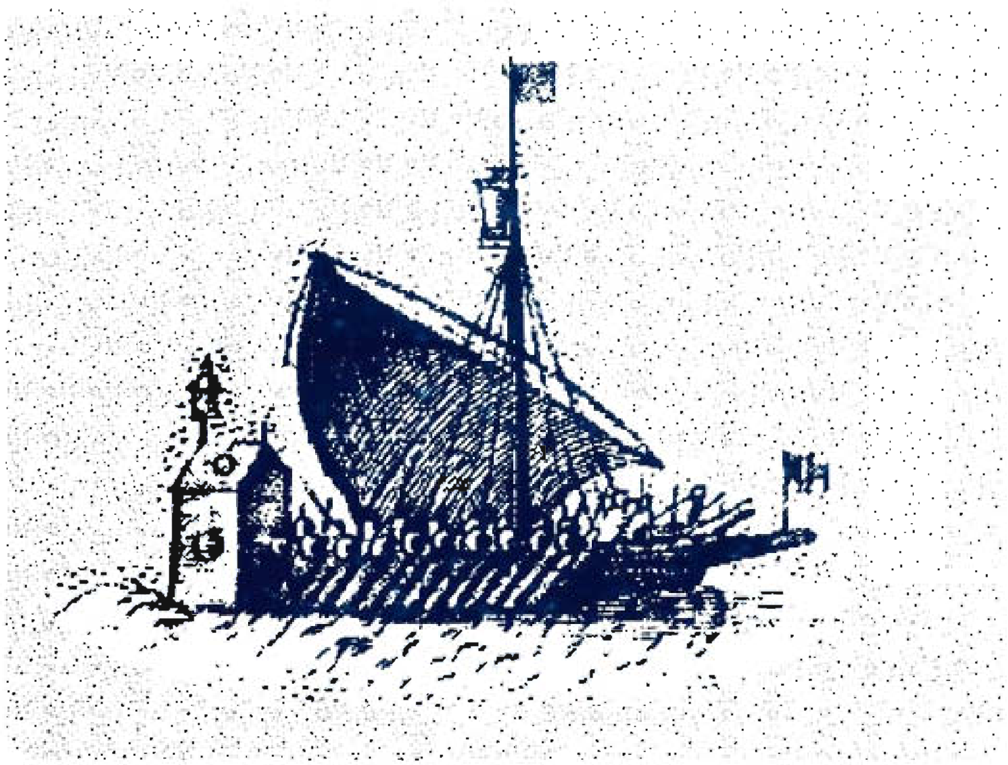
25

Investigación de operaciones I

1ª. parte

Manuel de los Reyes García M.
José C. Romero Cortés



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Investigación de operaciones I

1ª parte

Manuel de los Reyes García M.
José C. Romero Cortés

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

ISBN: 970-654-481-X

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222/9223
Fax. 5318-9222

1a. edición, 1992
2a. edición, 2000
4a. reimpresión, 2004

Impreso en México.

INDICE

I INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE SISTEMA 1

BIBLIOGRAFÍA 11

II EL ENFOQUE DE SISTEMAS 13

BIBLIOGRAFÍA 38

III METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 41

3.1 ORÍGEN Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 41

3.2 DEFINICIÓN DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES 46

3.3 CARACTER INTERDISCIPLINARIO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 48

3.4 MODELOS 50

3.5 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 54

3.5.1 MÉTODO CIENTÍFICO 54

3.5.2 MÉTODO EXPERIMENTAL 64

3.5.3 MÉTODO HIPOTÉTICO-DEDUCTIVO 65

3.5.4 MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 66

3.6 PROCESO ESTRUCTURADO 71

BIBLIOGRAFÍA 76

IV PROGRAMACIÓN LINEAL 79

4.1 OPTIMIZACIÓN 79

4.1.1 OPTIMIZACIÓN CLÁSICA 80

4.2 ALGUNOS CONCEPTOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL 92

4.2.1 Función objetivo, actividades, recursos y restricciones 95
4.3 Principales aplicaciones de la programación lineal 98
4.3.1 Campos de aplicación 98
4.3.2 Tipos de problemas 99
4.4 Modelos de programación lineal 100
4.4.1 Problema de la dieta 100
4.4.2 Problema del transporte 101
4.4.3 Problema de producción 103
4.4.4 Problema de planeación 104
4.4.5 Problema de inversiones 107
4.4.6 Problema de contratación 109
4.4.7 Problema de contratación 112
4.4.8 Problema de cortes 114
4.4.9 Problema de mezclas 116
4.5 Métodos de solución 117
4.5.1 Solución factible básica y solución óptima 117
4.5.2 Método de solución gráfica 119
4.5.3 Métodos de solución iterativos 125
4.6 Conceptos básicos de programación lineal 125
4.6.1 Teorema fundamental de la programación lineal 131
4.6.2 Relaciones importantes de la programación lineal con convexidad 139
4.6.3 Teoría de desigualdades lineales 148

	BIBLIOGRAFÍA	150
	EJERCICIOS	151
V	EL MÉTODO SIMPLEX	165
	5.1 EL MÉTODO SIMPLEX	165
	5.2 MÉTODO DE PIVOTEO PARA LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	165
	5.3 CRITERIO PARA MEJORAR UNA SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE	171
	5.4 CRITERIO DE OPTIMALIDAD	177
	5.5 NO ACOTAMIENTO	181
	5.6 CONVERGENCIA FINITA DEL MÉTODO SIMPLEX EN AUSENCIA DE DEGENERACIÓN	185
	5.7 ALGORITMO DEL MÉTODO SIMPLEX	186
	5.8 MODIFICACIÓN PARA UN PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN	192
	5.9 VARIABLES ARTIFICIALES	199
	5.10 MÉTODO DE PENALIZACIONES (METODO DE LA M GRANDES)	203
	5.11 ANÁLISIS DEL MÉTODO DE PENALIZACIONES	207
	5.12 EL MÉTODO DE LAS DOS FASES	214
	5.13 ANÁLISIS DEL MÉTODO DE LAS DOS FASES	219
	BIBLIOGRAFÍA	226
	EJERCICIOS	227
VI	TEORÍA DE DUALIDAD	237
	6.1 PROBLEMAS LINEALES DUALES	237
	6.2 DUAL DEL DUAL	241
	6.3 FORMAS MIXTAS DE PROBLEMAS DUALES	242
	6.4 TEOREMA DE DUALIDAD	245
	6.5 TEOREMA DE COMPLEMENTARIDAD	248

6.6 Ejemplos y aplicaciones 250
6.7 Interpretación económica del dual 259
6.8 Método dual simplex 266
6.8.1 Interpretación de la factibilidad del dual en el tableau del simplex para el problema primal 266
6.8.2 El método dual simplex 270
6.8.3 Algoritmo del método dual simplex 273
Bibliografía 276
Ejercicios 277
VII Análisis de sensibilidad 287
7.1 Introducción 287
7.2 Cambios en el vector de costos c 288
7.3 Cambio en el vector de recursos b 291
7.4 Cambio en la matriz de restricciones A 293
7.5 Adición de una nueva actividad 297
7.6 Adición de una nueva restriccion 298
7.7 Análisis paramétrico 302
7.7.1 Perturbación del vector de costos 302
7.7.2 Perturbación del vector de recursos B 308
Bibliografía 314
Ejercicios 315
VIII Algoritmo del transporte y variante del mismo 321
8.1 Definición del método del transporte 321
8.2 Propiedades de la matriz A 325
8.2.1 Rango de la matriz A 325
8.2.2 Unimodularidad total de la matriz A 329

8.2.3 Triangularidad de la matriz base 330
8.3 Soluciones básicas enteras 332
8.3.1 Solución básica factible inicial 333
8.4 Propiedades de los vectores Y_{IJ} en el tableau simplex 333
8.5 Caminos, cadenas, circuitos, ciclos y árboles 336
8.6 Caracterización de la base en un tableau del transporte 338
8.7 Representación de la base en el problema del transporte 342
8.8 Representación de un vector no básico en términos de los vectores basicos 343
8.9 Regla de la variable artificial en el problema del transporte 346
8.10 El método simplex para problemas del transporte 346
8.10.1 Determinación de una solucion básica factible inicial 347
8.10.1.1 Método de la esquina noroeste 347
8.10.1.2 Método del costo mínimo 350
8.10.1.3 Método de aproximación de vogel 351
8.10.1.4 Comparación de las soluciones básicas factibles proporcionadas por los métodos de la esquina noroeste, costo mínimo y Vogel 354
8.10.2 Cálculo de los costos reducidos, $Z_{IJ}-C_{IJ}$, para cada celda no básica 355

8.10.3 Determinación de la columna que sale 358
8.11 Un ejemplo del algoritmo del transporte 360
8.12 Degeneración en el problema del transporte 367
8.12.1 Determinación y mantenimiento de una base en presencia de degeneración 367
8.12.2 Una condición necesaria para la degeneración en el problema del transporte 370
8.13 El tableau simplex asociado a un tableau del transporte 372
8.14 El problema del transbordo 373
8.15 El problema de asignación 379
8.15.1 El problema dual 381
8.15.2 La matriz reducida 382
8.15.3 La matriz reducida de costos modificada 388
8.15.4 Un ejemplo del problema de asignación utilizando el algoritmo húngaro 390
8.15.5 Convergencia finita del algoritmo de asignación (algoritmo hungaro) 393
Bibliografía 394
Ejercicios 395
IX Ruta crítica (CPM y PERT) 405
9.1 Introducción 405
9.2 Diferencias entre PERT y CPM 407
9.3 Modelado de sistemas utilizando PERT-CPM 410
9.3.1 Cálculo de los tiempos de iniciación más próxima, de terminación mas próxima de terminación mas alejada y de iniciación más alejada. 416

9.3.2 Ruta crítica y holguras 423
9.4 Concepto de probabilidad con PERT 425
9.5 Recursos limitados 429
9.6 Tiempos forzados 434
9.7 Formulación del PERT-CPM utilizando programación lineal 441
9.8 Determinación de la ruta crítica con recursos ilimitados 441
Bibliografía 443
Ejercicios 444

Apéndice A Álgebra lineal 461

Apéndice B Conceptos básicos de convexidad 504

Apéndice C Conceptos básicos de desigualdades lineales 532

I

PREFACIO

Estas notas cubren totalmente el programa de la materia de Investigación de Operaciones I que imparte el Departamento de Sistemas de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-A. La necesidad de elaborarlas se debe a la gran dispersión que en la literatura existe sobre el contenido del programa de la materia. Paralelamente se ha tratado de darle una profundidad teórica adecuada.

Se ha tenido como objetivo proporcionar al lector los elementos analíticos necesarios para la formulación, análisis y solución de problemas de programación lineal y familiarizarlo con los fundamentos teóricos y ventajas computacionales de los métodos de solución. También se proporciona una breve introducción del enfoque sistémico.

La meta buscada es esencialmente práctica y explica la atención puesta en los procedimientos prácticos de cálculo o algoritmos; se han puesto ejemplos donde parecía necesario. Se han dado siempre desarrollos teóricos suficientes para justificar la validez de los métodos y permitir una fácil comprensión de ellos, los que evita que estas notas sean una simple colección de recetas.

Algunos dominios de la programación lineal se han excluido, debido a que no están contenidos en el programa de la materia en cuestión. Sin embargo, conscientes de su importancia, en el futuro los incluiremos con el objeto de completar estas notas.

Temas tales como el primal-dual, el simplex revisado, métodos de descomposición y teoría de redes son obligatorios en un curso formal de programación lineal.

Los tres primeros capítulos versan sobre el aspecto filosófico de la materia. Se introduce al lector en el concepto de sistema (cap. I), en el enfoque de sistemas (cap. II) y en la metodología seguida por la investigación de operaciones, y se proporciona un breve relato histórico de su desarrollo (cap. III). Se desarrollan los conceptos fundamentales de la programación lineal proporcionando sus diversas aplicaciones, las cuales son muy variadad debido a las estructuras de organización complejas propias de la sociedad moderna, y se formulan los modelos para problemas típicos de programación lineal (cap. IV). El planteamiento matemático inicial del problema general de programación lineal que fue desarrollado por G. Dantzig junto con el método simplex, el cual es un procedimiento sistemático para resolver el problema, es analizado con detalle (cap. V). La exposición del problema dual de la programación lineal junto con la formulación de ciertas aplicaciones ilustrativas (cap. VI) permite identificar importantes propiedades que tienen los problemas lineales. El análisis de sensibilidad (cap. VII) es tratado en forma exhaustiva. Se incluye el análisis paramétrico por su gran utilidad y difusión ya que una gran mayoría de los paquetes comerciales de programación lineal lo efectuan, aunque el programa no lo incluye. El problema del transporte fue considerado de manera independiente por Hichkock, Koopmans y Kantoróvich. En el capítulo VIII se desarrollan algunos conceptos elementales de teoría de redes para estudiar de manera más adecuada este problema así como el del transbordo. También en base a estos conceptos se estudia el método húngaro para problemas de asignación desarrollado por H.W. Kuhn. Sin embargo, sería necesario profundizar más en teoría de redes para tratar de una manera similar el problema de la ruta práctica (cap.IX). Por esta razón, el desarrollo del capítulo IX no tiene continuidad con el del capítulo VIII. En este capítulo se incluye PERT con objeto de completar el tema, aunque no está incluido en el programa de la materia. En el futuro, cuando se incluya en estas notas teoría de redes, se modificará el desarrollo de este capítulo para darle dicha continuidad.

En todos los capítulos referentes a programación lineal, se incluyen ejercicios.

Al final se presentan tres apéndices destinados a recordar el álgebra lineal y a proporcionar al lector los conceptos más relevantes de convexidad y teoría de desigualdades, para la mejor comprensión del material que se presenta.

M. de los Reyes García M

J.C. Romero C.

C A P Í T U L O I

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE SISTEMA

Debido a la dinámica del mundo moderno es frecuente que los métodos usados para solucionar problemas requieren de tanto tiempo, que las soluciones resultan obsoletas mucho antes de que se encuentren y más aún cuando se implanten. Además, estos métodos requieren tanto esfuerzo que es posible concentrarse sólo en algunos problemas, ignorando el resto. A lo anterior hay que añadir que ya no se enfrentan problemas aislados que pueden resolverse uno a uno. En lugar de eso, se tiene que enfrentar a problemas interconectados, o sea a un sistema de problemas o problemáticas (conjunto de problemas interconectados entre si, sistemas de problemas) donde la solucion a cada uno de estos depende de los demás.

De lo anterior podemos ver, como dice Ackoff (1), que estamos saliendo de una era tecnológica y cultural, y entrando a otra. Que estamos en las primeras etapas de un cambio en nuestra concepción del mundo, un cambio en la forma en que nosotros pensamos acerca de él y un cambio en la tecnología con la cual tratamos que él sirva a nuestros fines. Estos cambios son tan fundamentales y trascendentes como fueron aquellos asociados con el renacimiento, la era de las maquinas iniciada por este, y la Revolución Industrial que fue su principal producto.

Haciendo un poco de historia, repasemos las principales ideas de la ERA DE LAS MAQUINAS, Los fundamentos intelectuales de la era de las máquinas consisten en dos ideas acerca de la naturaleza del mundo y de la forma de buscar su entendimiento. Estas dos ideas son el reduccionismo y el mecanismo. La primera de ellas consiste en la creencia de que todo en este mundo y toda experiencia del mismo puede ser reducida, descompuesta o desmembrada en elementos simples últimos, en partes indivisibles tal como el átomo en física, células en biología sustencias simples en química e individuos en sociología. El reduccionismo originó una forma analítica de pensar acerca del mundo, una forma de buscar explicaciones y así ganar entendimiento de él. Para muchos, "análisis" era sinónimo de "pensamiento". El análisis consiste primero, en descomponer lo que va a ser explicado, desarmarlo si es posible en las partes independientes e indivisibles de las cuales está compuesto; segundo, el explicar el comportamiento de estas partes y por último, agregar estas explicaciones parciales en una explicación del todo. Se puede observar que los conceptos de "división del trabajo" y "estructura organizacional" son manifestaciones del pensamiento analítico. En la era de las máquinas, el entendimiento del mundo era tomado como la suma o resultado del entendimiento de sus partes, que eran conceptualizadas tan independientes una de otra como era posible. Esto, a su vez, hizo posible dividir el trabajo de la búsqueda del entendimiento del mundo en un número de disciplinas virtualmente independientes.

El mecanismo creía que todo fenómeno podía ser explicado usando sólamente una relación final simple, causa-efecto. Un evento era tomado como la causa de otro. Como una causa era considerada co mo suficiente para su efecto, no se requería nada más que la causa para explicar el efecto, razón por la cual no se tomaba en cuenta al medio ambiente. (Posteriormente se explicará lo que representa el medio ambiente en la Teoría General de Sistemas).

Aunque las eras no tienen un principio y un fin precisos, se puede decir que los años cuarentas marcaron el fin de la Era de las Máquinas y el Principio de la ERA DE LOS SISTEMAS. Podemos ahora sí dar una definición de sistema, de las múltiples que existen, que esté de acuerdo a los propósitos de este curso: Un sistema es un conjunto de elementos de cualquier clase interrelacionadas, por ejemplo conceptos como en el sistema númerico, objetos como en un sistema telefónico o en el cuerpo humano, gente en la sociedad, etc. Pero el conjunto de elementos antes mencionados deberá cumplir las tres siguientes propiedades:

I.- Al menos una propiedad o comportamiento de cada parte del conjunto tiene un efecto en las propiedades o el comportamiento del conjunto como un todo. Por ejemplo, cada órgano del cuerpo humano afecta el funcionamiento de todo el cuerpo.

II.- Las propiedades y el comportamiento de cada parte así como la forma en que éstas afectan el todo, dependen de las propiedades y del comportamiento de al menos otra parte del conjunto.
De aquí que ninguna parte puede tener un efecto independiente en el todo. Por ejemplo, el efecto que el corazón tiene en el cuerpo, depende a su vez del comportamiento de los pulmones.

III- Cada posible subgrupo de elementos en el conjunto tiene las primeras dos propiedades. Cada uno tiene un efecto, y ninguno tiene un efecto independiente en el todo. De aquí que los elementos no puedan ser organizados en subgrupos independientes.

Por ejemplo, todos los subsistemas en el cuerpo animal -así como el nervioso, respiratorio, digestivo y motriz- interactúan y cada uno afecta el funcionamiento del todo.

Debido a estas tres propiedades, un conjunto de elementos que forman un sistema siempre tienen ciertas características o pueden mostrar cierto comportamiento que ninguno de sus elementos o subgrupos puede. Más aún, el pertenecer al conjunto aumenta o disminuye las capacidades de cada elemento, pero no las deja sin afectar. Por ejemplo, las partes de un cuerpo vivo, no pueden vivir separadas del cuerpo. El poder de un miembro de un grupo es siempre aumentado o disminuído por esa membrecía.

Un sistema es más que la suma de sus partes, es un todo indivisible. Cuando es desmembrado pierde sus propiedades esenciales. Los elementos de un sistema, pueden a su vez ser sistemas (subsistemas) y cada sistema puede ser parte de un sistema mayor (suprasistema). El concepto de sistema trae aparejada la manera sintética de pensar. En el modo analítico, tal como lo vimos antes, la explicación del todo era derivada de las explicaciones de sus partes. En pensamiento sintético, algo a ser explicado es visto como parte de un sistema mayor y es explicado en términos de su función en ese sistema mayor. Por ejemplo, las Universidades son explicadas por su misión en el sistema educativo en vez de por el comportamiento de sus escuelas y departamentos.

El pensamiento analítico es, por así decirlo pensamiento de afuerza hacia adentro; el pensamiento sintético es de adentro hacia afuera. Ninguno niega el valor del otro, pero a través del pensamiento sintético podemos ganar entendimiento que no se puede obtener a traves del análisis, particularmente de fenómenos colectivos. La forma sintética u holística* de pensar se basa en la observación de que,

* ver definición en la página 7

cuando cada parte del sistema se comporta tan bien como es posible, el sistema como un todo rara vez se comporta tan bien como es posible. Esto sucede del hecho de que la suma de los funcionamientos de las partes es rara vez igual al funcionamiento del todo. Esto puede ejemplificarse de la siguiente manera: Supongamos que tenemos un conjunto de automóviles, formado por cada uno de los modelos de automóviles disponibles. Supongamos que les pedimos a los mejores ingenieros automotrices de determinen cual de esos autos tiene el mejor carburador. Una vez determinado, anotamos el resultado. Después les pedimos que hagan lo mismo para las trasmisiones, bombas de gasolina, distribuidores, etc. hasta agotar las partes requeridas para hacer un automóvil. Al terminar, les pedimos que quiten las piezas anotadas de los autos y que las ensamblen en un automóvil, en el cual cada parte es la mejor de las disponibles. Ellos no podrán hacerlo, ya que las piezas no embonarán unas con otras. Inclusive, si pudieran armarlas, lo más probable es que no trabajarán bien juntas. El funcionamiento de un sistema dependen en forma crítica de cómo las partes se acoplan y trabajan juntas, no sólamente de qué tan bien funciona cada una en forma independiente. Más aún, la actuación de un sistema, depende de cómo se relaciona éste con el medio ambiente, con el suprasistema del cual forma parte y de los otros sistemas componentes del suprasistema. Así por ejemplo, el funcionamiento de un automóvil depende del clima, del camino por el cual transita y de la forma como es manejado, así como de la forma en que se manejan los demás autos. Entonces, desde el punto de vista de sistemas, tratamos de evaluar su funcionamiento como parte del sistema mayor que lo contiene.

Debe recordarse que en la ERA DE LAS MAQUINAS, la relación causa-efecto era central en términos de buscar todas las explicaciones. Al comenzar este siglo el filósofo de la ciencia E.A. Singer hizo notar que la relación causa-efecto era usada en dos sentidos diferentes. Primero, era usada en el sentido ya discutido: la causa es condición necesaria suficiente para su efecto. Segundo, era también usada cuando una cosa era tomada como necesaria pero no suficiente para la otra. El usó como ejemplo una bellota, que era necesaria pero no suficiente para un roble; otras condiciones de suelo y clima son también necesarias.

Similarmente una madre, a pesar de la liberación de la mujer, es sólo necesaria pero no suficiente para un niño. Singer se refirió a este sentido de la causa-efecto como productor-producto. Puede también considerarse como una relación causa-efecto como productor-producto. Puede también considerarse como una relación causa-efecto aleatoria no determinística. Singer demostró que los estudios de fenómenos que usan la relación producción-producto eran compatibles con, pero más ricos que, los estudios restringidos al uso de la causalidad determinística. Más aún, mostró que una teoría de la explicación basada en productor-producto permitía un comportamiento funcional, en busca de metas y propósitos para ser estudiado objetiva y científicamente. Estos conceptos ya no tendrían que ser tomados como sin significado o inapropiados para el estudio científico.

Más tarde el biólogo Sommerhof llegó independientemente a las mismas conclusiones a las que Singer había llegado.

Mientras tanto en una serie de trabajos que formaron las bases de la cibernética, Arturo Rosenblueth, Winer y Bigelow mostraron el gran valor de máquinas conceptualizadoras y sistemas hombre-máquina como entidades funcionales, que buscan objetivos y con propósito. En efecto, mostraron que si en el pasado había sido fructífero estudiar al hombre como si fuera una máquina ahora era al menos igualmente fructífero estudiar máquinas, sistemas hombre-máquina y por supuesto al hombre, como buscador de metas y propósitos. De este modo en los años cincuenta la Teleología-el estudio de la búsqueda de metas y del comportamiento de intención- fue traído a la ciencia y empezó a dominar nuestra conceptualización del mundo.

Por ejemplo, el pensamiento mecanisista explica el comportamiento a través de la identificación de lo que lo causa, nunca de su efecto. En pensamiento Teleológico, el comportamiento se puede explicar tanto por lo que produce, como por lo que intenta que produzca. Por ejemplo, el hecho de que el niño va a la tienda puede explicarse tanto por hecho de que su mamá lo mandó, como por el hecho de que quiere comprar helado para la cena. El estudio de las funciones, las metas y los propósitos de los individuos y grupos ha producido una mayor habilidad para evaluar y mejorar su comportamiento, que la lograda por la investigación orientada en forma mecanisista.

De acuerdo a la definición dada de sistema, esto es, sistema es un conjunto de entidades (constituyentes del sistema) interrelacionadas de manera que por lo menos algunas propiedades del todo (sistema) no pueden deducirse de las propiedades de sus elementos constituyentes (subsistemas), y cada constituyente (subsistema) influye conjuntamente con otro u otros en las propiedades del todo (sistema). Es decir, hay propiedades del todo que no son reductibles a las propiedades de sus partes y viceversa, esto es, las partes no pueden por si solas explicar el todo; para hacerlo tienen que combinarse con algunas otras partes; vemos que estamos dentro de la doctrina holística (del adjetivo griego "holos"= relativo al todo), esto es, se acepta que la realidad debe considerarse como un todo.

Dentro de todos los sistemas existentes los que nos van a interesar son los sistemas internacionales que son aquellos que pueden darse o perseguir sus propios fines.

Vamos ahora a definir algo que ya mencionamos con cierta frecuencia al hablar de sistemas y es el medio ambiente. El medio ambiente es lo que influye en nuestro sistema de interés pero que no forma parte de él y sobre el cual no se tiene control.

A continuación damos algunos ejemplos:

a) El sistema de riego y generación de energía del Valle del Yaqui. Este sistema consta de las presas LA ANGOSTURA, EL NOVILLO Y OVIACHIC de las cuales las dos últimas son hidroeléctricas y además existen diversas plantas térmicas para generar energía, así como un sistema de riego para entregar agua para los diversos cultivos.

Este sistema pertenece o forma parte de dos suprasistemas que son el sistema nacional de riego y el sistema nacional de generación de energía eléctrica.

Además, este sistema está formado a su vez por los siguientes subsistemas: las presas Angostura, El Novillo y Oviachic, canales de riego, turbinas, obras de toma, compuertas, etc.

El medio ambiente de este sistema serán los escurrimientos tanto por lluvias como por extracciones de un acuífero (manto de agua subterránea) existente. Aquí podemos observar como el medio ambiente tiene una indiscutible influencia en nuestro sistema de interés (sistema focal), pero no forma parte de él y sobre el cual no tiene control. (Del acuífero solo se puede controlar la extracción pero esta al fin y al cabo está Superditada al escurrimiento por lluvia).

En este ejemplo podemos ver la importancia que tiene la Teoría General de Sistemas. Lo que a continuación expondremos es válido tanto para la planeación, diseño y operación del sistema como para su eventual mejoramiento.

Si por ejemplo nos concentramos solo en aumentar la energía generada o en el aumento del volumen de agua entregado para riego, no debemos solo pensar en aumentar la capacidad de las presas y sus turbinas sino también en los daños que se ocasionarían por inundación al aumentar la altura de la presa, el aumentar las capacidades de las líneas de conducción para llevar la energía generada a los diversos centros de consumo así como el aumentar la capacidad de riego.

Analizar el costo de lo anterior con los beneficios que se obtendrá analizar el costo social y el político. Analizar otras alternativas como pudiera ser la construcción de nuevas presas en el Valle delqui. Sopesar las necesidades de la región con las necesidades de otras regiones del país que están marginadas y cuentan con un fuerte potencial hidraúlico. Tratar de prever, estudiar y controlar los impactos ecológicos, económicos y sociales (aumento de población, información, desocupación, vicios, aumento de criminalidad, etc.) Esto es la Teoría General de Sistemas que nos permite en una forma metodológica tratar de conocer el problema en cuestión en toda su real magnitud. Lo cual es lo más importante y lo más difícil. Una vez conocido este, encontrar o inclusive diseñar nuevas técnicas para la solución del problema es más fácil, aunque no por ello deberemos descuidarla. Esto es debemos caer en la historia de un chiste ruso en el cual, por la noche un señor busca algo en la calle al pie de una luz. Llega un amigo a preguntarle que si el objeto que se le perdió lo extravió en ese lugar, y el señor que busca le contesta que no, que lo perdió en parte obscura de la calle pero que como ahí no hay luz, por esa razón lo busca donde sí la hay.

Es más, en E.U., y por ende en México también, existe una fuerte pugna en Investigación de Operaciones: la de los filósofos de Investigación de Operaciones o sea aquellas personas que solo admiten la importancia del conocer el problema y la de los "matemáticos" o sea aquellos que solo le dan importancia a las técnicas o herramientas matemáticas necesarias para resolver problemas. Creemos que estas dos corrientes son extremas y la verdad se encuentra tanto en dominar el aspecto filosófico de la ciencia, esto es, la Teoría General de Sistemas, como también dominar las Técnicas (Programación Lineal, No Lineal, Dinámica. Optimización en Espacios Vectoriales, Teoría del Control, Inferencia Estadística, Procesos Estocásticos, Análisis de Decisiones. Procesos de Decisión Markovianos, etc.) El concepto de sistema, abarca tanto los sistemas naturales como los hechos por el hombre. Comprende además, sistemas grandes como el solar o pequeños (microscópicos) como las bacterias.

Como ya se mencionó, la noción sobre sistemas es tan antigua como la filosofía europea. Aristóteles decía "El todo es más que la suma de sus partes". Esta proposición describe, aún hoy, el problema básico de sistemas.

La noción de la Teoría General de Sistemas fue formulada por primera vez, verbalmente por Ludwig Von Bertalanffy en los años treintas y en varias publicaciones después de la 2a. Guerra Mundial. En 1951 Bertalanffy dió a conocer la "Teoría General de Sistemas". Por ser la disciplina de Bertalanffy la biología, su principal interés fue desarrollar una teoría de "sistemas abiertos", esto es, sistemas que tienen intercambio con su medio ambiente (caso de todos los seres vivientes). El "sistema cerrado" será aquel que no tiene intercambio con su medio ambiente, esto es, que carece de contexto, o sea que un "sistema cerrado" no interacciona con ningún elemento que no forma parte del sistema mismo, es decir, es autocontenido. Nosotros obviamente trataremos con sistemas abiertos.

Podemos decir que existen modelos exclusivamente, principios y leyes que se aplican a sistemas generales o a subclases sin considerar su clase en particular, la naturaleza de los elementos que los componen y las relaciones entre ellos. Esto es, la disciplina llamada Teoría General de Sistemas. En otras palabras, Teoría General de Sistemas es un campo lógico matemático cuyo objetivo es la formulación y derivación de esos principios generales que son aplicables a "sistemas" en general. De esta forma, formulaciones exactas de términos tales como "el todo", "suma", "diferenciación" y "mecanización progresiva", "centralización" y "orden jerárquico" etc., se vuelve posible en términos que se dan en todas las ciencias que tratan con sistemas.

Bibliografía:

1. AKCOFF, R.L. "Science on the Systems Age: Beyond IE, OR, and MS. Operation Research, Vol. 21, No. 3, 1973, pág. 661- 671.
2. AKCOFF, R.L. y M. SASIENI "Fundamentos de Investigación de Operaciones". Edit. Limusa. 1975.
3. CHURCHMAN, C.W. "El Enfoque de Sistemas". Edit. Diana, 1973.

C A P I T U L O I I

EL ENFOQUE DE SISTEMAS

El enfoque de sistemas tiene como objetivo el tomar los sistemas como un todo, y no tomar sus partes por separado (subsistemas) y a la vez se relaciona con el comportamiento total del sistema dentro de su contexto (suprasistemas).

Este enfoque revela tres problemas sistémicos fundamentales (para los sistemas intencionales que son los que pueden darse o perseguir sus propios fines).

a) Problema de autocontrol. Como diseñar y administrar sistemas que eficaz y eficientemente puedan servir a sus propios propósitos.

b) Problema de humanización. Como diseñar y administrar sistemas que eficaz y eficientemente puedan servir a los propósitos de sus partes (subsistemas).

c) Problema de ambientación como diseñar y administrar sistemas que eficaz y eficientemente puedan servir a los propósitos de sistemas más grandes (suprasistemas) de los cuales ellos son parte.

En el ejemplo ya visto del sistema de riego y generación de energía del Valle del Yaqui, podemos ver claramente los tres problemas sistémicos fundamentales, esto es:

a) Problema de autocontrol. El sistema de riego y generación deberá, en forma eficaz y eficiente, entregar agua para riego a sus respectivos distritos y generar la energía mínima requerida, esto es, no deberá faltar agua para riego y al mismo tiempo deberá haber un nivel de almacenamiento tal que si ocurre en la avenida no haya peligro de daños. Por otra parte en las presas hidroeléctricas del sistema se deberá optimizar las políticas de extracción de tal manera que la energía generada sea con el costo mínimo y a la vez que satisfaga la demanda prevista.

b) Problema de humanización. El sistema en cuestión deberá funcionar de tal manera que sus componentes (presas, canales de riego, compuertas, vertedores, turbinas, etc., trabajen para las cargas, volúmenes, etc., para los que fueron diseñados, sin que funcionen sobrados y sin rebasar su capacidad.

c) Problema de ambientación. El sistema de riego y generación del Valle del Yaqui deberá funcionar de tal manera que no perjudique en manera alguna a los demás sistemas de riego y generación de los que forman parte (riesgo de avenidas, quedarse sin agua y perjudicar a otros sistemas existentes aguas abajo, etc.) sino que por el contrario, su funcionamiento deberá ser sincronizado con los otros sistemas componentes del suprasistema (sistema nacional de riego y de generación) de tal manera que este logre sus objetivos globales.

Es claro que al solucionar nosotros un problema, creamos problemas. En el caso del ejemplo manejado al resolver el problema de riego y de generación de energía con la construcción del sistema del Valle del Yaqui generamos otro tipo de problemas como son el encontrar y manejar el sistema con políticas óptimas de generación, riesgo de avenidas, inflación en las tierras, mayor demanda de estas, inmigración de peones, campesinos, falta de caminos para dar salida a los productos, etc.

Los problemas no son entidades que puedan ser destruidas, sino que son partes simples de una secuencia o sucesión: problema-solución, problema-solución. Los problemas están también ligados, esto es, son iterativos. Así, si solucionamos un problema se afecta la solución de otros. Sólo cuando se contempla los problemas como un sistema de problemas es posible tener un panorama real de la problemática en cuestión (problemática es un conjunto de problemas interconectados entre si; sistema de problemas). Y sólo cuando se da lo anterior es posible pensar en planeación. La planeación, como tal, tuvo sus inicios a partir de la Revolución Socialista Rusa de Octubre de 1917, Ya en los inicios de los años 20 se iniciaron los famosos GOSPLAN (abreviatura de Gosudárstveni plan, esto es, plan de gobierno). En los países capitalistas no fue sino hasta hace unos 20 años cuando se incorporó la planeación a los programas (planes) de gobierno y grandes consorcios industriales y comerciales, pues antes el hablar de planeación lo tomaban como sinónimo de socialismo. Se sale de los alcances de este curso el profundizar en el concepto de planeación, pero sí es importante que nos quede muy clara la gran importancia que para el verdadero y real desarrollo de una sociedad, país e inclusive de toda la humanidad tiene la planeación. Es claro de todo lo anterior que el enfoque sistémico es el arma ideal para llevar a cabo una buena y realista planeación.

Siendo la Teoría General de Sistemas una teoría, resulta a veces un poco difícil ver su forma de aplicación, ya que ¿cómo vamos a aplicar una forma de pensar en la vida real? pero es justamente por

por medio del Enfoque de Sistemas o Sistémico como podemos llevar esa teoría a la práctica. Aunque la palabra "enfoque" no nos da la clave en si, ya que sigue siendo una palabra que significa una "forma de ver", podemos decir que el enfoque sistémico es una técnica que combina en forma efectiva la aplicación de conocimientos de varias disciplinas a la solución de problemas que envuelven relaciones complejas entre diversos componentes.

El porqué de la necesidad de la aplicación de conocimientos de varias disciplinas a la solución de problemas, lo podemos ver fácilmente de lo antes mencionado, esto es, que la solución de un problema trae consigo otros problemas de naturaleza muy distinta al problema original. Así como ya vimos al construir el sistema de riego y generación del Valle del Yaqui se trajeron como consecuencia otros problemas no tan sólo del orden de la ingeniería, sino también económicos, sociales, sociológicos, ecológicos, etc., razón por la cual para la solución óptima de un problema es necesario el concurso de gentes con preparación en diversas ramas de la ciencia.

Para poder llevar a la práctica el Enfoque de Sistemas tendremos que especificar una serie de pasos del razonamiento, aunque estos pasos no indican una secuencia fija, ya que a medida que uno avanza es necesario volver a examinar razonamientos de pasos anteriores. Esto es por la complejidad de ver un problema como un todo y atacar todas y cada una de sus partes y sus posibles consecuencias. La lógica es esencialmente un proceso de verificación y de comprobación del propio razonamiento.

Con esto en mente, podemos presentar cinco consideraciones básicas que se deben tomar en cuenta cuando se razone acerca del significado de un sistema aplicando un enfoque sistémico.

1.- Los objetivos del sistema considerado como un todo y más específicamente las medidas de actuación del sistema completo.

2.- El medio ambiente del Sistema: las restricciones fijas.

3.- Los recursos del sistema.

4.- Los componentes del sistema, sus actividades, metas y las medidas de actuación.

5.- La administración del sistema.

Como se puede observar esta lista no aclara si existen otras maneras de pensar acerca de los sistemas, y además es tan reducida como informativa. Esta lista es de C. W. Churchman.

En principio debemos tener cuidado al utilizar el término "objetivo" ya que a veces hay la tendencia a subestimarlo cuando frecuentemente es la parte más difícil del razonamiento requerido. Al estudiar un sistema debemos tratar de definir claramente los objetivos globales reales del sistema, los cuales por lo regular nunca son claros a primera vista. Lo anterior lo podemos ejemplificar con los siguientes casos.

Consideremos un laboratorio médico donde se examinan las muestras que les envian los médicos.

¿Cuál es el objetivo del laboratorio? Una respuesta obvia sería que - el objetivo es hacer un examen lo más exacto posible. Pero el verdadero objetivo, el global real no es la "exactitud", sino para lo que sirve la exactitud: auxiliar, mejorar o corregir, según el caso, el diagnóstico del médico. Una vez que vemos hacia adelante el resultado concreto y deseado, entonces podremos preguntarnos a nosotros mismos cuán importante es realmente el objetivo.

Otro ejemplo sería el de un alumno en clase. Es posible que alguno o algunos de ustedes piensen que su objetivo es el de obtener la calificación más alta posible. En este caso la medida de actuación (la medida de actuación de un sistema es un indicador que nos dice que tan bien opera el sistema) se hace bastante evidente y es interesante para muchos profesores observar que los alumnos tienden a obtener una calificación elevada aún sacrificando el verdadero significado del contenido del curso. Van en busca de las calificaciones elevadas porque creen que éstas conducen a becas y otras oportunidades en el futuro. El objetivo global real es aprender, pero su verdadera medida de actuación es la calificación.

