Relato conciso sobre matemática básica

Francisco Ramón Salazar Velasco
José Miguel Salazar Montiel
Carlos Zubieta Badillo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

Sección de Producción y Distribución Editoriales

Relato conciso sobre matemática básica

Francisco Ramón Salazar Velasco
José Miguel Salazar Montiel
Carlos Zubieta Badillo

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Del. Azcapotzalco
C. P. 02200
México, D. F.

Francisco Ramón Salazar Velasco
Jose Miguel Salazar Montiel
Carlos Zubieta Badillo

Relato conciso sobre matematica basica
ISBN. 978-970-31-0936-8

1ª. Edición, 2009

Impreso en Mexico

CONTENIDO

Tú sabes muy bien que este libro fue escrito para ti,
no lo eches en saco roto.

En recuerdo de:

José, Benigna,
Ewen, Alexandra, John Douglas, Isabella,

Benito, Mercedes, Melchor, Dolores, Guadalupe, Rufina,
Richard James, Anne, Edward, Mary Ann,

Luis, Marina, José, Victoriana, Casimiro, Teresa,
Agustín, Bernardina, Miguel, Eulalia, Donald, Margaret, John, Mary,

Manuel, Concepción, Federico, Concepción, Juan, Ignacia, Damián, María Jesús,
Rafael, Rafaela, José del Carmen, Margarita, John, Ann,

Joaquín Genaro, María, Gerardo, María Eugenia,
Ramón, Paula, Duncan, María Teresa.

Daniel Nicolás, Estela,
Ramón, Elisa.

Daniel Gerardo y
Yoya

Porque sin ustedes nada.

Pitágoras

Fue Pitágoras quien llevó a la geometría a su perfección, después de haber descubierto Moeris los inicios de los elementos de está ciencia, tal como dice Anticleidas en el segundo libro de la *Historia de Alejandro*. Afirma que Pitágoras se dedicó particularmente al aspecto aritmético de la geometría, y que descubrio los intervalos musicales del monocordio; no descuido tampoco la medicina. Apolodoro el aritmético dice que sacrifico a los dioses al encontrar que el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto. Hay un epigrama que dice así:

Como al encontrar Pitágoras
la famosa figura
por la cual ofreció
el noble sacrificio.

Diógenes Laercio

Prefacio

Más allá de un libro de matemáticas se busca orientar al lector en general sobre la ubicación histórica de los conocimientos de cultura general en matemáticas correspondientes a nivel medio y medio superior. Además con este libro se pretende orientar a los estudiantes sobre los conocimientos básicos en matemáticas que deben saber al concluir el nivel medio superior para el buen desempeño en sus cursos de matemáticas a nivel licenciatura. Es una guía para que personalmente se responsabilicen de cubrir lagunas y resuelvan dudas.

Antecedentes

El deterioro que ha sufrido la educación pública, así como todas las demás instituciones del país producto de todos estos años de crisis económica, se ha reflejado en una continua y ya muy preocupante baja en el nivel académico con que llegan los estudiantes del nivel medio a la universidad.

A nivel universitario están presentes contradicciones. Así, los profesores están en el deber de impartir los cursos correspondientes y los alumnos en la obligación de asimilar la enseñanza que se les brinda. Sin embargo, la proporción de conclusión del objetivo anterior se ve en dificultades cada vez mayor. La demanda de educación ha disminuido de manera preocupante y el avance en las carreras profesionales muestra indices igualmente preocupantes.

Sin entrar en la discusión de nuestra responsabilidad como profesores universitarios porque es un problema que no esta en los objetivos del presente texto. Si me interesa establecer la contradicción constante entre impartir los temas de los cursos o tratar de llenar los huecos que presentan los alumnos. Las respuestas a la contradicción van entre los extremos de dedicar a suplir las deficiencias hasta ignorarlas y dedicarse estrictamente a los temas del curso. Aun cuando nuestra obligación tiene más que ver con la segunda postura no es posible que ignoremos esta, cada vez mayor, deficiencia y nos quedemos de espectadores ante el fracaso de tantos alumnos para salir adelante en sus estudios.

Destinatarios

Este libro se dirige a estudiantes de nivel medio, medio superior y aquellos que inician una carrera universitaria; asi como de manera especial al público en general interesado en tener una cultura general de matemáticas más allá de las cuatro operaciones aritméticas con interés en la ubicación histórica de los aportes matemáticos y contexto en que surgieron.

A los estudiantes de nivel medio les sirve de marco de referencia para conocer los conceptos mínimos que deben aprender para el buen desempeño de sus estudios en matemáticas y relacionados. A los estudiantes que inician una carrera universitaria, es un indicador de los conceptos que ya deberian saber, para en caso contrario, ponerse al dia. A quienes buscan una respuesta rápida ante una duda concreta.

Propósito

Con la intención de ayudar un poco a resolver la mencionada contradicción presento este texto de "Matemáticas preuniversitarias" para que los alumnos tengan una referencia de la base mínima necesaria que supuestamente deben traer del nivel medio y medio superior y están en la obligación de conocer para salir adelante en sus cursos de matemáticas de cualquier profesión que elijan.

Contenido

El presente texto abarca desde las propiedades de los números y sus operaciones hasta los conceptos generales de las cónicas desde el punto de vista de la geometría analítica, incluyendo los conceptos en álgebra desde operaciones con polinomios hasta ecuaciones algebraicas, en geometría áreas y ángulos, en trigonometría las funciones trigonométricas y las principales identidades.

Además se anexan el principio de inducción matemática, descomposición en fracciones parciales, tablas de las principales funciones trigonométricas en función de ángulos principalmente en el sistema circular, un formulario con todas las fórmulas aplicables en el mismo texto aunque también incluye fórmulas de derivadas e integrales. En todos los temas incluye los métodos de solución incluso, en muchos casos, desglosados paso a paso, asi como ejemplos de cada uno y listas con ejercicios y problemas.

Como fue la motivación de iniciar este libro, especialmente deseo que el presente texto sea una herramienta de los alumnos de primer ingreso para mejorar su desempeño en los cursos de matemáticas.

Para terminar, quiero agradecer especialmente al editor por exhibir su talento y profesionalismo en la laboriosa tarea de llevar a la realidad un libro.

Capítulo 1. NÚMEROS Y OPERACIONES

En los orígenes del hombre surge la necesidad de contar, así los primeros números que se utilizan son lo que ahora conocemos como números naturales que son el conjunto de números que, desde niños, valga la redundancia los usamos para contar.

Números naturales y enteros

Así, he aquí el conjunto de los números naturales: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

También podemos suponer que las primeras operaciones básicas que se hicieron fueron sin duda la suma y la multiplicación, de las cuales es importante destacar las siguientes:

Propiedades 1.1

$a+b=b+a$ (ley conmutativa en suma)

$a+(b+c)=(a+b)+c$ (ley asociativa en suma)

$ab=ba$ (ley conmutativa en multiplicación)

$a(bc)=(ab)c$ (ley asociativa en multiplicación)

$(a+b)c=ac+bc$ (ley distributiva de la multiplicación con la suma)

Observación: Estas propiedades valen para todos los números, no solo los naturales.

Estas propiedades expresan que podemos sumar y multiplicar sin fijarnos en el orden, que siempre podemos llevar cualquier cantidad de operaciones a la sucesión consecutiva de ellas y que no importa como asociemos la sucesión de operaciones.

Ejemplos 1.1

$5+8=13$	$2+(10+4)=2+14=16$	$5(2+7)=5(9)=45$
$8+5=13$	$(2+10)+4=12+4=16$	$5(2)+5(7)=10+35=45$
$7(6)=42$	$(2+4)+10=6+10=16$	$(9+3)4=(12)4=48$
$6(7)=42$	$5((8)(7))=5(56)=280$	$(9)4+(3)4=36+12=48$
	$((5)(8))(7)=40(7)=280$	

Cabe destacar que siempre que sumemos y multipliquemos con números naturales obtenemos números naturales

Una propiedad muy característica de los números naturales es el principio de inducción matemática el cual se incluye en el anexo 1.

Números enteros

Cuando restamos no podemos tomar números arbitrarios porque no necesariamente nos da números naturales. Claro que en principio no tiene sentido restar por ejemplo $3-5$ (tres menos cinco).

Sin embargo, conforme las relaciones humanas se han ido complicando puede empezar a tener sentido. Por ejemplo, si yo tengo sólo 3 pesos y tengo que comprar un artículo que vale 5 pesos, puedo pedir prestados 2 y comprar el artículo sin embargo al hacer el balance global, tengo que considerar que debo los 2 pesos y eso lo puedo representar por -2 pesos

Existen otros ejemplos de situaciones que nos llevan a requerir números negativos. En la escala de temperatura tenemos que el punto de congelación del agua es $0°C$ (cero grados centígrados). Temperaturas por debajo de ésta se tienen que representar mediante números negativos.

Así, los números negativos se originan esencialmente de la operación resta.

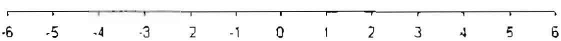
Ahora al considerar, además de los números naturales, a los respectivos negativos y el cero, se obtiene el conjunto de los números enteros

$$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Representación de los enteros en la recta numérica

Usando una línea horizontal, tomando un punto origen y una unidad de medida o escala, se ha convenido representar los números positivos hacia la derecha del origen y los negativos hacia la izquierda, he aquí la representación de los enteros en la recta numérica.

LOS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA



¿Cómo representamos en la recta numérica las operaciones de suma, multiplicación y resta?

Suma

Si sumamos enteros positivos es tal cual la operación se vio con los naturales.

$$(+6)+(+7)=+13$$

Si sumamos dos números negativos; por ejemplo debemos 5 pesos y tuvimos que pedir prestados otros 3 pesos si sumamos las deudas tenemos

$$(-5)+(-3)=-8$$

Así claramente el significado es que debemos 8 pesos.

Ahora si yo tengo la deuda de 5 pesos, pero me pagan por un trabajo 12 pesos la operación es

$$(-5)+(12)=+7=7$$

Entonces significa que ahora tengo 7 pesos a mi favor.

Para concluir las posibilidades con la suma consideremos que ahora a los 5 pesos que debo me pagan por una mercancía 2 pesos entonces tenemos lo siguiente

$$(-5)+(2)=-3$$

Así, si pago los dos pesos que me ingresaron ya sólo deberé 3 pesos.

En términos generales el método de sumar enteros se reduce a las siguientes reglas:

1. Si son de signo igual se suman y se considera el mismo signo.

$$(+3)+(+2)=5 \qquad (-7)+(-9)=-16$$

2. Si son de signo contrario "se restan" y se pone el signo del mayor.

$$(+12)+(-7)=5 \qquad (+16)+(-28)=-12$$

Observación: Es importante acompañar el signo al número, aunque se sobreentiende que si no lo pones el número es positivo. Si el número es negativo no se te olvide poner el signo.

Resta

Si estábamos a $4^{\circ}C$ y baja la temperatura $6^{\circ}C$ claramente la operación que conviene hacer es la resta de

$$(4)-(6)=-2$$

Si debemos 20 pesos y nos rebajan la deuda 12 pesos claramente ya sólo debemos 8 pesos, lo podemos representar como la siguiente operación

$$(-20)-(-12)=-20+12=-8$$

El método para restar enteros consiste en cambiar el signo del sustraendo y operar como en la suma.

Ejemplos 1.2

$$(5)-(2)=5+(-2)=3$$
$$(12)-(-8)=12+8=20$$
$$(-15)-(16)=-15+(-16)=-31$$
$$(-18)-(-21)=-18+21=3$$

Multiplicación

Una representación visual de la multiplicación se obtiene del área de rectángulos, que precisamente es

$$A = b \times h$$

Ejemplo 1.3

Multiplicar 9×3

El área de un rectángulo con 9 unidades de largo por 3 unidades de ancho, tiene un área de $(9)(3) = 27u^2$.

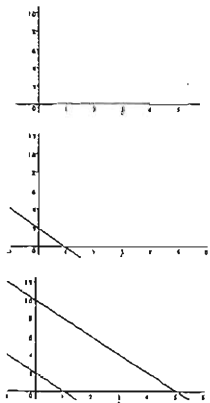
	9								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Lo realmente relevante de esta sección es la regla de multiplicación para los signos las cuales ilustraremos geométricamente.

Método 1 Pasos para multiplicar geométricamente.

1. Dados unos ejes establece las escalas respectivas
2. Establecemos el primer multiplicando (2) en el eje vertical y lo unimos con una recta al 1 del eje horizontal.
3. Trazamos una paralela que pase por el segundo multiplicando (5) establecido en el eje horizontal.
4. Obtenemos el resultado en el eje vertical (10).

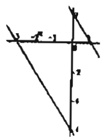
Ejemplo 1.4 Multipliquemos $(+2)(+5)$



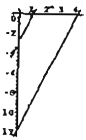
Resultado de la multiplicación es:

$$(+2)(+5) = +10.$$

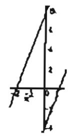
Ejemplos 1.5



$(+2)(-3)=-6$



$(-3)(+4)=-12$



$(-4)(-2)=+8$

Método 2, ley de los signos

El método para determinar el signo del producto de la multiplicación de dos números enteros es:

1. Si son de signo igual entonces el producto es positivo.
2. Si son de signo contrario el producto es negativo.

$$(+)(+) = +$$
$$(+)(-) = -$$
$$(-)(+) = -$$
$$(-)(-) = +$$

División

Generalmente en el proceso de dividir dos enteros no obtenemos un entero. Sin embargo, lo podemos expresar como un entero y un residuo; proceso que se enseña desde la primaria y que aquí establecemos como el conocido algoritmo de la división.

Teorema 1.1 Algoritmo de la división

Si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen dos enteros q y r, únicos, tales que

$a = bq + r$, con $0 \leq r < |b|$.

$$\begin{array}{r} \textit{cociente} \\ \textit{divisor}\,\overline{)\textit{dividendo}} \\ \textit{residuo} \end{array}$$

Aun cuando no es nuestro interés mostrar los temas de matemáticas desde el rigor de teoremas, si es importante conocer los nombres y la forma conocida de ciertos conceptos.

Ejemplos 1 6

$\begin{array}{r} 6 \\ 3\overline{)20} \\ 2 \end{array}$	Al hacer una división tienes el dividendo ¡Error! No se pueden crear objetos modificando codigos de campo.. el divisor (3), el cociente (6) y el residuo (2). Aplicando el teorema puedes expresar que $20=(3)(6)+2$, donde en este caso el residuo es menor que el divisor, $0\le 2<3$.
$\begin{array}{r} -3 \\ -4\overline{)14} \\ 2 \end{array}$	En este caso $14=(-4)(-3)+2$ con $0\le 2<\lvert -4\rvert=4$.
$\begin{array}{r} 0 \\ 4\overline{)3} \\ 3 \end{array}$	Ahora $3=(4)(0)+3$ con $0\le 3<4$. También en situaciones poco frecuentes, desde el punto de vista del cociente de enteros, se cumple el algoritmo de la división.
$\begin{array}{r} -2 \\ 18\overline{)-25} \\ 11 \end{array}$	Aquí obtenemos $-25=(18)(-2)+11$ con $0\le 11<18$. Debes tener cuidado en los casos en donde el divisor es positivo y el dividendo negativo porque no es como habitualmente divides y la exposición aquí es simplemente para ver que se satisface el algoritmo de la división.
$\begin{array}{r} -1 \\ 18\overline{)-25} \\ -7 \end{array}$	Si dividiéramos de manera habitual no correspondería con el algoritmo de la división En la manera usual esta división es como en este segundo caso.

Propiedades de los números enteros

Veremos, a continuación, para satisfacer requerimientos en ciertas operaciones algebraicas, algunas propiedades de los números enteros.

Números primos

Los números primos se definen como aquellos números que solo son divisibles por cuatro números Esto es, entre si mismo, el negativo de si mismo, el 1 y el -1.

Ejemplo 1.7

2, -3, 5, 7, 11,-13,..

Observaciones:

1. El 1 y el -1 no son divisibles por cuatro números y por eso no se consideran primos.
2. En términos prácticos sólo se busca los primos positivos.

Por oposición los números compuestos es decir no primos son aquellos que tienen más divisores aparte de los cuatro básicos mencionados.

Ejemplo 1.8

El 6 tiene además del 1 y el 6 tiene al 2 y al 3 de divisores.

Si un número es divisor de otro, inversamente el otro es múltiplo del primero; el múltiplo lo contiene como factor. Así el 6 es múltiplo del 2 y 3, ya que $6 = 2(3)$.

Criterios de divisibilidad

1. Claramente todo número es divisible entre 1.
2. Todo número con último dígito par es divisible entre 2.

   542. Como su último dígito es 2 el cual es par entonces 542 es divisible entre 2. De hecho, $542 = 2(271)$.

   830. Igualmente su último dígito es 0 (cero), por tanto 830 es divisible entre 2. Así, $830 = 2(415)$

   1827 no es divisible entre 2 porque su último dígito, 7, no es par.

3. Si la suma de los dígitos de un número es múltiplo de 3 entonces el 3 es divisor del número.

   501 es divisible entre 3 porque la suma de sus dígitos $5+0+1=6$ es múltiplo de 3. Verificando $\begin{array}{r} 167 \\ 3\overline{)501} \\ 20 \\ 21 \\ 0 \end{array}$.

4. Si el último digito del número es 5 o cero entonces es divisible entre 5.

   1395. Como su último dígito es 5, entonces 1395 es divisible entre 5

5. Un número es divisible entre 11 si la diferencia entre la suma de los dígitos de posición par y la suma de los dígitos de posición impar es múltiplo de 11.

   1134529. La suma de los dígitos de posición impar es $1+3+5+9=18$, la suma de los dígitos de posición par es $1+4+2=7$, la diferencia es $18-7=11$ el cual es múltiplo de 11 entonces 1134529 es múltiplo de 11

6. Si dos números son divisores de un tercero entonces el producto de estos también es un divisor.

   El 3 es divisor de 167475 ya que la suma de sus dígitos es 30 el cual es múltiplo de 3. También el 11 es divisor de 167475, la suma de los dígitos de posición impar es $6+4+5=15$, la suma de los dígitos de posición par es $1+7+7=15$, la diferencia es $15-15=0$ el cual es múltiplo de todos los números en particular del 11 Por lo tanto el 33 es divisor de 167475.

Teorema 1.2 Fundamental de la aritmética

Todo número entero se puede expresar como el producto de factores primos en forma única.

Ejemplo 1.9

132 se puede expresar como $132 = 2(66)$, que nuevamente se puede expresar como $132 = 2(2)(33)$, llevando el proceso a sus factores primos se tiene $132 = 2(2)(3)(11)$. Es más fácil realizar los procesos para ir subdividiendo un número mediante tablas como la siguiente.

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

Observación: Es razonable ir buscando los factores más pequeños primero como se realizó en el ejemplo anterior.

Cuando requerimos de números primos más grandes determinarlos no es simple ya que no presentan ninguna regularidad. Un método adecuado lo estableció Eratóstenes[1] y precisamente se conoce como:

Criba de Eratóstenes

Para formar una tabla de números primos se establecen todos los números naturales desde el 1 hasta el número deseado, mediante el siguiente:

Método 3. Criba de Eratóstenes, obtención de números primos.

1. Primero se cancela el 1.
2. Cancelar todos los múltiplos de 2, pero no el 2.
3. Igualmente se hace con los múltiplos de cada primo, respetando cada primo.
4. El proceso termina con el primo inmediato menor a la raíz cuadrada del número deseado.
5. Todos los números que no fueron eliminados son primos.

[1] Eratóstenes nació en Cyrene (Libia) en 276 a.n.e., muere en Alejandría, Egipto el 194 a.n.e. Contemporáneo de Arquímedes con el que intercambió información y resultados científicos. Se dedicó a muchas disciplinas tanto científicas como humanísticas. Hacia el 255 a.n.e. fue el tercer director de la Biblioteca de Alejandría. Ideó una forma de determinar los primeros números primos al establecer la conocida Criba de Eratóstenes y desarrollo un método geométrico para calcular la longitud del meridiano terrestre. (Ver Eratóstenes, medición de la Tierra, Pág. 74.)

Ejemplo 1.10

Encontrar los primos hasta el 100.

Como el máximo primo menor a la raíz de 100 es 7, el proceso se hace con los primos 2, 3, 5 y 7.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los primos menores a 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

En ciertas operaciones se requiere encontrar múltiplos comunes y en particular es más recomendable usar el mínimo común múltiplo.

Método 4, obtener el m.c.m.	Ejemplo 1.11 encontrar el m.c.m de 4 y 5.
1. Encontrar los múltiplos de los números deseados es dar la tabla de multiplicar de cada número.	Los primeros 10 múltiplos de 4. 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40. Algunos de los múltiplos del 5. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.
2. Determina los comunes, es decir, aquellos en que coinciden.	Los múltiplos comunes en estas listas son: 20 y 40
3. Escoge el mínimo.	Entonces el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 4 y 5. $[4,5]=20$.

Observación: Un múltiplo inmediato es el producto de los números, entonces el mínimo es menor o igual a este producto.

El m.c.m. de varios números descompuestos en sus factores primos es igual al producto de todos los factores primos elevados cada uno al mayor exponente presente en cualquiera de ellos.

Método 5, determinar el m.c.m.	Ejemplo 1.12
1. Descompón cada número en sus factores primos.	Obtener el m.c.m. de 12, 18 y 40. $12 = 2^2 * 3$ $18 = 2 * 3^2$ $40 = 2^3 * 5$
2. Considera todos los primos	2, 3 y 5.
3. Toma el exponente mayor de cada primo.	$[12,18,40] = 2^3 * 3^2 * 5 = 360$

Máximo común divisor (m.c.d.)

Este es útil en algunos procesos algebraicos como encontrar factores comunes. El m.c.d. de dos o más números es el número más grande que simultáneamente es divisor de todos esos números.

Método 6, determinar el m.c.d.	Ejemplo 1.13
1. Descompón cada número en sus factores primos.	Obtener el m.c.d. de 225 y 750. $225 = 3^2 * 5^2$ $750 = 2 * 3 * 5^3$
2. Escoge los primos comunes.	3 y 5.
3. Considera el exponente menor de cada primo común.	$(225,750) = 3 * 5^2 = 75$

No siempre es fácil encontrar los factores primos el siguiente método es una forma alternativa mediante restas sucesivas que llevan al m.c.d. Este método esta basado en el algoritmo de Euclides[2] el cual usa sucesivamente el algoritmo de la división a partir de dos números iniciales y luego lo realiza repetidamente entre el menor y el residuo que queda, terminando cuando no hay residuo, es decir con residuo cero.

Una variante simplificada del algoritmo de Euclides se usa en el método 7 para encontrar el m.c.d. de dos números.

[2] En el año 331 a.n.e. Alejandro Magno decidió fundar en Egipto la ciudad de Alejandría. Así fue establecida cerca de la desembocadura del Nilo, la construcción de la ciudad la dirigió el Arquitecto griego Dinócrates. En poco tiempo, por su importancia en las rutas comerciales, Alejandría se convirtió en el centro de la cultura del mundo de entonces. Hacia el año 300 a.n.e. el rey Tolomeo I, que se quedo con la parte de medio oriente y África del imperio de Alejandro Magno, crea el Museo. Este complejo permitió a los intelectuales de la época concentrar y difundir el conocimiento con gran actividad creadora. Euclides fundador de la escuela de matemáticas en Alejandría escribió numerosas obras: los *Datos*, la *División de las Figuras*, los *Fenómenos*, la *Óptica* y los *Elementos* en trece libros; que han llegado hasta nosotros. Se sabe de otras obras de Euclides, por referencias, que se han perdido. Indudablemente el de mayor influencia, los *Elementos*, se ha dejado sentir a través de miles de años y ediciones, la primera de las cuales se publicó hasta 1482. En el libro VII de los *Elementos*, Euclides para demostrar la proposición 1 y 2 hace uso de un procedimiento que se conoce como *Algoritmo de Euclides*.

Método 7. Algoritmo de Euclides, para encontrar el m.c.d.

1. Resta los números.
2. Toma el resultado y réstalo con el menor
3. Repite el paso anterior hasta que los números a restar sean el mismo, ese es el m.c.d..

Ejemplo 1.14

Obtener el m.c.d. de 45 y 150.

$$\begin{array}{r} 150 \\ -45 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ -45 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -45 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ -15 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ -15 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ -15 \\ \hline \end{array} \qquad (45,150)=15$$

Ejercicios 1

Verifica las leyes conmutativas de:	Verifica las leyes asociativas de:	Verifica la ley distributiva
1) $7+12$	5) $(7+6)+12$	9) $(5+3)2$
2) $17+3$	6) $3+(5+7)$	10) $(7+6)3$
3) $(5)(4)$	7) $7(3(5))$	11) $7(8+3)$
4) $3(13)$	8) $(9(8))4$	12) $8(2+5)$

13) Plantea, al menos, una situación diferente a las expuestas donde se requiere usar números negativos.

Realiza las siguientes operaciones con números enteros

14) $(21)+(-26)=$ 18) $(6)-(4)=$ 22) $(-4)(25)=$ 26) $(-2)(+3)(-6)=$

15) $(-45)+(54)=$ 19) $(14)-(-7)=$ 23) $(-12)(-9)$ 27) $(-4)(-3)(-5)=$

16) $(16)+(-8)=$ 20) $(-25)-(38)=$ 24) $(18)(-3)$ 28) $(+4)(-5)(+6)$

17) $(-22)+(5)=$ 21) $(-27)-(-42)=$ 25) $(7)(12)$ 29) $(-5)(-3)(2)(-4)-$

Mediante el método geométrico encuentra el producto en los siguientes casos.

30) $5(-3)$ 31) $-4(2)$ 32) $-3(-6)$ 33) $7(2)$

Usando el algoritmo de la división expresa el dividendo en términos de los demás elementos.

34) $8\overline{)35}$ 35) $-5\overline{)78}$ 36) $-12\overline{)-54}$ 37) $21\overline{)-88}$

Encuentra los divisores de los siguientes números.

38) 21 39) 45 40) 100 41) 217 2.213478

Dada cada pareja de números determina si el primero es divisor del segundo usando los criterios de divisibilidad.

42) $\{2, 213478\}$ 43) $\{3, 4775765\}$ 44) $\{5, 1895785635\}$ 45) $\{11, 27474616\}$

46) $\{5, 8575630\}$ 47) $\{2, 85763627\}$ 48) $\{11, 743259\}$ 49) $\{3, 745683\}$

Busca criterios de divisibilidad para los siguientes números:

50) 4 51) 6 52) 8 53) 10 54) 12 55) 33

56)Hasta que primo debes verificar para obtener los primos menores a 200.

57)Determina todos los primos menores a 200

Usa el método 1 para determinar el m.c.m. de los siguientes números:

58) $[2, 6, 9]$ 59) $[18, 10]$

Usa el método 2 para determinar el m c m de los siguientes números:

60) $[10, 15, 36]$ 61) $[63, 54]$

Usa la descomposición en números primos, el método 1, para encontrar el m.c.d. de los siguientes pares de números:

62) $(20, 50)$ 63) $(18, 10)$

Usando el algoritmo de Euclides, el método 2, determina el m.c.d. de los siguientes números:

64) $(60, 25)$ 65) $(39, 91)$ 66) $(1940, 2134)$ 67) $(3428, 1280)$

Números racionales

Conforme se fue desarrollando la humanidad la necesidad de calculos más complejos debido a las grandes construcciones y también al desarrollo de la agricultura, empieza a ser fundamental subdividir o fraccionar y los números enteros empiezan a mostrar su insuficiencia y es así como nacen los números racionales, en particular los fraccionarios, los cuales ya se usaban en la región Mesopotamica como fracciones de 60, es decir fracciones en donde el denominador es 60. Los egipcios usaban solo fracciones donde el numerador es 1, por ejemplo $\frac{8}{15}$ lo expresaban como $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$. La notación como fracción que actualmente usamos se debe a Fibonacci[3]

$$Q=\left\{ m \;/\; m=\frac{p}{q},\ donde\ p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Los números racionales es el conjunto de números que son el cociente de dos enteros. De hecho, los números racionales surgen propiamente del proceso de dividir.

---

[3] Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, al cual se debe la introducción de la notación decimal desde la India y Arabia en Europa.

Notación como fracción

Todo número racional se puede expresar como una razón entre dos números enteros, por ejemplo $\frac{1}{6}, \frac{-1}{12}, \frac{4}{-21}, \frac{-2}{-5}$. Los números que usualmente manejamos son prácticamente sólo números racionales, incluso las computadoras por mucha precisión en última instancia usa números racionales.

Es muy importante aprender a operar los números racionales porque son los números de uso práctico común y el entendimiento del álgebra depende en gran medida de operar correctamente los números racionales.

Método 8. Localización de los números racionales en la recta numérica

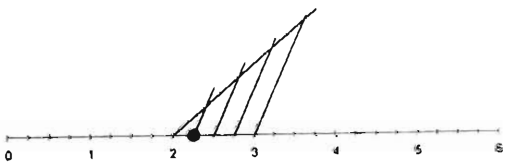
- Lo ponemos en su forma mixta, obtenemos la parte entera y la fracción propia.
- A partir del entero trazamos una línea oblicua auxiliar. Usando una unidad arbitraria y como nuestra fracción son cuartos, establecemos cuatro unidades. Unimos el extremo de todas las unidades con el siguiente entero.
- Trazamos paralelas para cada unidad y marcamos la fracción propia a partir del entero.

Ejemplo 1.15. Localizar $\frac{9}{4}$ en la recta numérica.

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

En este caso al 3.

A partir del 2. La unidad de 2 a 3 está dividida en cuartos.



Finalmente, la cantidad, cociente de dos enteros, queda expresada como el entero más la fracción propia establecida en la recta numérica.

Al expresar un racional como cociente de dos enteros puede ser mediante diversas parejas. Así, verifica que en la recta numérica $\frac{7}{2}$ y $\frac{14}{4}$ son el mismo punto.

Equivalencia de fracciones

Como cada número racional se puede representar con diversas fracciones. Debes tener el cuidado debido para no confundirte. El siguiente teorema te permite establecer cuando dos expresiones se refieren al mismo racional.

Teorema 1.3 Criterio de igualdad de fracciones

$$\text{Sean } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ dos fracciones entonces } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Este es un excelente criterio para saber cuando dos fracciones son iguales o diferentes

Ejemplos 1.16

I. $\frac{9}{12}$ y $\frac{15}{20}$, multiplicamos en diagonal $\begin{matrix}(9)(20)=180\\(12)(15)=180\end{matrix}$, entonces $\frac{9}{12}=\frac{15}{20}$.

II. $\frac{8}{12}$ y $\frac{65}{95}$, igualmente $\begin{matrix}(8)(95)=760\\(12)(65)=780\end{matrix}$ entonces $\frac{8}{12}\neq\frac{65}{95}$.

Aunque existen varias representaciones para cada número racional es posible hallar la forma más simple de representación la cual es llamada irreducible

Ejemplo 1 17

I. La expresión $\frac{8}{12}$ es posible sacarle mitad a ambos términos (numerador y denominador), $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$, y nuevamente podemos sacarle mitad y así $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ La cual ya no podemos simplificarla y sin embargo podemos ver que son iguales ya que $(8)(3)=(2)(12)=24 \Rightarrow \frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

II. La expresión $\frac{65}{95}$ no tiene mitad ni tercera y tendriamos que irnos hasta quinta es decir dividir entre cinco ambos términos $\frac{65}{95}=\frac{13}{19}$, la cual ya no puede ser simplificada.

Observación: Si las formas irreducibles de dos números no son iguales entonces se trata de números diferentes, ya que la forma irreducible es única

Podemos afirmar, sin aplicar el teorema, que $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\neq\frac{65}{95}=\frac{13}{19}$; porque sus formas irreducibles son diferentes.

Cuando las fracciones son diferentes resulta importante saber cual es mayor de las dos

Teorema 1.4 Criterio de desigualdad de fracciones

$$\text{Sean } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ dos fracciones entonces } \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

Observación Si b ó d son negativas se debe dejar el signo y sólo pasar el valor absoluto

Ejemplo 1.18

En el segundo ejemplo de los Ejemplos 1.16, Pág. 14, se obtuvieron números diferentes, entonces claramente podemos establecer que

$$760 < 780$$
$$(8)(95) < (12)(65)$$

entonces dividiendo entre el producto de los denominadores

$$\frac{(8)(95)}{(12)(95)} < \frac{(12)(65)}{(12)(95)}$$

y establecer que

$$\frac{8}{12} < \frac{65}{95}$$

Considerando racionales negativos

$$-\frac{5}{6} < \frac{3}{-4}$$

Efectivamente se cierto ya que

$$(-5)(4) < -(3)(6)$$
$$-20 < -18$$

Observación: No se pasó el signo del 4 dejando su signo negativo afectando al 3 en el lado derecho. Lo mismo sucede cuando se operó con el 6. ¿Si pasas con todo y signo que sucedería?

Suma y resta

La dificultad de sumar fracciones reside en que primero se debe expresar en la fracción común, es decir que el denominador sea el mismo. Veamos mediante un ejemplo los pasos para sumar.

Método 9. Suma de números racionales.

1) Expresar cada sumando en una fracción común, una forma es directamente el producto de los denominadores.

2) Realizar la suma o resta de las fracciones comunes.

3) Simplificar la fracción.

Ejemplo 1.19

$$\frac{5}{24} + \frac{12}{30} = \frac{(5)(30)}{(24)(30)} + \frac{(12)(24)}{(30)(24)}$$

$$\frac{5}{24} + \frac{12}{30} = \frac{150}{720} + \frac{288}{720} = \frac{438}{720}$$

$$\frac{5}{24} + \frac{12}{30} = \frac{438}{720} = \frac{219}{360} = \frac{73}{120}$$

Cuando se tiene varios sumandos resulta más conveniente el siguiente

Método 10, Suma de números racionales.

1) Establecer como denominador el m.c.m. de los denominadores. (usar el **Método 5**, página 10.)

2) Cada numerador se obtiene de dividir el denominador común entre el denominador de cada fracción por el numerador respectivo, considerar el signo de cada caso.

3) Sumar los términos del numerador y simplificar la fracción.

Ejemplo 1.20

$$\frac{7}{20}-\frac{3}{12}+\frac{2}{30}=\frac{\quad}{60}$$

$$\frac{7}{20}-\frac{3}{12}+\frac{2}{30}=\frac{21-15+4}{60}$$

$$\frac{7}{20}-\frac{3}{12}+\frac{2}{30}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

Multiplicación

Una forma geométrica de ilustrar la multiplicación es verlo como el área de un rectángulo donde cada lado es respectivamente la longitud de cada multiplicando. Veamos como también con fracciones es una forma adecuada de entenderlo.

Si queremos multiplicar $\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)$

Observemos en la figura que se forma un cuadro unitario (fondo más oscuro).

La unidad horizontal la dividimos en tercios y la unidad vertical en cuartos. Es un área unitaria y está dividida en 12 partes, entonces cada sección es $\frac{1}{12}$ y para el total se obtiene $(5)(7)=35$ de estos $\frac{1}{12}$, es decir hay $\frac{35}{12}$

Método 11, multiplicación de racionales.

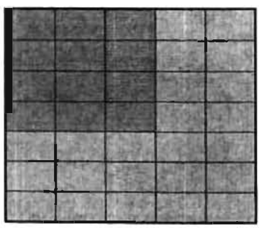
A final de cuentas la multiplicación de dos números racionales es sencillamente

$$\frac{(numerador)(numerador)}{(denominador)(denominador)}.$$

entonces $\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{(5)(7)}{(3)(4)}=\frac{35}{12}$.

1

1



$\frac{7}{4}$

$\frac{5}{3}$

División

Como ya se mencionó, los números racionales surgen propiamente del proceso de dividir. De hecho su nombre, números racionales, viene de razón o cociente de números enteros. Sin embargo, el método de división de los números racionales no es obvio. Veámosla como el proceso inverso de la multiplicación. Sabemos que $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{15}$ entonces debe ser que $\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$, pero observa que $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{(2)(3)}{(15)(1)}$ de aquí que el método de división de fracciones es $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ conocida vulgarmente como la regla o ley de la torta, porque asocia a los extremos por un lado con los medios por el otro.

Método 12, división de números racionales, regla de la torta.

1. Se multiplican los extremos, va arriba.
2. Se multiplican los medios, se pone abajo.

Ejemplo 1.21

$$\left(\frac{\frac{28}{12}}{\frac{7}{4}}\right)=\frac{(4)(28)}{(7)(12)}=\frac{112}{84}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

La manera más correcta de definir la división entre fracciones es a través de ver la división como el recíproco de la multiplicación, por ejemplo es lo mismo dividir entre 2 que multiplicar por $\frac{1}{2}$, así también se puede establecer como:

Método 13, división de números racionales, método del recíproco.

1. Se transforma la división como multiplicación por el recíproco.
2. Se efectúa la multiplicación.

Ejemplo 1.22

$$\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}$$

$$\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{21}$$

Finalmente, el método anterior se puede simplificar a lo que se conoce como la regla de la multiplicación cruzada.

Método 14, división de números racionales, regla de la multiplicación cruzada.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 1.23

$$\frac{28}{12}\div\frac{4}{3}=\frac{(28)(3)}{(12)(4)}=\frac{84}{48}=\frac{7}{4}$$

Notación decimal

Si nosotros efectuamos la división de cualquier número racional nos da un número que tiene una parte entera y una expansión decimal.

Ejemplos 1.24

1. $\dfrac{28}{12}$ nos lleva a la división $\begin{array}{r} 2.5 \\ 12\overline{)28} \\ 60 \\ 0 \end{array}$, entonces tenemos que $\dfrac{28}{12} = 2.5$

   que es su expansión decimal.

A veces la expansión decimal continúa indefinidamente

2. Sea $\dfrac{25}{12}$, efectuamos la división $\begin{array}{r} 2.0833 \\ 12\overline{)25} \\ 100 \\ 40 \\ 40 \\ 4 \end{array}$, así se sigue

   indefinidamente dando el número $2.08333\ldots$; cuando eso sucede se acostumbra denotar $2.08\overline{3}$ donde la barra denota que todo lo incluido en la barra se repite sucesivamente.

3. Dado $\dfrac{107}{33}$, dividimos $\begin{array}{r} 3.\overline{24} \\ 33\overline{)107} \\ 80 \\ 140 \\ 8 \end{array}$

Cuando efectuamos el cociente de cualquier número racional nos suceden dos posibles situaciones, se pueden observar en los Ejemplos 1.24, así se tiene que:

1. La expansión decimal termina. (Caso 1)
2. La expansión decimal se desarrolla indefinidamente, pero se presenta un ciclo repetitivo (Caso 2 y 3)

Paso de expansión decimal a cociente de enteros

Cuando tenemos un número racional en su expansión decimal es posible pasar a la forma cociente de enteros Veamos la forma mediante los siguientes.

Ejemplos 1.25

1. 32.125. Cuando la expansión es finita podemos multiplicar y dividir por alguna potencia de 10 adecuada, en este caso debe ser 1000

$$32.125\frac{1000}{1000}=\frac{32125}{1000}$$

así ya es un cociente de enteros, podemos también simplificar

$$32.125=\frac{32125}{1000}=\frac{6425}{200}=\frac{1285}{40}=\frac{257}{8}$$

2. $45.6\overline{21}$. Es recomendable nombrar al número para facilitar su manejo

$n=45.6212121\ldots$

Multiplicamos por 10 para ajustar el punto decimal al ciclo.

$10n=456.2121\ldots$

Multiplicamos por 100 ya que el ciclo es de dos cifras

$1000n=45621.2121\ldots$

Restamos los dos números de forma que se eliminan las expansiones

$1000n-10n=45621.2121\ldots-456.2121\ldots$

$990n=45165$

Expresamos como fracción a n llevándola a su forma irreducible

$$n=\frac{45165}{990}=\frac{9033}{198}=\frac{3011}{66}$$

Ejercicios 2

Establece en la recta numérica:

1. $\frac{5}{2}$ 2. $-\frac{7}{3}$ 3. $\frac{10}{4}$ 4. $-\frac{15}{4}$

Determina si los siguientes pares de números racionales son iguales o diferentes

5. $\frac{25}{45},\frac{5}{9}$ 6 $-\frac{7}{3},-\frac{21}{9}$ 7. $\frac{10}{4},\frac{15}{6}$ 8. $-\frac{15}{6},-\frac{12}{5}$

Lleva a la forma irreducible las siguientes fracciones

9 $\frac{10}{18}$ 10 $\frac{42}{154}$ 11 $\frac{364}{84}$ 12. $-\frac{165}{66}$

Ordena de menor a mayor las siguientes ternas de números racionales:

13 $\frac{10}{18}, \frac{6}{10}, \frac{45}{80}$ 14 $\frac{21}{77}, \frac{85}{305}, \frac{128}{466}$ 15. $\frac{91}{12}, \frac{279}{38}, \frac{916}{132}$ 16 $-\frac{173}{73}, -\frac{18}{7}, -\frac{9}{5}$

Realiza las siguientes sumas o restas de fracciones

17 $\frac{5}{9}+\frac{9}{16}=$ 18 $\frac{3}{7}-\frac{9}{14}$ 19 $\frac{31}{4}-\left(-\frac{50}{21}\right)=$ 20 $-\frac{17}{7}-\frac{18}{8}=$

Realiza las siguientes multiplicaciones de fracciones

21 $\left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{9}{16}\right)=$ 22. $\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{12}{15}\right)=$ 23 $\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{7}{20}\right)=$ 24 $\left(-\frac{7}{18}\right)\left(\frac{9}{5}\right)=$

Realiza las siguientes divisiones de fracciones usando la regla de la torta.

25 [illegible] $=$ 26 $\frac{-\frac{12}{15}}{4}=$ 27 $\frac{-6}{\frac{15}{2}}=$ 28 [illegible]

Haz las divisiones de fracciones mediante la regla de la multiplicación cruzada:

29 $\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=$ 30 $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\frac{11}{7}=$ 31. $\frac{5}{2}\div\left(-\frac{3}{11}\right)=$ 32. $\left(-\frac{12}{25}\right)\div\left(-\frac{6}{5}\right)=$

Expresa en su expansión decimal los siguientes números racionales

33 $\frac{105}{24}$ 34 $-\frac{21}{8}$ 35 $\frac{353}{99}$ 36 $-\frac{87}{21}$

37 Arquímedes estableció que el número π estaba entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$, ordena de forma creciente a los tres números y expresa las cotas establecidas en su expansión decimal para conocer la precisión que, del número π, Arquímedes tenía

Pasa a la forma de cociente de enteros los siguientes números racionales:

38 2.625 39 $-2.\overline{625}$ 40 -1.5231 41 $125.344\overline{3}$

Números irracionales

Aunque podemos encontrar por toda la recta numérica números racionales tan cerca como se quiera, es decir, los números racionales son densos en toda la recta numérica, sin embargo no la llenan. Hay una gran cantidad de números en la recta numérica que no son racionales, es decir que no se pueden expresar como cociente de enteros o equivalentemente que tienen una expansión decimal que se desarrolla indefinidamente pero no tienen ciclos repetitivos, a estos números que no se pueden expresar como racionales se les llama irracionales.

Arquímedes

Esencialmente solo los podemos operar de manera simbólica o mediante aproximaciones racionales.

Estos números surgen inicialmente al tratar de operar con exponentes y más específicamente los radicales (extraer raíces).

Exponentes enteros

Cuando multiplicamos de manera repetida por un mismo número una manera de denotar y simplificar la operación es usar el exponente.

Así $5^3 = 5\times 5\times 5$, se dice que 5 es la base y 3 el exponente.

Propiedades 1.2

1. La multiplicación con una misma base nos da la base elevada a la suma de exponentes.

$$7^3\times 7^4 = (7\times 7\times 7)\times(7\times 7\times 7\times 7) = 7^{3+4} = 7^7$$

En general se tiene

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

2. La división con una misma base nos da la base elevada a la resta de exponentes.

$$\frac{4^8}{4^5} = \frac{4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4}{4\times 4\times 4\times 4\times 4} = 4^3 = 4^{8-5}$$

Así tenemos

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Si el exponente es el mismo

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

pero la parte izquierda es un número dividido entre sí mismo por lo tanto es igual a 1.

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 \Rightarrow a^0 = 1 \text{ para cualquier base } a \neq 0.$$

4. Las fracciones se pueden expresar como

$$\frac{1}{6^2} = \frac{6^0}{6^2} = 6^{0-2} = 6^{-2}$$

La propiedad en general se puede expresar como

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

5. La potencia de una expresión en potencia resulta el producto de los exponentes

$$\left(4^2\right)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^6 = 4^{2\times 3}$$

La propiedad en general se expresa como

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

6. La potencia de un producto es el producto de las potencias.

$$(6\times 11)^2 = (66)^2 = 4356$$
$$(6\times 11)^2 = 6^2 \times 11^2 = 36\times 21 = 4356$$

De modo general tenemos

$$(ab)^n = a^n b^n$$

7. La potencia de un cociente es el cociente de las potencias. Esta propiedad es importante porque, entre otras cosas, nos permite calcular la potencia de cualquier número racional

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3^3}{5^3}$$

Generalizando tenemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Advertencia Es equivocado considerar que la potencia de una suma es la suma de las potencias

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

Ejemplo 1.26

$$(3+4)^3 = 7^3 = 343$$
$$3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91 \neq (3+4)^3$$

lo mismo sucede con la resta $(a-b)^n \neq a^n - b^n$

Exponentes en fracciones

En lo que acabamos de ver esencialmente se vieron los casos en que el exponente es entero ya sea positivo o negativo, ahora veremos cuando el exponente es una fracción.

La raíz de un número es la operación inversa de la potencia.

Si $3^2 = 9$ decimos que la raíz cuadrada de 9 es 3 y se denota como:

$$\sqrt[2]{9} = 3$$

ya que precisamente $3^2 = 9$

Advertencia: Una dificultad que presentan frecuentemente las raíces es que el resultado no es único.

Ejemplo 1.27

También $\sqrt[2]{9} = -3$ porque del mismo modo $(-3)^2 = 9$.

