cantidades a por unidad, las ventajas que se obtienen al utilizar este método y un ejemplo del manejo de las ecuaciones.

1.2. MODELOS POR CIENTO Y POR UNIDAD

En el estudio de redes eléctricas de potencia, donde intervienen distintos tipos de equipo como generadores, transformadores, líneas de transmisión, capacitores, motores, etc., los datos pueden ser proporcionados en ohms, por ciento,

por unidad, o bien de las tres formas en un mismo sistema, por lo que se requiere que se expresen los datos del equipo utilizando un solo criterio.

Ahora bien, para los cálculos en redes eléctricas la representación de los valores de impedancia de los elementos en por unidad presenta ventajas sobre los otros criterios. Algunas de estas ventajas son:

- Los fabricantes de equipos eléctricos normalmente especifican los valores de las impedancias en por ciento o en por unidad para referirse a las bases de valores de voltaje y potencia nominal de placa.
- Las impedancias en por unidad de las máquinas eléctricas de un mismo tipo —pero de un rango amplio de características— caen en un rango relativamente corto, en tanto que las impedancias en ohms pueden tener un rango muy amplio, lo que en un momento dado puede complicar los cálculos.
- En los circuitos en donde existen transformadores, como ocurre en la mayoría de los sistemas eléctricos, al calcular las impedancias de los dispositivos en ohms se deben referir al lado correspondiente del transformador (primario o secundario), lo que dificulta el manejo de información. En cambio, con la representación en por ciento o en por unidad (p.u.) se evita esta dificultad.
- La forma en que se encuentran conectados los transformadores trifásicos no afecta a las impedancias cuando éstas se expresan en por unidad (p.u.).

- Representar cantidades en por unidad nos facilita las operaciones y cálculos aritméticos. El uso de cantidades en por ciento implica que al efectuar una multiplicación el resultado tenga que dividirse entre 100. En cambio, con el uso de cantidades en p.u. cualquier tipo de operaciones nos proporciona cantidades en p.u.
- El uso de cantidades en p.u. o por ciento simplifica el uso de unidades por ser cantidades adimensionales.

En cuanto a la representación de valores de tensión, corriente y potencia, el uso del criterio en por unidad o por ciento facilita su manejo.

En general, una cantidad en por unidad se puede representar como una relación entre dos cantidades de la misma unidad; y a una de ellas se le denomina cantidad base:

$$\text{cantidad en por unidad (p.u.)} = \frac{\text{cantidad dada}}{\text{cantidad base}} \quad (1.1)$$

Y se define una cantidad en por ciento como 100 veces una cantidad en por unidad:

$$\text{cantidad en por ciento (\%)} = \frac{\text{cantidad dada}}{\text{cantidad base}} \times 100 \quad (1.2)$$

Es decir que existe una relación entre cantidades por unidad y cantidades por ciento:

$$\text{cantidad por ciento \%} = \text{cantidad por unidad} \times 100 \quad (1.3)$$

1.3. DETERMINACIÓN DE VALORES BASE

La magnitud de las cantidades bases debe elegirse de tal manera que las cantidades en p.u. cumplan las leyes eléctricas.

Como las características topológicas de la red no se alteran en este tipo de transformación, se deben considerar como invariantes la ley de Ohm y la ley de Joule, y por consiguiente las leyes de Kirchhoff de voltajes y corrientes.

Para la selección de las cantidades base normalmente se fijan las bases de potencia aparente

kVAs (valor único) y las bases de tensión kVs, y a partir de éstas se determinan las bases de corriente y de impedancia. Se recomienda elegir la potencia y tensión del dispositivo de mayor capacidad como potencia base, y las tensiones base de acuerdo con las nominales.

Sean:

$$\begin{aligned} V_{\text{base}} &= \text{tensión base} \\ S_{\text{base}} &= \text{potencia base} \\ I_{\text{base}} &= \text{corriente base} \\ Z_{\text{base}} &= \text{impedancia base} \end{aligned}$$

$$S_{\text{base}} = V_{\text{base}} \times I_{\text{base}} \quad (1.4)$$

por lo que:

$$I_{\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{V_{\text{base}}} \quad (1.5)$$

De la ley de Ohm:

$$I = V/Z$$

entonces:

$$S_{\text{base}} = V_{\text{base}} \times \frac{V_{\text{base}}}{Z_{\text{base}}}$$

por lo que:

$$Z_{\text{base}} = \frac{(V_{\text{base}})^2}{S_{\text{base}}} \quad (1.6)$$

por tanto:

$$I_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}}{Z_{\text{base}}} \quad (1.7)$$

Una vez que se ha especificado la manera de obtener las magnitudes base, resulta importante mencionar que en cada nivel de tensión del sistema tendremos una base de tensión diferente relacionada con la tensión base adyacente por la relación de transformación del transformador que las separa. Al cambiar la tensión base, la corriente base y la impedancia base van a cambiar. *La potencia base se mantiene constante a lo largo del sistema.*

1.4. CONVERSIÓN DE VALORES NOMINALES
A VALORES EN POR UNIDAD
Y A VALORES EN PORCENTAJE

Al iniciar los cálculos es importante tener presente qué tipo de valores se van a manejar, ya sean valores monofásicos o trifásicos. Normalmente en los sistemas industriales el término "corriente" se refiere a la corriente de línea, el término "tensión" se refiere a la tensión entre líneas (nominal) y la "potencia" se entiende como la potencia aparente trifásica. Pero como el comportamiento de los circuitos trifásicos balanceados se estudia con el uso de una sola fase y el neutro de retorno, las bases para el cálculo monofásico deben estar dadas como potencia monofásica o la potencia por fase, y la tensión debe darse en kV de línea a neutro. Este hecho puede crear confusión. Un valor de voltaje, por ejemplo, si se especifica en por unidad, no importa si está dado entre líneas o entre línea y neutro. A saber, una tensión base entre líneas es 1.732 veces mayor que una tensión base de línea a neutro; este hecho permite que el valor de tensión en por unidad no varíe, ya sea que el valor sea monofásico o trifásico.

Ejemplo:

Considere un sistema cuya tensión base sea de 23 kV entre líneas. Entonces su tensión base de línea a neutro será de:

$$V_{\text{base}} = \frac{23 \text{ kV}}{\sqrt{3}} = 13.28 \text{ kV}$$

Si queremos pasar un valor de 20 kV entre líneas a por unidad, tenemos dos opciones:

$$1) V_{\text{p.u.}} = \frac{20 \text{ kV}}{23 \text{ kV}} = 0.869 \text{ p.u.}$$

con $V_{\text{base}} = 23 \text{ kV}$ entre líneas

2) Una tensión de 20 kV entre líneas implica una tensión de 11.547 kV de línea a neutro, por lo que:

$$V_{\text{p.u.}} = \frac{11.547 \text{ kV}}{13.280 \text{ kV}} = 0.869 \text{ p.u.}$$

con $V_{\text{base}} = 13.28 \text{ kV}$ de línea a neutro

Observamos que el valor de tensión expresado en p.u. no varía, independientemente de que lo obtengamos de la tensión entre líneas o de línea a neutro, siempre que utilicemos la tensión base adecuada.

De igual forma, los kVA trifásicos son tres veces los kVA monofásicos. Por tanto, el valor por unidad de los kVA, utilizando kVA trifásicos base es idéntico al valor por unidad obtenido utilizando kVA base monofásicos. Esto es válido además para kW y kVAR.

En cuanto al valor de la corriente base lo podemos calcular utilizando la potencia base trifásica y la tensión base entre líneas, o bien la potencia base monofásica y la tensión base de línea a neutro; de manera análoga se trabaja con la impedancia base.