De la misma manera, si observamos cuidadosamente nuestra ciudad, observamos que siendo el objetivo global real del sistema de nuestra ciudad mantener las oportunidades de vida decorosa para todos los ciudadanos, proporcionarles áreas de vivienda adecuadas, con recursos y lugares satisfactorios para su trabajo, descanso y esparcimiento, así como la defensa del medio ambiente, para que seamos saludables. Pero es fácil ver que en lugar de que el sistema de nuestra ciudad trate de servir a todos sus ciudadanos se ve refutado por la complacencia de las autoridades que gobiernan el sistema de sacrificar estos objetivos, con tal de mantener oportunidades del grupo de personas con ingresos superiores. La verdadera medida de actuación, entonces, es la capacidad de la ciudad de tener grandes industrias dentro de los límites de la ciudad (con lo que se agravan todos los problemas: gran concentración de gente, cinturones de miseria por inmigrantes en busca de trabajo, desempleo, crimen, vicio, contaminación, insuficiencia de transportes, etc.) y de mantener el nivel de ingresos del grupo considerado como elevados lo más alto posible.

Es muy frecuente la situación en la cual los objetivos de los componentes del sistema son opuestos unos a otros e inclusive al objetivo global real del sistema. Así en el caso de la presa El Novillo perteneciente al sistema de riego y generación del Valle del Yaqui, se pueden presentar conflictos en su política de operación pues la demanda de energía sigue una ley en la cual la demanda pico se considera en los días laborables de las 7 p.m. a 10 p.m. por lo cual la extracción de agua para generar energía no forzozamente satisface los requerimientos de agua para riego.

También en el caso de una fábrica donde los objetivos particulares de los distintos componentes del sistema entran en conflicto. Así, el departamento de producción trata de maximizar la producción minimizando costos por lo cual requiere de un cierto nivel de inventario de materia prima y también de no tener una gran variedad de modelos o líneas del producto fabricado. El departamento de inventarios trata de minimizar las existencias, pues ellos reduce su costo de operación y por otra parte se minimiza el dinero invertido en insumos que en un momento dado se pueden considerar como capital muerto.

Por otro lado, el departamento de ventas prefiere tener diversificada la variedad de productos que pueda ofrecer al cliente. Es claro ver como en muchos casos los integrantes del sistema (subsistemas) deberán sacrificar sus objetivos parciales en aras de lograr el objetivo global real del sistema.

Por último queda por agregar, aunque ya lo mencionamos, que la medida de actuación de un sistema es un indicador que nos dice que tan bien opera el sistema. Entre más elevado sea mejor será la actuación. Tal y como en el caso de un alumno en clase, el cual tiene por verdadero objetivo el aprender y la calificación que obtenga no es sino su medida de actuación (muchas veces distorcionada). También es deseable jerarquizar los objetivos. Los objetivos inmediatos los podemos denominar - "metas", los posteriores-"subobjetivos", después vendrán los "objetivos" y el más mediato será el o los "objetivos generales". Esto lo podemos ilustrar de la siguiente manera:

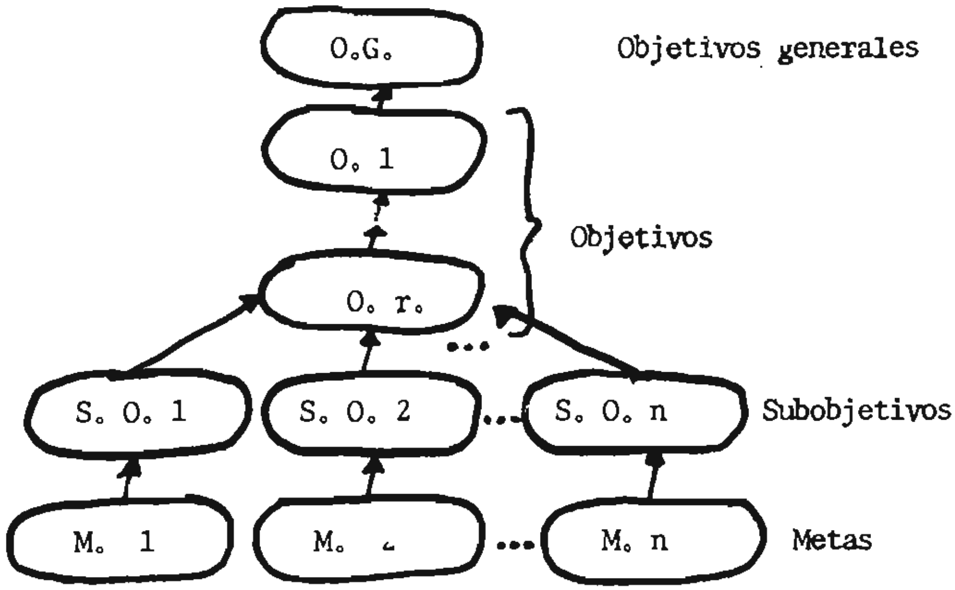


Figura 2.1. Jerarquía de objetivos.

Una vez que se ha logrado determinar el objetivo del sistema y sus medidas de actuación, el siguiente aspecto del sistema que se debe considerar es su MEDIO AMBIENTE.

El MEDIO AMBIENTE del sistema (ya lo definimos anteriormente) es lo que está "fuera" del él pero frecuentemente no es fácil determinar las fronteras y decir que es lo que está "dentro" y que es lo que está "fuera" del sistema.

El interés que tenemos en el medio ambiente se debe a que nosotros casi siempre nos enfrentaremos al análisis del sistemas "abiertos", es decir, a sistemas que están sujetos a intercambio con su medio ambiente y por lo tanto sujetos a la influencia del mismo. De esta manera podemos definir el medio ambiente como aquello que influye en el sistema, pero que no forma parte de él y sobre el cual no se tiene control. En términos generales podemos decir que un elemento forma parte del medio ambiente de un sistema si las respuestas a las siguientes preguntas son no a la primera y sí a la segunda: ¿podemos hacer algo acerca de ese elemento (por ejemplo, modificarlo)? e ¿influye en los objetivos del sistema? Al tener las contestaciones antes mencionadas vemos que el medio ambiente del sistema es una restricción fija ya que no podemos modificarlo e influye en los objetivos del sistema. Por ejemplo, el tener una cantidad de dinero tope para la realización de un proyecto, será una restricción fija en el caso de que sea imposible obtener más e influirá en los objetivos del proyecto, puesto que el factor económico limitará el tamaño y alcances del mismo. Tal es el caso, por ejemplo, del abastecimiento de agua potable en la ciudad de México. El objetivo general en un principio, según estudios de la Comisión de Aguas del Valle de México de la S.A.R.H. era traer para principios de la década de los 80's un volumen que deuplicara el volumen introducido a la fecha del estudio (1974), esto es, aproximadamente 80 m^3/seg. más. Para llevar a cabo este proyecto era necesario captar agua en regiones muy lejanas a la ciudad. Se tenía pensado hacer la captación en el Río Pánuco. Pero las limitaciones del presupuesto hicieron que se desechara este proyecto, que se modificara el objetivo general y que se trazara una serie de objetivos más modestos que fuera posible irlos alcanzado por etapas. Así el proyecto se modificó, de tal manera que la captación de agua se realiza en Cutzamala y Valle del Bravo lo que incrementará el volumen de agua potable en aproximadamente 20 m^3/seg., pero que tiene el gran inconveniente de que por un lado se lesionan los intereses de los campesinos de la región, por otro lado el volumen captado no es el suficiente para cubrir las necesidades de la ciudad y además a la larga esta serie de soluciones parciales saldrá más cara que si se hubiese realizado el proyecto general. En este caso, observamos que tan determinante puede ser el medio ambiente en el análisis de sistemas.

Ahora analizaremos la tercera consideración, esto es, los RECURSOS DEL SISTEMA. Estos se encuentran dentro del mismo, son los medios que utiliza el sistema para la realización de su trabajo.

La principal característica de los recursos del sistema es que son manejables, es decir, podermos variar su asignación según nos convenga. En el caso de una industria, los recursos serían: obreros, equipo, herramienta, etc. y capital. El capital disponible, puede ser además de una restricción fija, un recurso ya que la cantidad de dinero disponible la podemos distribuir como más nos convenga. Para lograr una mejor visión del sistema, no sólo deberemos considerar los recursos, sino que también deberemos considerar la utilización de los mismos. En este aspecto es indispensable estar al tanto de los avances tanto científicos como tecnológicos de todas las áreas del conocimiento y técnica que pueden intervenir de una forma u otra en el sistema analizado. (De ahí la importancia de contar con un equipo interdisciplinario). Dichos avances científicos y tecnológicos, pueden aumentar los recursos con un mínimo de gasto. Tal es el caso de la adquisición de una computadora de alta velocidad para el funcionamiento de una empresa o de adquirir nueva maquinaria en una industria, ya sea fabril o constructora, etc.

Al observar y pensar acerca de un sistema deberemos poner atención no sólo a los recursos existentes, sino también a la forma en que estos pueden aumentarse, o sea, de la manera en que los recursos de sistemas pueden ser utilizados para crear más y mejores recursos en el futuro, por medio de investigaciones y desarrollo en el caso de cierto tipo de equipo, o bien, mediante el entrenamiento y educación del personal, o mediante diferentes clases de actividades políticas que habrán de incrementar el presupuesto y el potencial de inversión. En realidad, para muchos sistemas, un componente que se refiera al incremento de los recursos, puede ser el mejor componente del sistema.

Los recursos son el depósito general fuera del cual los actos específicos del sistema pueden moldearse. Los actos específicos son tomados por los COMPONENTES DEL SISTEMA. Estos componentes del sistema se refieren precisamente a la cuarta consideración básica en nuestro razonamiento. Al hablar de componentes o partes de un sistema debemos tener cuidado de identificar los componentes verdaderos del sistema. Las organizaciones frecuentemente se dividen en departamentos, divisiones, oficinas y grupos de personas, pero un examen cuidadoso nos muestra que estos no son los verdaderos componentes del sistema aún cuando lleven símbolos que indican que sí lo son. Por ejemplo, en las empresas industriales un departamento puede intitularse "producción". Podríamos pensar que solamente de este - componente puede uno encontrar la manufactura de productos. Otro departamento se denomina "mercadotecnia"; pensaríamos entonces que solamente en este departamento se encontrarán las actividades relacionadas con la distribución y la venta de productos. Sin embargo en muchas empresas la función de distribución deberá concebirse como parte del componente de producción, simplemente porque sería casi imposible pensar cómo puediera ocurrir la distribución del producto, de modo independiente de la forma en que los artículos se fabrican. Posiblemente el departamento de producción influya notablemente en la venta de los productos ya que la producción establece contacto en la forma directa con el cliente al satisfacer sus pedidos. Si el cliente no es satisfecho, ello origina que las actividades del departamento de producción pueden disminuir las ventas. Por esta razón, al analizar sistemas deberemos ignorar las líneas tradicionales de división y considerar las "misiones", "tareas" o "actividades" básicas, concretamente deberemos considerar el desglose racional de las tareas que el sistema debe realizar. Aquéllos elementos que tengan un común denominador, serán componentes a considerar ya que persiguen la misma misión. Al identificar de esta manera los componentes del sistema es que estaremos en condiciones de identificar aquellos componentes que están verdadera mente relacionados con la medida de actuación del sistema en general y serán precisamente aquellos que al aumentar su medida de actuación aumenten también la medida de actuación del sistema total.

¿Porqué deberemos ser tan persistentes en hablar acerca de misiones y no de departamentos? Simplemente porque analizando misiones podemos estimar el valor de una actividad para el sistema total, en tanto no existe ninguna otra forma posible para estimar el valor de la actuación departamental. Necesitamos saber si la actividad del componente de un sistema es mejor que otra.
Pero si la actividad de un departamento pertenece a varias misiones más grandes, pudiera ser difícil distinguir su verdadera contribución. (Vemos que la educación tiene mucho que ver con la salud y esta tiene mucho que ver con la educación, inclusive el Departamento de Policía tiene que ver con la salud por su conexión con los casos de intoxicaciones, accidentes, etc.) Por esta razón debemos ser excépticos acerca de la contabilidad administrativa en cualquiera de sus diversas formas. El encargado de la contabilidad administrativa desea registrar la actuación departamental o de los centros de costos, los cuales pueden examinarse para la utilización de recursos. Pero en base a esta división departamental podemos caer en un razonamiento inadecuado que no nos permitirá identificar adecuadamente estos departamentos y centros en términos de su verdadera contribución al objetivo del sistema total. Consecuentemente la única razón de separar el sistema en componentes es para proporcionarnos el tipo de información que necesitamos para poder decir si el sistema está operando adecuadamente y lo que se deberá hacer a continuación, determinando, como ya lo dijimos, aquellos componen

(misiones) cuyas medidas de actuación están verdaderamente relacionadas con la medida de actuación del sistema en general.

Vamos ahora a analizar la última de las cinco consideraciones básicas hechas, esto es la ADMINISTRACION DEL SISTEMA. La administración de un sistema en cierta forma es la consideración más importante de todas las anteriores ya que es aquí donde debe llevarse a la práctica todo lo antes visto y asegurarse de que todo sea de acuerdo a los objetivos del sistema; se corre el riesgo muchas veces de que en el momento de implantar una solución, ésta se desvíe del objetivo y como consecuencia la solución implantada no será la del problema original

La administración de un sistema tiene que referirse a la generación de los planes para el sistema, o sea, a la consideración de todas las cosas que hemos discutido, las metas generales, el medio ambiente, la utilización de recursos y los componentes. La administración establece las metas de los componentes asigna los recursos y controla la actuación del sistema. No sólo la administración de sistemas genera los planes del sistema, sino que además debe garantizar que los planes se lleven a cabo de acuerdo con las ideas originales. A esta actividad frecuentemente se le llama "control". Es frecuente que muchos procedimientos de control operan por excepción, de tal manera que la administración no interviene en las operaciones de un componente, excepto cuando el componente muestra una fuerte desviación del plan. Sin embargo, el control no significa solamente comprobar que los planes se estén llevando de modo correcto, también implica una evaluación de los planes y en consecuencia un cambio de los mismos. Uno de los aspectos críticos de la administración de sistemas es la planeación para el cam bio de planes, ya que pudiera ser que se han estipulado incorrectamente los objetivos generales o se ha definido equivocadamente el medio ambiente o se ha hecho en forma no correcta la definición precisa de los recursos o se ha incurrido en error al hacer la descripción definitiva de los componentes. Por lo tanto, la parte administrativa del sistema debe recibir información que le diga cuándo son erróneos los conceptos del sistema y cuándo deberá incluir los pasos que prevean un cambio.

Ya hemos visto como en "teoría" llevaríamos a la práctica "El Enfoque de Sistemas". Ahora bien, cabe la pregunta, ¿funciona en la práctica? La respuesta es sí. En los países altamente industrializados su uso está muy difundido. Así por ejemplo, en los E.U. la NASA, el Pentágono, y cientos de grandes empresas industriales de transportes, energía,comunicación y materiales utilizan el enfoque de sistemas.

De todo lo aquí visto podríamos hacer las siguientes CONCLUSIONES:

* Sistema es un conjunto de dos o más elementos altamente relacionados entre sí (interdependencia) y que persiguen un objetivo común.
* En enfoque de sistemas es una filosofía, una forma de ver las cosas, una forma de pensar que se relaciona con el comportamiento total del sistema dentro de su contexto (suprasistemas).
* Las cinco consideraciones básicas del Enfoque Sistémico nos ayudan a poner en práctica esa forma de pensar,
* Al aplicar las consideraciones básicas a la solución de un problema se adopta un criterio de integración o síntesis y no de análisis -

como en el método Newtoniano, el cual considera un objeto de investigación científica como una colección de partes aisladas y trata de derivar las propiedades del todo a partir de las propiedades de sus partes sin considerar sus posibles interaciones.

* Al tener un criterio de síntesis la concepción del problema es interdisciplinaria y por lo tanto debemos avocarnos al estudio del problema en una forma interdisciplinaria.
* Interdisciplina, en forma sencilla, significa que una misma situación es estudiada por especialistas en diferentes disciplinas en forma conjunta y coordinada y no en forma aislada pues esto constituye la multidisciplina.
* La investigación de operaciones así como otras disciplinas, utiliza (debe) en Enfoque de Sistemas para estudiar problemas.

Es importante recalcar la importacia de organizar una metodología para el enfoque de sistemas. Es necesario, en una primera instancia, determinar cuales son los fundamentos teóricos para desarrollarlos, o sea especificar que teorías se emplearán en la investigación. En el siguiente tema del curso, denominado Metodología de la Investigación de Operaciones, veremos este aspecto con mayor detalle y profundidad.

Vamos ahora a analizar un sistema y a identificar los elementos vistos antes.

Consideramos un buque de carga. El capitán del buque tiene la responsabilidad de asegurarse que el barco llegue a su destino del límite de tiempo establecido es su programa. Esto puede ser una versión del objetivo general de un barco. El "medio ambiente" de un buque es un conjunto de condiciones externas que debe afrontar: condi ciones climatológicas, la dirección en que sopla el viento, el movimiento de las olas, etc. Desde el punto de vista del capitán, el medio ambiente también incluye las características de actuación de maquinaria, y hombres, puesto que estos son "constantes" en cualquier viaje. Los recursos del barco son sus hombres y maquinaria, puesto que éstos pueden ser empleados de diversas maneras. Los componentes del barco son la misión del cuarto de máquinas, la misión de mantenimiento, la misión de galeras, etc. El capitán como el administrador, genera los planes para las operaciones y se asegura que se lleven a cabo sus planes. Instituye varias clases de sistemas de información a través del barco, que le informan cuando haya ocurrido una desviación del plan, y su trabajo es determinar por qué esta desviación se ha presentado, evaluar la actuación del barco y, por último, si fuera necesario cambiar sus planes si la información señala recomendable hacerlo.

Consideremos ahora el sistema educativo y en particular el Departamento de Sistemas de la UAM-Azcapotzalco.

Debemos de notar que el sistema educativo queda enmarcado dentro de un contexto social y que a su vez queda sujeto dentro de un contexto turbulento o de cambio. Podemos ahora describir algunos de los principales propósitos que nuestro sistema de interés, Departamento de Sistemas, pueda perseguir:

a)- Lograr su desarrollo (adaptación y aprendizaje).

b)- Buscar el conocimiento (realizar investigación científica).

c)- Impartir enseñanza (preparación pedagógica y académica en la planta de profesores).

d)- Lograr el aprendizaje (formación integral en el alumno, o sea for mación académica y orientación práctica).

Vamos ahora a explicar en que consiste el desarrollo como un proceso de adaptación y aprendizaje. Para ello definiremos el concepto de desarrollo en el contexto de un sistema intencional, como es el nuestro. (Sistemas intencionales son aquellos que pueden darse o perseguir sus propios fines).

DESARROLLO es la actuación por la cual nuestro sistema de interés primordial es capaz de perseguir sus fines en una gama de ambientes. Se observa entonces que la adaptación y aprendizaje son elementos esenciales del desarrollo. Este razonamiento se esquematiza de la siguiente manera:

a)- El medio ambiente cambia rápidamente, por consiguiente, el sistema tiene también que adaptarse al cambio del medio ambiente.

b)- Los fines también cambian rápidamente. Entonces el sistema tiene también que adaptarse al cambio de los fines.

c)- En aquellos aspectos del medio ambiente que permanecen constantes, el sistema también tiene que incrementar su grado de funcionamiento, esto es, aprender.

Para entender mejor el concepto de desarrollo en un sistema educativo hagamos las siguientes consideraciones: El ritmo de cambio obliga a los sistemas educativos a desarrollar su capacidad de aprender y adaptarse con un ritmo creciente. Además, se debe considerar que uno de los principales objetivos que debe perseguir o debe proporcionar el sistema de interés, Depto. de Sistemas (DS) es lograr su desarrollo. Mediante un análisis somero del sistema DS existente en la UAM-Azcapotzalco, se concluye que es un hecho que ha alcanzado capacidad para adaptarse (si no la hubiera desarrollado, ya no existiría dicho sistema), pero cabe preguntarse si ha experimentado y visualizado (como sistema educativo) capacidad para el aprendizaje. En base a lo anterior analicemos los objetivos.

OBJETIVO GENERAL: Proporcionar los lineamientos necesarios para que el sistema educativo de interés DS genere capacidad de aprendizaje y alcance su desarrollo.

OBJETIVOS Y SUBOBJETIVOS DE LA INVESTIGACION:

O.1 Que el sistema alcance efectividad y eficiencia en el logro de sus objetivos. Entenderemos por efectividad la medida de desempeño de un sistema en la que entran en juego sus fines con relación a otros más generales (logro de objetivos); y eficiencia, en la medida del logro de los objetivos previamente fijados.

O.2 Emplear el enfoque sistémico-prospectivo para:

S.O.2.1 Establecer y analizar la problemática existente en el sistema de interés DS.

S.O.2.2 Definición de un futuro deseado para el sistema educativo DS.

S.O.2.3 Determinar alternativas de solución a la problemática del sistema pero fundamentalmente buscando alcanzar el futuro deseado.

Siendo las metas las siguientes:

M.O.2.1 Edentificar la porblemática del sistema.

M.O.2.2 Definir o determinar la actuación y función del sistema objetivo DS que sea deseable y factible alcanzar.

M.O.2.3 Dar lineamientos generales en cierta forma de planeación prospectiva para resolver los problemas identificados, pero fundamentalmente para alcanzar el DS el objetivo definido.

Lo anterior lo podemos plasmar en el siguiente diagrama:

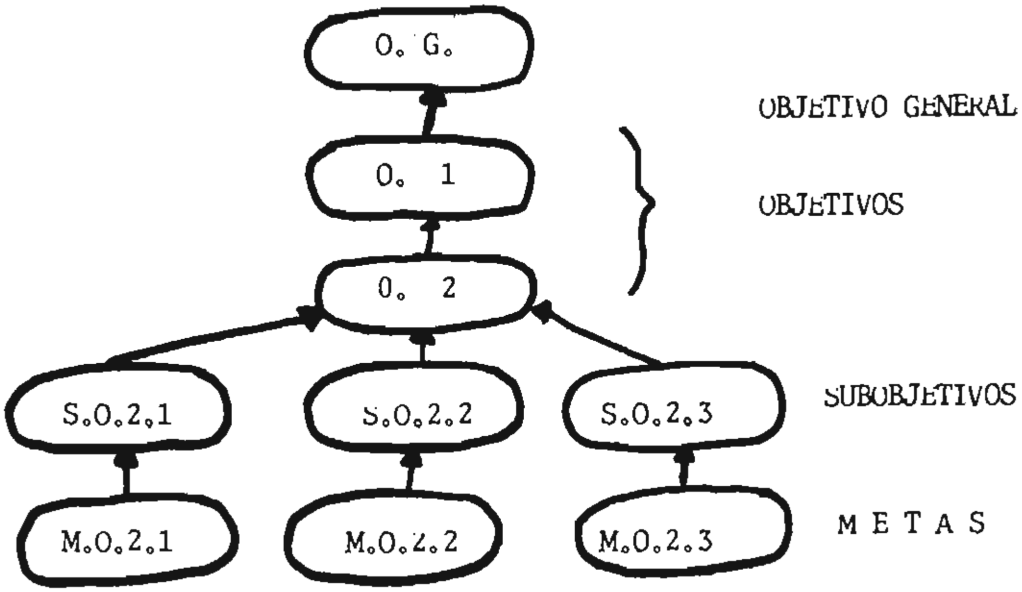


Figura 2.2. Jerarquía de los objetivos del DS.

Analicemos ahora el MEDIO AMBIENTE del sistema.

a). Educación Media Superior nacionales y extranjeros.

b). Licenciaturas nacionales e internacionales compatibles o afines con las materias que imparte el DS.

c). Estudio de Posgrado afines, nacionales e internacionales.

d). Sector Público.

e). Sector Privado.

f). Instituciones y centros de investigación y docencia nacionales y extranjeros.

Lo anterior lo podemos ilustrar de la siguiente maenra:

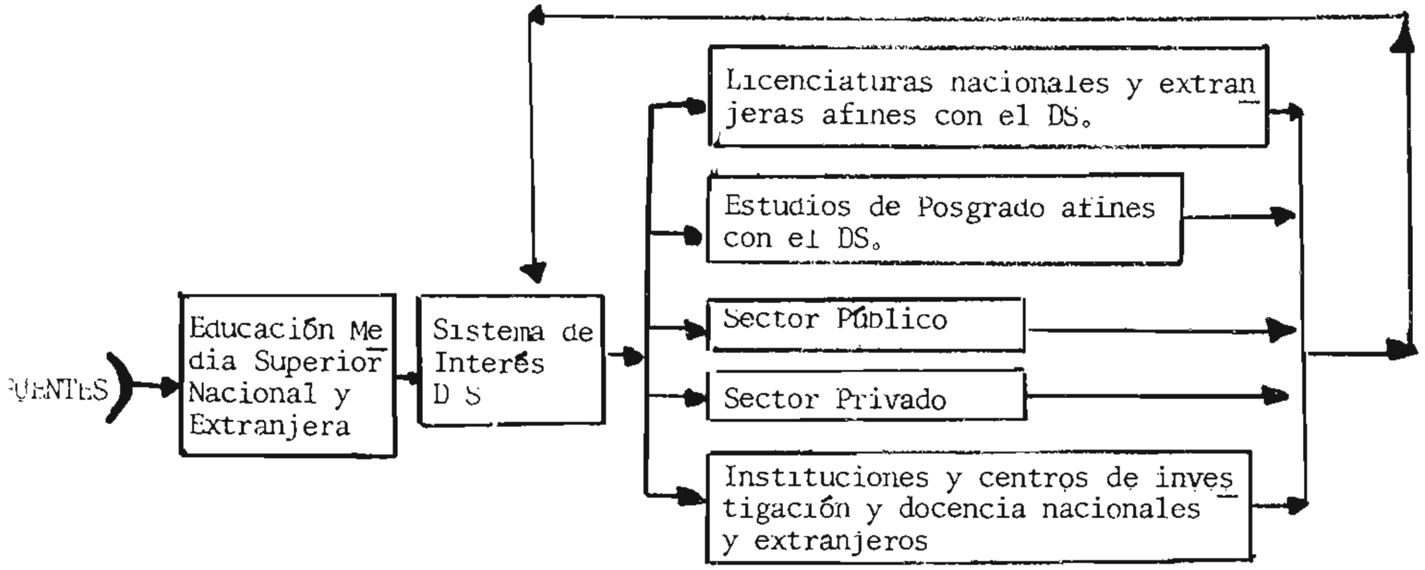


Figura 2.3 Representación conjunta del sistema de interés con las componentes de su medio ambiente.

RECURSOS DEL SISTEMA:

a)- Autoridades universitarias
- Director de C.B.I.
- Secretario Académico C.B.I.

b)- Autoridades académicas
- Jefe del Depto. de Sistemas

c)- Profesores
- Departamento de Sistemas
  - De Carrera
    - Tiempo Completo
    - Medio tiempo
  - Por horas
    - Tiempo Parcial
- Otros Deptos. (Materias relacionadas con el DS)
  - De Carrera
    - Tiempo Completo
    - Medio Tiempo
  - Por horas
    - Tiempo Parcial

d)- Alumnos del DS.

e)- Alumnos potenciales del DS.

f)- Aspecto material: dentro de éste queda comprendido que se va a enseñar, esto es, el contenido de la educación.

Por ejemplo: planes de estudio, programa de una materia, etc.

g)- Aspecto formal; este aspecto comprende el cómo se va a enseñar, es decir, la forma de la educación. Por ejemplo; aspectos docentes, pedagógicos, sicológicos, etc.

COMPONENTES DEL SISTEMA

a)- La misión de las autoridades universitarias.

b)- La misión de Autoridades académicas.

c)- La misión de los profesores del D S.

d)- La misión de los alumnos del D S.

e)- La misión de los ex-alumnos del D S.

f)- La misión de los alumnos potenciales del D S.

g)- La misión de los empleadores potenciales de los graduados del D. S. de los sectores público y privado.

ADMINISTRACION DEL SISTEMA.- Lo ideal sería que tanto las autoridades universitarias, académicas, profesores, alumnos y ex-alumnos intervinieran en ella a través de la autoridad académica.

Hablemos ahora de la metodología a usar, gran parte de la cual ya la definimos al hablar de los objetivos, pero primero definamos nuestro sistema. Nuestro sistema pertenece a un sistema mayor: CBI, UAM, que a su vez es parte de un suprasistema más amplio y complejo que es la Universidad Autónoma Metropolitana. En la siguiente figura (Fig. 2.4) se muestran los suprasistemas mas relevantes a nuestro sistema de interés.

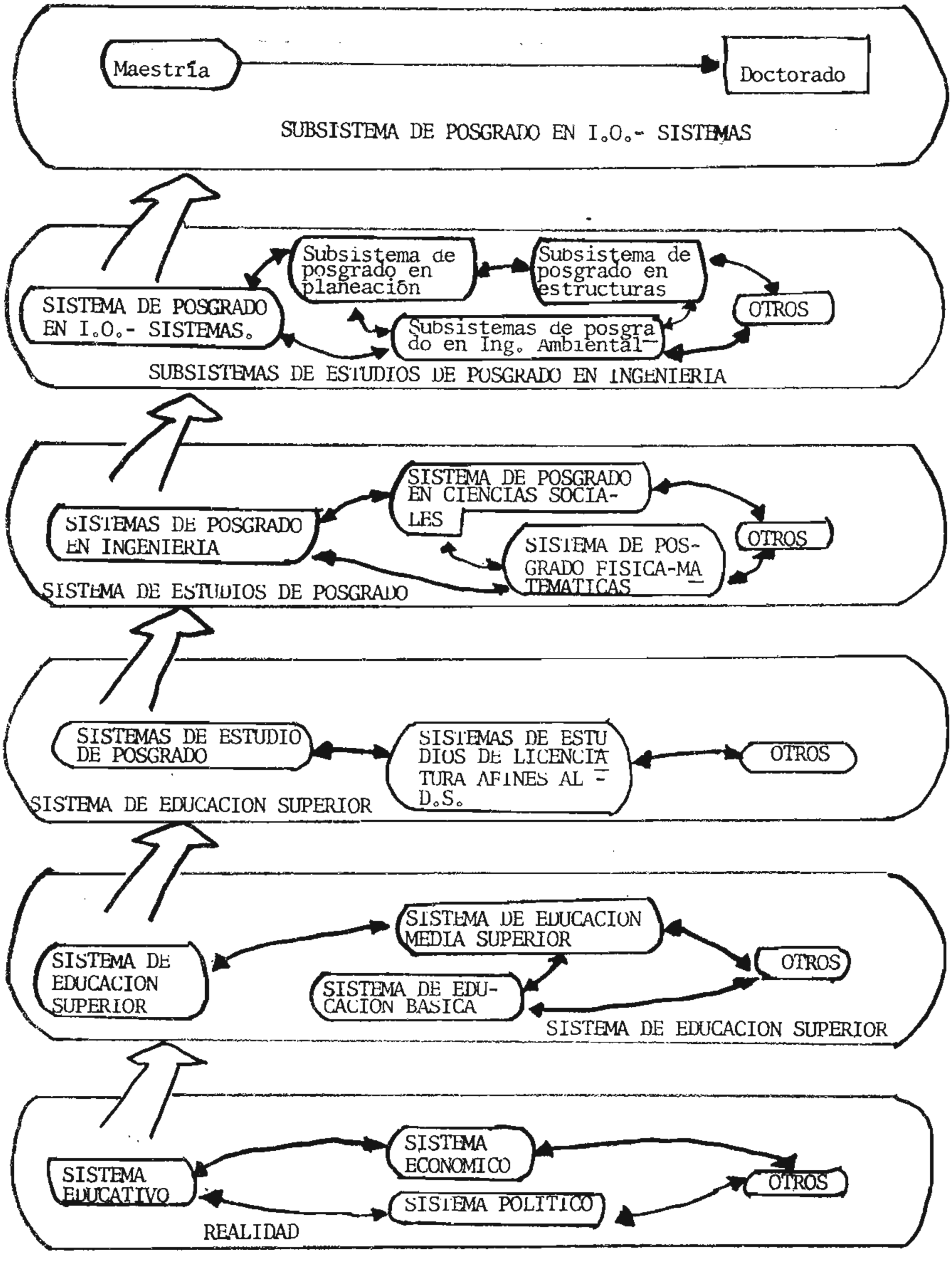


Figura 2.4 Proceso de identificación de sistema de interés D.S.

METODOLOGIA.- Para ubicar adecuadamente la metodología a seguir, es necesario, en primera instancia, determinar cuales son los fundamentos teóricos para desarrollarla, esto es, especificar qué teorías se emplearán en la presente investigación. Las teorías que consideraríamos necesarias para la investigación del sistema de interés son:

i)	-Teoría general de sistemas	______________	enfoque de sistemas.
ii)	-Teoría de planeación	______________	enfoque prospectivo de planeación participativa.
iii)	-Teoría educativa	______________	enfoque de la sistematización de la enseñanza.
iv)	-Análisis, síntesis y agrupación de información	______________	método KJ.

i) -ENFOQUE SISTEMICO. Ya hemos visto en que consiste. En síntesis podemos decir que el enfoque sistémico trata de captar la naturaleza holística de la realidad (problema).

ii) -ENFOQUE PROSPECTIVO. Sintetizando, la prospectiva es mucho más que una herramienta para la planeación: es una herramienta para la planeación y una disposición para la acción, y además, es una interdisciplina que no pretende predecir sino crear el futuro. Concretamente, es una nueva visión de la planeación.

Esto es, la prospectiva es una forma de ver el futuro. Esencialmente hay dos maneras de concebirla:

a) Como una predicción del futuro: en el sentido de que si se considera una acción determinada, sucederá tal cosa.

b) Como una <u>versión normativa del futuro</u>; en el sentido de visualizar el futuro que desearíamos y las acciones a realizar para acercarnos los más posible a él.

a)- Una visión del futuro deseado.

b)- Una serie de escenarios que definan amplias opciones en términos de futuros factibles.

O sea, la perspectiva implica;

a)- Diseño de futuros alternativos deseables.

b)- Identificación de los futuros alternativos factibles.

c)- Establecimiento, para cada futuro deseable, de los futuros alternativos factibles.

iii)- ENFOQUE DE SISTEMATIZACION DE LA ENSEÑANZA. El resultado de aplicar el enfoque sistémico a los sistemas educativos o de enseñanza es precisamente la SISTEMATIZACION DE LA ENSEÑANZA, donde son de fundamental importancia las interconexiones existentes entre los principales elementos del proceso de <u>enseñanza-aprendizaje</u>:

a)- Método y medios.

b)- Planes y programas de estudio.

c)- Instrumentos de evaluación.

La importancia de esto radica en que la eficiencia de los métodos y medios que se aplican a un curso están en función de los objetivos que señalan los planes y programas de estudio, y el conocimiento preciso de su efectividad de los instrumentos con que se evalúa el aprendizaje, objetividad que es, en definitiva, el resultado que se desea lograr en cualquier sistema de enseñanza.

iv)- METODO KJ. (JIRO KAWAKITA). La aplicación del enfoque prospectivo participativo presupone una actitud participativa por parte de los interesados en la investigación, en el planteamiento del problema y sus objetivos, así como de la búsqueda de medios para su obtención (solución del problema), y uno de los métodos para implicar la participación de la gente interesada en una situación determinada es el método KJ, el cual permite obtener, de una gran cantidad de datos heterogéneos, los asuntos esenciales y presentarlos de manera lógica y comprensiva mediante diagramas de conjuntos. Esto aporta una visión de la situación tal como la perciben los elementos del sistema, integrando esta al proceso de planeación prospectiva participativa, y por tanto, incrementando la eficacia de los planes. Esto es, el Método KJ:

a)- Analiza la información y la sistetiza clasificándola en grupos afines.

b)- El paso anterior lo hace por etapas.

c)- Continua el proceso sucesivamente hasta lograr una agrupación final de menos de 10 grupos.

d)- Finalmente representa esta información en forma lógica y comprensiva mediante una diagrama de conjuntos, en el cual se muestran las interconexiones entre los grupos finales.

Bibliografía:

1. AKCOFF, R.L. SASIENI, M. "Fundamentos de la Investigación de Operaciones". Edit. Limusa, 1975.

2. CHURCHMAN, C.W. "A Critique of the Systems Approach to Social Organization. Systems Concepts". Lectures on Contemporany Approaches to Systems. Miles Ralph F. Jr. (Ed.) Wiley & Sons, 1973. Pág. 191-205.

3. CHURCHMAN, C.W. "El Enfoque de Sistemas". Edit. Diana. 1973.

4. RAPOPORT, A. "Systems Analysis: General Systems Theory". International Encyclopedia of the Social Sciencies. Vol. 15. Mac Millan and - Free Press. 1968. Pág. 452-458.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

3.1. Origen y desarrollo de la investigación de Operaciones.

Durante la Segunda Guerra Mundial, las autoridades militares inglesas encargaron a un equipo de científicos el estudio de problemas estratégicos y tácticos asociados con la defensa aérea y terrestre del país. El objetivo de este grupo de científicos fue determinar la utilización más efectiva de los recursos militares que eran limitados. Los estudios realizados incluían entre otros el uso del recién inventado radar y la eficacia de nuevos tipos de bombas y la minimización del tiempo de búsqueda del enemigo. El establecimiento de este equipo científico marcó formalmente la primera actividad de Investigación de Operaciones (O.1). El nombre de Investigación de Operaciones aparentemente se debe a que el equipo científico trató con investigación de operaciones (militares). Con ello el ejército inglés incorporó los métodos científicos en la milicia, difundiéndose rápidamente también a la fuerza aérea y a la armada. Por medio de la I.O. se trató de determinar la evaluación de un equipo o arma para descubrir que tan bien funciona en operación y también se hizo el análisis de las operaciones militares para ver como se acopla el equipo o arma a las tácticas, o alternativamente, hasta que punto las tácticas determinan el tipo de arma a escoger. Se hicieron predicciones del resultado de operaciones futuras ya sea en el campo estratégico o táctico y se estudio la eficiencia de las organizaciones que manejan el equipo y armas en batalla. Por supuesto que en el pasado se había tra bajado en esta forma, pero no fué sino hasta la incorporación del equipo de científicos ya mencionada que se hizo como actividad conciente.