Es conveniente considerar ambos signos según sea el caso.

$$\sqrt[2]{9} = \pm 3$$

La inversa de la potencia al cubo se le dice raíz cúbica.

En los siguientes grados de la potencia se usa raíz y el ordinal respectivo.

Por ejemplo $\sqrt[5]{3125}$ se dice raíz quinta de 3125.

En general tenemos $\sqrt[n]{a}$ se dice raíz enésima de a

Observación: Está establecido que si no está indicado el grado de la raíz se sobrentiende que se trata de una raíz cuadrada $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

Otra forma de expresar una raíz es verlo como un exponente en fracción

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Propiedades 1.3

1. La raíz de un producto es el producto de las raíces.

$$10 = \sqrt[2]{100} = \sqrt[2]{(4)(25)} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{25} = (2)(5) = 10$$

Se satisface en general que

$$\sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

2. La raiz de un cociente es el cociente de las raices

$$\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{3}{7}$$

Estableciéndose asi que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3. La raiz de una raiz es la raiz de orden del producto.

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \left(\left(64\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = \left(\left(64\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{4} = 2$$

En general es válido

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

4. La combinación de potencia y raiz se puede expresar

$$\sqrt[2]{9^3} = 9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Asl es posible establecer que

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Advertencia. Es equivocado considerar que la raiz de una suma es la suma de las raices.

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1 28

$$\sqrt[2]{16+9} = \sqrt[2]{25} = 5$$

$$\sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{9} = 4 + 3 = 7$$

Los cuales son diferentes

Lo mismo sucede con la resta $(a-b)^n \neq a^n - b^n$.

Ejercicios 3

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
2. $\left(4\frac{1}{3}\right)^2$
3. $(2x)^4$
4. $(3a)^3(2a)^5$
5. $\left(\left(\frac{x^2z}{y}\right)^3\right)^2$
6. $\left(\frac{2c^2x^5}{cx^3}\right)^3$
7. $(3+5)^2$
8. 4^3-3^3
9. $\frac{(8+1)^2}{(3x)^2}$
10. $\frac{8^2+1^2}{(5x)^2}$

Del problema 11 al 14, expresa con exponente fraccionario.

11. $\sqrt[3]{7^4}$ 12. $\sqrt[3]{5^5}$ 13 $\sqrt[4]{3(4)^2}$ 14. $\sqrt[6]{3^5}$

Expresa, del problema 15 al 18, en forma de radical.

15. $7^{\frac{2}{3}}$ 16. $(27)^{\frac{2}{3}}$ 17. $5^{-\frac{1}{2}}$ 18 $(25)^{-\frac{1}{2}}$

Del problema 19 al 22, expresa en un solo radical.

19. $\sqrt{\sqrt{2}}$ 20. $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ 21. $\sqrt[4]{\sqrt{15}}$ 22. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{12}}}$

Calcula el valor, expresando el número como potencia y después simplificando.

Ejemplos 1.29. $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

23. $\sqrt[3]{64}$ 24. $\sqrt[3]{216}$ 25. $\sqrt[4]{2401}$ 26. $\sqrt[5]{243}$

Encuentra entre que enteros está cada expresión

Ejemplos 1.30.

$$\sqrt[4]{810}=\sqrt[4]{5^4+185}<\sqrt[4]{6^4}$$

Está entre 5 y 6

27. $\sqrt{60}$ 28. $\sqrt[3]{300}$ 29. $\sqrt[4]{9000}$ 30. $\sqrt[3]{95}$

Simplifica las expresiones siguientes

Ejemplos 1.31

$$\sqrt{128}=\sqrt{2^7}=\sqrt{2(2)^6}=2^3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

31. $\sqrt{147}$ 32 $\sqrt{1575}$ 33. $\sqrt{108}$ 34. $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$

Cuando una expresión donde el denominador presenta un radical, se dice que se racionaliza cuando se pasa a una expresión equivalente pero que presenta un denominador racional

Racionaliza las siguientes expresiones

Ejemplos 1.32 $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

35. $\frac{5}{\sqrt{90}}$ 36. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ 37. $\frac{5x}{\sqrt{x}}$ 38. $\frac{18}{\sqrt{3a^3}}$

Resuelve los siguientes problemas

39. Se cuenta que uno de los antiguos poetas trágicos hacia aparecer en escena a Minos en el momento en que se construía la tumba de Glauco, y, al observar que sólo medía cien pies por cada lado, dijo "Es un espacio muy pequeño para sepulcro de un rey; duplicadla conservando su forma cúbica, duplicando cada lado" Es evidente que se equivocaba porque duplicando los lados de una figura plana se cuadruplica, mientras que una sólida se octuplica, y entonces se propuso a los geómetras la cuestión de duplicar una figura sólida dada conservando su forma, y este problema se llamó duplicación del cubo. Se cuenta también que, más tarde, los de Délos, obligados por el oráculo a duplicar el altar, tropezaron con la misma dificultad y entonces enviaron embajadores a los geómetras que, con Platón, frecuentaban la Academia, para que resolvieran la cuestión Así también, este problema es conocido como problema de Délos o problema délico.

Aristocles de Atenas, apodado Platón por su ancha espalda. Platón funda en el año 387 a.n.e la famosa Academia de Atenas.

Aunque este es un problema que los geómetras no han podido resolver con las restricciones a las que estaban sometidos los griegos Aceptando ya los números irracionales en particular las raíces de cualquier grado, me podrías decir ¿cuánto debe medir el lado de un cubo para que sea el doble de volumen que otro, digamos de lado $1\ m$ y volumen $1\ m^3$?

40 Un terreno cuadrado de $1296\,m^2$ de superficie se quiere cercar con malla ciclónica y postes cada 9 metros. La malla tiene un costo $23 por metro y cada poste cuesta $48 ¿Cuánto cuesta cercarlo?

Sistemas y notaciones de numeración

Sistema decimal de numeración

Aunque implícitamente hemos estado usando el sistema decimal porque es el que rige y se nos enseña desde niños para contar, esencialmente todo lo dicho es independiente del sistema de numeración que se use. Vamos a establecer algunas particularidades del sistema decimal y por contraste usaremos otro sistema, que por la importancia que va adquiriendo será, el sistema binario

Lo más importante del sistema decimal es que solo se usan diez símbolos,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

y con solo estos es posible representar números tan grandes como nuestras limitaciones nos lo permitan. Lo anterior es posible porque el sistema decimal es un sistema relativo, lo que significa que el valor de la cifra usada tiene un valor según la posición. Así en los números 895 y 239, el nueve que se encuentra presente en ambos números mientras que en el primero vale noventa en el segundo vale nueve y esta diferencia es simplemente por la posición que ocupa.

Los sistemas no relativos como el sistema romano de numeración resultan inconvenientes para operar los números, simplemente trata de hacer la multiplicación, digamos, de $(CCXCVI)(MCXLIX)$

En el fondo la posición que ocupa cada cifra representa la cifra multiplicada por una potencia de 10. El número 2895.34 es una simplificación de $2\times10^3+8\times10^2+9\times10+5\times10^0+3\times10^{-1}+4\times10^{-2}$ que es una combinación de diversas potencias de 10.

Es posible usar cualquier base, tenemos el sistema base 20 que se uso en América prehispánica, los babilonios usaron un sistema con base en 60 el cual increíblemente subsiste tanto en el sistema de medida del tiempo como en el sistema de ángulos con base en grados.

Por qué usamos el 10, quizá la única explicación es que tenemos 10 dedos, con los que nos ayudamos a contar. Al margen de las razones el hecho es que es el sistema que usamos y aparentemente el más extendido, hasta ahora. El Sistema Internacional (SI) de pesos y medidas usa principalmente un sistema decimal. Puedes consultar información del SI en Internet en las páginas:

Centro Nacional de Metrologia http://www.cenam.mx/siu.asp

Curso de física de la Universidad del País Vasco

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/unidades/unidades.htm

Sistema binario

Dado el avance en las computadoras ya no es extraño que las personas conozcan que las computadoras usan el sistema binario para sus operaciones internas. Para los estudiantes de ingeniería resulta particularmente importante tener un adecuado manejo del uso y significado del sistema binario y la conversión de éste al sistema decimal y viceversa.

El sistema binario como su nombre lo indica está basado en el 2 (dos). Es un sistema con sólo dos cifras $\{0,1\}$.

Es un sistema relativo, recordando es un sistema, en donde el valor depende de la posición que ocupa. Así tenemos que en número

$$1011001.101$$

representa a

$$2^6+2^4+2^3+2^0+2^{-1}+2^{-3}$$

que en el sistema decimal es

$$64+16+8+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}=89\tfrac{5}{8}=89.625$$

Si queremos pasar del sistema decimal al binario. Veamos el siguiente

Ejemplo 1.33

38.6

Tomamos la parte entera, vamos tomando mitades y considerando el residuo, es decir si el número es par el residuo es 0, si es impar el residuo es 1

38	
19	0
9	1
4	1
2	0
1	0

Comenzando por el 1 que siempre queda al final seguimos de abajo hacia arriba y los ponemos de izquierda a derecha

$$(38)_{10}=(100110)_2$$

La fracción es difícil de trabajar hay dos alternativas como cociente de enteros o como expansión, en este caso, binaria

Cociente de enteros

$$6=\frac{6}{10}$$

Ponemos la parte fraccionaria como el cociente de enteros con el divisor en potencia de 10.

$$\left(\frac{6}{10}\right)_{10}=\left(\frac{110}{1010}\right)_2$$

Pasamos numerador y divisor a sistema binario y nos da el un cociente de enteros, pero binario y además podemos simplificar.

$$\frac{110}{1010}=\frac{11}{101}$$

También es posible primero hacer las simplificaciones con la fracción en sistema decimal y luego pasar a binario

$$\left(\frac{6}{10}\right)_{10}=\left(\frac{3}{5}\right)_{10}=\left(\frac{11}{101}\right)_2$$

Así finalmente queda que

$$(38.6)_{10}=\left(100110\frac{11}{101}\right)_2$$

Expansión binaria

Si hacemos la división en binario tenemos

$$\begin{array}{r}
.\overline{1001}\\
101\overline{)11.0}\\
-101\\
1000\\
-101\\
11
\end{array}$$

Nos queda un número en expansión cíclica

$$(38.6)_{10}=\left(100110.\overline{1001}\right)_2$$

Notación científica.

En general no es necesario manejar los números de manera exacta, de hecho en la mayoría de los casos no es posible, sin embargo lo que generalmente si se puede es obtener un grado de precisión necesario o deseado. Como podemos medir la precisión cuando es algo relativo a la misma magnitud. Por ejemplo no es lo mismo diferir un metro, cuando hablamos de la distancia de la ciudad de México a Toluca, que cuando hablamos de la distancia entre dos amibas; exagerando la comparación para aclarar la idea. Entonces más bien queremos establecer la precisión en términos relativos a la magnitud del número con el que estamos midiendo. Fallar por un metro en algo que se mide en kilómetros es hablar de un error de la milésima parte mientras que hablar de un error de un metro entre las amibas que miden micras se está hablando de un error de millones de veces.

Por otro lado, estar refiriendo la precisión entre la magnitud de la medida y la magnitud de la precisión es engorroso porque las magnitudes de las medidas cambian según el problema y tampoco podemos usar la misma unidad para todos los problemas. Algo que ha ayudado a resolver estás contradicciones es lo que se conoce como notación científica

Método 15, procedimiento para denotar cualquier número con notación científica.	Ejemplos 1.34	
1. Dado cualquier número se recorre el punto a la derecha del primer dígito significativo.	1365.23	0.0003452
2. Se cuenta cuantos lugares se recorrió y se considera si fue a derecha (-) o izquierda (+), lo llamaremos corrimiento.	+3	−4
3. El número se establece con el primer dígito, el punto, el resto del número, la multiplicación por 10 elevado a la potencia del corrimiento.	1.36523×10^{3}	3.452×10^{-4}

Sí pasamos cualquier número a la notación científica entonces podemos hablar de manera general del grado de precisión con sólo establecer los dígitos "decimales" de precisión que requerimos.

Es natural que según el problema que se este trabajando de requerirá distinta precisión, por ejemplo los astrónomos manejan del orden de 15 a 20 cifras de precisión. Es importante destacar que la precisión es relativa al contexto del problema, que se debe tener el cuidado de corresponder a los requerimientos y que en general el criterio de una o dos decimales no es suficiente.

Ejercicios 4

Pasa los siguientes números a la forma de combinación de potencias de 10.

1) 534 2) 23.5 3) -18.24 4) 205.03005

Establece en la representación relativa decimal.

5) $7\times10^{3}+7\times10^{1}-4\times10^{2}+5\times10^{0}$
6) $-7\times10^{3}-7\times10^{2}-4\times10^{0}$
7) $3\times10^{4}+5\times10-3\times10^{0}+2\times10^{-1}$
8) $2\times10^{3}+9\times10^{2}+5\times10+4\times10^{0}+2\times10^{-2}$

Contesta las siguientes preguntas

9) ¿Cuáles son las Unidades básicas del SI?

10) ¿Qué es un mol?

11) ¿Cuál es la unidad de velocidad angular en el SI?

12) ¿Cuál es el nombre, símbolo y expresión en unidades básicas del SI de la presión?

Pasa al sistema decimal los siguientes números del sistema binario.

13) 1101 14) 1101011 15) 11100011.11 16) 11010101.1010111

17) Muestra por qué el algoritmo de ir poniendo los residuos al tomar mitades es un algoritmo correcto para encontrar los enteros del sistema binario a partir del número en sistema decimal.

Recomendación Consulta el algoritmo de la división en la página 5

Pasa al sistema binario los siguientes números del sistema decimal

18) 12 19) 85 20) 256 21) 1465
22) 236.5 23) 18.125 24) $12\frac{2}{3}$ 25) 132.6

Pasa a la notación científica los siguientes números.

26) 12.34 27) 123975 28) −.0082037 29) 0.000058458

Pasa los siguientes números en notación científica a la notación usual.

30) 8.34×10^{3} 31) -6.234×10^{-2} 32) 1.5898743×10^{7} 33) 3.94867×10^{-6}

34) Claudio Ptolomeo (85 – 165) fue miembro de la Universidad de Alejandría desde el año 125, su obra de trece libros conocida con el nombre de Almagesto fue de gran influencia en astronomía durante varios siglos. Usó el sistema sexagesimal de los babilonios y admitía que la razón entre la circunferencia de un círculo y el diámetro era 3 8' 30". Pasa el número al sistema decimal para conocer la aproximación que tenía Ptolomeo de π

Realiza las operaciones, dejando el resultado final en notación científica.

35) $8.34\times10^{3}-7.5654\times10^{2}$
36) $\left(3.827564\times10^{7}\right)\left(-7.987\times10^{-2}\right)$

37) $\dfrac{7.983\times10^{5}}{-3.872\times10^{3}}$
38) $\dfrac{-9.654\times10^{4}}{3.98277\times10^{-2}}$

39) $\dfrac{\left(7.2387\times10^{3}-1.24\times10^{4}\right)\left(9.81\times10^{-2}\right)}{\dfrac{3.5574\times10^{2}+2.1\times10}{8.23\times10^{2}}}$
40) $\dfrac{\left(1.35\times10^{-4}+15.6\times10^{-4}\right)\left(3+2.8\times10^{-1}\right)}{\dfrac{3.149\times10^{3}}{-5.8\times10+6.4\times10^{2}}}$

Capítulo 2. ÁLGEBRA

Ahora veremos las cantidades de una manera más general, como la estudia la rama de las matemáticas conocida como Álgebra. La palabra álgebra viene de las palabras árabes "Al gebr" que significan "el restablecimiento". Como hemos visto la idea de cantidad y de su representación por números se ha ido generalizando y en el capítulo anterior lo hicimos a través de las operaciones con los números y algunas propiedades. En la medida del desarrollo de las necesidades humanas fue necesario representar las cantidades más abstractamente, a veces para representar clases de cantidades diferentes, otras para establecer propiedades más generales o incluso para representar cantidades desconocidas por descubrir.

En álgebra si bien se siguen usando los números, también se usan las letras para representar cantidades.

Se acostumbra usar[4]:

Números para cantidades conocidas invariables	$5, -8, \frac{3}{4}, -12.87\overline{24}, 34.8572, \ldots$
Las primeras letras del abecedario o alfabeto para valores constantes.	$a, b, c, A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \Lambda, \Gamma$.
Las letras finales del abecedario o alfabeto para las cantidades desconocidas o por descubrir	$x, y, z, X, Y, Z, \Phi, \Omega$

Podemos hablar de la suma de dos cantidades como $a+b$. O bien, la multiplicación de dos cantidades como $A \times B$. También podemos establecer combinaciones de números y letras, así por ejemplo podemos pensar en el triple de un número $3x$. ¿Qué significa $x+y=30$?

Polinomios

Cualquier término o sumando es un monomio. Si la expresión contiene dos sumandos es un binomio, con tres es un trinomio y en general dos o más términos o sumandos se le dice polinomio. También a cada sumando de un polinomio se acostumbra decirle término.

Ejemplo 2.35

$3a$	monomio
$\frac{-8ax^2}{y^3}$	monomio
$7bx+15y$	binomio, polinomio
$64a^3x^4-28a^2y^5+8ax^{12}$	trinomio, polinomio
$2x+3y-12z-3ab+34xy^2+9a^2y-86$	polinomio

[4] Convenio introducido por Descartes, en general usado por los algebristas hasta la época actual.

Suma y resta de polinomios

Suma

Si queremos sumar polinomios sólo vamos a poder agrupar cuando son del mismo tipo lo que vamos a llamar *términos semejantes*.

Ejemplo 2.36

Son semejantes:

$3a$ y $-12a$;

$-5x^2z$, $8x^2z$ y $1283x^2z$.

No lo son:

$3x^2y^2$ y $2x^2y^3$

Si tenemos un polinomio y hay términos semejantes los podemos agrupar sumándolos

Ejemplo 2.37

$$(4ab-4bc+5cd)+(bc+3cd-8de)+(5bc-6ab+8de)+(-3bc-6cd-ab)$$

Tenemos la suma de cuatro polinomios.

1. Quitar paréntesis, sólo verificar que efectivamente es suma.

$$4ab-4bc+5cd+bc+3cd-8de+5bc-6ab+8de-3bc-6cd-ab$$

2. Agrupar los términos semejantes.

$$4ab-6ab-ab-4bc+bc+5bc-3bc+5cd+3cd-6cd-8de+8de$$

3. Sumar los términos de cada tipo.

$$-3ab-bc+2cd$$

Observa que los términos que contiene de suman cero y ya no están en el polinomio.

Otra forma de realizar la operación, la cual es más ordenada, es acomodar los términos semejantes en una misma columna.

$$\begin{array}{rrrr}
4ab & -4bc & +5cd & \\
 & +bc & +3cd & -8de \\
-6ab & +5bc & & +8de \\
-ab & -3bc & -6cd & \\
\hline
-3ab & -bc & +2cd &
\end{array}$$

Resta

Para restar polinomios sólo se debe cambiar los signos de cada término del sustraendo y luego agrupar como en la suma.

Ejemplo 2.38

$$\left(9a^6-15a^4b^2+31a^2b^4-b^6+14\right)-\left(25a^5b-15a^4b^2+53a^3b^3-9ab^5+3b^6\right)$$

Quitamos paréntesis, cambiando el signo de cada término con el signo menos $(-)$.

$$=9a^6-15a^4b^2+31a^2b^4-b^6+14-25a^5b+15a^4b^2-53a^3b^3+9ab^5-3b^6$$

Ordenamos en orden decreciente en a

$$=9a^6-25a^5b-15a^4b^2+15a^4b^2-53a^3b^3+31a^2b^4+9ab^5-b^6-3b^6+14$$
$$=9a^6-25a^5b-53a^3b^3+31a^2b^4+9ab^5-4b^6+14$$

o bien

$$\begin{array}{l} 9a^6-15a^4b^2+31a^2b^4-b^6+14 \\ \quad +15a^4b^2 \qquad\qquad -3b^6 \quad -25a^5b-53a^3b^3+9ab^5 \\ \hline 9a^6 \qquad\qquad +31a^2b^4-4b^6+14-25a^5b-53a^3b^3+9ab^5 \end{array}$$

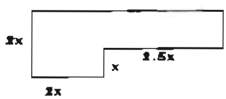
Ordenando

$$=9a^6-25a^5b-53a^3b^3+31a^2b^4+9ab^5-4b^6+14$$

Ejercicios 5

Haz las siguientes sumas algebraicas.

1. $\left(2x^2+3x+4\right)+\left(3x+5\right)$
2. $\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{5}ab-\frac{1}{2}b^2\right)+\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{10}ab+\frac{1}{6}b^2\right)+\left(-\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{20}ab-\frac{1}{8}b^2\right)$
3. $\left(\frac{2}{3}m^3-\frac{1}{4}mn^2+\frac{2}{5}n^3\right)+\left(\frac{1}{6}m^2n+\frac{1}{8}mn^2-\frac{3}{5}n^3\right)+\left(m^3-\frac{1}{2}m^2n-n^3\right)$
4. $\left(a^4-b^4\right)+\left(-a^3b+a^2b^2-ab^3\right)+\left(-3a^4+5a^3b-4a^2b^2\right)+\left(-4a^3b+3a^2b^2-3b^4\right)$
5. Sea x una cantidad de longitud cualquiera y dada la figura proporcional de un terreno.

   Calcula:

   El perímetro del terreno para cualquier cantidad x

   El perímetro del terreno si cada x representa 5 m.
6. Calcula el perímetro del triángulo cuyos lados están dados por

$$2x+5;\ 3x+4,\ x$$

2896022

Haz las siguientes restas algebraicas.

7. $\left(2x^2+5x+4\right)-\left(3x+5\right)$

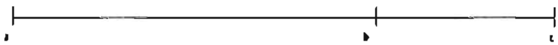
8. $\left(\frac{1}{3}m^3+\frac{5}{6}m^2n+\frac{5}{8}mn^2-\frac{1}{5}n^3\right)-\left(\frac{1}{2}m^3-\frac{2}{3}m^2n-\frac{1}{4}n^3\right)$

Haz las siguientes sumas y restas algebraicas.

9. $\left(a^4-b^4\right)-\left(-a^3b+a^2b^2-ab^3\right)+\left(-\frac{1}{4}a^4+\frac{5}{3}a^3b-\frac{4}{7}a^2b^2\right)-\left(-\frac{4}{5}a^3b+3a^2b^2-3b^4\right)$

10. $\left(\frac{1}{3}m^3-\frac{3}{4}mn^2+\frac{3}{5}n^3\right)-\left(\frac{5}{6}m^2n+\frac{3}{8}mn^2-\frac{4}{5}n^3\right)+\left(\frac{3}{5}m^3-\frac{4}{7}m^2n-\frac{1}{5}n^3\right)$

11. Sea $ac=2x^2+3x+4$ la distancia desde a hasta c y $bc=x^2-x-1$ la distancia desde b hasta c. Encuentra la distancia desde a hasta b.



Dados los polinomios $A=2x^2-7x+5$; $B=-3x+5$; $C=3x^2-2x-1$ encuentra:

12. $A+B$	13. $C+B$	14. $A-C$	15. $B+C-A$
16. $C-B-A$	17. $A+B+C$	18. $B-C-A$	19. $A-B+C$

Multiplicación y productos notables

Debido a que la multiplicación de polinomios no es tan sencilla, vamos de situaciones simples a las más complejas.

Multiplicación de monomios.- Empezando por lo más fácil, el método es el siguiente:

Método 16, multiplicación de monomios.

1. Se multiplican los coeficientes, incluso considerando los signos.
2. Para cada base de los multiplicandos se suman los exponentes, es recomendable ordenarlos alfabéticamente.

Ejemplo 2.39

Multipliquemos

$\left(5a^2bx^3\right)\left(-2a^3x^3\right)=-10a^5bx^6$

Multiplicación de polinomio por monomio.- Si tenemos una suma (polinomio) y lo multiplicamos por un término (monomio) aplica la ley distributiva de la multiplicación con la suma (ver página 1), recordando $(a+b)c=ac+bc$. Así, se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Ejemplo 2.40

$$\begin{array}{r} 3ax^2 \quad -5ax \quad +12b \\ \times \qquad\qquad\quad 4ax \\ \hline 12a^2x^3-20a^2x^2+48abx \end{array}$$

Multiplicación de polinomios.- así cuando tenemos un número de varias cifras donde se multiplica cada cifra del multiplicando contra cada cifra del multiplicador y después sumamos, del mismo modo debemos multiplicar los polinomios.

Método 17, multiplicar polinomios

1. Cada término del multiplicador se debe multiplicar por cada término del multiplicando.
2. Suma los términos semejantes.

Ejemplo 2.41

$$\begin{array}{r} 3x^2+6xy-2y^2 \\ \times \quad 3x-4y \\ \hline 9x^3+18x^2y-6xy^2 \qquad\qquad \\ -12x^2y-24xy^2+8y^3 \\ \hline 9x^3+6x^2y-30xy^2+8y^3 \end{array}$$

Productos notables

Existen productos que por su uso frecuente resulta conveniente conocer el producto sin pasar por todo el proceso de multiplicación cada vez

Binomios conjugados[5]

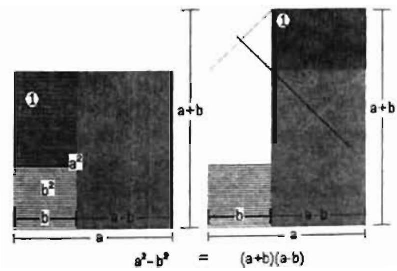
Si realizamos el producto de $(a+b)(a-b)$ los cuales son conocidos como binomios conjugados se obtiene:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \qquad \\ +ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2 \end{array}$$

Lo que se conoce como *diferencia de cuadrados*.

Apréndetelo: <u>El producto de unos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados.</u>

Una representación geométrica[6] del producto de los binomios conjugados es:



En la figura izquierda se observa la diferencia de cuadrados.

Mientras que en la figura derecha se establece el producto de los binomios conjugados.

Claramente las áreas respectivas son iguales, de hecho reflejando la región 1 respecto de la recta a $\frac{\pi}{4}$ rad se observa que los rectángulos son iguales por tanto las áreas son iguales.

---

[5] Los babilonios, en su progreso algebraico, consiguieron obtener las expresiones tanto de binomios conjugados como del binomio al cuadrado.

[6] Esta forma geométrica de estudiar el álgebra fue característica de la escuela pitagórica

Binomio al cuadrado

Si tenemos $(a+b)^2$ y efectuamos el producto como hemos aprendido tenemos

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \quad\quad \\ \underline{\quad +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Si lo hacemos con cualquier otro binomio nos da un resultado del mismo estilo, veamos

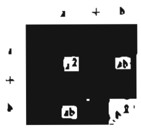
$$\begin{array}{r} 3x-y \quad\quad \\ \underline{3x-y} \quad\quad \\ 9x^2-3xy \quad\quad \\ \underline{\quad -3xy+y^2} \\ 9x^2-6xy+y^2 \end{array}$$

Observa que siempre obtienes tres términos donde los cuadrados dan siempre con signo +.

El término de en medio conocido como el doble producto del primero por el segundo tiene el signo según el caso $+2ab$ en el primero, $-2(3x)(y)$ en el segundo A este producto se le conoce como *trinomio cuadrado perfecto*

Apréndetelo Un binomio al cuadrado da el cuadrado del primero más o menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Una representación geométrica de cuadrado de la suma es.



Claramente se puede observar el cuadrado del primero

Los dos términos del primero por el segundo

El cuadrado del segundo

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Binomios con un término común, es decir, de la forma $(x+a)(x+b)$

$$\begin{array}{l} x+a \\ \underline{x+b} \\ x^2+ax \\ \underline{\quad\quad +bx+ab} \\ x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

Apréndetelo Unos binomios de forma $(x+a)(x+b)$ nos da.

El cuadrado del primero más, la suma de los segundos por el primero más, el producto de los segundos.

Ejemplos 2 42

1 $(x+5)(x+3) = x^2+(5+3)x+(5)(3) = x^2+8x+15$

2 $(x+11)(x-4) = x^2+(11-4)x+(11)(-4) = x^2+7x-44$

3 $(x+6)(x-10) = x^2-4x-60$

4 $(x-5)(x-4) = x^2-9x+20$

Binomio de Newton

Haciendo la multiplicación se puede verificar que $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Antes de continuar requerimos de conocer el triángulo de Pascal.

¿Haz oído del triángulo de Pascal?

Empiezas con el 1, sumas los dos términos de arriba y lo pones en medio, finalmente vuelves a poner 1.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Diagrama de construcción del triángulo de pascal

Precisamente los términos del triángulo de Pascal son los coeficientes del binomio a la potencia respectiva.

Método 18, un binomio a cualquier potencia.

1. Se toma la serie del triángulo de Pascal de la potencia respectiva.
2. Se establece el primer término del binomio a la potencia requerida, se baja un grado para el siguiente hasta desaparecer.
3. En el segundo término se pone el segundo sumando del binomio en grado 1, se sube un grado hasta llegar a la potencia requerida.
4. Se alternan los signos en caso de ser resta.

Ejemplos 2.43

$(x+y)^5$

1	5	10	10	5	1
x^5	$5x^4$	$10x^3$	$10x^2$	$5x$	1
x^5	$5x^4y$	$10x^3y^2$	$10x^2y^3$	$5xy^4$	y^5

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

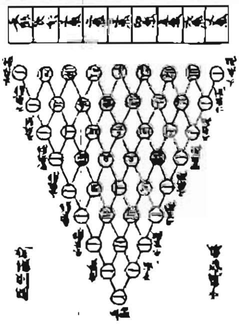


Diagrama en *Espejo Precioso de los Cuatro Elementos*[7].

[7] En el *Espejo precioso de los cuatro elementos*, texto chino de matemáticas del siglo XIII del autor Chu Shih Chieh, aparece un diagrama de lo que conocemos como triángulo aritmético; establecido posteriormente en una reseña de Pascal, en la primera mitad del siglo XVII

Ejercicios 6

1 $(2ab)(-ac)$

2. $\left(-\frac{1}{4}ab^2x^1\right)\left(-\frac{3}{7}b^4x^2\right)$

3 $\left(-5a^m b\right)\left(\frac{3}{5}a^{2m}b^n\right)$

4 $\left(\frac{1}{2}ax^2\right)\left(-\frac{4}{7}bx\right)\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$

Realiza las siguientes multiplicaciones

5 $(a^3-5a^2+8a)(4a)$

6 $(x^3-4x^2y-5xy)(2ax^3y)$

7 $(a^n b-a^2b^n)(2a^2b)$

8 $\left(\frac{2}{9}x^4-\frac{3}{4}x^2y^2+\frac{1}{3}y^4\right)\left(\frac{1}{6}x^3y^2\right)$

9 $(a+b)(2a-b)$

10. $\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{7}y\right)$

11 $(3x^3-a^2+5ax^2)\left(2a+\frac{1}{4}x^2\right)$

12. $\left(a^3b-\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{3}{4}ab^3\right)\left(\frac{3}{4}a-2b+5\right)$

13. Si el lado de un cuadrado mide $3x-8$, ¿cuánto mide su área?

14 Si la base de un rectángulo mide $\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{4}xy+\frac{12}{7}y^2$ y la altura del mismo es $\frac{1}{4}x-2y$, ¿cuánto mide su área?

Obtén los siguientes productos directamente sin multiplicar los polinomios

15. $(a+5)(a-5)$

16 $(4x+7)(4x-7)$

17 $\left(\frac{3}{4}ax+\frac{5}{4}b\right)\left(\frac{3}{4}ax-\frac{5}{4}b\right)$

18 $(8.3x+2.8)(8.3x-2.8)$

19 Verifica mediante una representación geométrica que el producto de binomios conjugados se obtiene una diferencia de cuadrados

Realiza los siguientes productos

20 $(3a+5)^2$

21 $(7x-6)^2$

22. $(5x-12b)^2$

23 $(5a^2x-3b)^2$

24 $(x+12)(x-4)$

25 $(ax+9)(ax-9)$

26 $(x^2-5)(x^2+12)$

27. $\left(x+\frac{4}{7}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right)$

28 Verifica mediante una representación geométrica del binomio al cuadrado también se cumple cuando es resta, es decir $(a-b)^2$

29 Obtén la siguiente serie de numeros del triángulo de Pascal. (ver Pág. 37)

Encuentra la potencia de los siguientes binomios

30 $(x+8)^4$

31 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^5$

División y factores de un polinomio

División de polinomios

El método para dividir entre polinomios es semejante a la división entre números. Sin embargo, vamos a destacar más cuando los polinomios sólo dependen de una sola variable desconocida.

Método 19, división por *simplificación*

Si tienes un cociente de monomios. Se dividen los coeficientes, cada literal se pone con el exponente de la diferencia como se estableció en las propiedades de los exponentes. (ver Pág. 16)

Ejemplo 2.44

$$\frac{6x^5y^2}{2x^2y}=3x^3y$$

En caso de que no se elimine totalmente el divisor se deja indicada la fracción.

$$\frac{9a^3x^2y^3}{3a^2x^4y^4}=\frac{3a}{x^2y}$$

Finalmente, dividir un polinomio entre un monomio es parecido ya que se cumple que $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

$$\frac{32a^2x^3y-16ax^2y^2}{8ax^2y}=\frac{32a^2x^3y}{8ax^2y}-\frac{16ax^2y^2}{8ax^2y}$$
$$=4ax-2y$$

Advertencia: $\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{c}+\frac{a}{b}$, pensar en la igualdad es un error común.

Cuando el divisor es un polinomio debemos seguir el siguiente método.

Método 20, división entre polinomios.

Ejemplo 2.45

$$\frac{10x^3+4x^4-178+5x-16x^2}{-10+2x+x^2}$$

1. Pon en la casilla de división y ordena[8], tanto dividendo como divisor, de manera decreciente.

$$x^2+2x-10\overline{\big)4x^4+10x^3-16x^2+5x-178}$$

2. Divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$\frac{4x^4}{x^2}=4x^2$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 \\ x^2+2x-10\overline{\big)4x^4+10x^3-16x^2+5x-178} \end{array}$$

3. Multiplica este por el divisor y lo acomodamos por términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} & 4x^2 \\ x^2+2x-10\big) & \overline{4x^4+10x^3-16x^2+5x-178} \\ & 4x^4+8x^3-40x^2 \end{array}$$

4. Efectúa la resta y baja el siguiente término.

$$\begin{array}{rl} & 4x^2 \\ x^2+2x-10\big) & \overline{4x^4+10x^3-16x^2+5x-178} \\ & \underline{-(4x^4+8x^3-40x^2)} \\ & 2x^3+24x^2+5x \end{array}$$

---

[8] Ordenar un polinomio es acomodarlo de acuerdo al grado de una variable específica de preferencia en orden decreciente.

5. Repite pasos 2, 3 y 4 hasta que el residuo sea de grado menor que el divisor.

$$
\begin{array}{r}
4x^2 + 2x + 20 \\
x^2+2x-10\,\overline{\big)\, 4x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 5x - 178} \\
-\left(4x^4 + 8x^3 - 40x^2\right) \qquad\qquad \\
\hline
2x^3 + 24x^2 + 5x \qquad\quad \\
-\left(2x^3 + 4x^2 - 20x\right) \qquad\quad \\
\hline
20x^2 + 25x - 178 \\
-\left(20x^2 + 40x - 200\right) \\
\hline
-15x + 22
\end{array}
$$

6. El algoritmo de la división[9] también se cumple y sirve de verificación.

$$4x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 5x - 178 =$$
$$\left(x^2 + 2x - 10\right)\left(4x^2 + 2x + 20\right) + \left(-15x + 22\right)$$

División sintética

Como su nombre lo indica el siguiente método permite realizar una división de manera sintética o resumida cuando el divisor es de la forma $x \pm a$.

Método 21, división sintética.

Ejemplo 2.46 $\dfrac{5x^2 - 2x^4 - 7 - 3x + 4x^5}{1 + x}$

1. Ordena numerador y denominador en forma decreciente y observa si existen potencias no presentes.

$\dfrac{4x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 5x^2 - 3x - 7}{x + 1}$

No está la potencia 3.

2. Escribe los coeficientes del dividendo dentro de la casilla y el término independiente[10] del divisor con el signo contrario. Establece el recuadro del residuo y cancela el espacio de máximo grado.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & & & & & & \square \\
-1 & 4 & -2 & 0 & 5 & -3 & -7 \\
 & \boxed{\times} & & & & &
\end{array}
$$

3. Sube el coeficiente del máximo grado.
4. Multiplica cociente por el divisor y establécelo debajo del coeficiente de un grado abajo.
5. Suma cada residuo con el dividendo, respectivo.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 4 & -6 & & & & \square \\
-1 & 4 & -2 & 0 & 5 & -3 & -5 \\
 & \boxed{\times} & -4 & & & &
\end{array}
$$

5

4

[9] Puedes consultar el Teorema 1.1 Algoritmo de la división en la Pág 5

[10] Término independiente de un polinomio es el término constante

6. Repite los pasos 4 y 5 hasta terminar.	$\begin{array}{r\|rrrrrr} & 4 & -6 & 6 & -1 & -2 & \boxed{-5} \\ \hline -1 & 4 & -2 & 0 & 5 & -3 & -7 \\ & \boxed{\times} & -4 & 6 & -6 & 1 & 2 \end{array}$
7. Los números del cociente son los coeficientes del polinomio cociente en orden decreciente y de un grado menor. El número del recuadro es el residuo.	$\dfrac{4x^5-2x^4+5x^2-3x-7}{x+1}$ $= 4x^4-6x^3+6x^2-x-2-\dfrac{5}{x+1}$
8. Verifica mediante el algoritmo de la división que es correcto.	$\begin{array}{rl} & 4x^4-6x^3+6x^2-x-2 \\ (\times) & x+1 \\ \hline & 4x^5-6x^4+6x^3-x^2-2x \\ & 4x^4-6x^3+6x^2-x-2 \\ \hline & 4x^5-2x^4+5x^2-3x-2 \\ +residuo & (-5) \\ & = 4x^5-2x^4+5x^2-3x-7 \end{array}$

Factores de un polinomio

Se llama factor a los divisores de un polinomio, factorizar es expresar a un polinomio como el producto de factores más simples.

Ejemplo 2.47

Dado el polinomio $x^2+15x+50$ se puede expresar como $(x+5)(x+10)$. Verifica haciendo el producto.

Factor común monomio.- Cuando existen partes comunes en cada término de un polinomio podemos encontrar el monomio factor del polinomio

Método 22, factor común.	Ejemplo 2.48 $\quad 30ax^3y^2+24x^4y^5z$
1. Un factor es el m.c.d.[11] de los coeficientes y cada letra común con el exponente menor.	$6x^3y^2$
2. El otro factor, se obtiene simplificando cada término, es decir realizando la división.	$\dfrac{30ax^3y^2+24x^4y^5z}{6x^3y^2}=\dfrac{30ax^3y^2}{6x^3y^2}+\dfrac{24x^4y^5z}{6x^3y^2}$ $=5a+4xy^3z$
3. Obtenemos los factores.	$30ax^3y^2+24x^4y^5z=(6x^3y^2)(5a+4xy^3z)$

[11] Ver máximo común divisor en la Pág. 17.

Factor común polinomio.- En ocasiones no es posible, en un polinomio, encontrar un monomio como factor para todos los términos; sin embargo puede tener un polinomio, más sencillo, como factor común. Como no siempre es posible encontrar un polinomio como factor y sin embargo sucede con frecuencia es razonable tener una estrategia para encontrar un factor en algunos casos.

Método 23, factor común polinomio.	Ejemplo 2.49 $xy+xb-ay-ab$
1. Factoriza monomios parciales.	$xy+xb-ay-ab=x(y+b)-a(y+b)$
2. Si tienes la fortuna de tener un polinomio común, lo factorizas.	$xy+xb-ay-ab=x(y+b)-a(y+b)$ $=(x-a)(y+b)$

Cuadrados perfectos.- Un polinomio es un cuadrado perfecto si es el cuadrado de otro polinomio. Ejemplos: $9x^2$ y $a^2+2ab+b^2$ son cuadrados de $3x$ y $a+b$, respectivamente.

Método 24, como obtener el monomio al cuadrado de un monomio cuadrado perfecto.	Ejemplo 2.50 $25a^2x^6y^4$
1. Calcula la raíz cuadrada del coeficiente.	$\sqrt{25}=5$
2. Divide a la mitad el exponente de cada letra.	$\sqrt{a^2x^6y^4}=ax^3y^2$
3. Si es un monomio cuadrado perfecto, se puede expresar como un monomio al cuadrado.	$25a^2x^6y^4=\left(5ax^3y^2\right)^2$

Diferencia de cuadrados.-Si tenemos un polinomio de la forma x^2-a^2 podemos factorizarlo como binomios conjugados[12].

Método 25, factoriza diferencia de cuadrados.	Ejemplo 2.51 $4z^2-16$
1. Verifica si se tiene una diferencia de cuadrados.	$4z^2$ es un término cuadrático, 16 también y están restándose.
2. Obtén las raíces cuadradas de cada elemento.	$\sqrt{4z^2}=2z$ $\sqrt{16}=4$
3. El factor es los binomios conjugados $(x+a)(x-a)$.	$(2z+4)(2z-4)$

Observación: En general cualquier término es el cuadrado de otro.

[12] Puedes ver binomios conjugados en la Pág. 35.

Trinomio cuadrado perfecto.- Si tenemos un trinomio cuadrado perfecto lo podemos factorizar como un binomio al cuadrado[13].

Método 26. factorizar un trinomio cuadrado perfecto.	Ejemplos 2.52	
	a^2+b^2+2ab	$4x^2+y^4-4xy^2$
1. Ordena de manera decreciente con respecto a alguna variable.	$a^2+2ab+b^2$	$4x^2-4xy^2+y^4$
2. Extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término.	$\sqrt{a^2}=a$ $\sqrt{b^2}=b$	$\sqrt{4x^2}=2x$ $\sqrt{y^4}=y^2$
3. Sin importar el signo verifica si el segundo término es el doble producto de las raíces del primero y tercero.	$2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=2ab$	$2\sqrt{4x^2}\sqrt{y^4}=2xy^2$
4. Si cumple el paso 3, se factoriza como el binomio al cuadrado escogiendo las raíces del primero y tercero con el signo en medio del segundo término.	$(a+b)^2$	$(2x-y)^2$

Trinomio de la forma x^2+Ax+B.- En ocasiones es posible establecer los factores de un trinomio cuando cumple con ser el producto de binomios con un término común[14].

Método 27. factorizar un trinomio.	Ejemplos 2.53	
	$x^2+9x+20$	$x^2-5x-14$
1. El primer término es la raíz del primer término del trinomio.	$(x \quad)(x \quad)$	$(x \quad)(x \quad)$
2. Escribe el signo del segundo término en el primer factor. El signo del segundo factor es el producto de los signos del segundo y tercer términos.	$(x+ \quad)(x+ \quad)$	$(x- \quad)(x+ \quad)$
3. Signos iguales. Da dos números cuya suma dé el valor absoluto del segundo término y el producto sea el valor absoluto del tercer término.	$(x+4)(x+5)$	
4. Signos contrarios. Busca dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término y el producto sea el valor absoluto del tercer término. El mayor se pone en el primer factor.		$(x-7)(x+2)$

Observaciones:

1.- La forma para encontrar los factores por este método requiere de mucha práctica además de que no es aplicable en lo general.

2.- Más adelante cuando se vean los métodos para resolver ecuaciones de segundo grado profundizaremos más en la forma de obtener los factores para los trinomios de segundo grado.

---

[13] Binomio al cuadrado en la Pág. 35.

[14] Producto de binomios en la Pág. 36.

Teorema 2.1 (del residuo)

El residuo de dividir cualquier polinomio de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entre $x-a$ es sustituir a en la variable x del polinomio

Hipótesis $\quad c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ es un polinomio dividendo

$x-a$ es un polinomio divisor

Tesis: $\quad c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = R$

Demostración

$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = (x-a)Q + R$ Por el algoritmo de la división[15] donde Q es el polinomio cociente y R el polinomio residuo.

La igualdad es válida para cualquier valor de x. Sustituyendo en la igualdad para $x=a$

$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = (a-a)Q + R = R$ Queda demostrado.

Ejemplo 2.54

Encontrar el residuo de dividir el polinomio $5x^3 - 6x^2 + 3x - 9$ entre $x-2$, sin efectuar la división.

Usando el teorema tenemos que el residuo es simplemente sustituir $x=2$ en el polinomio.

$5(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 9 = 40 - 24 + 6 - 9 = 46 - 33 = 13$

Realiza la división de los polinomios para que verifiques.

Ejemplo 2.55

Encontrar el residuo de dividir el polinomio $x^3 + 4x^2 + 3x + 25$ entre $x+3$, sin efectuar la división.

Igualmente sustituimos, pero ahora $x=-3$

$(-3)^3 + 4(-3)^2 + 3(-3) + 25 = -27 + 36 - 9 + 25 = -36 + 61 = 25$

[15] Ver algoritmo de la división Págs. 5 y 40

Corolario 2.1

> Si para algún valor $x = a$ el polinomio es cero entonces $(x - a)$ es un factor del polinomio.

Efectivamente como sustituir $x = a$ en el polinomio es el valor del residuo de acuerdo con el teorema del residuo, y si es cero entonces la división entre $(x - a)$ es exacta, por lo tanto $(x - a)$ es un factor del polinomio

Ejemplo 2.56

Dado el polinomio $x^3 - x^2 - 9x - 12$ al sustituir $x = 4$ obtenemos

$(4)^3 - (4)^2 - 9(4) - 12 = 64 - 16 - 36 - 12 = 64 - 64 = 0$ entonces

$(x - 4)$ es un factor Con solo dividir el polinomio obtenemos el otro factor. Usando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & \boxed{0} \\ \hline 4 & 1 & -1 & -9 & -12 \\ & \boxed{x} & 4 & 12 & 12 \end{array}$$

Hemos encontrado los siguientes factores

$x^3 - x^2 - 9x - 12 = (x - 4)(x^2 + 3x + 3)$

Si nosotros tenemos en factores a un polinomio no es difícil verificar que el término independiente del polinomio es el producto de los términos independientes de los factores

En el ejemplo anterior tenemos que el término independiente del polinomio $x^3 - x^2 - 9x - 12$ es -12 y los términos independientes de los factores $(x - 4)$ y $(x^2 + 3x + 3)$ son -4 y 3, respectivamente Así observamos que $(-4)(3) = -12$.