Considere:

$$\begin{aligned} V_{\text{baseL}} &= \text{voltaje base entre líneas} \\ V_{\text{baseF}} &= \text{voltaje base de línea a neutro} \\ S_{\text{base}} &= \text{potencia base trifásica} \\ S_{\text{baseM}} &= \text{potencia base monofásica} \end{aligned}$$

$$S_{\text{base}} = \sqrt{3} \times V_{\text{baseL}} \times I_{\text{base}} \quad (1.8)$$

O bien:

$$I_{\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{\sqrt{3} \times V_{\text{baseL}}} \quad (1.8.1)$$

De manera similar:

$$I_{\text{base}} = \frac{S_{\text{baseM}}}{V_{\text{baseF}}} \quad (1.8.2)$$

Para la impedancia:

$$Z_{\text{base}} = \frac{(V_{\text{baseL}})^2}{S_{\text{base}}} \quad (1.9)$$

De manera similar:

$$Z_{\text{base}} = \frac{(V_{\text{baseF}})^2}{S_{\text{baseM}}} \quad (1.9.1)$$

1.5. CAMBIO DE BASES

Por lo general la impedancia de un componente en un sistema está dada en bases que no coinciden con las bases que estamos utilizando en esta parte del sistema, y como todas las impedancias del sistema deben de referirse a la misma impedancia base debemos conocer una manera prácticas de cambiar las bases.

Supongamos que:

- Z = impedancia en ohms
- $V_{base 1}$ = voltaje base dado
- $S_{base 1}$ = potencia base dada
- $Z_{base 1}$ = impedancia base dada
- $Z_{p.u.1}$ = impedancia en p.u. dada
- $V_{base 2}$ = voltaje base nuevo
- $S_{base 2}$ = potencia base nueva
- $Z_{base 2}$ = impedancia base nueva
- $Z_{p.u.2}$ = impedancia en p.u. nueva

Considerando valores trifásicos de potencia y tensión entre líneas tendremos:

$$Z_{base 1} = \frac{(V_{base 1})^2}{S_{base 1}} \quad Z_{base 2} = \frac{(V_{base 2})^2}{S_{base 2}} \quad (1.10)$$

Para pasar un valor en p.u. a una nueva base requerimos, primero, pasarlo a ohms y luego pasarlo a por unidad con las nuevas bases.

$$Z_{p.u.1} = \frac{Z}{Z_{base 1}} \quad Z_{p.u.2} = \frac{Z}{Z_{base 2}}$$

Por lo que:

$$Z = Z_{p.u.1} \times Z_{base 1} \quad Z = Z_{p.u.2} \times Z_{base 2}$$

Igualando y despejando $Z_{p.u.2}$ tendremos:

$$Z_{p.u.2} = Z_{p.u.1} \times \frac{Z_{base 1}}{Z_{base 2}} \quad (1.11)$$

Recordando las ecuaciones (1.10) podemos escribir las ecuaciones (1.11) así:

$$Z_{p.u.2} = Z_{p.u.1} \times \frac{\frac{(V_{base 1})^2}{S_{base 1}}}{\frac{(V_{base 2})^2}{S_{base 2}}}$$

Acomodando esta ecuación nos resulta:

$$Z_{p.u.2} = Z_{p.u.1} \times \left(\frac{V_{base 1}}{V_{base 2}} \right)^2 \times \frac{S_{base 2}}{S_{base 1}} \quad (1.12)$$

que nos da el mismo resultado que la ecuación (1.11), pero estando ésta en función únicamente de la potencia base y la tensión base.

APÉNDICE 2

COMPONENTES SIMÉTRICAS

2.1. INTRODUCCIÓN

El trabajo realizado por C. L. Fortescue en el año de 1918 nos dice que un sistema desequilibrado de n vectores puede descomponerse en n sistemas de vectores equilibrados denominados "componentes simétricas" de los vectores originales.

Los n vectores de cada conjunto de componentes son de igual magnitud, siendo también iguales los ángulos formados por vectores adyacentes. Normalmente, en cualquier estudio de sistemas eléctricos se enfoca su aplicación a sistemas trifásicos de corriente alterna, aunque este método es aplicable a cualquier sistema polifásico.

Ahora bien, según el teorema de Fortescue, tres vectores desequilibrados de un sistema trifásico pueden descomponerse en tres sistemas equilibrados de fasores. Los conjuntos equilibrados de componentes son:

a) Sistema directo o de secuencia positiva

Éste es un sistema trifásico que puede representarse por tres fasores de igual módulo, que

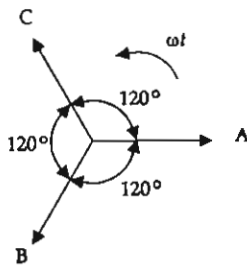


Figura 2.2. Sistema de fasores de secuencia positiva.

forman un ángulo entre dos fasores consecutivos de 120° y que tienen una secuencia de fase igual a la del sistema original (comúnmente ABC).

b) Sistema inverso o de secuencia negativa

Éste es un sistema trifásico que puede representarse por tres fasores de igual módulo que forman un ángulo de 120° entre dos fasores consecutivos y que tienen una secuencia de fase inversa a la del sistema original (secuencia ACB).

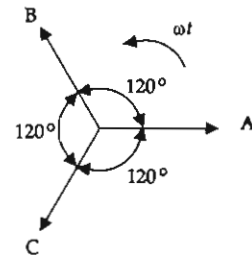


Figura 2.2. Fasores de secuencia negativa.

c) Sistema homopolar o de secuencia cero

Éste es un sistema trifásico que se representa por tres fasores de igual módulo e igual ángulo de fase.

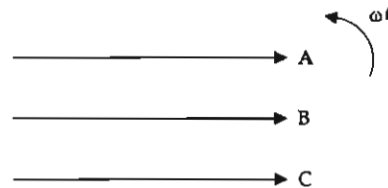


Figura 2.3. Fasores de secuencia cero.

La suma de los tres sistemas y de secuencia positiva, negativa y cero, de las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 nos da un sistema de tres fasores desequilibrados.

Consideremos un sistema trifásico desbalanceado, donde V_A , V_B y V_C son los voltajes de las fases A, B y C respectivamente. Utilizando una nomenclatura que concuerde con la de las figuras tendremos que:

V_A^1 , V_B^1 y V_C^1 son los voltajes de secuencia positiva.

V_A^2 , V_B^2 y V_C^2 son los voltajes de secuencia negativa.

V_A^0 , V_B^0 y V_C^0 son los voltajes de secuencia cero.

Por lo que podemos expresar los voltajes V_A , V_B y V_C utilizando sus componentes simétricas:

$$\begin{aligned} V_A &= V_A^1 + V_A^2 + V_A^0 \\ V_B &= V_B^1 + V_B^2 + V_B^0 \\ V_C &= V_C^1 + V_C^2 + V_C^0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Estas ecuaciones se pueden plantear de manera similar para las corrientes. Sean I_A , I_B y I_C las corrientes de un sistema trifásico desbalanceado. Se pueden escribir:

$$\begin{aligned} I_A &= I_A^1 + I_A^2 + I_A^0 \\ I_B &= I_B^1 + I_B^2 + I_B^0 \\ I_C &= I_C^1 + I_C^2 + I_C^0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

lo que observamos gráficamente en la figura 2.4.

2.2. USO DEL OPERADOR a

Se define el operador a como un número complejo de magnitud 1 y de argumento 120° ; lo cual implica que al aplicar el operador a a un vector, éste girará 120° en sentido contrario a las manecillas del reloj sin alterarse el módulo del vector:

$$a = -0.5 + j0.866$$

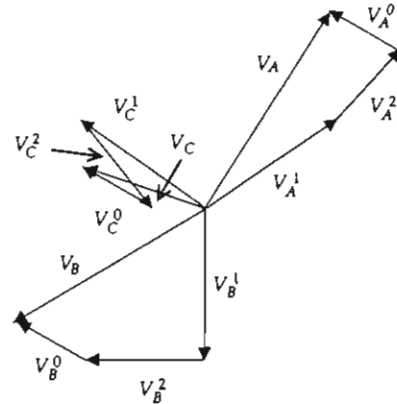


Figura 2.4. Representación de un sistema desbalanceado en sus componentes simétricas.