Aunque, como se ha visto, la Investigación de Operaciones empezó en el contexto militar, su evolución puede ser descrita en términos de desarrollo de la organización industrial. Antes de la Revolución Industrial la mayoría de los negocios e industrias consistían de compañías pequeñas, dirigidas por un solo jefe el cual hacía las compras, planeaba y supervisaba la producción, ventas, contrataciones, etc. La mecanización de la producción dió origen a un crecimiento muy rápido, de tal manera que se volvió imposible para una sola persona desempeñar todas estas funciones.

Por consiguiente, se produjo una división en la función directiva y se originaron puestos tales como gerente de producción, de personal, de finanzas, ventas, compras, etc.

Una parte integral de este cambio revolucionario ha sido un incremento tremendo en la división del trabajo y la segmentación de las responsabilidades directivas en las organizaciones.
Cada vez que una función administrativa se divide en un conjunto de subfunciones diferentes, se crea una nueva tarea que es la de integrarlas de tal manera que sirvan eficientemente a los intereses de un todo. La tarea de integración es la función ejecutiva de la administra-

ción. Esta tares es muy importante, pues frecuentemente los objetivos de las subfunciones chocan y crean conflictos. Para ilustrar esto, podemos considerar el siguiente ejemplo: El ejecutivo de una empresa normalmente establece los siguientes objetivos para las principales funciones de las mismas:

i). PRODUCCION. Maximizar la cantidad de bienes (o servicios) producidos y minimizar el costo unitario de la producción.

ii). VENTAS. Maximizar la cantidad vendida y minimizar el costo unitario de las ventas.

iii). FINANZAS. Minimizar el capital requerido para mantener cierto nivel del negocio.

iv). PERSONAL. Mantener la moral y la alta productividad entre los empleados.

Después de un breve análisis de estos objetivos, vemos que perseguirlos causa conflictos entre las unidades. El departamento de producción necesita producir tanto como sea posible al costo mínimo. Esto sólo se puede lograr si se fabrica un sólo producto en forma contínua. Esta política minimiza el tiempo perdido en cambiar equipo con objeto de producir otro artículo (preparación) y se logran las eficiencias que proporciona la práctica de corridas largas de producción. Si el Depto. de producción tuviera que manufacturar relativamente pocos productos en corridas de producción tan largas y contínuas como sea posible, se tendría un gran inventario compuesto de unos cuantos artículos. De aquí que el Depto. de producción prefiere generalmente una política que permita un gran inventario y requiera una línea de productos pequeña.

El Depto. de ventas también necesita grandes inventarios de manera que al cliente siempre se le puede surtir hoy lo que quizás quiera mañana. Para poder vender tanto como sea posible en cada pedido, el depto. de ventas debe poder surtir la más amplia variedad de productos. De aquí que los deptos. de producción y ventas suelen tener fricciones en cuanto a la amplitud de la línea de productos. Incluso, frecuentemente el depto. de ventas insiste en incluir muchos artículos de bajo volumen de ventas y aún improductivos, en tanto que el depto. de producción pide su exclusión. El depto. de finanzas, tratando de lograr su objetivo, trata de reducir los inventarios, y por consiguiente, el capital invertido en ellos. El depto. de finanzas - normalmente cree que los inventarios deberían aumentar o disminuir en proporción a la fluctuación de las ventas de la empresa. Sin embargo, cuando las ventas son bajas, el depto. de personal y el de producción no quieren reducir la producción, ni despedir personal, debido a que estas medidas repercuten en la moral del personal, reducen la mano de obra calificada disponible, e implican costos al liquidar el personal y posteriormente, contratar y adiestrar nuevos trabajadores. Por lo tanto, al depto. de personal le interesa mantener la producción a un nivel tan constante como sea posible. Esto significa producir hasta el nivel de inventario cuando las ventas son bajas y agotarlo cuando estas son altas. De aquí que los departamentos de personal y de finanzas tengan ideas diferentes acerca de cuál deberá ser la política de inventarios de la empresa.

Otro problema relacionado con el anterior es que a medida que aumenta la complejidad y especialización en una organización se vuelve más difícil la asignación de recursos entre varias actividades en forma tal que sea más efectivo para la organización.

Esta clase de problemas y la necesidad de encontrar una forma mejor de resolverlos propició el ambiente adecuado para el desarrollo de la Investigación de Operaciones después de la guerra. Al terminar la guerra, un considerable número de científicos, principalmente físicos, matemáticos e ingenieron que usaron la I.O. durante el conflicto, empezaron a buscar las posibilidades de aplicar esos conocimientos en el campo industrial, aunado también al gran desarrollo - industrial que hubo después de la guerra. De esta forma la I.O. se empezó a aplicar en la industria, en los negocios y en el gobierno.

Al menos otros dos factores influyeron en el rápido desarrollo de la I.O. Uno fue el progreso sustancias de las técnicas disponibles en la I.O. Un gran número de científicos se incorporaron a esta área de investigación y ayudaron al desarrollo de la I.O. Así por ejemplo, en 1947 Dantzig da a conocer el método simplex pára resolver problemas de programación lineal. A fines de la década de los 50's, el eminente matemático soviético Pontriaguin da un fuerte impulso al desarrollo de la programación no lineal y a la teoría del control. Así, al final de la citada década muchas de las técnicas empleadas en I.O., como son las programación lineal, programación dinámica, teoría de la espera, teoría de inventarios, etc. ya estaban desarrolladas. Otro de los factores que fue determinante para el desarrollo de la I.O. fue la aparición y posterior evolución de las máquinas computadoras de alta velocidad, las cuales permiten problemas que antes no era posible tan solo imaginar.

Actualmente la I.O. se aplica en toda actividad humana.

3.2. Definición de la Investigación de Operaciones.

Al tratar de dar una definición de la I.O. debemos recordar que la mayoría de quienen practican las ciencias más antiguas y bien cimentadas, ni siquiera las han definido en forma aceptable. Sin embargo, la siguiente definición sienta una base útil para adquirir un conocimiento inicial de la I.O., especialmente cuando se le relaciona con los antecedentes históricos que acabamos de describir. La I.O. es una actividad que requiere del uso de métodos analíticos para ayudar a resolver problemas de toma de decisiones. O siendo más estrictos, podemos decir que la I.O. es la aplicación del método científico, por equipos interdisciplinarios, a problemas que comprenden el control de sistemas, para dar soluciones que sirvan mejor a los propósitos del sistema como un todo. Sin embargo, existe una gran variedad de definiciones, e inclusive de formas de interpretarla. Hya quien la enmarca en el enfoque de sistemas, despreciando la participación que las matemáticas tienen, esto es, las herramientas con que cuenta la

I.O. Por el contrario, hay quienes las enmarcan como una rama de las matemáticas aplicadas, descuidando el enfoque sistémico. En realidad la I.O. es ambos y ambos se necesitan para dar una solución adecuada a un problema. Esto es, es necesario hacer un planteamiento del problema a resolver que corresponda en un 100% al problema (enfoque sistémico) y es necesario conocer las herramientas matemáticas necesarias para resolverlo. Podríamos decir que la I.O. se interesa en la toma óptima de decisiones y en la formulación de modelos de sistemas determinísticos y estocásticos que se originan en la vida real, de la necesidad de asignar recursos limitados. La contribución del enfoque de la I.O. se deriva básicamente de:

a)- La estructuración de una situación real en un modelo matemático, "abstrayendo" los elementos esenciales, de tal forma que la solución relevante a los objetivos de "la persona que toma las deciciones" pueda "Verse". Esto implica ver el problema en el contexto del sistema completo.

b)- Explorar la estructura de tales soluciones y desarrollar procedimientos sistemáticos para obtenerlas.

c)- Desarrollar la solución, incluyendo la teoría matemática si se requiere, que lleva al valor óptimo de la medida deseada por el sistema, o posiblemente comparando cursos de acción alternativos evaluando su medida deseada.

Deberá quedar claro que el investigador de operaciones en ningún momento trata de sustituir a la persona que tomas las decisiones, sino tan solo auxiliarla, ya que este estará en mejores condiciones de conocer el impacto o consecuencias resultantes de aplicación de las alternativas presentadas a él.

3.3. Carácter interdiciplinario de la Investigación de Operaciones.

A medida que la ciencia en general se desarrolló y evolucionó, se presentó la especialización. Hasta fines del siglo XVII era posible para un hombre aprender y retener todo o casi todo el conocimiento científico que había acumulado la humanidad. Posteriormente al inicio del siglo pasado, las ciencias naturales se dividieron en física y química. Poco tiempo después comenzó a separarse la biología, y justamente antes que terminara el siglo, ocurrió lo mismo con la sicología, ciencias sociales y económicas. Cada una de estas ciencias se ha dividido y subdividido. En la actualidad tenemos más de cien disciplinas científicas.

Por otra parte, para situaciones nuevas y complicadas, nuestra tendencia es enfocar los problemas en la forma que mejor conocemos. De aquí, que es muy natural, que si por ejemplo, cuando se enfrenta el problema de incrementar la productividad de una fábrica, el sicólogo del personal tratará de seleccionar trabajadores más aptos o mejorar el adiestramiento que se les da. El ingeniero mecánico tratará de mejorar la maquinaria. El ingeniero industrial intentará mejorar la disposición de la planta, simplificar las operaciones efectuadas por los obreros u ofrecerles incentivos más atractivos.

Pero ya en el campo de la I.O., la complejidad de los sistemas a analizar es mucho mayor y de muy variada índole, razón por la cual es indispensable el concurso de especialistas en diversas disciplinas que integren un grupo interdisciplinario, pero no multidisciplinario.

La diferencia entre ambos es que en el grupo interdisciplinario, un equipo de científicos especialistas en distintas áreas trabajan conjuntamente en la solución de un problema. En el grupo multidisciplinario el trabajo no es conjunto. La tarea a desarrollar por el equipo interdisciplinario será el enfoque sistémico del problema y la elaboración del modelo así como verificar los resultados y analizar las consecuencias e impactos de su aplicación. Para poder plantear el programa matemático que representa el modelo propuesto y resolverlo ya sea aplicando las técnicas conocidad o inclusive creándolas, es necesario el conocimiento de las herramientas matemáticas de los propios de la I.O. como son: cálculo diferencial e integral, algebra lineal, teoría de matrices, análisis matemático, análisis funcional, probabilidad, inferencia estadística, estadística matemática, procesos estocásticos, programación lineal, entera, no lineal, dinámica, estocástica, teoría de la espera, teoría de inventarios, series de tiempo, teoría de decisiones, teoría de juegos, confiabilidad, reemplazo y mantenimiento, simulación, teoría de redes, econometría, optimización en espacios vectoriales, teoría de la medida, teoría del control, control estocástico, etc.

Cabe mencionar que la mayor limitación para la I.O.

es la falta de información, problema con el que muy a menudo nos enfrentamos.

3.4. Modelos.

Los modelos matemáticos han sido usados en la ingeniería para fines de análisis y diseño desde hace muchos años. Por ejemplo, en el problema de analizar y predecir las deformaciones de una viga sujeta a cargas externas, por medio de hipótesis simplificatorios e idealizaciones, se establece un modelo que permite calcular los elementos deseados. La fórmula de la escuadría es un modelo muy conodido en la ingeniería civil. En el caso de sistemas más complejos, sobre todo de tipo dinámico (que varian con el tiempo), la solución analítica del modelo establecido no es sencilla y en algunos casos ni siquiera posible. Con el advernimiento de las computadoras electrónicas de alta velocidad se han desarrollado técnicas que permiten hacer simulaciones del comportamiento de sistemas con relativa facilidad. Se ha desarrollado asimismo lenguajes de computadora como SIMSCRIPT, GPSS, GASP, DYNAMO y otros que permiten una vez establecido el modelo, resolverlo y obtener resultados con facilidad y rapidez. Debe considerarse que la simulación digital es una técnica aún nueva en la ingeniería que puede tener una infinidad de aplicaciones, estando sólo limitada por la imaginación de los usuarios.

Existen sistemas continuos discretos. Serán sistemas continuos aquellos en los que los cambios de estado de los elementos del sistema son continuos en el tiempo. (Por ejemplo, el sistema representado por los escurrimientos que llegan a una presa).

Los sistemas discretos son aquéllos en que dichos cambios ocurren en tiempos determinados (la atención al público en un banco, el metro, etc.). Para fines de estudio, los sistemas continuos se pueden simplificar, discretizándolos y estudiando los cambios a través de una serie de pasos discretos. Con el objeto de poder estudiar el comportamiento de un sistema, el primer paso que debe darse es representarlo por medio de un modelo. Los modelos no deben ser tan complejos ni difíciles como el sistema representado, pues no tendría entonces ninguna ventaja.

No existen modelos únicos para representar la realidad. De hecho el modelo depende de la persona que lo elabore, o de los aspectos que interesan estudiar del sistema. La calidad del modelo depende de su simplicidad y de su apego a la realidad y para lograrla se requiere imaginación y creatividad en el grupo que lo desarrolle. No es posible preparar un manual para construcción de modelos, es más, de existir ese manual sería contraproducente ya que restringiría la creatividad de los que lo usarán. Ackoff (1) ha establecido una serie de patrones, basados en experiencias anteriores que permiten dar ideas básicas para el establecimiento de modelos. Existen varios tipos de modelos, a saber:

a)- <u>Modelos simbólicos</u>.- Estos modelos usan letras, números y otros tipos de símbolos para representar variables y las relaciones entre ellas. Toman la forma de relaciones matemáticas, por lo cual se acostumbra llamarlos modelos matemáticos. Como ejemplo de estos modelos tenemos la ley gravitacional de

Newton, la fórmula de la escuadría, relaciones hidráulicas, eléctricas, etc.

b)- <u>Modelos icónicos</u>.- En estos modelos las propiedades importantes se representan por sí mismas, generalmente con un cambio de escala, es decir son imágenes del sistema real, pues tienen su misma apariencia. Como ejemplo de estos modelos tenemos los túneles de viento, los aviones a escala estudiados en aquellos, los modelos del sistema solar usados en los planetarios, etc.

c)- <u>Modelos análogos</u>.- En estos modelos, una serie de propieda- son usados para representar a otros conjuntos de propiedades. Un sistema hidráulico puede ser usado como analogía de un sistema de tráfico de automóviles. También es conocida la analogía entre sistemas eléctricos e hidráulicos.

d)- <u>Modelos lógicos</u>.- Los modelos de este tipo son dados por elementos de tipo lógico que al seguir una secuencia dan por resultado una representación del sistema. Los diagramas de flujo y los programas de computadora son ejemplo de este tipo de modelos.

Nosotros utilizaremos exclusivamente los modelos de tipo simbólico o matemático.

Los modelos pueden a su vez subdividirse en varias clases las cuales no son mutuamente exclusivas.

i).- <u>Modelos Determinísticos</u>.

En este tipo de modelos el resultado queda descrito completamente en términos de los datos de entrada, es decir, <u>las relaciones están perfectamente establecidad entre las variables y ninguna</u>

de ellas es aleatoria. Su solución más adecuada es por medio de técnicas analíticas. Un ejemplo, es el cálculo tradicional de deformaciones en una viga, debidas a cargas determinadas.

ii)- Modelos Estocásticos.

En estos modelos, al menos una de las características del sistema está dada por una función de probabilidad. En este caso el uso de técnicas analíticas es muy complejo, requiriéndose tal vez el uso de otras técnicas como la simulación para su solución. Un ejemplo se encuentra en el funcionamiento de vasos de presas, donde el escurrimiento de los ríos es una variable aleatoria.

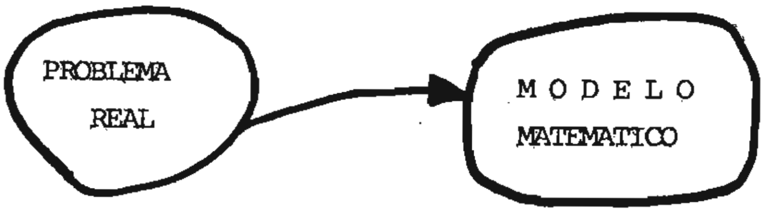
iii)- Modelos Estáticos.

Los modelos de esta clase son aquellos en los cuales la variable tiempo no interviene explícitamente. Por ejemplo, casi todas las aplicaciones de programación lineal y no lineal caen en esta categoría. La mayor parte de los modelos estáticos son a su vez determinísticos, por lo que pueden resolverse con técnicas analíticas.

iv)- Modelos Dinámicos.

En estos modelos se manejan iteraciones en el tiempo. Pueden resolverse por métodos analíticos en algunos casos sencillos, pero en general se resuelven por algún sistema numérico como puede ser la simulación digital. Los fenómenos económicos y demográficos requieren generalmente, modelos de este tipo.

En la Investigación de Operaciones, por lo general, utilizaremos modelos matemáticos. Estos lo podremos resolver analíticamente (abstractamente) y lo más complejos (los usados en I.O.) se resuelven en forma iterativa o algorítmica (numéricamente). Esto es, nosotros primero formularemos el problema y luego crearemos el modelo matemático.



3.5- Metodología de la Investigación de Operaciones.

Vamos a ilustrarla de la siguiente manera:

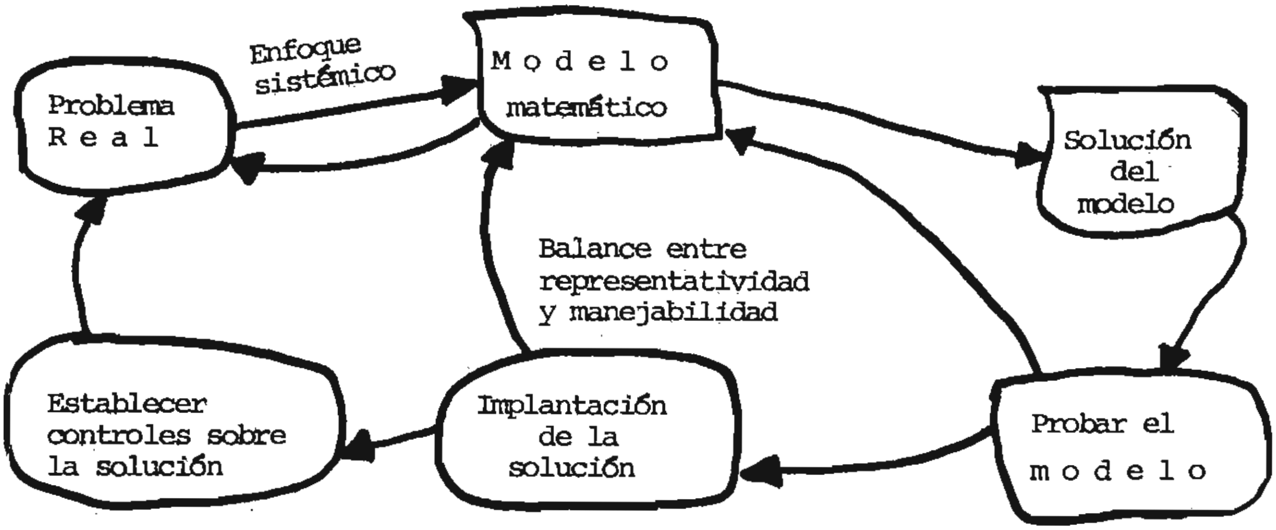


Figura 3.1. Ilustración de la metodología de la Investigación de Operaciones.

La I.O. tal y como lo indicamos utiliza el método científico.

3.5.1.- Método Científico.

El método científico es un rasgo característico de la ciencia, tanto de la pura como de la aplicada. El método científico no es infalible ni autosuficiente. Por ser falible puede perfeccionarse mediante la estimación de los resultados a los que lleva y mediante el análisis directo.

Tampoco es autosuficiente: no puede operar en un vacio de conocimientos, sino que requiere algún conocimiento previo que pueda puego reajustarse y elaborarse y tiene que complementarse mediante métodos especiales adaptados a las peculiaridades de cada tema.

El método científico tiene 3 características principales.

i)- Utilización de predicciones para probar una teoría.

ii)- La utilización de la teoría para explicar observaciones "sorprendentes" (no lógicas, que se salen de lo normal).

iii)- El uso de la observación "dirigida" por la teoría.

Lo anterior lo podemos plasmar en el siguiente diagrama:

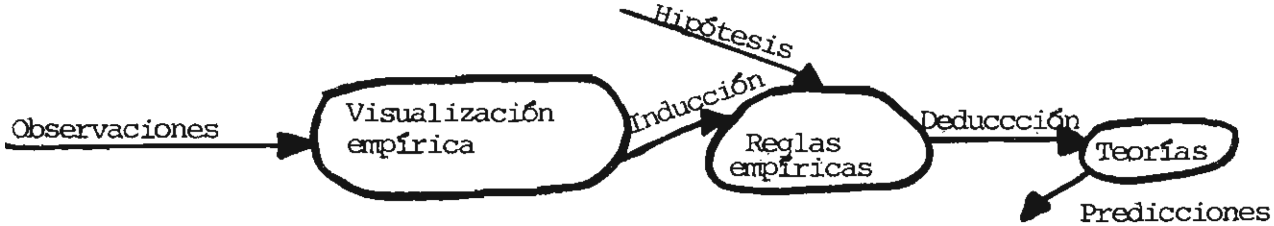
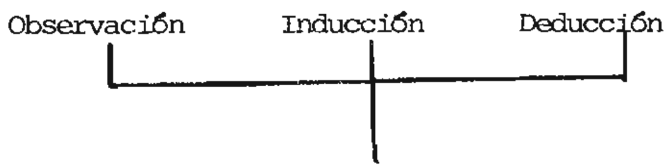


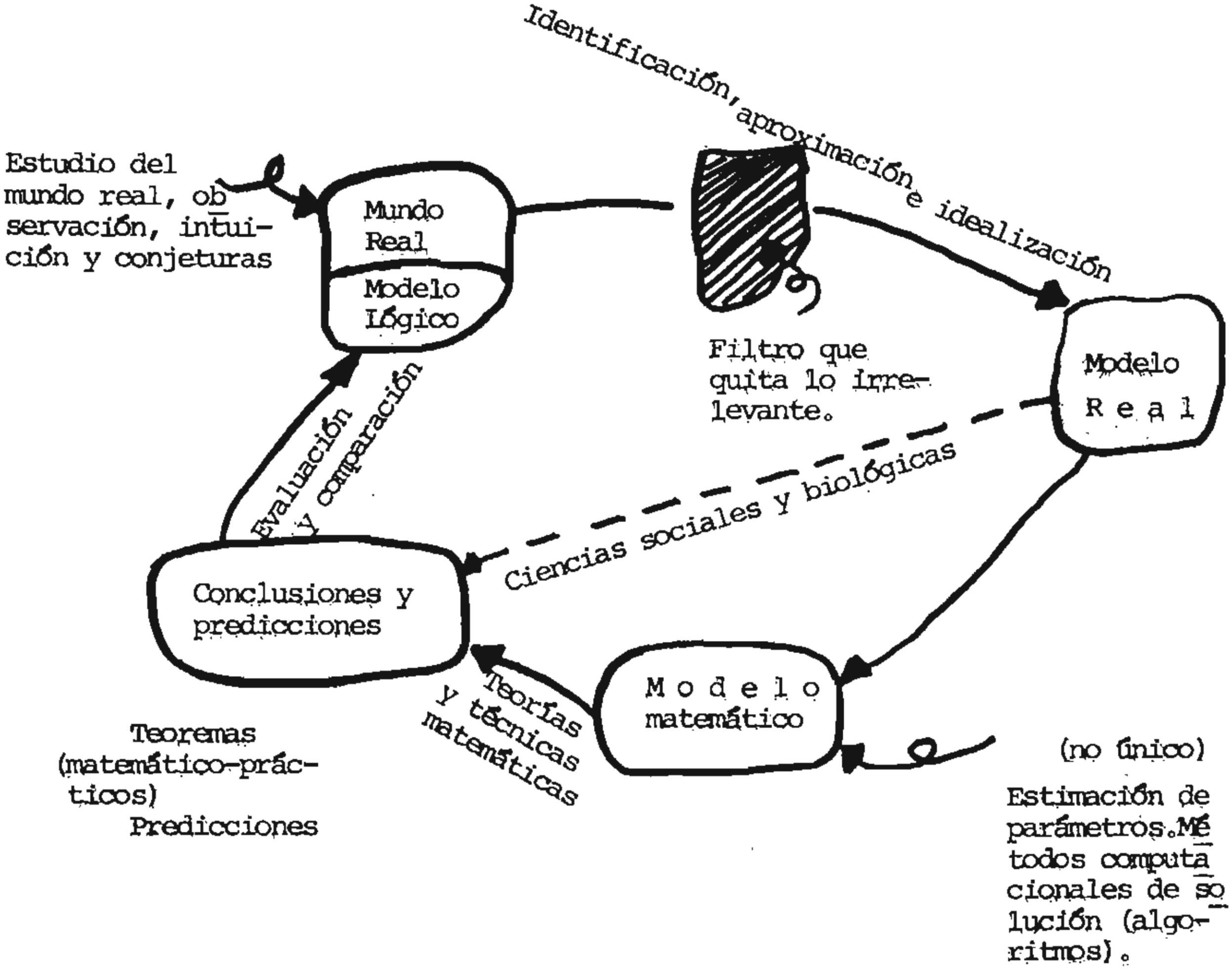
Figura 3.2. Visualización del método científico.

Una manera sencilla de visualizar el método científico es:



El proceso científico es una combinación de inducción y deducción. Por inducción llegamos a un modelo y por la deducción de rivamos resultados.

El modelo real es la apreciación del mundo real. Por ejemplo en el caso de un sicólogo que experimenta con ratas en un laboratorio. El color de las ratas no importa y lo quita del modelo real. Le importará si hay luz o no, si son parientes o no, si hay o no comida, etc.



Expliquemos ahora con más detalle el modelo matemático.

Es un sistema de axiomas (postulados o enunciados que tomamos como básicos.)

Sistema de axiomas por definición es una colección de términos indefinidos (abstractos) asociados a un conjunto de axiomas que hacen uso de llos (en general supondremos que tanto unos como otros son finitos).

Teoremas son consecuencias lógicas de un sistema de axiomas.

Teoría (de un sistema de axiomas) es la colección de todos - los teoremas que pueden ser deducidos lógicamente de un sistema de axiomas. El sistema de axiomas deberá ser consistente.

El <u>modelo lógico</u> se produce al darle significado a los términos indefinidos. Es un modelo matemático con interpretación real.

Ejemplo: Modelo Matemático

$$\begin{aligned} &\min \quad cx \\ &\text{s.a} \\ &\qquad Ax = b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Modelo lógico: c = coeficiente de costos

A = matriz de transformación de precios

b = vector de disponibilidades o recursos

x = vector de actividades

De un modelo matemático hay una infinidad de modelos lógicos.

Ejemplo de modelos lógicos:

Tenemos dos términos indefinidos: árbol y barda (no damos ningún significado).

Axiomas (arbitrarios);

A 1; cada barda es un conjunto de árboles que contiene al menos dos elementos.

A 2; Existen al menos tres árboles.

A 3: Dados cualesquiera 2 árboles T_1 y T_2 existe una y sólo una barda que los contiene.

A 4; Dada cualquier barda F y un árbol T no en F, existe una y sólo una barda F' que contiene a T y que está desconectada de F ($F' \cap F = \phi$).

Lo anterior es un modelo.

Modelos lógicos:

1)- 3 árboles => verdadero pues cumple con los cuatro axiomas (árbol es el concepto más importante pues define a barda).

2)- 4 árboles => verdadero (cumple con los cuatro axiomas).

3)- árbol = punto => verdadero (cumple con los cuatro axiomas).

barda = línea

Teoría: teorema 1.- Si existen dos bardas diferentes = existen tres bardas diferentes.

teorema 2.- Si existen tres bardas diferentes = existen cuatro bardas diferentes.

Principios generales.

Principio 1.- Todos los teoremas en la teoría determinados por un sistema de axiomas son verdaderos en cada modelo de ese sistema.

Principio 2.- La ley de contradicción se mantiene para todos los enunciados significativos que se hagan acerca de ca da modelo de un sistema de axiomas.

Si existe un modelo lógico de un sistema de axiomas se garantiza que no hay contradicciones.

Por otra parte, el método científico puede en base a las conclusiones obtenidas, elaborar o generar nuevas incógnitas las cuales serán el punto inicial para una nueva investigación.

Ahora bien, podríamos decir que la investigación científica se compone de dos partes principales: una es la de generación de las hipótesis y la otra es el planteamiento de los problemas y su comprobación.

La otra parte de la investigación científica es la siguiente:

A. Planteamiento del problema.

A.1- Reconocimiento de los hechos, examen del grupo de hechos, clasificación preliminar y selección de los que probablemente sean relevantes en algún aspecto.

A.2- Descubrimiento del problema. Hallazgo de la laguna o de la icoherencia en el cuerpo del saber.

A.3- Formulación del problema. Planteamiento de una pregunta que tiene probabilidad de ser la correcta, esto es, reducción del problema a su núcleo significativo, probablemente soluble y probable mente fructífero, con ayuda del conocimiento disponi ble.

B. Construcción de un modelo teórico.

B.1- Selección de los factores pertinentes. Planteamiento de suposiciones plausibles relativas a las variables que probablemente son pertinentes.

B.2- Planteamiento de las hipótesis centrales y de las suposiciones auxiliares. Propuesta de un conjunto de suposiciones concernientes a los - nexos entre las variables pertinentes; por ejemplo, la formulación de enunciados de leyes que se espera puedan amoldarse a los hechos observados.

b.3- Traducción matemática. Cuando sea posible, traducción de las hipótesis, o de parte de ellas, a alguno de los lenguajes matemáticas.

C. Deducción de consecuencias particulares.

C.1- Búsqueda de soportes racionales: deducción de consecuencias particulares que puedan haber sido verificados en el mismo campo o en campos contiguos.

C.2- Búsqueda de soportes empíricos. Elaboración de predicciones sobre la base del modelo teórico y de datos empíricos, teniendo en cuenta las - técnicas de verificación disponibles o concebibles.

Lo que nos permite hacer predicciones es el principio de uniformidad de la naturaleza, el cual dice: "... lo que sucede una vez, en condiciones similares, se repetirá dependiendo del grado de similitud de estas condiciones". Esto no quiere decir que haya determinismo, sino que existe una probabilidad de que ocurra. En un proceso estocástico esperamos un resultado o un conjunto de resultados.

D. Prueba de hipótesis.

D.1- Diseño de la prueba. Planeación de los medios para poner a prueba las predicciones, diseño de observaciones, mediciones, experimentos y demás operaciones instrumentales.

D.2- Ejecución de la prueba. Realización de las operaciones necesarias para la ejecución de la prueba y recolección de resultados (datos empíricos).

D.3- Elaboración de los datos. Clasificación, análisis, evaluación, reducción, etc., de los datos empíricos.

D.4- Inferencia de la conclusión. Interpretación de los datos elaborados a la luz del modelo teórico.

E. Introducción de las conclusiones a la teoría.

E.1- Comparación de las conclusiones con las predicciones. Es el contraste de los resultados de la prueba de hipótesis con las consecuencias del modelo teórico. Se deberá precisar en que medida este puede considerarse confirmado o no (inferencia probable).

E.2- Reajuste del modelo. Eventual corrección, o aún reemplazo del modelo.

E.3- Sugerencias acerca del reajuste del modelo. Búsqueda de lagunas o errores en la teoría y/o los procedimientos empíricos, si el modelo no ha sido confirmado, en caso contrario, examen de posibles extensiones y de posibles consecuencias en otros problemas.

El método científico no es seguro; pero es intrínsecamente progresivo, porque es autocorrectivo, exige la continua comprobación de los puntos de partida, y requiere que todo resultado sea considerado como fuente de nuevas preguntas.

Lo anterior lo podemos plasmar en el siguiente diagrama.

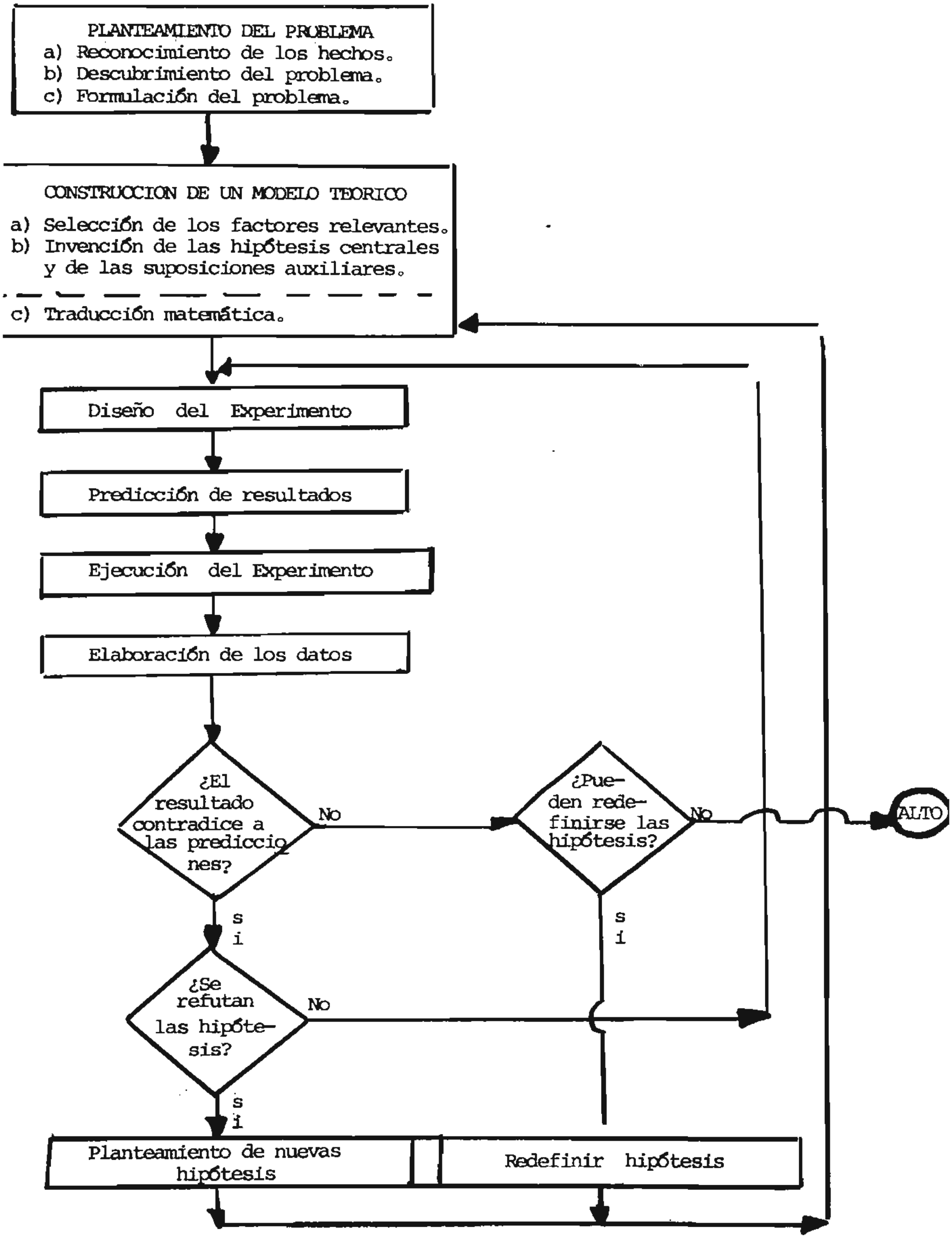


FIGURA 3.3. METODO CIENTIFICO.

Por último, debemos enfatizar que el método científico tiene la inconveniencia de que no toma en cuenta la diferencia epistemológica existente entre las ciencias físicas, biológicas y sociales. Así por ejemplo, refiriéndonos a la figura 2.3, una manera de visualizar el método científico para las ciencias físicas será:

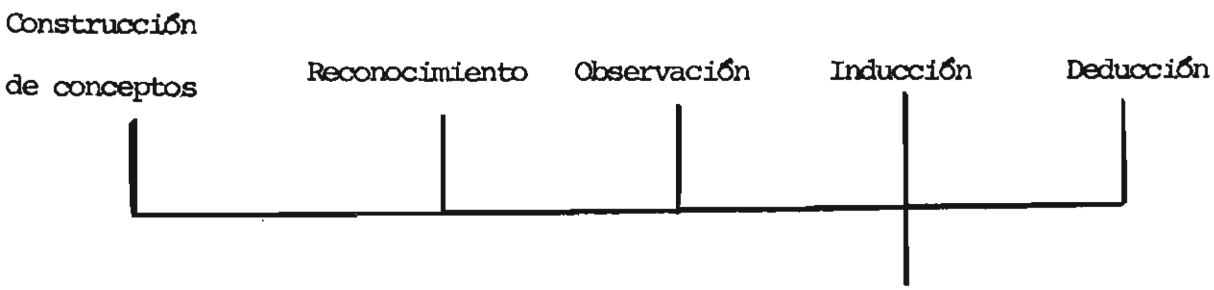


FIGURA 3.4. El método científico aplicado a las ciencias físicas.

Es decir, todo lo que aquí hemos dicho acerca del método científico es válido en general, pero al aplicarlo a las diferentes ciencias existentes, deberemos tomar en cuenta la diferencia epistemológica que hay entre ellas.

Existen otros métodos del conocimiento, los cuales enumeraremos en forma somera:

3.5.2.- <u>Método experimental. (Autor Bacon)</u>.

En el sentido estricto de la palabra, el método experimental consiste en someter un sistema material a ciertos estímulos y en observar su reacción a estos para resolver algún problema sobre la relación estímulo - respuesta.

3.5.3.- <u>Método hipotético-deductivo. (Autor Popper).</u>

Es el procedimiento que consiste en desarrollar una teoría empezando por formular sus puntos de partida o hipótesis básicas y deduciendo luego sus consecuencias con la ayuda de las subyacentes teorías formales.

Postulados del método hipotético-deductivo:

i)- Hay una clara distinción entre descubrimientos y justificación o prueba, y forman dos partes separadas del pensar.

ii)- Lo que genera la acción científica está por descubrirse, no de la obtención de datos, pero sí de una preconcepción imaginaria de lo que puediera ser la verdad.

iii)- El método hipotético-deductivo provee una teoría de incentivo especial, nuestras observaciones no caen nada más en el rango de lo observable, están confinadas a aquellas incluidas en la hipótesis bajo investigación.

iv)- También permite la rectificación continua o ajuste sobre la marcha de hipótesis mediante el proceso de retroalimentación.

v)- Si la investigación científica nos lleva a resultados erroneos, significará que supusimos mal, o tomamos un punto de vista erroneo o una opinión malinterpretada.

vi)- La suerte, inaceptable en el razonamiento inductivo, tiene ahora sentido. El accidente fortuito satisface una esperanza previa, sin importar que tan vagamente haya sido formulada.

vii)- El método hipotético-deductivo da la importancia debida a los propósitos críticos de experimentación. Es frecuente el uso de experimentos con el propósito de eliminar posibilidades y no para aumentar la cantidad de información.