> El producto de los términos independientes de los factores es igual al término independiente del polinomio producto

Para buscar factores de la forma $(x - a)$ en un polinomio hay que probar con valores de a que sean divisores del término independiente del polinomio

Ejemplo 2 57

Factorizar el polinomio $x^3 - 7x + 6$

Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ entonces tenemos que probando cuales al sustituir en el polinomio dan cero

$x^3 - 7x + 6$

$(-1)^3 - 7(-1) + 6 = -1 + 7 + 6 = 12 \neq 0$

$(1)^3 - 7(1) + 6 = 0$

Un factor es $(x-1)$ el otro factor lo encontramos usando división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ \hline +1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & \boxed{\times} & 1 & 1 & -6 \end{array}$$

El polinomio se puede expresar como

$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$

Si queremos encontrar más factores tenemos dos opciones

- Seguir de la misma manera como hemos procedido, pero ahora con el polinomio $x^2 + x - 6$
- Tratar de encontrar los factores con el método del trinomio de la forma $x^2 + Ax + B$ [16]

Camino 1

1 Divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

2 Ya sabemos que $x + 1$ no es divisor

$x^2 + x - 6$

$(1)^2 + (1) - 6 = -4 \neq 0$

$(-2)^2 + (-2) - 6 = 4 - 8 = -4 \neq 0$

$(2)^2 + (2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$

3 Otro factor es $(x-2)$

Nuevamente dividimos para encontrar el factor faltante

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & \boxed{0} \\ \hline +2 & 1 & 1 & -6 \\ & \boxed{\times} & 2 & 6 \end{array}$$

Camino 2

Para encontrar los factores de $x^2 + x - 6$

1 $(x \quad)(x \quad)$

2 Signo del 2° término, 1er factor

El signo de multiplicar los signos del 2° y 3er términos, en 2° factor

$(x + \quad)(x - \quad)$

3 Signos contrarios.

Buscar dos numeros cuya diferencia dé el valor 2° término y el producto sea el valor del 3er término.

El mayor se pone en el 1er factor y el menor en el 2° factor

$(x + 3)(x - 2)$

Todos los factores del polinomio son $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$

---

[16] El método para factorizar este tipo de trinomios está en la Pág 43

Ejercicios 7

Divide los siguientes polinomios y verifica el resultado mediante el algoritmo de la división.

1. $\dfrac{12a^2b^3}{3ab}$ 2. $\dfrac{3x^4y^5z^6}{-\frac{1}{3}x^4yz^5}$ 3. $\dfrac{15a^2x^5y^3+10ax^3y^4}{5ax^2y^3}$

4. $\dfrac{-85-8x+2x^2}{5+x}$ 5. $\dfrac{8x^3}{2x+4}$ 6. $\dfrac{x^2+20-9x}{x-4}$

7. $\dfrac{x^2+7x-30}{x-3}$ 8. $\dfrac{\frac{3}{4}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{12}{10}x-\frac{37}{40}x^3-\frac{4}{5}}{2x^3+2-\frac{1}{3}x}$

Realiza las siguientes simplificaciones

9. $\dfrac{9x^3y}{27x^2y^2}$ 10. $\dfrac{12ax^2y^3z^2}{4ax^2z}$ 11. $\dfrac{\frac{1}{4}m^3n^5}{\frac{3}{4}m^2n^3}$ 12. $\dfrac{15a^2x^6y^2+10x^3y}{6ax^2y^3}$

Mediante división sintética determina los cocientes y residuos y comprueba cada resultado.

13. $\dfrac{x^2+8x+12}{x+6}$ 14. $\dfrac{2x^3-2}{x-1}$

15. $\dfrac{5x^4+20x^3-16x^2+21x+25}{x+5}$ 16. $\dfrac{2x^4-6x^3+5x^2-2x-4}{x-3}$

Encuentra el factor común

17. $3x^2+6x$ 18. x^3-2x^2+3x 19. $21x^3+35x^2-7x$

20. $56a^2-60ab$ 21. $2a^3x+8ax$ 22. $45a^2x^2+54ax^3$

23. $55a^2b^3x+65a^3b^2x^2-145a^2x^3$ 24. $33a^3+44a^2-55a$

Expresa los monomios cuadrados perfectos como monomios al cuadrado

25. $49x^8y^6z^{10}$ 26. $36a^4b^2m^6$ 27. $256a^4b^2c^8$ 28. $58c^2z^{12}$

Determina los factores de las siguientes diferencias de cuadrados

29. $9x^2-4z^2$ 30. $100a^2b^6-225x^4$ 31. $1-\dfrac{x^2}{16}$ 32. $\dfrac{16}{25}x^2-\dfrac{1}{36}y^4$

Obtén el binomio al cuadrado de los siguientes trinomios cuadrados perfectos

33. $a^2+10a+25$ 34. $x^2-12xy+36y^2$ 35. $4a^8-2a^4b^4+\dfrac{1}{4}b^8$

36. $\dfrac{x^2}{4}+1+\dfrac{1}{x^2}$ 37. $\dfrac{x^6}{9}+\dfrac{2}{15}x^3y^5+\dfrac{y^{10}}{25}$ 38. $(a+c)^2-6(a+c)+9$

39. $(2x-3)^2+10(2x-3)(a+b)+25(a+b)^2$

Encuentra los factores de los siguientes trinomios

40. $x^2+8x+15$ 41. $x^2-11x+28$ 42. $x^2-3x-108$ 43. $x^2+3x-88$

44. $a^2-21a+20$ 45. $z^2+10z+21$ 46. $r^2+30r-675$ 47. $m^2-13m+30$

Encuentra el residuo de la división sin efectuarla, usando el teorema del residuo.

48. $\dfrac{x^2+8x+15}{x-2}$ 49. $\dfrac{x^3-2x^2+5x-6}{x+4}$ 50. $\dfrac{x^3-2x^2-12x-15}{x-5}$ 51. $\dfrac{x^2-5x+72}{x-7}$

Verifica si las divisiones son exactas sin hacer la división.

52. $\dfrac{x^2+13x+40}{x+5}$ 53. $\dfrac{x^3-5x^2+11x-15}{x-3}$ 54. $\dfrac{10x^3-7x^2+5x-2}{2x-1}$ 55. $\dfrac{x^2+x-11}{2x+1}$

Encuentra los factores de los siguientes polinomios.

56. $x^3+6x^2+11x+6$ 57. x^3+5x^2-x-5 58. $x^3+9x^2+11x-21$

Fracciones algebraicas

Cuando realizamos una división de polinomios en general además del cociente nos queda un residuo.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 10x-36 \\ \hline
x^2+2x-10 & 10x^3-16x^2+5x-178 \\
 & \underline{10x^3+20x^2-100x} \\
 & -36x^2+105x-178 \\
 & \underline{-36x^2-72x+360} \\
 & 177x-538
\end{array}
$$

La división la podemos expresar como un polinomio o parte entera y una fracción (cociente de polinomios). La expresión anterior la podemos establecer como

$$\frac{10x^3-16x^2+5x-178}{x^2+2x-10}=10x-36+\frac{177x-538}{x^2+2x-10}$$

Haciendo la analogía con los números racionales y la forma de operarlos. Tienen éstos una parte llamada entera que es el cociente de la división y la parte fraccionaria resultante de dividir el residuo entre divisor. Ahora veamos que para operar las fracciones algebraicas se operan de manera análoga a los racionales mediante los siguientes métodos y respectivos ejemplos de la suma, resta, multiplicación y división.

Métodos 28
Suma o resta de fracciones.
1. Expresa cada sumando en una fracción común; directamente el producto de los denominadores, es una forma

Ejemplos 2.58

$$\frac{5}{2x+1}-\frac{3x-5}{x^2-4x+1}=\frac{(5)(x^2-4x+1)}{(2x+1)(x^2-4x+1)}-\frac{(2x+1)(3x-5)}{(2x+1)(x^2-4x+1)}$$

2. Realiza la suma o resta de las fracciones comunes[17], efectúa los productos y simplifica.

$$\frac{5}{2x+1}-\frac{3x-5}{x^2-4x+1}=\frac{(5)(x^2-4x+1)-(2x+1)(3x-5)}{(2x+1)(x^2-4x+1)}$$

$$=\frac{5x^2-20x+5-(6x^2-10x+3x-5)}{(2x+1)(x^2-4x+1)}$$

$$=\frac{5x^2-20x+5-6x^2+10x-3x+5}{(2x+1)(x^2-4x+1)}$$

$$=\frac{-x^2-10x+10}{(2x+1)(x^2-4x+1)}$$

$$=\frac{-x^2-10x+10}{2x^3-8x^2+2x+x^2-4x+1}$$

$$=\frac{-x^2-10x+10}{2x^3-7x^2-2x+1}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas[18].

$$\frac{(numerador)(numerador)}{(denomi\ nador)(denomi\ nador)}$$

$$\frac{3x}{2x^2+5x-4}\times\frac{8}{5x-9}=\frac{24x}{(2x^2+5x-4)(5x-9)}$$

$$=\frac{24x}{10x^3+25x^2-20x-18x^2-45x+36}$$

$$=\frac{24x}{10x^3+7x^2-65x+36}$$

División de fracciones algebraicas.

Aplica la regla de la torta.

Se multiplican los extremos y se ponen arriba.

Se multiplican los medios y se ponen abajo.

Observación:

También puedes aplicar la regla de la multiplicación cruzada[19].

$$\frac{\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{8}{x-5}}=\frac{(2x)(x-5)}{8(x^2+1)}=\frac{2x^2-10x}{8x^2+8}$$

$$=\frac{2(x^2-5x)}{8(x^2+1)}=\frac{x^2-5x}{4(x^2+1)}$$

$$=\frac{x^2+1-5x-1}{4(x^2+1)}=\frac{1}{4}-\frac{5x+1}{4x^2+4}$$

Observaciones: [20]

- En general sin importar la operación, en caso que el grado de arriba sea mayor o igual al de abajo es recomendable, hacer el cociente
- También, en general, hay que simplificar

[17] Consulta **Números racionales** en la Pág. 12.
[18] **Multiplicación de fracciones** en la Pág. 16
[19] **Método de multiplicación cruzada** en la Pág. 17.
[20] **División de fracciones** en la Pág. 17 y siguiente

Ejercicios 8

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

1 $\frac{12x^2y^3}{3ax^3y^2}$ 2. $\frac{3x^2y^3z}{6x^2y^2z^2-9x^4yz^5}$ 3 $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ 4. $\frac{3x^2y+12xy}{x^2-16}$

Determina la parte entera y la fracción

5 $\frac{3x^3+12x^2-4x+8}{x^2-1}$ 6 $\frac{25x^3z-10x^2z^2+5xz^3}{5x+5z}$

Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

7 $\frac{4x}{ax}+\frac{1}{x^2y}$ 8 $\frac{a^3}{-2b}-\frac{3b^3}{a^2}$ 9 $\frac{x}{2z}\times\frac{3}{-3x^2z^4}$ 10. $\frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{2(a+b)^2}{3a}}$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Cuando se vio el corolario 2 1 del teorema del residuo[21] se estableció que si nosotros evaluamos un polinomio en algún valor y nos da cero entonces podemos encontrar un factor del polinomio Si tuviéramos un método para encontrar los valores que satisfacen la igualdad con cero podríamos encontrar los factores de mejor manera

Si queremos encontrar los factores del polinomio $x^3-2x^2-12x-15$ lo que nos debemos preguntar es como encontrar los valores para los cuales

$$x^3-2x^2-12x-15=0$$

Planteado así, andamos buscando un valor ahora desconocido que satisface una relación la cual vamos a llamar ecuación

Definición

Ecuación es una igualdad en la que una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas

Existen diversas situaciones que llevan a ecuaciones de primer grado, sin embargo, de las más propias son las relaciones de proporción Así, por ejemplo,

---

[21] Consulta el corolario en la Pág 45

nosotros podemos calcular alturas muy grandes difíciles de medir directamente usando medidas auxiliares que sean fáciles de medir directamente como en el dibujo de la izquierda se quiere establecer una relación que permita determinar la altura del faro[22].

Tales de Mileto

Sabemos que los triángulos con los mismos ángulos son proporcionales lo que nos permite establecer la relación siguiente.

Sea x la altura desconocida, sin embargo, se debe cumplir que,

$$\frac{7}{63}=\frac{3}{x}$$

Para poder encontrar la respuesta a problemas de este tipo debemos aprender antes a propiedades de las igualdades.

Propiedades de la igualdad

1. Si $a=b$ entonces $b=a$.
2. Si $a=b$ y $b=c$ entonces $a=c$.
3. Si $a=b$, para todo valor c, se cumple que $a+c=b+c$.
4. Si $a=b$, para todo valor c, se cumple que $a\times c=b\times c$.

Usando la propiedad 3, multiplicando ambos lados de la ecuación por el valor de la incógnita en la ecuación anterior obtenemos que

$$\frac{7}{63}x=\frac{3}{x}x$$

Simplificando

$$\frac{7}{63}x=3$$

Nuevamente usando la propiedad 3 pero ahora multiplicando por 63

$$63\frac{7}{63}x=(3)(63)$$

[22] Tales de Mileto estableció el cálculo de la altura de una pirámide a partir de medir su sombra con una vara. Tales vivió aproximadamente entre 640 y 550 a.n.e., fue la primera persona en la historia que adquiere fama como matemático y uno de los siete sabios de la antigüedad. Se le atribuye anécdotas como la de la mula cargada de sal, las prensas de olivo. Su fama popular se originó por la predicción del eclipse de 585 a.n.e. Al Sabio de Mileto se le atribuía las proposiciones básicas de geometría, en particular las relaciones de proporcionalidad de los triángulos semejantes. Se le reconoce como el padre de la matemática, la astronomía y la filosofía griega. Puso en relieve el saber de los sacerdotes egipcios, incluso cuando ya era anciano, recomendó a su discípulo Pitágoras que visitara Egipto.

Otra vez simplificando

$$7x = 189$$

Ahora dividiendo entre 7 o ajustándonos estrictamente a las propiedades multiplicando por $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7}7x = \frac{1}{7}189$$

Finalmente también simplificando

$$x = 27$$

Solución al problema La altura del faro es de 27 m

Ejemplos 2 59	Propiedad usada
1 Resolver la ecuación $5x + 4 = 12x - 10$	
$5x + 4 + (-4) = 12x - 10 + (-4)$	3
$5x = 12x - 14$	Simplificando
$5x - 12x = 12x - 12x - 14$	3
$-7x = -14$	Simplificando
$-7x\left(-\frac{1}{7}\right) = -14\left(-\frac{1}{7}\right)$	4
$x = 2$	Simplificando
2 Resolver la ecuación $7x - 9 = 4x + 6$	
$7x - 4x = 6 + 9$	3 abreviadamente, si está sumando o restando pasa del con signo contrario
$3x = 15$	Simplificando
$x = \frac{15}{3}$	4 de manera abreviada, si está multiplicando pasa del otro lado dividiendo
$x = 5$	Simplificando

Ejercicios 9

Resuelve las siguientes ecuaciones

1 $3x + 12 = 8x - 7$ 3 $5x - 6 = 2x + 9$ 4 $16 - 2x = x - 1$

5 $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ 6 $\frac{x}{5} + \frac{x}{8} = 15 - \frac{x}{20}$ 7 $\frac{x}{3} - \frac{x}{7} = x - 17$

En cada problema exprésalo como una ecuación y resuelve la misma

8 Si una persona ha comprado y otra de una pieza de tela Si la segunda persona lleva 55 m más que la primera ¿Cuál es la longitud total de la tela?

9. Calcula la altura del faro.

10. Si se invirtió una cantidad de dinero por un año en el banco que paga una taza de 8.5% al año y al final le entregaron en total \$1302. ¿Cuánto se tuvo que depositar en el banco?

11. Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto[23]. ¡Oh, gran maravilla! Y la tumba dice con arte la medida de su vida. Su niñez ocupo, de su vida, una sexta parte. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después de un séptimo, y cinco años después de la boda le concedió un hijo. Pero ¡ay!, niño tardío y desgraciado, a la mitad de toda la vida de su padre, lo arrebató a una helada tumba. Después de consolar su pena durante cuatro años, así llegó al término de su vida. Con esta ciencia del cálculo se deduce su edad[24]. Sin arte, pero sí con álgebra, me puedes decir, ¿Dé que edad murió Diofanto?

Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales son de la forma $Ax+By=C$ donde x, y son variables; A, B y C son constantes.

Ejemplos 2.60

1. $2x+3y=5$ 2. $-8x+2y=-24$ 3. $7x-12y=0$

Esto nos da un conjunto de ecuaciones donde las variables x, y dependen mutuamente para satisfacer la ecuación. Así, en la primera ecuación podemos encontrar parejas de valores que satisfacen.

$$2x+3y=5$$

x	y	
1	1	$2(1)+3(1)=5$
0	$\frac{5}{3}$	$2(0)+3(\frac{5}{3})=5$
$\frac{5}{2}$	0	$2(\frac{5}{2})+3(0)=5$

[23] Diofanto gran matemático que dio fama a Alejandría, vivió a finales del siglo III y principios del IV Es famoso por sus escritos de álgebra. Aun, cuando el álgebra desarrollada por él es primitiva y entra en la clasificación de álgebra sincopada (mediante abreviaturas), se le considera el padre del álgebra. Las ecuaciones diofantinas, que llevan su nombre, buscan solución en los enteros.

[24] Problema de la Antología Palatina que tiene 46 epigramas, que son problemas algebraicos, la mayoría reunidos por Metrodoro, un gramático que vivió hacia el 500.

De hecho para cualquier valor que se nos ocurra en cualquier variable podemos resolviendo la ecuación encontrar el respectivo valor en la otra

Si damos el valor de $y = 23$ entonces nos queda la siguiente ecuación de primer grado con una incógnita,

$$2x + 3(23) = 5$$
$$2x + 69 = 5$$

La cual resolviendo resulta que

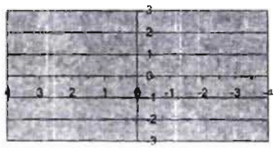
$$2x + 69 = 5 \qquad \text{Restando 69 a la ecuación,}$$
$$2x = -64 \qquad \text{dividiendo entre 2 la ecuación.}$$
$$x = -32$$

La pareja $x = -32$; $y = 23$ satisface la ecuación

Coordenadas cartesianas

Una manera de tener una idea visual del comportamiento de relaciones como las ecuaciones lineales es mediante una representación gráfica

Formamos dos rectas numéricas puestas ortogonales donde en el eje horizontal representamos los valores de x, en el eje vertical representamos los valores de y

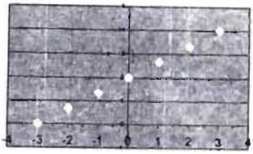


Ahora dada una ecuación lineal digamos $2x - 3y = -6$ podemos formar una tabla con las parejas de valores, para facilitarlo es recomendable despejar de la ecuación la variable y dar valores arbitrarios de x encontrando después los respectivos valores de y

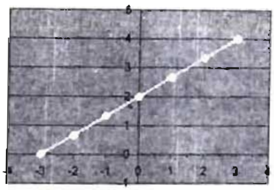
$$2x - 3y = -6$$
$$-3y = -2x - 6$$
$$y = \tfrac{2}{3}x + 2$$

x	$y = \frac{2}{3}x + 2$
-3	$y = \frac{2}{3}(-3) + 2 = 0$
-2	$y = \frac{2}{3}(-2) + 2 = \frac{-4}{3} + 2 = \frac{-4+6}{3} = \frac{2}{3}$
-1	$y = \frac{2}{3}(-1) + 2 = \frac{-2}{3} + 2 = \frac{-2+6}{3} = \frac{4}{3}$
0	$y = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$
1	$y = \frac{2}{3}(1) + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$
2	$y = \frac{2}{3}(2) + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{4+6}{3} = \frac{10}{3}$
3	$y = \frac{2}{3}(3) + 2 = 4$

Ahora, si ponemos cada pareja de valores específicos (x, y) en las coordenadas cartesianas obtenemos la siguiente gráfica



Observa como en este caso todos los puntos aparecen alineados en una recta, si diéramos más cercanos los valores podríamos ver que se unen también en una línea recta, de hecho cualquier ecuación lineal de dos variables nos describe una recta y para graficarla es suficiente con tener dos puntos de la gráfica.



Ejercicios 10

1. En la ecuación $2x+3y=5$ encuentra el valor de y cuando $x=12$.
2. En la ecuación anterior encuentra el valor de x cuando $y=21$

En las ecuaciones siguientes despeja la variable y

3. $-3x+y=-1$ 4. $2x+2y=-6$ 5. $8x-2y=-6$ 6. [illegible]

Haz la gráfica de las ecuaciones lineales haciendo una tabla para dos valores, que como vimos es suficiente para determinar rectas

7. $-2x+y=4$ 8. $3x+3y=-9$ 9. [illegible] 10. $3x+8y-64=0$

Haz la gráfica de las ecuaciones lineales haciendo una tabla para dos valores, pero despejando la x así como dando valores de y. No importa a que variable se les dé valores.

11. $-2x-2y=6$ 12. $-3x+9y=-6$ 13. [illegible] 14. [illegible]

Dos ecuaciones lineales describen la misma recta, si la gráfica es la misma. Verifica que cada par de rectas describen la misma gráfica

15 $\begin{matrix} -2x-3y=6 \\ 10x+15y=-30 \end{matrix}$

16 $\begin{matrix} x-3y=2 \\ -3x+9y=-6 \end{matrix}$

17 Busca la información que te permita establecer la relación de los sistemas inglés e internacional de medición, en el caso de la temperatura, como una ecuación lineal. Verifica que la relación contraria simplemente es despejar la otra variable

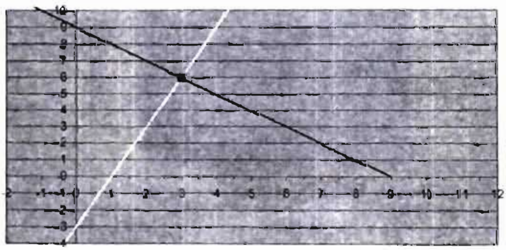
Sistemas de ecuaciones lineales

Método gráfico

Cuando tenemos dos ecuaciones lineales, como representan rectas, tenemos dos rectas digamos puestas en el plano cartesiano. Si las rectas no son paralelas, basta que las prolonguemos lo suficiente para que veamos que se cruzan en un punto

Ejemplo 2 61

Las rectas $-3x+y=-3$, $x+y=9$ si las graficamos



El punto de cruce de las dos rectas es el único punto que satisface simultáneamente las dos ecuaciones, en este caso, $x=3$, $y=6$

Si verificamos en las ecuaciones algebraicas, observamos se satisfacen

$$-3(3)+(6)=-9+6=-3$$
$$(3)+(6)=9$$

Ahora veamos diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Es importante conocer la diversidad de métodos y es fundamental que conozcas a la perfección al menos uno

Métodos algebraicos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Método 29, sustitución.	Ejemplos 2.62 $\begin{aligned}4x+2y&=16\\-x+y&=-1\end{aligned}$
1. Despeja cualquiera de las variables en cualquiera de las ecuaciones.	$2y=-4x+16$ $y=-2x+8$
2. Sustituye el lado derecho de la igualdad en la otra ecuación.	$-x+(-2x+8)=-1$
3. Resuelve la ecuación lineal ahora de una sola incógnita.	$-x-2x+8=-1$ $-3x=-9$ $x=3$
4. Sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones despejadas, para encontrar el valor de la otra variable.	$y=-2(3)+8=2$ Solución $x=3,\ y=2$
5. Verifica los resultados.	$4(3)+2(2)=12+4=16$ $-(3)+(2)=-3+2=-1$

Método 30, igualación.	$2x+6y=26$ $-3x+y=11$
1. Despeja cualquiera de las variables, pero la misma en las dos ecuaciones.	$2x+6y=26$ $2x=-6y+26$ $\boxed{x=-3y+13}$ $-3x+y=11$ $-3x=-y+11$ $\boxed{x=\frac{-y+11}{-3}}$
2. Iguala las partes derechas de las ecuaciones.	$-3y+13=\frac{-y+11}{-3}$
3. Resuelve la ecuación lineal ahora de una sola incógnita.	$9y-39=-y+11$ $10y=50$ $y=5$
4. Sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones.	$x=-3(5)+13=-2$ Solución $x=-2,\ y=5$
5. Verifica los resultados.	$2(-2)+6(5)=-4+30=26$ $-3(-2)+(5)=6+5=11$

Método 31, suma y resta	$4x+5y=3$ $2x+y=0$
1. **Multiplicamos cada ecuación por el coeficiente de la otra ecuación en cualquiera de las variables.**	$(2)(4x+5y)=(2)(3)$ $(4)(2x+y)=(4)(0)$
2. **Si los signos donde se igualó los coeficientes son iguales, resta las ecuaciones.** Si son diferentes suma.	$\begin{array}{rr} & 8x+10y=6 \\ (-) & 8x+\ \ 4y=0 \\ \hline & 6y=6 \end{array}$
3. Resuelve la ecuación lineal ahora de una sola incógnita.	$y=1$
4. Sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones, para determinar el otro valor.	$4x+5(1)=3$ $x=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ Solución: $x=-\frac{1}{2},\ y=1$
5. Verifica los resultados.	$4(-\frac{1}{2})+5(1)=-2+5=3$ $2(-\frac{1}{2})+(1)=-1+1=0$

Fórmulas generales

Si resolvemos en general un sistema de ecuaciones lineales por el método de suma y resta tenemos

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$b_2(a_1x+b_1y)=b_2c_1 \qquad a_2(a_1x+b_1y)=a_2c_1$$

$$b_1(a_2x+b_2y)=b_1c_2 \qquad a_1(a_2x+b_2y)=a_1c_2$$

$$\begin{array}{rr} & a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \\ (-) & a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2 \\ \hline & (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} (-) & a_1a_2x+a_2b_1y=a_2c_1 \\ & a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2 \\ \hline & (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{array}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Observación: Si $a_1b_2-a_2b_1=0$ no existirá solución o no será única. Significa que las rectas son paralelas o se trata de una sola recta.

Didácticamente no es recomendable usar las fórmulas. Aquí se incluye para que se entienda de donde surge la regla de Cramer.

Método 32, fórmulas

1. Establecer los elementos del sistema de ecuaciones lineales (1).
2. $x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$
3. $y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$
4. Verifica las respuestas.

Ejemplo 2.63

$$2x-5y=35$$
$$x+8y=-14$$

$a_1=2 \quad b_1=-5 \quad c_1=35$

$a_2=1 \quad b_2=8 \quad c_2=-14$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{(8)(35)-(-5)(-14)}{(2)(8)-(1)(-5)}=\frac{210}{21}=10$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{(2)(-14)-(1)(35)}{21}=\frac{-63}{21}=-3$$

$2(10)-5(-3)=20+15=35$

$(10)+8(-3)=10-24=-14$

Determinantes

Se puede utilizar las fórmulas que son difíciles de memorizar pero si hacemos la siguiente convención es fácil operar.

Definición

El determinante de un arreglo de 4 números es $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=AD-BC$

Aun cuando el concepto de determinante es más complejo que lo presentado, para los objetivos del presente texto es suficiente.

Si observamos las expresiones en que quedan las soluciones se pueden expresar en términos de determinantes

Método 33, regla de Cramer

1. Calcula el determinante general $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
2. Calcula el determinante de x, pon la columna de los términos independientes en lugar de los coeficientes de la columna de las x. $\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$
3. Calcula el determinante de y, pon la columna de los términos independientes en lugar de los coeficientes de la columna de las y. $\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Ejemplo 2.64

$$3x+5y=19$$
$$-7x+3y=29$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}=(3)(3)-(-7)(5)=44$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 29 & 3 \end{vmatrix}=57-(145)=-88$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 19 \\ -7 & 29 \end{vmatrix}=87+133=220$$

4. $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$	$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-88}{44}=-2$
5. $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$	$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{220}{44}=5$
6. Verifica tus resultados.	$3(-2)+5(5)=-6+25=19$ $-7(-2)+3(5)=14+15=29$

Ejercicios 11

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico.

1. $\begin{array}{l} 3x=6y \\ y-5=0 \end{array}$
2. $\begin{array}{l} 3x-y=0 \\ 5x+4y=-26 \end{array}$
3. $\begin{array}{l} 3x+8y=28 \\ 5x-2y=-30 \end{array}$
4. $\begin{array}{l} 56x-49y=14 \\ -8x+7y=-2 \end{array}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

5. $\begin{array}{l} 6x=-5y \\ 4x-3y=-38 \end{array}$
6. $\begin{array}{l} 10x+18y=-11 \\ 16x-9y=-5 \end{array}$
7. $\begin{array}{l} 4y+3x=8 \\ 8x-9y=-77 \end{array}$
8. $\begin{array}{l} 32x-25y=13 \\ 16x+15y=1 \end{array}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación.

9. $\begin{array}{l} 3x+5y=7 \\ -3x+2y=7 \end{array}$
10. $\begin{array}{l} 14x-11y=-29 \\ 13y-8x=30 \end{array}$
11. $\begin{array}{l} 6x-18y=-85 \\ 24x-5y=-5 \end{array}$
12. $\begin{array}{l} 6x=-5y \\ 4x-3y=-38 \end{array}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por suma y resta.

13. $\begin{array}{l} 7x-15y=1 \\ -x-6y=8 \end{array}$
14. $\begin{array}{l} 11x-9y=2 \\ 13x-15y=-2 \end{array}$
15. $\begin{array}{l} 9x+7y=-4 \\ 11x-13y=-48 \end{array}$
16. $\begin{array}{l} 36x-11y=-14 \\ 24x-17y=10 \end{array}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por fórmula.

17. $\begin{array}{l} x+y=8 \\ -3x+8y=9 \end{array}$
18. $\begin{array}{l} 12x+6=2y+9 \\ 5x-y+12=0 \end{array}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por determinantes.

19. $\begin{array}{l} x+4y=-7 \\ 2x-7y=31 \end{array}$
20. $\begin{array}{l} 3x+8y=-8 \\ 9x-4y=11 \end{array}$
21. $\begin{array}{l} 3x+10y=-17 \\ -x+4y=-\frac{1}{5} \end{array}$
22. $\begin{array}{l} \frac{3}{4}x+\frac{7}{11}y=\frac{5}{22} \\ \frac{11}{2}x-\frac{6}{5}y=-\frac{13}{4} \end{array}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método que prefieras.

23. $\begin{array}{l} 5x+3y=16 \\ -11y+3x=-16 \end{array}$
24. $\begin{array}{l} 24x-36y=-12 \\ 11x+21y=-10 \end{array}$

25. La edad de Luis es tres veces la edad de María y dentro de 6 años será el doble. Determina las edades de cada uno.
26. Dos clientes compraron un rollo de $120m$ de tela. El segundo se llevó $50m$ más que el primero. ¿Cuánta tela compró cada uno?
27. Del texto Aritmética de Diofanto, en el libro 1 de termina con 39 problemas el primero dice: Dividir un número dado en dos partes, cuya diferencia sea dada. Sean 100 el número y 40 la diferencia[25].

---

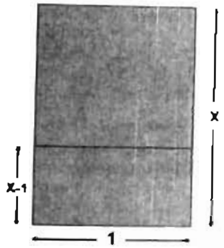
[25] De los 13 libros que constaba la principal obra de Diofanto, *Aritmética*, sólo sobrevivieron seis, gracias a Bachet de Meziriac quien realizó una edición en 1621. Cabe destacar que precisamente Pierre Fermat anotó al margen de un texto de esta edición de Bachet su más famoso y último gran

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Otro tipo de problemas, que llevan a relaciones donde aparece la incógnita al cuadrado con frecuencia, son los de área. Presentamos un problema muy antiguo y originado de situaciones de carácter estético. Desde los griegos se ha encontrado en la arquitectura, escultura, alfarería; en general en artes y artesanías; que una proporción estéticamente bella es la proporción áurea. Ésta tiene que ver con el pentágono, un tipo de espiral y rectángulos áureos.

El Partenón tiene un gran rectángulo con la proporción áurea rematado con un triángulo y entre columna y columna igualmente forma rectángulos áureos.

Un rectángulo tiene la proporción áurea cuando al quitarle el cuadrado del lado del ancho del rectángulo nos queda un rectángulo de la misma proporción.



Para que el rectángulo sea áureo debe guardar las siguientes proporciones

$$\frac{LARGO\ del\ GRANDE}{ancho\ del\ GRANDE} = \frac{LARGO\ del\ chico}{ancho\ del\ chico}$$

En términos algebraicos nos queda

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Aplicando las propiedades de igualdad de fracciones nos queda que

$$x(x-1) = 1$$

Desarrollando nos queda la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - x = 1$

Facilita el manejo de ecuaciones cuadráticas pasar todos los términos significativos del lado izquierdo e igualar a cero. $x^2 - x - 1 = 0$

La solución[28] a la ecuación son los irracionales conocidos como los números áureos, se abrevian con la letra griega Φ (fi) en honor del famoso escultor Fidias, creador de una de las siete maravillas de la antigüedad, la estatua de Zeus, de oro y marfil (criselefantina), ubicada en el templo en su honor en Olimpia, donde se encendía la llama olímpica de los juegos. En el año 394, fue llevada a Constantinopla. Fue destruida posteriormente por un incendio provocado por los cruzados en su invasión en 1204.

---

teorema, sin la demostración, seguramente motivado por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ establecida por Diofanto. Ver también la nota 23 al pie de la Pág. 53

[28] La solución de la ecuación está en la página 64

Aun cuando existen métodos particulares para ciertos casos, sólo veremos el método general para las ecuaciones de segundo grado. Sea la ecuación

$$ax^2+bx+c=0,$$

dividiendo entre a tenemos

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

restando el término independiente (propiedad 3, abreviada)

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

sumando ambos lados, para no alterar la igualdad, lo necesario para tener un trinomio cuadrado perfecto

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

factorizando el lado izquierdo el trinomio en un binomio al cuadrado

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

en el lado derecho sumando las fracciones

$$-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

sacando raíz cuadrada a ambos lados y en el lado derecho al aplicar la raíz a la fracción obtenemos la fracción de las raíces

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

restando $\frac{b}{2a}$ y queda despejada x y haciendo la suma de fracciones nos queda la fórmula general para ecuaciones de segundo grado

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

popularmente conocida como "la chicharronera". Seguramente se le quedo ese apodo porque algún profesor para destacar la importancia de la fórmula dijo que hasta el chicharronero que está a la salida de la secundaria se la debería saber.

Al margen de la anécdota, apréndetela porque una gran cantidad de problemas se reducen a ecuaciones de segundo grado y para resolverlas la herramienta fundamental, de hecho para efectos prácticos la única, que tenemos para resolver este importante tipo de ecuaciones.

Método 34, solución de ecuaciones de segundo grado

1. Establece la fórmula, determina los elementos de la ecuación.
2. Sustituye los elementos en la fórmula.
3. Realiza las operaciones preliminares, incluyendo la obtención de la raíz cuadrada.
4. Separa los resultados.
5. Verifica los resultados.

Ejemplo 2.65 Resolver la ecuación $5x^2-10x-40=0$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=5$

$b=-10$

$c=-40$

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(5)(-40)}}{2(5)}$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{900}}{10}=\frac{10\pm30}{10}$$

$$x_1=\frac{10+30}{10}=4$$

$$x_2=\frac{10-30}{10}=-2$$

$5x^2-10x-40=0$

$5(4)^2-10(4)-40=80-40-40=0$

$5(-2)^2-10(-2)-40=20+20-40=0$

Ejemplo 2.66

$8x^2-96x+288=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=8$

$b=-96$

$c=288$

$$x=\frac{-(-96)\pm\sqrt{(-96)^2-4(8)(288)}}{2(8)}$$

$$x=\frac{-(-96)}{16}=6$$

Sólo hay un resultado.

$8(6)^2-96(6)+288=288-576+288=0$

Ejemplo 2.67

$2x^2-8x+80=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=2$

$b=-8$

$c=80$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(2)(80)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{-576}}{4}$$

No hay ningún resultado que sea número real

Resumiendo, se tiene tres posibilidades

- Dos soluciones reales. Cuando se tiene la raíz de un número positivo.
- Una solución real. Sí la raíz es cero.
- Ninguna solución real. La raíz de un número negativo, no es real.

Observación: Como el que define las posibilidades es el interior de la raíz se le da el nombre de discriminante

SOLUCIÓN A LA SECCIÓN ÁUREA O LOS NÚMEROS DE ORO[27].

$x(x-1)=1$.

Desarrollando y llevando la ecuación a la forma general es

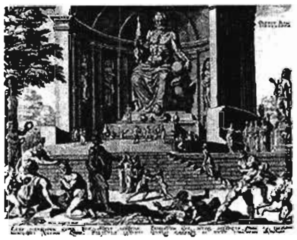
$$x^2-x-1=0$$

aplicando la fórmula general

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

calculando

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$



La segunda solución es negativa y de acuerdo al contexto del problema no tiene sentido. La solución es: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618$

Es decir, para que un rectángulo sea de proporción áurea[28] el largo debe ser aproximadamente 1.618 veces el ancho.

Ejercicios 12

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

1. $3x^2+21x-180=0$
2. $-12x^2+96x-192=0$
3. $\frac{1}{4}x^2-\frac{41}{28}x+\frac{30}{28}=0$
4. $-16x^2+64=0$
5. $-2x^2+4x-4=0$
6. $\frac{3}{4}x^2-2x+\frac{4}{3}=0$
7. $5x^2+12x=0$ Φ
8. $5x^2+20=0$
9. $25x^2-410x+1681=0$
10. $0.24x^2+0.9408x-1.660032=0$

[27] El planteamiento del problema está en la página 61.

[28] Los números áureos denotados con la letra griega Φ, en honor al escultor Fidias. La primera guía turística, obra de Pausanias del siglo II, que ha llegado intacta hasta nosotros, describe con todo detalle el Zeus de Fidias. Decía que estaba sentado en un trono de oro y marfil. Con una guirnalda de olivo en su cabeza. En su mano derecha sostenía una estatuilla de la Victoria, igual de oro y marfil, que a su vez ofrecía la banda de la inmortalidad. En la mano izquierda sostenía un cetro rematado con el águila. Las sandalias y el ropaje de oro cincelado, con dibujos de orlas y lirios. El trono fue decorado con profusión de relieves en miniatura: esfinges, horas, gracias, etc. En el escabel se veía un relieve representando el combate de Teseo y las amazonas.

11. El álgebra de los babilonios era retórica los problemas se enuncian y resuelven sin una notación sistemática. Podían resolver ecuaciones cuadráticas. Un problema encontrado dice: "conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870". Incluso se usaba una fórmula para ecuaciones del tipo $x^2 - px = q$. Establece:

a. La ecuación que expresa el problema establecido en la tablilla babilónica
b. Determinar la fórmula que usaban los babilonios.
c. La solución de acuerdo al contexto del problema

Aplicación de ecuaciones para obtener factores de un polinomio

Como se vio en el corolario 2.1 del teorema del residuo[29] si para algún valor a un polinomio se anula entonces $(x-a)$ es un factor del polinomio. Si encontramos todos los valores donde un polinomio se anula, que les vamos a llamar raíces, vamos a poder encontrar todos sus factores de grado 1 o lineales.

Ejemplo 2.68

Encontrar los factores del polinomio $3.4x^2 + 24.82x - 233.172$

Buscamos sus raíces resolviendo la ecuación $3.4x^2 + 24.82x - 233.172 = 0$

Usando la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Especificando los coeficientes

$$a = 3.4$$
$$b = 24.82$$
$$c = -233.172$$

Sustituyendo en la fórmula

$$x = \frac{-(24.82) \pm \sqrt{(24.82)^2 - 4(3.4)(-233.172)}}{2(3.4)}$$

$$= \frac{-24.82 \pm \sqrt{616.0324 + 3171.1392}}{6.8}$$

$$= \frac{-24.82 \pm \sqrt{3787.1716}}{6.8}$$

$$= \frac{-24.82 \pm 61.54}{6.8}$$

$$x_1 = \frac{-24.82 + 61.54}{6.8} = \frac{36.72}{6.8} = 5.4$$

$$x_2 = \frac{-24.82 - 61.54}{6.8} = -\frac{86.36}{6.8} = -12.7$$

[29] Consulta el corolario del teorema del residuo en la Pág. 45

Los factores son

$$x-(5.4);\ x-(-12.7)$$

Puedes verificar que lo único que hace falta para expresar totalmente el polinomio es el coeficiente del término cuadrático

$$3.4x^2+24.82x-233.17=3.4(x-5.4)(x+12.7)$$

Observaciones

Existen aquí también tres situaciones posibles;

- si las raíces reales diferentes, obtenemos dos factores;
- si es una sola raíz real, tenemos un factor pero al cuadrado,
- no tiene raíces reales, no se puede factorizar.

Si el polinomio es de grado más grande, por cada factor el otro es de grado menor y más fácil de encontrar factores. Llegando a grado 2 se puede aplicar la fórmula general.

Ejercicios 13

Encuentra los factores de los siguientes polinomios.

1. $7.5x^2-30x-240$
2. $5x^2-90x+360$
3. $\frac{1}{4}x^2-\frac{11}{8}x+\frac{5}{8}$
4. $\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{15}$
5. $-2x^2+4x-8$
6. $(x^2-16)(-16x^2-48x-32)$
7. $(x^2-11.5x+32.5)(x^2-6.6x-21.6)$
8. $(x^2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{2})(3x^2+x-\frac{5}{4})$

En los siguientes problemas es recomendable encontrar un factor buscando un divisor factible, después usa la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

9. $x^3+11x^2-4x-44$
10. $x^3+3x^2-16x+12$

Capítulo 3. GEOMETRÍA

"Este rey dividió la tierra entre todos los egipcios de tal manera que cada uno recibiera un cuadrilátero del mismo tamaño y que él pudiera obtener sus rentas de cada uno imponiendo una tasa que debía ser pagada anualmente. Pero todo aquel cuya parte el río hubiera arrastrado algo, tenía que notificarle lo ocurrido; entonces él enviaba supervisores que debían medir en cuanto había disminuido la tierra para que el propietario pudiera pagar de acuerdo con lo que le restaba, en proporción a la tasa total impuesta. De esta forma me parece que se originó la geometría, que luego pasó a Hellas."

Herodoto[30] sobre el rey Sesorlitris de Egipto

Áreas

En una superficie no podemos medir su tamaño a través de la longitud como hacemos con la línea, ahora requerimos otra forma de medir que nos permita comparar tamaños de superficies

Propiedades 3.1

- El área de una figura que sea la unión de dos figuras es la suma de las áreas de estas dos figuras
- Figuras equivalentes son las que tienen la misma área.


Herodoto

Del mismo modo que con la línea requerimos de una unidad de longitud, ahora se requiere una unidad de superficie. La unidad que ha resultado ser razonablemente conveniente es la unidad cuadrada en el caso del SI el metro cuadrado (m^2)[31]. Aquí, en general, sin referirnos a un sistema particular usaremos genéricamente u^2 (unidad cuadrada) para representar una unidad de área.

Área de un cuadrado.-

Partiendo de una u^2 vamos a tratar de medir el área de cualquier cuadrado

Claramente caben cierto numero de unidades enteras y faltará por medir unas franjas

El área total en general es

- El cuadrado de las unidades enteras que quepan en cualquier dirección más,
- dos veces la cantidad a lo ancho que quepa la unidad multiplicada por la fracción de unidad más,
- \+ la fracción al cuadrado.

[30] Herodoto, historiador griego nació en Halicarnaso alrededor de 480 a.n.e. Él realmente hizo aquellos viajes de los que nos habla en su obra, se sabe que estuvo en Egipto, Fenicia, Mesopotamia, el país de los escitas, entre otros. Inició distintos métodos que la historia requiere como ciencia social, entre otros contrastar las tradiciones orales con los restos arqueológicos y monumentos o recurrir a los sacerdotes y estudiosos de los lugares visitados. Así, por ejemplo, su investigación sobre el mito de Hércules le llevó hasta Fenicia. Ya la Antigüedad distinguió a Herodoto con el título de "padre de la historia". Escribió nueve libros (cada uno de los cuales lleva el nombre de una de las nueve Musas), narran las Guerras Médicas, aquellas que enfrentaron a Oriente con Occidente

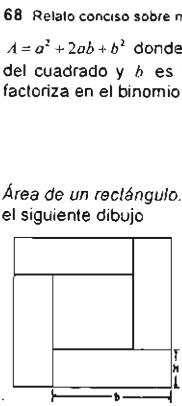
[31] Ver referencias al Sistema Internacional Pag. 27, revisar unidades derivadas

$A = a^2 + 2ab + b^2$ donde a es el entero de veces que cabe u^2 a lo largo de un lado del cuadrado y b es la fracción de un lado u^2; así el área del cuadrado, si se factoriza en el binomio al cuadrado, es la longitud del lado al cuadrado, es decir:

$$A = (a+b)^2$$

$$\boxed{A = L^2}$$

Área de un rectángulo.- Si tenemos un rectángulo se base b y altura h. Siguiendo el siguiente dibujo



Área de cada rectángulo llamémosla A_R.