Ahora, si aplicamos a un vector el operador a dos veces, hará que el vector gire 240° . De manera análoga, si aplicamos a un vector el operador a tres veces sucesivamente el vector girará 360° . Es decir que:

$$a^2 = -0.5 - j0.866$$

$$a^3 = 1 + j0$$

A continuación se dan diversas combinaciones del operador a :

$$a = -0.5 + j0.866 = 1 \angle 120^\circ$$

$$a^2 = -0.5 - j0.866 = 1 \angle 240^\circ$$

$$a^3 = 1 + j0 = 1 \angle 360^\circ$$

$$a^4 = -0.5 + j0.866 = 1 \angle 120^\circ$$

$$1 + a = 0.5 + j0.866$$

$$1 - a = 1.5 - j0.866$$

$$1 + a^2 = 0.5 - j0.866$$

$$a + a^2 = -1 + j0$$

$$a - a^2 = 0 + j1.732$$

$$1 + a + a^2 = 0 + j0$$

Haciendo uso del operador a podemos escribir las ecuaciones 2.1 y 2.2 así:

$$\begin{aligned} V_A &= V_A^1 + V_A^2 + V_A^0 \\ V_B &= a^2 V_A^1 + a V_A^2 + V_A^0 \\ V_C &= a V_A^1 + a^2 V_A^2 + V_A^0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

De manera similar, las corrientes:

$$\begin{aligned} I_A &= I_A^1 + I_A^2 + I_A^0 \\ I_B &= a^2 I_A^1 + a I_A^2 + I_A^0 \\ I_C &= a I_A^1 + a^2 I_A^2 + I_A^0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A^1 \\ V_A^2 \\ V_A^0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Si comparamos las ecuaciones (2.1) y (2.2) con las ecuaciones (2.3) y (2.4) observamos que el número de incógnitas se ha reducido en las ecuaciones 2.3 y 2.4, ya que se han expresado V_B y V_C como el producto de una función del operador a y una de las componentes de V_A o de I_A . Recordemos que esto es posible debido a que todos los componentes de secuencia positiva son de igual magnitud y están defasados 120° , al igual que los de secuencia negativa, por lo que cada componente puede ser expresado en función de otra componente y una función adecuada del operador a . En cuanto a las componentes de secuencia cero, las tres componentes son de igual magnitud y están en fase, por lo que cualquiera de las tres puede sustituir a la otra. Véanse las figuras 2.1, 2.2 y 2.3.

Se define:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde podemos obtener:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, si premultiplicamos ambos miembros de la ecuación 2.5 obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_A^1 \\ V_A^2 \\ V_A^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

O escrita de otra forma:

$$\begin{aligned} V_A^1 &= \frac{1}{3} [V_A + a V_B + a^2 V_C] \\ V_A^2 &= \frac{1}{3} [V_A + a^2 V_B + a V_C] \\ V_A^0 &= \frac{1}{3} [V_A + V_B + V_C] \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Ahora bien, conocidos V_A^0 , V_A^1 y V_A^2 podemos conocer V_B^0 , V_B^1 y V_B^2 y V_C^0 , V_C^1 y V_C^2 a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_B^1 &= a^2 V_A^1 & V_C^1 &= a V_A^1 \\ V_B^2 &= a V_A^2 \\ V_C^2 &= a^2 V_A^2 \\ V_B^0 &= V_A^0 \\ V_C^0 &= V_A^0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

En las ecuaciones (2.6) se observa algo interesante: la componente de secuencia cero, en este caso V_A^0 , será igual a cero si la suma de los vectores desequilibrados es igual a cero. Y puesto que la suma de voltajes entre líneas en un sistema trifásico es siempre cero, *no habrá componentes de secuencia cero para voltajes entre líneas*, sin importar el desequilibrio que exista entre fases. Éste no

es el caso de las tensiones de línea a neutro, puesto que la suma de estas tensiones no necesariamente da cero.

Las ecuaciones (2.6) las podemos escribir para corriente, quedando:

$$\begin{bmatrix} I_A^1 \\ I_A^2 \\ I_A^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

O bien:

$$\begin{aligned} I_A^1 &= \frac{1}{3} [I_A + a I_B + a^2 I_C] \\ I_A^2 &= \frac{1}{3} [I_A + a^2 I_B + a I_C] \\ I_A^0 &= \frac{1}{3} [I_A + I_B + I_C] \end{aligned} \quad (2.9)$$

En un sistema trifásico la suma de las corrientes en las líneas es igual a la corriente en el neutro I_N , por tanto:

$$I_A + I_B + I_C = I_N \quad (2.10)$$

Por lo que:

$$I_N = 3I_A^0$$

Ahora bien, si consideramos un sistema sin neutro, la corriente I_N será igual a cero, por lo que las corrientes de las líneas *no tendrán componentes de secuencia cero*. Éste sería el caso de una carga conectada en delta.

Para concluir con el estudio de las componentes simétricas es importante dejar claro que las ecuaciones hasta aquí expuestas son válidas si y sólo si, se respetan las siguientes *consideraciones*:

1) Los voltajes de secuencia positiva, negativa y cero, inducen únicamente corrientes de secuencia positiva, negativa y cero respectivamente.

2) Las corrientes de determinada secuencia sólo podrán producir voltajes de esa secuencia.

3) Los puntos 1 y 2 se resumen diciendo que no se consideran interacciones entre secuencias distintas.

4) Los elementos activos de la red sólo generarán voltaje de secuencia positiva. Lo anterior es obvio, puesto que para que una máquina genere tensiones de secuencia negativa tendría que girar en sentido normal y contrario al mismo tiempo. Sería asimismo imposible que V_A , V_B y V_C fueran iguales en magnitud y estuvieran en fase, característica de las cantidades de secuencia cero.

5) Se considera que los voltajes de secuencia negativa y cero se generan en el punto de falla y que disminuyen en magnitud conforme nos alejamos del punto de falla.

6) El voltaje de secuencia positiva es cero en el punto de falla y máximo en el punto de generación.

7) Como las corrientes de secuencia cero están en fase y son de la misma magnitud necesitan del cuarto conductor (neutro) para circular.

8) La existencia de componentes de secuencia negativa y cero en un sistema está condicionada a la presencia de un desequilibrio; adicionalmente, para la secuencia cero este desequilibrio debe ir acompañado de una circulación de corriente por la tierra física (suelo).

ESTIMACIÓN DE LA CORRIENTE DE CORTOCIRCUITO TRIFÁSICO Y DE LÍNEA A TIERRA EN PLANTAS INDUSTRIALES

Debido a que en el cálculo manual de cortocircuito frecuentemente se cometen errores por la gran cantidad de operaciones con números complejos, es conveniente tener un valor estimado de las corrientes de falla como referencia. Para ello se describe a continuación un método simplificado de estimación de valores de falla trifásica y de línea a tierra, aplicable a sistemas industriales.

Los valores deberán ser considerados exclusivamente como *referencia* a los valores calculados; estos últimos deberán apegarse a las normas existentes (se recomienda utilizar el método descrito en IEEE-141).

3.1. FALLA TRIFÁSICA

En una planta industrial es muy frecuente encontrar el circuito simplificado de la figura 3.1.

En él, Z_{RED} representa la impedancia equivalente de Thevenin de alimentadores, transformadores y generadores que se encuentran en el lado primario del transformador.

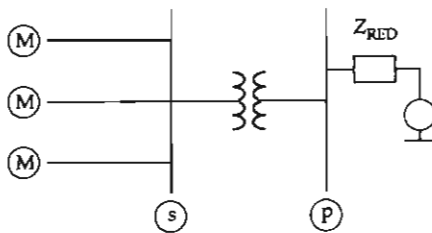


Figura 3.1.

Estadísticamente está demostrado que en una planta industrial la mayoría de los motores tiene su equipo de relevo, por lo que la demanda máxima no excede de 60% de la carga instalada. Adicionalmente, con base en la norma IEEE-141, ante la presencia de una falla de cortocircuito la contribución más grande llegará a través del secundario del transformador y los motores no proporcionarán más de 30% de la corriente total de cortocircuito, es decir, la falla será alimentada *predominantemente* por los generadores de la planta y la acometida a través del transformador.