3.5.4.- Método de la investigación de operaciones.

En la mayoría de los estudios del método científico se cita la "experimentación" como algo esencial. Pero desafortunadamente la experimentación, en el sentido estricto, no es posible llevarla a cabo. En la industria, por ejemplo, una compañía no puede correr el riesgo de fracasar al llevar a cabo un experimento que se espera sea exitoso. O en actividades públicas como la industria petrolera, sistemas de riego, sistemas de generación de energía, etc., sería imposible llevar a cabo etapas de experimentación. Es muy raro encontrar un sistema total en el cual pueda llevarse a cabo. Por lo tanto deberá usarse un método de investigación que no implique experimentación sobre el sistema total. El investigador de operaciones deberá constuir representaciones del sistema y su operación, esto es, deberá construir modelos y sobre ellos realizar la investigación.
Podríamos considerar las siguientes etapas en un proyecto de I.O., y aunque usualmente se inicia en el orden enumerado, por lo general no termina en ese mismo orden.
De hecho, cada fase procede normalmente hasta que se termi-

na el proyecto e interacciona en forma continua con las otras.

Para estar acorde con la siguiente descripción de estas etapas, podemos decir que la investigación de operaciones es un procedimiento analítico, aplicado a la solución de problemas con el objeto de ayudar a las organizaciones en el proceso de la toma de decisiones. Entonces, un proyecto de I.O. incluye las siguientes etapas:

1)- <u>Definición del problema.</u>

Esta fase requiere de una clara definición del problema, lo cual sugiere tres aspectos principales:

i).- Una descripción exacta del fin u objetivo del estudio.

ii).- Identificación de alternativas de solución.

iii).- Reconocimiento de las limitaciones, restricciones y requerimientos del sistema.

Independientemente del necesario dominio de las técnicas matemáticas que utiliza la I.O., es necesario poseer una habilidad (inclusive arte) en la construcción, formulación, manipulación y análisis de modelos matemáticos que nos representen la realidad, siendo esto precisamente la esencia del enfoque de la I.O. Es la contrapartida o el equivalente del laboratorio experimental en las ciencias físicas.

El construir un modelo nos permite plasmar las complejidades y posibles inseguridades que involucren un problema de toma de decisiones en un marco lógico fácil de analizar.

Tal modelo esclarece las alternativas de decisión y sus efectos anticipados; indica los datos que resultan relevantes para el análisis de alternativas y nos lleva a conclusiones informativas.

2)- <u>Construcción del modelo</u>.

Dependiendo de la definición del problema se vería cuál modelo lo representa adecuadamente. Si el modelo final se ajusta a alguno de los ya conocidos, entonces se resolverá aplicando las técnicas apropiadas. Si este no es el caso, se puede hacer uso de las técnicas de simulación o de modelos heurísticos.

3)- <u>Solución del modelo</u>.

En el caso de modelos matemáticos se utilizarán técnicas de optimización para obtener lo que se denomina "solución óptima". Si se usa la simulación, entonces el concepto de optimalidad no estará definido ya que la simulación nos permite conocer el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones. La solución en este caso será una evaluación aproximada, y la aplicación de análisis de sensibilidad (cambio en las condiciones dadas) es recomendable.

4)- <u>Prueba de validez del modelo</u>.

Un modelo es válido si, a pesar de ser una representación simplificada del sistema, puede dar una predicción confiable del comportamiento del sistema y esto se puede saber en base a una serie de predicciones de tipo lógico o de acuerdo a experiencias similares.

5)- Implementación de resultados finales.

Esta fase consiste en transformar los resultados en instrucciones de operación detalladas. Tales instrucciones deberán ser claras y además estar en lenguaje sencillo tal que sea comprensible al tomador o tomadores de decisiones los cuales administrarán y operarán el sistema una vez ya implantado.

Estas cinco etapas se muestran en la figura 3.5.

Cada etapa es parte importante en el proceso de solución del problema, aún en la construcción del modelo, la cual es la culminación de una extensa investigación preliminar.

Existen dos puntos que debemos enfatizar: primero, el procedimiento aquí descrito es recursivo. En el proceso de construcción de un modelo y examen de sus características, los puntos de vista y reacciones de las personas involucradas en el sistema deben buscarse constantemente, y como resultado, el investigador a menudo debe modificar sus propias ideas acerca del comportamiento del sistema. Lo que en un momento determinado se ha creído que son las restricciones en un sistema, puede ser completamente reexaminado. El conocimiento y entendimiento del problema se va transformando de superficial a profundo.

El investigador puede requerir la redefinición del criterio, reconstruir el modelo y quizás aún redefinir el problema mismo y los objetivos del estudio. Este proceso recursivo debe continuar hasta que el modelo propuesto se ajuste a lo que tanto el equipo interdisciplinario como el tomador de decisiones consideran lo más apegado a la realidad.

El segundo punto es que la formulación de la solución a un problema no significa el fin del proyecto de I.O., la prueba final de una solución está en su implementación y el papel de Investigador de Operaciones en este punto es definitivamente esencial. Esto no quiere decir que un proyecto de I.O. que no proporcione una interpretación tangible sea un fracaso. Un proyecto puede culminar en una solución que debe esperar a que se presenten las condiciones propicias favorables para su implementación; o bien puede reafirmar la situación original del sistema; o puede confirmar la necesidad de examinar nuevos problemas. Pero es la implementación de una propuesta y su habilidad para soportar las reacciones de su medio ambiente y la erosión del tiempo lo que nos dá la mejor medida del éxito.

La participación del investigador de operaciones en la implementación de la solución al modelo propuesto no sólo asegura que cualquier problema o duda que surgiese pueda ser manejada por la persona directamente asociada con el diseño y solución del modelo (retroalimentación a corto plazo), pero también ofrece al investigador de operaciones una experiencia inmediata en aspectos prácticos que le ayudarán en futuros proyectos (retroalimentación a largo plazo).

El ejemplo visto anteriormente sobre el enfoque de sistemas sirve al Departamento de Sistemas de la UAM-Azcapotzalco para ejemplificar la metodología de la I.O. Inclusive escuetamente señalamos el modelo propuesto y sus técnicas de solución.

Vamos a describir en la siguiente sección una metodología general que toma en cuenta todo lo hasta aquí visto.

3.6. Proceso estructurado.

El proceso estructurado para la solución de problemas de planeación y operación de sistemas hace uso de los conceptos que hemos venido manejando y, bajo el marco del método científico, - se propone para resolver en forma más razonable los diversos y complicados problemas que la dinámica del mundo actual nos impone. Dicho proceso se ha planteado con la finalidad de tener una metodología general que pueda aplicarse a cualquier problema en el ámbito de los sistemas. Esto es, pretendemos aplicar dicha metodología a todos aquellos problemas que el mismo proceso encuadra en dos grupos, los de <u>planeación</u> y los de <u>operación</u>. En forma esquemática los podemos visualizar de la siguiente manera:

PROBLEMAS DE SISTEMAS
- OPERACIONES
- PLANEACION
  - CREACION
  - EXPANSION

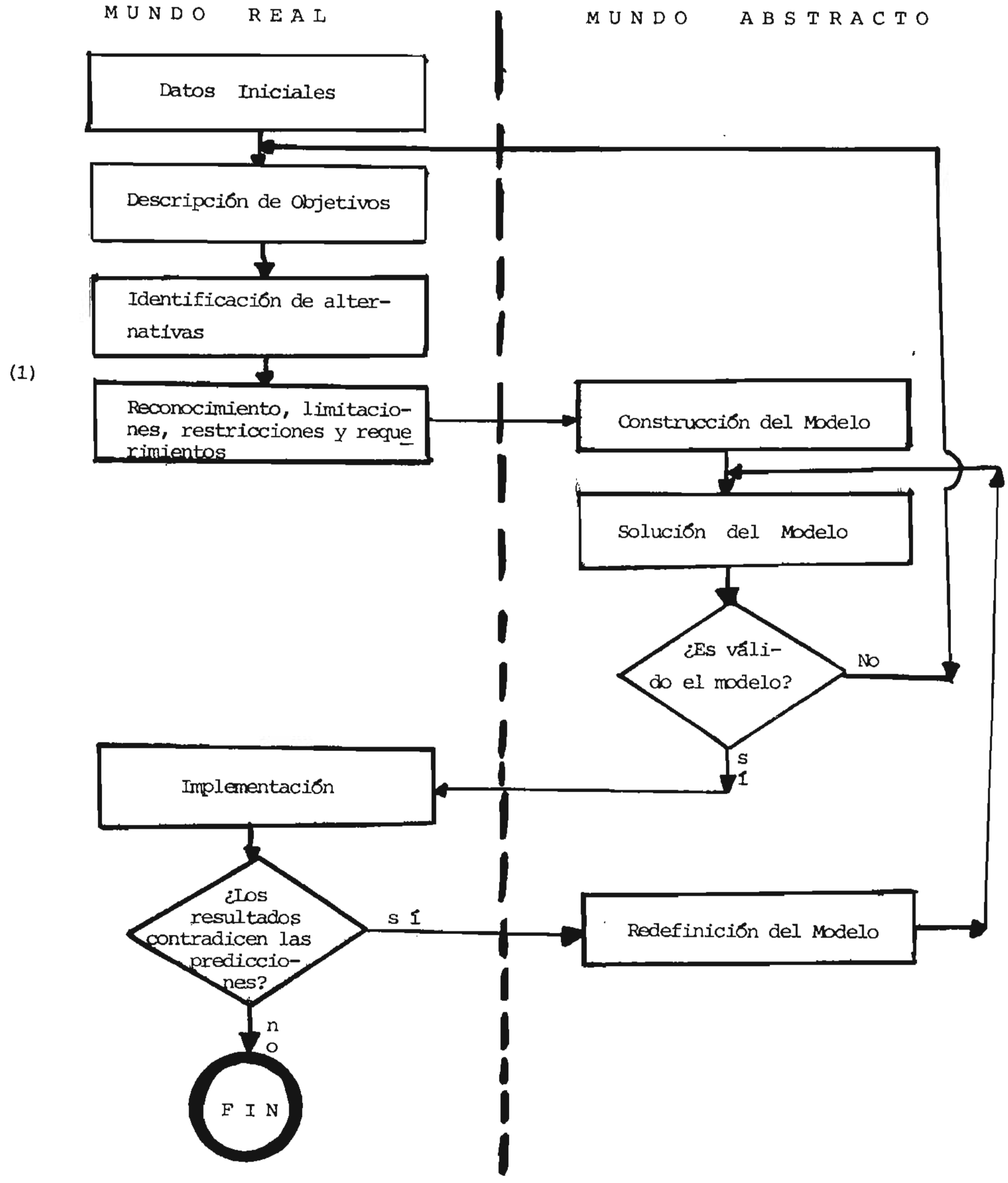


Figura 3.5. Procedimiento de la Investigación de Operaciones.

Los problemas operacionales se presentan en aquellos sistemas, que estando en operación, presentan necesidades de mejoría en aquellos elementos que de alguna manera no permiten o dificultan la funcionalidad para lo que fueron creados.

En los problemas de planeación se presentan dos casos, aquellos en los que el sistema no existe en forma material, por lo que necesariamente la planeación parte de una idea o una necesidad para crearlo.

El otro caso se plantea cuando se trata de la expansión de sistemas - ya existentes, en los cuales en corto tiempo presentarán su máxima capacidad de desarrollo.

El proceso estructurado básicamente consiste de una serie de etapas a seguir, en las cuales tratamos de normar una orientación racional y práctica para resolver los problemas anteriormente descritos. No se pretende con esto asegurar que dicho proceso sea la panacea que nos permita resolver con el 100% de efectividad los problemas de esta manera tratados. Por lo tanto, los siguientes puntos a continuación expresados, aunque son consecuencia de la experiencia de varios especialistas en el campo de los sistemas, pudieran adaptarse o modificarse de acuerdo al problema, la experiencia y el criterio del analista o grupo de ellos que que así lo consideran.

PROCESO DE SOLUCION

Problemas de Planeación

Ubicación: Geográfica, Sectorial

Fijación de Objetivos

Análisis

Diagnóstico

Evaluación del Medio Ambiente
Generación de Opciones
Evaluación Ex-Ante
Selección
Problemas de Operación
Ubicación: Geográfica, Sectorial
Fijación de Objetivos
Análisis
Evaluación Ex-Post
Diagnóstico
Generación de Opciones Correctivas
Evaluación, Ex-Ante
Implantación
Control

En lo que sigue, se describirán brevemente las diferentes etapas del proceso estructurado.

Ubicación.- Por un lado, es necesaria la localización geográfica en donde se genera el problema; y por otro, la localización del sistema en el contexto del sistema económico, es decir, y dependiendo del nivel de desagregación que se desee, debemos situar el sistema de estudio, en algún sector, subsector o rama de actividad económica.

De tal manera que se tengan presentes las repercusiones que sobre otros sistemas, causa o causará, debido a las interrelaciones que guardan entre sí.

Análisis.- Es la determinación cualitativa y cuantitativa de la función y componentes del sistema. En esta etapa se requiere indagar, investigar, seguir el curso de acción de cada componente y como se relacionan entre sí.

Evaluación Es-Post.- Es la comparación de las funciones y resultados esperados del sistema, cuando fue ideado, con aquéllos que en realidad están sucediendo, dicho de otra manera, si el sistema está en operación, la evaluación ex-post proporciona indicadores que permiten un juicio de si el sistema cumple con los fines para los que fue creado.

Diagnóstico.- Es la identificación cualitativa y cuantitativa de la presencia o ausencia de irregularidades en un sistema.

Identificación de opciones correctivas.- Es mostrar las posibles alternativas de solución, a aquéllas irregularidades o deficiencias presentes en el funcionamiento del sistema.

Evaluación Ex-Ante.- Evaluar hoy, lo que puede suceder en el futuro para cada una de las acciones correctivas. Esta evaluación permite conocer antes de implantar alguna de ellas, la efectividad en el funcionamiento del sistema, antes de concretarla físicamente.

Selección.- Consiste en considerar la opción u opciones óptimas de - entre las respuestas.

Implantación.- Es poner en marcha las opciones seleccionadas. Esto implica, muchas veces, cambios en la estructura del sistema como pudieran ser eliminación o adición de actividades, procesos, organización, etc.

Control.- Consiste en verificar y comparar los resultados del sistema, con los previstos en la opción seleccionada, una vez que ésta se haya puesto en operación.

BIBLIOGRAFIA.

1. AKCOFF, R.L. "Scientific Method" Ed. Wiley & Sons. 1962.

2. AKCOFF, R.L. "Towards a Systems of Systems Concepts". Managenement Science, Vol. 17, No. 11, 1971, pp 661-671.

3. AKCOFF, R.L. y SASIENI, M.W. "Fundamentos de la Investigación de Operaciones". Edit. Limusa, 1975.

4. CHURCHMAN, C.W. "El Enfoque de Sistemas". Edit. Diana. 1973.

5. CHURCHMAN, C.W. "A Critique of the Systems Approach to Social - Organization Systems Concepts". Lectures on Contemporany Approaches to Systems. Miles Ralph F. Jr. Ed. Wiley & Sons. 1973, pp. 191-105.

6. GELMAN, O.Y. "Formalization of Mathematical Modelling Processes as One of the Ways of Building the General Systems Theory", Problems of Logic an Methodology of General Systems Theory. Tbilisi, 1967. pp. 25-29.

7. GELMAN, O.Y. y LAVRENCHUK, N.B. "Specifics of Analysis of Scientific Theories within the Framework of the General Systems Theory. Philosophical Questions of Logical Analysis of Scientific

Knowledge". Armenian Academy of Sciens Publishing Huse. Erevân, 1974. Issue e, pp. 137-149.

8. RAPOPORT, A. "Methodology in the Physical, Biological and Social Sciences". General Systems Yearbook, Vol. XIV. 1969. pp.179-186.

9, RAPOPORT, A. "The Search for Simplicity". Main Currents in Modern Thought, Vol. 28, No. 3. 1972. pp. 79-84.

10. SHCHEDROVITZKY, G.P. "Methodological Problems of Systems Research" General Systems Yearbook, Vol. XI. 1966. pp. 27-53.

CAPÍTULO IV

PROGRAMACIÓN LINEAL

4.1. Optimización.

La optimización consiste en la maximización o minimización de una función de una o varias variables, la cual está sujeta a una serie de restricciones en estas mismas variables.

Un problema particular de la optimización es la búsqueda del óptimo (máximo o mínimo) condicionado. Este problema consiste en la maximización o minimización de una función lineal de varias variables sujeta a restricciones lineales en estas mismas variables. Este problema que ha recibido el nombre de Programación Lineal, es el caso simple de toda una clase de problemas análogos, agrupados bajo el nombre de programación matemática, en los cuales la función a optimizar así como las restricciones a que está sujeta pueden ser funciones algebráicas de cualquier grado.

Los problemas de óptimos condicionados no son nuevos, ya los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII tales como Newton, Leibnitz, Lagrange, Bernoulli, etc., los cuales desarrollaron el cálculo infinitesimal así como el cálculo de variaciones aportaron una solución general. En la siguiente subsección veremos algunos métodos generales de optimización, y en particular el de Lagrange, aplicados a funciones más generales que las lineales, como es el caso de funciones y restricciones no lineales. El objeto de esta presentación es solamente informativa y además proporcionar al lector una idea más general de la programación matemática de tal manera que al terminar de estudiar la presente obra tenga un criterio de comparación de la programación lineal. Sin embargo el lector puede omitir el estudio de la subsección 4.1.1 sin pérdida de continuidad.

4.1.1. Optimización clásica.

Vamos a describir brevemente los métodos clásicos de cálculo para encontrar una solución que maximice o minimice a:

i. Una función de una sola variable.

ii. Una función de varias variables.

iii. Una función de varias variables sujeta a restricciones sobre estas variables.

Supondremos que las funciones consideradas poseen primera y segunda derivadas y derivadas parciales en todas partes.

i. Función de una sola variable.

Consideremos una función de una sola variables, tal y como la que muestra en la figura 4.1.

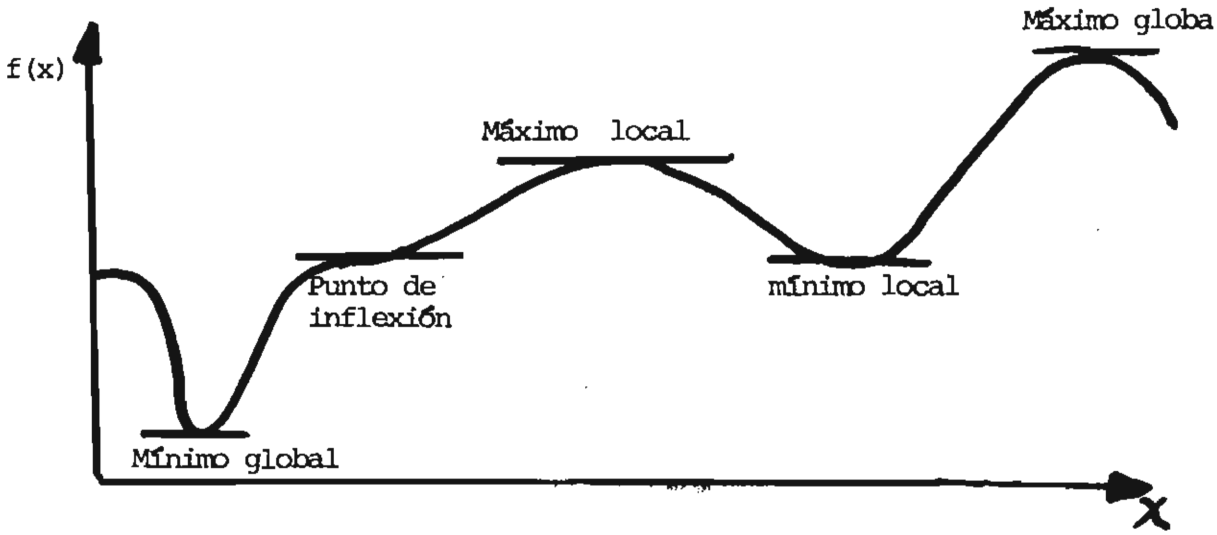


Figura 4.1. Función que contiene varios máximos y mínimos.

Una condición necesaria para encontrar una solución particular $x=x^*$, el cual será un mínimo o un máximo es que

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad \text{en } x=x^*$$

En la figura 4.1 hay cinco puntos que satisfacen esta condición, los cuales llamaremos puntos críticos. Para obtener más información acerca de estos cinco puntos críticos deberemos examinar la segunda derivada, pero antes definamos los conceptos de función convexa y función cóncava.

Una funcón de una sola varible es convexa, si para cada par de valores de x, digamos x' y x'' se tiene:

$$f[\alpha x''+(1-\alpha)x'] \leq \alpha f(x'')+(1-\alpha)f(x'),\alpha\varepsilon[0,1] \qquad (4.1)$$

La función será estrictamente convexa si en la expresión (4.1) podemos reemplazar la desigualdad ($\leq$) por desigualdad estricta ($<$).

Una función cóncava se define, para una función de una sola variable, como sigue:

$$f[\alpha x''+(1-\alpha)x'] \geq \alpha f(x'')+(1-\alpha)f(x'),\alpha\varepsilon[0,1] \qquad (4.2)$$

donde x' y x'' constituyen un par de valores de x. Si en la expresión (4.2) reemplazamos la desigualdad ($\geq$) por desigualdad estricta ($>$) tendremos una función estrictamente cóncava.

Estas definiciones las podemos ilustrar gráficamente. Consideremos la gráfica de la función f(x). Entonces los puntos (x',f(x')) y (x'',f(x''))pertenecen a la gráfica de f(x) y$[\alpha x''+(1-\alpha)x', \alpha f(x'')+(1-\alpha)f(x')]$ representa todos los puntos sobre la linea recta que une a aquellos puntos cuando $0 \leq \alpha \leq 1$ tal y como se muestra en la figura 4.2.

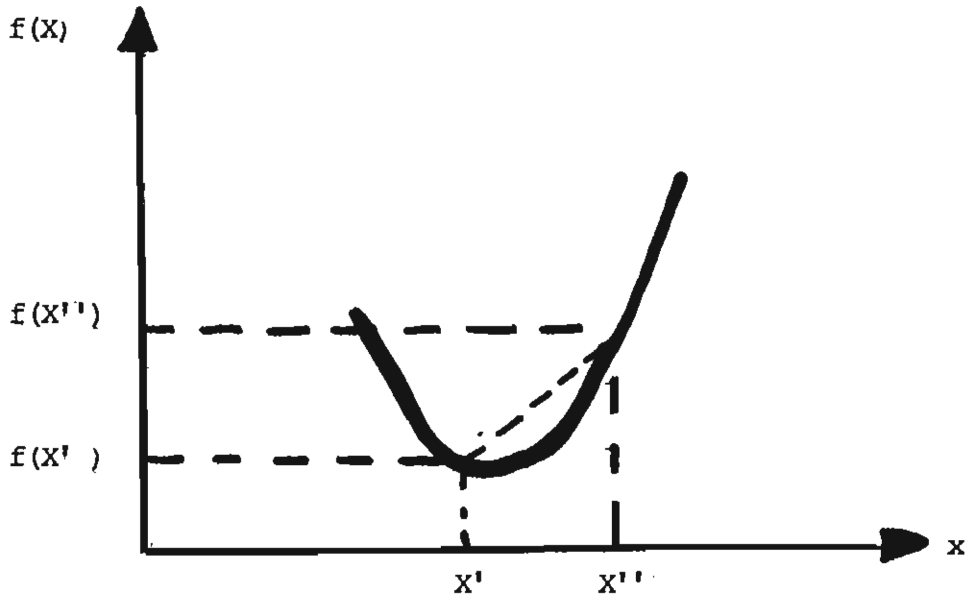


Figura 4.2 Representación gráfica de una función convexa.

Observemos en la Figura 4.2 que la desigualdad, en la definición de función convexa, indica que el segmento de recta que une a los puntos de coordenadas (X', f(X')) y (X'' , f(X'')) está totalmente contenido dentro de la gráfica de la función f(X), y f(X) será convexa si su concavidad es hacia arriba. Esto es, si f(X) posee segunda derivada en todas partes, entonces f(X) será convexa si y sólo si $\frac{d^2 f(X)}{dX^2} \geq 0$ para todos los valores de X en los cuales f(X) está definido. Similarmente, f(X) es estrictamente convexa cuando - $\frac{d^2 f(X)}{dX^2} > 0$

Como es fácil observar de lo anterior, lo "contrario" de una función convexa es una función cóncava. Formalmente f es una función cóncava si -f es una función convexa.

En base a los supuestos hechos de concavidad y convexidad, podemos garantizar que los máximos o mínimos son globales.

En el ejemplo referente a la figura 4.1 podemos decir que x* será un mínimo local si f(x) es estrictamente convexa en una vecindad de x*. Similarmente, x* será un máximo local si f(x) es estrictamente cóncava en un una vecindad de x*. Esto es, podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

i. Mínimo

Condición necesaria: $\frac{df(x)}{dx} = 0$ para $x = x^*$.

Condición suficiente: $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ para $x = x^*$.

ii. Máximo

Condición necesaria: $\frac{df(x)}{dx} = 0$ para $x = x^*$.

Condición suficiente: $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ para $x = x^*$.

Si $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$ en $x = x^*$, el problema de encontrar el máximo o el mínimo de la función no estará aún resuelto ya que x* puede ser un punto de inflexión y será necesario examinar derivadas de orden superior para poder determinar el máximo o el mínimo.

Refiriéndonos al caso de la figura 4.1, para encontrar el mínimo global, esto es, encontrar x* tal que $f(x^*) \leq f(x) \forall x$, será necesario comparar los mínimos locales e identificar aquel que proporcione el mínimo valor de f(x). En forma análoga encontraríamos el máximo global, esto es, compararíamos los máximos locales i identificaríamos aquel que proporcione el máximo valor de f(x).

El análisis para una función irrestricta de varias variables $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es similar, esto es:

Condición para un mínimo o un máximo:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i} = 0 \text{ en } (x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*),\ i=1,\ldots,n.$$

Condición suficiente para un mínimo:

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i^2} > 0 \text{ en } (x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*),\ i=1,\ldots,n.$$

Condición suficiente para un máximo:

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i^2} < 0 \text{ en } (x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*),\ i=1,2,\ldots,n$$

También será similar al caso de una función irrestricta de una sola variable la localización del mínimo y del máximo globales.

Consideremos ahora el caso de encontrar el mínimo o el máximo de una función de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, esto es:

$$f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$$

sujeta a

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) &= b_1 \\ g_2(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) &= b_2 \\ &\ \,\vdots \\ g_m(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) &= b_m \end{aligned}$$

donde $m < n$.

Un procedimiento clásico para solucionar problemas de este tipo es el método de Lagrange el cual consiste en utilizar las propiedades de cálculo diferencial para obtener el óptimo en ciertas clases de problemas de programación matemática.

La utilidad del método de Lagrange no radica tanto en su facilidad de manejo, sino en la información adicional que proporciona, la cual es de mucha utilidad para interpretar el problema desde el punto de vista económico.

El problema de obtener el óptimo de una función, de acuerdo a un conjunto de restricciones, se transforma mediante el método de Lagrange, en la obtención del óptimo de una función sin restricciones, denominada la Expresión de Lagrange.

El teorema de Kuhn - Tucker demuestra que bajo determinadas condiciones, los valores de las variables que identifican el punto máximo de la función objetivo original, de acuerdo con un conjunto de restricciones también identifican el punto máximo de la Expresión de Lagrange correspondiente. Supongamos que el problema original es:

Maximizar $z = f(x)$

sujeta a

$g_i(x) > b$ $\quad i=1,\ldots,m$

$x_j \geq 0$ $\quad j = 1,\ldots,n$ (esta condición puede no ser necesaria).

El procedimiento para definir la expresión de Lagrange será:

i. Para obtener un máximo, todas las restricciones se expresan en la forma $g_i \geq 0$.(Para obtener un mínimo, $g_i \leq 0$).

ii. Cada expresión g_i se multiplica por un parámetro (multiplicador de Lagrange) λ_i y se suma a la función objetivo. Por lo cual el problema modificado, empleando la Expresión de Lagrange será:

$$\text{Maximizar} \quad L(x,\Lambda) = f(x) + \Lambda(b-g(x))$$

$$x \geq 0, \quad \Lambda \geq 0 \quad \text{(pueden no ser necesarias).}$$

donde

$$x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

$$b^T = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

$$g(\cdot)^T = (g_1(\cdot), g_2(\cdot), \ldots, g_m(\cdot))$$

y en su forma desarrollada el problema quedará:

$$\text{Maximizar} \quad L(x_1, x_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, \ldots, x_n))$$

Las condiciones que caracterizan a un máximo o un mínimo de L y por lo tanto de f son:

i. <u>Condiciones de primer orden (necesarias).</u>

Las derivadas parciales de L con respecto a las m+n variables independientes $(x\ ,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ son iguales a cero, esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \; j=1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \; i=1,\ldots,m$$

A partir de la expresión de Lagrange, en notación vectorial, las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x^*,\Lambda^*) = \frac{\partial}{\partial x} f(x^*) = \frac{\partial}{\partial x} f(x^*) - \Lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} L(x^*,\Lambda^*) = b - g(x^*) = 0$$

es decir que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} g(x^*) \qquad j=1,\ldots,n$$

$$b_i = g_i(x^*) \qquad i=1,\ldots,m$$

La solución a este sistema de (n+m) ecuaciones con (m+n) incognitas conduce a un punto crítico de $L(x,\Lambda)$ y por lo tanto, a un punto crítico de $f(x)$.

Cuando el punto crítico es un máximo o un mínimo, las primeras n condiciones indican que en el óptimo, el gradiente de la función objetivo es una combinación ponderada de los gradientes de las restricciones. Los coeficientes de ponderación son precisamente los multiplicadores de Lagrange. Las últimas m condiciones son las restricciones originales y determinan que la solución óptima x^* pertenece al conjunto de soluciones factibles, esto es, que x^* satisface las m restricciones.

ii. Condiciones de segundo orden (suficientes).

La matriz Hessiana de la expresión de Lagrange, como la de cualquier otra función, está constituida por las segundas derivadas de sus m+n variables, ordenadas secuencialmente como sigue:

$$HL(x,\Lambda)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_m} \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_m} \\
 & \vdots & & & & & \vdots & \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_m} \\
\hdashline
\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_m} \\
 & \vdots & & & & & \vdots & \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m^2}
\end{array}\right]$$

Se obtiene de esta manera, una matriz cuadrada de m+n renglones y columnas, que además es simétrica (debido a la hipótesis de continuidad y diferenciabilidad de las funciones).Podemos observar que el menor principal de orden n consiste en la matriz Hessiana de L, cuando Λ se considera constante, es decir, cuando L es interpretada como función de x únicamente. Por esta razón, la Hessiana completa de L se conoce como la "Hessiana limitada".

Observando que L es una función lineal de las λ_i,(i=1,...,), podemos concluir que la submatriz inferior derecha de orden m es una matriz nula. Además recordando que la derivada parcial de primer orden de L con respecto a λ_i(i=1,...,m) es precisamente la restricción i-ésima, tenemos entonces que los elementos de las dos submatrices restantes, contienen las derivadas de cada restricción g_i $(i=1,\ldots,m)$ con respecto a cada variable x_j, $j=1,\ldots,n$. Es decir

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \ \forall i,j.$$

Esta expresión corresponde al Jacobiano de las funciones $g_i(x)$, que se encuentra en su forma directa en la submatriz inferior izquierda de dimensión $n\times m$. En forma compacta, la Hessiana limitada se expresa:

$$HL(x,\Lambda) = \begin{bmatrix} HL(x) & J^T g(x) \\ Jg(x) & 0 \end{bmatrix}$$

Intercambiando el orden de renglones y columnas para obtener como submatriz superior izquierda, una matriz nula de orden n y como submatriz derecha la Hessiana de L cuando λ es constante, se obtiene:

$$HL(x,\Lambda) = \begin{bmatrix} 0 & Jg(x) \\ J^T g(x) & HL(x) \end{bmatrix}$$

Nota: Se han intercambiado en total $2\times m\times n$ renglones y columnas por lo cual el signo de la Hessiana limitada se preserva.

La expresión anterior está en función de las variables x_j, $(j=1,\ldots,n)$ del problema original, unicamente.

Se puede demostrar que cuando $m < n$, las condiciones de segundo orden están dadas por el signo de los $n-m$ determinantes de los menores de orden $m+1$ a n, definidos como sigue:

H_{m+k} es el menor que contiene los primeros $2m+k$ renglones y columnas, es decir, que el último elemento de la diagonal principal es

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_{m+k}} .$$

Para un máximo las condiciones de suficiencia son:

Signo det (H_{m+k}) = signo $(-1)^{m+k}$ $\forall$ $k = 1,2,\ldots,n-m$.

Cuando se desea obtener un máximo de una función L de varias variables sin restricciones, tal y como es nuestro caso, para que las condiciones del primer orden identifiquen un punto máximo, se requiere que L sea cóncava en la vecindad de tal punto (x^*,Λ^*). Esto se cumple si la matriz Hessiana de $L(x^*\Lambda^*)$ es <u>definida negativa,</u> es decir

$$(\Delta x,\Delta L)^T\ HL(x^*,L^*)\ (\Delta x,\Delta L) > 0\ \forall\ (x^*,\Lambda^*) \neq 0.$$

Análogamente, un mínimo se caracteriza cuando la matriz de HL es <u>definida positiva,</u> esto es

$$(\Delta x,\Delta L)^T\ HL(x^*,L^*)\ (\Delta x,\ \Delta L) > 0\ \forall\ (x^*,\Lambda^*) \neq 0.$$

Y en este caso las condiciones de suficiencia son:

signo det (H_{m+k}) = signo $(-1)^{m+k}$ $\forall$ $k = 1,2,\ldots,n-m$.

Por último daremos una interpretación de las condiciones de suficiencia o de segundo orden.

i. Las restricciones definen una región convexa de soluciones factibles .

ii. Para obtener un mínimo (máximo) local, L debe ser convexa (cóncava) en la vecindad del punto considerado.

iii. Para obtener un mínimo (máximo) global, las propiedades de convexidad (concavidad) de L deben ser válidas en toda la región de soluciones factibles.

Ejemplo 4.1. Obtener el **máximo** de la función

$$z = x_1 x_2 + 2x_1$$

sujeta a

$$4x_1 + 2x_2 = 60$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Función de Lagrange:

$$L(x,\Lambda) = x_1\, x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

Condiciones de primer orden (necesarias):

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \dfrac{x_2 + 2}{4} \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{x_1}{2} \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{60 - 2x_2}{4}
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} x_1 = 8 \\ x_2 = 14 \\ \lambda = 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = (8,14)^T$$

$$\Rightarrow (x^*; \Lambda^*) = (8,14;4)$$

$$\Lambda^* = \lambda^* = 4$$

Condiciones de segundo orden (suficientes):

$$HL=\left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} \\ \hline \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ \hline -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$HL=\left[\begin{array}{c|cc} 0 & -4 & -2 \\ \hline -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Por otro lado, tenemos que es este caso m=1 y n=2.

Condiciones de segundo orden (suficiencia).

Signo det H_{m+k}=signo $(-1)^{m+k}$ k varía de 1 hasta n-m pero n-m=2-1 => k=1. El menor H_{m+k} incluye los primeros 2m+k renglones y columnas, esto es, $H_{1+1}=H_2$

det H_2=det HL=0+8+8=16

signo $(-1)^{m+k}$=signo $(-1)^2 > 0$ =>

$x^*=(8,14)^T$ es un máximo de f(x).

4.2. Algunos conceptos de Programación Lineal.

La programación lineal se ha desarrollado a partir de los últimos años, debido a la necesidad de encontrar ~~métodos~~ métodos y técnicas más eficaces, a la aparición de computadoras de alta velocidad y a la incorporación al estudio de la programación lineal de un gran número de científicos. En 1941-1942 aparece por primera vez un problema de programación lineal en los escritos, el problema del transporte, el cual fue planteado en forma independiente por Kantoróvich, Hichcol y Koopmans. En 1945 Stigler se planteaba otro problema de programación lineal, el problema de la dieta. En 1947, G.B. Dantzing formuló en términos matemáticos precisos "El Problema General de Programación Lineal" y en 1949 da a conocer el método simplex el cual resuelve este tipo de problemas. Es necesario hacer notar que el método simplex conduce a varios algoritmos generales (los algoritmos primal, dual, primal dual, de descomposición), los cuales pueden aplicarse bajo varias formas (ordinaria, revisada, lexicográfica) y los cálculos pueden así mismo presentarse en más de un formato distinto. Podemos mencionar a otros investigadores (matemáticos y economistas) los cuales aislados o constituyendo grupos han contribuido al desarrollo de las diferentes ramas de la programación lineal, siendo ellos W. Orchard-Hays, L.R.Ford, D.R. Fulkerson, D.Gale, J. Von Newman, A.W. Tucker, H.W. Kuhn, R. Gomori, P. Wolfe, etc. Es interesante hacer notar que a pesar del gran auge alcanzado por la programación lineal, sigue esta desarrollándose. A mediados de la década de los setentas apareció un nuevo método de descomposición a base de factorizar la base que computocionalmente resulta mucho más eficiente que el método de descomposición tradicional de Datzing y Wolfe.

Más aún, en 1979 un matemático soviético de 27 años de edad, L.G. Khatchian establece un nuevo método de solución de problemas de programación matemática, incluida la programación lineal , el cual se basa en la teoría de desigualdades y permite la solución de problemas, que con el método simplex no convergen y con el método de Katchian convergen en cuestión de unas cuantas horas, haciendo uso de la computadora. En teoría de redes, en el problema de redes estocásticas aún queda mucho por hacer.

Uno de los aspectos más importantes de la programación lineal es el relacionado con sus aplicaciones a diferentes ramas de la ciencia. En general, las aplicaciones resultan de proponer un modelo de programación lineal a las situaciones problemáticas que se analizan. En algunos casos, la naturaleza misma del problema establece en forma sencilla el correspondiente modelo lineal. Sin embargo, existen otras en donde es necesario reestructurar el planteamiento o modelo original, con el propósito de obtener una estructura lineal. La ventaja de este último enfoque es que podemos usar la exhaustivamente investigada teoría de programación lineal en el análisis del modelo modificado.

Una forma particular, a la que cualquier problema lineal puede ser transformado, es la denominada <u>forma estándar</u>, esto es:

Minimizar $z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+{}_{2n}x_n=b_2 \qquad\qquad (P)\\
&\quad\vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\\
&x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \ldots ; x_n \geq
\end{aligned}
$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i y c_j son números reales y x_j son las variables a determinar donde $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$.