Área del cuadrado mayor es: $(b+h)^2$

Área del cuadrado menor es: $(b-h)^2$

Usando la propiedad 1 se tiene $(b+h)^2 = 4A_R + (b-h)^2$

Desarrollando y despejando nos queda:

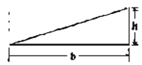
$$b^2 + 2bh + h^2 = 4A_R + b^2 - 2bh + h^2$$

$$4A_R = 4bh$$

$$\boxed{A_R = bh}$$

Área de un triángulo.- Como un triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo claramente el área es

$$A_{tr} = \frac{bh}{2}.$$



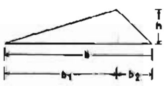

Herón

En un triángulo cualquiera se puede dividir en dos triángulos rectángulos, así que, queda la misma fórmula.

$$A_t = \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

$$A_t = \frac{bh}{2}$$

El problema, muy común, de encontrar la altura de un triángulo, en este momento, se puede convertir en una tortura. Aunque para efectos didácticos no resulta importante, para efectos prácticos una fórmula muy útil es:



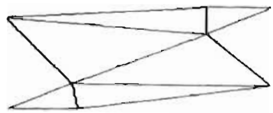
$$A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y p el semiperímetro, conocida como la fórmula de Herón[32]. Si gustas profundizar consulta el anexo 3 en la Pág. 149.

[32] Heron de Alejandría, matemático del mundo helénico, no era griego sino egipcio. Genio muy práctico acorde con las características egipcias. Herón es referente en ingeniería y agrimensura.

Área del polígono -

Como cualquier polígono se puede subdividir en triángulos, entonces se puede encontrar el área total como, la suma de las áreas de los triángulos.

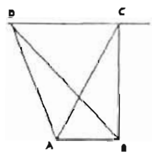


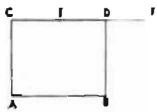
Como ves el triángulo es importante, su estudio abrió una rama matemática, la trigonometría. Ahora, triángulo significa tres ángulos y requerimos continuar con el concepto de ángulo y como medirlo. Pero primero resuelve estos Ejercicios.

Ejercicios 14

Determina el área de los siguientes figuras:

1. Un cuadrado de lado $12.76u$.
2. Un terreno rectangular de largo *125 m* y ancho de *30 m*.
3. Un triangulo de base $26\ u$ y altura $9.5u$
4. Muestra que el triángulo ΔABC es equivalente al ΔABD.
5. Muestra que el cuadrilátero $\square ABCD$ es equivalente al cuadrilátero $\square ABEF$.

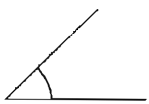




6. Cuánto debe valer el lado de un cuadrado para que tenga el doble del área respecto de un cuadrado de lado *1 u*.
7. Calcula el área del triángulo con longitudes en sus lados de $12u$, $15u$ y $24u$
8. Si el área de un cuadrado es de $2735u^2$ ¿cuál es la longitud de cada lado?
9. Dado un rectángulo de largo $125\frac{3}{4}u$ y ancho $43\frac{7}{10}$ ¿cuál es el área del triángulo formado a partir del rectángulo dividido por la diagonal?
10. Si el área de un rectángulo es de $48.5u^2$ y la base tiene una longitud de $14.25u$, encuentra las dimensiones del rectángulo

Ángulos

Un ángulo es la abertura que forman dos semirrectas, no paralelas, que se unen en un punto llamado vértice



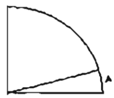
Medida de ángulos

Como en todo donde se intenta medir requerimos de una unidad que nos permita la comparación. Como definimos la unidad como la subdividimos y agrupamos nos conforma un sistema de medición

Actualmente se usan dos sistemas de medición de ángulos.

Sistema sexagesimal.

Si consideramos una circunferencia y la dividimos en 360 partes iguales, ahora si consideramos el ángulo que forman dos radios del circulo separados por $\frac{1}{360}$ forma la unidad llamada grado.



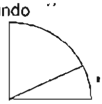
$A = 15^\circ\ 26'\ 38''$

Existen dos formas de subdividir cada grado.

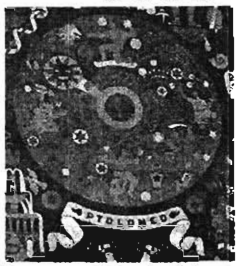
- Dividir cada grado en 60 partes, llamado minuto y a su vez éste se subdivide en 60 segundos.

  Símbolos de unidades del sistema sexagesimal[33]

  grado ° minuto ' segundo ''
- Otra forma de subdividir es con el sistema decimal de numeración, pero sólo en las fracciones decimales de grado.



$B = 25.754^\circ$

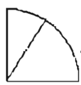


Teoría geocéntrica de Ptolomeo, fragmento del mural sur de la biblioteca central en la UNAM[34].

El sistema sexagesimal tiene su origen en los babilonios, ¡es increíble que lo sigamos usando!, como también en el reloj.

Sistema circular.

La unidad en este sistema es el radián. Un radián es un ángulo cuyos lados forman un arco con longitud igual a un radio de la circunferencia.



Observaciones:

1. La principal ventaja del sistema sexagesimal es que es el sistema usual.
2. Desde el punto de vista matemático resulta mejor el sistema circular.
3. Para los objetivos de este libro usaremos el sistema circular o se indicará claramente si la referencia es en el sistema sexagesimal.

Relación de grados y radianes en los ángulos.

Así como el diámetro cabe π veces en la circunferencia el radio cabe 2π veces en la circunferencia.

En el sistema sexagesimal circunferencia corresponde a 360°.

Podemos establecer la siguiente ecuación $\frac{g}{360} = \frac{r}{2\pi}$ donde g es un ángulo medido en grados y r es el mismo ángulo pero medido en radianes.

---

[33] Claudio Ptolomeo dividió el circulo en grados, minutos, segundos e incluso terceros con base en el sistema sexagesimal de los babilonios. Aunque propuso erróneamente la teoría geocéntrica del universo; por sus aportes a la astronomía y matemáticas le debemos reconocimientos.

[34] Juan O'Gorman nos dejó el testimonio más importante de su obra en los muros de esta biblioteca.

Ejemplos 3.69

Pasar $54^{\circ}\ 11'\ 30''$ a radianes

Despejar de la ecuación la r de radianes $r = \frac{2\pi}{360} g$

Sustituir en la ecuación pero como esta en minutos y segundos lo expresamos en términos de fracciones

$$r = \frac{\pi}{180}\left(54 + \frac{11}{60} + \frac{30}{3600}\right)$$

$$r = 0.30106\pi = 0.94581\,rad$$

Pasar $\frac{\pi}{6}$ *rad* del sistema circular a grados

Despejar de la ecuación la g de grados. $g = \frac{360}{2\pi} r$

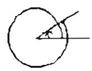
Sustituir en la ecuación

$$g = \frac{180}{\pi}\frac{\pi}{6} = 30^{\circ}$$

Propiedades 3.2

El sentido positivo de los ángulos es el contrario a las manecillas del reloj.

Dado que en términos prácticos aun cuando se puede referir a cualquier ángulo, es claro se repiten cada 2π de tal forma que si dos ángulos difieren en 2π prácticamente es el mismo, se les llama equivalentes



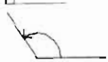
Cuando un ángulo $\pi < A \leq 2\pi$ este es equivalente al negativo, es decir, $-(2\pi - A)$

Clasificación de los ángulos

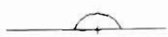
Agudos, si $0 \leq A < \frac{\pi}{2}$

Recto, si $A = \frac{\pi}{2}$

Obtuso, si $\frac{\pi}{2} < A < \pi$



Llano, si $A = \pi$



Complementarios, dos ángulos que suman $\frac{\pi}{2}$

Suplementarios, dos ángulos que suman π

Opuestos por el vértice, los lados de uno son las prolongaciones del otro

Teorema 3.1

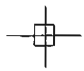
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales[35].

Hipótesis:	A es un ángulo opuesto por el vértice con B.
Tesis	$A = B$

Demostración

$A + C = \pi$	Ángulos suplementarios.
$B + C = \pi$	Ángulos suplementarios.
$A + C = B + C$	Transitividad de la igualdad
$A = B$	Restando C a la ecuación, queda demostrado.

Definiciones 3.1

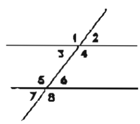


Dos rectas son *perpendiculares* si al cortarse forman cuatro ángulos iguales, este ángulo es $\frac{\pi}{2}$.

Dos rectas en un plano son paralelas cuando no se tocan por más que se prolonguen

Postulado 3.1

Si dos rectas paralelas cortadas por una tercera forma, con cada una, cuatro ángulos correspondientes



Ángulo 1 se corresponde con 5

Ángulo 2 " " " 6.

Ángulo 3 " " " 7.

Ángulo 4 " " " 8.

Los ángulos correspondientes son iguales.

[35] Se atribuye este teorema al griego Tales de Mileto ver reseña biográfica nota 22 en la Pág. 51.

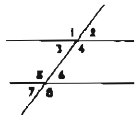
Teorema 3.2

Ángulos alternos internos son iguales.

Hipótesis: Dos rectas son paralelas, cortadas por una tercera.

Tesis: $\angle 3 = \angle 6$

$\angle 4 = \angle 5$



Demostración	
$\angle 2 = \angle 3$	Opuestos por el vértice
$\angle 1 = \angle 4$	
$\angle 2 = \angle 6$	Correspondientes.
$\angle 1 = \angle 5$	
$\angle 3 = \angle 6$	Transitividad de la igualdad, queda demostrado.
$\angle 4 = \angle 5$	

Análogamente

Teorema 3.3

Ángulos alternos externos son iguales.

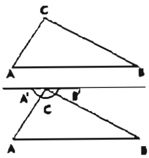
Teorema 3.4

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es π[38].

Hipótesis: Sea un triángulo cualquiera con ángulos A, B, C.

Tesis: $A + B + C = \pi$

Trazos auxiliares: Se establece una paralela a la recta $\overline{AB}$ que pase por el vértice C. Se forma un ángulo con la recta $\overline{BC}$ llamado B' y un ángulo con la recta $\overline{AC}$ llamado A'



Proclo

Demostración	
$A' + C + B' = \pi$	Forman un ángulo llano
$A' = A$	Ángulos alternos internos.
$B' = B$	Ángulos alternos internos.
$A + C + B = \pi$	Transitividad de las igualdades, queda demostrado

[38] "Eudemo el peripatético atribuye a los pitagóricos el descubrimiento de este teorema, de que todo triángulo tiene los ángulos iguales en suma a dos rectos" Proclo, *Sobre Euclides*. Proclo (410-485) nació en Constantinopla y murió en Atenas, el último científico pagano de relevancia principalmente como comentarista de Ptolomeo y Euclides.

Eratóstenes, medición de la Tierra.

(CLEOMEDES[37], Sobre el movimiento circular de los cuerpos celestes)

El procedimiento de Eratóstenes[38] sigue un camino geométrico, y parece algo más oscuro. Sin embargo, lo que él dice se aclara si suponemos lo siguiente. En primer lugar, que Siena y Alejandría están situadas bajo el mismo meridiano; en segundo lugar que la distancia entre las dos ciudades es de 5000 estadios; en tercer lugar, que los rayos enviados desde el Sol a distintas partes de la Tierra son paralelos; y en cuarto lugar, que las líneas rectas que cortan a paralelas forman ángulos alternos iguales; en quinto lugar, que los arcos comprendidos en ángulos iguales son semejantes, es decir, que tienen la misma proporción y la misma razón a sus propios círculos.

Quien domine esto comprenderá sin dificultad el método de Eratóstenes, que es así: Dice que Siena y Alejandría están bajo el mismo meridiano. Puesto que los meridianos son círculos máximos en el Cosmos, es necesario, que los que están debajo de éstos en la Tierra sean también círculos máximos. Por lo tanto, la magnitud que muestre este método para el círculo entre Alejandría y Siena, será también la del círculo máximo de la Tierra. Dice entonces, y así es, que Siena está situada bajo el círculo del trópico de verano. Así cuando el Sol está en Cáncer y hace el solsticio de verano, está exactamente en medio del cielo, y necesariamente cada gnomon de los relojes queda sin sombra por estar el Sol exactamente en la vertical, se dice que esto sucede en 300 estadios de diámetro. En Alejandría, sin embargo, a la misma hora cada gnomon de los relojes proyecta sombra, porque están situados más al norte que Siena.

Puesto que las dos ciudades están situadas bajo el mismo meridiano y círculo máximo, si trazamos un arco desde el extremo de la sombra del gnomon hacia la base misma del gnomon del reloj de Alejandría, este arco será un segmento del círculo máximo del cuenco, puesto que el cuenco del reloj está situado bajo el círculo máximo. Si a continuación imaginamos dos rectas trazadas a través de la Tierra desde cada gnomon se encontrarán en el centro de la misma. Como el reloj está situado bajo el Sol, si imaginamos una recta que vaya desde el Sol al extremo del gnomon del reloj, será una línea recta que va desde el Sol hasta el centro de la Tierra.

Si imaginamos otra recta desde el extremo de la sombra del gnomon, a través del extremo del gnomon, hacia el Sol, a partir del cuenco de Alejandría, ésta y la recta anterior serán paralelas, al conducir (luz) del Sol a distintas partes de la Tierra.

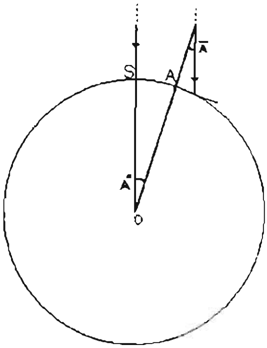
A estas paralelas las corta la recta que va desde el centro de la Tierra al gnomon de Alejandría, de modo que los ángulos alternos son iguales. De estos uno está en el centro de la Tierra, formado por el encuentro de las rectas que van desde los relojes al centro de la Tierra. El otro está en la intersección del extremo del gnomon de Alejandría y la recta trazada desde la punta de la sombra al Sol por el punto donde roza el gnomon.

---

[37] Cleomedes escribió hacia la mitad del primer siglo a n e.

[38] Consulta la nota biográfica 1 en la Pág. 8.

Este ángulo comprende el arco que va desde el extremo mismo de la sombra del gnomon hasta su base, y del centro de la Tierra el arco que va desde Siena a Alejandría.



Ahora bien, los arcos son semejantes entre sí, porque están comprendidos por ángulos iguales. La razón, pues, que tiene el del cuenco a su propio círculo, es la razón que tiene también el que va de Siena a Alejandría.

El del cuenco se encuentra que mide una cincuentava parte del propio círculo. Necesariamente, pues, la distancia entre Siena y Alejandría ha de ser una cincuentava parte del círculo máximo de la Tierra. Y esta distancia es de 5000 estadios. Por lo tanto, todo círculo tiene 250,000 estadios. Y éste es el procedimiento de Eratóstenes.

Ejercicios 15

Realiza las siguientes operaciones con ángulos del sistema sexagesimal

1. $50°\,12'\,45'' + 12°\,17'\,5''$
2. $10°\,38'\,17'' + 25°\,21'\,43''$
3. $40°\,45'\,12'' + 120°\,45'\,59''$
4. $-12°\,15'\,34'' + 135°\,56'\,59''$
5. $50.2125° + 15.8885°$
6. $199.743° + 55.588°$
7. $-40.95° + 12.56°$
8. $127.46° + (-68.89°)$
9. $58°\,42'\,45'' - 12°\,17'\,5''$
10. $10°\,21'\,17'' - 25°\,38'\,43''$
11. $44.35° - 12.86°$
12. $19.34° - 68.895°$
13. $35°\,11'\,8'' \times 5$
14. $-34.35° \times 2.5$
15. $\dfrac{-21°\,3'\,16''}{4} =$
16. $\dfrac{68.85°}{3.5} =$

Realiza las siguientes operaciones con ángulos del sistema circular

17. $1.85rad + 0.5083rad$
18. $2.85rad + (-1.69rad)$
19. $\frac{3\pi}{4}rad + \frac{\pi}{6}rad$
20. $-\frac{\pi}{12}rad + \frac{4\pi}{5}rad =$
21. $1.705rad - 0.5083rad$
22. $2.76rad - 1.27rad$
23. $\frac{3\pi}{4}rad - \frac{\pi}{6}rad =$
24. $-\frac{8\pi}{12}rad - \frac{2\pi}{5}rad =$
25. $0.4212rad \times 5.4$
26. $\left(\frac{-3\pi}{5}rad\right)\left(\frac{5}{2}\right) =$
27. $\frac{-2.94rad}{4}$
28. $\frac{[illegible]\,rad}{2} =$

Expresa los siguientes ángulos de minutos y segundos a su expansión decimal.

29. $10° 30'$ 30. $50° 12' 45''$ 31. $-40° 45' 12''$ 32. $135° 56' 59''$

Expresa los siguientes ángulos de su expansión decimal a minutos y segundos.

33. $15.75°$ 34. $1.55°$ 35. $-43.213889°$ 36. $8.45634°$

Expresa los siguientes ángulos del sistema sexagesimal al sistema circular.

37. $0°$ 38. $30°$ 39. $45°$ 40. $60°$

41. $90°$ 42. $10°$ 43. $-15°$ 44. $12'$

45. $25° 15' 30''$ 46. $30' 5''$ 47. $45.5°$ 48. $-25.625°$

Expresa los siguientes ángulos del sistema circular al sistema sexagesimal.

49. $2rad$ 50. $1.55rad$ 51. $-1.2rad$ 52. $8.45rad$

53. $\frac{\pi}{4}rad$ 54. $\frac{\pi}{6}rad$ 55. $\frac{5\pi}{7}rad$ 56. $\frac{9\pi}{4}rad$

Pasa a un ángulo equivalente que este entre 0 y 2π.

57. $7.2832rad$ 58. $285.34rad$ 59. $13\pi\ rad$ 60. $\frac{15}{4}\pi\ rad$

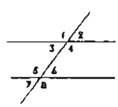
Encuentra el ángulo complementario al ángulo en el sistema correspondiente.

61. $58° 36' 48''$ 62. $72.34°$ 63. $\frac{\pi}{3}rad$ 64. $\frac{2\pi}{7}rad$

Encuentra el ángulo suplementario al ángulo en el sistema correspondiente.

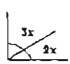
65. $114° 35' 24''$ 66. $\frac{3}{4}\pi$ 67 1.537 68. $156°$

69. Determina los valores de todos los demás ángulos sabiendo que $\angle 1 = 2.1853$.

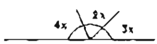


70. Demuestra el teorema que dice: Ángulos alternos externos son iguales. (ver teoremas de la Pág. 73)

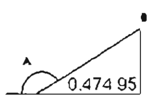
71. Determina el valor del ángulo x.



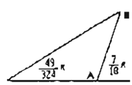
72. Calcula el valor del ángulo x.



73. Busca el valor del ángulo externo A y el ángulo interior B.



74. Encuentra los valores de los ángulos interiores A y B



Lee el artículo Eratóstenes, medición de la Tierra. (Pág 74) y contesta las preguntas.

75. ¿Qué es un estadio?
76. ¿Por qué es importante la suposición de que los rayos solares caen paralelos en la Tierra y; qué tan válida es, esta suposición?
77. ¿Qué son los círculos máximos de una esfera?
78. Muestra ejemplos de círculos máximos y de círculos no máximos de la Tierra.
79. ¿Por qué Eratóstenes piensa que las rectas que se prolongan de los gnomon de Siena y Alejandría se unen en el centro de la Tierra?
80. ¿Qué ángulo pudo medir Eratóstenes?
81. ¿Cómo son los ángulos A^{*} y $\overline{A}$?, argumenta tu respuesta
82. ¿Cuánto midió el ángulo según Eratóstenes?

    Exprésalo en radianes, como fracción de π y en su expansión decimal
83. ¿Cuánto es ese ángulo en el sistema sexagesimal?

    Exprésalo en grados, minutos, segundos y en su expansión decimal
84. ¿Cuánto es el mismo ángulo pero en sistema circular?

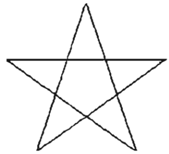
    Exprésalo en su expansión decimal y como fracción de π
85. Para resolver este problema, ¿cuál sistema de medición de angulos consideras más adaptable?, ¿por qué?
86. ¿Por qué Eratóstenes simplemente establece la relación de que la longitud de una vuelta completa de un meridiano terrestre es 50 veces la distancia de Siena a Alejandría?
87. Existían diversas medidas de un estadio

Estadio egipcio	$158\,m$
Estadio olímpico (Estadio Ático)	$192\,m$
Estadio romano del centro y sur	$123\,m$
Estadio romano del norte	$134\,m$

    La mayoría apoya que el Estadio que uso Eratóstenes fue el Estadio egipcio ¿Cuánto mide el meridiano terrestre según Eratóstenes, en unidades actuales?
88. El metro, en el siglo XIX, se definió como la diez millonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre ¿Cuánto se pensaba que media un meridiano terrestre en el siglo XIX?
89. Actualmente se considera que el meridiano terrestre mide $79\,km$ más Con la definición original del metro ¿Cuánto debería de medir el metro?
90. Proporcionalmente, ¿cuanto fue el error de Eratóstenes en su cálculo?
91. ¿Por qué es importante la consideración de que estén en el mismo meridiano Siena y Alejandría?, aunque ahora sabemos que no es exacta

Teorema de Pitágoras

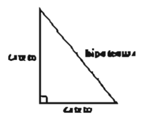
Quizá si tratamos de establecer cual es el segundo teorema más importante estaríamos en un gran problema, pero ¿cuál es el teorema más importante?, sin lugar a dudas, sin ningún temor, se puede afirmar que el teorema por excelencia es el TEOREMA DE PITÁGORAS[39].



Estrella pentagonal símbolo de los pitagóricos

Tablilla Plimpton 322

Los egipcios y los pueblos de babilonia[40] ya conocían la propiedad establecida en el teorema, al menos en ciertos triángulos rectángulos particulares y por supuesto los griegos lo demostraron. Se han escrito libros completos con el único tema de las diversas demostraciones de este teorema. Es el principio y fundamento de toda una rama de la matemática, la trigonometría. No puedes andar por la vida sin conocerlo.



Ya se dijo que triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo, pero su principal característica es que tiene un ángulo recto, es decir $\frac{\pi}{2} rad$. El lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa, en un triángulo rectángulo es el lado más largo de los tres A cada lado adyacente al ángulo recto se le llama cateto.

[39] Pitágoras (569 – 500 AC), discípulo de Tales de Mileto y por recomendación de éste visitó Egipto. Después se instaló en Crotona, una colonia jónica al sur de Italia, y realizó con tanto éxito sus enseñanzas de filosofía y matemáticas que acudían multitudes de todas clases a escucharlo. Tan grande fue la influencia de Pitágoras sobre sus discípulos que se constituyeron en una sociedad o hermandad.

[40] La más famosa de las tablillas mesopotámicas, con escritura cuneiforme, de 13 x 9 cm aproximadamente, excavada en las ruinas de la ciudad de Larsa, datada de 1900 a 1600 a.n.e., es por tanto una tablilla del periodo babilónico tardío. Esta fue a parar a manos de un editor neoyorquino, George Arthur Plimpton y estableció el 322 a su número de catálogo. En 1945 O. Neugebauer y A Sachs publicaron la relación de la tablilla Plimpton 322, la cual consta, en particular, de tres columnas y cada fila corresponde a la hipotenusa y a los lados de un triángulo rectángulo.

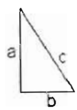
Teorema 3.5 de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Hipótesis: El triángulo es rectángulo.

a, b son catetos

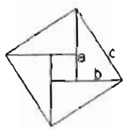
c es hipotenusa



Tesis: $c^2 = a^2 + b^2$

Trazos auxiliares

Con el mismo triángulo se copian hasta cuatro triángulos de forma que queda un cuadrado de lado c.



Demostración

c^2	Área total.
$4\left(\frac{ab}{2}\right)$	Área de los cuatro triángulos.
$(a-b)^2$	Área del cuadrado central.
$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (a-b)^2$	Área total es igual a la suma de áreas de las partes.
$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$	Expandiendo la expresión.
$c^2 = a^2 + b^2$	Simplificando, queda demostrado.

Ejercicios 16

Si a, b son los catetos y c es la hipotenusa de un triángulo rectángulo encuentra el lado faltante.

1. $a = 3\ cm$, $b = 4\ cm$
2. $a = 60\ m$, $c = 100\ m$
3. $b = 85\ km$, $c = 215\ km$
4. $a = 257\ u$, $b = 63\ u$

Encontrar la longitud de la diagonal de los siguientes rectángulos.

5. *LARGO* $10\ u$, *ANCHO* $7\ u$
6. *LARGO* $20\ u$, *ANCHO* $3\ 5\ u$
7. *LARGO* $17.34\ u$, *ANCHO* $7.84\ u$
8. *LARGO* $28\frac{35}{60}\ u$, *ANCHO* $12\frac{7}{15}\ u$

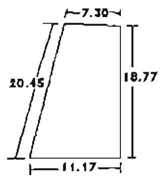
9. Calcula el área de un hexágono de lado 2 u.

10 Da una fórmula general para el área de un hexágono

11. Encuentra el área del terreno con las medidas especificadas sabiendo que el lado de 11.17 m es ortogonal al de 18.77 m.

Recomendación:
- Encuentra el área del triángulo donde tienes dos lados ortogonales.
- Determina la longitud de la diagonal con el Teorema de Pitágoras.
- Usa la fórmula de Herón para calcular el área del otro triángulo.
- Suma las áreas

12.



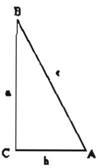
Capítulo 4. TRIGONOMETRÍA

Ahora vamos a ver la relación que existe entre los lados y los ángulos de los triángulos[80] Aun cuando principalmente se establecen estas relaciones en triángulos rectángulos, muchas relaciones existen para todo tipo de triángulos.

Funciones trigonométricas y su evaluación

Cuando tenemos una relación que a cada valor que toma una variable le asocia un único valor, decimos que esta relación es una función. Vamos a establecer funciones en donde todas ellas asocian valores de números reales a cada ángulo y es la forma de relacionar a los ángulos con los lados de un triángulo rectángulo.

Dado un triángulo con hipotenusa de longitud c, catetos de longitud a y b. Con ángulo recto $C=\frac{\pi}{2}$ y ángulos agudos A y B. Los ángulos y los lados se establecen opuestos para facilitar las referencias[81].



seno[82]

coseno

tangente

cotangente[83]

secante

cosecante[84]

$$\operatorname{sen} A=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{a}{c}$$

$$\cos A=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{c}$$

$$\tan A=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{a}{b}$$

$$\cot A=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{b}{a}$$

$$\sec A=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{c}{b}$$

$$\csc A=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{c}{a}$$

Las primeras identidades que podemos establecer son:

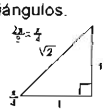
$\cot A=\frac{1}{\tan A}$ $\qquad \tan A=\frac{1}{\cot A}$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}$ $\qquad \cos A=\frac{1}{\sec A}$

$\csc A=\frac{1}{\operatorname{sen} A}$ $\qquad \operatorname{sen} A=\frac{1}{\csc A}$

Los triángulos rectángulos más usados son las escuadras de dibujo. Son conocidas como la escuadra de 45 y la escuadra de 60 o 30, así conocidas por los ángulos en grados. Calculemos las funciones trigonométricas de estos ángulos pero en el sistema circular. Antes veamos como deben ser los triángulos.

El más fácil de obtener es el que tiene el ángulo de $\frac{\pi}{4}$ ya que simplemente se obtiene de dividir una cuadrado por la diagonal, digamos de lado 1 y por teorema de Pitágoras obtenemos la longitud de la diagonal.



---

[80] La trigonometria nace asociada a la astronomía, a Hiparco de Nicea (190 a.n.e -120 a.n.e.) se le considera ahora como el padre de la trigonometría. Johan Müller conocido como Regiomontano fue quien erigió, en el siglo XV, a la trigonometría en disciplina independiente de la astronomía.

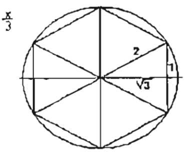
[81] Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576), matemático de Wittenberg elaboró el tratado titulado *Opus palatinum de triangulis* donde se define por primera vez a las funciones trigonométricas como razón entre los lados de un triángulo rectángulo.

[82] El origen curioso de la palabra seno viene de que Aryabhata lo llamó *jya-ardha* (cuerda media) se simplificó con el tiempo a *jya*. Por razones fonéticas derivó en *jiba*. Abreviadamente se limitó al uso de *jb*. Después, se pensó que la abreviación jb provenía de jaib que significa concavidad o hueco y que Gerardo de Cremona en 1150 tradujo al latín como sinus y pasó al español como seno.

[83] Los antiguos egipcios utilizaban de manera práctica lo que ahora conocemos como cotangente

[84] En la tablilla Plimpton 322, en escritura cuneiforme de los babilonios, además de aparecer una tabla de ternas pitagóricas tiene una columna con cosecantes.

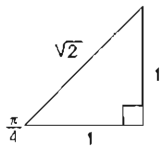
Similarmente, si tomamos la longitud del radio y lo vamos poniendo sucesivamente en la circunferencia obtenemos los lados de un hexágono. Tomamos un círculo de radio 2. El hexágono queda formado por 6 triángulos equiláteros con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

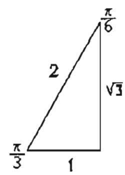


Ejemplo 70

Aplicar las funciones trigonométricas a los ángulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
sec		$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	

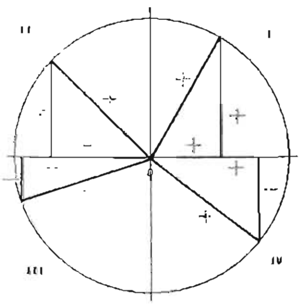




Signos de las funciones trigonométricas

En realidad se puede saber el valor de cada función trigonométrica de cualquier ángulo a partir de los ángulos que están entre $0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$. En lo que difieren es en el signo, con base en la figura de la derecha puedes generar la siguiente tabla de signos de cada función trigonométrica de acuerdo al cuadrante donde se encuentra el ángulo.

	I	II	III	IV
sen	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{-}{+}=-$
cos	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{+}{+}=+$
tan	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{-}{+}=-$
cot	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{+}{-}=-$
sec	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{+}=+$
csc	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{-}=-$



Cualquier ángulo negativo de otro es el ángulo reflejado de la horizontal, entonces si un ángulo está en el primer cuadrante su negativo está en el cuarto cuadrante y viceversa. Y si está en el segundo cuadrante su negativo está en el tercer cuadrante y viceversa. Observa como el seno cambia de signo tanto entre I y IV como entre el II y III. Mientras que el coseno mantiene los signos.

$$sen(-A) = -sen(A)$$
$$\cos(-A) = \cos(A)$$

Método 35 para calcular una función trigonométrica en términos de ángulos del primer cuadrante.	Ejemplo 71 Obtener el valor del coseno para el ángulo $\frac{2\pi}{3}$.
Determinar en que cuadrante está el ángulo.	Como $\frac{\pi}{2} < \frac{2}{3}\pi < \pi$ entonces está en el primer cuadrante.
Según el cuadrante considera le ángulo: I directo. II suplementario. III restado con π. IV equivalente negativo.	Tomamos el ángulo suplementario. $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$
Calcula el nuevo ángulo al aplicar la función trigonométrica.	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
La función trigonométrica en el ángulo deseado es el signo del ángulo del cuadrante y la función trigonométrica obtenida del paso 3.	$\cos\frac{2}{3}\pi = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Evaluación de las funciones trigonométricas

En general evaluar las funciones trigonométricas es difícil, por eso se han desarrollado métodos indirectos. Usaremos dos métodos, calculadora y tablas.

Uso de la calculadora.- Se requiere como mínimo una calculadora científica, observa que tenga las teclas *sen* o *sin*, *cos* y *tan*. En la parte superior cerca de la pantalla normalmente se encuentran unos interruptores que habilitan el uso del sistema de ángulos deseado. Para el sistema sexagesimal se indica mediante *sexagesimal*, *grados*, *deg*. Algunas calculadoras usan grad para referirse a gradiente, pero no tiene utilidad para nuestros objetivos. Finalmente, para el uso de radianes indicado por *radianes* o *rad*. Verifica en el manual de tu calculadora como usarla. Aquí requerimos el uso de radianes.

Ya en uso de radianes, las calculadoras usan la expansión decimal, para usar la forma de fracciones de π primero hay que valuar la fracción y después aplicar la función.

Ejemplo 72

Si queremos encontrar el valor del $\cos\frac{3}{29}\pi$.

Busca la tecla π, sino le encuentras pon el valor 3.1416.

$3.1416\times 3 = 9.4248$

Multiplica por 3 y divide entre 29.

$9.4248/29=0.32499$

Aplica la función cos.

$\cos 0.32499 = 0.94765$

Uso de tablas[85].- Que no tienes calculadora entonces al final del texto hay en los anexos una tabla de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente que son las más usuales.

La primera columna tiene los ángulos en radianes, la segunda tiene los mismos ángulos pero en grados en su expansión decimal. La tercera, cuarta y quinta columnas son el seno, coseno y tangente del ángulo respectivo.

A (rad)	a (grados)	sen	cos	tan
0.46	26.3561	0.4439	0.8961	0.4954
0.47	26.9290	0.4529	0.8916	0.5080
0.48	27.5020	0.4618	0.8870	0.5206
0.49	28.0749	0.4706	0.8823	0.5334
0.50	28.6479	0.4794	0.8776	0.5463

Ejemplos 73

1. Encontrar la tangente de $.48\ rad$.

En la primera columna, de radianes, busca el ángulo más cercano al deseado.

A (rad)	a (grados)	sen	cos	tan
0.46	26.3561	0.4439	0.8961	0.4954
0.47	26.9290	0.4529	0.8916	0.5080
0.48	27.5020	0.4618	0.8870	0.5206

Encuentra el valor en la columna de tangente.

A (rad)	tan
0.48	0.5206

Establece la igualdad

$\tan(0.48) = 0.5206$

2. Determinar el seno de 26.8°

En la segunda columna, de grados, busca el ángulo más cercano al deseado.

a (grados)	sen	cos	tan
26.3561	0.4439	0.8961	0.4954
26.9290	0.4529	0.8916	0.5080

26.9290 es el más cercano a 26.8.

Encuentra el valor en la columna de seno.

a (grados)	sen
26.9290	0.4529

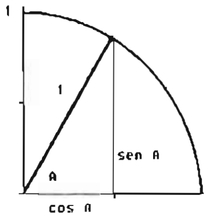
Establece la igualdad.

$sen(26.8) \approx 0.4529$

[85] En el Almagesto de Claudio Ptolomeo están las primeras tablas trigonométricas hechas sistemáticamente en el siglo II y no fueron mejoradas hasta finales de la Edad Media. En el texto, además trae la explicación de como fueron elaboradas. Rhaeticus en el siglo XVI elaboró una tabla de las seis funciones trigonométricas con intervalos de cada 10'', con una precisión de 10 decimales

Círculo unitario.- Estás sólo en una isla naufragado, salvas tu calculadora pero no tiene pilas, ni siquiera tienes este libro para defenderte de la vida y te urge evaluar funciones trigonométricas para con triangulaciones puedas obtener la distancia a una isla que se avista a lo lejos

Si tenemos un círculo de radio 1 podemos obtener directamente los valores de cualquier ángulo.

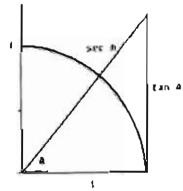


$$sen^2 A + \cos^2 A = 1$$

1. Como el $sen\,A = \dfrac{co}{h}$ si la hipotenusa vale 1, que es el caso, entonces directamente $sen\,A$ es el cateto opuesto. $sen\,A = co$.

   De igual modo puedes obtener el coseno como. $\cos A = \frac{ca}{h} = ca$.

   Aplicando el teorema de Pitágoras queda la siguiente e importante identidad la cual es válida para cualquier valor que tenga A.



$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

2. Así la $\tan A = \dfrac{co}{ca}$ si el cateto adyacente vale 1, como se ve en el nuevo triángulo, entonces directamente $\tan A$ es el cateto opuesto. $\tan A = co$.

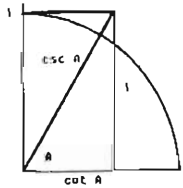
   De igual modo puedes obtener la secante como: $\sec A = \frac{h}{ca} = h$.

   También con el teorema de Pitágoras queda la siguiente identidad la cual también es válida para cualquier valor que tenga A.

   Observación: Quizá haz oído el término recta tangente, la recta que "pasa rozando" a la curva, viene precisamente de que en el círculo trigonométrico la tangente pasa tangencialmente a la curva del círculo.

3. Finalmente también, si ponemos un triángulo de forma que el cateto opuesto valga 1, como está el triángulo en la figura, entonces ahora $\cot A$ es el cateto adyacente y $\csc A$ es la hipotenusa.

   Finalmente otra vez con el maravilloso teorema de Pitágoras queda la siguiente identidad válida para cualquier valor de A.

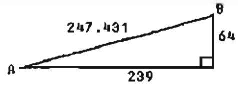


$$\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$$

Observación: Las dos primeras identidades son muy útiles y es importante tenerlas presentes, en caso contrario la vida se encargará de recordártelas.

Ejercicios 17

1. Dado el siguiente triángulo rectángulo calcula las funciones trigonométricas en los ángulos agudos.



2. Completa la tabla de ejemplo de la Pág. 82.

Determina en términos del ángulo positivo.

3. $sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 4. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ 5. $\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ 6. $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Encuentra los valores solicitados.

7. $\cos\frac{5}{6}\pi$ 8. $sen\frac{2}{3}\pi$ 9. $\cos\frac{1}{3}\pi$ 10. $\cos\frac{3}{2}\pi$

11. $sen\frac{1}{2}\pi$ 12. $\csc\frac{11}{6}\pi$ 13. $sen\frac{5}{4}\pi$ 14. $\cot\frac{5}{4}\pi$

15. $\sec\frac{7}{4}\pi$ 16. $\tan\frac{5}{3}\pi$ 17. $\tan\pi$ 18. $\tan\frac{3}{4}\pi$

Usando calculadora encuentra los valores solicitados.

19. $sen(1.48)$ 20. $\tan(0.87)$ 21. $sen(0.09)$ 22. $\cos(0.21)$

Con calculadora encuentra los valores solicitados.

23. $\cos(32.65^\circ)$ 24. $\tan(15^\circ\ 12'\ 26'')$ 25 $\tan(16.825^\circ)$ 26. $sen(1^\circ)$

Usando las tablas del anexo busca los valores siguientes.

27. $\tan(0.3454)$ 28. $\cos(1.39)$ 29. $sen(0.3454)$ 30. $\cos(0.0921)$

Usando las tablas del anexo busca los valores siguientes.

31. $sen(74.3^\circ)$ 32. $\cos(55\ 30')$ 33. $\tan(65.13^\circ)$ 34. $\tan(82.148^\circ)$

Usando las tablas del anexo busca los valores siguientes, haz las conversiones a sen, cos y tan.

35. $\cot(0.3454)$ 36. $\sec(1.39)$ 37. $\csc(0.3454)$ 38. $\sec(0.0921)$

Construye un círculo de 10 cm. de radio. Para cualquier ángulo deseado el cateto opuesto y el cateto adyacente lo puedes medir con centímetros y la precisión de milímetros este te da una precisión de 2 dígitos. Obtén midiendo con una regla en tu círculo:

39 $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 40. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 41 $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ 42. $\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Identidades con funciones trigonométricas

Este tema es inacabable ya que las posibilidades de establecer relaciones e identidades entre las funciones trigonométricas es enorme, por decir lo menos.

Sólo vamos a establecer las más usadas. Aun cuando ya hemos establecido algunas y aunque sería interesante tener en esta sección todas las relaciones, pero como en los anexos están un formulario de trigonometría, sería repetitivo establecerlas aquí también.

Si observamos los círculos unitarios de cada triángulo podemos establecer identidades entre las otras funciones trigonométricas y las que están en el triángulo respectivo.

Ejemplo 74

Del triángulo donde la hipotenusa es la unidad podemos establecer las otras funciones trigonométricas.

$$\tan A = \frac{sen\,A}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{sen\,A}$$

Es posible obtener a cada función trigonométrica en términos de alguna.

Ejemplo 75

Obtener a todas las demás funciones trigonométricas en términos sólo del seno.

$\cos A$

$sen^2 A + \cos^2 A = 1$

$\cos^2 A = 1 - sen^2 A$

$\cos A = \sqrt{1 - sen^2 A}$

$\tan A$

$\tan A = \frac{sen A}{\cos A} = \frac{sen A}{\sqrt{1-sen^2 A}}$

$\cot A$

$\cot A = \frac{\cos A}{sen A} = \frac{\sqrt{1-sen^2 A}}{sen A}$

$\sec A$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 A}}$

$\csc A$

$\csc A = \frac{1}{sen A}$

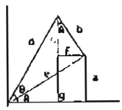
Funciones trigonométricas con la suma de ángulos.

Teorema 4.1

$$sen(A+B) = sen\,A\cos B + \cos A\,senB$$ [86]

Hipótesis: A y B son ángulos cualesquiera.

Tesis: $sen(A+B) = sen\,A\cos B + \cos A\,senB$



Trazos auxiliares

Se acomoda un ángulo seguido del otro para representar la suma.

Se trazan proyecciones verticales y horizontales.

El lado b es ortogonal a e.

[86] Haciendo uso de sus conocimientos sobre cuerdas, Ptolomeo pudo deducir la fórmula para el seno de la suma de ángulos y la ley de los senos.

Demostración

$sen\left(A+B\right)=\dfrac{a+c}{d}$	Longitud del cateto opuesto correspondiente al ángulo $A+B$ es $a+c$. Longitud de la hipotenusa correspondiente al ángulo $A+B$ es d.
$=\dfrac{a}{d}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{e}\dfrac{e}{d}+\dfrac{c}{b}\dfrac{b}{d}$	Separando la fracción en sus fracciones parciales. Sin afectar la igualdad multiplicando y dividiendo por un número adecuado.
$=sen\,A\cos B+\cos A\,sen\,B$	a es cateto opuesto y e hipotenusa del ángulo A. e es cateto adyacente y d hipotenusa del ángulo B. c es cateto adyacente y b hipotenusa del ángulo A. El triángulo considerado es semejante todos sus lados son ortogonales respectivamente. b es cateto opuesto del ángulo B.

Teorema 4.2

$\cos\left(A+B\right)=\cos A\cos B-sen\,A\,sen\,B$ Se deja de ejercicio.

Usando las identidades de la suma del seno y coseno de la suma se puede mostrar que

$$\tan\left(A\pm B\right)=\frac{sen\left(A\pm B\right)}{\cos\left(A\pm B\right)}=\frac{sen\,A\cos B\pm\cos A\,sen\,B}{\cos A\cos B\mp sen\,A\,sen\,B}$$

$$=\frac{\frac{sen\,A\cos B\pm\cos A\,sen\,B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B\mp sen\,A\,sen\,B}{\cos A\cos B}}=\frac{\frac{sen\,A\cos B}{\cos A\cos B}\pm\frac{\cos A\,sen\,B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\mp\frac{sen\,A\,sen\,B}{\cos A\cos B}}$$

$$\tan\left(A\pm B\right)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$$

Ejemplo 76

Encontrar $\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1)}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3-1}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}=3.732$$

Si los ángulos son iguales, es decir $A=B$ nos quedan las siguientes identidades.

$sen\,2\theta=2\,sen\,\theta\cos\theta$[87]	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-sen^2\theta$	$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

[87] Ptolomeo ya conocía las fórmulas para $sen\,2\theta$ y $\cos 2\theta$.

Ejemplos 77

1. $sen\left(\frac{2}{3}\pi\right) = sen\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$
3. $\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \tan\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2(\sqrt{3})}{1-3} = -\sqrt{3}$

Ley de los senos[88]

Los lados de cualquier triangulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

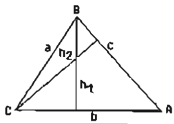
Hipótesis: ΔABC es un triángulo cualquiera.

Tesis: $\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$

Willebrord Van Roijen Snell

Trazos auxiliares

Se traza las alturas h_1 y h_2 formando triángulos rectángulos.



Demostración

$sen\,C = \frac{h_1}{a} \Rightarrow h_1 = a\,sen\,C$	Considerando el triángulo que forman c, h_1 y la proyección de c sobre a.
$sen\,A = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c\,sen\,A$	Ahora con el triángulo que forman b, h_1 y la proyección de b sobre a.
$a\,sen\,C = c\,sen\,A$	Transitividad de igualdades.
$\frac{a}{sen\,A} = \frac{c}{sen\,C}$	Dividiendo la igualdad entre $sen\,B\,sen\,C$.
$sen\,A = \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b\,sen\,A$	También, con él que forman c, h_2 y la proyección de c sobre b.
$sen\,B = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a\,sen\,B$	Y así, con él que forman a, h_2 y la proyección de a sobre b.
$a\,sen\,B = b\,sen\,A$	Transitividad de igualdades.
$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$	Dividiendo la igualdad entre $sen\,A\,sen\,C$.
$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$	Que demostrado ya que se cumple la doble igualdad.

[88] Aun cuando se sabe que Claudio Ptolomeo dedujo la ley de los senos, el descubrimiento de la ley de los senos se le reconoce generalmente a Willebrord Van Roijen Snell (1580-1626), originario de Leiden, Holanda. Llegó a la cátedra de la universidad de Leiden, se le considera el fundador de la geodesia moderna, su principal aporte fue la ley de refracción de la luz en 1621. Cuando Descartes publicó su "Discurso del método" en 1637, incluyó la ley de los senos a la que había llegado Snell. Hoy en día esta ley lleva el nombre de Descartes, ley de Snell o ley de los senos.

Ley de los cosenos[69]

El cuadrado de un lado de cualquier triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de esos lados por el coseno del ángulo que forman.

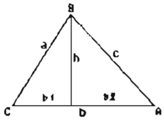
Hipótesis: ΔABC es un triángulo cualquiera.

Tesis:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Trazos auxiliares:

Se traza la altura h formando triángulos rectángulos y se divide el lado b en los lados b_1 y b_2.