Basándonos en estos factores la estimación partirá de los siguientes casos:

- 1) El nodo de falla es alimentado directamente por la acometida.
- 2) El nodo de falla es alimentado directamente por algún generador.
- 3) El nodo de falla se ubica a una o más etapas de transformación de las principales fuentes de falla (acometida y generadores).

Para el caso 1 se considera que la mayor contribución a la falla la proporciona la acometida, por lo que cualquier generador con alguna etapa de transformación se desprecia. Si no está conectado directamente un generador en el nodo, la corriente de cortocircuito estimada en éste es:

$$i_{cc} \approx \frac{S_{cc}}{\sqrt{3} \times V_{nodo}} \quad (3.1)$$

donde:

- I_{cc} Estimado de la magnitud de la corriente de cortocircuito trifásico.
- S_{cc} MVA disponibles del sistema.
- V_{nodo} Voltaje base del nodo.

Para el caso 2 se considera que la contribución de cada generador es:

$$I_{cc} \approx \frac{I_{nom}}{Z_G} \quad (3.2)$$

donde:

- I_{cc} Contribución a la corriente de cortocircuito del generador.
- I_{nom} Corriente nominal del generador.
- Z_G Magnitud de la impedancia nominal subtransitoria del generador en p.u. (puede ser usada también la reactancia subtransitoria, puesto que $Z_G \approx x''_d$).

Para el caso 3 el análisis se referirá a la figura 3.1. En los sistemas industriales casi 90% de los nodos están alimentados por el secundario de un transformador, por lo que este caso es el más común de los tres.

Si existe una sola ruta de alimentación hacia la falla, como en la figura 3.1, la corriente de falla en el nodo s es de aproximadamente:

$$I_{cc} \approx \frac{I_{nom}}{Z_T} \quad (3.3)$$

donde:

- I_{cc} Estimado de la corriente de cortocircuito trifásico del nodo.
- I_{nom} Corriente nominal del transformador.
- Z_T Impedancia nominal del transformador en p.u.

El transformador que se indica en la fórmula anterior corresponde al transformador de la figura 3.1, que es el último transformador que se encuentra en la ruta de alimentación hacia la falla. Lo anterior se sustenta en que si normalizamos la Z_{RED} y la impedancia equivalente de los motores (Z_M) a las bases del transformador, se obtiene que: $Z_{RED} \ll Z_T$, mientras que $Z_M \gg Z_T$.

Si desarrollamos las operaciones correspondientes para obtener la impedancia equivalente de Thevenin en el nodo s , se tiene que la serie de Z_T con Z_{RED} es prácticamente Z_T , obteniéndose el mismo resultado con el paralelo de Z_T con Z_M , esto es, el valor de la impedancia equivalente de Thevenin en el nodo s es muy cercana a la del transformador Z_T .

Las simplificaciones anteriores se justifican de la siguiente forma:

- Considerar un bus infinito en el lado primario del transformador ($Z_{RED} = 0.0$). Estadísticamente, esta simplificación incrementa la corriente de falla un 20% aproximadamente.
- Despreciar la contribución de los motores. Como se mencionó anteriormente, los motores aportan a la corriente de falla como máximo 30 por ciento.

Este incremento y reducción se compensan, logrando con ello que este valor estimado no exceda una desviación de 20% del valor real de la corriente.

En los sistemas industriales es muy frecuente encontrar circuitos similares a los de la figura 3.2. Debido a los requerimientos de la ampacidad los conductores son de calibre grueso, y como las distancias que deben cubrir son generalmente menores a los 1 000 metros, se obtiene de manera general una impedancia relativamente pequeña, que ocasiona que la corriente de falla en el nodo q sea muy parecida a la del nodo p ; es por ello que el valor *estimado* de la corriente de falla del nodo q es igual a la del nodo p .

Otro caso común es el de los nodos con más de una contribución importante a la corriente de falla, por eso la corriente estimada total de cortocircuito de este nodo será igual a la suma de las corrientes de contribución más importantes,

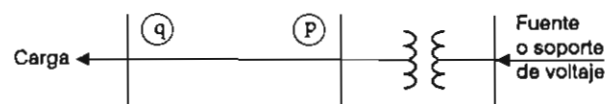


Figura 3.2.

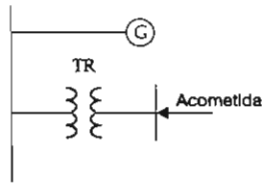


Figura 3.3.

para este caso la del generador y la de la acometida a través del transformador (figura 3.3).

$$I_T = I_G + I_{TR}$$

3.2. FALLA DE LÍNEA A TIERRA

Por lo general, los sistemas industriales utilizan tres tipos de aterrizamiento:

- Sólidamente aterrizado.
- Aterrizado a través de una impedancia (R , X_L , X_C , o combinados).
- Aislado de tierra.

Los valores estimados de falla a tierra dependerán del tipo de aterrizamiento.

En los sistemas industriales se manejan niveles de voltaje en mediana tensión (esto es, desde 1 kV hasta 15 kV) y en baja tensión (menores a 1 kV).

Antes de continuar con el análisis es conveniente recordar bajo qué circunstancias se emplea cada tipo de aterrizamiento.

En mediana tensión el sistema se aterriza a través de una impedancia para disminuir los esfuerzos dinámicos y térmicos en ellos, estableciendo la norma que dicha limitación oscila entre los 100 y 500 amperes.

En baja tensión se tienen estadísticamente los valores de falla a tierra más grandes, puesto que no se acostumbra aterrizar el sistema por medio de impedancias; es decir, el sistema está *sólidamente aterrizado*. Esto se debe principalmente a la presencia de cargas monofásicas o bifásicas, lo que implica un desbalanceo en las fases y, por tanto, una corriente circulante a través del neutro, la cual produciría en la impedancia de puesta

a tierra una diferencia de potencial, generando un indeseable voltaje neutro-tierra.

Para impedir la contribución de múltiples fuentes de corriente a tierra durante una falla, en el sistema se crean *islas de contribución de corrientes a tierra*, lo cual se logra mediante la selección adecuada de las conexiones de transformadores. Los sistemas así diseñados presentan una selectividad mejor para las fallas a tierra. En la figura 3.4 se observan dichas islas a través de las líneas punteadas.

Cuando el sector del sistema donde se analiza la falla está aterrizado sólidamente (zona A), la impedancia equivalente de secuencia cero es prácticamente igual a la de secuencia positiva, por lo que la corriente de cortocircuito de línea a tierra *estimada* será igual a la corriente estimada de falla trifásica. Para el caso de los nodos alimentados sólo por transformadores se utiliza la ecuación (3.3).

Cuando el equipo está aterrizado a través de una impedancia (zona B), entonces la corriente estimada de falla será igual a la suma de las corrientes (limitadas) de cada puesta a tierra en ese sector del sistema.

Basándonos en la figura 3.3, y suponiendo que la corriente a la que limita la impedancia del generador es de 500 amperes y la del transformador a 300 A, la corriente total estimada de falla de línea a tierra de ese nodo es de $500 + 300 = 800$ A. Para el caso del nodo en donde está conectada la acometida, la corriente estimada de cortocircuito monofásico es igual al trifásico.