Una forma compacta y usual de escribir (P) es:

Minimizar $z = cx$

sujeta a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde A es una matriz mxn; c, un vector hilera de n componentes; b, un vector columna de m componentes y x, un vector columna de n variables.

Existen otras formas de representar un problema de programación lineal. Así, la función z puede maximizarse o minimizarse y los signos de igualdad en cada una de las restricciones pueden ser mayor o igual ($\geq$) o de menor o igual ($\leq$), así mismo algunos componentes del vector x pueden no estar sujetos a la condición de no negatividad. Estas diferentes formas así como la manera de expresar cualquier problema en la forma estándar lo trataremos con detalle en la sección 4.6 de este capítulo.

4.2.1. Función objetivo, actividades, recursos y restricciones.

Los modelos de programación lineal frecuentemente representan problemas de asignación en los cuales recursos limitados son asignados a un número de actividades. En términos de la formulación del problema de programación lineal (P) hecho en la sección 4.2, los coeficientes c_j, a_{ij} y b_i $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$ se pueden interpretar físicamente. Si b_i es la cantidad disponible del recurso i, entonces a_{ij} es la cantidad de recurso i que debe ser asignada a cada unidad de actividad j. El valor por unidad de la actividad

j es c_j.

Siendo más rigorosos, podemos decir que los b_i $(i=1,\ldots,m)$ representan las demandas del recurso i conviniendo que una demanda positiva $(b_i > 0)$,es efectivamente, una demanda y que una demanda negativa $(b_i < 0)$ representa una disponibilidad igual a $-b_i$.

Los $c_j (j=1,\ldots,n)$ son los costos sujetos a cada una de las actividades j puestas en un estado de referencia fijo; un costo positivo $(c_j>0)$ es realmente un costo, y un costo negativo $(c_j<0)$ representa un beneficio igual a $-c_j$.

Los a_{ij} $(i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n)$ representan las proporciones en las cuales la actividad j, pone en acción los m recursos i. Para que las notaciones anteriores puedan expresar indiferentemente que la actividad j consume o produce el recurso i, se obliga a considerar las a_{ij} como cantidades algebráicas: a_{ij} es positiva si j produce i, negativa si j consume i.

Las x_j $(j=1,\ldots,n)$ son las únicas incógnitas del problema y significan "las intensidades" de las actividades j consideradas en el estado actual respecto a las intensidades que estas actividades tienen en el estado de referencia elegido.

Todos los conceptos hasta aquí expuestos acerca de la naturaleza de b_i, c_j, a_{ij} y x_j están referidos al modelo lineal (P) de la sección 4.2 el cual es de minimización.

La estructura matemática del sistema anterior pone en evidencia las hipótesis que deben verificarse necesariamente pa ra que este sistema represente el funcionamiento económico de una empresa o institución.

i.- Cada actividad j se representa mediante un vector $x_j a_j$, donde a_j (j=1, . . . ,n) son vectores columna con componentes $a_{1j}, 1_{2j}, . . . , a_{mj}$, es decir, mediante el producto de un vector constante a_j por un escalar variable x_j (de primer grado). De otra manera, las cantidades a_{ij}, x_j de los m recursos i - puestos en acción por la actividad j, en un estado cualquiera, son directamente proporcionales a las cantidades a_{ij} de estos recursos puestos en acción en el estado de referencia. La intensidad de la actividad j puede representarse por el único parámetro lineal x_j, que se denominará el <u>nivel de la actividad j.</u> Un conjunto de valores x_j define el <u>programa</u> de la empresa o institución considerada. Esto expresa que no existen sustituciones posibles entre los distintos bienes que intervienen en una actividad, y por otra parte, que el <u>rendimiento es constante</u>.

ii.- La producción total neta (algebraica) del recurso i, representada por el primer miembro de la restricción i-ésima, esto es, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, es la suma de las producciones de cada actividad productiva de este recurso, disminuida en la suma de los consumos de cada actividad consumido a. Existe pues adición (algebraica) de las producciones y e os consumos. Esto expresa que no existen economías ni pér ideas que resulten de la puesta en acción simultánea de varias actividades.

iii.- El costo total (algebraico) z es la suma de los costos (algebraicos) $c_j x_j$ de cada actividad; el costo c_j $_j$ de cada actividad es directamente proporcional al nivel x_j de esta actividad; c_j es pues, el costo unitario, constante de la actividad j. La función Z, la cual por supuesto es lineal, se denomina <u>función objetivo</u>.

iv.- En la formulación anterior, el nivel de una actividad puede tomar cualquier valor positivo en un intervalo: no existen <u>indivisibilidades</u>. Esta hipótesis se puede suprimir en ocasiones, gracias a considerar problemas lineales en números enteros (programación entera).

Resumiento, podemos decir que la función objetivo es aquella que queremos optimizar (minimizar o maximizar) y la cual es lineal. Las b_i $(i=1, \ldots, m)$ representan el nivel de actividad j y las a_{ij} son la cantidad de producto i generado por una unidad de actividad j, o la cantidad de insumo i utilizado por una unidad de actividad j, donde la actividad j estará representada por $a_{ij}x_j$. El valor por unidad de la actividad j es c_j.

4.3. <u>Principales aplicaciones de la programación lineal</u>.

Vamos a describir brevemente los campos de aplicación de la programación lineal así como los principales tipos de problemas en que se aplica esta.

4.3.1. <u>Campos de aplicación</u>.

El número y variedad de usos que se han hecho de la programación lineal en el transcurso de los últimos años son inmensos y se han descubierto los campos de aplicación de manera casi continua.
Camos a citar los principales.

a)- El campo de aplicaciones mil tares, en el que los estudios son probablemente más numerosos aunque no lo parezca, debido al se creto que rodea a la mayor parte de los resultados.

b)- El campo de las matemáticas puras y aplicadas donde la programación lineal ha permitido obtener resultados teóricos o métodos de cálculo en la teoría de gráficas, en análisis combinatorios, solución de algunos "juegos", inversión de matrices, etc.

c)- El campo de la economía (teórica o aplicada) y especialmente en la economía de la empresa. En este campo, las aplicaciones tocan a numerosos sectores, entre los cuales podemos mencionar:

i.- La industria química, en particular la industria del petróleo en todos los estados (investigación, exploración, producción, refinado, distribución, etc.).

ii.- La industrias alimenticias.

iii.- La generación y distribución de energía eléctrica.

iv.- Las minas (carbón o metales).

v.- La industria del papel.

vi.- Los transportes (aéreos, marítimos, ferroviarios o carreteros).

vii.- La agricultura.

viii.- La pesca.

ix.- La industria de la construcción.

4.3.2. Tipos de problemas.

Los tipos de problemas son también muy variados siendo imposible reseñar la lista completa. Citaremos (los campos de aplicación indicados entre paréntesis no son los únicos) los problemas siguientes:

i.- Las mezclas (industria del petróleo, nutrición humana y de animales.

ii.- La distribución de las fabricaciones (industria química, mecánica y agricultura).

iii.- La afectación del personal.

iv.- La distribución y el transporte (industria alimenticia, del petróleo).

v.- Almacenaje.

vi.- Los planes de producción (o escalonamiento de las fabricaciones).

vii.- Los problemas compuestos de inversión, producción, almacenaje, distribución (energía eléctrica).

viii.- Los estudios de circulación (planes de vuelo, sincronización óptima de semáforos).

ix.- Los estudios de comunicaciones internas.

x.- Las relaciones interindustriales (matriz de Leontiev).

xi.- El problema del viajero.

4.4 Modelos de programación lineal.

A continuación vamos a ver la construcción de modelos lineales para los principales problemas que podemos resolver por medio de la programación lineal. Obviamente si el modelo lineal no representa fielmente la problemática a la cual nos enfrentamos, la solución que encontremos no resolverá aquélla. De aquí la importancia que tiene el planteamiento de problemas lineales.

4.4.1- Problema de la dieta.

Consideremos el problema de determinación del menú más económico que satisfaga las necesidades esenciales de nutrición. Supongamos que los alimentos disponibles, su costo, el valor nutricional y los requerimientos nutricionales diarios son;

Núm.	Alimento	Costo ($)	Calcio (100 mgs)	Hierro (1mgr.)
1	Leche (Lt.)	4.00	72	1
2	Carne (Kg.)	60.00	0	26
3	Huevo (Kg.)	12.00	3	10
4	Pan (Pza.)	2.00	1	2
Requirimiento diario:			10	12

Formular el correspondiente modelo de programación lineal.

Solución:

Variable de decisión: Sea x_i $(i=1,\ldots,4)$ la cantidad de alimento i que se compra.

Objetivo: Minimizar el costo del menú tal que satisfaga las necesidades nutricionales.

Y el modelo lineal correspondiente a este problema es:

Minimizar $\quad z=4x_1 + 60x_2 + 12x_3 + 2x_4$

sujeta a

a) Restricciones de requerimientos nutricionales:

$$12x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 \geq 10 \text{ calcio}$$

$$x_1 + 26x_2 + 10x_3 + 2x_4 \geq 12 \text{ hierro}$$

b) Restricción de no negatividad:

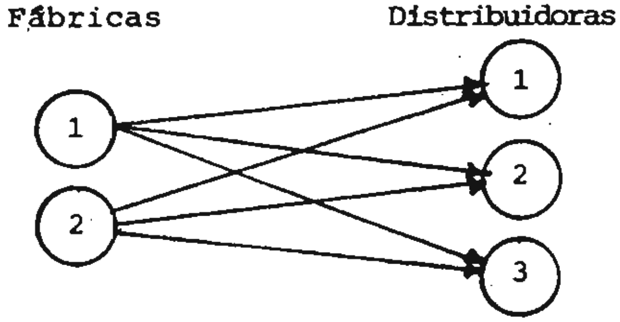
$$x_1 \geq 0, \quad i=1,\ldots,4.$$

4.4.2. Problema del transporte.

La compañía de plásticos PLASTICOS DE ORIENTE, S.A. tiene dos fábricas y tres distribuidoras. Las fábricas 1 y 2 pueden producir seis y nueve toneladas de plástico por mes, respectivamente.

Las distribuidoras 1,2 y 3 venden tres, seis y cuatro toneladas de plástico por mes, respectivamente. El costo de envío de cada tonelada de plásticos de una fábrica i a una distribuidora j se proporciona en la siguiente tabla.

i \ j	1	2	3
1	2	1	3
2	1	2	4



La compañía de plásticos desea determinar el plan para el envío de plásticos de las fábricas a las distribuidoras al costo mínimo. Formular el correspondiente modelo lineal.

Solución:

Variable de decisión: Sea x_{ij} (1=1,2; j=1,2,3) el número de toneladas de plástico enviadas de la fábrica i a la distribuidora j.

Objetivo: Minimizar el costo de transporte de las fábricas a las distribuidoras.

Entonces el modelo lineal correspondiente es

$$\text{Minimizar } z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23}$$

sujeta a

a. Restricciones de capacidad de producción.

$$\begin{array}{lr} x_{11} + x_{12} + x_{13} \qquad\qquad\qquad & \leq 6 \\ \qquad\qquad\qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} & \leq 9 \end{array}$$

b. Restricciones de capacidad de ventas

$$\begin{array}{llllllr} x_{11} & & & x_{21} & & & \geq 3 \\ & x_{12} & & & x_{22} & & \geq 6 \\ & & x_{13} & & & x_{23} & \geq 4 \end{array}$$

c. Restricción de no negatividad:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,; \; j=1,2,3.$$

4.4.3. Problema de producción.

La fábrica de pinturas ATLANTICO recibe un contrato para satisfacer las siguientes ventas trimestrales de pintura.

No. del trimestre	1	2	3	4
Litros de pintura (10^3)	90	160	490	360

La fábrica puede producir 300,000 lts. de pintura por trimestre, excepto en el trimestre número dos en el cual, debido a vacaciones, reduce su capacidad de producción a 250,000 lts. El costo de producción de cada litro de pintura es $1.50 y se vende a $2.00 . La fábrica puede almacenar la pintura de un trimestre a otro a un costo - de $0.20/lt. Para cumplir el contrato la compañía tiene la opción de comprar pintura de un competidor a $2.00/lt. si es necesario.

La gerencia de la fábrica desea determinar un plan de producción y compra de pintura al competidor que satisfaga los requerimientos del contrato a costo mínimo.

Formular el correspondiente modelo lineal.

Solución:

Variables de decisión. Sean

x_i la producción de pintura en el trimestre i. (lt.x10^3).

w_i la cantidad de pintura comprada al competidor en el trimestre i (lt.x10^3).

y_i el nivel de inventario a final del trimestre i (lt.x10^3).

Objetivo: Minimizar los costos de producción de la pintura necesaria para satisfacer el pedido dado.

Entonces: el planteamiento de este problema consiste en

$$\text{Minimizar} \quad Z = 1.5 \sum_{j=1}^{4} x_j + 2 \sum_{j=1}^{4} w_j + 0.2 \sum_{j=1}^{3} y_j$$

Sujeta a

a. Restricciones por balance de inventario.

$$x_1 + w_1 - y_1 = 90$$
$$y_1 + x_2 + w_2 - y_2 = 160$$
$$y_2 + x_3 + w_4 - y_3 = 490$$
$$y_3 + x_4 + w_4 = 360$$

b. Restricciones debidas a la capacidad de producción.

$$x_1 \leq 300$$
$$x_2 \leq 250$$
$$x_3 \leq 300$$
$$x_4 \leq 300$$

c. Restricciones de no negatividad.

$$x_i \geq 0; \; y_i \geq 0; \; w_i \geq 0; \; i=1,\ldots, 4; \; i=1,2,3.$$

4.4.4. Problema de Planeación.

La región que se localiza en Yautepec, Mor. comprende una extensión de 3135 hectáreas abiertas al cultivo y sirven como abastecimiento de materia prima al ingenio azucarero Oacalco.

Los agricultores son en total 1,800 ejidatarios y debido a las siguientes razones, la mayoría emplea sus recursos para la producción de tres variedades distintas de caña de azúcar.

i. La reglamentación jurídica respecto a las zonas agrícolas cercanas a los ingenios azucareros.

ii. El ingenio otorga créditos a los agricultores siempre y cuando produzcan caña de azúcar.

iii. El ingenio compra la producción total de la caña de azúcar.

El tener los agricultores asegurada la venta total de su cosecha lo suponen ventajoso, sin embargo el ingenio tiene una capacidad de molienda anual limitada a 500,000 toneladas y es posible que una sobreproducción del campo, ocasione problemas para su posible comercialización.

Los agricultores tienen axperiencia en la producción de frijol, jitomate y arroz, ya que también han sido sembrados pero con fines de autoconsumo más que de mercado, aún cuando existen precios de garantía para estos productos.

La cantidad de agua disponible por mes es a_i=2,800 m^3, i=1,...,12. Por otra parte, la cantidad de agua mensual que utiliza cada tipo de cultivo por hectárea es S_{ij}, i=1,...,12; j=1,...,6 viene dada en la siguiente tabla.

M^3/ha.	Caña 1	Caña 2	Caña 3	Jitomate	Frijol	Arroz
Mes 1	.2637	.2637	.2637	.5274	.3956	2.56
Mes 2				.5274	.3956	2.56
Mes 3	.2637		.2637	1.548		2.56
Mes 4	.2637	.2637	.2637	.5274		2.56
Mes 5	.2637	.2637	.2637	.5274		2.56
Mes 6				.5274	.7912	2.2
Mes 7				.5274	.7912	2.52
Mes 8	.5274	.5274	.5274	.5274		2.6
Mes 9	.2673	.2673	.2673	.5274		2.56
Mes 10	.2673	.2673	.2673	.5274		2.8
Mes 11	.2673		.5274			2.72
Mes 12						

Los rendimientos que se obtienen al sembrar caña tipo 1, 2,3, jitomate, frijol y arroz son 162, 161, 133, 5.4, 20.4 y 31.7 Tons./ha., respectivamente.

Los costos de producción y precios de venta están dados en la siguiente tabla.

	Caña 1	Caña 2	Caña 3	Jitomate	Frijol	Arroz
Costo \$/ha.	83	75	80	700	500	600
Precio \$/ton.	125	128	120	1,000	1,200	1,100

El gobierno del estado desea saber el patrón de producción que optimiza la ganancia de la región durante un año, si para todos los cultivos la cosecha se tiene que esperar un año.

Formular el correspondiente modelo lineal.

Solución.

Variables de decisión: sea

x_i, $i=1, \ldots, 6$ el número de hectáreas a sembrar de cada uno de los cultivos.

Además tenemos:

p_i, $i=1, \ldots, 6$ el precio de venta de cada uno de los cultivos.

c_i, $i=1, \ldots, 6$ el costo por hectárea de cada uno de los cultivos.

R_i, $i=1, \ldots, 6$ el rendimiento por hectárea de cada uno de los cultivos.

Entonces, el costo de producir x_i hectáreas del cultivo i está dado por x_i, c_i, $i=1,\ldots,6$.

Y el ingreso que se tendrá por cultivar x_i hectáreas del cultivo i es:

$R_i \cdot p_i x_i$, $i=1, \ldots, 6$.

Objetivo: Maximizar los ingresos de los ejidatarios.

Entonces, la función objetivo será:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{6} x_i \, (R_i p_i - c_i), \text{ esto es:}$$

Maximizar $z=20167x_1+20533x_2+15880x_3+4700x_4+23980x_5+34270x_6$

Sujeta a

a. Restricciones de disponibilidad de tierra.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3135$$

b. Restricción de capacidad de molienda

$$162x_1+161x_2+133x_3 \leq 500\ 000$$

c. Restricciones por disponibilidad de agua.

$$0.2637x_1+0.2637x_2+0.2637x_3+0.5274x_4+0.3556x_5+2.56x_6 \leq 2800$$

$$0.5274x_4+0.3956x_5+2.56x_6 \leq 2800$$

$$0.2637x_1+0.2637x_3+1.548\ x_4+2.56x_6 \leq 2800$$

$$0.2637x_1+0.2637x_2+0.2637x_3+0.5274x_4+2.56x_6 \leq 2800$$

$$0.2637x_1+0.2637x_2+0.2637x_3+0.5274x_4+2.56x_6 \leq 2800$$

$$0.5274x_4+0.7912x_5+2.2\ x_6 \leq 2800$$

$$0.5274x_4+0.7912x_5+2.52x_6 \leq 2800$$

$$0.5274x_1+0.5274x_2+0.5274x_3+0.5274x_4+2.6\ x_6 \leq 2800$$

$$0.2637x_2+0.2673x_2+0.2673x_3+0.5274x_4+2.56x_6 \leq 2800$$

$$0.2673x_1+0.2673x_2+0.2673x_3+0.5274x_4+2.8\ x_6 \leq 2800$$

$$0.2673x_1+0.5274x_4+2.72x_6 \leq 2800$$

d. Restricción de no negatividad.

$$x_i \geq 0;\ i=1,\ldots,6.$$

4.4.5. Problema de inversiones.

Un inversionista dispone de \$4 000 000.00 y desea establecer un plan de inversiones que maximice la cantidad de dinero que puede acumular al final de los próximos cinco años.

El inversionista dispone de varias opciones o actividades financieras. En la actividad A, cada peso invertido al comienzo de un año produce \$1.50 (una ganancia de \$0.50) dos años más tarde (en el momento preciso para una reinversión).En la actividad B c da peso invertido al principio de un año le produce \$1.80 tres años después. Se tienen además dos actividades financieras C y D que estarán disponibles solamente una vez en el futuro. Cada peso invertido en C, al comienzo del segundo año, produce \$2.25 cuatro años más tarde. Finalmente en la actividad D, cada peso invertido al principio del quinto año produce \$1.30 un año más tarde.

Formular el correspondiente modelo lineal.

Solución:

Variables de decición: sean

x_{ij} la cantidad de dinero invertido al principio del año i, $i=1, \ldots, 5$ en la actividad j, j=A, B, C, D.

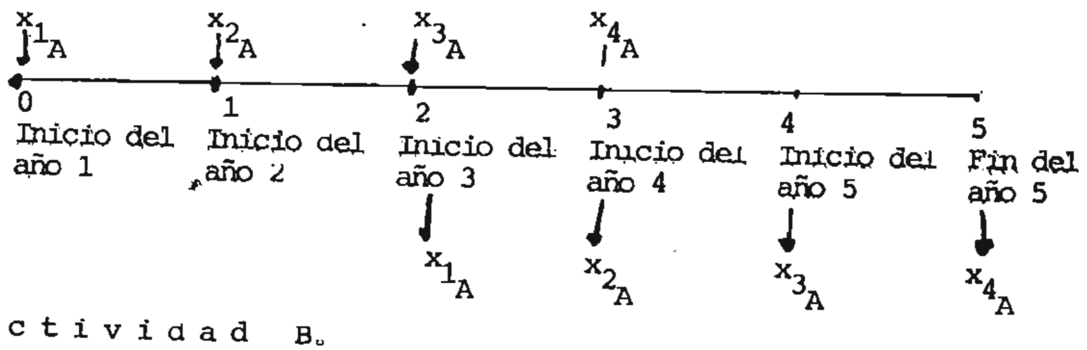
w_i la cantidad de dinero que no se invierte al principio del año i,

$i=1, \ldots, 5$.

Objetivo: maximizar las utilidades, proporcionadas por la inversión del capital disponible, al final del quinto año.

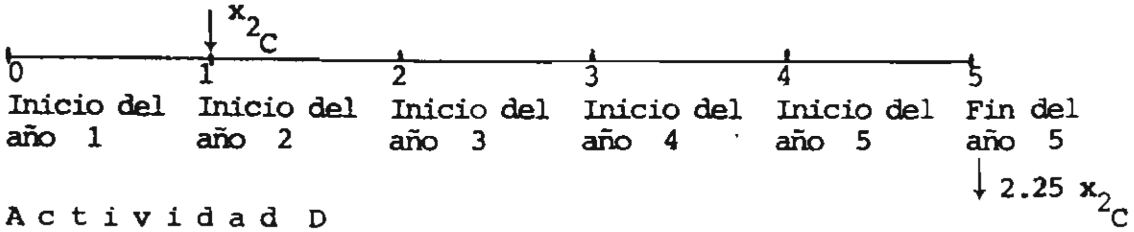
Podemos visualizar las cuatro opciones financieras de la siguiente manera:

A c t i v i d a d A.

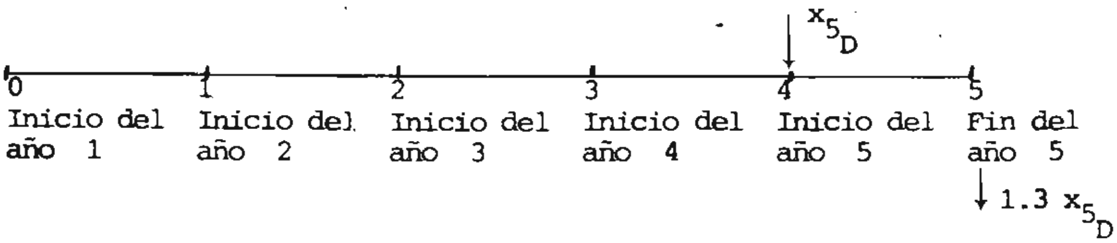


A c t i v i d a d B.

A c t i v i d a d C



A c t i v i d a d D



Como el objetivo es maximizar el dinero acumulado al final del quinto año, la función objetivo será:

$$\text{Maximizar} \quad z = 1.5x_4 \; + 1.8x_3 \; +2.25x_2 \; +1.30x_5$$

sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & + x_1 & & w_1 & & = 4\ 000\ 000 \\
x_2 & & x_2 + x_2 & + w_2 & & = w_1 \\
x_3 & & + x_3 & & +w_3 & = w_2 + 1.5x_2 \\
x_4 & & & & +w_4 & = w_3 + 1.5x_2 + 1.8x_1 \\
x_5 & & & & +w_5 & = w_4 + 1.5x_3 + 1.8x_2
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i=1,\ldots,5; \quad j=A, B, C, D$$

$$w_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,5$$

4.4.6. Problema de contratación.

La compañía aérea Aeronaves del Pacífico necesita determinar cuantas aeromozas contratar y adiestrar en los próximos seis meses. Las necesidades de la compañía expresadas como horas-vuelo-aeromoza son:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
8000	9000	7000	10000	9000	11000

En entrenamiento necesario para que una aeromoza dé servicio en un vuelo dura un mes, por lo que cada muchacha debe contratarse por lo menos un mes antes.

El entrenamiento necesita 100 horas de supervisión de aeromozas ya entrenadas, por lo que se dispone de 100 horas-vuelo-aeromoza menos, durante un mes por cada aeromoza en entrenamiento.

Cada aeromoza entrenada puede trabajar 150 horas en un mes y la compañía aérea tiene 60 aeromozas entrenadas al principio de enero.

Por razones sindicales, si el tiempo máximo disponible de las aeromozas entrenadas excede al requerido por la compañía en el mes (horas-vuelo y supervisión), estas trabajarán menos de 150 horas y no se despide a nadie. Sin embargo, en cada mes, aproximadamente el 10% de las aeromozas con experiencia dejan el trabajo por razones de matrimonio u otras. Además, en cada mes, 5% de las personas que se contratan (y terminan su entrenamiento) son rechazadas por varias razones.

Considerando los salarios y otros beneficios cada aeromoza adiestrada cuesta a la compañía mensualmente $20,000.00 y cada aeromoza en entrenamiento $10,000.00. La compañía aérea desea determinar el plan de contratación y adiestramiento de aeromozas a costo mínimo.

Formular el correspondiente modelo lineal.

Solución:

Variables de decisión: sean

x_t- el número de personas contratadas que principian su entrenamiento al inicio del mes t ,(t=1,...,5).

y_t- el número de aeromozas entrenadas al principio del mes t, (t=1,...,6).

D_t- el número de horas-vuelo-aeromozas necesarias en el mes t, (t=1,...,5).(ver tabla anterior).

Objetivo: Minimizar los costos de contratación y entrenamiento que satisfagan las necesidades de la compañía.

En este caso, la función objetivo será:

$$\text{Minimizar } z = 20{,}000 \sum_{t=1}^{6} y_t + 10{,}000 \sum_{t=1}^{5} x_t$$

sujeta a

a. Restricciones debidas a la disponibilidad de aeromozas:

$$y_{t+1} = 0.95x_t + 0.9y_t \qquad t=1,2,\ldots,5$$

$$y_1=60.$$

Y desarrollando estas restricciones obtenemos:

$$y_1 = 60$$
$$y_2 = 0.95x_1 + 0.9y_1$$
$$y_3 = 0.95x_2 + 0.9y_2$$
$$y_4 = 0.95x_3 + 0.9y_3$$
$$y_5 = 0.95x_4 + 0.9y_4$$
$$y_6 = 0.95x_5 + 0.9y_5$$

b. Restricciones de demanda de horas-vuelo:

$$150\, y_t \geq D_t + 100x_t, \quad t=1,\ldots,6$$

$$x_6 = 0.$$

Y desarrollando obtenemos:

$$150y_1 \geq 8000 + 100x_1 \qquad 150y_4 \geq 10000 + 100x_4$$
$$150y_2 \geq 9000 + 100x_2 \qquad 150y_5 \geq 9000 + 100x_5$$
$$150y_3 \geq 7000 + 100x_3 \qquad 150y_6 \geq 11000$$

C. Restricciones de no negatividad.

$X_t \geq 0 \quad ,t=1, \ldots , 5$

$Y_t \geq 0 \quad ,t=1, \ldots , 6$

4.4.7 Problema de contratación

Una compañía de productos químicos que labora las 24 horas del día tiene las siguientes necesidades de personal técnico y especializado.

Periodo	Hora del día	Personal Técnico	Personal Especializado
1	06-10	20	8
2	10-14	40	12
3	14-18	80	15
4	18-22	45	9
5	22-02	25	3
6	02-06	10	2

Observamos que el período 1 sigue el período 6. Se considera que cada persona en la compañía, labora 8 horas consecutivas.

En esta compañía el acuerdo sindical establece que en todo momento debe haber por lo menos tres veces el número de personal técnico que de personal especializado. La compañía desea determinar el mínimo número de personal técnico y especializado para satisfacer sus necesidades de trabajo.

Formular el correspondiente modelo de programación lineal.

Solución:

Variables de decisión: sean

X_t el número de personas técnicas que entran a trabajar en el período , $t = 1, \ldots , 6$

Y_t El número de personas especializadas que entran a trabajar en el período t, $t = 1,\dots, 6$

Objetivo: Minimizar el personal contratado que satisfaga las necesidades de la compañía.

Entonces, la función objetivo será:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{t=1}^{6} x_t + y_t$$

Sujeta a

a. Restricciones de personal técnico.

$$x_1 + x_6 \geq 20$$
$$x_2 + x_1 \geq 40$$
$$x_3 + x_2 \geq 80$$
$$x_4 + x_3 \geq 45$$
$$x_5 + x_4 \geq 25$$
$$x_6 + x_5 \geq 10$$

b. Restricciones de personal especializado.

$$y_1 + y_6 \geq 8$$
$$y_2 + y_1 \geq 12$$
$$y_3 + y_2 \geq 15$$
$$y_4 + y_3 \geq 9$$
$$y_5 + y_4 \geq 3$$
$$y_6 + y_5 \geq 2$$

c. Restricciones sindicales.

$$(x_1 + x_6) - 3(y_1 + y_6) \geq 0$$
$$(x_2 + x_1) - 3(y_2 + y_1) \geq 0$$
$$(x_3 + x_2) - 3(y_3 + y_2) \geq 0$$
$$(x_4 + x_3) - 3(y_4 + y_3) \geq 0$$
$$(x_5 + x_4) - 3(y_5 + y_4) \geq 0$$
$$(x_6 + x_5) - 3(y_6 + y_5) \geq 0$$

d. Restricciones de no negatividad.

$$x_t \geq 0; \quad y_t \_ 0; \quad t = 1, \ldots, 6$$

4.4.8. <u>Problema de cortes.</u>

La compañía CRISOL produce espejos de 2m. de ancho por 2.5m. de largo. Estos espejos son, en general, demasiado anchos o largos y deben ser cortados para satisfacer necesidades de los compradores en cada mes. En el próximo mes, específicamente, se tienen los siguientes pedidos.

Cliente	Tamaño del espejo	Número de espejos
1	2.00 M. x 1.50 M.	300
2	2.00 M. x 2.00 M.	200
3	1.00 M. x 1.00 M.	125
4	1.00 M. x 1.50 M.	100

El administrador de la compañía desea establecer un plan de determinar cuántos espejos estándar producir y cómo cortarlos para satisfacer los pedidos anteriores.

Formular un modelo de programación para este problema.

Solución.

Camos a obtener todas las combinaciones posibles de corte, así como sus respectivos desperdicios, ya que nuestro objetivo es minimizar los desperdicios.

Combinación	C o r t e s	Desperdicio
1	1 (2.00x1.50)	2.0
2	1 (2.00x1.50)+ 1 (1.00x1.50)	0.50
3	1 (2.00x1.50)+ 1 (1.00x1.00)	1.0
4	1 (2.00x1.50)+ 2 (1.00x1.00)	0.0
5	1 (2.00 x 2.00)	1.0
6	1 (1.00 x 1.00)	4.0
7	2 (1.00 x 1.00)	3.0
8	3 (1.00 x 1.00)	2.0
9	4 (1.00 x 1.00)	1.0
10	1 (1.00 x 1.00)+ 1(1.00x1.50)	2.50

Combinación	Cortes	Desperdicio
11	1 (1.00×1.00) + 2(1.00×1.50)	1.00
12	2 (1.00×1.00) + 1(1.00×1.50)	1.50
13	2 (1.00×1.00) + 2(1.00×1.50)	0.0
14	3 (1.00×1.00) + 1(1.00×1.50)	0.50
15	1 (1.00×1.50)	3.50
16	2 (1.00×1.50)	2.00
17	3 (1.00×1.50)	0.50

Entonces tenemos:

Variables de desición: Sea x_i el número de espejos cortados con la combinación i, i=1,...,17.

Objetivo: Minimizar desperdicios.

En el siguiente cuadro se muestran los pedidos o demanda que tiene la compañía y las combinaciones de la 1 a la 17 con las cuales se satisface el pedido.

Pedido \ Combinación.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	2	0	1	2	3	4	1	1	2	2	3	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	1	1	2	3
Desperdicio	2.0	0.5	1.0	0	1.0	4.0	3.0	2.0	1.0	2.5	1.0	1.5	0	0.5	3.5	2.0	0.5

Entonces, la función objetivo es:

$$\text{Minimizar} \quad z = 2x_1+0.5x_2+x_3+x_5+4x_6+3x_7+2x_8+x_9+2.5x_{10}+x_{11}+1.5x_{12}+ +0.5x_{14}3.5x_{15}+2x_{16}+0.5x_{17}$$

sujeta a

$$\begin{array}{llr}
x_1+x_2+x_3+x_4 & & \geq 300 \\
x_5 & & \geq 200 \\
x_3+2x_4 & +x_6+2x_7+3x_8+4x_9+x_{10}+x_{11}+2x_{12}+2x_{13}+3x_{14} & \geq 125 \\
x_2 & +x_{10}+2x_{11}+x_{12}+2x_{13}+x_{14}+x_{15}+2x_{16}+3x_{17} & \geq 100
\end{array}$$

$x_k \geq 0$; k=1,...,17.

4.4.9. Problema de mezclas.

Una fábrica de licores importa tres tipos de whisky: A, B y C. Los mezcla de acuerdo a sus recetas que especifican los porcentajes máximos y mínimos de los tipos A y C en cada mezcla como se muestra en la siguiente tabla.

Mezcla	Especificaciones	Precio por barril
Punto azul	No menos del 60% de A No más del 20% de C	$ 6.80
Punto rojo	No más del 60% de C No menos del 15% de A	$ 5.70
Punto negro	No más del 50% de C	$ 4.50

La disponibilidad de los tres grados de whisky y sus precio son:

Whisky	Cantidad máxima disponible en barrilles/día	Costo por barril
A	2,000	$ 7.00
B	2,500	$ 5.00
C	1,200	$ 4.00

La fábrica desea saber la política de compras que maximice sus utilidades.

Formular un modelo de programación lineal para este problema.

Solución.

Variables de decisión. Sean

x_k el número de barriles de whisky tipo k, k=A,B,C.

y_j el número de barriles de licor tipo j, j=A,R,N.

x_{kj} el número de barriles de whisky tipo k, usado en la mezcla de licor tipo j, k=A, B,C; j= A, R, N.

Objetivo:

maximizar las utilidades que por fabricación y venta de los licores punto azul, rojo y negro tiene la fábrica de licores.

Entonces el problema consiste en:

Maximizar $z=6.80y_A+5.70y_R+4.50y_N-7.00x_A-5.00x_B-4.00x_C$

Sujeta a

a. Restricciones de consistencia.

$$x_{AA}+x_{AR}+x_{AN}=x_A$$
$$x_{BA}+x_{BR}+x_{BN}=x_B$$
$$x_{CA}+x_{CR}+x_{CN}=x_C$$
$$x_{AA}+x_{BA}+x_{CA}=y_A$$
$$x_{AR}+x_{BR}+x_{CR}=y_R$$
$$x_{AN}+x_{BN}+x_{CN}=y_N$$

b. Restricciones de especificaciones.

$x_{AA} \geq 0.6y_A$ $\quad x_{CR} \leq 0.6y_K$ $\quad x_{CN} \leq 0.5y_N$

$x_{CA} \leq 0.2y_A$ $\quad x_{AR} \geq -.15y_K$

c. Restricciones de disponibilidad.

$x_K \leq 2{,}000$; $x_B \leq 2{,}500$; $x_C \leq 1{,}200$.

d. Restricciones de no negatividad.

$x_K \geq 0$; $Y_j \geq 0$; $x_{kj} \geq 0$; $k=A,B,C$; $j=A,R,N$.

4.5. Métodos de solución.

Antes de describir los métodos de solución de los modelos de programación lineal analizados en la sección anterior, deberemos establecer conceptos de programación lineal.

4.5.1. Solución factible básica y solución óptima.

Consideremos el sistema de ecuaciones.

$$Ax=b$$

Donde A es una matriz de m renglones y n columnas; b, un vector columna de m componentes, y x es un vector columna de n variables. Supongamos que el rango de la matriz A es m, por lo que entonces es posible elegir m columnas de A que sean linealmente independientes y sin pérdida de generalidad puede considerarse que estas son las - primeras m columnas, las cuales forman una submatriz de A de orden mxm, no singular la que denominaremos B. De esta forma podemos escribir A= B,R donde R es otra submatriz de A formada por las n-m columnas restantes de A.

Definamos ahora $x = \left[x_B, x_R\right]^T$ donde x_B es la dimensión m el cual está asociado a la matriz B; x_r es la dimensión n-m y está asociado a la matriz R. Entonces podemos escribir:

$$Ax = \left[B, R\right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_B \end{bmatrix} = b$$

Haciendo $x_r = 0$. obtenemos una solución para $Ax=b$, ya que $Bx_B=b$ y por ser B no singular, entonces $x_B = B^{-1}b$, esto es,

$$x = \left[x_B, x_R\right]^T = \left[B^{-1}b, 0\right]^T$$

Esta solución se denomina un solución básica con respecto a la base B y los componentes de x asociados a las columnas de B, esto es, los componentes de x_B se denominan variables básicas. Si una o más de las variables básicas tiene valor cero decimos que la solución básica es generada. Observemos que en una solución básica no degenerada es inmediata la identificación de las columnas de A que forman la matriz no singular B. En cambio, en una solución degenerada existe cierta ambiguedad para identificar B, ya que las variables básicas con valor cero pueden ser confundidas con las variables no básicas cuyo valor es también cero. Consideremos el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Minimizar} \quad Z=cx$$

$$\text{s.a.}$$

$$Ax = b$$

$$x = \geq 0$$

donde A es una matriz de orden m x n; b, un vector columna de m componentes; c, un vector hilera de n componentes y x es un vector columna de n componentes a determinar. Decimos que x es una solución factible si satisface las restricciones del problema. Si la solución factible es también básica, se denomina solución factible básica. Si en la solución factible básica, una o más de las variables básicas son nulas, entonces se trata de una solución factible básica degenerada.

Finalmente, una solución factible básica para la cual la función objetivo adquiere un valor mínimo se denomina solución óptima.