Demostración

Sólo se demostrará la segunda igualdad.	Son equivalentes entre si.
$b_1^2 + h^2 = a^2$	Por T. de Pitágoras Δcha_1.
$b_2^2 + h^2 = c^2$	También Δbha_2.
$b_1^2 + b_2^2 + 2h^2 = a^2 + c^2$	Suma las igualdades.
$b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 + 2h^2 = a^2 + c^2 + 2b_1b_2$	Suma $2b_1b_2$ a la ecuación.
$(b_1 + b_2)^2 = a^2 + c^2 + 2b_1b_2 - 2h^2$	Factoriza a la izquierda el trinomio, resta $2h^2$ a la ecuación y
$b^2 = a^2 + c^2 + 2(b_1b_2 - h^2)$	factoriza el 2 en la derecha.
$b^2 = a^2 + c^2 + 2[(a\cos C)(c\cos A) - (a\,sen C)(c\,sen A)]$	Propiedades de proyecciones (ver ejercicio 38)
$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(A + C)$	Factorizando en coseno de la suma Teorema 4.2.
$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\pi - B)$	Ángulos interiores del triángulo Teorema 3.2
$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac[\cos\pi\cos(-B) - sen\,\pi\, sen(-B)]$	Expandiendo el coseno de la suma Teorema 4.2
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	Propiedades del seno y coseno: $\cos\pi = -1$, $\cos(-A) = \cos A$, $sen\,\pi = 0$.
	Queda demostrado.

Observación: La ley de los cosenos es la generalización moderna del Teorema de Pitágoras.

[69] Las proposiciones 12 y 13, hacia el final del segundo libro de los *Elementos* de Euclides sobre *álgebra geométrica* (Ver A3 Fórmula de Herón en la Pág. 149), establecen una generalización al Teorema de Pitágoras y éstos han devenido ya con los conocimientos en trigonometría en la *ley de los cosenos*.

Más identidades.- Si combinamos identidades se pueden obtener una cantidad increíble de identidades, para ilustrar la forma de obtenerlas y porque las siguientes identidades son muy útiles, veamos éstas:

$$sen^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$\cos^2 A - sen^2 A = \cos 2A$$

Sumando las igualdades tenemos

$$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$$

Despejando el $\cos^2 A$

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2A$$

Si en lugar de sumar restamos

$$2sen^2 A = 1 - \cos 2A$$

Despejando el $sen^2 A$

$$sen^2 A = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2A$$

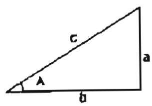
Teorema 4.3

$a\cos D + b\,sen\,D = c\cos(D - B)$ donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan B = \dfrac{b}{a}$

Hipótesis:	Sea D un ángulo cualquiera, a y b unas constantes cualesquiera.
Tesis:	Existe B un ángulo y c una constante de forma que $a\cos D + b\,sen\,D = c\cos(D - B)$.

Trazos auxiliares:

Con los coeficientes del coseno y seno se construye un triángulo de catetos a y b, respectivamente. El ángulo que forma la hipotenusa con b lo llamamos A.



Demostración

$\frac{a}{c} = sen\,A \Rightarrow a = c\,sen\,A$	Por definición de seno y despejando a.
$\frac{b}{c} = \cos A \Rightarrow b = c\cos A$	Por definición del coseno y despejando b
$b\cos D + a\,sen\,D = c\cos A\cos D + c\,sen\,A\cos D$	Sustituyendo a y b.
$= c(\cos A\cos D + sen\,A\cos D)$	Factorizando c.
$= c(\cos(-A)\cos D - sen(-A)\cos D)$	Propiedades de los ángulos negativos
$= c\cos(D - B)$	Identidad del coseno de una suma de ángulos.

Ejercicios 18

1. Establece, con el círculo unitario respectivo, identidades usando *tan* y *sec*.
2. Usando el círculo unitario respectivo, encuentra identidades usando *cot* y *csc*.
3. A cada función trigonométrica exprésala en términos sólo de la tangente.
4. Demuestra que $\cos(A+B)=\cos A\cos B-sen\,A\,sen\,B$.

5. $sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ 6. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ 7. $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

8. $\tan\left(2\frac{\pi}{3}\right)$ 9. $sen\left(2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 10. $\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)$ 11. $sen\left(2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

12. Demuestra que $\cos(A-B)=\cos A\cos B+sen\,A\,sen\,B$.

Si $sen\,A=\frac{\sqrt{2}}{3}$ y $\cos B=\frac{1}{3}$ calcular:

13. $sen(A+B)$ 14. $\cos(A+B)$ 15. $\tan(A+B)$ 16. $\cos(B-A)$

17. $sen(A-B)$ 18. $\tan(B-A)$ 19. $\cot(A+B)$ 20. $\sec(B-A)$

21. Mostrar que $\tan x\,sen\,2x=2\,sen^2x$.

Busca en las tablas el $sen(1.51)$ y usando el seno del doble y de la suma calcula:

22. $sen(3.02)$ 23. $sen(4.53)$

Si conoces tres elementos de un triángulo con al menos un lado, se puede determinar los otros tres faltantes. Encuentra los datos faltantes en cada caso.

24. rectángulo	25. rectángulo	26. lado $a=23$	27. lado $a=25$
cateto $a=12$	hipotenusa $c=54$	lado $b=12$	lado $b=18$
cateto $b=9$	ángulo $A=0.29$	lado $c=30$	lado $c=10$
28. lado $a=165$	29. lado $a=15$	30. lado $a=128$	31. lado $a=15$
lado $b=120$	lado $b=9$	ángulo $B=1$	ángulo $B=1.4$
ángulo $C=1.03$	ángulo $C=.92$	ángulo $C=.8$	ángulo $C=.92$

Calcula las áreas de los siguientes triángulos.	Recomendación
32 lado $a=23$, lado $b=12$, lado $c=30$.	Usa la fórmula de Herón.
33. lado $a=25$, lado $b=18$, lado $c=10$.	Usa la fórmula de Herón.
34. lado $a=165$, lado $b=120$, ángulo $C=1.03$.	Usa la ley de los cosenos.
35. lado $a=15$, lado $b=9$, ángulo $C=.92$.	Usa la ley de los cosenos.
36 lado $a=128$, ángulo $B=1$, ángulo $C=.83$.	Usa la ley de los senos.
37. Lado $a=15$, ángulo $B=1.4$, ángulo $C=.92$	Usa la ley de los senos.

Si conoces la hipotenusa y un ángulo entonces el cateto adyacente es el producto de la longitud de la hipotenusa por el coseno del ángulo y el cateto opuesto es el producto de la longitud de la hipotenusa por el seno del mismo. Calcula la altura con este principio y obtén el área con la fórmula tradicional en los triángulos de:

38. Problema 34. 39. Problema 35.

Capítulo 5. GEOMETRÍA ANALÍTICA

Rene Descartes

Antes de Descartes[51] y Fermat las dos ramas principales de la matemática caminaban separadas. Se reconoce que el álgebra y la geometría fueron integradas por Descartes en el siglo XVII fundando así la geometría analítica. De hecho el nombre de coordenadas cartesianas[52] viene de su apellido.

Pierre Fermat

Si bien el concepto de curvas como lugar geométrico viene desde los griegos ya para la época de Descartes había el suficiente desarrollo algebraico. Establezcamos mediante la siguiente definición la idea de lugar geométrico.

Lugar geométrico.- Conjunto de puntos que satisfacen una propiedad.

Esta sección tratará de algunos de los lugares geométricos más conocidos, la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Comencemos con la más sencilla, pero la más usual.

Recta

Cuando se estudio ecuaciones lineales vimos que éstas generaban rectas. Ahora veremos como desde el punto de vista geométrico de las rectas las podemos estudiar de manera analítica.

Recta.- Es el lugar geométrico de todos los puntos que están en una sola dirección.

Pendiente de la recta

Para determinar la dirección requerimos medir la inclinación la cual podemos medir mediante ángulos. Sin embargo, en las ecuaciones lineales no tenemos nada que nos relacione la ecuación con ángulos.

Dada una ecuación lineal cualquiera $Ax+By+C=0$, si despejamos a y obtenemos $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ vemos que depende de dos coeficientes, que también se acostumbra decir parámetros, que determinan a la ecuación lineal. Renombrando la ecuación, de modo más simple, a $y=mx+b$, donde los parámetros $-\frac{A}{B}=m$ y $-\frac{C}{B}=b$. Ahora veamos como afectan en las gráficas estos coeficientes.

Observación: Si el coeficiente de y es cero, es decir $B=0$, entonces en ese caso no se puede despejar.

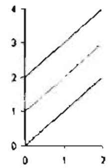
---

[51] Rene Descartes (1596 – 1650) es considerado generalmente como el inventor de la geometría analítica, aunque debe compartir el título con Pierre Fermat. Descartes publicó *La Géometrie* como un apéndice del *Discours* en 1673.

[52] Ver coordenadas cartesianas en Pág. 54.

Si fijamos $m=1$ y tomamos distintos valores de b y vemos las diferentes gráficas.

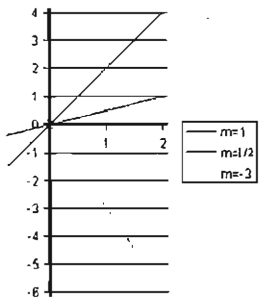
	b=0	b=1	b=2
x	y=x	y=x+1	y=x+2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4



Observamos que al variar b lo que obtenemos es rectas paralelas o sea todas en la misma dirección entonces b no tiene nada que ver, respecto a la inclinación.

Hagamos ahora lo análogo, pero con la otra constante, fijemos ahora $b=0$ y variemos m.

	m=2	m=0.5	m=-3
x	y=2x	y=1/2x	y=-3x
0	0	0	0
1	2	0.5	-3
2	4	1	-6



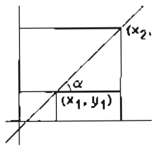
Claramente el coeficiente de x tiene que ver con la inclinación, pero para relacionar números con ángulos lo que tenemos son las funciones trigonométricas, la función que resulta adecuada es la tangente ya que nos relaciona el cateto opuesto entre el cateto adyacente que en construcción es muy usado para hablar de la pendiente de un desagüe o de la pendiente de un techo. Por ejemplo, la tubería de desagüe requiere una pendiente de 2% eso quiere decir que por cada 100 cm. de avance horizontal tu debes subir 2 cm. $\frac{2}{100}=.02$, si observas, es precisamente la definición de tangente. Avance horizontal equivale a cateto adyacente y lo que subes equivale a cateto opuesto.

Definición

La pendiente de una recta es $m = \tan\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la recta con respecto a la horizontal.

Como dos puntos determinan una recta, calculemos la pendiente de una recta dados dos puntos. Sean dos puntos de coordenadas $(x_1, y_1);(x_2, y_2)$.

Consideremos que los tenemos gráficamente y tracemos las proyecciones verticales y horizontales de cada uno. Lo podemos hacer si la recta no es vertical.



La $\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde $y_2 - y_1$ es el cateto opuesto del triángulo a la vista y $x_2 - x_1$ es el cateto adyacente. Entonces:

> La pendiente dados dos puntos es
>
> $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ejemplo 5.1

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5,-1);(-2,3)$, no importa el orden en que lo consideremos, sea $(x_1, y_1) = (5,-1)$ y $(x_2, y_2) = (-2,3)$ entonces

$$m = \frac{(3)-(-1)}{(-2)-(5)} = \frac{3+1}{-2-5} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$$

Ecuación de la recta dados dos puntos

Ahora ya nos podemos plantear como describir una recta. Cualquier punto (x, y) que este en la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1);(x_2, y_2)$ debe satisfacer que: La pendiente entre $(x_1, y_1);(x_2, y_2)$ debe ser igual a la pendiente entre $(x_1, y_1);(x, y)$.

Es decir, cualquier punto de coordenadas (x,y), si está en la recta, debe cumplir

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Se acostumbra que a la ecuación anterior se le multiplique por $x-x_1$ y es conocida como:

> La ecuación de la recta dados dos puntos es
>
> $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$
>
> donde $(x_1,y_1);(x_2,y_2)$ son los puntos conocidos.

Ejemplo 5.2

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,8);(-2,2)$.

Sea $(x_1,y_1)=(1,8)$ y $(x_2,y_2)=(-2,2)$ entonces

$$y-(8)=\frac{(2)-(8)}{(-2)-(1)}(x-(1))$$

$$y-8=2(x-1)$$

Si llevamos la ecuación a la forma igualada a cero, expandiendo el lado derecho y restando a la ecuación el mismo lado derecho la recta se obtiene

$$-2x+y-6=0.$$

Observación: A la forma igualada a cero se conoce como:

> La forma general de la ecuación de la recta es
>
> $$Ax+By+C=0,$$
>
> donde A, B y C son constantes.

Ecuación de la recta conocido un punto y su pendiente

Por otro lado, como sabemos que la expresión $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m$, entonces si ya conoces directamente el valor de la pendiente y además conoces un punto, se puede directamente encontrar la ecuación de la recta así:

> La ecuación de la recta dados un punto y la pendiente es
>
> $$y-y_1=m(x-x_1),$$
>
> donde conocemos a m la pendiente y (x_1,y_1) un punto.

Ejemplo 5.3

Encuentra la recta que pasa por el punto $(-8,7)$ y tiene pendiente $m=-\frac{4}{5}$.

$$y-(7)=\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(x-(-8)\right)$$

En la forma general, multiplicando por 5 la ecuación y restando el lado derecho a la ecuación queda

$$5y-35=-4(x+8)$$
$$4x+5y-3=0$$

Ecuación de la recta conocida la pendiente y la ordenada al origen

Si el punto que conocemos es un punto del eje y, digamos $(0,b)$ tenemos:

$y-b=m(x-0)$

Si despejamos y nos queda una forma usual que se conoce como:

> La forma pendiente – ordenada al origen de la ecuación de la recta es
>
> $$y=mx+b,$$
>
> donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

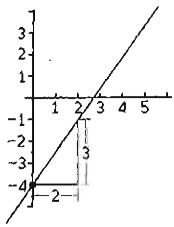
La importancia de esta forma es porque nos dice directamente donde la recta cruza al eje y y con que pendiente, nos permite una manera rápida de graficar.

Ejemplo 5.4

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,-4)$ y tiene pendiente $m=\frac{3}{2}$.

$$y=\frac{3}{2}x-4$$

Su gráfica la podemos establecer rápidamente



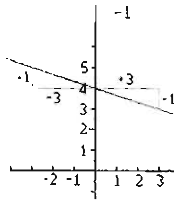
Ordenada al origen -4 y

pendiente $\dfrac{+3}{+2}=\dfrac{c.opuesto}{c.adyacente}$.

Ejemplo 5 5

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,4)$ y tiene pendiente $m=-\frac{1}{3}$.

$y=-\frac{1}{3}x+4$



Ordenada al origen 4 y

pendiente $-\frac{1}{3}=\frac{-1}{+3}=\frac{+1}{-3}=\frac{c.opuesto}{c.adyacente}$.

Observación: Cuando consideras los signos de los elementos de la pendiente sigues la misma lógica que en las coordenadas cartesianas.

	Horizontal	Vertical
+	Derecha	Arriba
-	Izquierda	Abajo

Veamos ahora una forma más de expresar la ecuación de la recta, si tenemos dos puntos uno en cada eje $(a,0);(0,b)$, usando la fórmula de la ecuación conocidos dos puntos se tiene

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

Si a esta ecuación la dividimos entre b, luego se expande el lado derecho y además sumando $\frac{x}{a}$ a la ecuación, se obtiene:

La forma simétrica de la ecuación de la recta es

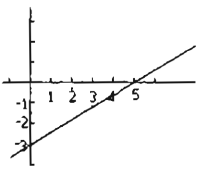
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

donde a es la abscisa al origen y b la ordenada al origen.

Ejemplo 5.6

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5,0)$ y $(0,-3)$.

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$$



Abscisa al origen 5 y
Ordenada al origen -3.

Ejemplo 5.7

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(9,-1)$ y $(-9,2)$, expresarla en las tres formas de la ecuación de la recta.

Sea $(x_1,y_1)=(9,-1)$ y $(x_2,y_2)=(-9,2)$; usando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa dos puntos se tiene

$$y-(-1)=\frac{(2)-(-1)}{(-9)-(9)}(x-(9)).$$

en su forma pendiente – ordenada al origen

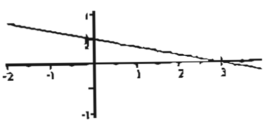
$$y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}.$$

llevando a la forma general

$$x+6y-3=0.$$

finalmente, en su forma simétrica

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1.$$



Abscisa al origen 3 y
Ordenada al origen $\frac{1}{2}$.

Entre las tres formas de expresar una recta se puede con álgebra pasar, cuando la misma álgebra lo permite, de una a otra.

Ventajas y desventajas de las formas de representación de una recta

1. Forma general.- Es la ecuación igualada a cero: $Ax+By+C=0$. Puede representar a cualquier recta pero no es única su representación. Dos rectas son la misma si existe una constante que multiplicada a una nos da la otra.

   Ejemplo 5.8

   $$5x-3y-7=0$$
   $$-35x+21y+49=0$$

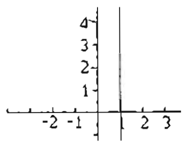
   Son la misma recta si multiplicamos por -7 a la primera nos da la segunda.

2. Forma pendiente – ordenada al origen.- Es la más usual y cómoda de usar para graficar, evaluar y nos dice directamente la pendiente y el corte al eje y. No se puede utilizar para expresar rectas verticales

   Ejemplo 5.9

   $$x-8=0$$

   En esta recta no se puede despejar y puesto que no está presente en la ecuación, por tanto no se puede expresar en la forma pendiente – ordenada al origen. Sin embargo es una recta y la podemos graficar, sólo que es vertical.

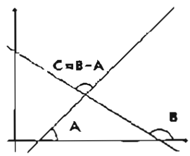


3. Forma simétrica nos dice directamente los cortes a los ejes, pero no sirve para las rectas verticales, ni horizontales, ni las que pasan por el origen. De hecho tiene tantos inconvenientes, que no es muy usual; sin embargo, es la forma más propia desde el punto de vista de la geometría analítica.

Ángulo entre dos rectas.

Considerando la figura y la tangente de la suma, tenemos

$$\tan C=\tan\left(B-A\right)=\frac{\tan B-\tan A}{1+\tan B\tan A}.$$



Como las pendientes de las rectos son

$m_1=\tan A$ y $m_2=\tan B$.

Entonces

$$\tan C=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} \tag{5.1}$$

y

$$C=\arctan\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}.$$

Ejemplo 5.10

Encontrar el ángulo entre las rectas $y = \frac{1}{3}x + 10$, $y = \frac{5}{6}x + 4$.

El ángulo entre ellas está dado por la fórmula $C = \arctan\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, sea $m_1 = \frac{1}{3}$ y $m_2 = \frac{5}{6}$, entonces

$$C = \arctan\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \arctan\frac{6}{7} = 0.70863$$

Rectas paralelas.- Cuando el ángulo entre las rectas es cero son paralelas.

$$C = 0 \Leftrightarrow \tan C = 0 \Leftrightarrow m_2 - m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2 = m_1$$

Ahora podemos dar un criterio de paralelismo más preciso que el que teníamos hasta ahora, y es:

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente. Esto es cuando $m_2 = m_1$.

Ejemplo 5.11

Dadas las rectas $6x - 2y + 8 = 0$; $y = 3x + 10$, determinar si son paralelas.

La segunda recta su pendiente es claramente $m_2 = 3$

De la primera despejamos para llevarla a su forma pendiente – ordenada al origen

Sumamos a la ecuación $-6x - 8$ y obtenemos

$$-2y = -6x - 8,$$

dividimos la ecuación entre -2 y queda

$$y = 3x + 4,$$

la cual tiene la misma pendiente

$$m_1 = 3,$$

por lo tanto son paralelas.

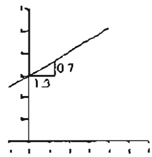
Ejemplo 5.12

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(-2, \frac{25}{13}\right)$ y es paralela a la recta $7x - 13y + 10 = 0$.

La pendiente de la recta es

$$m_1 = -\frac{7}{-13} = \frac{7}{13}.$$

La ecuación de la recta paralela[53] es



$$y - \frac{25}{13} = \frac{7}{13}\left(x - (-2)\right).$$

En su forma pendiente – ordenada al origen

$$y = \frac{7}{13}x + 3.$$

Rectas perpendiculares.- Cuando el ángulo entre las rectas es recto no tiene tangente, es decir no existe $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$. La expresión (5.1) no existe cuando $1 + m_2 m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2 m_1 = -1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$ Así podemos decir que un criterio de perpendicularidad entre dos rectas es:

Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes

$m_1 m_2 = -1$.

Ejemplos 5.13

Determinar si las siguientes rectas son perpendiculares:

a) $-3x - 8y + 9 = 0$; $7x + 8y - 6 = 0$

$$m_1 = -\frac{-3}{-8} = -\frac{3}{8};\ m_2 = -\frac{7}{8}$$

$m_1 m_2 = \left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{21}{64} \neq -1$, por tanto no son perpendiculares.

b) $6x - 10y + 12 = 0$; $5x + 3y - 2 = 0$

$$m_1 = -\frac{6}{-10} = -\frac{6}{10};\ m_2 = -\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$m_1 m_2 = \left(-\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{30}{30} = -1$, por tanto sí son perpendiculares.

Además despejando se pueda obtener que

La pendiente de la recta ortogonal o perpendicular a una conocida es: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

---

[53] Aplicación de la fórmula de la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente, ver Pág., 96

Ejemplos 5.14

1. Encontrar la pendiente perpendicular a la recta $-2x+8y-10=0$.

   La pendiente de la recta es $m_1=-\frac{-2}{8}=\frac{1}{4}$.

   La pendiente de la recta ortogonal es $m_2=-\frac{1}{\frac{1}{4}}=-4$.

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(7,-4)$ y es perpendicular a la recta $2x+5y-9=0$.

   La pendiente de la recta original es $m_1=-\frac{2}{5}$.

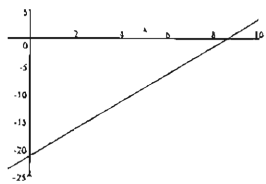
   La pendiente de la recta ortogonal es $m_2=-\frac{1}{-\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$.

   La ecuación de la recta ortogonal es

   $$y-(-4)=\frac{5}{2}(x-7).$$

   En su forma pendiente – ordenada al origen

   $$y=\frac{5}{2}x-\frac{43}{2}.$$



Ejercicios 19

Encuentra la pendiente de las rectas que pasan por los puntos:

1. $(8,21);(-6,13)$ 2. $(-9,12);(8,-11)$ 3. $(-12,-15);(-12,-14)$ 4. $(5,0);(0,13)$

Determina las rectas que pasan por los puntos y exprésalas en las tres formas:

5. $(-9,6);(20,-13)$ 6. $(-9,-12);(-8,-11)$ 7. $(\frac{1}{4},8);(1,14)$ 8. $(-\frac{2}{3},\frac{3}{8});(\frac{5}{6},-\frac{2}{7})$

Obtén la ecuación de las rectas, deja cada una en la forma pendiente – ordenada.

9. $(-7,8)$; $m=\frac{6}{7}$ 10. $(1,1)$; $m=-\frac{12}{5}$ 11. $(7.54,12.6)$; $m=8.5$ 12. $(-8,6.3)$; $m=-5.6$

Establece la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas:

13. $5x+8y+28=0$ 14. $3x-12y+16=0$ 15. $6x+9y-12=0$ 16. $-5x+8y-28=0$

Establece los cortes a los ejes de las siguientes rectas:

17. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{6}=1$ 18. $5x-35=0$ 19. $y=\frac{2}{9}x+2$ 20. $2x+y=0$

Gráfica las rectas de los problemas:

21 2 22. 7 23 10 24. 13 25. 18

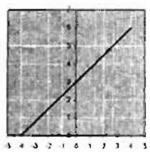
Encuentra el valor de y donde la recta y el punto x están dados.

26. $y = 3x - 8$, $x = 4$ 27. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $x = 5$ 28. $3x + 8y - 6 = 0$, $x = 7$ 29. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$, $x = 2$

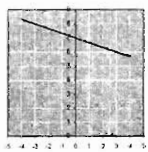
Especifica el valor de x donde la recta y el valor y son:

30. $y = 2x + 7$, $y = 11$ 31. $y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$, $y = -\frac{5}{7}$ 32. $4x + 6y - 9 = 0$, $y = 15$ 33. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$, $y = 4$

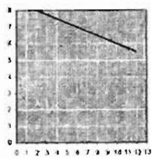
Escribe la ecuación de la recta que esta en cada gráfica.



34.



35.



36.

Determina si los siguientes pares de rectas son iguales o diferentes

37. $-4x + 7y - 14 = 0$, $-\frac{8}{7}x + 2y - 4 = 0$ 38. $x + 6y + 9 = 0$, $3x + 2y + 3 = 0$ 39. $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3} = 0$, $-18x - 15y + 20 = 0$

Determina si los siguientes pares de rectas son paralelas.

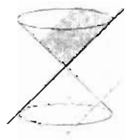
40. $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3} = 0$, $\frac{4}{7}x + \frac{5}{14}y = 0$ 41 $-4x + 6y - 14 = 0$, $-2x + 3y + 6 = 0$ 42. $2x + 4y + 8 = 0$, $-x + 2y + 3 = 0$

Obtén cada ecuación de recta paralela a la recta dada, que pasa por el punto dado.

43. $5x - 3y + 10 = 0$; $(10, -2)$ 44. $y = -\frac{7}{4}x + \frac{9}{2}$; $(-1, -3)$ 45 $\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$; $(3, 7)$

Determina si los siguientes pares de rectas son perpendiculares.

46. $y = -3x + 8$, $y = \frac{1}{3}x + 9$ 47. $y = -\frac{1}{2}x - 2$, $x - 2y + 3 = 0$ 48. $18x + 15y - 20 = 0$, $-5x + 6y = 0$



Si se ajusta un plano exactamente a la generatriz de un cono la intersección es una recta.

Encuentra la pendiente ortogonal a las rectas siguientes.

49. $y = \frac{3}{4}x + 8$ 50. $3x + 5y - 6 = 0$ 51. $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

Obtén la ecuación de la recta ortogonal una recta dada y pasa por el punto dado

52. $y = -\frac{3}{5}x - 1$; $(6, 0)$ 53 $12x - 3y - 9 = 0$; $(-4, 12)$

54. $-\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$; $(3, 5)$

Circunferencia

Para la historia como ciencia social, a la rueda se le considera como uno de los inventos claves de la humanidad, junto con el fuego, entre otros. Se sabe que fue inventada en la zona conocida como la Fértil Luna Creciente (los pueblos de la región mesopotámica), de donde se difundió por todo el Viejo Mundo gracias a la abundancia de grandes animales de carga y tiro

Con lo visto podemos sentir que hay una relación entre las figuras geométricas y las ecuaciones algebraicas ahora veremos la relación entre las ecuaciones cuadráticas de la forma

$$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (5.2)$$

y las circunferencias

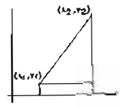
La rueda más antigua conocida, apareció en Ljubljana (Eslovenia) Data de hace 5,350 – 5,100 años Junto a la rueda estaba un eje, no era incipiente.

Circunferencia.- Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan a un punto fijo.

Todos hemos manejado un compás en donde se fija un punto (la punta del compás) y se determina una distancia (abertura del compás) y al girar la mina del compás va dibujando la circunferencia, es decir, todos los puntos que están a la misma distancia a un punto fijo.

Lo primero que requerimos es poder determinar la distancia entre dos puntos, a partir de sus coordenadas.

Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene que $d\left[(x_1,y_1);(x_2,y_2)\right]^2=(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2$, de donde:

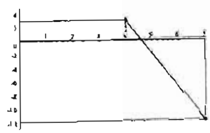


La distancia entre dos puntos es

$$d[(x_1,y_1);(x_2,y_2)]=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ejemplos 5.15

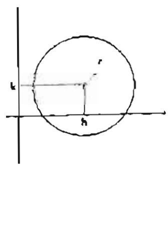
Calcular la distancia entre los puntos $(7,-12)$ y $(4,3)$



$$d[(7,-12);(4,3)]=\sqrt{(4-7)^2+(3-(-12))^2}=\sqrt{234}$$
$$=15.29$$

Ecuación de la circunferencia

La distancia de los puntos de la circunferencia al punto fijo es el largo del radio llamémosle r y al punto fijo digamos que tiene coordenadas (h,k), entonces si un punto de coordenadas (x,y) se encuentra en la circunferencia debe suceder que $d\left[(x,y);(h,k)\right]=r$ asi desarrollando se obtiene $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$.



Aun cuando la expresión anterior nos describe la ecuación de la circunferencia no se ve muy agradable, esa raíz puede generar nauseas a cualquiera; si la sometemos a un tratamiento de embellecimiento, tal vez, algo se puede lograr. Si elevamos al cuadrado nos queda algo que si bien no es una musa de la belleza, al menos deja algo presentable.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

La cual es la ecuación de la circunferencia en su forma centro – radio, donde (h,k) es el centro y r el radio.

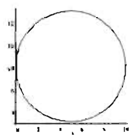
Ejemplo 5.16

Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(5,8)$ de radio 5 unidades

Especifica los elementos de la circunferencia:

centro $(h,k)=(5,8)$,

radio $r=5$.



Sustituye en la forma centro - radio

$$(x-(5))^2+(y-(8))^2=(5)^2.$$

Simplifica

$$(x-5)^2+(y-8)^2=25$$

Veamos ahora que los puntos que satisfacen la ecuación (5.2) conforman una circunferencia.

Sea la ecuación

$$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0,$$

si sumamos a la ecuación lo necesario para completar trinomios cuadrados perfectos y restando a la ecuación la constante E se obtiene

$$x^2+Cx+\left(\tfrac{C}{2}\right)^2+y^2+Dy+\left(\tfrac{D}{2}\right)^2=-E+\left(\tfrac{C}{2}\right)^2+\left(\tfrac{D}{2}\right)^2,$$

factorizando

$$\left(x+\tfrac{C}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{D}{2}\right)^2=\frac{-4E+C^2+D^2}{4},$$

expresando en la forma típica de circunferencia

$$\left(x-\left(-\tfrac{C}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\tfrac{D}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{C^2+D^2-4E}}{2}\right)^2.$$

Toda ecuación de la forma (5.2) es una circunferencia.

Los elementos de la circunferencia dada la forma (5.2) son:

$$h=-\frac{C}{2}$$
$$k=-\frac{D}{2}$$
$$r=\frac{\sqrt{C^2+D^2-4E}}{2}$$

Observación. Para que sea una circunferencia real se requiere que $C^2+D^2-4E>0$ en caso contrario se tiene una circunferencia imaginaria y para efectos del presente texto no analizaremos.

Ejemplo 5.17

Sea la ecuación $x^2+y^2+6x-10y-2=0$, dar los elementos de la circunferencia.

Efectivamente se trata de una ecuación de circunferencia, porque es de la forma (5.2).

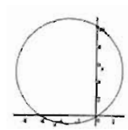
Llévala a su forma centro – radio.

Sumando a la ecuación lo necesario para formar trinomios cuadrados perfectos y el negativo del término independiente, se obtiene

$$x^2+6x+(3)^2+y^2-10y+(5)^2=2+9+25,$$

factorizando y simplificando

$$(x+3)^2+(y-5)^2=36.$$



Especifica los elementos

$$(h,k)=(-3,5)$$
$$r=6$$

De manera semejante, cualquier punto de una circunferencia satisface la ecuación de la forma (5.2).

Sea una circunferencia cualquiera

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2,$$

desarrollando se tiene

$$x^2+2hx+h^2+y^2+2ky+k^2=r^2,$$

agrupando de modo adecuado

$$x^2+y^2+2hx+2ky+h^2+k^2-r^2=0,$$

se tiene cada elemento de la ecuación (5.2) en términos de los elementos de la ecuación de la circunferencia en su forma centro - radio:

$$C=2h$$
$$D=2k$$
$$E=h^2+k^2-r^2$$

Se confirma que toda circunferencia puede ser llevada a la forma (5.2) la cual se le llama:

La forma general de la ecuación de la circunferencia es: $$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0,$$ donde C, D y E son constantes.

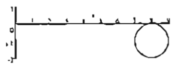
Observación: Si tienes una ecuación cuadrática cualquiera, divide entre el coeficiente de x^2 y si el coeficiente de y^2 resulta 1 entonces es una circunferencia (sólo habría que verificar que sea real).

Ejemplo 5.18

Sea la circunferencia $(x-8)^2+(y+1)^2=1$ llevar a la forma general de la circunferencia.

Simplemente de desarrolla la expresión

$x^2-16x+64+y^2+2y+1=1$



Se simplifica y se acomoda en orden

$x^2+y^2-16x+2y+64=0$

Ejemplo 5.19

Dada la ecuación $3x^2+6y^2+9y+25=0$ verificar si es circunferencia.

Divide entre el coeficiente de x^2, en este caso entre 3,

$x^2+2y^2+3y+\frac{25}{3}=0$

Como el coeficiente resultante de y^2 es $2\neq 1$, entonces no es una circunferencia.

Ejemplo 5.20

Sea la ecuación $5x^2+5y^2+10x+15y+8=0$ verificar si es circunferencia

Dividiendo entre 5 la ecuación

$$x^2+y^2+2x+3y+\tfrac{8}{5}=0$$

Como el coeficiente resultante de y^2 sí es 1, sí es una circunferencia.

Para verificar si es real, aplicando la observación de la Pág. 106 que nos da un criterio para verificar cuando una ecuación general de circunferencia se refiere a una real.

Para que sea real, tenemos que verificar que $C^2+D^2-4E>0$

$$C=2.\ D=3;\ E=\tfrac{8}{5}$$

$$C^2+D^2-4E=4+9-\tfrac{32}{5}=\tfrac{33}{5}>0$$

Si es una circunferencia real.

Ecuación de la recta tangente.- Existen varias posibilidades donde se puede plantear encontrar rectas tangentes a una circunferencia aquí veremos las tres usuales.

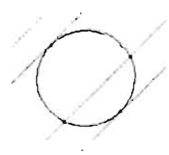
Dado un punto de la circunferencia.

La recta tangente es perpendicular a un radio de la circunferencia que pasa por el punto dado. A la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto de tangencia se le llama recta normal y en los círculos coincide con el radio.

Método 36 para encontrar la recta tangente dado un punto de la circunferencia.	Ejemplo 5.21 Encontrar la recta tangente a la circunferencia $(x-5)^2+(y-12)^2=25$ que pasa por el punto $(1,15)$.
1. Verificamos si el punto está en la circunferencia	Sustituimos el punto en la ecuación $(1-5)^2+(15-12)^2=4^2+3^2=25$, efectivamente si está en la circunferencia.
2. Tomamos la pendiente de la recta normal. Usando la pendiente dados dos puntos[54].	Tomamos el centro $(5,12)$ y el punto de tangencia $(1,15)$, $m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{15-12}{1-5}=-\frac{3}{4}$.
3. Generamos la ecuación de la recta tangente con la pendiente ortogonal y el punto de tangencia.	Punto de tangencia $(1,15)$, pendiente ortogonal $m_2=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$. $y-15=\frac{4}{3}(x-1)$ $y=\frac{4}{3}x+\frac{41}{3}$

Dada una pendiente.

Al considerar la intersección de una recta, conocida su pendiente, con la circunferencia, se pueden dar tres posibilidades. No hay intersección, la intersección es dos puntos y sólo cuando la solución es única se tiene tangencia.



[54] Consultar la forma de encontrar la pendiente de una recta que conocidos dos puntos, Pág. 106

Método 37 para determinar la recta tangente a la circunferencia con una pendiente específica.

1. Considera la recta de pendiente conocida.
2. Encuentra la intersección sustituyendo el valor y, de la recta, en la circunferencia.
3. Resuelve la ecuación con la fórmula general de segundo grado[55].
4. La solución es única, y en este caso significa que la intersección es única, cuando el discriminante[56] es cero.
5. Resuelve la ecuación en b.
6. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes

Ejemplo 5.22

Encontrar la recta tangente, de pendiente $m = 1$, a la circunferencia $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

$$y = x + b$$

$$(x-3)^2 + (x+b-3)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 + b^2 + 9 + 2bx - 6b - 6x = 9$$

$$2x^2 + (2b-12)x + (b^2 - 6b + 9) = 0$$

$$x = \frac{-(2b-12) \pm \sqrt{(2b-12)^2 - 4(2)(b^2-6b+9)}}{2(2)}$$

$$(2b-12)^2 - 4(2)(b^2 - 6b + 9) = 0$$

$$4b^2 - 48b + 144 - 8b^2 + 48b - 72 = 0$$

$$-4b^2 + 72 = 0$$

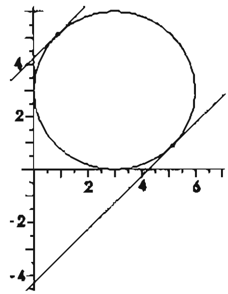
$$b = \pm\sqrt{18}$$

$$b_1 = 3\sqrt{2}$$

$$b_2 = -3\sqrt{2}$$

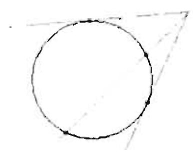
$$y = x + 3\sqrt{2}$$

$$y = x - 3\sqrt{2}$$



Dado un punto exterior

Si consideramos las rectas tangentes que pasan por un punto exterior, igualmente tenemos que encontrar aquellas que sólo tengan intersección en un solo punto



[55] Puedes consultar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado en la Pág. 61.

[56] Revisa la observación sobre el discriminante en la Pág. 64.

Método 38 para determinar la recta tangente a la circunferencia que pasa por un punto exterior.

1. Considera la recta que pasa por el punto conocido y pendiente arbitraria.
2. Encuentra la intersección de la recta con la circunferencia.
3. Determina el discriminante e iguala éste a cero para el caso de solución única.
4. Resuelve la ecuación.
5. Establece las ecuaciones de las rectas tangentes.

Ejemplo 5.23

Encontrar la recta tangente a la circunferencia $x^2+(y-10)^2=16$ que pasa por el punto $(7,10)$.

$y-10=m(x-7)$

$y=mx-7m+10$

$x^2+(mx-7m)^2=16$

$(1+m^2)x^2-14m^2x+49m^2-16=0$

$$x=\frac{14m^2\pm\sqrt{196m^4-4(1+m^2)(49m^2-16)}}{2(1+m^2)}$$

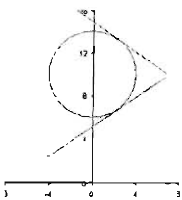
$$x=\frac{14m^2\pm\sqrt{-132m^2+64}}{2(1+m^2)}$$

$-132m^2+64=0$

$$m=\pm\sqrt{\frac{64}{132}}=\pm\frac{4}{\sqrt{33}}$$

$y-10=\frac{4}{\sqrt{33}}(x-7)$

$y-10=-\frac{4}{\sqrt{33}}(x-7)$



Ejercicios 20

Encuentra la distancia entre cada par de puntos:

1. $(8,15);(10,21)$ 2. $(-7,13);(9,-9)$ 3. $(-12,-15);(-7,14)$ 4. $(5,0);(9,-3)$

Determina la ecuación de las circunferencias con centro y radio dados:

5. $r=12$, $(h,k)=(-4,2)$ 6. $r=6$, $(h,k)=(4,9)$ 7. $r=4$, $(h,k)=(0,0)$ 8. $r=2$, $(h,k)=(-6,-7)$

Grafica las siguientes circunferencias:

9. $x^2+y^2=1$ 10. $(x+3)^2+(y-10)^2=\frac{49}{4}$ 11. $x^2+2x+1+y^2+8y+12=0$

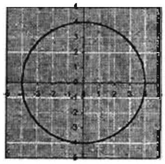
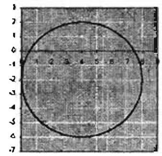
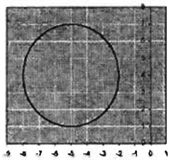
Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas llévalas a la forma centro – radio:

12. $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ 13. $x^2+y^2+22x+6y+126=0$

Dadas las siguientes circunferencias pasa las ecuaciones a la forma general:

14. $(x-5)^2+(y+3)^2=1.21$ 15. $(x+1)^2+(y-7)^2=1$

Dada las siguientes gráficas escribe sus ecuaciones:

16. 
17. 
18. 

Encuentra el valor de y donde la circunferencia y el punto x están dados.

19. $x^2+y^2=1$, $x=0.75$
20. $(x-3)^2+(y-10)^2=\frac{49}{4}$, $x=5$
21. $x^2-2x+1+y^2-12y+11=0$, $x=10$

Especifica el valor de x donde la circunferencia y el punto y son:

22. $x^2+y^2=1$, $y=.5$
23. $(x+3)^2+(y-10)^2=\frac{49}{4}$, $y=8$
24. $x^2+2x+1+y^2+8y+12=0$, $y=-3$

Determina la recta tangente dado un punto de la circunferencia:

25. $x^2+y^2=16$, $(3,\sqrt{7})$
26. $(x-2)^2+(y+4)^2=25$, $(5,0)$
27. $(x-2)^2+(y+4)^2=26$, $(3,1)$

Encuentra la recta tangente a la circunferencia con pendiente dada:

28. $(x-2)^2+(y+4)^2=25$, $m=-1$
29. $(x-2)^2+(y+4)^2=26$, $m=-\frac{2}{3}$

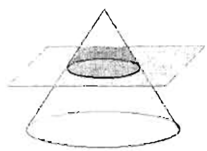
Obtén la recta tangente a la circunferencia y pasa por el punto dado:

30. $(x-2)^2+(y+4)^2=25$, $(13,1)$
31. $(x+1)^2+(y+4)^2=25$, $(7,7)$

32. Los babilonios podían resolver sistemas de ecuaciones, una de ellas cuadrática, un ejemplo es: "He sumado el área de mis cuadrados, lo que me da 21.25[57] y el lado de uno es más pequeño en $\frac{6}{7}$ que el lado del otro". Esta información corresponde al sistema

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 21.25 \\ y &= \tfrac{6}{7}x \end{aligned}$$

En geometría analítica representa la intersección de una circunferencia y una recta, resuelve el sistema encontrando la intersección y escoge el resultado adecuado de acuerdo al contexto de la época.



Si se corta un cono mediante un plano paralelo a la horizontal la intersección resulta una circunferencia.

[57] En el original dice 21° 15' que está en sistema sexagesimal, pasado a sistema decimal es 21.25

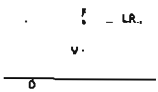
Parábola

Apolonio de Perga

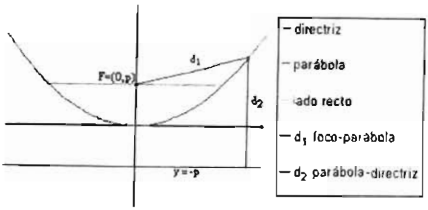
La utilidad de la recta y circunferencia es tan grande que ni siquiera requirió mención. Quizá la tercera curva más usada es la parábola[58], la encontramos en faros y antenas principalmente. En la física, desde hace mucho tiempo se sabe que es la curva que describe un cuerpo lanzado sujeto por la gravedad terrestre.

Parábola[59].- Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto llamado foco.

Dada la directriz y un punto, podemos establecer tres puntos de la parábola fácilmente identificables.
Si trazamos una perpendicular desde el foco a la directriz el punto medio esta a la misma distancia del foco y de la directriz, entonces está en la parábola. Este punto se conoce como vértice de la parábola.
Trazando la paralela a la directriz que pasa por el foco y tomando los puntos con la misma distancia que del foco a la directriz son también puntos de la parábola.



F foco
V vértice
D directriz
LR lado recto
Partes anexas de la parábola



Colocamos el vértice de la parábola en el origen de las coordenadas. A una distancia p hacia abajo ponemos la directriz, entonces, su ecuación es: $y=-p$
El foco debe estar con coordenadas $(0,p)$.

---

[58] Pitágoras analizando problemas que presentan la tricotomía: se ajusta, falta o excede; introdujo, para destacar las tres posibilidades, los términos parábola, elipse e hipérbola. Mucho tiempo después, la nomenclatura fue adoptada por Apolonio porque esta misma situación se presentaba en el estudio de las secciones cónicas.

[59] En la proposición 11 del libro *Cónicas* del mismo Apolonio dice *"Si se corta un cono con un plano a través del eje, y se corta también con otro plano que corta la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si además el diámetro de la sección se hace paralelo a un lado del triángulo axial, cualquier línea recta trazada desde la sección del cono paralela a la sección común del plano que corta y la base del cono hasta el diámetro de la sección, tendrá su cuadrado igual al rectángulo limitado por la porción de diámetro que comprende en la dirección del vértice de la sección y otra línea recta cualquiera; esta línea recta tendrá la misma razón a la porción abarcada entre el ángulo del cono y el vértice del segmento como el cuadrado en la base del triángulo axial al rectángulo limitado por los dos lados restantes del triángulo; llamaremos a esta sección parábola"*. ¡Por fortuna! se ha simplificado la definición de parábola.

Para que un punto (x, y) esté en la parábola debe tener una distancia al foco, que establecimos en el punto $(0, p)$, igual a la directriz.

La primera distancia se obtiene con la distancia entre dos puntos[60]:

$$d[(0, p);(x, y)] = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}\,.$$

La segunda es la distancia de (x, y) al eje x, es precisamente y, más la distancia entre el eje x y la directriz que por construcción es p, en resumen es:

$$y + p.$$

Antena parabólica de un radiotelescopio

Igualando las distancias

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p,$$

elevando al cuadrado la ecuación

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2,$$

expandiendo las expresiones

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

restando $y^2 + p^2$ a la ecuación

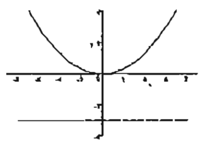
$$x^2 - 2py = 2py,$$

sumando $2py$ a la ecuación, se llega a una expresión bellamente simple, conocida como:

Ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen.
$x^2 = 4py$.

Ejemplos 5.24

1. Encontrar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen con número focal 3.



   Como el número focal es $p = 3$ entonces la ecuación es

   $x^2 = 4(3)y$

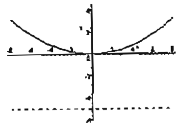
   $x^2 = 12y$

[60] Si requieres consulta distancia entre dos puntos en la Pág. 105.