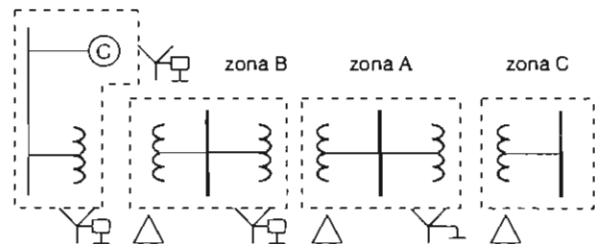
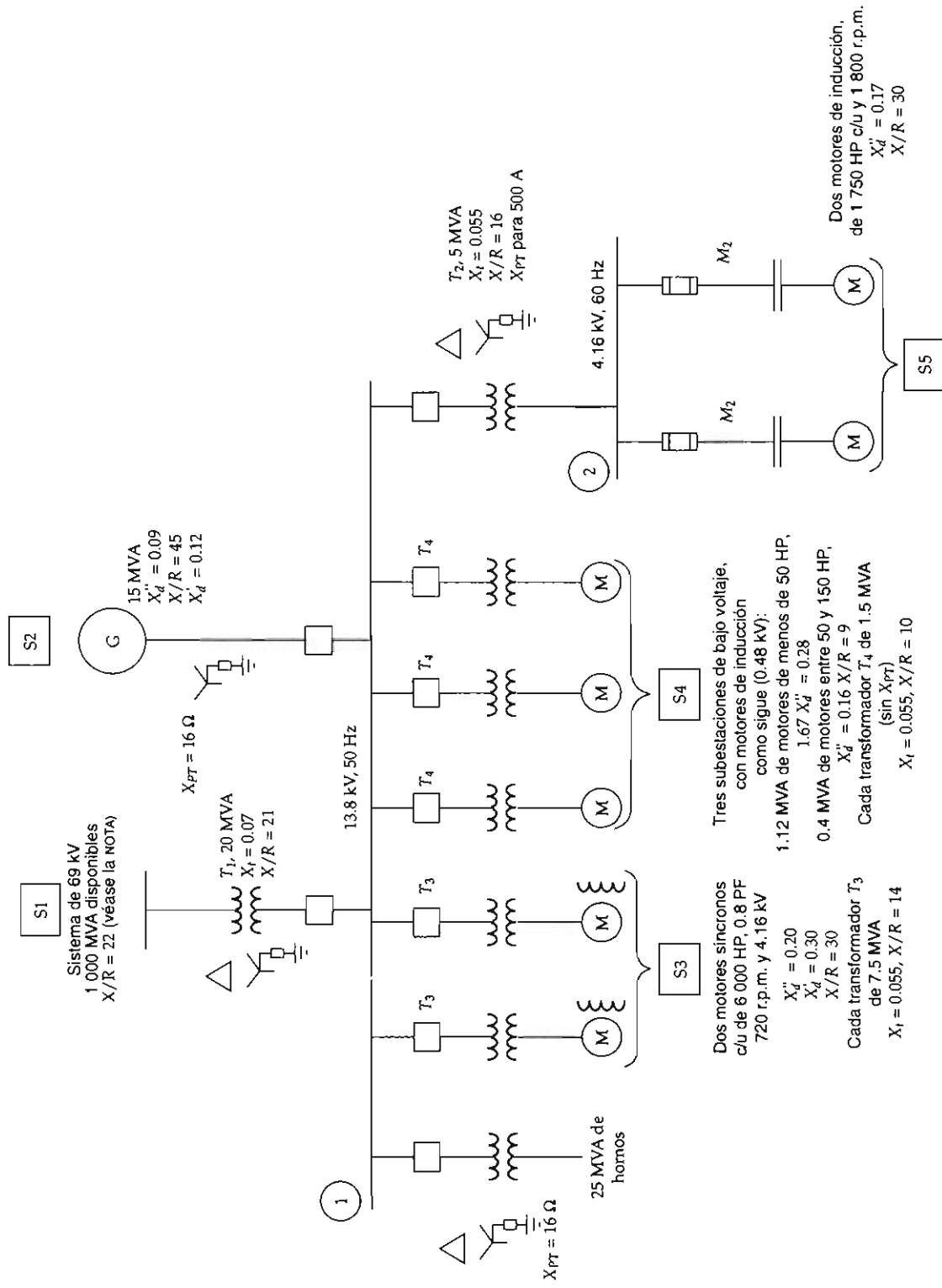


Figura 3.4.



Nota: La relación X/R se obtuvo sólo para este sistema en particular.
No use el valor de este ejemplo como valor típico.

Figura 3.5.

3.3. EJEMPLO DE ESTIMACIÓN
DE LAS CORRIENTES DE FALLA

Se estimarán las corrientes trifásicas y de línea a tierra para el bus 1 y 2 del sistema industrial del ejemplo tratado en la sección V.11. Para mayor facilidad se muestra nuevamente el sistema en la figura 3.5.

La corriente estimada de cortocircuito trifásico del nodo 1 es:

$$I_{cc} \approx \frac{I_{nT1}}{Z_{T1}} + \frac{I_{nG}}{Z_G} = \frac{\frac{20 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 13.8 \text{ kV}}}{(0.07)} + \frac{\frac{15 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 13.8 \text{ kV}}}{0.09}$$

$$I_{cc} \approx 19 \text{ kA sim}$$

La corriente estimada de cortocircuito trifásico del nodo 2 es

$$I_{cc} \approx \frac{I_{nT2}}{Z_{T2}} = \frac{\frac{5 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 4.16 \text{ kV}}}{(0.055)}$$

$$I_{cc} \approx 12.62 \text{ kA sim}$$

La corriente que circula a través de la impedancia de aterrizamiento del transformador T_1 es de:

$$I_{cc} = \frac{13.8 \text{ kV}}{\sqrt{3} \times 16\Omega} = 497.96 \text{ A} \approx 500 \text{ A}$$

Puesto que el generador está al mismo voltaje, su impedancia también limita aproximadamente a 500 A la corriente de falla monofásica. Por eso, la magnitud estimada de la corriente de cortocir-

cuito de línea a tierra en el nodo 1 es de **1 kA**. La corriente de falla de línea a tierra estimada del nodo 2 es de **500 A**.

Los valores reales calculados (sección V.11) de las corrientes de cortocircuito son los siguientes:

Falla trifásica del **nodo 1** (primera red):

$$I_{cc3F} = \frac{10 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 13.8 \text{ kV}} \times 46.41113 \angle -87.708^\circ$$

$$= \underline{19.4169} \angle -87.708^\circ \text{ kA simétricos}$$

(estimado = 19 kA simétricos)

Falla trifásica del **nodo 2** (primera red):

$$I_{cc3F} = \frac{10 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 4.16 \text{ kV}} \times 9.26494 \angle -86.906^\circ$$

$$= \underline{12.8585} \angle -86.906^\circ \text{ kA simétricos}$$

(estimado = 12.62 kA simétricos)

Corriente de falla de línea a tierra del **nodo 1**:

$$I_{cc1FT} = \frac{10 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 13.8 \text{ kV}} \times 2.2607 \angle -89.98^\circ$$

$$= \underline{945.82} \angle -89.88^\circ \text{ A simétricos}$$

(estimado = 1 000 A simétricos)

Corriente de falla de línea a tierra del **nodo 2**:

$$I_{cc1FT} = \frac{10 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \times 4.16 \text{ kV}} \times 0.3466 \angle -89.88^\circ$$

$$= \underline{481.03} \angle -89.88^\circ \text{ A simétricos}$$

(estimado = 500 A simétricos)

APÉNDICE 4

PROBLEMARIO

1

4.1. INTRODUCCIÓN

1.1. ¿Cuáles son los elementos de la *calidad de servicio eléctrico*?

1.2. Describa las características de un sistema eléctrico en *estado normal*.

1.3. ¿Cuál es el significado de *disturbio*? Dé algunos ejemplos.

1.4. ¿Son aplicables los estados de operación para un sistema industrial sin generación propia? Explique por qué.

1.5. ¿Es equivalente el estado normal al régimen permanente equilibrado? En caso negativo explique las diferencias.

1.6. Describa las diferencias entre los estados normal y alerta.

punto es válido despreciar las impedancias mutuas?

2.2. Para el mismo sistema (II.6) defina dos árboles con configuración distinta del original, manteniendo fijos el número de nodos. Determine nuevamente las matrices Y_{BUS} , Y_{RAMA} y Z_{MALLA} describiendo la diferencia entre las matrices obtenidas originalmente. ¿Cuáles matrices permanecen sin cambios?