4.5.2. Método de solución gráfica.

En esta sección describiremos un procedimiento geométrico para resolver problemas de programación lineal. Cabe aclarar que este método sólo lo podemos aplicar a problemas pequeños a lo más de tres variables. Sin embargo, este método ayuda en gran manera a entender varios conceptos importantes de la programación lineal. Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimice} \quad Z = cx$$

$$\text{s.a.}$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

debemos observar que la región factible consiste de todos los vectores x que satisfagan:

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

De entre todos estos puntos, nosotros queremos encontrar un punto que haga mínimo el valor de cx. Como z es la función a ser minimizada, entonces el plano (línea en un espacio de dos simensiones) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z$ deberá desplazarse en forma paralela a si mismo en la dirección que minimice en mayor grado la función objetivo. Esta dirección es -C y por lo tanto al plano se deberá mover en la dirección -C tanto como sea posible. Este proceso se ilustra en la figura 4.3.

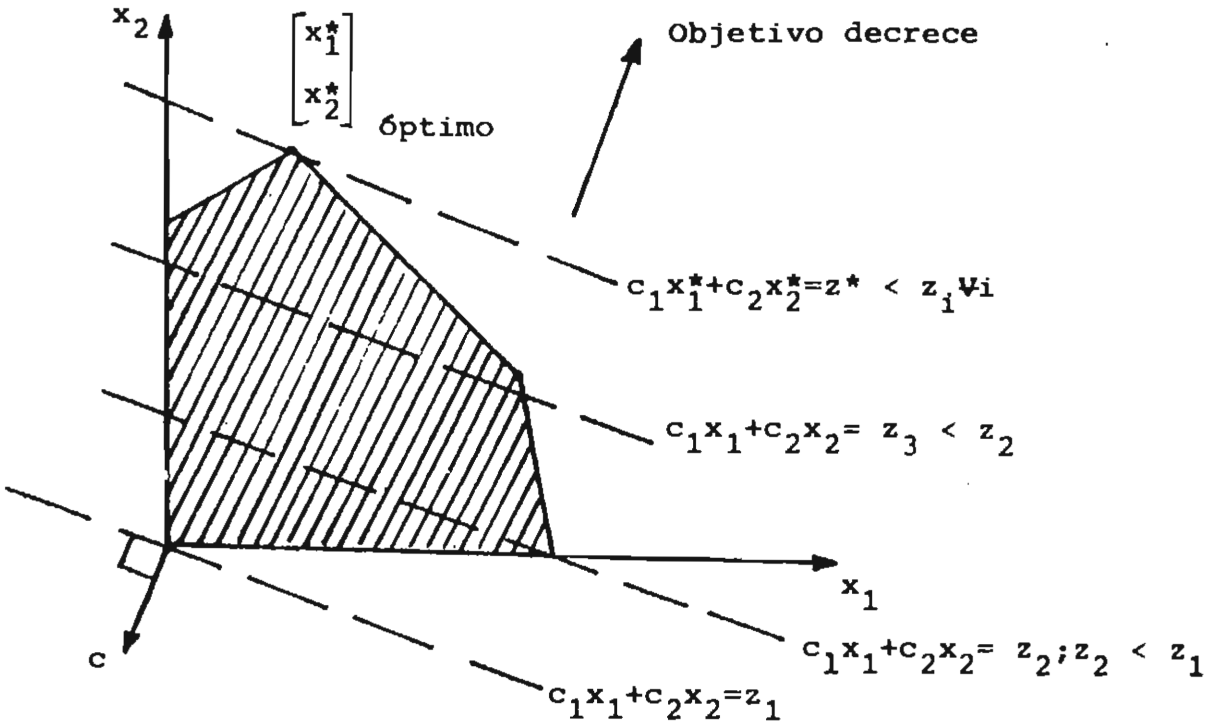


Figura 4.3. Solución geométrica.

Observamos que cuando alcanzamos el punto x^*, la línea $z^*=c_1x_1^*+c_2x_2^*$ no la podemos desplazar ya en la dirección -c, donde $-c = (-c_1,-c_2)$ ya que nos saldríamos de la región factible, por lo cual podemos concluir que x* es la solución óptima. En el caso de que tuviésemos un problema de maximización, el plano cx=z deberá trasladarse paralelamente a sí mismo, tanto como sea posible, pero ahora en la dirección c.

El proceso antes descrito resulta conveniente aplicarlo a problemas con dos variables, y se complica un poco para problemas con tres variables y obviamente no lo podemos aplicar a problemas que involucren más de tres variables.

Podemos observar de la figura 4.3 que el punto x* es uno de los cinco vértices que definen la región factible. Estos vértices son llamados <u>puntos extremos.</u> Como veremos más adelante, si un problema de programación lineal tiene una solución óptima finita, esta se alcanza en un punto extremo.

<u>Ejemplo 4.2.</u>

$$\text{Minimice} \quad z = -x_1 - 3x_2$$

s.a

$$x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (1)$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8 \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

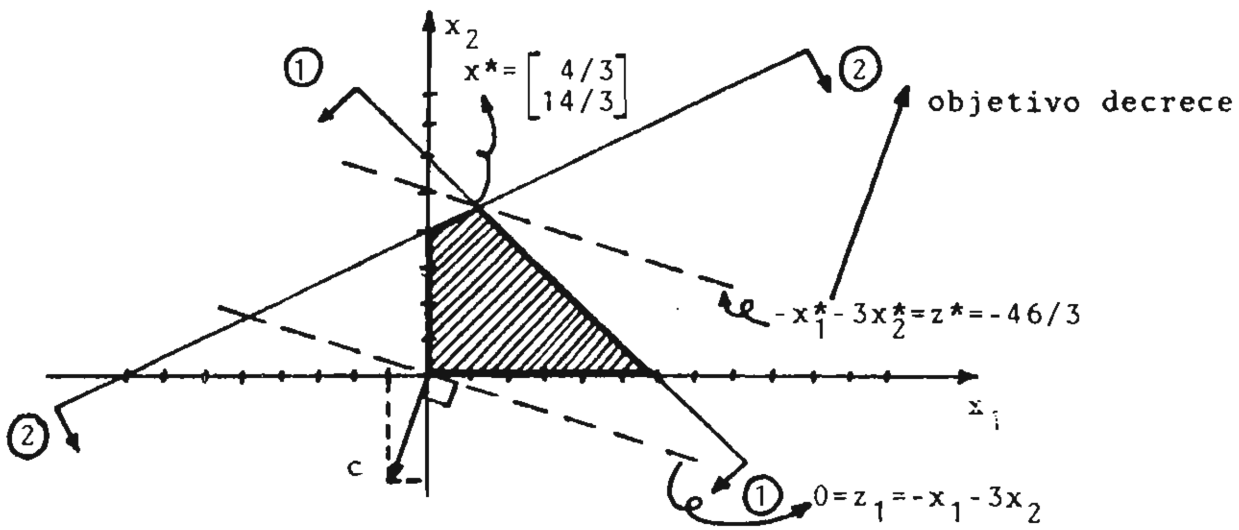


Figura 4.4. Ejemplo numérico de solución geométrica.

La región factible se muestra en la figura 4.4 (región asciurada). La primera y segunda restricciones están representadas "abajo" de las líneas 1 y 2 debido al sentido de la desigualdad. La restricción de no negatividad restringe los puntos a estar en el primer cuadrante. La ecuación $z=x_1-3x_2=0$ se denomina el <u>contorno objetivo</u> y pasa a través del origen.

Los contornos se trasladan paralelamente a sí mismos en la dirección $-c=(1,3)$ tanto como sea posible hasta localizar el punto óptimo $x^*=(4/3,\ 14/3)^T$.

En el ejemplo anterior, la solución óptima es única. Pero se pueden presentar otros casos, dependiendo de la estructura que presente el problema. Todos los posibles casos que pueden surgir, en un problema de optimización lineal, a continuación se analizan.

i. <u>Solución óptima finita única.</u>

Si la solución óptima finita es única,entonces, esta ocurre en un punto extremo. Las figuras 4.5 (a) y (b) muestran una solución óptima finita. En la figura 4.5 (a) la región factible es acotada, esto es, existe un bolsa abierta con centro en el origen de radio finito, que contiene la región factible. En la figura 4.5 (b) la región factible es no acotada. En cada caso, la solución óptima es única y finita.

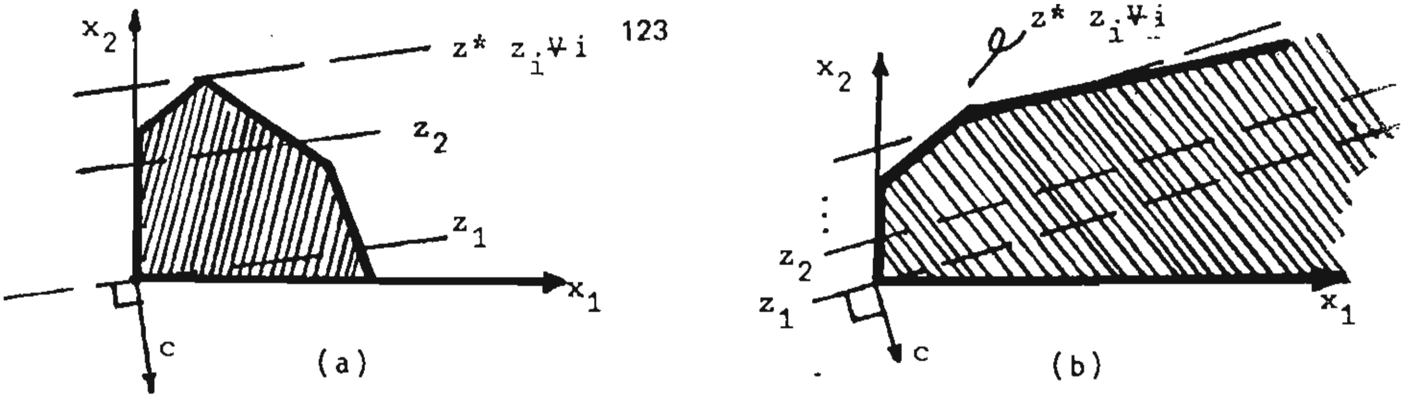


Figura 4.5. Solución óptima finita única: (a) - región factible acotada; (b) - región factible no acotada.

ii. Soluciones alternativas óptimas finitas.

Este caso se ilustra en la figura 4.6. Observamos que en la figura 4.6 (a) la región factible es acotada. Los dos puntos vértices u^* y v^* son óptimos y también son óptimos todos los puntos sobre el segmento de recta u^*v^*. En la figura 4.6 (b) la región factible es no acotada pero el objetivo óptimo es finito. Todo punto del "rayo" con vértice en x^* es óptimo.

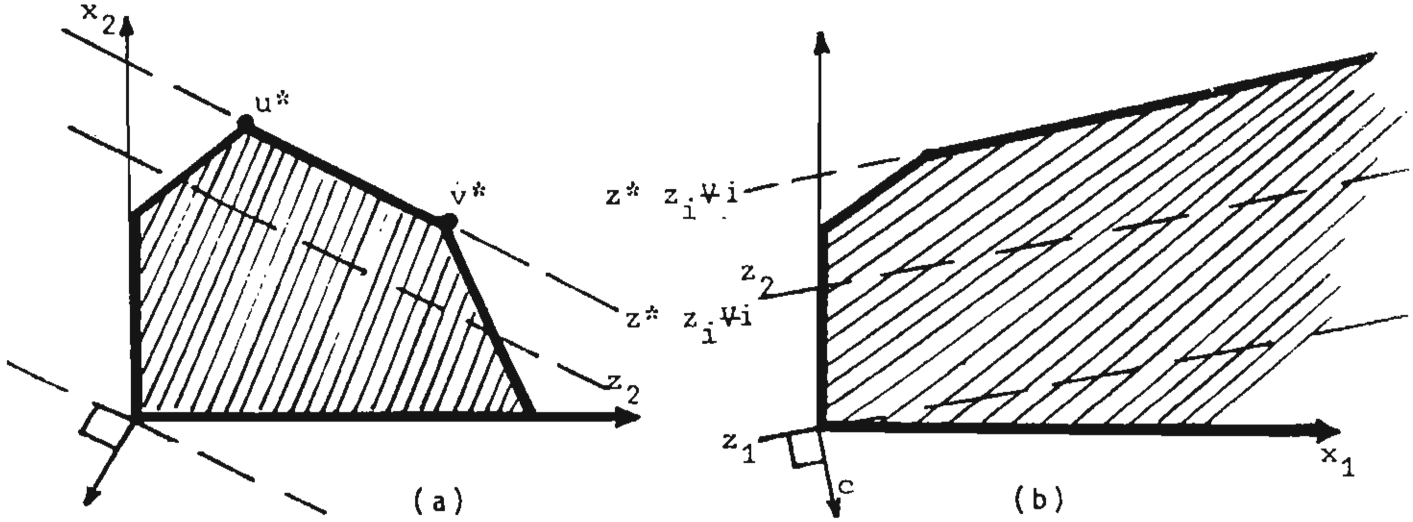
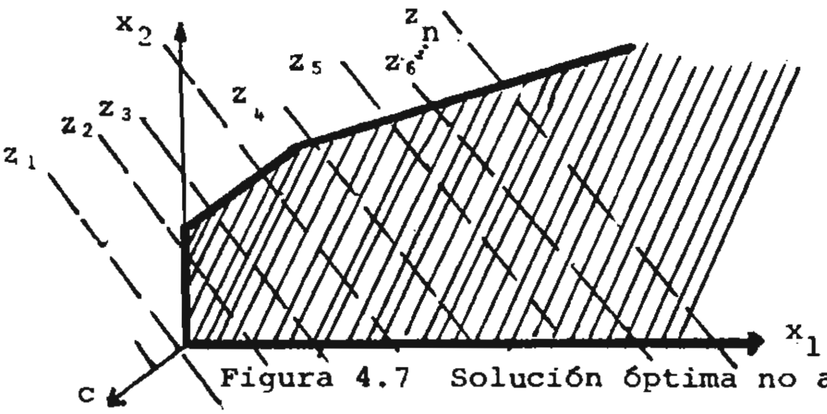


Figura 4.6. Soluciones alternativas óptimas. (a) - región factible acotada. (b) - región factible no acotada.

iii. Solución óptima no acotada.

Este caso se ilustra en la Figura 4.7 donde tanto la región factible como la solución óptima son no acotados. Para un problema de minimización el plano $cx = z$ se puede trasladar paralelamente a sí mismo en la dirección $-c$ indefinidamente, intersectándose siempre, con la región factible. En este caso la función objetivo alcanzará su óptimo en $+\infty$.



El contorno objetivo puede trasladarse indefinidamente en la dirección $-c$.

Figura 4.7 Solución óptima no acotada.

iv. Región factible vacía.

En este caso el sistema de ecuaciones y/o desigualdades definen de manera inconsistente a la región factible. Para ilustrar lo anterior, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{llcll}
\text{Minimizar} & Z = -2x_1 & + & 3x_2 & \\
\text{s.a.} & -x_1 & + & 2x_2 \leq 2 & (1) \\
 & 2x_1 & + & x_2 \leq 3 & (2) \\
 & & & x_2 \geq 4 & (3) \\
 & x_1 \geq 0; & & x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

Examinando la Figura 4.8 vemos que no existe un punto (x_1, x_2) tal que satisfaga las desiguladades dadas. El problema entonces se dice que es no factible, inconsistente o con región factible vacía.

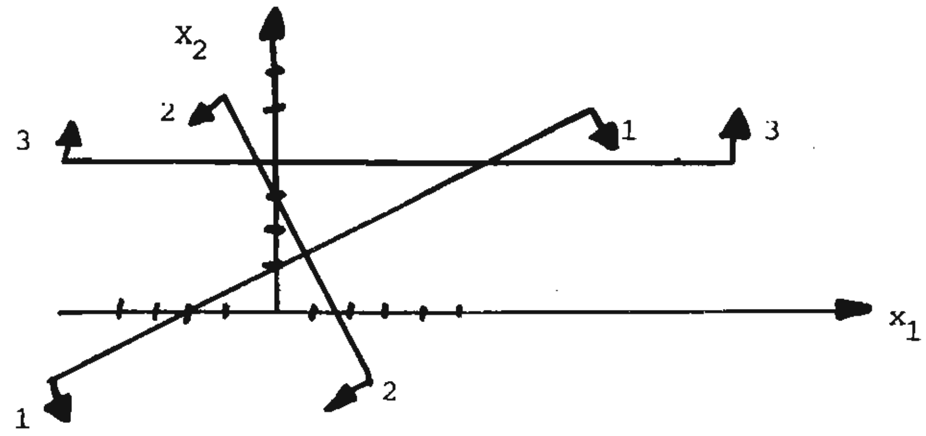


Figura 4.8. Renglón factible vacía.

4.5.3. Métodos de solución iterativos. Los diferentes métodos de solución o algoritmos de programación lineal serán discutidos en los capítulos posteriores. Solo cabe aclarar que intuitivamente pensamos que un algoritmo como un proceso iterativo que general una sucesión de - puntos, cada uno calculado en base a su información cedida por los - puntos anteriores. Teniendo en mente esto, veremos en los siguientes capítulos los algoritmos simplex, dual simplex, del transporte y otros.

4.6. Conceptos básicos de programación lineal.

Un problema de programación lineal consiste en la maximización o minimización de una función lineal de varias variables sujetas a restricciones lineales en estas mismas variables. Una forma particular, a la que cualquier problema lineal puede ser transformado, es la siguiente forma estándar:

$$\text{Minimice } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.a

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \dots + a_nx_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots ;\ x_n \geq 0$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i y c_j son números reales, y x_j, $j = 1,\dots,n$ son las variables a determinar. Una forma compacta y usual de escribir (P) es:

$$\text{Minimice } Z = cx$$

s.a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde A es una matriz m **x n**; c un vector hilera de n componentes; b, un vector columna de m componentes y x, un vector columna de n variables.

Existen dos formas conocidas a las cuales se puede transformar cualquier problema de programación lineal, la forma estándar y la forma canónica. Un problema de programación lineal estará en la forma estándar si todas las restricciones son igualdad y todas las variables y todos los componentes del vector b son negativos. El método simplex se puede utilizar sólo después de haber hecho las transformaciones necesarias para expresar el modelo lineal en la forma estándar. La forma canónica es con frecuencia de gran utilidad, especialmante en teoría de dualidad. Un problema de minimización está en forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo $\geq$. Un problema lineal de maximización estará expresado en la forma canónica si todas las variables son no negativas y las restricciones son del tipo $\leq$. En la tabla 4.1 se ilustran las formas estándar y canónica.

	PROBLEMA DE MINIMIZACION	PROBLEMA DE MAXIMIZACION
Forma estándar	Minimizar $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1,\ldots,m$ $x_j \geq 0$, $j=1,\ldots,n$	Maximizar $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1,\ldots,m$ $x_j \geq 0$, $j=1,\ldots,n$
Forma canónica	Minimizar $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, $i=1,\ldots,m$ $x_j \geq 0$, $j=1,\ldots,n$	Maximizar $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, $i=1,\ldots,m$ $x_j \geq 0$, $j=1,\ldots,n$

Tabla 4.1. Formas estándar y canónica.

Vamos a analizar todos los casos que se pueden presentar en un problema de programación lineal y los pasos que debemos dar para hacer las transformaciones correspondientes.

a). Desigualdades e igualdades.

Una desigualdad (inecuación) puede fácilmente ser transformada en igualdad (ecuación). Consideremos que las restricciones dadas son $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$. Estas restricciones en forma de desigualdad las podemos poner en forma de igualdad restando una variable de holgura no negativa x_{n+i} con lo cual obtenemos $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} - x_{n+i} = b_i$ con $x_{n+i} \geq 0$. De manera semejante, las restricciones $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ son equivalentes a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$ con $x_{n+i} \geq 0$. También una igualdad de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ la podemos transformar en dos desigualdades $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$.

b). No negatividad de las variables.

Para muchos problemas prácticos las variables representan cantidades físicas y por lo tanto deben ser no negativas. El método simplex resuelve problemas lineales donde las variables son no negativas. Si una variable x_j es irrestricta (libre) en el signo, podemos reemplazarla por $x_j' - x_j''$, donde $x_j' \geq 0$ y $x_j'' \geq 0$. Si $x_j \geq l_j$ entonces la nueva variable $x_j' = x_j - l_j$ es automáticamente no negativa. Si la variable x_j está restringida de tal manera que $x_j \leq u_j$ donde $u_j \leq 0$, entonces hacemos la sustitución $x_j' = u_j - x_j$ y con ello tenemos una variable no negativa.

c). Problemas de minimización y maximización.

Otro problema de manipulación que se presenta es convertir un problema de maximización a uno de minimización y a la inversa, esto es , convertir un problema de minimización en uno de maximización. Observamos que sobre cualquier región se cumple

$$\text{Máximo} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\text{Mínimo} \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

Por lo tanto, un problema de maximización (minimización) lo podemos transformar a un problema de minimización (maximización) multiplicando los coeficientes de la función objetivo por -1. Después de la optimización del nuevo problema la función objetivo del problema original será -1 veces la función objetivo del problema transformado.

Vamos a ver algunos ejemplos.

<u>Ejemplo 4.3.</u>

Considere el problema lineal (P):

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{l} \text{Minimice } Z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a} \\ a_{11}x_1 + a_{11}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(P')}\quad \begin{array}{l} \text{Minimice } Z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a} \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+x_3 \qquad = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \qquad +x_4 = b_2 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0 \end{array}$$

Es inmediato que (P) es equivalente a (P') y que este se encuentra en la forma estándar. Este método de transformar las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad, se denomina método de variables de holgura.

<u>Ejemplo 4.4.</u>

Considere el problema lineal (P):

$$\text{Minimice } Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

s.a.

$$(P) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \text{ libre.}$$

Existen escencialmente dos métodos para transformar una variable no restringida en una restringida.

Método a. Sea $x_2=x_3-x_4$ donde $x_3 \geq 0$ y $x_4 \geq 0$. En este caso el problema lineal (P) es equivalente a (P') y este se encuentra en la forma estándar.

$$\text{Minimice } Z = c_1x_1 + c_2x_2 - c_2x_4$$

s.a

$$(P') \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_3 - a_{12}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_3 - a_{22}x_4 &= b_2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_3 \geq 0; \; x_4 \geq 0.$$

Método b. Supongamos que en el problema (P) $a_{22} \neq 0$. Entonces, podemos despejar x_2 de la segunda ecuación y sustituir su valor en la restante. En este caso el problema lineal (P) es equivalente a (P'')y este se encuentra, excepto por una constante,en la forma estándar.

$$\text{Minimice } Z = (c_1-c_2a_{21}/a_{22})x_1 + c_2b_2/a_{22}$$

s.a

$$(P'') \quad (a_{11}-a_{12}\;a_{21}\;a_{22})x_1 = b_1-a_{12}/a_{22}$$

$$x_1 \geq$$

Ejemplo 4.5.

Consideremos la iden ida::

$$\text{Máximo } \{ cx;\ x \epsilon S \} = -\text{mínimo } \{ -cx;\ x \epsilon S \},$$

donde c es un vector hilera de n componentes; x, un vector columna de n componentes y S, un conjunto en el espacio R^n. Esta identidad permite transformar problemas lineales de maximización en, excepto por el signo, problemas de minimización.

4.6.1. Teorema fundamental de la programación lineal.

En la solución de problemas de programación lineal, el papel que desempeñan las soluciones factibles básicas es de primordial importancia. Específicamente, el teorema fundamental de la programación lineal demuestra que en la determinación de soluciones óptimas del problema lineal, en forma estándar, es únicamente necesario considerar las soluciones factibles básicas de este problema. Dado el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad z = cx \\ &\quad \text{sujeto a} \\ &\qquad\qquad Ax = b \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \qquad\qquad (4.3) \end{aligned}$$

donde A es una matriz de m renglones y n columnas y además de rango m; b es un vector columna de m componentes; c es un vector renglón de n componentes y x es un vector columna de n variables.

i. Si existe una solución factible, existe una solución factible que es básica.

ii. Si existe una solución factible óptima, existe una solución factible básica, que es óptima.

Demostración.

i. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las columnas de A y supongamos que $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ es una solución factible, esto es, $x \geq 0$ y además $Ax=b$. En términos de la columna de A se satisface

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b, \; x_i \geq 0, \; i=1, \ldots, n$ (4.4)

Supongamos que exactamente p de las $x_i (i=1, \ldots, n)$ son mayores que cero, y por conveniencia y sin pérdida de generalidad, suponemos que estas son las primeras p componentes de x, luego se tiene:

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_p a_p = b; \; x_j \geq 0, \; j=1, \ldots, p$ (4.5)

y $x_k=0$, $k=p+1, \ldots, n$. Bajo esta suposición se presentan dos casos, correspondientes a la independencia o dependencia lineal del conjunto $a_1, \ldots, a_p$ respectivamente.

Caso 1. $1, \ldots, p$ forman un conjunto de vectores linelmente independientes. Es obvio que $p \leq m$ por ser el rango de A igual a m. Si p=m la solución es básica factible, y por lo tanto, la prueba termina. Si p<m, es posible seleccionar entre los n-p vectores columna restantes de A, m-p vectores que junto con los p vectores que ya teníamos, sean linealmente independientes, por ser el rango de A igual a m. Las m-p componentes del vector x correspondiente a los m-p vectores columna de A así seleccionados, se les asigna el valor cero, obteniendo así una solución factible básica degenerada.

Caso 2. Sea $a_1, \ldots, a_p$ conjunto de vectores linealmente independientes, esto es, existen escalares $y_1, \ldots, y_p$ no todos cero tales que: $a_1 y_1 + \ldots + a_p y_p = 0; \; y_i \neq 0$ (4.6) para alguna i, $i=1, \ldots, p$. Multiplicando la expresión (4.6) por un escalar cualquiera ε y restándola de la ecuación (4.5) obtenemos:

$$(x_1-\varepsilon y_1)a_1+(x_2-\varepsilon y_2)a_2+\ldots+(x_p-\varepsilon y_p)a_p=b \qquad (4.7)$$

Observamos que esta expresión se satisface para cualquier ε, sin embargo, para un ε dado las desigualdades $x_i-y_i \geq 0$, $i=1,\ldots,p$ no se cumplen necesariamente. Sea el vector $y=(y_1,y_2,\ldots,y_p,0,0,\ldots,0)$ elemento de R^n. Podemos fácilmente observar que $(x-\varepsilon y)$ es una solución de (4.4), y en particular, para $\varepsilon=0$ se obtiene $x \geq 0$, esto es, la solución factible original y además conforme ε aumenta su valor (en el sentido positivo), cada uno de los p componentes de $x-\varepsilon y$ aumenta, disminuye o permanece constante, dependiendo de que y_i, $i=1,\ldots,p$ sea negativo, positivo o cero respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe al menos un y_i, $i=1,\ldots,n$ positivo, y por lo tanto al menos una de las componentes de $x-\varepsilon y$ disminuye cuando ε aumenta, esto es, hagamos

$$\bar{\varepsilon} = \min.\ \{x_i/y_i;\ y_i \geq 0,\ i-1,\ldots,p\} \qquad (4.8)$$

De donde, $x - \bar{\varepsilon}\, y$ es una solución factible con, a lo más, p-1 variables positivas. Repitiendo este proceso podemos seguir eliminando variables positivas hasta obtener una solución factible con vectores columna que sean linealmente independientes, estableciéndose de esta manera nuevamente el Caso 1 y la prueba termina.

ii. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ una solución factible óptima y supongamos que $x_1, \ldots, x_p$ son positivas de manera análoga a la suposición hecha en la prueba de i, y nuevamente bajo esta suposición se presentan dos casos a analizar.

C a s o 1. Las columnas $a_1, \ldots, a_p$ de A son linealmente independientes. Donde la prueba es idéntica a la realizada en i para el caso 1.

C a s o 2. Los vectores $a_1, \ldots, a_p$ son linealmente dependientes. La demostración es similar a la expuesta en i para el caso 2, pero ahora debemos demostrar que para cualquier ε, la solución $x-\varepsilon y$ es óptima. Primeramente, observamos que el valor de la función objetivo para esta solución factible básica es $cx-\varepsilon cy$. Es claro que si $cy=0$ la prueba termina (ya que εy no afecta en nada y la solución $x-\varepsilon y$ será por lo tanto la solución básica factible óptima). Supongamos que $cy \neq 0$, entonces, es fácil ver que para valores de ε suficientemente pequeños, positivos o negativos, el vector $x\varepsilon y$ es una solución factible y para alguno de estos ε se tiene que $\varepsilon cy > 0$, por lo tanto:

$$cx - \varepsilon cy > cx \qquad (4.9)$$

lo cual es una contradicción, pues x es la solución óptima por lo cual $cy=0$ con lo cual queda establecido que una nueva solución factible con menos componentes positivos también es óptima, y el resto de la demostración se completa igual en i, caso 2 con lo cual termina la prueba del teorema fundamental.

La importancia del teorema anterior radica en que, este establece que podemos reducir la búsqueda de soluciones óptimas del problema lineal en forma estándar a un conjunto de soluciones formado por las soluciones factibles básicas, el cual es finito. En particular, se observa que el número de soluciones factibles básicas en un problema de programación lineal con m restricciones y n variables es a lo más

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

correspondiente al número de maneras de seleccionar m de las n columnas de la matriz A.

Ejemplo 4.6

Consideremos el politope convexo (ver definición 4.7) definido por las siguientes desigualdades, las cuales se ilustran en la Figura 4.9

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0$$

Introduciendo las varibles de holgura x_3 y x_4 con el objeto de poner el problema en forma estándar, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0;\; x_3 \geq 0;\; x_4 \geq 0$$

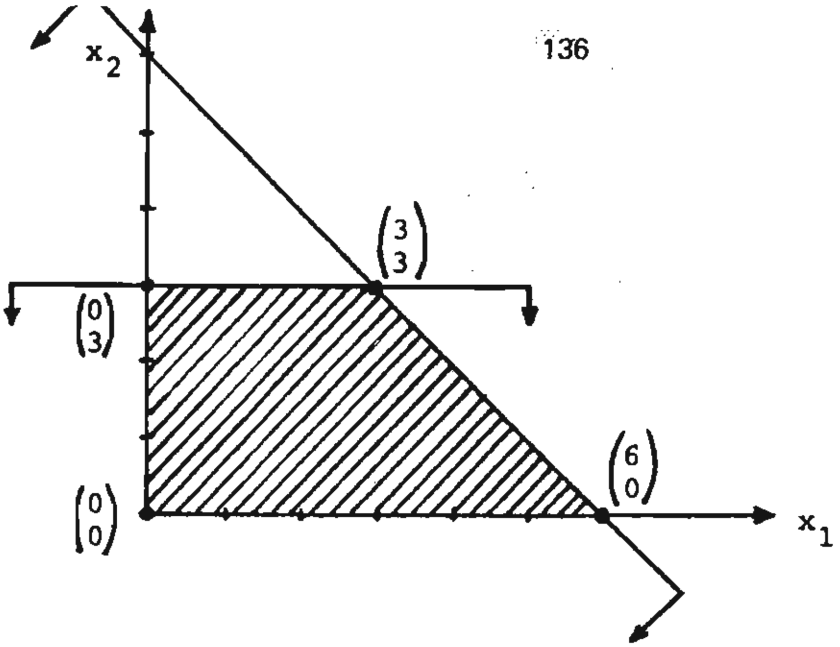


Figura 4.9. Solución básica factible.

Observamos que la matriz de restricciones A es igual a

$$A = \left[a_1, a_2, a_3, a_4 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De las definiciones anteriores, la solución factible básica estará asociada a una base B de orden 2×2 con $B^{-1}b$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ (4-2)!} = 6 \text{ soluciones básicas, esto es:}$$

1). $B_1 = \left[a_1, a_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \; x_{R_1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2). $B_2 = \left[a_1, a_4 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B_2^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}; \; x_{R_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3). $B_3 = [a_2, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x_{B_3} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \; x_{R_3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4). $B_4 = [a_2, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_{B_4} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}; \; x_{R_4} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5). $B_5 = [a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_{B_5} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B_5^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}; \; x_{R_5} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6). $B_6 = [a_1, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_6^{-1}$ no existe pues las columnas de B_6 son linealmente independinetes y por lo tanto B_6 en este caso, es singular por lo que B_6 no es una base, pues no podemos generar a partir de ella, la segunda restricción.

Además, debemos observar que los puntos x_{B_1}, x_{B_2}, x_{B_3} y x_{B_5} son soluciones básicas factibles. Pero x_{B_4} es una solución básica pero no factible ya que viola las restricciones de no negatividad. Por lo tanto tenemos cuatro soluciones básicas factibles, esto es:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Estos puntos pertenecen a R^4 , pues introdujimos dos variables de holgura, por lo cual, cada solución básica - factible tiene cuatro componentes. Si proyectamos en R^2 las soluciones básicas factibles, esto es, en el espacio x_1 x_2 , tenemos los siguientes puntos.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estos cuatro puntos se ilustran en la Figura 4.9 Observamos que estos puntos son precisamente los puntos extremos de la región factible.

Teóricamente hemos encontrado una solución al problema de programación lineal ya que si sustituimos en la función objetivo las soluciones básicas factibles, estaremos en condiciones de determinar la solución básica factible óptima, que será aquella que haga mínima o máxima la función objetivo dependiendo si el problema es de minimización o maximización respectivamente.

Debemos puntualizar que el teorema fundamental es sólo una alternativa para resolver el problema lineal, pero en general,esta alternativa resulta práctica y computacio -

nalmente ineficiente ya que, si por ejemplo, se tiene un problema de 10 variables y 7 restricciones, tendríamos que analizar 120 bases. Sin embargo, la extensión de los argumentos de prueba de este teorema ha servido de base para diseñar métodos de soución eficientes, tal como el método simplex.

El concepto de solución básica en un problema de programación lineal está relacionado con el concepto de punto extremo de un cierto politope convexo. Esta relación de conceptos, uno algebráico y otro geométrico, así como importantes relaciones con la teoría de desigualdades se tratan a continuación.

4.6.2. Relaciones importantes de la programación lineal con convexidad.

Uno de los conceptos más importantes en la programación lineal es el de la convexidad ya que, geométrica y analíticamente, es sencillo de manipular este concepto. Así mismo, al utilizar la convexidad se obtienen los resultados analíticos más relevantes de la programación lineal. Por lo anterior, en el apéndice B se tratan los resultados más relevantes sobre conjuntos convexos y optimización.

Es interesante hacer notar que existe una relación bien definida entre las soluciones factibles básicas de un sistema lineal $Ax = b$, $x \geq 0$ y los puntos extremos del politope formado por las soluciones de este sistema.

Definición 4.1.

Si x,y son elementos del espacio enclidiano R^n, se dice que la línea que une x con y es el conjunto de elementos $\{ z \varepsilon R^n : z = \alpha x + (1-\alpha)y;\ 0 \leq \alpha \leq 1 \}$. Un conjunto C contenido en R^n es convexo si dados $x, y \varepsilon C$ la línea que las une está en C.

Como ejemplo de un conjunto convexo, se tiene el conjunto S definido por:

$$S = \{ x: Ax \geq b, x \geq 0 \},$$

es decir, el conjunto de soluciones no negativas del sistema $Ax \geq b$, donde A es una matriz de $m \times n$, de rango m; b es un vector columna de m componenetes y x, un vector columna de n variables. Para demostrar que se trata de un conjunto convexo se debe exhibir que para cualquier par de puntos, el segmento de recta que los une también está en el conjunto.

Sea x_1, x_2 dos puntos de S y α en $|0,1|$, entonces:

$$Ax_1 \geq b; \; x_1 \geq 0; \; Ax_2 \geq b, \; x_2 \geq 0$$

$$\alpha Ax_1 \geq \alpha b, \quad \alpha x_1 \geq 0; \; (1-\alpha)Ax_2 \geq (1-\alpha)b, \; (1-\alpha)x_2 \geq 0.$$

Sumando:

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq b \qquad \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$$

=> S convexo.

Definición 4.2.

Se dice que z es una combinación convexa de los m elementos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ del espacio R^n, si

$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \quad \text{, donde} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \quad y \quad \alpha_i \geq 0, \; i=1,\ldots,m$$

Este concepto nos permite obtener una caracterización alternativa y común del conjunto convexo.

Proposición 4.1.

Sea S un conjunto contenido en el espacio R^n, entonces S es convexo, si y sólo si contiene todas las combinaciones convexas finitas de sus elementos.

Definición 4.3.

Un conjunto K contenido en el espacio R^n es un cono si $\alpha x \varepsilon K$ cuando $x \varepsilon K$ y $\alpha \geq 0$. Lo cual implica que si un punto pertenece al cono, entonces la línea que parte del origen y pasa por el punto también pertenece al cono. El cono puede o no ser convexo.

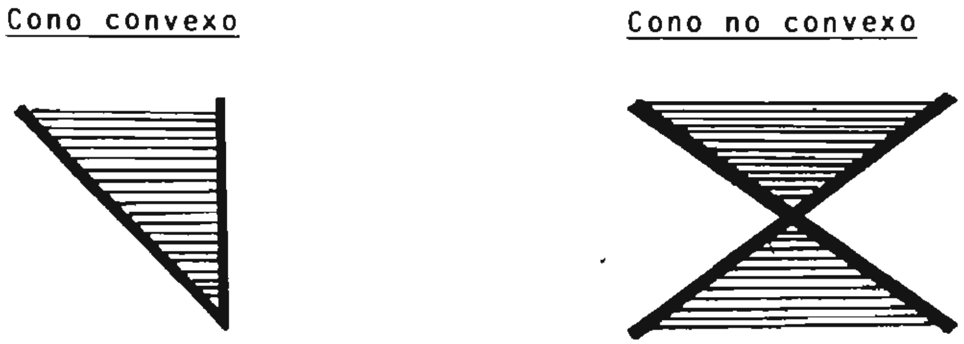


Figura 4.10. Cono convexo y cono no convexo.

El conjunto convexo más importante en la teoría de optimización es el hiperplano. Establecer el concepto de hiperplano es sencillo si se generalizan las propiedades de la línea y el plano en los espacios de dos y tres dimensiones.

Definición 4.4.

Un conjunto v en el espacio R^n es una variedad lineal si dados $x, y \varepsilon V$ se tiene que $\alpha x+(1-\alpha)y \varepsilon V$ para todo $\alpha \varepsilon R$.

Se observa que esta definición está relacionada con la del conjunto convexo. Esto es, en la variedad lineal v (también llamada conjunto afín) dados dos puntos, no solo la línea que los une está en v, sino toda la línea que pasa por estos puntos.