2. Determinar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen con ecuación de la directriz $y=-5$.

Como pasa por el origen y la directriz es $y=-5$ entonces el número focal es $p=5$. La ecuación es:

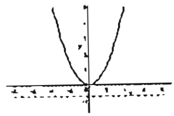
$$x^2 = 20y$$



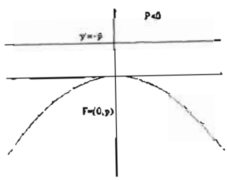
3. Obtener la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen y con foco en el punto $F=\left(0,\frac{3}{4}\right)$.

Como pasa por el origen y el foco es $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ entonces el número focal es $p=\frac{3}{4}$. La ecuación es:

$$x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$$
$$x^2 = 3y$$



Observación: Si $p<0$ entonces el foco está abajo y la directriz arriba, entonces es una parábola que abre hacia abajo. El signo de p nos indica hacia donde abre la parábola, p es el número focal y $|p|$ es la distancia focal.

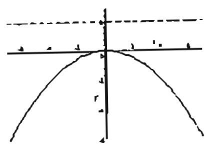


Ejemplos 5.25

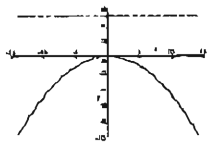
Encontrar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen con número focal -5.

Como el número focal es $p=-5$ entonces la ecuación es

$$x^2 = 4(-5)y$$
$$x^2 = -20y$$



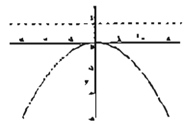
1. Determinar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen con ecuación de la directriz $y = 2$.

   Como pasa por el origen y la directriz esta a dos de distancia del vértice y la directriz está arriba del vértice entonces el foco se encuentra en el punto $F = (0,-2)$ y la ecuación es:

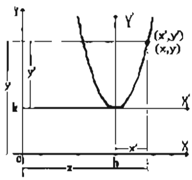
   $$x^2 = -8y$$

2. Obtener la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen y con foco en el punto $F = (0,-1.5)$.

   Se tiene que la directriz es la recta $y = 1.5$ y la ecuación es:

   $$x^2 = 4(-1.5)y$$
   $$x^2 = -6y$$



Traslación de ejes.

Un punto con coordenadas (x, y), en los ejes auxiliares tendrá coordenadas (x', y'), las cuales están relacionadas mediante las ecuaciones:

$$x = h + x'$$
$$y = k + y'$$

despejando las coordenadas auxiliares se tiene

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned} \qquad (5.3)$$

La ecuación de la parábola, en las coordenadas auxiliares, es:

$$(x')^2 = 4py',$$

porque es una parábola con vértice en el origen de las coordenadas auxiliares.

Pasando a las coordenadas originales, sustituyendo usando las ecuaciones (5.3), obtenemos:

Ecuación de la parábola vertical con vértice de coordenadas (h,k)
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Observación: Esta forma de trasladar los ejes sirve en general, sin importar que curva estemos trabajando, lo central es establecer el punto de referencia; en la circunferencia es el centro, en la parábola el vértice.

Ejemplos 5.26

Encontrar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el punto $V=(5,-7)$ y número focal $\frac{5}{2}$.

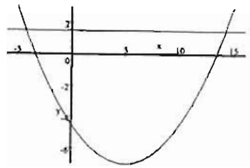
Establecemos los valores para cada parámetro:

$$h=5;\ k=-7;\ p=\tfrac{5}{2}$$

La ecuación de la parábola es:

$$(x-5)^2=4\left(\tfrac{5}{2}\right)(y-(-7))$$

$$(x-5)^2=10(y+7)$$



Determinar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el punto $(2,1)$ ecuación de la directriz $y=5$.

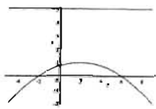
Dado el vértice y como la directriz está arriba del vértice y está a una distancia de 4 entonces

$$h=2;\ k=1;\ p=-4$$

La ecuación es:

$$(x-2)^2=4(-4)(y-1)$$

$$(x-2)^2=-16(y-7)$$



Obtener la ecuación de la parábola vertical con foco en el punto $F=\left(5,\frac{7}{4}\right)$ y directriz con foco en el punto $y=-\frac{1}{2}$.

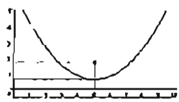
Como la distancia del foco a la directriz es $\frac{9}{4}$, el foco está por encima de la directriz y el vértice debe estar a la mitad; entonces

$$h=5;\ k=\frac{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}{2}=\tfrac{5}{8};\ p=\tfrac{9}{8}$$

La ecuación es:

$$(x-5)^2=4\left(\tfrac{9}{8}\right)\left(y-\tfrac{15}{8}\right)$$

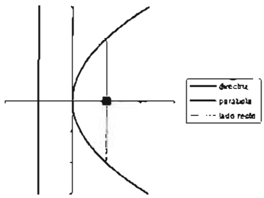
$$(x-5)^2=\tfrac{9}{2}\left(y-\tfrac{15}{8}\right)$$



Observación: Se puede encontrar por la mitad de las distancias, pero ha resultado mejor a partir del punto medio mediante la fórmula.

El punto medio entre dos puntos de coordenadas $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ es: $$P_m=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Parábolas horizontales.- En general es igual que las parábolas verticales, pero intercambiando x por y.



La parábola horizontal con vértice en el origen es:

$$y^2 = 4px$$

La parábola horizontal con vértice en un punto de coordenadas (h,k) es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

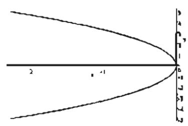
Si $p>0$ la parábola abre hacia la derecha y si $p<0$ la parábola abre hacia la izquierda.

Ejemplos 5.27

1. Encontrar la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen y número focal $-\frac{11}{4}$.

Es una parábola que abre hacia la izquierda con la ecuación:

$$y^2 = 4\left(-\tfrac{11}{4}\right)x$$
$$y^2 = -11x$$



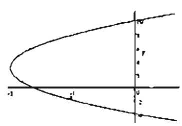
2. Determinar la ecuación de la parábola vertical con vértice en el punto $(-2,3)$ con ecuación de la directriz $x=-8$.

Como la directriz está a la izquierda del vértice, abre a la derecha. El número focal es de 6 entonces

$$h=-2;\ k=3;\ p=6.$$

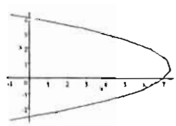
La ecuación es:

$$(y-3)^2 = 4(6)(x+2)$$
$$(y-3)^2 = 24(x+2)$$



3. Obtener la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la izquierda con distancia focal $\frac{3}{8}$ y foco en el punto $F = \left(7, \frac{3}{4}\right)$.

$h = 7 + \frac{3}{8} = \frac{59}{8}$; $k = \frac{3}{4}$; $p = -\frac{3}{8}$



La ecuación es:

$$(x-5)^2 = 4\left(\tfrac{2}{8}\right)\left(y - \tfrac{13}{8}\right)$$
$$(x-5)^2 = \tfrac{9}{2}\left(y - \tfrac{13}{8}\right)$$

En todos los ejemplos sobre parábola se ha establecido la gráfica sin embargo tiene dificultades propias que simplemente se darán métodos aproximados para esbozar la gráfica.

Método 39 para graficar parábolas desde cortes con los ejes.

1. Establecer el vértice.
2. Determinar si tiene cruce con los ejes.
3. Unir los puntos, pero tratando de semejar la parábola.
4. Prolonga los brazo de la parábola disminuyendo gradualmente la abertura sin cruzar la vertical.

Ejemplos 5.28

Graficar la parábola $(x-4)^2 = 16(y+5)$

$$V = (4, -5)$$

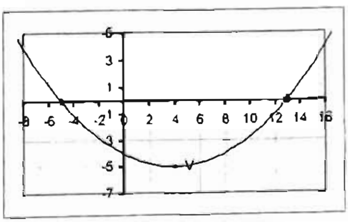
Consideramos los casos

$x = 0$

$$(-4)^2 = 16(y+5)$$
$$y = -4$$

$y = 0$

$$(x-4)^2 = 16(5)$$
$$x = 4 \pm \sqrt{80}$$
$$x_1 = 12.9$$
$$x_2 = -4.9$$



Método 40 para graficar parábolas usando el lado recto.

1. Establecer el vértice.
2. Determinar el número focal.
3. Establecer el foco.
4. Obtenemos los extremos del lado recto a 2 veces la distancia focal a izquierda y derecha del foco.
5. Unir los puntos, pero tratando de semejar la parábola.
6. Prolonga los brazo de la parábola disminuyendo gradualmente la abertura sin cruzar la vertical.

Ejemplos 5.29

Graficar la parábola $(x-7)^2=-8(y+1)$

$V=(7,-1)$

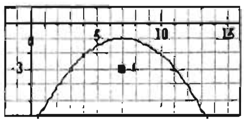
$p=-2$

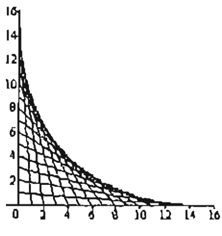
Como el número focal es negativo entonces está debajo del vértice a 2 unidades de distancia.

$F=(7,-3)$

$L_1=(7-4,-3)=(3,-3)$

$L_2=(7+4,-3)=(11,-3)$





Método 41 del sastre

Como una curiosidad se establece el siguiente método razonable para construir un segmento de parábola. Este método consiste en:

- Dibujar un ángulo cualquiera, en este caso se hizo a $\frac{\pi}{2}rad$.
- Marcar divisiones a intervalos iguales en cada uno de los dos lados y numerarlas empezando por el vértice.
- Luego se unen, por ejemplo, los puntos cuyos valores sumen un número cualquiera, aquí se hizo con 16.

Ejercicios 21

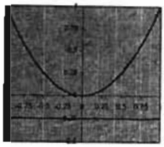
Encuentra los puntos medios de los siguientes pares de puntos.

1. $(5,8),(9,4)$ 2. $(7.8,-8.34),(3.24,9.4)$ 3. $\left(\frac{13}{7},-\frac{13}{5}\right),\left(\frac{7}{3},-\frac{9}{2}\right)$

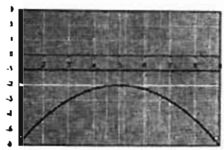
Determina la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen, que satisfaga las condiciones dadas:

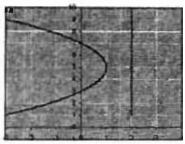
4. $p=\frac{1}{4}$ 5. $p=-\frac{1}{2}$ 6. pasa por el punto $(9,-3)$ 7. pasa por el punto $(-6,9)$.

Di cuál es la ecuación de las parábolas dadas las gráficas:

8. 

9. 

10. 

11. 

De las siguientes parábolas encuentra vértice, foco, número focal, directriz, hacia donde abre la parábola, lado recto y establece todo en su gráfica.

12. $x^2+6y=0$

13. $y^2=20x$

14. $(x-5)^2=8(y-4)$

15. $(x+3)^2=-10(y-5)$

16. $4y^2-20x=0$

17. $y^2=-28x$

18. $(y-3)^2=6(x-7)$

19. $(y-8)^2=-12(x+5)$

20. $x^2-6x-6y+39=0$

21. $y^2+8x-6y+25=0$

Encuentra los valores de x para los cuales la parábola toma el valor dado de y:

22. $(x-4)^2=-28(y+1)$, $y=-10$

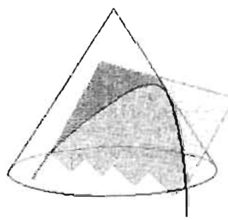
23. $(y+5)^2=8(x-5)$, $y=4$

24. $x^2+\frac{1}{12}y=0$, $y=-48$

25. $y^2=10x$, $y=20$

26. Muestra que toda parábola vertical se puede llevar a la ecuación cuadrática de la forma $x^2+Cx+Dy+E=0$.

27. Muestra que cualquier ecuación de la forma $y^2+Cx+Dy+E=0$ es una parábola horizontal.



Si se corta un cono por un plano paralelo a la generatriz la intersección es una parábola.

Elipse

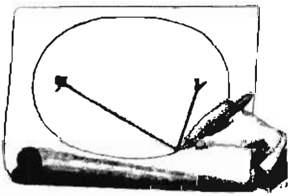
Los planetas se mueven en elipses con el Sol en uno de sus focos.
Primera Ley de Kepler

Indudablemente una forma bella es la elipse la cual la encontramos en las curvas que siguen los cuerpos celestes por la fuerza de la gravitación universal. Por sus finas propiedades acústicas se ha usado en cúpulas, pero por puras razones estéticas es frecuente encontrarla en arreglos de jardinería de palacios, incluso el método usual para dibujar una elipse se conoce como el método del jardinero.

Johanes Kepler

Elipse.- Es el lugar geométrico de todos los puntos que la suma, de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante.

Método 42 del jardinero.- Dados dos puntos, que pueden ser unas estacas, amarras una cuerda floja; después al tensarla y recorrerla vas generando una elipse. Las estacas son los focos de la elipse y la longitud de la cuerda es la suma de las distancias. Método usado por los jardineros en los palacios para hacer arreglos florales en forma de elipse.



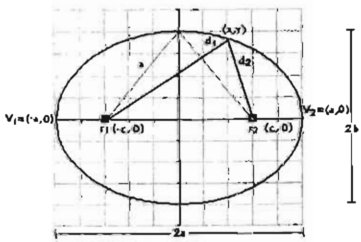
Ecuación de la elipse.- Si ponemos los focos F_1 y F_2 sobre el eje x digamos con coordenadas $(-c,0)$ y $(c,0)$, respectivamente. Considerando la suma de las longitudes igual a la constante $2a$, se puede observar que en los extremos están los vértices cuyas coordenadas son $(-a,0)$ y $(a,0)$, en el momento en que las dos distancias son iguales $d_1 = d_2$ se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos son b y c y la hipotenusa es a. De tal forma que, aplicando el teorema de Pitágoras, se cumple que $b^2 + c^2 = a^2$. Llegar a la ecuación de la elipse requiere mucho cuidado por su dificultad algebraica y no es relevante para su manejo.

Por definición de elipse,

$$d_1 + d_2 = 2a$$

Sustituyendo las distancias

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$



Los vértices de la elipse son los extremos del eje mayor.

restando $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ en la ecuación y elevándola al cuadrado

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

desarrollando los cuadrados

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

simplificando y volviendo a elevar al cuadrado la ecuación

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-cx\right)^2,$$

expandiendo la expresión, aplicando los cuadrados

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

sumando $2a^2cx-a^2c^2$ a la ecuación

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

factorizando $\left(a^2-c^2\right)$ en ambos lados de la ecuación

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right),$$

sustituyendo por teorema de Pitágoras

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

dividiendo la ecuación entre a^2b^2

$$\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2b^2}=1,$$

Sala capitular de la catedral de Sevilla

simplificando, he aquí:

La ecuación de la elipse con centro en el origen.

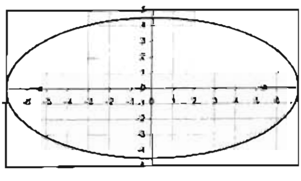
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ejemplos 5.30

1. Determinar la ecuación de la elipse con centro en el origen, semieje horizontal 7 y semieje vertical 4.5. Además localizar los focos.

$a=7$, $b=4.5$. La ecuación es:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{20.25}=1$$



Por ser horizontal ya que $a>b$, los focos están $(\pm c,0)$ donde $b^2+c^2=a^2$,

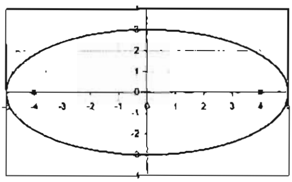
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-20.25}=5.36$

$F_1=(-5.36,0)$, $F_2=(5.36,0)$

2. Encontrar la ecuación de la elipse con focos en los puntos $F_1 = (-4,0)$; $F_2 = (4,0)$ y eje mayor de longitud igual a 10.

El semieje mayor es la mitad, es decir $a = 5$. Por la posición de los focos se tiene que $c = 4$. Como $b^2 + c^2 = a^2$ entonces

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-16} = 3$



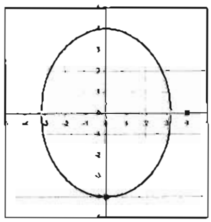
La ecuación es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3. Los vértices de una elipse son los puntos $V_1 = (0,-4)$; $V_2 = (0,4)$ y focos en los puntos $F_1 = (0,-2.5)$; $F_2 = (0,2.5)$, determinar la ecuación y las longitudes de sus ejes.

La longitud del semieje mayor es $b = 4$. Por la posición de los focos se tiene que $c = 2.5$. Como es vertical entonces se cumple $a^2 + c^2 = b^2$ entonces

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{16 - 6.25} = 3.12$$



La ecuación es:

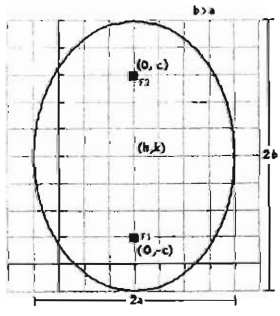
$$\frac{x^2}{9.75} + \frac{y^2}{16} = 1$$

La longitud del eje mayor (vertical) es 8

La longitud del eje menor (horizontal) es 6.24.

Observaciones:

- Como ves, depende de que variable está acompañada el valor mayor para determinar la orientación de la elipse (horizontal – x, vertical – y).
- La ecuación de la elipse con centro en cualquier punto, haciendo una traslación de ejes, será $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.



Ejemplos 5.31

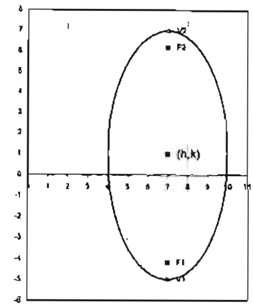
1. Determinar la ecuación de la elipse con centro en el punto $(h,k)=(7,1)$, eje horizontal 6 y eje vertical 12. localizar los focos y los vértices.

$a=3,\quad b=6,\quad h=7,\ k=1$. La ecuación es:

$$\frac{(x-7)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$$

Por ser vertical ya que $a<b$, los focos están $(h,k\pm c)$ donde $a^2+c^2=b^2$ entonces

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{36-9}=5.2,$$
$$F_1=(7,1-5.2)=(7,-4.2)$$
$$F_2=(7,1+5.2)=(7,6.2)$$
$$V_1=(7,1-6)=(7,-5)$$
$$V_2=(7,1+6)=(7,7)$$

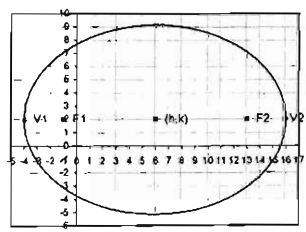


2. Encontrar la ecuación de la elipse con focos en los puntos $F_1=(-1,2)$; $F_2=(13,2)$ y eje mayor de longitud igual a 20.

El semieje mayor es la mitad, es decir $a=10$. Por la posición de los focos se tiene que $c=7$. Como $b^2+c^2=a^2$ entonces $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{100-49}=7.1$

La ecuación es:

$$\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{51}=1$$



Método 43 para graficar elipses.

1. Establecer el centro.
2. Determinar la orientación.

   Si $a>b$ entonces es horizontal.

   Si $a<b$ entonces es vertical.

Ejemplos 5.32

Graficar la elipse $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$

$(h,k)=(2,-5)$

Como $a=6>b=4$ entonces es una elipse horizontal.

3. Establecer los vértices.

Horizontal $V_1 = (h-a, k)$ $V_2 = (h+a, k)$

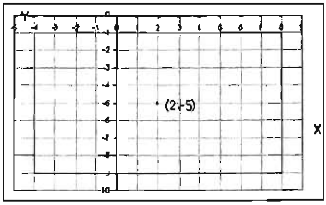
Vertical $V_3 = (h, k-b)$ $V_4 = (h, k+b)$

Los vértices están en

$V_1 = (2-6, -5) = (-4, -5)$
$V_2 = (2+6, -5) = (8, -5)$

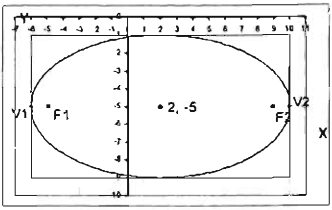
$V_3 = (2, -5-4) = (2, -9)$
$V_4 = (2, -5+4) = (2, -1)$

4. Formar en rectángulo centrándolo en el centro de la elipse con altura 2b y largo 2a.



5. Traza la elipse según el cuadro, esencialmente redondeando el rectángulo.

6. Establece los puntos anexos: vértices y focos



Cuando se tiene una ecuación cuadrática para que sea una elipse requiere poder ser llevada a la forma clásica de la ecuación de la elipse.

Ejemplos 5.33

De las siguientes ecuaciones determina si la elipse es real o imaginaria. Si es real especifica su centro de simetría, los ejes de simetría, los focos y vértices.

1. $4x^2 + 12.25y^2 - 64x + 49y + 256 = 0$

Agrupando variables y factorizando los coeficientes cuadráticos

$$4(x^2 - 16x) + 12.25(y^2 + 4y) + 256 = 0,$$

completando trinomios cuadrados perfectos y restando lo mismo para no alterar la ecuación

$$4(x^2 - 16x + 64 - 64) + 12.25(y^2 + 4y + 4 - 4) + 256 = 0,$$

factorizando cada trinomio y multiplicando cada término independiente

$$4(x-8)^2 - 256 + 12.25(y+2)^2 - 49 + 256 = 0,$$

agrupando los términos independientes y restando el resultado a la ecuación

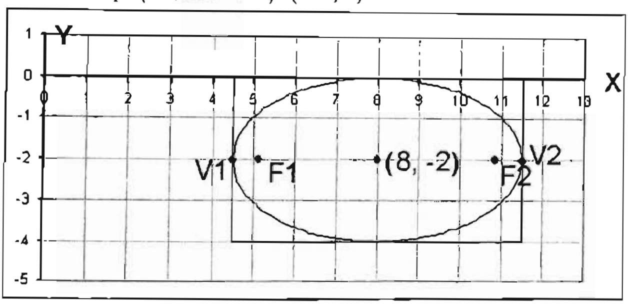
$$4(x-8)^2 + 12.25(y+2)^2 = 49,$$

dividiendo entre el término independiente

$$\frac{(x-8)^2}{12.25} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Se obtiene la forma clásica de la ecuación de la elipse.
Centro: $(8,-2)$.
Ejes se simetría las rectas: $x = 8; y = -2$.
Vértices: $V_1 = (4.5,-2)$; $V_2 = (11.5,-2)$; $V_3 = (8,-4)$; $V_4 = (8,0)$.
Focos: $F_1 = \left(h - \sqrt{a^2 - b^2}, k\right) = \left(8 - \sqrt{12.25 - 4}, -2\right) = (5.13,-2)$;

$F_2 = \left(8 + \sqrt{12.25 - 4}, -2\right) = (10.87,-2)$.



2. $16x^2 + 25y^2 + 96x - 250y + 1169 = 0$

Agrupando variables y factorizando los coeficientes cuadráticos

$$16(x^2 + 6x) + 25(y^2 - 10y) + 1169 = 0,$$

completando trinomios cuadrados perfectos y restando lo mismo para no alterar la ecuación

$$16(x^2 + 6x + 9 - 9) + 25(y^2 - 10y + 25 - 25) + 1169 = 0,$$

factorizando cada trinomio y multiplicando cada término independiente

$$16(x+3)^2 - 144 + 25(y-5)^2 - 625 + 1169 = 0,$$

agrupando los términos independientes y restando el resultado a la ecuación

$$16(x+3)^2 + 25(y-5)^2 = -400,$$

dividiendo entre el término independiente

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = -1,$$

el término de la izquierda es positivo y el de la derecha es negativo entonces no es una elipse real.

3. $36x^2 + 72x + 16y - 125 = 0$

   La ecuación no puede ser una elipse porque no aparece el término cuadrático de y. De hecho debe de ser una parábola.

4. $49x^2 - 4y^2 + 98x - 16y - 100 = 0$

   La ecuación no puede ser de una elipse por tener signos contrarios los términos cuadráticos.

5. $2x^2 + 2y^2 - 4x - 48y + 272 = 0$

   Siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos 1 y 2 se obtiene

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1,$$

   Resulta que la longitud de los ejes es igual entonces se trata de una circunferencia, de hecho expresándola en términos de circunferencia su ecuación es

$$(x-1)^2 + (y-12)^2 = 9$$

Ejercicios 22

Determina la ecuación de la elipse que satisface las condiciones en cada caso y esboza cada gráfica con sus elementos respectivos:

1. $F_1 = (-6,0)$; $F_2 = (6,0)$ y $2a = 20$
2. $F_1 = (0,-8)$; $F_2 = (0,8)$ y $a = 10$
3. $V_1 = (-7.5,0)$; $V_2 = (7.5,0)$ y $c = 6$
4. Vertical, centro en origen, $a = 8$ y $b = 5$
5. Centro en $(3,2)$, Foco $(3,7)$ y un vértice en $(3,-5)$.
6. Focos en $F_1 = (-5,2)$, $F_2 = (5,2)$ y eje menor 8.

De las siguientes elipses encuentra vértices, focos, centro, dirección y establece todo en su gráfica.

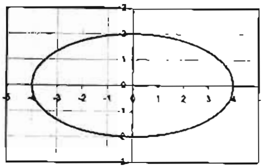
7. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

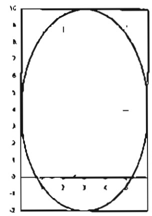
8. $4x^2+25y^2=100$

9. $\frac{(x+3)^2}{81}+\frac{(y-5)^2}{49}=1$

10. $\frac{(x-7)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$

Di cuál es la ecuación de las elipses dadas las gráficas:

11. 

12. 

Encuentra los valores de x para los cuales la elipse toma el valor dado de y:

13. $\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y+1)^2}{100}=1$
$y=-8$

14. $4x^2-40x+9y^2+90y+289=0$
$y=-4$

15. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{12}=1$
$y=2$

16. Muestra que toda elipse se puede llevar a la ecuación cuadrática de la forma
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0;\ AB>0$

De las siguientes ecuaciones determina si la elipse es real o imaginaria. Si es real especifica su centro de simetría, los ejes de simetría, los focos y vértices.

17. $9x^2+25y^2-54x+350y+1081=0$

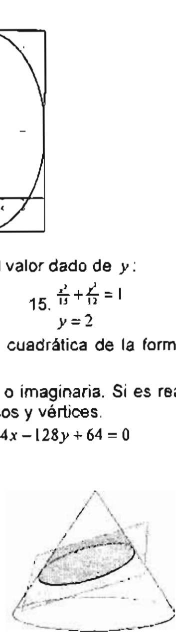
18. $9x^2+64y^2+144x-128y+64=0$

19. $16x^2+9y^2+72x-18y+279=0$

20. Verifica que las elipses de la forma

$$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+E=0$$

son circunferencias.



La intersección de un cono y un plano inclinado, pero con una inclinación menor a la que tiene la generatriz, se observa una elipse.

21. La orbita de la Luna alrededor de la Tierra es una elipse con la tierra en un foco. La longitud del semieje mayor es 406,498 km y la longitud del semieje menor es 356,884. km. Si pones el origen en la tierra de tal modo que el eje mayor coincida con el eje de las X, determina: La longitud del eje y semieje mayor, las coordenadas del centro de la elipse, el cuadrado de la longitud del semieje menor, La ecuación de la elipse que describe el movimiento de la luna en el sistema Tierra – Luna, la gráfica del movimiento de la luna y ¿qué es apogeo?

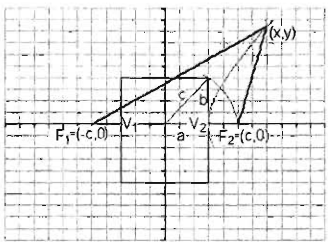
22. Construye manualmente una elipse con el método del jardinero.

Hipérbola

Sin duda es la curva cónica más compleja presenta dos secciones y una serie de simetrías interesantes de analizar. Por su misma complejidad no es muy común su uso, sin embargo por razones estéticas encontramos formas hiperbólicas en la arquitectura.

Ecuación de la hipérbola horizontal

Hipérbola.- Es el lugar geométrico de todos los puntos donde el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.



Por definición de hipérbola

$$|d_1 - d_2| = 2a,$$

sustituyendo las distancias

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

elevando al cuadrado y simplificando

$$x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{\left((x+c)^2 + y^2\right)\left((x-c)^2 + y^2\right)} = 2a^2,$$

sumando $\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)} - 2a^2$ a la ecuación y elevando nuevamente al cuadrado

$$\left(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2\right)^2 = \left((x+c)^2 + y^2\right)\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

$$x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2c^2x^2 + 2x^2y^2 - 4a^2x^2 + 2c^2y^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2$$
$$= x^4 - 2c^2x^2 + c^4 + 2\left(x^2 + c^2\right)y^2 + y^4$$

sumando $-x^4 - c^4 - y^4 + 2c^2x^2 - 2x^2y^2 - 2c^2y^2$ en la ecuación, dividiendo después entre 4 la ecuación, se simplifica a

$$a^4 + c^2x^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0,$$

sumando $a^2c^2 - a^4$ y factorizando $c^2 - a^2$ en ambos lados, tenemos

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right),$$

como $c > a$ sustituyen entonces podemos representar a c como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y a como un cateto y si llamamos b al otro cateto podemos establecer, por teorema de Pitágoras, la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$ de donde podemos sustituir en la ecuación la expresión $c^2 - a^2 = b^2$ quedando

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

dividiendo entre a^2b^2 la ecuación, he aquí la ecuación de:

La ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ejemplo 5.34

Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, vértices en los puntos $(-6,0)$ y $(6,0)$, focos en los puntos $(-10,0)$ y $(10,0)$.

Como los vértices y los focos están en el eje X entonces es una hipérbola horizontal.

Como los vértices están a 6 de distancia del centro, en este caso el origen, entonces $a=6$.

Como los focos están a 10 de distancia del centro sabemos entonces que $c=10$. Además, como en las hipérbolas se cumple que $a^2+b^2=c^2$ entonces, en este caso,

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{100-36} \\ &= \sqrt{64} = 8 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

La ecuación es

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

Características de las hipérbolas.

1. Presenta dos secciones.

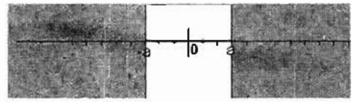
   Si sumamos a la ecuación $\frac{y^2}{b^2}$ queda

   $$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2},$$

   multiplicamos la ecuación por a^2 y observamos que la parte derecha lo menos que puede valer y es cuando $y=0$ entonces se cumple

   $$\begin{aligned} &x^2=a^2+\frac{a^2y^2}{b^2}\geq a^2 \\ &x^2\geq a^2 \\ &x\geq a \\ &x\leq -a \end{aligned}$$

La expresión sólo tiene solución para valores de x mayores que a o menores a $-a$.

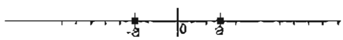


La parte oscura es donde hay valores de x en la gráfica.

2. Tiene dos vértices, son puntos donde claramente se observa satisfacen la definición ya que

$$\left|d[(-c,0);(a,0)] - d[(a,0);(c,0)]\right| = |a+c-(c-a)| = 2a\,,$$

$$\left|d[(-c,0);(-a,0)] - d[(-a,0);(c,0)]\right| = |-a+c-(c+a)| = 2a\,.$$



Los puntos $V_1 = (-a,0)$ y $V_2 = (a,0)$ son los vértices de la hipérbola

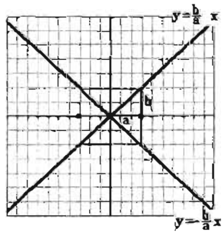
3. Dos asíntotas

   De la ecuación de la hipérbola, despejando y se puede llevar a la expresión

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2}\,.$$

   Factorizando $\frac{b^2}{a^2}x^2$ y sacando de la raíz queda

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\,.$$



   Conforme se tome valores más grandes de x la expresión $\frac{a^2}{x^2}$ se hace muy pequeña de forma que con valores cada vez más grandes la hipérbola se parece más a las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$. Esto caracteriza principalmente a las hipérbolas.

4. Varias simetrías

   Tiene ejes de simetría tanto horizontal como vertical, asimismo presenta simetría con respecto al centro de la hipérbola.

Definición

Cuando una curva se parece cada vez más a una recta, se dice que la curva se acerca asintótica a la recta y a la recta se le llama asíntota.

Gráfica de la hipérbola

Se puede trazar partiendo de los vértices hacia las asíntotas.

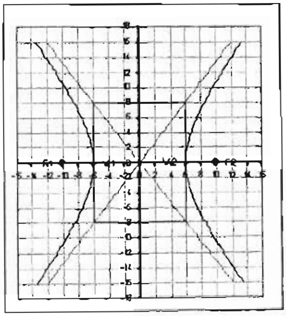
Ejemplos 5.35

Realizar la gráfica de la hipérbola del Ejemplo 5.34 en la Pág 131.

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

Los vértices sabemos son $(-6,0)$ y $(6,0)$.

Las asíntotas son: $y=\frac{4}{3}x$; $y=-\frac{4}{3}x$



Ecuación de hipérbola vertical

Si consideramos ahora la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

claramente los puntos $(0,b)$ y $(0,-b)$ están en la hipérbola y son los vértices, ahora despejando y^2 se obtiene

$$y^2=b^2+\frac{x^2}{a^2}$$

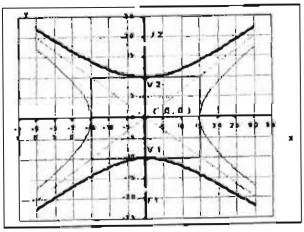
de manera análoga significa ahora que la expresión sólo tiene solución para valores de $y\le -b$ ó $y\ge b$. Despejando y se llega a la ecuación

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}$$

la cual también, para valores grandes de x, se va pareciendo a las asíntotas $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$.

Ejemplo 5.36

Graficar la hipérbola $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{100}=-1$



Observa como con simplemente cambiar el término independiente a -1 la hipérbola que es solución de la ecuación es ahora vertical y tienen las dos hipérbolas a las mismas asíntotas.

Ecuación de las hipérbolas con centro en un punto cualquiera

Horizontal $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Vertical $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=-1$

Ejemplo 5.37

Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el punto $(4,-1)$, vértices en los puntos $(0,-1)$ y $(8,-1)$, focos en los puntos $(-3,-1)$ y $(11,0)$.

Como los vértices y los focos están en la misma recta horizontal $y=-1$ se trata de una hipérbola horizontal.

Como los vértices están a 3 de distancia del centro entonces $a=6$.

Como los focos están a 7 de distancia del centro sabemos entonces que $c=7$. Además, como en las hipérbolas se cumple que $a^2+b^2=c^2$ entonces, en este caso,

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{49-36} \\ &= \sqrt{13}=3.6 \\ b &= 3.6 \\ b^2 &= 13 \end{aligned}$$

La ecuación es

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$$

Para determinar las asíntotas simplemente hacemos la traslación del centro respecto del origen

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

Ejemplo 5.38

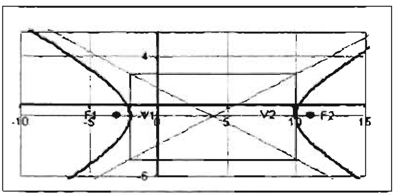
Determinar las asíntotas y hacer la gráfica de la hipérbola del ejemplo anterior.

Ecuaciones de la asíntotas:

$$y+1=\frac{3.6}{6}(x-4)$$

$$y+1=-0.6(x-4)$$

La gráfica es



Ejemplo 5.39

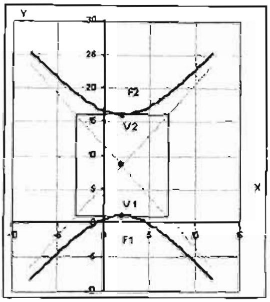
Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en los puntos $(2,1)$ y $(2,16)$ con ecuaciones de las asíntotas $y-7.5=1.5(x-2)$; $y-7.5=-1.5(x-2)$. Hacer la gráfica.

Como están los vértices en la recta $x=2$ se trata de una hipérbola vertical. Por las ecuaciones de las hipérbolas se tiene que el centro está en el punto $(2, 8.5)$ y que $\frac{b}{a}=1.5$ donde $b=7.5$ entonces

$$\frac{7.5}{a}=1.5 \Rightarrow a=\frac{7.5}{1.5}=5$$

La ecuación resulta

$$\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-8.5)}{56.25}=-1$$

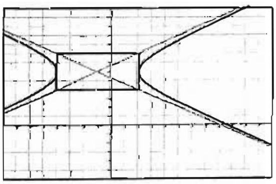


Ejercicios 23

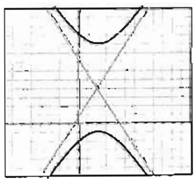
Determina la ecuación de las hipérbolas siguientes:

1. $F_1=(-6,0)$; $F_2=(6,0)$ y $2a=8$.
2. $F_1=(0,-8)$; $F_2=(0,8)$ y $a=5$.
3. $V_1=(-7.5,0)$; $V_2=(7.5,0)$ y $c=9$.
4. Vertical, centro en origen, $a=3$ y $b=4$.
5. $V_1=(-2,-4)$; $V_2=(10,-4)$ y asíntotas $y+4=\pm\frac{1}{3}(x-4)$.
6. $F_1=(-3,1)$; $F_2=(-3,13)$ y asíntotas $y-7=\pm4(x+3)$.

Di cuál es la ecuación de las hipérbolas dadas las gráficas:



7.



8.

De las siguientes hipérbolas encuentra vértices, focos, centro, dirección, asíntotas y establece todo en su gráfica.

9. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

10. $25y^2-9x^2=225$

11. $\dfrac{(y-2)^2}{20}-\dfrac{(x-8)^2}{6}=1$

12. $\dfrac{(x+2)^2}{81}-\dfrac{(y-4)^2}{49}=1$

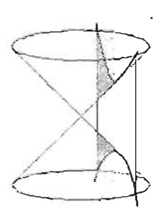
Encuentra los valores de x para los cuales la hipérbola toma el valor dado de y:

13. $\frac{(x-4)^2}{64}-\frac{(y+1)^2}{100}=1$
    $y=7$

14. $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{15}=1$
    $y=5$

15. $4x^2+40x+9y^2+90y+89=0$
    $y=-4$

16. Muestra que toda hipérbola se puede llevar a la ecuación cuadrática de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0;\ AB<0$



Si se considera la intersección de un cono con un plano con mayor inclinación que la generatriz se obtendrá la curva llamada hipérbola.

Anexos

A1. Principio de inducción matemática

Una propiedad relevante de los números naturales que nos puede tomar de novedad pero es básico para generalizar alguna propiedad que verificamos que se cumple en varios casos y sin embargo no podemos estar totalmente seguros de que siempre suceda.

Giuseppe Peano[61]

Por ejemplo, es común simplificar la suma de los primeros naturales mediante la fórmula

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Se puede verificar que efectivamente se satisface con los primeros valores

$$1=\frac{1(2)}{2}=1$$

$$1+2=3=\frac{2(3)}{2}=3$$

$$1+2+3=6=\frac{3(4)}{2}=6$$

En cambio, si elevamos las potencias de 11 tenemos

$$11^0=1$$

$$11^1=11$$

$$11^2=121$$

$$11^3=1331$$

Podemos pensar que las potencias de 11 coincide con el triángulo de Pascal, que todavía coincide en

$$11^4=14641$$

Sin embargo para el siguiente ya no se satisface

$$11^5=161051$$

[61] Giuseppe Peano nació en Cuneo, Italia en 1858 muere en Turín en 1932. Es increíble que hasta finales del siglo XIX, gracias a Peano, se obtiene la axiomatización básica de los números naturales mediante cinco axiomas donde el quinto es la base del principio de inducción matemática.

Que es diferente al siguiente término del triángulo de Pascal

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

En el primer ejemplo es una proposición verdadera para todos los naturales, mientras que la segunda a pesar de suceder en las primeras vimos que a partir de la quinta potencia ya no fue cierto. Requerimos de un método que nos permita distinguir cuando una propiedad realmente es verdadera de aquellas que pueden coincidir, pero no se cumplen siempre.

Inducción Matemática

Supongamos que se quiere demostrar alguna propiedad $P(n)$ donde $n \in N$.

i) Si se verifica para $P(1)$, es decir la propiedad vale para $n = 1$.

ii) Se supone que $P(n)$ es válida y a partir de esto se demuestra la validez de $P(n+1)$; es decir, se supone que la propiedad es válida para n y a partir de esto se demuestra que es válida para $n+1$

Entonces la propiedad $P(n)$ es válida para todos los números naturales.

Verifiquemos que se cumple la primera propiedad anterior

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Verificamos se cumple para $n = 1$

$$1 = \frac{1(2)}{2} = 1,$$

efectivamente sumar hasta el primer término es igual a la fórmula para $n = 1$.

Suponemos que es válida la propiedad para $P(n)$, es decir que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y demostremos que es válida para $P(n+1)$

Por un lado lo que queremos es sumar los $n+1$ términos

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)$$

y comprobar que también satisfacen la propiedad, en este caso

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Así verificando tenemos

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

porque estamos suponiendo que es válida para n. Ahora sumando, agrupando y factorizando el lado derecho tenemos

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\&=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\&=\frac{n^2+n+2n+2}{2}\\&=\frac{n^2+3n+2}{2}\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

lo que prueba la validez de la fórmula

Cabe hacer la siguiente reflexión de la certeza del método de inducción matemática, si una propiedad siempre que sea válida para un valor lo es para el siguiente y esta es válida para el 1, entonces será valida para el 2 y si es valida para el 2 es válida para su siguiente el 3 y así sucesivamente entonces podemos concluir sin duda que es cierto para todos los números naturales.

Ejercicios 24

Demostrar mediante inducción matemática las siguientes propiedades:

1. $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.
2. Si $q\neq 1$ entonces $1+q+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
3. $2^{n+3}\leq(n+3)!$.
4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.
5. 3 es factor de n^3-n+3.
6. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$[62].

[62] En la obra que sobrevive de Arquímedes, invoca esta fórmula dentro de sus deducciones.

En una tablilla que data del imperio de Nabucodonosor se encontraron las siguientes dos series.

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9=2^9+2^9-1$$

y

$$1+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left[1\left(\tfrac{1}{3}\right)+10\left(\tfrac{2}{3}\right)\right]55=385$$

Observa, que la segunda coincide con la que invocó Arquimedes.

7. Puedes encontrar la expresión general y demostrar la primera por inducción matemática.

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=$$

8. La segunda serie de la tablilla verifica que cumple con la serie de Arquímedes (ejercicio 6), y observa que lo expresado en la tablilla va en la dirección de la generalización.

9. En los *Espejos preciosos*, texto chino de matemáticas del siglo XIII, se establece esta serie junto con la suma de cuadrados que invocó Arquímedes.

$$1+8+30+80+\cdots+\tfrac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)=\tfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)$$

Demuestra mediante el principio de inducción matemática la validez de la propiedad.

A2. Aplicación de las ecuaciones para descomponer fracciones algebraicas en fracciones parciales.

Descomposición de fracciones algebraicas en Polinomios y fracción propia

Dada una fracción de la forma $\frac{Q(x)}{P(x)}$ *donde Q(x) es un polinomio de grado mayor o igual que P(x) realizando la división algebraica de las fracciones se puede expresar como su parte entera más una fracción algebraica* $P_E(x)+\frac{r(x)}{P(x)}$ *donde r(x) es un polinomio de grado estrictamente menor que* $P(x)$.

Ejemplo A 1

Dada la fracción algebraica $\frac{3x^2+10x+12}{x+1}$, determinar la parte entera y la fracción propia.

Si efectuamos la división de polinomios sobre la fracción se obtiene

$$\begin{array}{r|l} & 3x+7 \\ \hline x+1 & 3x^2+10x+12 \\ & \underline{-3x^2-3x} \\ & 7x+12 \\ & \underline{-7x-7} \\ & 5 \end{array}$$

Así se puede establecer la siguiente igualdad

$$\frac{3x^2+10x+12}{x+1}=3x+7+\frac{5}{x+1}$$

La parte entera es $3x+7$. Además en la fracción propia, el polinomio 5 es de grado cero el cual es estrictamente menor al grado del divisor $x+1$ que es de grado 1.

Por otro lado, todo polinomio se puede descomponer en factores lineales y cuadráticos.

Ejemplo A 2

Factorizar el polinomio $x^4+4x^3+6x^2-x-10$.

tiene las raíces $r_1=-2$; $r_2=1$ ya que

$$(-2)^4+4(-2)^3+6(-2)^2-(-2)-10=16-32+24+2-10=0$$

$$(1)^4+4(1)^3+6(1)-(1)-10=0$$

entonces aplicando el Corolario 2.1 de la Pág. 12 se establece que $x+2$ y $x-1$ son factores, si realizamos las divisiones entre $x+2$ y luego entre $x-1$ mediante el método de la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 6 & -1 & -10 \\ -2 & & -2 & -4 & -4 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & -5 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & -5 \\ +1 & & 1 & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

obtenemos los factores, es decir, que el polinomio original se puede factorizar como

$$x^4+4x^3+6x^2-x-10=(x+2)(x-1)(x^2+3x+5).$$

Si tratamos de encontrar más raíces igualamos la parte cuadrática a cero y resolvemos mediante la fórmula general de ecuaciones de segundo grado

$$x^2+3x+5=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(5)}}{2(1)}=\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}$$

Ya no tiene más raíces reales, hasta aquí es posible factorizarlo.

De hecho el polinomio lo hemos podido expresar como producto de dos lineales y una cuadrática irreducible.

Descomposición en fracciones simples

Ahora la fracción propia $\frac{r(x)}{P(x)}$ se puede descomponer en una suma de fracciones más simples cuando el polinomio divisor de una fracción tiene factores.

Mediante ejemplos veamos los diferentes eventos posibles.

1°) -El polinomio divisor se puede factorizar con producto de lineales originado por raíces distintas.

Ejemplo A 3

Determinar sus fracciones parciales de la siguiente fracción algebraica

$$\frac{5x+6}{x^2+6x+8}$$

Encontrar las raíces del divisor, como es cuadrática podemos usar la fórmula general de la ecuación de segundo grado

$$x^2+6x+8=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=-3\pm 1$$

$$x_1=-4$$

$$x_2=-2$$

Entonces la fracción se puede expresar factorizada como

$$\frac{5x+6}{x^2+6x+8}=\frac{5x+6}{(x-(-4))(x-(-2))}=\frac{5x+6}{(x+4)(x+2)}$$

Para el caso donde se tiene producto de lineales en el divisor las fracciones parciales se encuentran como constante entre el factor lineal

$$\frac{5x+6}{x^2+6x+8}=\frac{5x+6}{(x+4)(x+2)}=\frac{J}{x+4}+\frac{k}{x+2}$$

donde J y K son incógnitas por descubrir.