2.3. Para el mismo sistema de la sección II.6 renumere los nodos, asignando al de referencia el número cero. ¿Qué cambios habría en las matrices de red?, ¿cuáles son las reglas básicas de asignación de números de elemento y números de nodo para una red interconectada?

Este sistema presenta las características que se observan en la figura 4.1.

4.2. MATRICES DE INCIDENCIA Y DE RED

2.1. Para el sistema descrito en la sección II.6 construya las matrices Y_{BUS} y Z_{MALLA} *por inspección*; compare con los valores obtenidos en el ejemplo y determine las diferencias. ¿Hasta qué

$$G_1 = G_3 : X/R = 45$$

$$50 \text{ MVA}, 13.8 \text{ kV}, x_d'' = 10\%$$

$$L_1 = L_2 = L_3$$

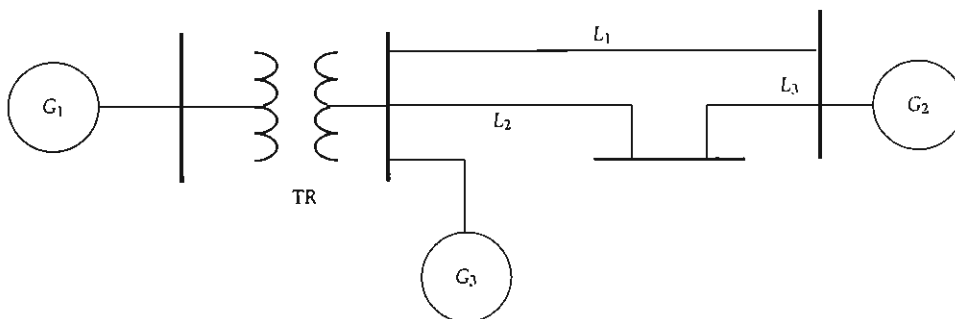


Figura 4.1.

$$Z_{l,i} = 5 + j30\Omega/\text{fase}$$

$$Z_{l,12} = Z_{l,13} = j250\Omega$$

$$\text{TR} : 13.8/115 \text{ kV}$$

$$50 \text{ MVA}, X/R = 40$$

$$Z = 6.25\%$$

$$G_2 : 120 \text{ MVA}, 115 \text{ kV}, x_d'' = 12\%, X/R = 40$$

- Seleccione bases convenientes y construya la red de secuencia positiva en p.u.
- Asigne números a los elementos y nodos de acuerdo con el árbol seleccionado.
- Dibuje el grafo conectado y orientado del sistema.

3.2. ¿Cómo se obtendrían experimentalmente los parámetros de la Z_{BUS} para un sistema en particular?

3.3. Explique cuál sería el orden de adición óptimo (por tipo de documento) para el algoritmo de Z_{BUS} .

3.4. Para el sistema descrito en II.4, obtenga la matriz Z_{BUS} por adición de elementos a elemento **sin considerar acoplos mutuos**; invierta la matriz obtenida y compárela (Y_{BUS}) con la que se obtuvo en la misma pregunta.

3.5. Obtenga para el mismo sistema (II.4) la matriz Z_{BUS} ahora considerando acoplamiento. Obtenga la correspondiente Y_{BUS} por inversión y compárela con la obtenida por transformaciones singulares.

3.6. Para el siguiente sistema, con los mismos datos del problema II.4, considere los siguientes cambios:

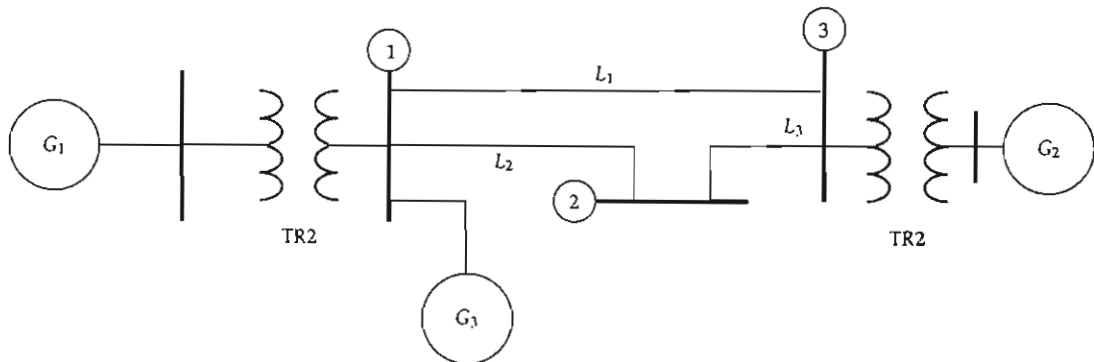


Figura 4.2

- Desprecie las impedancias mutuas y obtenga Y_{BUS} , Y_{RAMA} y Z_{MALLA} por inspección.
- Determine las matrices de red Y_{BUS} , Y_{RAMA} y Y_{MALLA} por transformaciones singulares.

2.5. ¿Por qué se dice que el grado de dispersidad de las matrices primitivas de impedancia y admitancia no necesariamente coinciden?

4.3. ALGORITMOS PARA LA FORMACIÓN DE MATRICES DE RED

3.1. Describa el significado físico de los componentes de la matriz Z_{BUS} .

$$G_2 : 13.8 \text{ kV} \quad \text{TR1} = \text{TR} \quad \text{TR2} : 150 \text{ MVA}, Z = 6.2\%, X/R = 45, 13.8/115 \text{ kV}$$

- Normalice a p.u. y basándose en el diagrama de secuencia positiva *reduzca la red a los nodos 1, 2 y 3*.
- Obtenga la matriz Z_{BUS} considerando acoplos mutuos.
- Construya Z_{BUS} sin considerar acoplos.

3.7. Para el ejemplo de la sección III.3 compare los resultados obtenidos considerando o no acoplos; explique las causas de las diferencias numéricas.

4.4. ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA

4.1. Describa el algoritmo para la solución del problema de flujos utilizando la matriz Z_{MALLA} .

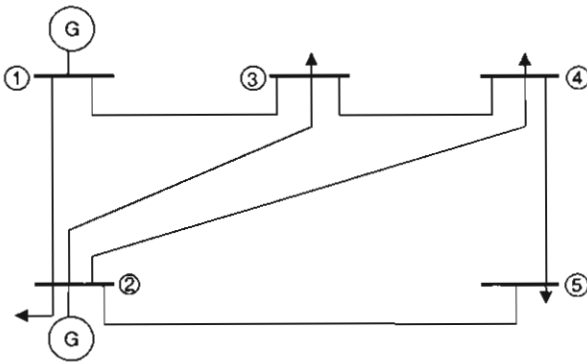
4.2. ¿Puede ser utilizado como compensador un nodo que **no** tenga generación? Explique por qué.

4.3. Explique qué efectos tendría sobre el modelo de representación para flujos de potencia utilizar uno o más transformadores con posición derivación (tap) fuera del nominal.

4.4. Si en un sistema de potencia se emplean cambiadores de derivación *bajo carga*, ¿cómo se modelarían para el estudio de flujos?