Si efectúas la suma de fracciones y la identificas con la fracción original podemos establecer relaciones que nos ayuden a determinar las incógnitas

$$\frac{J}{x+4}+\frac{K}{x+2}=\frac{J(x+2)+K(x+4)}{(x+4)(x+2)}$$

Si desarrollamos, luego agrupamos términos e igualamos a la fracción algebraica original

$$=\frac{Jx+2J+Kx+4k}{(x+4)(x+2)}$$

$$=\frac{(J+K)x+(2J+4k)}{(x+4)(x+2)}=\frac{5x+6}{(x+4)(x+2)}$$

Como deben ser iguales se puede identificar los coeficientes respectivos del numerador en las dos fracciones algebraicas

$J+K=5$	Coeficiente de x
$2J+4K=6$	Término independiente

Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas[63] para cuya solución tenemos varios métodos que en este caso usaremos el método de suma y resta.

[63] Consulta sistemas de ecuaciones lineales en la Pág. 56

Multiplicando por -2 la primera ecuación y después sumarlas se obtiene

$$\begin{array}{r} -2J-2K=-10 \\ 2J+4K=6 \\ \hline 2K=-4 \end{array}$$

Que es una ecuación de una incógnita, despejando queda

$$K=-2$$

Sustituyendo en alguna de las ecuaciones para determinar la incógnita J

$$\begin{aligned} J+(-2)&=5 \\ J&=7 \end{aligned}$$

Concluyendo, la fracción algebraica se pudo expresar en sus fracciones parciales

$$\frac{5x+6}{x^2+6x+8}=\frac{7}{x+4}-\frac{2}{x+2}$$

con la característica que cada una es más simple.

2°) En el caso que el polinomio divisor se puede factorizar con producto de lineales originado por raíces iguales.

Ejemplo A 4

Descomponer en sus fracciones parciales la fracción algebraica

$$\frac{10x-25}{x^2+8x+16}$$

Factorizando el divisor de la fracción algebraica

$$\begin{aligned} x^2+8x+16&=0 \\ x&=\frac{-8\pm\sqrt{64-4(16)}}{2}=-4 \end{aligned}$$

Sólo tiene una raiz entonces es un solo factor, pero doble en el sentido de que va al cuadrado.

$$x^2+8x+16=(x-(-4))^2=(x+4)^2$$

Para separar en sus fracciones parciales se tiene que considerar cada grado desde 1 hasta el que se tenga en este caso hasta 2, entonces la expresión se puede separar con la propuesta

$$\frac{10x-25}{x^2+8x+16}=\frac{J}{x+4}+\frac{K}{(x+4)^2}$$

Haciendo la suma e identificando con la original

$$\frac{J}{x+4}+\frac{K}{(x+4)^2}=\frac{J(x+4)+K}{(x+4)^2}=\frac{Jx+(4J+K)}{(x+4)^2}=\frac{10x-25}{x^2+8x+16}$$

Nos lleva al sistema

$$J=10$$
$$4J+K=-25$$

De donde

$$J=10$$
$$K=-65$$

La fracción algebraica tiene las fracciones parciales

$$\frac{10x-25}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x+4}-\frac{65}{(x+4)^2}$$

3°) Los factores que tengan cuadráticas irreductibles se debe proponer en el numerador de la fracción parcial una expresión lineal

Ejemplo A 5

Obtener las fracciones parciales de la fracción algebraica siguiente

$$\frac{4x^2-7x+40}{(x-4)(x^2+5x+12)}$$

Verificando que la parte cuadrática es irreducible

$$x^2+5x+12=0$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-48}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2}$$

La solución no es real, no tiene factores más simples. La propuesta de factores más simple queda constante entre el factor lineal y lineal entre el factor cuadrático

$$\frac{4x^2-7x+40}{(x-4)(x^2+5x+12)}=\frac{J}{x-4}+\frac{Kx+L}{x^2+5x+12}$$

Resolviendo

$$\frac{J}{x-4}+\frac{Kx+L}{x^2+5x+12}=\frac{J(x^2+5x+12)+(Kx+L)(x-4)}{(x-4)(x^2+5x+12)}$$

$$=\frac{Jx^2+5Jx+12J+Kx^2+Lx-4Kx-4L}{(x-4)(x^2+5x+12)}$$

$$=\frac{(J+K)x^2+(5J-4K+L)x+(12J-4L)}{(x-4)(x^2+5x+12)}=\frac{4x^2-7x+40}{(x-4)(x^2+5x+12)}$$

Nos lleva al sistema

$$J+K=4$$
$$5J-4K+L=-7$$
$$12J-4L=40$$

Ahora tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, también se puede resolver por los métodos establecidos en el libro pero generalizando hagámoslo con la regla de Cramer[64]

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 1\\ 12 & 0 & -4\end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante 3x3

1. Se deben repetir los dos primeros renglones al final.
2. Multiplicar las diagonales de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, sumar los resultados.
3. Multiplicar las diagonales de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha, restando los resultados.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 1\\ 12 & 0 & -4\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1)(-4)(-4)+(5)(0)(0)+(12)(1)(1)$$

$$-(12)(-4)(0)-(1)(0)(1)-(5)(1)(-4)$$
$$=28-(-20)=48$$

[64] Si requieres recordar, consulta la regla de Cramer en la Pág. 59

Calculando los determinantes para cada incógnita

$$\Delta_J = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & 1 \\ 40 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 64 + 40 - (28) = 76$$

$$\Delta_K = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \\ 12 & 40 & -4 \end{vmatrix} = 116$$

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & -4 & -7 \\ 12 & 0 & 40 \end{vmatrix} = -252$$

Obteniendo, mediante la regla de Cramer los valores de las incógnitas

$$J = \frac{\Delta_J}{\Delta} = \frac{76}{48} = \frac{19}{12}$$

$$K = \frac{\Delta_K}{\Delta} = \frac{116}{48} = \frac{29}{12}$$

$$L = \frac{\Delta_L}{\Delta} = \frac{-252}{48} = -\frac{21}{4}$$

Verificando los resultados

$$J + K = \frac{19}{12} + \frac{29}{12} = 4$$

$$5J - 4K + L = 5\left(\frac{19}{12}\right) - 4\left(\frac{29}{12}\right) + \left(-\frac{21}{4}\right) = -7$$

$$12J - 4L = 12\left(\frac{19}{12}\right) - 4\left(-\frac{21}{4}\right) = 40$$

Estableciendo las fracciones parciales el resultado es

$$\frac{4x^2 - 7x + 40}{(x-4)(x^2+5x+12)} = \frac{\frac{19}{12}}{x-4} + \frac{\frac{29}{12}x - \frac{21}{4}}{x^2+5x+12}$$

Observaciones:

Con lo visto se ilustra el método para determinar las fracciones parciales de cualquier fracción algebraica.

Considerar descomposiciones más complejas simplemente lleva a sistemas lineales de orden mayor, lo cual ya se sale del propósito de este texto.

Ejercicios 25

Encuentra para cada fracción algebraica la parte entera en su caso y las fracciones parciales.

1. $\dfrac{3x^3-15x^2+26x+1}{x^2-8x+15}$

2. $\dfrac{5x^3+17x^2-99x+54}{x^2+5x-14}$

3. $\dfrac{5x^2-62x+108}{(x+8)(x-4)(x-3)}$

4. $\dfrac{3x^2+21x-12}{x^3-x}$

5. $\dfrac{13x^2+59x+75}{(x+3)(x^2+7x+15)}$

6. $\dfrac{x^2-7x-10}{(x-4)(x^2-5x+15)}$

7. $\dfrac{17x+9}{x^3-7x-6}$

8. $\dfrac{\frac{21}{2}x^2+23x-28}{x^3+3x^2-4x-12}$

9. $\dfrac{5x^2+104x-102}{x^3-2x^2-24x+55}$

10. $\dfrac{4x^2+51x+75}{x^3-x^2+3x-27}$

11. $\dfrac{5x^4-42x^3+119x^2-159x+152}{(x-5)(x^2-x+3)}$

12. $\dfrac{x^5-x^4+4x^3-31x^2+16x+20}{x^3-4x^2+4x}$

A3. Fórmula de Herón[65]

En el Libro II de los Elementos de Euclides sobre *Álgebra geométrica*[66] contiene las siguientes dos proposiciones son la generalización del teorema de Pitágoras y antecedente de la ley de los cosenos.

Proposición 12. En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

Proposición 13. En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

Las proposiciones anteriores puestas en un lenguaje más actual, demostrando la primera, se obtiene.

Teorema (Proposición 12, libro II de Euclides)

En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, más el doble producto de uno de estos lados por la proyección del segundo lado sobre el primero.

Hipótesis: En el triángulo ΔABC, ángulo $C > \frac{\pi}{2}$, $proy_b a = \bar{a}$

Tesis: $c^2 = a^2 + b^2 + 2b\bar{a}$

Trazos auxiliares: Se establece la proyección y la altura, nombrando los elementos del triángulo.

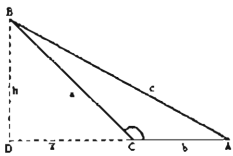


Figura A.1

Demostración

$c^2 = h^2 + \left(\bar{a} + b\right)^2$	Considerando el ΔABD, teorema de Pitágoras.
$h^2 = a^2 - \bar{a}^2$	Considerando el ΔBCD, teorema de Pitágoras.
$c^2 = \left(a^2 - \bar{a}^2\right) + \left(\bar{a} + b\right)^2$	Sustitución de igualdad.
$c^2 = a^2 - \bar{a}^2 + \bar{a}^2 + 2b\bar{a} + b^2$	Expandiendo la expresión.
$c^2 = a^2 + b^2 + 2b\bar{a}$	Simplificando, queda demostrado.

[65] En matemáticas Herón pasó a la historia sobre todo por la fórmula que lleva su nombre y que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, aparecida por primera vez en su obra "La Métrica".

[66] El libro II de Euclides trata de transformaciones de áreas y álgebra geométrica griega de la Escuela Pitagórica. Se establecen las equivalencias geométricas de diferentes identidades algebraicas y una generalización del Teorema de Pitágoras que devino posteriormente en la ley de los cosenos. Parece querer ilustrar este Libro II el uso del desarrollo elemental del método de aplicación de áreas.

La segunda proposición queda expresada en el siguiente teorema

Teorema (Proposición 13, libro II de Euclides)

> En cualquier triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, menos el doble producto de uno de estos lados por la proyección del segundo lado sobre el primero.

Compara los términos con base en la figura A.2. $c^2 = a^2 + b^2 - 2b\bar{a}$

La demostración se deja al lector, es muy parecida al caso obtusángulo.

Calcular la altura a partir de los lados de un triángulo sin importar que situación se presente (Obtusángulo o ángulo agudo) lleva a una única expresión, demostraremos el caso agudo.

Cálculo de la altura de un triángulo a partir de sus lados.

Caso ángulo agudo

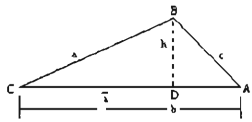


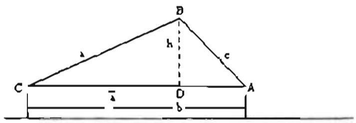
Figura A.2

$h^2 = a^2 - \bar{a}^2$	Considerando el ΔBCD, teorema de Pitágoras.
$\bar{a} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$	Despejando la longitud de la proyección de a sobre b usando el teorema anterior.
$h^2 = a^2 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2$	Sustituyendo la identidad.
$h^2 = \left(a + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)\left(a - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)$	Factorizando en binomios conjugados
$h^2 = \dfrac{1}{4b^2}\left(a^2 + 2ab + b^2 - c^2\right)\left(c^2 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\right)$	Operando la fracción y agrupando trinomios cuadrados perfectos.
$h^2 = \dfrac{1}{4b^2}\left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right)$	Factorizando en binomios al cuadrado.
$h^2 = \dfrac{1}{4b^2}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$	Factorizando en binomios conjugados.
$h^2 = \dfrac{1}{4b^2}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$	Reordenando los términos.
$h^2 = \dfrac{4}{b^2}P(P-a)(P-c)(P-b)$	Donde $P = \dfrac{a+b+c}{2}$, el semiperimetro.
$h = \dfrac{2}{b}\sqrt{P(P-a)(P-c)(P-b)}$	Aplicando raiz cuadrada a la ecuación se obtiene la altura.

La fórmula de la altura a partir de los lados del triángulo para el caso obtuso es la misma, la forma de obtenerla es muy semejante al caso agudo y se deja al lector.

Gracias al desarrollo de la trigonometría una fórmula para la altura más sencilla pero requiere conocer dos lados y el ángulo que forman.

Cálculo de la altura, usando la definición del seno.

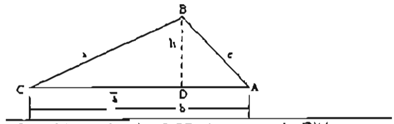


$sen\, C = \frac{h}{a}$ — Definición del seno de un ángulo.

$h = a\, sen\, C$ — Despejando la altura h la obtenemos

Si tan sólo conocemos los tres lados, una visión más actual, ya que la ley de los cosenos ha dejado en desuso las proposiciones 12 y 13 del libro II de Euclides, es usando la misma ley de los cosenos en la obtención de la altura.

Cálculo de la altura, usando la ley de los cosenos[57]



$h^2 = a^2 - \bar{a}^2$ — Considerando el ΔBCD, teorema de Pitágoras.

$\cos C = \frac{\bar{a}}{a}$ — Definición de coseno.

$\bar{a} = a \cos C$ — Despejando $\bar{a}$ que en particular es $proy_b a = \bar{a}$ longitud de la proyección de b sobre c.

$a \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ — Despejando $b \cos A$ de la ley de los cosenos en el caso del lado c. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2$ — Sustituyendo la identidad.

$h^2 = \frac{1}{4b^2}\left(4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2\right)$ — Operando la fracción algebraica.

$h^2 = \frac{1}{4b^2}\left(2ab - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)\left(2ab + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)$ — Factorizando en binomios conjugados.

$h^2 = \frac{1}{4b^2}\left(c^2 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\right)\left(a^2 + 2ab + b^2 - c^2\right)$ — Agrupando los trinomios cuadrados perfectos.

$h^2 = \frac{1}{4b^2}\left(c^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - c^2\right)$ — Factorizando en los binomios al cuadrado.

[57] Puedes consultar la ley de los cosenos en la Pág. 90.

$h^2 = \frac{1}{4b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b+c)(a+b-c)$ Factorizando en binomios conjugados

$h^2 = \frac{1}{4b^2}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ Reordenando los términos.

$h^2 = \frac{4}{b^2}P(P-a)(P-b)(P-c)$ donde $P = \frac{a+b+c}{2}$, el semiperímetro.

$h = \frac{2}{b}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ Aplicando raíz cuadrada a la ecuación se obtiene la altura.

Así podemos calcular el área de un triángulo al menos de tres formas.

Con la base y la altura

$A = \frac{bh}{2}$ Donde b es la longitud de la base y h es la altura.

Con la base y un ángulo adyacente a la base

$A = \frac{bh}{2} = \frac{ab}{2}\operatorname{sen} C$ Donde a y b son las longitudes de los lados adyacentes al ángulo C.

Fórmula de Herón (Con los tres lados del triángulo

$A = \frac{bh}{2}$ Área del triángulo.

$A = \frac{b}{2}\frac{2}{b}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ Sustitución de la altura.

$A = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ Queda la fórmula del área de un triángulo con base en sus lados o fórmula de Herón.

Ejercicios 26

1. Demuestra el teorema de la Pág. 150 que dice: En cualquier triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, menos el doble producto de uno de estos lados por la proyección del segundo lado sobre el primero.
2. Muestra que la fórmula de la altura a partir de los lados del triángulo para el caso obtuso es también $A = \frac{2}{b}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$.

Encuentra la altura de los siguientes triángulos.

3. $a=9$, $b=12$, $c=14$	4. $a=12$, $b=8$, $c=18$	5. $a=10$, $b=18$, $C=\frac{3}{8}\pi$	6. $a=6$, $b=8$, $C=\frac{3}{10}\pi$

Determina el área de los siguientes triángulos.

7. $a=10$, $b=13$, $c=15$
8. $a=13$, $b=7$, $c=19$
9. $a=12$, $b=16$, $C=\frac{5}{12}\pi$
10. $a=13.5$, $b=8.32$, $C=113^\circ 37'45''$
11. Calcula el área de un decágono circunscrito en un círculo de radio 5 cm.
12. Podrías dar un método para calcular el área de un triángulo conociendo un solo lado y los ángulos adyacentes.

Tablas de funciones trigonométricas

Tabla 1 de funciones trigonométricas.

Ángulo en sistema circular (radianes) y sistema sexagesimal (grados, en expansión decimal).

Observa que para valores pequeños, el ángulo en radianes, el seno y la tangente coinciden y el coseno vale 1; redondeando a dos decimales.

A (rad)	a (grados)	sen	cos	tan
0.00	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.01	0.5730	0.0100	1.0000	0.0100
0.02	1.1459	0.0200	0.9998	0.0200
0.03	1.7189	0.0300	0.9996	0.0300
0.04	2.2918	0.0400	0.9992	0.0400
0.05	2.8648	0.0500	0.9988	0.0500
0.06	3.4377	0.0600	0.9982	0.0601
0.07	4.0107	0.0699	0.9976	0.0701
0.08	4.5837	0.0799	0.9968	0.0802
0.09	5.1566	0.0899	0.9960	0.0902
0.10	5.7296	0.0998	0.9950	0.1003
0.11	6.3025	0.1098	0.9940	0.1104
0.12	6.8755	0.1197	0.9928	0.1206
0.13	7.4485	0.1296	0.9916	0.1307
0.14	8.0214	0.1395	0.9902	0.1409
0.15	8.5944	0.1494	0.9888	0.1511
0.16	9.1673	0.1593	0.9872	0.1614
0.17	9.7403	0.1692	0.9856	0.1717
0.18	10.3132	0.1790	0.9838	0.1820
0.19	10.8862	0.1889	0.9820	0.1923
0.20	11.4592	0.1987	0.9801	0.2027
0.21	12.0321	0.2085	0.9780	0.2131
0.22	12.6051	0.2182	0.9759	0.2236
0.23	13.1780	0.2280	0.9737	0.2341
0.24	13.7510	0.2377	0.9713	0.2447
0.25	14.3239	0.2474	0.9689	0.2553
0.26	14.8969	0.2571	0.9664	0.2660
0.27	15.4699	0.2667	0.9638	0.2768
0.28	16.0428	0.2764	0.9611	0.2876
0.29	16.6158	0.2860	0.9582	0.2984
0.30	17.1887	0.2955	0.9553	0.3093
0.31	17.7617	0.3051	0.9523	0.3203
0.32	18.3346	0.3146	0.9492	0.3314
0.33	18.9076	0.3240	0.9460	0.3425
0.34	19.4806	0.3335	0.9428	0.3537
0.35	20.0535	0.3429	0.9394	0.3650
0.36	20.6265	0.3523	0.9359	0.3764
0.37	21.1994	0.3616	0.9323	0.3879
0.38	21.7724	0.3709	0.9287	0.3994
0.39	22.3454	0.3802	0.9249	0.4111
0.40	22.9183	0.3894	0.9211	0.4228
0.41	23.4913	0.3986	0.9171	0.4346
0.42	24.0642	0.4078	0.9131	0.4466
0.43	24.6372	0.4169	0.9090	0.4586
0.44	25.2101	0.4259	0.9048	0.4708
0.45	25.7831	0.4350	0.9004	0.4831

A (rad)	a (grados)	sen	cos	tan
0.46	26.3561	0.4439	0.8961	0.4954
0.47	26.9290	0.4529	0.8916	0.5080
0.48	27.5020	0.4618	0.8870	0.5206
0.49	28.0749	0.4706	0.8823	0.5334
0.50	28.6479	0.4794	0.8776	0.5463
0.51	29.2208	0.4882	0.8727	0.5594
0.52	29.7938	0.4969	0.8678	0.5726
0.53	30.3668	0.5055	0.8628	0.5859
0.54	30.9397	0.5141	0.8577	0.5994
0.55	31.5127	0.5227	0.8525	0.6131
0.56	32.0856	0.5312	0.8473	0.6269
0.57	32.6586	0.5396	0.8419	0.6410
0.58	33.2316	0.5480	0.8365	0.6552
0.59	33.8045	0.5564	0.8309	0.6696
0.60	34.3775	0.5646	0.8253	0.6841
0.61	34.9504	0.5729	0.8196	0.6989
0.62	35.5234	0.5810	0.8139	0.7139
0.63	36.0963	0.5891	0.8080	0.7291
0.64	36.6693	0.5972	0.8021	0.7445
0.65	37.2423	0.6052	0.7961	0.7602
0.66	37.8152	0.6131	0.7900	0.7761
0.67	38.3882	0.6210	0.7838	0.7923
0.68	38.9611	0.6288	0.7776	0.8087
0.69	39.5341	0.6365	0.7712	0.8253
0.70	40.1070	0.6442	0.7648	0.8423
0.71	40.6800	0.6518	0.7584	0.8595
0.72	41.2530	0.6594	0.7518	0.8771
0.73	41.8259	0.6669	0.7452	0.8949
0.74	42.3989	0.6743	0.7385	0.9131
0.75	42.9718	0.6816	0.7317	0.9316
0.76	43.5448	0.6889	0.7248	0.9505
0.77	44.1178	0.6961	0.7179	0.9697
0.78	44.6907	0.7033	0.7109	0.9893
0.79	45.2637	0.7104	0.7038	1.0092
0.80	45.8366	0.7174	0.6967	1.0296
0.81	46.4096	0.7243	0.6895	1.0505
0.82	46.9825	0.7311	0.6822	1.0717
0.83	47.5555	0.7379	0.6749	1.0934
0.84	48.1285	0.7446	0.6675	1.1156
0.85	48.7014	0.7513	0.6600	1.1383
0.86	49.2744	0.7578	0.6524	1.1616
0.87	49.8473	0.7643	0.6448	1.1853
0.88	50.4203	0.7707	0.6372	1.2097
0.89	50.9932	0.7771	0.6294	1.2346
0.90	51.5662	0.7833	0.6216	1.2602
0.91	52.1392	0.7895	0.6137	1.2864
0.92	52.7121	0.7956	0.6058	1.3133
0.93	53.2851	0.8016	0.5978	1.3409
0.94	53.8580	0.8076	0.5898	1.3692
0.95	54.4310	0.8134	0.5817	1.3984

A (rad)	a (grados)	sen	cos	tan
0.96	55.0039	0.8192	0.5735	1.4284
0.97	55.5769	0.8249	0.5653	1.4592
0.98	56.1499	0.8305	0.5570	1.4910
0.99	56.7228	0.8360	0.5487	1.5237
1.00	57.2958	0.8415	0.5403	1.5574
1.01	57.8687	0.8468	0.5319	1.5922
1.02	58.4417	0.8521	0.5234	1.6281
1.03	59.0147	0.8573	0.5148	1.6652
1.04	59.5876	0.8624	0.5062	1.7036
1.05	60.1606	0.8674	0.4976	1.7433
1.06	60.7335	0.8724	0.4889	1.7844
1.07	61.3065	0.8772	0.4801	1.8270
1.08	61.8794	0.8820	0.4713	1.8712
1.09	62.4524	0.8866	0.4625	1.9171
1.10	63.0254	0.8912	0.4536	1.9648
1.11	63.5983	0.8957	0.4447	2.0143
1.12	64.1713	0.9001	0.4357	2.0660
1.13	64.7442	0.9044	0.4267	2.1198
1.14	65.3172	0.9086	0.4176	2.1759
1.15	65.8901	0.9128	0.4085	2.2345
1.16	66.4631	0.9168	0.3993	2.2958
1.17	67.0361	0.9208	0.3902	2.3600
1.18	67.6090	0.9246	0.3809	2.4273
1.19	68.1820	0.9284	0.3717	2.4979
1.20	68.7549	0.9320	0.3624	2.5722
1.21	69.3279	0.9356	0.3530	2.6503
1.22	69.9009	0.9391	0.3436	2.7328
1.23	70.4738	0.9425	0.3342	2.8198
1.24	71.0468	0.9458	0.3248	2.9119
1.25	71.6197	0.9490	0.3153	3.0096
1.26	72.1927	0.9521	0.3058	3.1133
1.27	72.7656	0.9551	0.2963	3.2236
1.28	73.3386	0.9580	0.2867	3.3413
1.29	73.9116	0.9608	0.2771	3.4672
1.30	74.4845	0.9636	0.2675	3.6021

A (rad)	a (grados)	sen	cos	tan
1.31	75.0575	0.9662	0.2579	3.7471
1.32	75.6304	0.9687	0.2482	3.9033
1.33	76.2034	0.9711	0.2385	4.0723
1.34	76.7763	0.9735	0.2288	4.2566
1.35	77.3493	0.9757	0.2190	4.4552
1.36	77.9223	0.9779	0.2092	4.6734
1.37	78.4952	0.9799	0.1994	4.9131
1.38	79.0682	0.9819	0.1896	5.1774
1.39	79.6411	0.9837	0.1798	5.4707
1.40	80.2141	0.9854	0.1700	5.7979
1.41	80.7870	0.9871	0.1601	6.1654
1.42	81.3600	0.9887	0.1502	6.5811
1.43	81.9330	0.9901	0.1403	7.0555
1.44	82.5059	0.9915	0.1304	7.6018
1.45	83.0789	0.9927	0.1205	8.2381
1.46	83.6518	0.9939	0.1106	8.9886
1.47	84.2248	0.9949	0.1006	9.8874
1.48	84.7978	0.9959	0.0907	10.9834
1.49	85.3707	0.9967	0.0807	12.3499
1.50	85.9437	0.9975	0.0707	14.1014
1.51	86.5166	0.9982	0.0608	16.4281
1.52	87.0896	0.9987	0.0508	19.6695
1.53	87.6625	0.9992	0.0408	24.4984
1.54	88.2355	0.9995	0.0308	32.4611
1.55	88.8085	0.9998	0.0208	48.0785
1.56	89.3814	0.9999	0.0108	92.6205
1.57	89.9544	1.0000	0.0008	1255.77

Para valores cercanos a 1.57 el seno vale 1, el coseno vale como 1.57-A; también redondeando a dos decimales. La tangente toma valores muy grandes.

Tabla 2 de funciones trigonométricas

Ángulo en fracciones de π radianes.

Están consideradas las fracciones de π posibles en donde el denominador tenga como máximo 30. Si lo que tienes es la expansión decimal usa la tabla de ángulos en expansión decimal. Sólo están las fracciones irreducibles, antes de buscar en la tabla simplifica la fracción.

rad	rad	sen	cos	tan
0 π / 1	0.000	0.0000	1.0000	0.0000
1 π / 2	1.571	1.0000	0.0000	
1 π / 3	1.047	0.8660	0.5000	1.7321
1 π / 4	0.785	0.7071	0.7071	1.0000
1 π / 5	0.628	0.5878	0.8090	0.7265
2 π / 5	1.257	0.9511	0.3090	3.0777
1 π / 6	0.524	0.5000	0.8660	0.5774
1 π / 7	0.449	0.4339	0.9010	0.4816
2 π / 7	0.898	0.7818	0.6235	1.2540
3 π / 7	1.346	0.9749	0.2225	4.3813
1 π / 8	0.393	0.3827	0.9239	0.4142
3 π / 8	1.178	0.9239	0.3827	2.4142
1 π / 9	0.349	0.3420	0.9397	0.3640
2 π / 9	0.698	0.6428	0.7660	0.8391
4 π / 9	1.396	0.9848	0.1736	5.6713
1 π / 10	0.314	0.3090	0.9511	0.3249
3 π / 10	0.942	0.8090	0.5878	1.3764
1 π / 11	0.286	0.2817	0.9595	0.2936
2 π / 11	0.571	0.5406	0.8413	0.6427
3 π / 11	0.857	0.7557	0.6549	1.1541
4 π / 11	1.142	0.9096	0.4154	2.1897
5 π / 11	1.428	0.9898	0.1423	6.9552
1 π / 12	0.262	0.2588	0.9659	0.2679
5 π / 12	1.309	0.9659	0.2588	3.7321
1 π / 13	0.242	0.2393	0.9709	0.2465
2 π / 13	0.483	0.4647	0.8855	0.5248
3 π / 13	0.725	0.6631	0.7485	0.8859
4 π / 13	0.967	0.8230	0.5681	1.4488
5 π / 13	1.208	0.9350	0.3546	2.6368
6 π / 13	1.450	0.9927	0.1205	8.2357
1 π / 14	0.224	0.2225	0.9749	0.2282
3 π / 14	0.673	0.6235	0.7818	0.7975
5 π / 14	1.122	0.9010	0.4339	2.0765
1 π / 15	0.209	0.2079	0.9781	0.2126
2 π / 15	0.419	0.4067	0.9135	0.4452
4 π / 15	0.838	0.7431	0.6691	1.1106
7 π / 15	1.466	0.9945	0.1045	9.5144

rad	rad	sen	cos	tan
1 π / 16	0.196	0.1951	0.9808	0.1989
3 π / 16	0.589	0.5556	0.8315	0.6682
5 π / 16	0.982	0.8315	0.5556	1.4966
7 π / 16	1.374	0.9808	0.1951	5.0273
1 π / 17	0.185	0.1837	0.9830	0.1869
2 π / 17	0.370	0.3612	0.9325	0.3874
3 π / 17	0.554	0.5264	0.8502	0.6192
4 π / 17	0.739	0.6737	0.7390	0.9116
5 π / 17	0.924	0.7980	0.6026	1.3242
6 π / 17	1.109	0.8952	0.4457	2.0083
7 π / 17	1.294	0.9618	0.2737	3.5146
8 π / 17	1.478	0.9957	0.0923	10.7917
1 π / 18	0.175	0.1736	0.9848	0.1763
5 π / 18	0.873	0.7660	0.6428	1.1918
7 π / 18	1.222	0.9397	0.3420	2.7475
1 π / 19	0.165	0.1646	0.9864	0.1669
2 π / 19	0.331	0.3247	0.9458	0.3433
3 π / 19	0.496	0.4759	0.8795	0.5412
4 π / 19	0.661	0.6142	0.7891	0.7783
5 π / 19	0.827	0.7357	0.6773	1.0863
6 π / 19	0.992	0.8372	0.5469	1.5306
7 π / 19	1.157	0.9158	0.4017	2.2798
8 π / 19	1.323	0.9694	0.2455	3.9489
9 π / 19	1.488	0.9966	0.0826	12.0682
1 π / 20	0.157	0.1564	0.9877	0.1584
3 π / 20	0.471	0.4540	0.8910	0.5095
7 π / 20	1.100	0.8910	0.4540	1.9626
9 π / 20	1.414	0.9877	0.1564	6.3138
1 π / 21	0.150	0.1490	0.9888	0.1507
2 π / 21	0.299	0.2948	0.9556	0.3085
4 π / 21	0.598	0.5633	0.8262	0.6816
5 π / 21	0.748	0.6802	0.7331	0.9279
8 π / 21	1.197	0.9309	0.3653	2.5480
10 π / 21	1.496	0.9972	0.0747	13.3441
1 π / 22	0.143	0.1423	0.9898	0.1438
3 π / 22	0.428	0.4154	0.9096	0.4567
5 π / 22	0.714	0.6549	0.7557	0.8665
7 π / 22	1.000	0.8413	0.5406	1.5560
9 π / 22	1.285	0.9595	0.2817	3.4057

rad	rad	sen	cos	tan
1 π / 23	0.137	0 1362	0 9907	0,1374
2 π / 23	0.273	0 2698	0.9629	0.2802
3 π / 23	0.410	0.3984	0.9172	0.4344
4 π / 23	0.546	0.5196	0.8544	0.6081
5 π / 23	0.683	0 6311	0.7757	0 8136
6 π / 23	0.820	0 7308	0.6826	1.0707
7 π / 23	0.956	0.8170	0.5767	1.4167
8 π / 23	1.093	0.8879	0.4601	1.9299
9 π / 23	1.229	0 9423	0.3349	2 8137
10 π / 23	1.366	0.9781	0.2035	4.8123
11 π / 23	1.503	0 9877	0.0682	14.6195
1 π / 24	0.131	0.1305	0.9914	0.1317
5 π / 24	0.654	0.6088	0.7934	0 7673
7 π / 24	0 916	0 7934	0.6088	1.3032
11 π / 24	1.440	0.9914	0.1305	7.5958
1 π / 25	0.126	0.1253	0.9921	0.1263
2 π / 25	0.251	0.2487	0.9686	0.2568
3 π / 25	0 377	0.3681	0.9298	0.3959
4 π / 25	0 503	0 4818	0 8763	0.5498
6 π / 25	0.754	0.6845	0.7290	0 9391
7 π / 25	0.880	0.7705	0.6374	1.2088
8 π / 25	1.005	0.8443	0.5358	1.5757
9 π / 25	1.131	0.9048	0 4258	2.1251
11 π / 25	1.382	0.9823	0.1874	5 2422
12 π / 25	1.508	0.9980	0.0628	15.8945
1 π / 26	0.121	0.1205	0.9927	0.1214
3 π / 26	0.362	0.3546	0.9350	0.3792
5 π / 26	0.604	0.5681	0.8230	0.6903
7 π / 26	0.846	0.7485	0.6631	1.1288
9 π / 26	1 087	0.8855	0.4647	1.9053
11 π / 26	1 329	0.9709	0.2393	4.0572

rad	rad	sen	cos	tan
1 π / 27	0.116	0.1161	0 9932	0 1169
2 π / 27	0.233	0.2306	0.9730	0.2370
4 π / 27	0 465	0.4488	0 8936	0 5022
5 π / 27	0.582	0 5495	0.8355	0.6577
7 π / 27	0.814	0 7274	0.6882	1.0599
8 π / 27	0.931	0 8021	0.5972	1.3432
10 π / 27	1.164	0 9182	0 3961	2 3183
11 π / 27	1 280	0.9580	0.2868	3 3402
13 π / 27	1 513	0 9983	0.0581	17.1693
1 π / 28	0.112	0.1120	0.9937	0.1127
3 π / 28	0.337	0.3303	0.9439	0 3499
5 π / 28	0.561	0.5320	0.8467	0 6283
9 π / 28	1.010	0 8467	0 5320	1.5915
11 π / 28	1.234	0 9439	0.3303	2.8578
13 π / 28	1.458	0.9937	0.1120	8.8752
1 π / 29	0.108	0.1081	0.9941	0.1088
2 π / 29	0 217	0.2150	0.9766	0.2201
3 π / 29	0.325	0.3193	0 9477	0.3369
4 π / 29	0.433	0.4199	0.9076	0.4626
5 π / 29	0.542	0.5156	0.8569	0.6017
6 π / 29	0.650	0.6052	0.7961	0.7602
7 π / 29	0.758	0.6877	0.7260	0.9473
8 π / 29	0.867	0 7622	0.6474	1.1773
9 π / 29	0.975	0.8277	0.5612	1.4749
10 π / 29	1.083	0.8835	0.4684	1.8862
11 π / 29	1.192	0.9290	0.3701	2.5098
12 π / 29	1.300	0.9635	0.2675	3.6017
13 π / 29	1.408	0.9868	0.1618	6.0997
14 π / 29	1.517	0.9985	0.0541	18.4439
1 π / 30	0 105	0 1045	0.9945	0.1051
7 π / 30	0.733	0.6691	0.7431	0.9004
11 π / 30	1.152	0.9135	0 4067	2.2460
13 π / 30	1.361	0.9781	0.2079	4.7046

Fórmulas

Números y operaciones

Propiedades 1.1

1. $a+b=b+a$ (ley conmutativa en suma)
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ley asociativa en suma)
3. $ab=ba$ (ley conmutativa en multiplicación)
4. $a(bc)=(ab)c$ (ley asociativa en multiplicación)
5. $(a+b)c=ac+bc$ (ley distributiva de la multiplicación con la suma)

6. Ley de los signos en la suma
   - Si son de signo igual se suman y se considera el mismo signo.
   - Si son de signo contrario "se restan" y se pone el signo del mayor.

7. Restar enteros es cambiar el signo del sustraendo y operar como suma.
8. Ley de los signos en la multiplicación

$$(+)(+) = +$$
$$(+)(-) = -$$
$$(-)(+) = -$$
$$(-)(-) = +$$

Teoremas básicos de aritmética

9. Algoritmo de la división

   Si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen dos enteros q y r, únicos, tales que

   $a=bq+r$, con $0 \le r < |b|$.

10. Fundamental de la aritmética

    Todo número se puede expresar como el producto de factores primos en forma única.

11. Criterio de igualdad de fracciones

    Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones entonces $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

12. Criterio de desigualdad de fracciones

    Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones entonces $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad<bc$

Operaciones con números racionales (Fracciones, quebrados)

13. Suma y resta — Expresar cada término en denominador común y operar. Ver Pág. 14.

14. Multiplicación

$$\frac{(numerador)(numerador)}{(denominador)(denominador)}$$

División

15. Ley de la torta

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

16. Regla de la multiplicación cruzada

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Propiedades de los exponentes

17. $a^m a^n = a^{m+n}$.

18. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

19. $a^0 = 1$.

20. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

21. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

22. $(ab)^n = a^n b^n$.

23. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Propiedades de los radicales

24. $\sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

25. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

26. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

27. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

28. Sistema decimal y binario, conversiones. Consultar de la Pág. 2624 a la 26.

29. Notación científica, procedimiento para denotar cualquier número:

- Recorre el punto a la derecha del primer dígito significativo.
- Corrimiento es los lugares recorridos, derecha (-), izquierda (+).
- Establece con el primer dígito, el punto, el resto del número.
- Expresa multiplicado por 10 elevado a la potencia del corrimiento.

Álgebra

1. Suma de polinomios Se agrupan los términos semejantes		
2. Resta Cambiar los signos de cada término del sustraendo y luego agrupar como en la suma.		
Multiplicación		
3. Monomio monomio	x	Se multiplican los coeficientes, incluso considerando los signos. Para cada base de los multiplicandos se suman los exponentes, es recomendable ordenarlos alfabéticamente.
4. Monomio polinomio	x	Se multiplica el monomio por cada término del polinomio
5. Polinomio polinomio	x	Cada término del multiplicador se debe multiplicar por cada término del multiplicando. Suma los términos semejantes.
División		
6. Monomio monomio	÷	Se dividen los coeficientes Se simplifica por cada literal Si no se elimina el divisor se deja indicada la fracción.
7. Polinomio monomio	÷	Se separa en suma de cocientes entre monomios. $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. Se aplica en cada uno el caso de monomio ÷ monomio.
8. Polinomio polinomio	÷	Consulta el método en la Pág. 37. Si el divisor es de la forma $x \pm a$, división sintética Pág. 38.

Factores notables	⇔	Productos notables
9. Binomios conjugados		Diferencia de cuadrados
$(a+b)(a-b)$	=	a^2-b^2
10. Binomio al cuadrado		Trinomio cuadrado perfecto
$(a\pm b)^2$	=	$a^2\pm 2ab+b^2$
11. Binomios con término común		Trinomio
$(x+a)(x+b)$	=	$x^2+(a+b)x+ab$

12. Binomio de Newton — Polinomio potencia del binomio

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
$\boxed{1 \ 3 \ 3 \ 1}$

Observación: El binomio al cubo está como ejemplo del binomio de Newton. El triángulo de Pascal nos da los coeficientes del polinomio para cualquier potencia

13. *Teorema del residuo*
El residuo de dividir cualquier polinomio de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entre $x - a$ es sustituir a en la variable x del polinomio.

14. Corolario
Sí para algún valor $x = a$ el polinomio se cero entonces $(x - a)$ es un factor del polinomio.

15. Fracciones algebraicas

Operan de la misma forma que los números racionales, consulta la Págs. 46 y 47.

Propiedades de la igualdad

16. Sí $a = b$ entonces $b = a$.
17. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.
18. Si $a = b$ para todo valor c se cumple que $a + c = b + c$ y $a \times c = b \times c$.

19. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Usando las propiedades de la igualdad es posible despejar la incógnita. Consultar de la Pág. 48 a la 50.

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Sea $\begin{matrix} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{matrix}$ La solución se puede encontrar por cualquiera de los siguientes métodos.

Obteniendo una ecuación de una incógnita:

20. Sustitución.- Despejar cualquiera de las variables de cualquier ecuación y sustituir en la otra ecuación.
21. Igualación.- Despejar la misma variable en las dos ecuaciones, igualando éstas.
22. Suma y resta.- Multiplicar la primer ecuación por a_2 y la segunda por a_1 restar las ecuaciones.

23. Fórmulas.- $x = \dfrac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

24. Determinantes.- $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

25. Ecuaciones de segundo grado.
Si $ax^2 + bx + c = 0$ entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

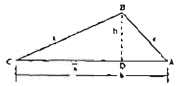
Geometría

Propiedades

1. El área de una figura que sea la unión de otras dos figuras es la suma de las áreas de estas dos figuras.
2. Figuras equivalentes son las que tienen la misma área.

3. Área de un cuadrado $A(L)=L^2$
4. Área del rectángulo $A(b,h)=bh$

Altura y área de triángulos



Altura h

5. $h = a\,sen\,C$

6. $h=\frac{2}{b}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

Área

7. $A=\frac{bh}{2}$

8. $A=\frac{ab}{2}sen\,C$

FORMULA DE HERÓN

9. $A(a,b,c)=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p es el semiperímetro del triángulo.

Relación de los sistemas sexagesimal y circular

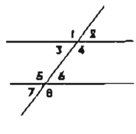
10. $\frac{g}{360}=\frac{r}{2\pi}$ — g grados, sistema sexagesimal. r radianes, sistema circular.

11. Teorema 3.1

Ángulos opuestos por el vértice son iguales.

12. Postulado

Si dos rectas paralelas cortadas por una tercera forma, con cada una, cuatro ángulos correspondientes.



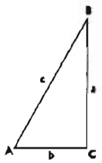
Ángulo 1 se corresponde con 5.
Ángulo 2 " " " 6.
Ángulo 3 " " " 7.
Ángulo 4 " " " 8.

Los ángulos correspondientes son iguales.

13. Teorema 3.2 Ángulos alternos internos son iguales.
14. Teorema 3.3 Ángulos alternos externos son iguales.
15. Teorema 3.4 La suma de los ángulos interiores de un triángulo es π.
16. Teorema de Pitágoras 3.5

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Trigonometría



1. $sen\,A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
2. $\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
3. $\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$
4. $\cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$
5. $\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$
6. $\csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$

Relaciones básicas de las funciones trigonométricas

7. $sen\ A = \frac{1}{\csc A}$
8. $\cos A = \frac{1}{\sec A}$
9. $\tan A = \frac{1}{\cot A}$
10. $\cot A = \frac{1}{\tan A}$
11. $\sec A = \frac{1}{\cos A}$
12. $\csc A = \frac{1}{sen\ A}$
13. $\tan A = \frac{sen\ A}{\cos A}$
14. $\cot A = \frac{\cos A}{sen\ A}$

Relaciones cuadráticas de las funciones trigonométricas

15. $sen^2 A + \cos^2 A = 1$
16. $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$
17. $\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$
18. $sen^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A$
19. $\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$

Ley de los senos

20. $\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$

Ley de los cosenos

21. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
22. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
23. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Suma de ángulos

24. $sen(A \pm B) = sen\,A\cos B \pm \cos A\,sen B$
25. $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp sen\,A\,sen\,B$
26. $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

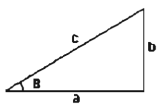
Doble de un ángulo

27. $sen\,2A = 2sen\,A\cos A$
28. $\cos 2A = \cos^2 A - sen^2 A$
29. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

30. Teorema 4.1 Simplificación de la forma trigonométrica

$a\cos D + b\,sen\,D = c\cos(D - B)$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan B = \frac{b}{a}$



Geometría analítica

Recta

1. Pendiente dados dos puntos $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Ecuación de la recta dados dos puntos $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

3. Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto $$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Formas de la ecuación de la recta

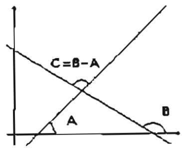
4. General $Ax + By + C = 0$
5. Pendiente – ordenada al origen $y = mx + b$
6. Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

7. *Ángulo entre dos rectas*

$$\tan C = \tan(B - A) = \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A}.$$

Si $m_1 = \tan A$ y $m_2 = \tan B$ entonces

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \text{ y } C = \arctan \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$



8. *Rectas paralelas* $C = 0 \Leftrightarrow m_2 = m_1$

9. *Rectas perpendiculares* $C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_2 m_1 = -1$.

10. *Pendiente ortogonal* $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Circunferencia

1. Forma cuadrática $$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$$

2. Centro en (h, k) $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Rectas tangentes a la circunferencia

3. Método para encontrar la recta tangente dado un punto de la circunferencia.
   a. Verificamos si el punto está en la circunferencia
   b. Tomamos la pendiente de la recta normal. Usando la pendiente dados dos puntos.
   c. Generamos la ecuación de la recta tangente con la pendiente ortogonal y el punto de tangencia.

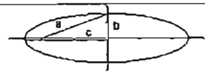
4. Método para determinar la recta tangente a la circunferencia con una pendiente especifica.
   a. Considera la recta de pendiente m conocida con b por determinar. $y = mx + b$.
   b. Encuentra la intersección sustituyendo el valor y, de la recta, en la circunferencia.
   c. Resuelve la ecuación en x con la fórmula general de segundo grado.
   d. La intersección es única, cuando el discriminante es cero.
   e. Resuelve la ecuación en b.
   f. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes
5. Metodo para determinar la recta tangente a la circunferencia que pasa por un punto exterior.
   a. Considera la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) conocido y pendiente m por determinar.
   b. Encuentra la intersección de la recta con la circunferencia.
   c. Determina el discriminante e iguala éste a cero donde la solución es única.
   d. Resuelve la ecuación en m.
   e. Establece las ecuaciones de las rectas tangentes.