4.5. Calcule los valores faltantes para los cuadros IV.6 y IV.7 del ejemplo de la sección IV.4.

4.6. Considere el siguiente sistema:



Los datos de las líneas de transmisión se muestran a continuación (observe que **no se considera el efecto capacitivo**):

Código de bus p-q	Impedancia Z_{pq}
1-2	$0.02 + j0.06$
1-3	$0.08 + j0.24$
2-3	$0.06 + j0.18$
2-4	$0.06 + j0.18$
2-5	$0.04 + j0.12$
3-4	$0.01 + j0.03$
4-5	$0.08 + j0.24$

Los valores de generación y carga, así como también los voltajes asignados se muestran en el siguiente cuadro:

Código de bus p	Voltaje asumido del bus	Generación		Carga	
		Mega-watts	Mega-vars	Mega-watts	Mega-vars
1	$1.0 + j0.0$	0	0	0	0
2	$1.0 + j0.0$	65	10	20	10
3	$1.0 + j0.0$	0	0	45	15
4	$1.0 + j0.0$	0	0	40	5
5	$1.0 + j0.0$	0	0	60	10

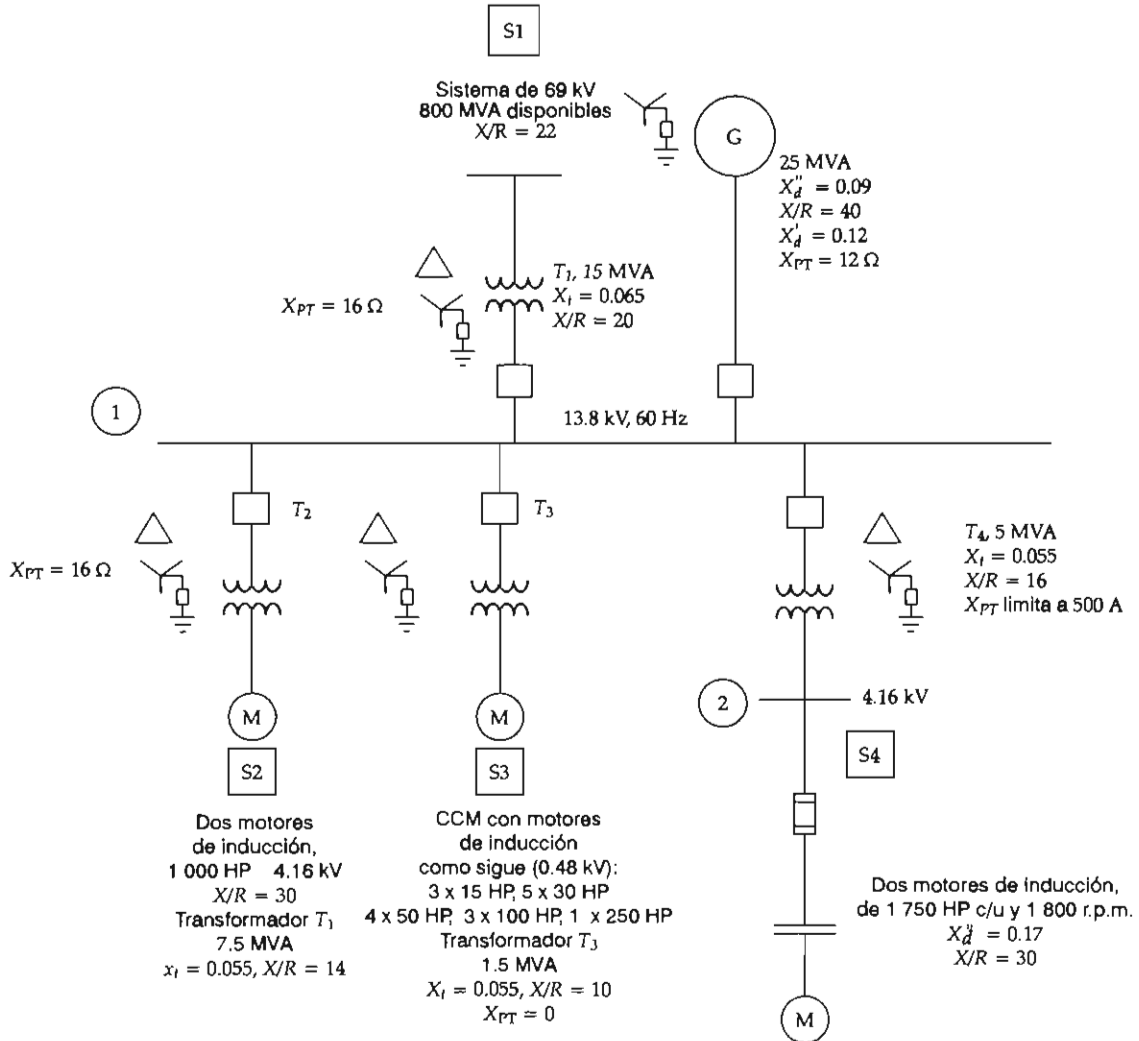
- Desprecie la resistencia de los alimentadores y realice un estimado de los flujos de potencia activa.
- Explique por qué el problema de flujos no puede ser resuelto al despreciar las reactancias.
- Utilice una tolerancia de convergencia de 0.01 y resuelva el problema de flujos.
- Varíe los factores de aceleración a extremos (por ejemplo: 1.0 y 6.0) y explique cómo influye con el número de iteraciones.
- Demuestre numéricamente que al aumentar el voltaje del nodo compensador (dentro de los límites de regulación) las pérdidas disminuyen.
- Explique qué es lo que sucede con el balance reactivo de la red ante las modificaciones de voltaje.
- Realice un *balanceo de generación* para las unidades (que ambas tengan las mismas potencias).

4.5. ESTUDIO DE CORTOCIRCUITO

5.1. Explique por qué para un estudio de cortocircuito no se toman en cuenta los bancos de capacitores y los motores de baja capacidad.

5.2. Describa el procedimiento para el cálculo de cortocircuito en un sistema sin generación propia cuando se desconoce la *potencia de cortocircuito* de la acometida.

5.3. Considere el siguiente sistema y resuelva los puntos que se piden:



- Para los buses 1 y 2 calcule los valores de cortocircuito trifásico de primera y tercera red.
- Para el bus 2 determine los valores de falla de dos líneas y de línea a tierra.
- Determine la variación de la potencia de cortocircuito de la acometida por inclusión del nuevo sistema.
- Calcule las capacidades interruptivas en 13.8 kV requeridas para los interruptores de 5 ciclos.

BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, Paul M., *Analysis of Faulted Power Systems*, Iowa State Press, Ames, 1995.
- Arrillaga, J. y C. P. Arnold, *Computer Analysis of Power Systems*, Wiley & Sons, 1990.
- Brown, Homer E., *Solution of Large Networks by Matrix Methods*, Nueva York, Wiley, 1975.
- El-Abiad, A. H., Ruth Guidone y G. W. Stagg, "Calculation of Short Circuits Using a Highspeed Digital Computer", *Trans. AIEEE*, 1985, vol. 80, part III, pp. 702-707.
- Elgerd, Olle I., *Electric Energy Systems Theory: An Introduction*, Nueva York, McGraw-Hill, 1985.
- Fortescue, C. L., "Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks", *Trans. AIEEE* 37, 1918, pp. 1027-1140.
- Gönen, Turan, *Electric Power Distribution System Engineering*, McGraw-Hill, 1987.
- Gross, Charles A., *Power System Analysis*, 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1986.
- Heydt, G. T., *Computer Analysis Methods for Power Systems*, Macmillan, 1986.
- Hayt, William H., Jr. y Jack E. Kemmerly, *Engineering Circuit Analysis*, Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
- IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms*, IEEE Std. 100-1992.
- IEEE Red Book, *IEEE Recommended Practice for Electric Power Distribution*, Nueva York, Wiley Interscience, 1993.
- IEEE Brown Book, *IEEE Recommended Practice for Power System Analysis*, Nueva York, Wiley Interscience, 1990.
- Neuenschwander, John R., *Modern Power Systems*, Scranton, PA., International Textbook, 1971.
- Stagg, Glenn y Ahmed H. El-Abiad, *Computer Methods in Power Systems Analysis*, Nueva York, McGraw-Hill, 1968.
- Stevenson, William D., Jr., *Elements of Power System Analysis*, 4a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1982.
- Stott, B. y O. Alsac, "Fast Decoupled Load Flow", *IEEE Trans. PAS-93*, 859-869, 1974.
- Van Ness, J. E. y J. H. Griffin, "Elimination Methods for Load Flow Studies", *AIEE Trans. Pas-80*, 299, 1961.