Parábola

	Vertical	Horizontal
Forma cuadrática	1. $x^2 + Cx + Dy + E = 0$	2. $y^2 + Cx + Dy + E = 0$
Vértice en (h,k) y número focal p.	3. $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	4. $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Elipse

$a^2 = b^2 + c^2$

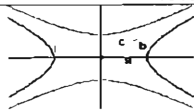


Forma cuadrática 1. $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0;\ AB > 0$

Centro de simetría en (h,k) y semiejes horizontal a y vertical b. 2. $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Horizontal $a > b$ Vertical $a < b$

Hipérbola

$c^2 = a^2 + b^2$



	Horizontal	Vertical
Forma cuadrática	1. $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0;\ AB < 0$	
Centro de simetría en (h,k)	2. $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	3. $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = -1$
Asíntotas Intersección de las asíntotas en (h,k)	4. $y - k = \pm\dfrac{b}{a}(x-h)$	

Inducción matemática

1. Dada una propiedad $P(n)$ donde $n \in N$.
   - Si se verifica para $P(1)$, es decir la propiedad vale para $n=1$.
   - Se supone que $P(n)$ es válida y se demuestra la validez de $P(n+1)$.

   Entonces la propiedad $P(n)$ es válida para todos los números naturales.

Fracciones parciales

1. $\dfrac{Q(x)}{P(x)} = P_E(x) + \dfrac{r(x)}{P(x)}$; $Grado\, Q(x) \geq Grado\, P(x)$; $P_E(x)$ es un polinomio llamado la parte entera; $Grado\ r(x) < Grado\, P(x)$. $\dfrac{r(x)}{P(x)}$ es la fracción algebraica propia.
2. Todo polinomio se puede descomponer en una constante por factores lineales y cuadráticos.
$$P(x) = a \bullet (x - r_1)^{n_1} \bullet \cdots \bullet (x - r_j)^{n_j} \bullet (x + b_1 x + c_1)^{m_1} \bullet \cdots \bullet (x + b_k x + c_k)^{m_k}$$
3. La fracción que contenga un divisor que sea el producto de lineales con raíces diferentes. Las fracciones se proponen como una constante diferente para cada fracción
$$\frac{r(x)}{(x-r_1)\bullet(x-r_2)\bullet(x-r_3)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_1}{x-r_2} + \frac{A_3}{x-r_3}$$
4. La fracción que en el polinomio divisor se pueda factorizar con producto de lineales originado por raíces iguales, es decir, presenta potencia de grado mayor o igual a 2 se propone una constante entre el factor lineal para cada grado
$$\frac{r(x)}{\ldots(x-r_j)^3\cdots} = \cdots + \frac{A_1}{x-r_j} + \frac{A_2}{(x-r_j)^2} + \frac{A_j}{(x-r_j)^3} + \cdots$$
5. Por cada fracción en el polinomio divisor que sea cuadrática irreducible se debe proponer en el numerador una expresión lineal
$$\frac{r(x)}{\cdots(x^2 + b_k x + c_k)\cdots} = \cdots + \frac{A_k x + B_k}{x^2 + b_k x + c_k} + \cdots$$

   Igualmente, se operan las fracciones parciales y se igualan los numeradores para obtener un sistema en las A.

   Donde las constantes A_j, A_k, B_k según cada caso son las incógnitas por determinar.

   En los tres casos, Se operan las fracciones parciales y se igualan los numeradores para obtener un sistema de ecuaciones lineales en las A y/o B.

   Los métodos se solución, para efectos de este texto, son los presentados en el Capítulo 2. ÁLGEBRA. *Sistemas de ecuaciones lineales*. Pág. 56.

Derivadas[68]

1. $\frac{d}{dt}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

2. $\frac{d}{dt}c=0$

3. $\frac{d}{dt}(U+V)=\frac{d}{dt}U+\frac{d}{dt}V$

4. $\frac{d}{dt}cU=c\frac{d}{dt}U$

5. $\frac{d}{dt}U\cdot V=U\frac{d}{dt}V+V\frac{d}{dt}U$

6. $\frac{d}{dt}\frac{U}{V}=\frac{V\frac{d}{dt}U-U\frac{d}{dt}V}{V^2}$

7. Derivada de la composición (regla de la cadena)

$$\frac{d}{dx}f(U(x))=\frac{d}{dU}f(U)\frac{d}{dx}U(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

8. $\frac{d}{dt}U^n=nU^{n-1}\frac{d}{dt}U$

9. $\frac{d}{dt}e^U=e^U\frac{d}{dt}U$

10. $\frac{d}{dt}\ln U=\frac{\frac{d}{dt}U}{U}$

11. $\frac{d}{dt}\operatorname{sen}U=\cos U\frac{d}{dt}U$

12. $\frac{d}{dt}\cos U=-\operatorname{sen}U\frac{d}{dt}U$

13. $\frac{d}{dt}\tan U=\sec^2 U\frac{d}{dt}U$

14. $\frac{d}{dt}\sec U=\sec U\tan U\frac{d}{dt}U$

15. $\frac{d}{dt}\operatorname{senh}U=\cosh U\frac{d}{dt}U$

16. $\frac{d}{dt}\cosh U=\operatorname{senh}U\frac{d}{dt}U$

17. Derivada de una función implícita

$Si\ \ F(x,y)=c \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

---

[68] Aunque el presente texto no abarca el cálculo diferencial se incluye por su utilidad en los cursos básicos a nivel licenciatura.

Integrales[69]

Teorema fundamental del Cálculo

1. si $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ entonces $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$

de manera equivalente se puede establecer

2. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

$\int_a^x \frac{d}{dt}F(t)dt=F(x)$

3. si $F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

Cambio de variable

4. $\int_a^b f(y(t))\frac{dy}{dt}dt=\int_{y(a)}^{y(b)} f(y)dy$

5. $\int f(U(x))\frac{d}{dx}U(x)dx=\int f(U)dU$

Integrales básicas

6. $\int a\,dU=a\,U+C$

7. $\int (f(U)\pm g(U))dU=\int f(U)dU\pm\int g(U)dU$

8. $\int U\,dV=U\,V-\int V\,dU$ Integración por partes

[69] El presente texto no abarca el cálculo integral se incluye en este formulario por su utilidad en los cursos básicos a nivel licenciatura.

Integrales de funciones especificas

9. $\int U^n dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

10. $\int \frac{dU}{U} = \int U^{-1} dU = \ln U + C$

11. $\int e^U dU = e^U + C$

12. $\int \ln U\, dU = U \ln U - U + C$

13. $\int sen\, U\, dU = -\cos U + C$

14. $\int \cos U\, dU = sen\, U + C$

15. $\int \tan U\, dU = \ln(\sec U) + C$

16. $\int \cot U\, dU = \ln(sen U) + C$

17. $\int \sec^2 U\, dU = \tan U + C$

18. $\int \sec U \tan U\, dU = \sec U + C$

19. $\int \frac{dU}{U^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{U}{a} + C$

20. $\int \cos^{2n} U\, dU = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2U \right)^n dU$

21. $\int \sqrt{U^2 + 1}\, dU = \frac{1}{2} U \sqrt{U^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln\left(U + \sqrt{U^2 + 1} \right) + C$

22. $\int \sqrt{a^2 - U^2}\, dU = \frac{U}{2} \sqrt{a^2 - U^2} + \frac{a^2}{2} arcsen \frac{U}{a} + C$

23. $\int \cos^{2n+1} U\, dU = \int (1 - sen^2 U)^n \cos U\, dU$

24. $\int sen^{2n} U\, dU = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2U \right)^n dU$

25. $\int sen^{2n+1} U\, dU = \int (1 - \cos^2 U)^n sen U\, dU$

26. $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 + 1}} = \ln \left| U + \sqrt{1 + U^2} \right| + C = arcsenh\, U + C$

27. $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 + 1}} = \ln \left| U + \sqrt{U^2 - 1} \right| + C = \operatorname{arccos} h\, U + C$

28. $\int e^{aU} sen\, bU\, dU = \frac{e^{aU}(a\, sen\, bU - b \cos bU)}{a^2 + b^2}$

29. $\int e^{aU} \cos bU\, dU = \frac{e^{aU}(a \cos bU + b\, sen\, bU)}{a^2 + b^2}$

30. $\int senh\, U\, dU = \cosh U + C$

31. $\int \cosh U\, dU = senh\, U + C$

32. Integración por fracciones parciales

$\int F(x)dx = \int \frac{Q(x)}{P(x)}dx = \int P_E(x)dx + \int \frac{r(x)}{P(x)}dx$ donde $Q(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que $P(x)$ y $r(x)$ es un polinomio de grado estrictamente menor que $P(x)$.

$\frac{r(x)}{P(x)}$ se puede descomponer en una suma de fracciones; de la forma $\frac{c}{(x-a)^m}$ donde c es constante, a es una raíz del polinomio $P(x)$ y m es entero menor o igual a la multiplicidad de la raíz en el polinomio; y de la forma $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ donde a, b, c y d son constantes tal que $4d - c^2 > 0$, y n es entero.

$\int \frac{c}{(x-a)^m}dx$ se puede resolver mediante las fórmulas 9 o 10.

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}dx = \frac{1}{2}a\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}dx + \frac{1}{2}(2b-ca)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{4d-c^2}{4}\right)^n}$$

La primera de éstas se calcula mediante la fórmula 9 para $n > 1$ o mediante la fórmula 10 cuando $n = 1$

La segunda para $n = 1$ se aplica la fórmula 21 para n > 1 se hace un cambio de variable $\left(x+\frac{c}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{4d-c^2}{4}}\right)u$ se usan las fórmulas 21, 22, 23 o 24 según sea el caso.

Series de Taylor

33. Si $f(x)$ es n+1 derivable entonces

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

con

$$P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n.$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ donde $x_0 \le z \le x$ ó $x \le z \le x_0$.

34. Si $f(x)$ es infinitamente derivable entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x-x_0)^k$$

Bibliografía

- Arcos Quezada, J. Ismael; Geometría Analítica para Estudiantes de Ingeniería, Fundación ICA y Universidad Autónoma del Estado de México, 2002.
- Baldor, Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría, Grupo Patria Cultural, 2005.
- Baldor, A.; Álgebra, Grupo Patria Cultural, 2005.
- Cárdenas, Humberto; Lluis, Emilo; Raggi, Francisco; Tomás, Francisco; Álgebra Superior, Trillas, 2004.
- Collette, Jean-Paul; Historia de las Matemáticas I, Siglo XXI, 1986.
- Eves, Howard; An Introduction to the History of Mathematics; Holt, Rinehart and Winston; 1969
- Fuller, Gordon y Tarwater, Dalton; Geometría Analítica, Addison Wesley Iberoamericana, 1988.
- García Hernández, Ana Elizabeth; García García, José; León Cárdenas, Javier; Álgebra – Matemáticas I –; IPN Colección textos politécnicos, serie matemáticas, 1996.
- Heath, T.L., Edited by; The Works of Archimedes with the Method of Archimedes, Dover Publications, 1912.
- Lehmann, Charles; Geometría Analítica, Editorial Limusa, 1990
- Newman, James R.; El Mundo de las Matemáticas, Tomo 1; Grijalbo, 1997.
- Torres Alcaraz, Carlos; Geometría analítica, Editorial Santillana, 1998.
- Vorob'ev, N. N.; Fibonacci Numers; Blaisdell Publishing Company, Popular lectures in mathematics series; 1951.

Respuestas a los Ejercicios y problemas

CAPÍTULO 1 NÚMEROS Y OPERACIONES

Pág. 11 Números naturales y enteros

1.- a) $7 + 12 = 19$

$12 + 7 = 19$

b) $17 + 3 = 20$

$3 + 17 = 20$

c) $5\,(4) = 20$

$4\,(5) = 20$

d) $3\,(13) = 39$

$13\,(3) = 39$

3.- a) $(5+3)2 = (8)2 = 16 = 10 + 6$

$= (5)2 + (3)2$

b) $(7+6)3 = (13)3 = 39 = 21 + 18$

$= (7)3 + (6)3$

c) $7\,(8+3)3 = 7(11) = 77 = 56 + 21$

$= 7(8) + 7(3)$

d) $8\,(2+5) = 8(7) = 56 = 16 + 40$

$= 8\,(2) + 8(5)$

5.- -5

7.- 8

9.- 2

11.- -63

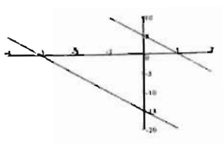
13.- -100

15.- -54

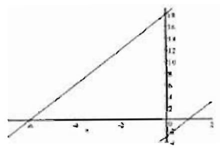
17.- 36

19.- -120

21.-



23.-



25.- $35 = 4(8) + 3$

27.- $-54 = 5(-12) + 6$

29.- 1, 3, 7 y 21

31.- 1, 2, 4, 10, 20, 25, 50, 100

33.- Sí

35.- Sí

37.- Sí

39.- Sí

41.- Si sus últimas dos cifras sean divisibles entre 4.

43.- Si sus tres ultimas cifras es divisible entre 8.

45.- Si es divisible entre 4 y entre 3.

47.- Hasta el 13.

49.- 18

51.- 180

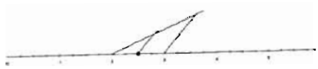
53.- 10

55.- 5

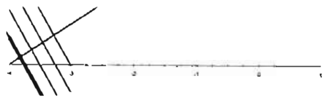
57.- 194

Pág. 19 Números racionales

1.-



3.-



5.- Si son iguales

7.- Si son iguales

9.- $\frac{5}{9}$

11.- $\frac{13}{3}$

13.- $\frac{10}{19} < \frac{45}{80} < \frac{6}{10}$

15.- $\frac{91}{12} < \frac{279}{38} < \frac{916}{132}$

17.- $\frac{161}{144}$

19.- $-\frac{1}{11}$

21.- $\frac{27}{80}$

23.- $\frac{21}{8}$

25.- $\frac{125}{81}$

27.- $-\frac{4}{5}$

29.- 4.375

31.- $3.\overline{56}$

33.- $\frac{31}{8}$

35.- $\frac{15231}{10000}$

Pág. 25 Numeros irracionales

1.- $\frac{1}{27}$

3.- $16x^4$

5.- $\frac{x^{12}z^6}{y^6}$

7.- 64

9.- $\frac{9}{x^2}$

11.- $7^{\frac{4}{3}}$

13.- $3^{\frac{1}{3}}4^{\frac{1}{4}}$

15.- $\sqrt[3]{7^2}$

17.- $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

19.- $\sqrt[4]{2}$

21.- $\sqrt[6]{7^4}$

23.- 8

25.- 7

27.- $7 < \sqrt{60} < 8$

29.- $9 < \sqrt[4]{9000} < 10$

31.- $7\sqrt{3}$

33.- $6\sqrt{3}$

35.- $\frac{1}{6}\sqrt{10}$

37.- $5\sqrt{x}$

39.- $l' = \sqrt[3]{2}$

Pág. 30 Sistemas y notaciones de numeración

1.- $5\times 10^2 + 3\times 10 + 4\times 10^0$

3.- $-1\times 10 + 8\times 10^0 + 2\times 10^{-1} + 4\times 10^{-2}$

5.- 707.405

7.- 30053.2

9.- Se fundamenta en siete unidades:

Longitud	metro
Masa	kilogramo
Tiempo	segundo
Corriente eléctrica	ampere
Temperatura	kelvin
Cantidad de materia	mol
Intensidad luminosa	candela

11.- radián por segundo, rad/s

13.- 13

15.- 227 75

17.- Ejemplo

19	
9	1
4	1
2	0
1	0

$$19 = 2(9)+1 = 2\left(2(4)+1\right)+1$$
$$= 2\left(2\left(2(2)\right)+1\right)+1$$
$$= 2^4 + 2^1 + 2^0$$

19.- 101 0101

21.- 101 1011 1001

23.- 1 0010.001

25.- $1\,100.1\overline{01}$

27.- 1.23975×10^5

29.- 5.8458×10^{-5}

31.- -0.06234

33.- 0.000 003 948 67

35.- 9.0965×10^3

37.- -2.0617×10^2

39.- 1.1061×10^5

CAPÍTULO 2 ÁLGEBRA

Pág. 33 Suma y resta de polinomios

1.- $2x^2+6x+9$

3.- $\frac{5}{3}m^3-\frac{1}{8}mn^2-\frac{6}{5}n^3-\frac{1}{3}m^2n$

5.- a) $13x$
b) 65

7.- $2x^2+2x-1$

9.- $\frac{1}{4}a^4+2b^4+\frac{68}{21}a^3b-\frac{12}{7}a^2b^2+ab^3$

11.- x^2+4x+5

13.- $3x^2-5x+4$

15.- x^2+2x-1

17.- $5x^2-12x+9$

19.- $5x^2-6x-1$

Pág. 38 Multiplicación y productos notables

1.- $-2a^2bc$

3.- $-\frac{40}{3}a^{3m}b^{n+1}$

5.- $4a^4-20a^3+32a^2$

7.- $2a^{m+2}b^2-2a^4b^{n+1}$

9.- $2a^2+ab-b^2$

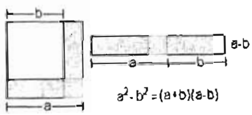
11.- $\frac{6}{5}x^5+2ax^4+6ax^3+\frac{48}{5}a^2x^2-2a^3$

13.- $9x^2+48x+64$

15.- a^2-25

17.- $\frac{9}{16}a^2x^2-\frac{25}{16}b^2$

19.-



21.- $49x^2-84x+36$

23.- $25a^4x^2-30a^2bx+9b^2$

25.- a^2x^2-81

27.- $x^2+\frac{5}{7}x-\frac{13}{28}$

29.- 1 6 15 20 15 6 1

31.- $32x^5-40x^4+20x^3-5x^2+\frac{5}{8}x-\frac{1}{32}$

Pág. 46 División y factores de un polinomio

1.- $4ab^2$ $\quad (4ab^2)(3ab)=12a^2b^3$

3.- $3ax^3+2xy$

$(3ax^3+2xy)(5ax^2y^3)=15a^2x^5y^3$
$+10ax^3y^4$

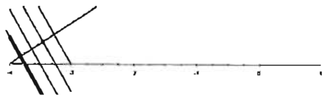
5.- $4x^2-8x+16-\frac{64}{2x+4}$

$(4x^2-8x+16)(2x+4)-64=8x^3$

7.- $x+10$

$(x+10)(x+3)=x^2+7x-30$

3.-



5.- Sí son iguales.

7.- Sí son iguales.

9.- $\frac{5}{9}$

11.- $\frac{13}{3}$

13.- $\frac{10}{18} < \frac{45}{80} < \frac{6}{10}$

15.- $\frac{91}{12} < \frac{279}{38} < \frac{916}{132}$

17.- $\frac{161}{144}$

19.- $-\frac{3}{14}$

21.- $\frac{27}{80}$

23.- $\frac{21}{8}$

25.- $\frac{125}{81}$

27.- $-\frac{4}{5}$

29.- 4.375

31.- $3.\overline{56}$

33.- $\frac{21}{8}$

35.- $\frac{35211}{10000}$

Pág. 25 Números irracionales

1.- $\frac{1}{27}$

3.- $16x^4$

5.- $\dfrac{x^{12}z^6}{y^6}$

7.- 64

9.- $\dfrac{9}{x^2}$

11.- $7^{\frac{4}{3}}$

13.- $3^{\frac{1}{3}}4^{\frac{2}{3}}$

15.- $\sqrt[3]{7^2}$

17.- $\frac{1}{\sqrt{3}}$

19.- $\sqrt[4]{2}$

21.- $\sqrt[5]{7^4}$

23.- 8

25.- 7

27.- $7 < \sqrt{60} < 8$

29.- $9 < \sqrt[4]{9000} < 10$

31.- $7\sqrt{3}$

33.- $6\sqrt{3}$

35.- $\frac{1}{6}\sqrt{10}$

37.- $5\sqrt{x}$

39.- $l' = \sqrt[3]{2}$

Pág. 30 Sistemas y notaciones de numeración

1.- $5\times10^2+3\times10+4\times10^0$

3.- $-1\times10+8\times10^0+2\times10^{-1}+4\times10^{-2}$

5.- 707.405

7.- 30053.2

9.- Se fundamenta en siete unidades:

Longitud	metro
Masa	kilogramo
Tiempo	segundo
Corriente eléctrica	ampere
Temperatura	kelvin
Cantidad de materia	mol
Intensidad luminosa	candela

11.- radián por segundo, rad/s

13.- 13

15.- 227.75

19	
9	1
4	1
2	0
1	0

17.- Ejemplo

$$19 = 2(9)+1 = 2(2(4)+1)+1$$
$$= 2(2(2(2))+1)+1$$
$$= 2^4 + 2^1 + 2^0$$

19.- 101 0101

21.- 101 1011 1001

23.- 1 0010.001

25.- $1100.\overline{101}$

27.- 1.23975×10^3

29.- 5.8458×10^{-3}

31.- -0.06234

33.- 0.000 003 948 67

35.- 9.0965×10^3

37.- -2.0617×10^2

39.- 1.1061×10^5

CAPÍTULO 2 ÁLGEBRA

Pág. 33 Suma y resta de polinomios

1.- $2x^2 + 6x + 9$

3.- $\frac{5}{3}m^3 - \frac{1}{8}mn^2 - \frac{6}{5}n^3 - \frac{1}{3}m^2n$

5.- a) $13x$

b) 65

7.- $2x^2 + 2x - 1$

9.- $\frac{1}{4}a^4 + 2b^4 + \frac{68}{21}a^3b - \frac{12}{7}a^2b^2 + ab^3$

11.- $x^2 + 4x + 5$

13.- $3x^2 - 5x + 4$

15.- $x^2 + 2x - 1$

17.- $5x^2 - 12x + 9$

19.- $5x^2 - 6x - 1$

Pág. 38 Multiplicación y productos notables

1.- $-2a^2bc$

3.- $-\frac{40}{3}a^{3m}b^{n+1}$

5.- $4a^4 - 20a^3 + 32a^2$

7.- $2a^{m+2}b^2 - 2a^4b^{n+1}$

9.- $2a^2 + ab - b^2$

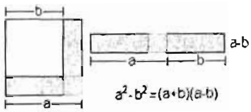
11.- $\frac{6}{5}x^5 + 2ax^4 + 6ax^3 + \frac{48}{5}a^2x^2 - 2a^3$

13.- $9x^2 + 48x + 64$

15.- $a^2 - 25$

17.- $\frac{9}{16}a^2x^2 - \frac{25}{16}b^2$

19.-



21.- $49x^2 - 84x + 36$

23.- $25a^4x^2 - 30a^2bx + 9b^2$

25.- $a^2x^2 - 81$

27.- $x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{15}{49}$

29.- 1 6 15 20 15 6 1

31.- $32x^5 - 40x^4 + 20x^3 - 5x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{1}{32}$

Pág. 46 División y factores de un polinomio

1.- $4ab^2$ $\quad (4ab^2)(3ab) = 12a^2b^3$

3.- $3ax^3 + 2xy$

$$(3ax^3 + 2xy)(5ax^2y^3) = 15a^2x^5y^3 + 10ax^3y^4$$

5.- $4x^2 - 8x + 16 - \frac{64}{2x+4}$

$$(4x^2 - 8x + 16)(2x + 4) - 64 = 8x^3$$

7.- $x + 10$

$$(x + 10)(x + 3) = x^2 + 7x - 30$$

9.- $\frac{1}{6}x$

11.- $\frac{21}{20}mn^2$

13.- $x+2$

15.- $5x^3-5x^2+9x-24+\frac{145}{x+5}$

17.- $3x(x+2)$

19.- $7x(3x^2+5x-1)$

21.- $2ax(x^2+4)$

23.- $5a^2x(-29x^2+13ab^2x+11b^3)$

25.- $(7x^4y^3z^5)^2$

27.- $(16a^2bc^3)^2$

29.- $-(2z-3x)(2z+3x)$

31.- $(1-\frac{x}{4})(1+\frac{x}{4})$

33.- $(a+5)^2$

35.- $(2a^4-\frac{1}{2}b^3)^2$

37.- $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^4}{5}\right)^2$

39.- $(2x+3+5a+5b)^2$

41.- $(x-4)(x-7)$

43.- $(x+11)(x-8)$

45.- $(z+7)(z+3)$

47.- $(m-3)(m-10)$

49.- -122

51.- 86

53.- Si es exacta.

55.- No es exacta.

57.- $(x+5)(x-1)(x+1)$

Pág. 50 Fracciones algebraicas

1.- $\frac{4y}{3x}$

3.- $\frac{a+b}{a-b}$

5.- Entera $3x+12$, fracción $\frac{-x+20}{x^2-1}$

7.- $\frac{4xy^2+a}{ax^2y}$

9.- $-\frac{y}{6xz^3}$

Pág. 52 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

1.- $x=1$

3.- $x=5$

5.- $x=40$

7.- $105m$

9.- 84 años

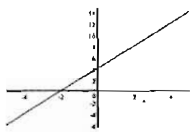
Pág. 55 Ecuaciones lineales

1.- $y=-\frac{19}{3}$

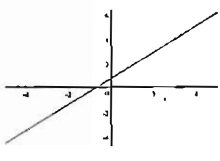
3.- $y=3x-1$

5.- $y=4x+3$

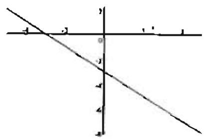
7.-



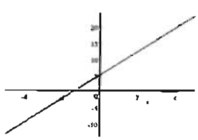
9.-



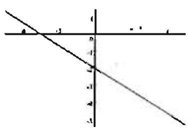
11.-



13.-

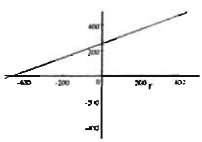


15.- $y=-\frac{2}{3}x-2$



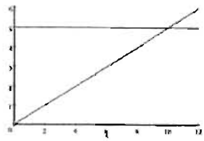
$K=(^{\circ}F+459.67)/1.8$

17.- $^{\circ}F=1.8K-459.67$



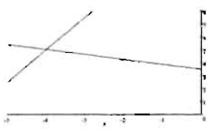
Pág. 60 Sistemas de ecuaciones lineales

1.-



$x=10$
$y=5$

3.-



$x=-4$
$y=5$

5.-

$x=5$
$y=6$

7.-

$x=-4$
$y=5$

9.-

$x=-1$
$y=2$

11.-

$x=\frac{4}{6}$
$y=5$

13.-

$x=-2$
$y=-1$

15.-

$x=-2$
$y=2$

17.-

$x = 5$
$y = 3$

19.-

$x = 5$
$y = -3$

21.-

$x = -3$
$y = -\frac{4}{5}$

23.-

$x = 2$
$y = 2$

25.- Edad de María 6

Edad de Luis 18

27.- Un número es 70 y el otro 30

Pág. 64 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

1.- $x_1 = -12,\ x_2 = 5$

3.- $x_1 = \frac{6}{7},\ x_2 = 5$

5.- No tiene solución real.

7.- $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{12}{5}$

9.- $x = \dfrac{41}{5}$

11.- a.- $x^2 - x = 870$

b.- $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$

c.- $x = 30$

Pág. 66 Aplicación de ecuaciones para obtener factores de un polinomio

1.- $7.5(x+4)(x-8)$

3.- $\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)$

5.- No tiene factores más simples.

7.- $(x+2.4)(x-5)(x-6.5)(x-9)$

9.- $(x-2)(x+2)(x+11)$

CAPÍTULO 3 GEOMETRÍA

Pág. 69 Áreas

1.- $162.82\,u^2$

3.- $123.5\,u^2$

5.- Ambos tienen la misma base y la misma altura, por tanto tienen la misma área, es decir, son equivalentes.

7.- $73.634\,u^2$

9.- $2753.9\,u^2$

Pág. 75 Ángulos

1.- $62°29'50''$

3.- $161°31'11''$

5.- $66.101°$

7.- $-27.49°$

9.- $46°25'40''$

11.- $31.49°$

13.- $175°55'40''$

15.- $-5°15'49''$

17.- 2.3583

19.- $\frac{11}{12}\pi$

21.- 1.1967

23.- $\frac{7}{12}\pi$

25.- 2.2745

27.- -0.735

29.- $10.5°$

31.- $40.75\overline{3}°$

33.- $15°45'$

35.- $-43°12'50.4''$

37.- $r = 0$

39.- $r = \frac{1}{4}\pi$

41.- $r = \frac{\pi}{2}$

43.- $r = \frac{1}{12}\pi$

45.- $r = 0.44084$

47.- $r = 0.79412$

49.- $114^\circ 35' 24''$

51.- $-68^\circ 45' 18''$

53.- 45°

55.- $128^\circ 34' 12''$

57.- 1.1592

59.- π

61.- $31^\circ 23' 12''$

63.- $\frac{1}{6}\pi$

65.- $65^\circ 24'36''$

67.- $\frac{1}{4}\pi$

69.-

$$\begin{aligned} \angle 1 &= 2.1853 \\ \angle 2 &= 0.95629 \\ \angle 3 &= 0.95629 \\ \angle 4 &= 2.1853 \\ \angle 5 &= 2.1853 \\ \angle 6 &= 0.95629 \\ \angle 7 &= 0.95629 \\ \angle 8 &= 2.1853 \end{aligned}$$

71.- $x = \frac{1}{10}\pi$

73.-

$A = 2.6566$

$B = 1.0858$

75.- Es una medida de distancia de la antigüedad.

77.- Son los generados al cortar un plano a una esfera por el centro.

79.- Parte de que la Tierra es una esfera perfecta.

81.- Son iguales, son alternos internos.

83.-

$7^\circ 12'$

7.2°

85.- Porque el ángulo en un mismo meridiano coincide con el arco, es decir, se está en un círculo máximo de la esfera.

87.- Porque la distancia de Siena a Alejandría es el arco correspondiente al ángulo del centro de la tierra. Entonces hay proporcionalidad entre ángulos y arcos. Esto es, la distancia de Siena a Alejandría es al ángulo A° como la longitud de un meridiano es al círculo completo.

89.- $4 \times 10^7 m$

91.- error de 1.4446%

Pág. 80 Teorema de Pitágoras

1.- $c = 5\,cm$

3.- $a = 197.48\,km$

5.- $D = 12.207\,u$

7.- $D = 19.03\,u$

9.- $A = 10.392\,u^2$

11.- a.- $A_1 = 104.83\,m^2$

b.- $D = 21.842\,m$

c.- $A_2 = 74.629\,m^2$

d.- $A_t = 179.46\,m^2$

CAPÍTULO 4 TRIGONOMETRÍA

Pág. 86 Funciones trigonométricas y su evaluación

1.-

$$\begin{array}{ll} sen\,A = 0.25866 & sen\,B = 0.96593 \\ \cos A = 0.96593 & \cos B = 0.25866 \\ \tan A = 0.26778 & \tan B = 3.7344 \\ \cot A = 3.7344 & \cot B = 0.26778 \\ \sec A = 1.0353 & \sec B = 3.8661 \\ \csc A = 3.8661 & \csc B = 1.0353 \end{array}$$

3.- $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.- $\sqrt{3}$

7.- -0.86603

9.- -0.5

11.- 1

13.- -0.70711

15.- 1.4142

17.- 0

19.- 0.99588

21.- 0.089879

23.- 0.84198

25.- 0.30239

27.- 0.365

29.- 0.3429

31.- 0.9636

33.- 2.1759

35.- 2.7397

37.- 1.0645

39.- 0.7

41.- 0.38

Pág. 92 Identidades con funciones trigonométricas

1.- $1+\tan^2 A = \sec^2 A$

3.-

$$sen\,A = \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} \qquad \sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}$$
$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}} \qquad \csc A = \frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$
$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

5.- $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$

7.- $2-\sqrt{3}$

9.- $\frac{1}{2}$

11.- -1

13.- $\frac{1}{6}\sqrt{2}\left(1+2\sqrt{7}\right)$

15.- $-\sqrt{2}\left(2+\sqrt{7}\right)$

17.- $\frac{1}{9}\sqrt{2}\left(1-2\sqrt{7}\right)$

19.- $\frac{\left(2-\sqrt{7}\right)\sqrt{2}}{6}$

21.-

$$\begin{aligned}\tan x\, sen\, 2x &= 2\frac{sen\,x}{\cos x} sen\,x \cos x \\ &= 2 sen^2 x\end{aligned}$$

23.- 0.9982

25.-

$B = 1.2808$
$a = 15.441$
$b = 51.745$

27.- $A = 2.1632$

$B = 0.64016$

$C = 0.33826$

$A+B+C = 3.14062$

29.- $c = 11.934$

$A = 1.5782$

$B = 0.64348$

$A+B+C = 3.14168$

31.- $A = 0.82159$

$b = 20.187$

$c = 16.298$

33.- $A_t = 74.666$

35.- $A_t = 53.703$

37.- $A_t = 120.46$

CAPÍTULO 5 GEOMETRÍA ANALÍTICA

Pág. 103 Recta

1.- $m = \frac{4}{7}$

3.- $m = \frac{1}{5}$

5.- $y = -\frac{19}{29}x + \frac{3}{29}$

$19x + 29y - 3 = 0$

$\frac{x}{\frac{3}{19}} + \frac{y}{\frac{3}{29}} = 1$

7.-

$y = 24x - 10$
$24x - y - 10 = 0$
$\frac{x}{\frac{37}{102}} + \frac{y}{\frac{37}{168}} = 1$

9.- $y = \frac{6}{7}x + 14$

11.- $y = 8.5x - 51.49$

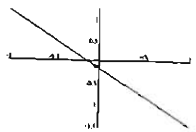
13.- $y = -\frac{5}{8}x - \frac{3}{2}$

15.- $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

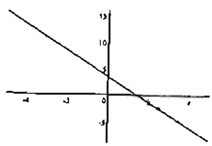
17.- $(-2,0);(0,6)$

19.- $(-9,0);(0,2)$

21.-



23.-



25.-

27.- $y=-1$

29.- $y=2$

31.- $x=\frac{109}{21}$

33.- $x=1$

35.- $y=-\frac{1}{3}x+7$

37.- Son iguales

39.- Son iguales

41.- Son paralelas

43.- $y=\frac{5}{3}x-\frac{36}{5}$

45.- $y=x+4$

47.- No son perpendiculares

49.- $m_2=-\frac{4}{3}$

51.- $m_2=-\frac{3}{2}$

53.- $y=-\frac{1}{4}x+11$

Pág. 111 Circunferencia

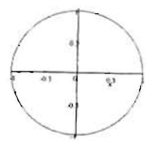
1.- $d=6.3$

3.- $d=29.4$

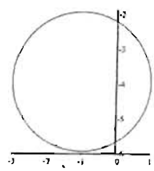
5.- $(x+4)^2+(y-2)^2=144$

7.- $x^2+y^2=16$

9.-



11.-



13.- $(x+11)^2+(y+3)^2=4$

15.- $x^2+y^2+2x-14y+49=0$

17.- $(x+5)^2+(y-4)^2=9$

19.- $y=12.9$
$y=7.1$

21.- $x=0.87$
$x=-0.87$

23.- $x=0.73$
$x=-2.73$

25.- $y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$

$y = -x + 5.07$

27.- $y = -x - 9.07$

$y = 1$

29.- $y = \frac{55}{48}x - \frac{667}{48}$

31.-

$x = 3.5$

$y = 3$

Pág. 120 Parábola

1.- $(7,6)$

3.- $\left(\frac{47}{21}, -\frac{21}{20}\right)$

5.- $x^2 = -27y$

7.- $x^2 = y$

9.- $y^2 = -4x$

11.- $(y-5)^2 = -4(x-1)$

13.- $V = (0,0)$

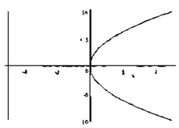
$F = (5,0)$

$p = 5$

directriz $x = -5$

abre hacia la derecha

los extremos del lado recto son: $(-5,-10); (5,10)$



15.- $V = (-3,5)$

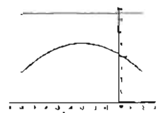
$F = (-3,2.5)$

$p = -2.5$

directriz $y = 7.5$

abre hacia abajo

los extremos del lado recto son: $(-8,2.5); (2,2.5)$



17.- $V = (0,0)$

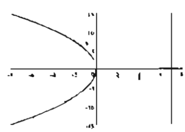
$F = (-7,0)$

$p = -7$

directriz $y = 7$.

abre hacia la izquierda,

los extremos del lado recto son: $(-7,14); (7,14)$



19.- $V = (-5,8)$

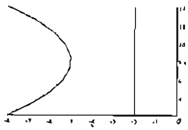
$F = (-8,8)$

$p = -3$

directriz $x = -2$,

abre hacia la izquierda,

los extremos del lado recto son: $(-8,2); (-8,14)$



21.- $V=(-2,3)$

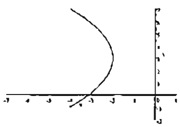
$F=(-4,3)$

$p=-2$

directriz $x=0$,

abre hacia la izquierda.

los extremos del lado recto son: $(-4,-1)$; $(-4,7)$



23.- $x=\frac{121}{8}$

25.- $x=40$

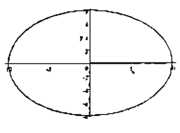
27.- La ecuación $y^2+Cx+Dy+E=0$ puede llevarse a la expresión

¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.

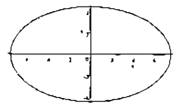
la cual es una parábola horizontal

Pág. 128 Elipse

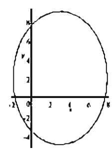
1.- $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$



3.- $\frac{x^2}{56.25}+\frac{y^2}{20.25}=1$



5.- $\frac{(x-3)^2}{24}+\frac{(y-2)^2}{49}=1$



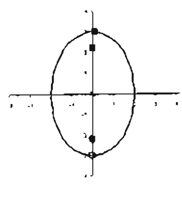
7.- $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

9.- $V_1=(0,3)$; $V_2=(0,-3)$

$F_1=(0,\sqrt{5})$, $F_2=(0,-\sqrt{5})$

$(h,k)=(0,0)$

Vertical

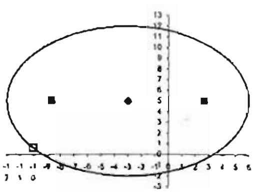


11.- $V_1 = (6,5),\ V_2 = (-12,5)$

$F_1 = (2.66,5),\ F_2 = (-8.66,5)$

$(h,k) = (-3,5)$

Horizontal



13.- $x = 9.71$

$x = -1.71$

15.- $x = \sqrt{10}$

$x = -\sqrt{10}$

17.- Es real

Centro $(h,k) = (3,-7)$

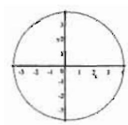
Ejes $x = 3$, $y = -7$

$V_1 = (-2,-7,)$
$V_2 = (8,7)$
$F_1 = (-1,-7)$
$F_2 = (7,-7)$

19.- es una elipse imaginaria.

21.- $\dfrac{(x-0.247\,5)^2}{14.573} + \dfrac{y^2}{14.512} = 1$

Cada unidad es 100 000 km



Apogeo es cuando la luna está a la máxima distancia de la Tierra, es decir, a 406,498 km.

Pág. 136 Hipérbola

1.- $\dfrac{x}{16} - \dfrac{y}{20} = 1$

3.- $\dfrac{x^2}{56.25} - \dfrac{y^2}{24.75} = 1$

5.- $\dfrac{(x-4)^2}{36} - \dfrac{(y+4)^2}{4} = 1$

7.- $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-6)^2}{4} = 1$

9.- Vértices $V_1 = (-2,0),\ V_2 = (2,0)$

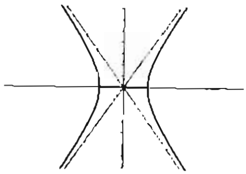
Focos $F_1 = (-\sqrt{13},0),\ F_2 = (\sqrt{13},0)$

Centro $(h,k) = (0.0)$

Dirección horizontal

Asíntotas

$y = \frac{3}{2}x$
$y = -\frac{3}{2}x$



11.- Vértices $V_1 = (0,-0.45)$; $V_2 = (0,4.45)$

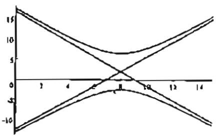
Focos $F_1 = (0,-3.1)$; $F_2 = (0,7.1)$

Centro $(h,k) = (8,2)$

Dirección vertical

Asíntotas

$y = 1.8x - 12.6$
$y = -1.8 + 16.6$



13.- $x = 14.2$

$x = -6.2$

15.- $x_1 = 2.5\bar{3}$

$x_2 = -12.5\bar{3}$

ANEXOS

Pág. 139 A1. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1.- $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$

Verificamos se cumple para un primer valor $n = 1$

$2(1)-1 = 1$
$(1)^2 = 1$

Supongamos válido para $n = k$ y demostremos para $n = k+1$

Hipótesis: $1+3+\cdots+(2k-1) = k^2$

Tesis: $1+3+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$

Demostración

$1+3+\cdots+(2(k+1)-1)$
$= 1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$
$= k^2+(2k+1)$ Por hipótesis
$= (k+1)^2$ Se factoriza y queda demostrado.

3.- $2^{n+3} \le (n+3)!$

Verificamos se cumple para un primer valor $n = 1$

$2^{1+3} = 16 \le 24 = 4! = (1+3)!$

Supongamos válido para $n = k$ y demostremos para $n = k+1$

Hipótesis: $2^{k+3} \le (k+3)!$

Tesis: $2^{k+4} \le (k+4)!$

Demostración

$2^{k+4} = 2^{k+3}(2)$ Por hipótesis.
$\le (k+3)!(2)$

$\le (k+3)!*(k+4)$ $2 \le 4$ y además se le suma $k \ge 0$.

$= (k+4)!$ Por definición de factorial, queda finalmente demostrado.

$= (k+4)!$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto en el binomio al cuadrado y queda demostrado.

5.- 3 es factor de $n^3 - n + 3$

Verificamos se cumple para un primer valor $n = 1$

$1^3 - 1 + 3 = 3$ El 3 es factor de 3.

Supongamos válido para $n = k$, es decir, y demostremos para $n = k+1$

Hipótesis: Existe q entero tal que
$k^3 - k + 3 = 3q$

Tesis: Al dividir entre 3 obtenemos un entero

Demostración

$\frac{(k+1)^3-(k+1)+3}{3}$	Veamos si al dividir entre 3 es entero.
$=\frac{k^3+3k^2+3k+1-k-1+3}{3}$	Se demuestra que 3 es factor ya que la división dio entero.
$=\frac{k^3-k+3+3k^2+3k}{3}$	
$=\frac{k^3-k+3}{3}+\frac{3k^2+3k}{3}$	
$=q+k^2+k$	

7.- 3 es factor de $1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

Verificamos se cumple para un primer valor, en este caso, $n=0$

$2^1-1=1$

Supongamos válido para $n=k$ y demostremos para $n=k+1$

Hipótesis: $1+2+\cdots+2^k=2^{k+1}-1$

Tesis: $1+2+\cdots+2^{k+1}=2^{k+2}-1$

Demostración

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+2^k+2^{k+1} &= 2^{k+1}-1+2^{k+1} \quad \text{Por hipótesis}\\
&= 2\left(2^{k+1}\right)-1\\
&= 2^{k+2}-1\\
&= 2^{(k+1)+1}-1
\end{aligned}
$$

Demostrado.

Pág. 148 A2. APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES PARA DESCOMPONER FRACCIONES ALGEBRAICAS EN FRACCIONES PARCIALES.

1.- $3x+9-\frac{25}{2(x-3)}+\frac{131}{2(x-5)}$

3.- $-2x+6-\frac{12}{x-\frac{3}{5}}-\frac{15}{x+\frac{5}{7}}$

5.- $\frac{7}{x+8}-\frac{5}{x-4}+\frac{3}{x-3}$

7.- $\frac{5}{x+3}+\frac{8x}{x^2+7x+15}$

9.- $\frac{3}{x-3}-\frac{5}{x+2}+\frac{2}{x+1}$

11.- $\frac{7}{x+5}-\frac{12x-5}{x^2-7x+11}$

13.- $5x-12+\frac{9}{x-5}-\frac{2x-11}{x^2-x+3}$

Pág. 152 A3. Fórmula de Herón

1.-

Teorema

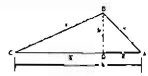
En cualquier triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, menos el doble producto de uno de estos lados por la proyección del segundo lado sobre el primero.

Hipótesis: En el triángulo ΔABC

ángulo $C<\frac{\pi}{2}$

$proy_b a=\bar{a}$

$proy_b c=\bar{c}$



Tesis: $c^2=a^2+b^2-2b\bar{a}$

Trazos auxiliares: Sobre el triángulo ABC se traza la proyección del vértice B sobre la horizontal AC se nombran los lados y las proyecciones.

Demostración

$c^2=\bar{c}^2+h^2$	Considerando el ΔABD, teorema de Pitágoras
$h^2=a^2-\bar{a}^2$	Considerando el ΔBCD, teorema de Pitágoras.
$\bar{c}=b-\bar{a}$	Resta de longitudes en la misma dirección.
$c^2=\left(b-\bar{a}\right)^2+\left(a^2-\bar{a}^2\right)$	Expandiendo la expresión
$c^2=b^2-2b\bar{a}+\bar{a}^2+a^2-\bar{a}^2$	
$c^2=a^2+b^2-2b\bar{a}$	Simplificando, queda demostrado

3.- h =17.5

5.- 9.24

7.- 64 06

9.- 92.73

11.-73.47

Índice

A

B

C

Ch

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Z

Relato conciso sobre matemática básica

Se terminó de imprimir en el mes de
abril de 2009 en los talleres de la sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Se imprimieron 200 ejemplares
más sobrantes para reposición

La edición estuvo a cargo de la
sección de Producción y Distribución Editoriales
de la Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN
COSEI

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2896022

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

2896022

ISBN-13: 978-970-31-0936-8
ISBN-10: 970-31-0936-8

9789703109364