ÍNDICE

<i>Prefacio</i>	11
<i>Capítulo I. Introducción</i>	13
I.1. El sistema de potencia en estado estable. Modelado del sistema	13
I.2. Estados de operación de un sistema de potencia	13
I.3. Solución de problemas en ingeniería	15
<i>Capítulo II. Matrices de incidencia y de red</i>	17
II.1. Topología de redes	17
II.2. Gráficos de una red	18
II.3. Matrices de incidencia	19
II.3.1. Matriz de incidencia elemento-nodo \hat{A}	20
II.3.2. Matriz de incidencia nodal (o de bus) A	20
II.3.3. Matriz de incidencia rama-trayectoria K	21
II.3.4. Matriz de incidencia conjunto cortado básico B	21
II.3.5. Matriz de incidencia a malla básica C	22
II.4. Matrices primitivas de red	22
II.5. Formación de matrices de red por transformaciones singulares	23
II.5.1. Ecuaciones de la red	23
II.5.2. Matrices de admitancia e impedancia nodal (de bus o de barra)	24
II.5.3. Matrices de admitancia e impedancia de rama	25
II.5.4. Matrices de admitancia e impedancia de malla	26
II.6. Ejemplo de formación de matrices de incidencia y de red	27
<i>Capítulo III. Algoritmos para la formación de matrices de red</i>	31
III.1. Introducción	31
III.2. Algoritmo para la formación de la matriz de impedancia nodal Z_{BUS}	31
III.2.1. Ecuación de comportamiento de una red parcial	31
III.2.2. Adición de una rama	32
III.2.3. Adición de un enlace	34
III.2.4. Reducción de Kron	36
III.3. Ejemplo de formación de Z_{BUS}	38

Índice

<i>Capítulo IV. Estudio de flujos de potencia</i>	45
IV.1. Introducción	45
IV.1.1. Etapas de un estudio de flujos	46
IV.2. Ecuaciones de flujos de potencia (EFP)	46
IV.2.1. Ecuaciones de los nodos	47
IV.2.2. Ecuaciones de flujos de potencia (EFP) en líneas	48
IV.3. Técnicas de solución	48
IV.3.1. Método de Gauss- Y_{BUS}	48
IV.3.2. Método de Newton-Raphson (utilizando Y_{BUS})	52
IV.3.3. Aproximaciones al método de Newton-Raphson	55
IV.3.4. Método iterativo de Gauss utilizando Z_{BUS}	55
IV.3.5. Método iterativo de Gauss-Seidel utilizando Z_{BUS}	55
IV.4. Nodos de voltaje controlado	55
IV.5. Ejemplo de cálculo de flujos de potencia	60
IV.6. Interpretación de resultados	66
 <i>Capítulo V. Estudio de cortocircuito</i>	 69
V.1. Introducción	69
V.2. Fuentes de la corriente de falla	69
V.2.1. Cortocircuito trifásico en las terminales de un generador síncrono	69
V.2.1.1. Corrientes de cortocircuito trifásico	70
V.2.1.2. Componente de corriente continua	70
V.2.2. Motores y condensadores síncronos	72
V.2.3. Motores de inducción	72
V.2.4. Sistemas de servicio eléctrico	72
V.3. Tipos de fallas a considerar	72
V.4. Transitorios por switcheo múltiple	73
V.5. Aplicación de las condiciones impuestas	73
V.6. Falla trifásica	74
V.7. Conclusiones	75
V.8. Procedimiento detallado	77
V.8.1. Primera red	78
V.8.2. Segunda red	80
V.8.3. Tercera red	83
V.9. Fallas desbalanceadas	84
V.9.1. Falla monofásica a tierra (CC1FT)	84
V.9.2. Falla bifásica a tierra	86
V.9.3. Falla bifásica	87
V.10. Cálculo de las corrientes y voltajes en un cortocircuito usando una computadora digital	89
V.10.1. Fallas trifásicas	89
V.10.2. Simplificaciones en el cálculo computacional de fallas	92
V.10.3. Fallas desequilibradas	93
V.11. Ejemplo de cálculo para el estudio de cortocircuito	96
 <i>Apéndice 1. Valores en por unidad (p.u.)</i>	 103
<i>Apéndice 2. Componentes simétricas</i>	107

Índice

<i>Apéndice 3. Estimación de la corriente de cortocircuito trifásico y de línea a tierra en plantas industriales</i>	111
<i>Apéndice 4. Problemario</i>	117
<i>Bibliografía</i>	121

*Métodos computacionales para el análisis
de sistemas de potencia*

se terminó de imprimir en junio de 1997

en los talleres de Editorial Ducere,

S.A. de C.V., Rosa Esmeralda 3 bis,

col. Molino de Rosas, 01470 México, D.F.

El tiro consta de 1 000 ejemplares más sobrantes
para reposición.

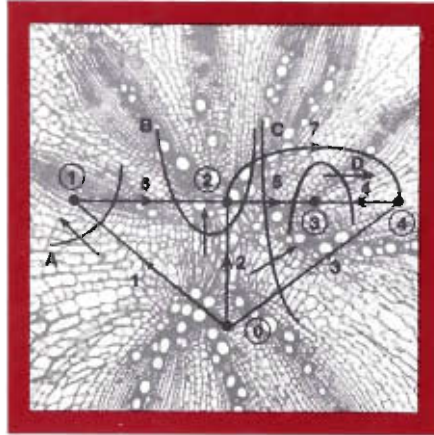
La composición tipográfica, la formación y el cuidado
editorial estuvieron a cargo de Sans Serif Editores,
S.A. de C.V., telfax 674 60 91.

Otros títulos en esta colección

- Patrick Staelens, *El trabajo de los menores*
Luis Rodríguez, *El diseño preindustrial*
José Dolores Juárez Cervantes, *Sistemas de distribución de energía eléctrica*
Rafael Quintero, *Electrónica física*
Adalberto Cantú Chapa, *Análisis de diseño con diodos y transistores*
Mariem Henaine-Abed, *Planeación y control de la producción*
José Vega Luna y Gerardo Salgado Guzmán, *Prácticas de laboratorio de sistemas digitales*
Ana Lilia Laureano, *Programación orientada a objetos: un enfoque con tipos abstractos*
Juan González Márquez, *Introducción al derecho bancario mexicano*
Violeta Múgica y José de Jesús Figueroa, *Contaminación ambiental, causas y control*

Textos de próxima aparición

- Tomás David Navarrete González y José Ángel Rocha Martínez, *Colección de problemas resueltos para el curso de energías mecánica y eléctrica*
Rafael López Bracho, María Paula Ortuño Sánchez, Felipe Carrillo Romero y María Teresa Rodríguez Martínez, *Paquete computacional "Optimización en redes (versión 2.0) para Windows"*
Raymundo López Callejas, Juan Ramón Morales Gómez, Mabel Vaca Mier, Araceli Lara Valdivia y David Sandoval Cardoso, *Problemario de mecánica de fluidos*
María Berenice Guadalupe Quintana Díaz, Margarita Beltrán Villavicencio y María de Lourdes Delgado Núñez, *Introducción a la ingeniería química*
José Ignacio Vega Luna, Gerardo Salgado Guzmán y Roberto Sánchez González, *Organización de máquinas digitales*
Fabricio Vanden-Brœck, *El diseño de la naturaleza o la naturaleza del diseño*
Jorge Rodríguez Martínez, *Visión general del tema de la calidad y el diseño industrial*
-



Los modernos sistemas de potencia están constituidos por miles de nodos y elementos. Los valores de carga global están en el orden de gigavolts-amperes, y los valores de voltaje de transmisión en cientos de kilovolts. La única manera práctica de describir un circuito eléctrico tan complejo es a través del almacenamiento computacional de vectores y matrices. Sin exageraciones, puede afirmarse que los modernos sistemas de potencia constituyen los sistemas más grandes y complejos que el hombre pretende tener bajo su control.

Esta obra se centra principalmente en los métodos vecto-matriciales del análisis de sistemas industriales y de potencia, particularmente en aquellas técnicas según las cuales la solución puede hallarse mediante el empleo de la computadora. Los temas fundamentales que trata son el modelado, los flujos de potencia y el cortocircuito. El libro puede ser utilizado como texto en cursos de análisis de sistemas de potencia y servir como referencia básica a ingenieros encargados de la operación de sistemas.