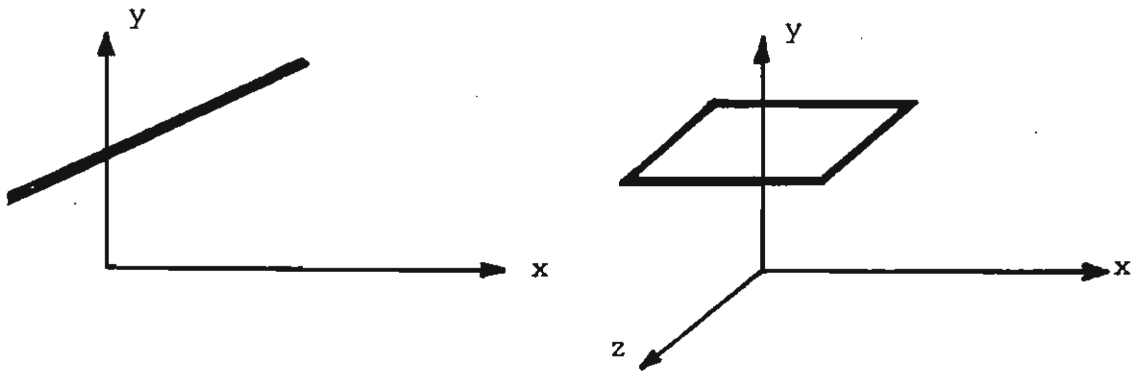


Figura 4.11. Variedades lineales en los espacios R^2 y R^3.

La interpretación geométrica de este resultado es que una variedad lineal es la traslación de un subespacio y dado esto, podemos hablar de su dimensión. Por ejemplo, en el espacio de tres dimensiones, un punto, una línea y un plano son variedades lineales de dimensión cero, uno y dos, respectivamente. En general, la dimensión de una variedad lineal en R^n puede determinarse trasladando esta al origen, lo que resulta en un subespacio cuya dimensión es fácil de calcular.

Definición 4.5.

Un conjunto H es un hiperplano en R^n si H es una variedad lineal de dimensión n-1.

El hiperplano de un espacio es, simplemente,una variedad lineal que separa el espacio en dos partes. Por ejemplo, en el espacio de dos dimensiones, la línea recta (o hiperplano) s para los puntos del espacio en dos partes, lo mismo sucede con el plano en un espacio de tres dimensiones. Observamos que en el espacio, R^3, una línea recta (o variedad lineal) no separa los puntos del espacio en dos partes.

Teorema 4.1

Un conjunto H es un hierplano en el espacio R^n si, y sólo si existen $0 \neq a \epsilon R^n$ y $b \epsilon R$ tales que:

$$H = \{x: ax=b\}$$

En vista de este teorema, el sistema de soluciones de una ecuación lineal con n incógnitas es un hiperplano en R^n

Definición 4.6

Sea $H = \left\{x: ax-b\right\}$ un hiperplano en R^n. Entonces los conjuntos convexos dados como

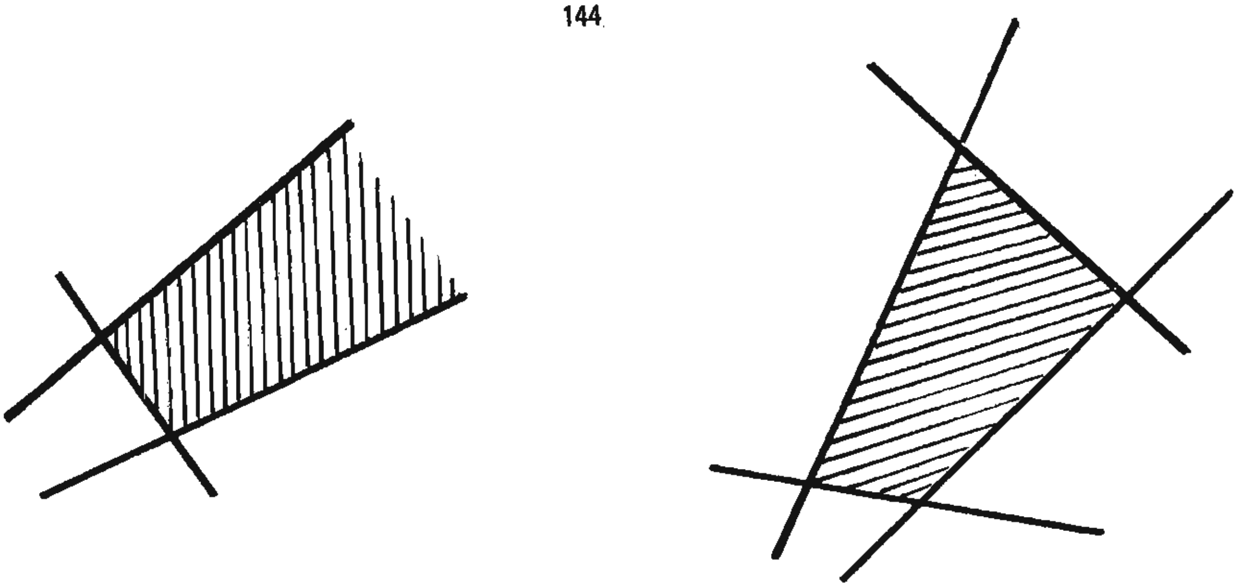
$$H^+ = \{x: ax \geq b\} \quad y \quad H^- = \{x: ax \leq b\}$$

se denominan los semiespacios cerrados positivos y negativos asociados con H, respectivamente. Los semiespacios abiertos positivos y negativo respectivamente son

$$\overline{H}^+ = \{x: ax > b\} \quad y \quad \overline{H}^- = \{x: ax < b\}$$

Definición 4.7

Un conjunto que consiste de la intersección de un número finito de semiespacios cerrados se denomina politope convexo. Asímismo, si un politope es no vacío y acotado se denomina poliedro.



P o l i t o p e P o l i e d r o

Figura 4.12. Politope y poliedro convexos.

A continuación se presenta el concepto de punto extremo y se establece su caracterización analítica para el caso de politopes convexos, formado por las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Esta caracterización nos permite analizar teóricamente, el problema de programación lineal.

Geométricamente el concepto de punto extremo es obvio. Por ejemplo, en un espacio de dos dimensiones, un cuadrado y un triángulo tienen como puntos extremos sus vértices y en un círculo todos los puntos frontera son puntos extremos. Analíticamente el concepto de punto extremo se puede establecer por la siguiente definición.

Definición 4.8.

Un elemento x del conjunto convexo S es un punto extremo si para todo y,z de S y $0 < \alpha < 1$ se tiene:

$$x=\alpha y+(1-\alpha)z \Rightarrow x=y=z.$$

Teorema 4.2.

Sea A una matriz $m \times n$ de rango m y b, un vector tal que:

$$a_1y_1 + \ldots + a_ky_k = 0.$$

Defianamos el vector $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots, 0)$ en R^n. Usando el hecho de que $x_i > 0$, $i=1,\ldots,k$ es posible encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$x + \varepsilon y \geq 0 \quad y \quad x - \varepsilon y \geq 0$$

de donde $x = 1/2(x + \varepsilon y) + 1/2(x - \varepsilon y)$, esto es, x se puede expresar como una <u>combinación convexa</u> de dos elementos distintos en K, lo cual constituye una contradicción pues x es un punto extremo. Entonces los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son linealmente independientes. Observamos que $k \leq m$, si $k = m$ es clàro que $x > 0$ y es una solución básica de $Ax = b$. Si $k < m$ es posible encontrar m-k vectores que junto con los k existentes sean linealmente independientes (estos m-k vectores se toman del conjunto de n-m vectores restantes) y x sigue siendo una solución básica, en este caso, degenerada. Esto termina la prueba.

Conviene puntualizar que en el teorema anterior el número de soluciones básicas del sistema lineal Ax=b es finito pues a lo más es $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ correspondiente al al número de formas distintas de seleccionar m de las n columnas de la matriz A. Consecuentemente el número de puntos extremos de politopes convexos formados poe las soluciones del sistema $Ax=b$; $x \geq 0$ es finito. También se enfatiza que el teorema anterior puede ser aplicado en la caracterización de los puntos extremos de otros politopes convexos, como es el caso del politope convexo formado por las soluciones del sistema $Ax \leq b$, $x \geq 0$.

Proposición 4.2.

Considere el sistema lineal

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0 \qquad (P)$$

donde A es una matriz $m\times n$; b, un vector columna de m componentes, y x un vector columna de n variables. La forma estándar de (P) es

$$Ax + Iy = b$$
$$x \geq 0, \; y \geq 0 \qquad (P')$$

donde I es la matriz identidad $m\times m$ y y es un vector columna de m componentes. Entonces, existe una correspondencia uno a uno entre los puntos extremos del politope (P) en R^n y los del politope (P') en R^{n+m}.

Prueba.

Sean $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto extremo de (P'). Supongamos que $\bar{x}$ no es un punto extremo de (P). Entonces existen elementos destintos, x_1, x_2 en R^n que satisfacen (P), tales que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ para algún $0<\alpha<1$. Sin embargo

$$y_1 = b - Ax_1 \geq 0; \; y_2 = b - Ax_2 \geq 0$$

de donde se concluye que $y = b - A\bar{x} = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ por lo que $(\bar{x}, \bar{y})$ no es un punto extremo de (P') lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bar{x}$ es un punto extremo de (P'). Además si $\bar{x}$ es punto extremo de (P), entonces $(\bar{x}, \bar{y})$, donde $\bar{y} = b - A\bar{x}$ es un punto extremo de (P').

Teorema 4.3.

Supongamos que la función lineal $z = cx$ tiene un mínimo en el politope convexo $K = \{ x \varepsilon R^n : Ax=b, x \geq 0 \}$. Entonces el mínimo se adquiere en un punto extremo de K.

P r u e b a.

Sean $x^1, x^2, \ldots, x^k$ puntos extremos de K. entonces cada x en k puede expresarse como

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i ; \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0, \ i=1,\ldots,k.$$

Sea $\bar{z} = \min \{ cx^i, i=1,\ldots,k \}$. Entonces se tiene

$$cx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i cx^i \geq (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i) \bar{z} = \bar{z}$$

y la prueba termina.

Teorema 4.4. Equivalencia de puntos extremos y soluciones básicas.

Sean A una matriz m×n de rango m y b un vector columna de m componentes. Sea el politope convexo

$$K = \{ x \varepsilon R^n : Ax = b, x \geq 0 \ .$$

Entonces un vecotor x es un punto extremo de K si y sólo si $x \geq 0$ y x es una solución básica de $Ax = b$.

P r u e b a.

Teorema B.2 del apéndice B.

C o r o l a r i o 4.1.

Si el conjunto convexo del teorema 4.4 es no vacío, entonces posee al menos un punto extremo.

Corolario 4.2.

Si el politope convexo K del teorema 4.4 es acotado, entonces K consiste de las combinaciones convexas de puntos extremos.

Proposición 4.3.

En un problema de programación lineal, la solución óptima ocurre en un punto extremo del poliedro convexo K del teorema 4.4.

4.6.3. TEORIA DE DESIGUALDADES LINEALES.

Vamos a estudiar brevemente los sistemas de desigualdades cuyas soluciones son mutuamente exclusivas. Las propiedades de estos sistemas son, usualmente, la base para caracterizar en forma analítica las soluciones óptimas de un problema de optimización. El el análisis de un problema de optimización es común tener que investigar la existencia de soluciones de sistemas de desigualdades lineales.

Existen dos formas generales de llevar a cabo este propósito, la primera es diseñar métodos iterativos, denominados algoritmos, para obtener la solución, si esta existe, o bien concluir que no hay solución. Esta forma de proceder es, aparentemente la más conocida. La segunda forma consiste en analizar las consecuencias de la no existencia de soluciones. Los resultados analíticos obtenidos en este caso, denominado Teoremas de Alternativas, consisten en establecer que un sistema de desigualdades lineales de forma específica no tiene solución, si y sólo si, otro sistema de desigualdades tiene solución. Por esta razón remitimos al lector al Apéndice C en el cual tratamos los conceptos básicos de desigualdades lineales.

Teorema 4.5.

Sea A una matriz $m \times n$ y b un vector columna de R^m. Entonces uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución

i) - $Ax = b$.

ii)- $\lambda A = b$; $\lambda b = \alpha$, donde $0 \neq \alpha \in R$.

P r u e b a. Teorema C.1 del apéndice C.

Teorema 4.6. (Farkas).

Sea A una matriz $m \times n$ y b un vector columna en R^m. Entonces, uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución.

i) - $Ax = b$; $x \geq 0$.

ii)- $\lambda A \geq 0$; $\lambda b < 0$.

P r u e b a. Teorema C.2 del apéndice C.

Teorema 4.7.

Sea A una matriz $m \times n$ y b un vector de m componentes. Entonces, uno y sólo uno de los siguientes sistemas de desigualdades tiene solución.

i) - $Ax \leq b$; $x \geq 0$.

ii)- $\lambda A \geq 0$; $\lambda b < 0$; $\lambda \geq 0$.

Prueba.

Primeramente, observamos que i es equivalente a:

$$[A,I]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Por lo tanto, del teorema 4.6 se tiene que el sistema anterior tiene solución si y solo si el sistema de desigualdades

$$\lambda A \geq 0; \quad \lambda I \geq 0; \quad \lambda b < 0$$

no tiene solución. Este resultado prueba el Teorema.

BIBLIOGRAFIA

1. BAZARAA,M.S., JARVIS, J.J."Linear Programming and Network Flows". John Wiley & Sons, Inc. 1977.
2. BRADLEY, S.P., HAX, A.C., MAGNANTI,T.L."Applied Mathematical Programming" Addison-Wesley Publishing Co. 1977.
3. Fuentes, M.S. Notas no publicadas del curso de Teoría y Técnicas de Optimización I. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM. 1976.
4. GALE,D. "The Theory of Linear Economic Models". Mc Graw Hill Co. 1960.
5. HADLEY, A. "Linear Programming". Addison Wesley. 1962.
6. HESTENES, M.R. "Optimization Theory. The Finite Dimensional Case". John Wiley & Sons Inc. 1975.
7. HILLIER, F.S. LIEBERMAN, G.J. "Operation Research". Second Edition. Holden Day, Inc. 1967.
8. LUENBERGER, D.G. "Intriduction to Linear and Nonlinear Programming". Addison Wesley. 1972.
9. MURTY, K.G. "Linear and Combinatorial Programming". John

Wiley & Sons Inc. 1976.

10. SHAPIRO, J.F. "Mathematical Programming: Structures and Algorithms". John Wiley & Sons. 1979.
11. SIMMONARD,W. "Linear Programming". Prentice Hall Inc. 1966.
12. TAHA, H.A. "Operation Research. An Introduction". Mc Millan Publishing Co. Inc. 1976.
13. WAGNER H.M. "Principles of Operation Research". Second Edition. Prentice Hall Inc. 1975.

EJERCICIOS.

4.1 Considere la representación gráfica del siguiente problema de programación lineal.

maximice (minimice) $Z = 5x_1 + 3x_2$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 3 \\ x_2 &\geq 3 \qquad (P) \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

i. En cada uno de los siguientes casos indique si la región factible tiene un punto, un número infinito de puntos o es vacía.

a. Las restricciones son tal y como se indican en (P).

b. La restricción $x_1 + x_2 \leq 6$ se cambia a $x_1 + x_2 \leq 5$.

c. La restricción $x_1 + x_2 \leq 6$ se cambia a $x_1 + x_2 \leq 7$.

ii. Para cada caso de los indicados en i., determine el número de puntos extremos.

iii. Para cada caso de los indicados en i en los cuales existe una solución factible determine el máximo y el mínimo de Z y sus puntos extremos asociados.

4.2 Resuelva gráficamente el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } Z = \min\{3x_1 - 10, -5x_1 + 5\}$$

s.a.

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

4.3 Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Maximizar } Z = 4x_1 + 4x_2$$

s.a

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 49$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Determine la solución optima $(\ddot{x}_1^*, \ddot{x}_2^*)^T$ gráficamente. ¿Cuál es el rango de variación de los coeficientes de la función objetivo para el cual la solución óptima $(\ddot{x}_1^*, \ddot{x}_2^*)$ se mantiene?

4.4 Resuelva gráficamente el siguiente problema lineal.

$$\text{Maximizar } Z = 5x_1 + 6x_2$$

s.a

$$x_1 - 2x_2 \geq 2$$
$$-2x_1 + 3x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \text{ no restringidas.}$$

4.5 Determine la región factible del conjunto $\{\ddot{x} : A\ddot{x} \leq b\}$ donde A y b se dan a continuación. Indique si la región factible es vacía, no acotada o acotada.

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

ii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

4.6 La compañía DELFIN tiene maquinaria especializada en la industria de calzado. La compañía inicia operaciones el próximo mes, que denominaremos mes número uno y tiene disponibles 250 000 pesos y 20 máquinas. Por medio de un estudio de pronósticos de venta, el gerente de la compañía llega a la conclusión que la mejor decisión a corto plazo es tener el máximo número de máquinas en operación al inicio del décimo mes.

En cada mes, la compañía tiene disponibles tres alternativas para adquirir maquinaria. En la primera alternativa puede comprar máquinas a 20 000 pesos cada una, pero el período de entrega es de un mes. Esto es, si al inicio del mes t se pide la maquinaria, esta se entregará al inicio del mes t+1. En la segunda alternativa se puede comprar en 15 000 pesos cada máquina, pero el período de entrega es de dos meses. La última alternativa es comprar en 10 000 pesos cada máquina con un período de entrega de cuatro meses.

Al inicio de cada mes cualquier máquina requiere para su operación 400 pesos y produce al final del mes 900 pesos.

Formule un modelo de programación lineal para este problema.

4.7 LA SURTIDORA presenta esta semana la siguiente variedad de carnes:

Carnes		A	B	C	D	E
Proteínas	(%)	19	20	16	17	25
Grasas	(%)	12	8	25	23	20
Costo	(%)	45	75	95	90	120

Suponga que usted desea comprar distintas cantidades de carne para formar una mezcla que contenga igual cantidad de grasas y proteínas, a costo mínimo. Adicionalmente, suponga que usted desea que al menos cinco por ciento de la carne comprada sea del tipo A y que las carnes C o E sean incluidas con, al menos, otro cinco por ciento.

Formule este problema como uno de programación lineal.

Suponga que conoce la solución óptima del problema planteado. ¿Cómo se modificaría esta solución si usted solo requiere de 1 kg. de mezcla de carnes?

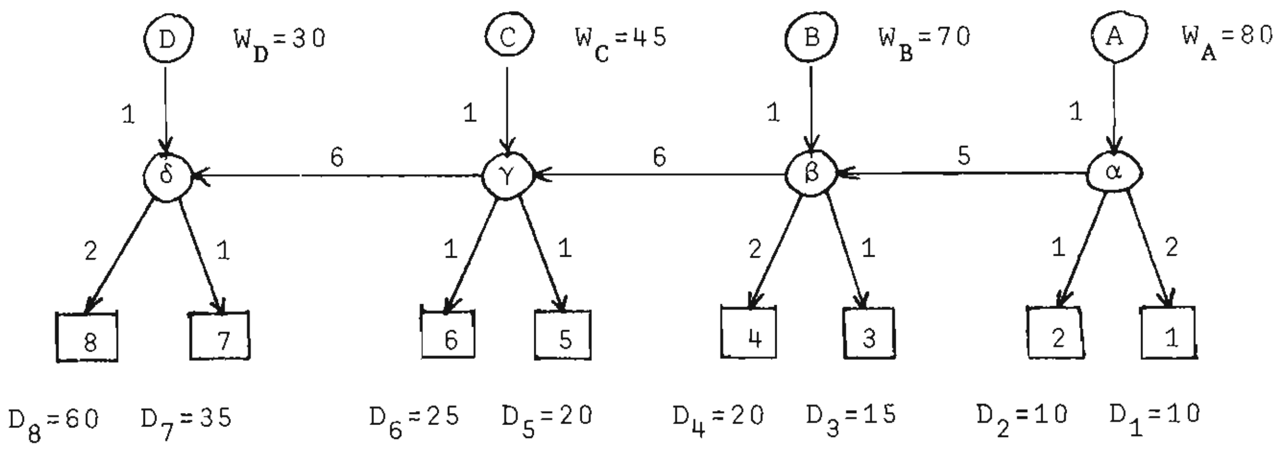
4.8 La compañía DENA tiene 30 millones disponibles para asignar a tres de sus subsidiarias. Debido a sus compromisos de personal y maquinaria la compañía tiene que asignar un mínimo de 3, 5 y 8 millones de las subsidiarias A,B y C, respectivamente. Las subsidiarias tienen oportunidad de realizar varios proyectos con los fondos que reciben. La tasa de interés que cada proyecto tiene es conocida así como la máxima cantidad de dinero a invertir.

SUBSIDIARIA	PROYECTO	TASA	LIMITE INVERSION
A	1	8%	4 millones
	2	6%	5 millones
	3	7%	6 millones
B	4	5%	5 millones
	5	8%	7 millones
	6	9%	4 millones
C	7	10%	6 millones
	8	6%	3 millones

La compañía tiene la política que ninguna subsidiaria tenga asignado más dinero que la suma de dinero asignado a las otras subsidiarias. Asimismo, debido a un conflicto de interés dentro de la compañía se tiene que en la subsidiaria A la cantidad de dinero adicional que reciba después de los 3 millones (la asignación máxima), debe ser menor que dos veces la cantidad de dinero adicional que recibe la subsidiaria C después de los 9 millones (la asignación máxima).

Formule el problema lineal correspondiente.

4.9 Considere la red de distribución de agua



donde A,B,C y D son fuentes de abastecimiento cuya capacidad se indica en la figura; α,β,γ y δ, son puntos de unión de avenidas de agua; y 1,2,,...,8 son plantaciones cuyas necesidades de agua se especifican en la figura. Los costos de bombeo se indican en los arcos. Formule un modelo de programación lineal para resolver este problema de asignación de agua de las fuentes de abastecimiento a las plantaciones, a costo mínimo.

4.10 En la compañía de televisión TELEVAVOSA, el tiempo dedicado a comerciales se cobra de tres maneras distintas de acuerdo a la siguiente clasificación:

i. El comercial que se transmite de noche (horas pico) a P_1\$/min.

ii. El comercial que se transmite en días hábiles a P_2\$/min.

iii. El comercial que se transmite los sábados y domingos (antes de las 6 p.m.) a P_3\$/min.

La compañía vende bloques de tiempo a cuatro grandes agencias publicitarias que tienen un efecto significante en la determinación de precios. En particular, la agencia i,(i=1,...,4) desea adquirir un bloque de a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} minutos de cada uno de los tres tipos de tiempo, siempre y cuando no sobrepase el coato de A_i pesos por todo el bloque de tiempo. Además, se tienen varias agencias publicitarias menores a los que se venden en total M_1 minutos de noche, M_2 minutos de días hábiles y M_3 minutos de fin de semana.

TELEVAVOSA desea conocer los precios para los tiempos destinados a los comerciales de tal manera que el beneficio sea máximo.

Formule el modelo lineal de este problema.

4.11 La compañía de productos metálicos PM dejó de producir un cierto artículo debido a que no se obtenía ninguna ganancia. Como consecuencia de lo anterior, se disponen de los siguientes tiempos de máquina:

Tipo de máquina	Tiempo disponible (horas máquina)
Fresadora	500
Torno	350
Pulidora	150

La administración desea usar este tiempo desponible de máquina en la producción de uno o varios de los tres productos metálicos P_1, P_2 y P_3. El número de horas máquina requerido por unidad de cada uno de estos productos es, en horas máquina/unidad:

Tipo de máquina	P_1	P_2	P_3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Pulidora	3	0	2

El departamento de ventas indica que el potencial de ventas para los productos P_1 y P_2 supera la máxima tasa de producción y que el potencial de ventas del producto P_3 es de 20 unidades por semana. La ganancia por unidad obtenida en los productos P_1, P_2 y P_3 es de \$3000, \$1200 y \$1500, respectivamente. La empresa desea determinar las cantidades de producto P_1, P_2 y P_3 que debe producirse para obtener la máxima ganancia. Formule el correspondiente modelo de programación lineal.

4.12 Una empresa está tratando de decidir cual sería su política óptima de compras, almacenamientos y ventas de un cierto producto para los $j=1,\ldots,n$ períodos de tiempo que constituyen su horizonte de planeación.

Sean

k = capacidad de almacenamiento.

x_o= cantidad inicial de inventario en el almacen.

x_j= compras en el período j.

y_j= ventas en el período j.

p_j= precio unitario de venta del producto en el período j.

c_j= costo unitario (de compra) del producto en el período j.

Considere además las siguientes suposiciones:

i. El producto se viene siempre en condiciones de competencia perfecta.

ii. Las ventas se tienen que hacer necesariamente del inventario físico existente al inicio de cada período.

iii. El producto se compra siempre en condiciones de competencia perfecta. La cantidad a comprar está limitada únicamente por la capacidad de almacenamiento disponible.

Con las definiciones y suposiciones anteriores formule el correspondiente modelo linel. Indique sise requieren más suposiciones y cuales serán estas.

4.13 Un inversionista tiene la posibilidad de invertir en dos tipos diferentes de sociedades de inversión. Al final de cada año el inversionista liquida su inversión y reinvierte. Las utilidades anuales de las sociedades dependen de como fluctúa anualmente el mercado de valores de Nueva York. Ultimamente este mercado ha estado oscilando alrededor del nivel 1000 del índice industrial Dow Jones de acuerdo a las probabilidaes indicadas en la siguiente matriz:

I.I.D.J.	900	1000	1100
900	0.3	0.5	0.2
1000	0.1	0.5	0.4
1100	0.1	0.4	0.5

Cada año que el mercado sube (o baja) 100 puntos, la sociedad 1 tiene utilidades (o pérdidas) de \$10. Si el mercado sube (o baja) 200 puntos en un año, la sociedad 1 tiene utilidades (o pérdidas) de \$50, mientras que la sociedad 2 tiene utilidades (o pérdidas) de sólo \$20. Si el mercado no cambia, no hay utilidad o pérdida en las dos sociedades. Formule este problema como un problema de programación lineal.

4.14. Una empresa tiene que tomar la desición de si comprar o fabricar internamente un conjunto de n productos. Se cuenta con la siguiente información al respecto. La matriz $T=(t_{ij})$ indica los tiempos actuales de fabricación internos del producto i en la máquina j (j=1,...,m). Se tienen disponibles para el período de planeación considerado b_j unidades de tiempo para cada máquina de la empresa y se requiere entregar una cantidad K_i de cada producto debido a compromisos contraídos. Se cuenta además con información sobre los precios de compra p_i de los productos y sus respectivos costos internos de fabricación c_i. ¿Cómo formularía este problema de decisión?

4.15 Un productor de jabón tiene tres plantas localizadas en San

Luis Potosí, Puebla y Durango, y tiene 5 bodegas principales localizadas en Monterrey, Guadalajara, D.F., Chihuahua y Mérida.

Las ventas esperadas en cada bodega para el año que entra son:

Bodega	Ventas anuales (miles de cajas)
D.F.	60
Guadalajara	30
Monterrey	50
Chihuahua	20
Mérida	10

Los costos de mandar de cada planta a cada bodega son (en pesos por cada 1000 cajas):

Fab/Bod.	D.F.	Guad.	Mont.	Chih.	Mérida
S.L.P.	150	150	80	200	240
Puebla	120	220	250	260	200
Durango	210	170	150	180	280

Las capacidades de producción de cada planta son:

Planta	Capacidad (miles de cajas)
S.L.P.	100
Puebla	60
Durango	50
	210

Se desea saber que plantas tienen que surtir a que bodegas de manera que se satisfagan las demandas esperadas y que se minimice el costo de transporte.

4.16 El Consejo de Seguridad vial del Departamento de Tránsito del D.D.F. tiene para el año de 1978 asignado un presupuesto de un millón de pesos para ser invertidos en diferentes programas de seguridad vial que incluye la previsión de muertes por accidentes de tránsito y la reducción de daños a propiedad debidos también a accidentes.

El consejo ha contemplado cuatro posibles proyectos, estos y la información relevante se incluyen en la tabla siguiente:

TABLA

Proyecto.	Límite de Inversión en el Proyecto.	Estimación del N°de muertes evitadas por cada $10000 gastados.	Estimación de reducción en daños materiales por cada $10000 gastados.
1. Publicidad al uso de cinturones de seguridad.	600,000	.33	$ 0
2. Investigación en el diseño de señalización de semáforos.	200,000	.25	50,000
3. Investigación y presión a las Cías. de Autos para utilización de equipos de mayor seguridad.	450,000	.15	120,000
4. Inversión en educación vial.	750,000	.27	40,000

Los Directores del Consejo no se ponen de acuerdo sobre a cual de los dos objetivos debe darsele mayor importancia (evitar muertes o evitar daños materiales), sin embargo, piensan que una vida humana no tiene precio pero existen dos alternativas que tienen la misma capacidad de salvar vidas, se preferirá aquella que ahorre más dinero en daños materiales.

Por último, los Directores de Consejo han decidido que para poder comparar los dos objetivos señalados, se le dará a cada vida humana un valor implícito de $450,000, ya que esa cantidad utiliza el gobierno para la responsabilidad civil de causar una muerte.

Formule un problema de programación lineal que represente la óptima asignación del presupuesto a los diferentes proyectos, basado en la información presentada.

4.17 La Comisión Federal de Electricidad está planeando la construcción de nuevas plantas generadoras de energía eléctrica en el área de Chihuahua, para los próximos 10 años. Es posible construir cuatro tipos de plantas: Termoeléctricas, Geotérmicas, Hidroeléctricas y Nucleares.

El consumo de electricidad está basado en 3 características. La primera es el uso total anual, el requerimiento en el área se estima de 400 millones de kilowatts/hora en el 10°año. La segunda característica es el pico de utilización de energía, la necesidad pico estimada es de 3,000 millones de kilowatts en el 10°año. La tercera característica es la energía garantizada de salida. El requerimiento para el 10° año es de 2,000 millones de kilowatts de energía garantizada.

Las cuatro posibles plantas varían en la forma en que satisfacen estas características, por ejemplo, las Nucleares pueden cubrir un alto pico de consumo, mientras que las Termoeléctricas no pueden.

Las características de cada tipo de planta se muestran en la tabla anexa. Cada una está medida en términos de unidad de capacidad. La Unidad de capacidad se define como la capacidad de producir 1 millón de kilowatts-hora por año.

Los costos de operación y los costos de inversión varían considerablemente para los diferentes tipos de plantas.

La última columna muestra los costos totales incluyendo el costo de inversión y los costos de operación.

La compañía quiere desarrollar un plan de 10 años para determinar que tipos de plantas y de que capacidades deben ser construidas para satisfacer los requerimientos a un costo total mínimo. Sin embargo, se disponen por presupuesto solamente de 35,000 millones de pesos para las inversiones iniciales en el período de 10 años.

Características de Plantas Eléctricas por unidad (1millón de kilowatts-hora) de generación anual.

TIPO	Energía Garantizada (MM kilowatts).	Energía Pico (MM kilowatts).	Costos de Inversión (MM pesos)	Costo total (Inv.+Oper.) (MM pesos)
Termoeléctrica	0.15	0.20	30	65
Hidroeléctrica	0.10	0.10	40	42
Geotérmica	0.10	0.40	60	64
Nuclear	0.80	0.90	100	110

Formule este problema como un problema de programación lineal.

4.18 Una empresa manufactura un producto por un lapso de n períodos (meses) para cubrir la demanda. En el período i, la demanda ri (unidades) debe ser cubierta de la producción de ese período X_i y/o del inventario acumulado de pasados períodos. O sea que es posible producir más de ri unidades en el período i con el sobrante usado para cubrir la demanda de uno o varios períodos en el futuro.

La demanda en todos los peródos debe ser cubierta. Si el nivel de producción en el período i se aumenta sobre el nivel del período i-1 (si $X_i > X_{i-1}$) un costo de a_i por unidad de exceso es incurrido. Si $X_i < X_{i-1}$ un costo de b_i por unidad de decrecimiento es incurrido.

Hay un costo de C_i pesos por mantener una unidad en el inventario por el período i.

El objetivo es encontrar la programación de producción que minimice los costos totales.

Se desea además que el inventario al final de los períodos, o sea I_n, sea cero.

C A P I T U L O V

EL METODO SIMPLEX

5.1 El método simplex nos permite, una vez determinada cualquier solución básica factible inicial (punto extremo), obtener una solución básica factible óptima en un número finito de pasos o iteracciones. Dicha solución básica factible inicial pertenece al conjunto de restricciones de un problema en la forma estándar. Los pasos o iteraciones, antes mencionados, consisten en encontrar una nueva solución básica factible cuyo valor correspondiente de la función objetivo sea menor que el valor de la función objetivo de la solución básica factible precedente. Este proceso se continúa hasta que se alcanza una solución mínima (problema de minimización). Por la presentación del capítulo anterior, tenemos que todas las soluciones básicas factibles (puntos extremos) tienen asociadas m vectores linealmente independientes. Por lo tanto, limitaremos nuesta búsqueda a aquellas soluciones que son generadas por m vectores linealmente independientes (matriz base B). Observamos que hay un número infinito de tales soluciones.

5.2 Método de Pivoteo para la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Es esencial que entendamos este procedimiento de solución de ecuaciones lineales simultáneas, para tener una idea clara del método simplex.

Consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1_n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2_n}x_n = b_2 \qquad (5.1)$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

donde $m \leq n$. En forma matricial, podemos escribir

$$x = b \qquad (5.2)$$

En el espacio R^n podemos interpretar este sistema de ecuaciones como una colección de m relaciones lineales que deben ser satisfechas por un vector $\dot{x}$. Denotando por a_i la i-ésima fila podemos expresar a (5.1) como

$$a_1\ x = b_1$$
$$a_2\ x = b_2 \qquad (5.3)$$
$$a_m\ x = b_m$$

Lo cual corresponde a una interpretación de (5.1) como un conjunto de m ecuaciones.

Si $m < n$ y las ecuaciones son linealmente independientes, entonces existe más de una solución al sistema de ecuaciones lineales (ver Apéndice A). Una solución única se obtiene, por lo tanto, si $n - m$ ecuaciones lineales independientes y adicionales son consideradas. Por ejemplo, podemos introducir $n - m$ ecuaciones de la forma $e_k\ x = 0$, donde e_k es el k - ésimo vector unitario en R^n,(lo cual es equivalente a considerar $\ddot{x}_k = 0$),en cuyo caso obtenemos una solución básica de (5.1). Diferentes soluciones básicas se obtienen considerando diferentes ecuaciones adicionales de esta forma especial.

Si las ecuaciones (5.3) son linealmente independientes, podemos reemplazar una ecuación dada por cualquier múltiplo distinto de cero de ella misma más cualquier combinación lineal de las restantes ecuaciones del sistema. Este método se conoce como el método de eliminación Gaussiana (ver Apéndice A).

Al aplicar este método obtenemos una forma triangular o canónica de las ecuaciones. Es conocido, y se puede demostrar fácilmente, que si las primeras m columnas de a son linelmente independientes, el sistema (5.1) puede, por una sucesión de multiplicaciones y restas, convertirse a la siguiente forma canónica:

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & + y_{1,m+1} x_{m+1} + y_{1,m+2} x_{m+2} + \cdots + y_{1,n} x_n = y_{10} \\ & x_2 & + y_{2,m+1} x_{m+1} + y_{2,m+2} x_{m+2} + \cdots + y_{2,n} x_n = y_{20} \\ & & \vdots \\ & & x_m + y_{m,m+1} x_{m+1} + y_{m,m+2} x_{m+2} + \cdots + y_{m,n} x_n = y_{m0} \end{array} \quad (5.4)$$

Correspondiendo a esta representación canónica del sistema, las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se les llama básicas y al resto de las variables se les denomina no básicas. La correspondiente solución básica es entonces:

$$x_1 = y_{10},\ x_2 = y_{20},\ \ldots,\ x_m = y_{mo};\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$$

o en forma vectorial $x = (y_o, 0)$ donde y_o es de dimensión m y 0 es vector cero de dimensión n - m.

La matriz de coeficientes del sistema (5.4) en forma de tableau queda:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{1n} & y_{10} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{2n} & y_{20} \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{mn} & y_{mo} \end{array}$$

El método de solución por pivoteo consiste en que dado un sistema en forma canónica, suponemos que una variable básica pasa a ser no básica y una variable no básica pasa a ser básica, esto es, supongamos que en el sistema canónico (5.4) queremos reemplazar la variable básica x_p, $1 \leq p \leq m$ por la variable no básica x_q.

Esto lo podemos hacer si y sólo si y_{pq} es distinto de cero ya que el cambio se efectua dividiendo la fila p por y_{pq} de tal manera que la variable x_q tendrá por coeficiente la unidad en la p-ésima ecuación e inmediatamente despues multiplicamos la fila p por algún múltiplo de cada una de las demás filas y las restamos de tal manera que los coeficientes de x_q en las demás ecuaciones serán cero. Lo cual transforma la q-ésima columna del tableau donde tendremos solamente ceros a excepción del término en la p-ésima posición donde aparece la unidad, esto es, $y_{pq}=1$ y por lo tanto no afectamos las columnas de las otras variables básicas. Si denotamos por y_{ij} los coeficientes del nuevo sistema en la forma canónica así obtenido, entonces tenemos:

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{pj}}{y_{pq}} \times y_{iq} \qquad i \neq p \\[2ex] y'_{pj} - \dfrac{y_{pj}}{y_{pq}} \end{cases} \tag{5.5}$$

Las ecuaciones (5.5) son las ecuaciones de pivoteo que con mucha frecuencia nos encontraremos en programación lineal. El elemento y_{pq} en el sistema original se conoce como el <u>elemento pivote.</u>

<u>Ejemplo 5.1.</u> Consideremos el siguiente sistema en forma canónica:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_4 + x_5 - x_6 &= 5 \\ x_2 \quad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 &= -1 \end{aligned}$$

Vamos a encontrar la solución básica teniendo por variables básicas actuales a x_1, x_2 y x_3. Formando el tableau de coeficientes tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ \underbrace{0 \quad\; 0 \quad\; 1}_{B_1} & & & -1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_1^{-1}$$

El círculo indica el elemento que será nuestro primer pivote y corresponde a reemplazar x_1 por x_4 como variable básica.

$$\underbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{B_1^{-1}} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De nuevo, el círculo indica cual es el elemento que será el próximo pivote, esto es, queremos reemplazar x_2 por x_5, entonces obtenemos:

$$\underbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 3/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 1 \end{matrix}}_{B_3^{-1}} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 0 & -2/5 & 18/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & -1/5 & -1/5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/5 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y de nuevo el círculo indica el siguiente pivote para reemplazar en la base x_2 por x_5, esto es:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \underbrace{1 \quad -3 \quad -5}_{B_4^{-1}} & & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$B_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_4^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

De esta última forma canónica obtenemos una nueva solución básica:

$$x_4=4;\ x_5=2;\ x_6=1.$$

5.3. <u>Criterio para mejorar una solución básica factible.</u>

Dada una solución básica factible, vamos a descubrir un método para obtener una nueva solución básica factible que nos mejore el valor de la función objetivo.

Consideraremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Minimice } z=c\cdot x \\ &\quad \text{s.a} \\ &\qquad Ax=b \qquad\qquad (P) \\ &\qquad\ x \geq 0\ , \end{aligned}$$

donde A es una matriz m×n, de rango m; c, un vector renglón de n componentes; b, un vector columna de m componetes; x, un vector columna de n variables. Supongamos que tenemos una solución básica factible $(B^{-1}b,0)^T$ la cual nos proporciona un valor de la función objetivo z_0 dado por

$$z_0=c\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}=(c_B,\ c_R)\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}=c_BB^{-1}b \qquad (5.6)$$

Sea $x=(x_B,x_R)^T$ una solución factible arbitraria, por lo tanto, $x_B\geq 0$, $x_R\geq 0$. Esto es, x es la misma solución básica factible antes indicada, solo que ahora hecemos $x_R\geq 0$ para de esta manera analizar cual de las variables no básicas nos conviene meter a la base y así mejorar la solución.

$$b=Ax=[B,R]\begin{bmatrix}x_B\\x_R\end{bmatrix}=Bx_B+Rx_R \qquad (5.7)$$

Multiplicando (5.7) por B^{-1} y reordenando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned}x_B&=B^{-1}b-B^{-1}Rx_R\\&=B^{-1}b-\sum_{j\varepsilon J}B^{-1}a_jx_j \qquad (5.8)\end{aligned}$$

donde J es correspondiente conjunto de índices de las variables no básicas. Observamos que las ecuaciones (5.6) y (5.8) son suficientes para calcular el valor de la función objetivo, para esta solución factible, esto es:

$$\begin{aligned}z&=cx\\&=c_Bx_B+c_Rx_R\\&=c_B(B^{-1}b-\sum_{j\varepsilon J}B^{-1}a_jx_j)+\sum_{j\varepsilon J}c_jx_j\\&z_0-\sum_{j\varepsilon J}(z_j-c_j)x_j \qquad (5.9)\end{aligned}$$

donde $z_j=c_BB^{-1}a_j$ para cada variable no básica.

De la ecuación (5.9) observamos que resulta ventajoso si introducimos a la base la variable x_j la cual aumentará su valor desde el nivel cero, más aún,nos conviene que la variable x_j alcance un valor máximo, dentro de lo posible, pues de esta manera disminuimos el valor de la función objetivo. En vista de lo anterior podemos establecer el siguiente criterio. Fijamos cada variable no básica x_j al nivel cero, excepto aquella variable no básica x_k a la que corresponde el máximo valor positivo $z_k - c_k$. El nuevo valor de la función objetivo lo podemos calcular a partir de la ecuación (5.9), esto es:

$$z = z_0 - (z_k - c_k) x_k \qquad (5.10)$$

Al incrementarse, a partir de cero, el valor de x_k, las variables básicas se modifican, de acuerdo a la ecuación (5.8) obteniéndose:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} a_k x_k = \bar{b} - y_k x_k \qquad (5.11)$$

donde $y_k = B^{-1} a_k$ y $\bar{b} = B^{-1} b$.

Si denotamos las componentes de x_B y $\bar{b}$ por $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ y $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m$ respectivamente, la ecuación (5.11) queda:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \qquad (5.12)$$

De la ecuación (5.12) observamos que si $y_{ik} \leq 0$, entonces x_{B_i} se incrementa tanto como se haya incrementado x_k y por lo tanto x_{B_i} continua siendo no negativa. Sin embargo si $y_{ik} < 0$, entonces x_{B_i}

se incrementará tanto como se haya incrementado k. Con el objetivo de no violar la condición de no negatividad, x_k se incrementará hasta el punto en el cual la variable básica x_{B_r} decrezca a cero, donde r denota el índice para el cual x_{B_r} alcanza el nivel cero antes que las demás. Examinando la ecuación (5.12), resulta obvio que la primera variable que decrece hasta alcanzar el nivel cero corresponde al mínimo de b_i/y_{ik} para y_{ik} positiva, esto es:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \; ; \; y_{ik} > 0 \right\} \qquad (5.13)$$

En ausencia de degeneración $\bar{b}_r > 0$ y por lo tanto

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0.$$

De la ecuación (5.10) y del hecho de que $z_k - c_k > 0$ concluimos que $z < z_0$ y por lo tanto hemos mejorado el valor de la función objetivo, teniendo una nueva solución básica factible, pues x_k se incrementó desde el nivel cero hasta el nivel $\bar{b}_r/y_{rk}$. Sustituyendo $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$ en la ecuación (5.12) obtenemos el siguiente punto:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \bar{b}_r \qquad i=1,\ldots,m$$

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

$$x_j = 0 \; \forall j \in J, \text{ excepto } j=k \qquad (5.14)$$

De la ecuación (5.14) tenemos que $x_{B_r}=0$ y por lo tanto seguimos teniendo a lo más m variables positivas, asociadas a la nueva base cuyas columnas son

$a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_k, a_{r+1}, \ldots, a_m$ los cuales serán linealmente independientes si y solo si $y_{rk} \neq 0$. Esto es, la variable no básica x_k ha pasado a ser básica y la variable x_r ha salido de la base y pasa a ser variable no básica.

<u>Ejemplo 5.2.</u>

Minimice $z = x_1 + x_2$

s.a

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

La ilustración de este problema se proporciona en la figura 5.1.

Figura 5.1. Solución básica factible mejorada.

Introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4 para transformar el problema a la forma estándar tenemos que la matriz de restricciones es:

$$A = \left[a_1, a_2, a_3, a_4 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos la base $B = \left[a_1, a_2 \right]$, esto es, x_1 y x_2 son las variables básicas.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_R = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad z = 3$$

Estos puntos se muestran en la figura 5.1. Con el objeto de encontrar, si es posible, una nueva solución básica factible que mejore la función objetivo, procedemos a calcular $z_j - c_j$ para las variables no básicas, esto es:

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = (1,1) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = (1,1) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Por lo tanto dado que $z_3 - c_3 > 0$, el valor de la función objetivo disminuirá si aumentamos el valor de x_3. La nueva solución es dada por:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_3x_3$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} - \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} x_3$$

El máximo valor que puede alcanzar x_3 es 2, (ya que para un valor mayor de x_3, x_1 sería negativa). Por lo tanto, la nueva solución básica factible es:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = (0,1,2,0)^T \;;\; z=1$$

Esto es, x_3 entra a la base y sale x_1. Observamos que el nuevo punto ha mejorado el valor de la finción objetivo y el decremento de la misma es precisamente $(z_3-c_3)x_3=2$.

5.4. Criterio de optimalidad.

De la discusión anterior, concluimos que si para cada variable no básica x_j, $j\varepsilon J$ se satisface $z_j-c_j \leq 0$ hemos alcanzado el óptimo ya que para cualquier otra nueva solución básica tendríamos que $x_j > 0$ y por lo tanto el valor de la función objetivo se incrementaría en $(z_j-c_j)x_j$, alejándonos del óptimo.

En el caso de que se satisfaga $z_j-c_j < 0$ y para algún $j\varepsilon J$ se cumple la estricta igualdad, esto es, $z_k-c_k=0$ para $j=k\varepsilon J$ tenemos, en ausencia de degeneración, que si introducimos a la base x_k el valor de la función objetivo no se altera, lo cual nos indica la presencia de una solución óptima alternativa. A continuación ejemplificamos las dos situaciones, esto es, la presencia de una solución óptima única y de una solución óptima alternativa.

Ejemplo 5.3.

$$\text{Minimizar} \quad z = -3x_1 + x_2$$

s.a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Sea la base $B=\begin{bmatrix} a_1, a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} ;\ x_R = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z=-12$

Calculemos z_2-c_2 y z_3-c_3 correspondientes a las variables no básicas:

$$z_2-c_2=c_B B^{-1}a_2-c_2=(-3,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} -1=-7$$

$$z_3-c_3=c_B B^{-1}a_3-c_3=(-3,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} -0=-3$$

Dado que $z_j-c_j < 0 \ \forall\ j\varepsilon J$ la actual solución básica factible es óptima y además única, esto es $x=(4,0,9,5)^T$ es única. Este ejemplo se ilustra en la figura 5.2.

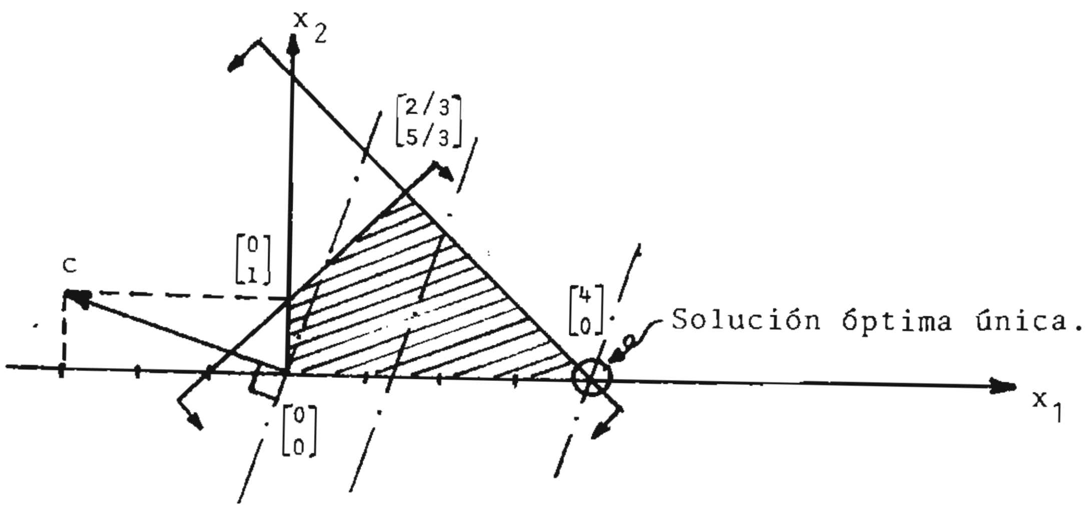


Figura 5.2. Solución óptima única.

<u>Ejemplo 5.4.</u> Consideraremos ahora el problema:

Minimizar $z=-2x_1-4x_2$

s.a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Observamos que la función objetivo a minimizar es distinta a la del ejemplo anterior pero las restricciones son las mismas. Consideremos la misma base, esto es:

$$x_B=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix},\quad x_R=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad z=-12$$

Calculemos c_j-z_j para todo $j\varepsilon J$, esto es:

$$z_2-c_2=c_BB^{-1}a_2-c_2=(-2,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+4=0$$

$$z_3-c_3=c_BB^{-1}a_3-c_3=(-2,0)\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}-0=-2$$

Si introducimos la variable básica x_2 a la base, obtenemos una nueva solución básica factible óptima ya que el valor de la función objetivo no cambia por ser $z_2-c_2=0$. Podemos determinar las soluciones básicas factibles óptimas estudiando el rango posible de variación de x_2 que satisfaga la condición de no negatividad, esto es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}a_2x_2$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_2$$

Entonces para toda $x_2 \leq 5/3$, la solución

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 5 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

es una <u>solución óptima</u> con $z^*=-8$. En particular si $x_2=5/3$ alcanzamos una solución básica factible óptima en la cual x_4 sale de la base, i.e., alcanzamos un punto extremo óptimo. Esto se ilustra en la figura 7.4.

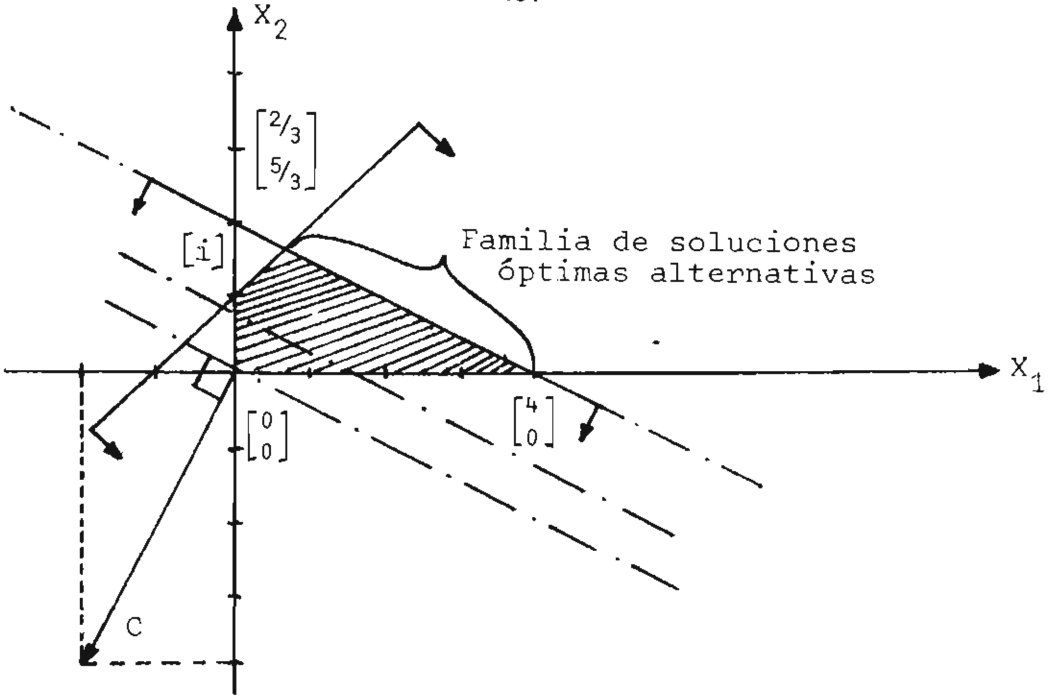


Figura 5.3 Soluciones óptimas alternativas.

5.5 No acotamiento.

Supongamos que tenemos una solución básica factible del sistema $Ax = b$, $x \geq 0$ con un valor de la función objetivo igual a z_0. Sea x_k la variable a entrar a la base, esto es, $z_k - c_k > 0$ con $y_k \leq 0$. De la ecuación (5.12) tenemos:

$$x_B = B^{-1}b - y_k \, x_k$$

y por ser $y_k \leq 0$, concluimos que x_k puede incrementar su valor indefinidamente sin que alguna de las variables básicas alcance valor negativo. De la ecuación (5.9) tenemos que el valor de la función objetivo está dado por

$$z = z_0 - (z_k - c_k) \, x_k$$

la cual por lo tanto tiende a $-\infty$ cuando $_k$ tiende a $+\infty$.

Resumiendo, si tenemos una solución básica factible con $z_k - c_k > 0$ para alguna variable no básica x_k y tenemos $y_k \leq 0$, entonces el óptimo es no acotado, tiende a $-\infty$ y x_k puede aumentar indefinidamente su valor, sin perder la factibilidad de la solución básica, esto es, x tiende a $+\infty$ por lo cual concluimos que en este caso tenemos un problema no acotado.

<u>Ejemplo 5.5.</u> Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar} \quad z = -x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

El problema se ilustra en la figura 5.4, donde observamos que el problema tiene un óptimo no acotado. Después de transformar el problema a la forma estándar, introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4, la matriz A de restricciones queda:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea la base $B = [a_3, a_4] \Rightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \; ; \; x_R = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

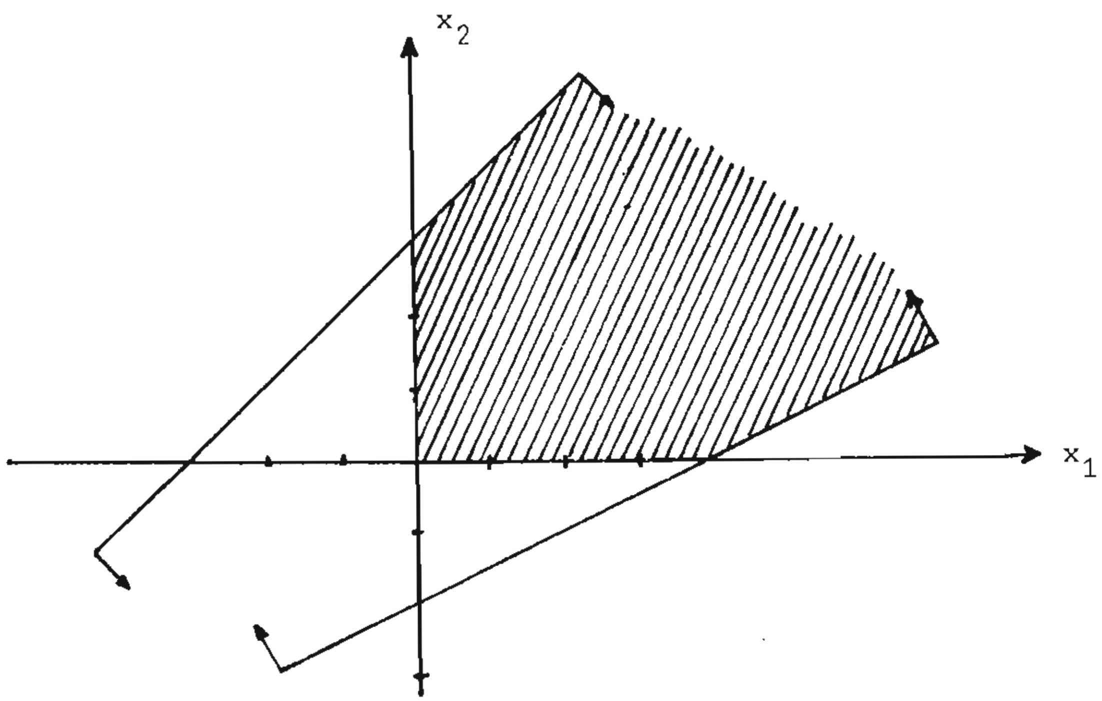


Figura 5.4. Solución óptima no acotada.

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = (0,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 = 1$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = (0,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 = 3$$

Por lo tanto entra a la base x_2 ya que $z_2 - c_2 > 0$ y es el más positivo.

Observamos que $x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_2x_2$ =>

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2$$

El máximo valor de x_2 es 3 y x_4 alcanza el nivel cero. Por lo tanto la nueva solución básica es $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T=(0,3,10,0)^T$

La nueva base $B = [a_3, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con inversa $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y

$R = [a_1, a_4]$. Calculemos $z_1 - c_1$ y $z_4 - c_4$, esto es:

$$z_1-c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = (0,3)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 = 4$$

$$z_4-c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = (0,-3) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -3$$

Observamos que $z_1-c_1 > 0$, pero $y_1=B^{-1}a_1= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por lo tanto la solución óptima es no acotada. En este caso, si x_1 se incrementa y x_4 alcanza el nivel cero tenemos:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_1 x_1$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 10 + x_1 \\ 3 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 0$$

Es obvio que esta solución es factible para toda $x_1 \geq 0$. En particular

$x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 - 2(3+x_1) + (10+x_1) = 4$

y

$-x_1 + x_2 + x_4 = -x_1 + (3+x_1) + 0 = 3$

Por lo tanto $z = -9-4x_1$, la cual tiende a $-\infty$ cuando x_1 tiende a $+\infty$. Por lo cual concluimos que la solución óptima es no acotada y se encuentra a través del rayo

$$\{(0,3,10,0) + x_1(1,1,1,0);\ x_1 \geq 0\}$$

5.6. Convergencia finita del método simplex en ausencia de degeneración.

En ausencia de degeneración, el método simplex termina en un número finito de iteraciones, obteniéndose una solución básica factible óptima o se concluye que el óptimo es un acotado. El algoritmo del simplex termina en un punto extremo óptimo sí $z_k - c_k \leq 0$ para un problema de minimización.

Otra forma de que termine el algoritmo es cuando $z_k - c_k > 0$ y $y_k \leq 0$. El algoritmo genera una nueva solución básica factible si $z_k - c_k > 0$ y $y_k \nleq 0$.

En ausencia de degeneración, $b_r > 0$, y por lo tanto $x_k = {}^{br}/y_{rk} > 0$ y la diferencia del valor de la función objetivo será para esta nueva solución:

$$x_k\ (z_k - c_k) > 0.$$

Esto quiere decir que la función objetivo decrece estrictamente en cada solución generada por el método simplex, siendo distintas cada una de las soluciones básicas factibles que se van generando. Como ya vimos, a lo más existen $\binom{n}{m}$ soluciones básicas, y además el método simplex no analiza todas, por lo tanto el número de iteraciones necesarias para determinar el óptimo o concluir que este no es acotado, es finito.

En presencia de degeneración, es posible que $\bar{b}r = 0$ y por lo tanto el decremento que se obtiene en la función objetivo al entrar a la base x_k es cero ya que $\bar{x}_k = 0$ y $(z_k - c_k)' \bar{x}_k = 0$. Por lo cual, en este caso, es posible que el algoritmo del simplex se desarrolle a través de una sucesión de bases, las cuales corresponden al mismo punto extremo y por lo tanto el valor de la función objetivo será el mismo. Lo anterior se conoce como ciclo y existen formas de evitarlo aplicando lo que se conoce como método lexicográfico, el cual no lo estudiaremos, pues se sale del alcance y extención del curso.

5.7 Algoritmo del método Simplex.

Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & Z = cx \\ \text{S.a.} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y consideremos el siguiente tableau del simplex, donde suponemos que las variables básicas son x_1, $x_2,\ldots,x_m$.

a_1	a_2	a_r	a_m	a_{m+1}	a_j	a_k	a_n	LD(Lado Derecho)
x_{B_1}	$x_{B_2}\ldots$	$x_{B_r}\ldots$	x_{B_m}	$x_{m+1}\ \ldots$	$x_j\ \ldots$	$x_k\ \ldots$	x_n	
1	$0\ \ldots$	$0\ \ldots$	0	$y_{1,m+1}\cdots$	$y_{1j}\cdots$	$y_{1k}\cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
0	$1\ \ldots$	$0\ \ldots$	0	$y_{2,m+1}\cdots$	$y_{2j}\cdots$	$y_{2k}\cdots$	y_{2n}	$\bar{b}_2$
0	$0\ \ldots$	$1\ \ldots$	0	$y_{r,m+1}\cdots$	$y_{rj}\cdots$	$y_{rk}\cdots$	y_{rn}	$\bar{b}_r$
0	$0\ \ldots$	$0\ \ldots$	1	$y_{m,m+1}\cdots$	$y_{mj}\cdots$	$y_{mk}\cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
0	$0\ \ldots$	$0\ \ldots$	0	$z_{m+1}-c_{m+1}\cdots$	$z_j-c_j\cdots$	$z_k-c_k\cdots$	z_n-c_n	$c_B\bar{b}$

El algoritmo del simplex emplea el método de solución del pivoteo. Si consideramos que $z_k - c_k > 0$ es el más positivo de los $z_i - c_i, i = m + 1,\ldots,n$ entonces x_k será la variable no básica que se incorpora a la base. Supongamos que

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1\leq i\leq m}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \ ,\ y_{ik} > 0 \right\}$$

entonces la variable básica x_{B_r} sale de la base, lo cual significa que debemos pivotear sobre el elemento y_{rk}, el cual se encuentra encerrado en un círculo en el tableau anterior, quedando este ahora, después del pivoteo, de la siguiente manera:

x_{B_1}	$x_{B_2}\cdots$	x_{B_r}	$\cdots x_{B_m}$	x_{m+1}	$\cdots$	x_j	$\cdots x_k \cdots$	x_n	LD
1	0	$\cdots -\frac{y_{1k}}{y_{rk}}$	$\cdots$ 0	$y_{1m+1}-\frac{y_{rm+1}}{y_{rk}}y_{1k}$	$\cdots$	$y_{ij}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{1k}$	$\cdots 0 \cdots$	$y_{rn}-\frac{y_{rn}}{y_{rk}}y_{1k}$	$\bar{b}_1-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}\bar{b}_r$
0	1	$\cdots -\frac{y_{2k}}{y_{rk}}$	$\cdots$ 0	$y_{2m+1}-\frac{y_{rm+1}}{y_{rk}}y_{2k}$	$\cdots$	$y_{2j}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{2k}$	$\cdots 0 \cdots$	$y_{2n}-\frac{y_{rn}}{y_{rk}}y_{2k}$	$\bar{b}_2-\frac{y_{2k}}{y_{rk}}\bar{b}_r$
		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	$\cdots \frac{1}{y_{rk}}$	$\cdots$ 0	$\frac{y_{rm+1}}{y_{rk}}$	$\cdots$	$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\cdots 1 \cdots$	$\frac{y_{rn}}{y_{rk}}$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	$\cdots -\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	$\cdots$ 1	$y_{mm+1}-\frac{y_{rm+1}}{y_{rk}}y_{mk}$	$\cdots$	$y_{mj}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{mk}$	$\cdots 0 \cdots$	$y_{mn}-\frac{y_{rn}}{y_{rk}}y_{mk}$	$\bar{b}_m-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}\bar{b}_r$
0	0	$\cdots \frac{z_k-c_k}{y_{rk}}$	$\cdots$ 0	$(z_{m+1}-c_{m+1})-\frac{y_{rm+1}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$	$\cdots$	$(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$	$\cdots 0 \cdots$	$(z_n-c_n)-\frac{y_{rn}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$	$c\bar{b}-(z_k-c_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

A continuación enunciamos el algoritmo del simplex.

Paso 0. Encuentre una solución básica factible inicial con base B. Forme el siguiente tableau inicial.

x_B	x_R	LD
I	$B^{-1}R$	$\bar{b}$
0	$c_B B^{-1}R-c_R=\ z_j-c_j;\ j\varepsilon J$	$c_B\bar{b}$

Paso 1. Sea $z_k - c_k =$ máximo $\{z_j - c_j \ ;\ j\varepsilon J\}$. Si $z_k-c_k \leq 0$, alto.

La solución actual es óptima. De otra manera continue al paso 2.

Paso 2. Examine y_k. Si $y_k \leq 0$, alto. La solución óptima es no acotada a lo largo del rayo

$$\left\{ \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} \; ; \; x_k \geq 0 \right\}$$

donde e_k es el vector unitario en R^m, esto es, es un vector de ceros excepto en la k-ésima posición que vale 1. Si $y_k \geq 0$, determine el índice r tal que:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \; ; \quad y_{ik} > 0 \right\}$$

Paso 3. Actualice el tableau, pivoteando en y_{rk}. La variable no básica x_k entra a la base y la variable básica x_{B_r} sale de la base. Regrese al paso 1.

Ejemplo 5.6. Sea el problema lineal:

Minimizar $z = x_1 + x_2 - 4x_3$

s.a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_j \geq 0; \; j=1,2,3.$$

Transformando el problema a la forma estándar, esto es, introduciendo las variables de holgura $_4$, $_5$, $_6$, obtenemos:

$$\text{Minimizar} \quad z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

s.a

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 & = & 4 \\ x_j \quad 0; \; j=1,\ldots,6. & & \end{array}$$

Dado que $b \geq 0$, la base inicial que seleccionamos es

$B = [\, a_4, a_5, a_6 \,] = I_3 \Rightarrow B^{-1}b = \overline{b} \geq 0$. Entonces, el tableau inicial queda:

Iteración 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD	
1	1	2	1	0	0	9	
1	1	-1	0	1	0	2	
-1	1	1	0	0	1	4	→ sale de la base x_6
-1	-1	4	0	0	0	0	

↑ entra a la base x_3

Iteración 2.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD	
3	-1	0	1	0	-2	1	→ sale de la base x_4
0	2	0	0	1	-1	6	
-1	1	1	0	0	1	4	
3	-5	0	0	0	-4	-16	

↑
entra a la base x_1

Iteración 3.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
0	2	0	0	1	1	6
0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3
0	-4	0	-1	0	-2	-17

Observamos que $z_j - c_j \leq 0 \ \forall \ j \varepsilon J \Rightarrow$ tableau óptimo y la solución óptima está dada por:

$x_1^* = 1/3, \ x_2^* = 0, \ x_3^* = 13/3, \ x_4^* = 0, \ x_5^* = 6, \ x_6^* = 0$

$z^* = -17$

Debemos notar que la base óptima está formada por las columnas

$$B = \left[a_1, a_5, a_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $B^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & - & 1/3 \end{bmatrix}$

Es importante observar que la inversa de la matriz base la podemos identificar del tableau óptimo del simplex.Supongamos que en el tableau original la base está formada por la matriz identidad. Entonces, el proceso de ir actualizando la base B en cada proceso iterativo corresponde a premultiplicar las m filas del tableau original por B^{-1} con lo cual obtenemos el tableau original ya que $y=B^{-1}R$, con lo cual transformamos la matriz identidad del tableau original en B^{-1}. Por lo tanto B^{-1} se puede determinar del tableau actualizado, considerando los elementos del nuevo tabelau que formaron la matriz identidad en el tableau original.

5.8. Modificación para un problema de maximización.

Un problema de maximización podemos transformarlo en uno de minimización, multiplicando la función objetivo por -1. También podemos resolver directamente el problema de maximización considerando que si z_k-c_k es el mínimo de las z_j-c_j para $j\varepsilon J$, alcanzaremos el óptimo cuando $z_k-c_k \geq 0$, y en lo demás aplicaremos exactamente los mismos pasos del método simplex que se siguen en un problema de minimización.

Ejemplo 5.7.

Suponga el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Max} \quad z = cx$$

s.a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $C = [1,1,0,0,0]$

Si $I = \{3,4,2\}$ representa el conjunto de índices básicos

y además sabemos que $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

determine que variable entra a la base y a que nivel, así como la variable que sale de la base, el cambio en la función objetivo y el nuevo vector y_r correspondiente a la variable que salió de la base, así como el nuevo índice básico y la nueva inversa de la base.

Solución

El tableau correspondiente será: $T = B^{-1}A$, esto es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la fila de costos reducidos para $j \notin I$, esto es, las variables no básicas, será:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} R - c_R$$

$$c_B = [c_3,\ c_4,\ c_2] = [\,0,\ 0,\ 1]$$

$$c_R = [c_1,\ c_5] = [\,1,\ 0]$$

$$R = [a_{T_1},\ a_{T_5}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_j - c_j = [\,0,0,1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [1,0] =$$

$$= [\,0,0,1] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [\,1,0] =$$

$$= [0,1] - [1,0] = [-1,1]$$

El vector del lado derecho queda:

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\3\end{bmatrix}.$$

y el valor de la función objetivo será:

$$z=c_B B^{-1}b=[0,0,1]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\7\\3\end{bmatrix}=(0,0,1)\begin{bmatrix}8\\7\\3\end{bmatrix}=3$$

por lo que el nuevo tableau queda:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
2	0	1	0	-1	5	
1	0	0	1	-2	1 →	sale x_4
0	1	0	0	1	3	
-1	0	0	0	1	3	
↑ entra x_1						

Entonces x_1 entra a la base a nivel 1, esto es, $x_1=1$. Pivote ando sobre y_{21} tenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
0	0	1	-2	3	3
1	0	0	1	-2	1
0	1	0	0	1	3
0	0	0	1	-1	4

La función objetivo vale ahora z=4.

El vector y_r pedido es y_4 y vale:

$$y_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El nuevo índice básico es I={3,1,2} y la inversa de esta base es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.8. Considere el siguiente tableau el cual es óptimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
0	2	0	0	1	1	6
0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3
0	-4	0	-1	0	-2	-17

el cual corresponde a un problema de minimización en el cual las restricciones son del tipo $\leq$. Determine el problema original.

Solución.

Sea To el tableau original y Ta el actual tableau óptimo, entonces se tiene:

$$T_o = B\, T_a$$

$$T_o = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lado derecho actual $= B^{-1}b$, LD original $= b = BB^{-1}b \Rightarrow$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dado que las restricciones son del tipo $\leq$ se tiene que las variables x_4, x_5 y x_6 son de holgura y por lo tanto c_4, c_5 y c_6 valen cero.

$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$ donde $c_B = (c_1, 0, c_3)$

$$z_4 - c_4 = -1 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = (c_1, 0, c_3) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 =$$

$$= (1/3c_1 + 1/3c_3, 0, -2/3c_1 + 1/3c_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1/3c_1 + 1/3c_3 = -1$$

$\Rightarrow c_1 = -3 - c_3$ --------- (1)

$$z_6 - c_6 = -2 = c_B B^{-1} a_6 - c_6 = (\tfrac{1}{3}c_1 + \tfrac{1}{3}c_3, 0, -\tfrac{2}{3}c_1 + \tfrac{1}{3}c_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\tfrac{2}{3}c_1 + \tfrac{1}{3}c_3$$

$$\Rightarrow c_1 = 3 + \frac{c_3}{2} \quad - - - \quad (2)$$

De (1) y (2): $-3 - c_3 = 3 + \frac{c_3}{2} \Rightarrow c_3 = -4$

$$\Rightarrow c_1 = 1$$

$$z_2 - c_2 = -4 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 =$$

$$= (1/3c_1 + 1/3c_3, 0, -2/3c_1 + 1/3c_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c_2 =$$

$$= 1/3c_1 + 1/3c_3 - 2/3c_1 + 1/3c_3 - c_2$$

$$= -1/3c_1 + 2/3c_3 - c_2$$

$$= -4$$

$$\Rightarrow c_2 = -1/3c_1 + 2/3c_3 + 4$$

$$\Rightarrow c_2 = 1$$

Por lo tanto el tableau original será:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
1	1	2	1	0	0	9
1	1	-1	0	1	0	2
-1	1	1	0	0	1	4
-1	-1	4	0	0	0	0

y el problema original será:

$$\text{Min.} \quad z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

s.a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, \ j=1,2,3.$$

5.9. Variables artificiales.

Es frecuente, que para encontrar una solución básica factibel inicial, tengamos la necesidad de introducir, independintemente de la necesidad de variables de holgura, variables artificiales las cuales nos permiten tener una base inicial, esto es, la matriz identidad. Vamos a ver a continuación algunos casos en que se hace necesaria la introducción de varibles artificiales.

i. Si las restricciones del problema son de la forma $Ax \geq b$, $x \geq 0$, donde $b \geq 0$, al introducir el vector de holgura x_H obtenemos:

$Ax-x_H=b;\ x \geq 0;\ x_H \geq 0.$

Observamos que la matriz de restricción $[A, -I]$ no contiene la base inicial requerida por el método simplex, esto es, la matriz identidad. Debemos agregar entonces, un nuevo vector artificial x_A y el sistema de restricciones queda:

$$Ax-x_H+x_A=b;\ x > 0;\ x_H > 0,\ x_A \geq 0$$

es decir $[A, -I, I] \begin{bmatrix} x \\ x_H \\ x_A \end{bmatrix} = b$

Consideremos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &> 4 \\ -3x_1 + 4x_2 &> 5 \\ x_1 > 0,\ x_2 &> 0 \end{aligned}$$

Introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4 tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 4 \\ -3x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 &= 5 \\ x_j > 0,\ j=1,\ldots,4 & \end{aligned}$$

Observamos que la matriz de restricciones no contiene una submatriz identidad de orden 2. Por lo tanto. introducimos al problema las variables artificiales x_1^a y x_2^a, esto es:

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & + 2x_2 & - x_3 & & + x_1^a & - & =4 \\ -3x_1 & + 4x_2 & & - x_4 & & + x_2^a & =5 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ \ldots\ ;\ x_4 \geq 0;\ x_1^a \geq 0;\ x_2^a \geq 0$$

con lo cual tenemos ya una solución básica factible inicial con $x_1^a \geq 0$ y $x_2^a \geq 0$.

ii. Supongamos que las restricciones son de la forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$, pero el vector b no es no negativo, esto es, $b_i < 0$ para algún i, $i=1,\ldots,m$. Al introducir el vector de holgura x_H no podemos inicializar la solución haciendo $x=0$ ya que $x_H=b$ viola la restricción de no negatividad. Sea el siguiente sistema de restricciones:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & + x_2 & - 3x_3 & \leq -3 \\ -2x_1 & + x_2 & + 3x_3 & \leq\ \ 7 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Haciendo el cambio de signos a la primera restricción tenemos:

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 3$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0.$$

Introduciendo las variables de holgura x_4 y x_5 , el sistema queda:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad\qquad &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 &= 7 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\ \ldots,\ x_5 \geq 0.$$

Observamos que para tener una solución básica factible inicial debemos introducir una variable artificial x_1^a en la primera restricción, esto es:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad + x_1^a &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 7 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\ \ldots\ ;\ x_5 \geq 0;\ x_1^a \geq 0.$$

iii. Supongamos que tenemos el conjunto de restricciones $Ax = b$, $x \geq 0$ donde A es una matriz de orden $m \times n$ de rango m y la matriz identidad de orden m no es una submatriz de A. Por lo tanto para obtener una solución básica factible inicial debemos introducir variables artificiales en las restricciones adecuadas. Así sea el conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \quad &= 4 \\ 2x_1+3x_2 \quad -x_4 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Observamos que $x_3=4$ es una solución factible básica inicial, y si introducimos la variable artificial x_2^a en la segunda restricción, esta será nuestra segunda solución inicial con $x_2^a=18$, esto es, el sistema queda:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \quad &= 4 \\ 2x_1+3x_2 \quad -x_4+x_2^a &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ \ldots\ ;\ x_4 \geq 0;\ x_2^a \geq 0.$$

La manera de resolver los problemas lineales que involucran variables artificiales es tema de la siguiente sección.

5.10. Método de penalizaciones (método de las M grandes).

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Minimice} \quad z=cx \\ &\quad \text{s.a} \\ &\qquad Ax=b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Si una base conveniente no es determinada, introducimos el vector artificial x^a y el sistema de restricciones queda:

$$Ax+x^a=b$$

$$x \geq 0;\ x^a \geq 0.$$

La solución factible incial está dada por $x^a=b$ y $x=0$.
Lo indeseable de tener el vector artificial a un nivel mayor de cero, lleva a modificar la función objetivo donde ahora deberemos pagar una multa por tener una solución, donde el vector artificial no sea totalmente nulo. Esto es, el problema queda:

$$\text{Minimizar} \quad z=Cx+Mx^a$$

$$\text{s.a}$$

$$Ax+x^a=b$$

$$x \geq 0,\ x^a \geq 0,$$

donde M es un número positivo muy grande, tan grande como queramos. El término Mx^a se interpreta como la multa a ser pagada por cualquier solución donde $x^a \neq 0$.

La solución inicial $x = 0$, $x^a = b$ es factible en las nuevas restricciones y tiene un valor de la función objetivo muy indeseable, $M \cdot b$ por ser este muy grande (en el sentido positivo). Por lo tanto, el método simplex tratará de sacar de la base las variables artificiales y entonces continuar hasta encontrar la solución óptima del problema original.

Ejemplo 5.9.

$$\text{Minimizar} \quad z=x_1-2x_2$$

s.a

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

Aplicando el método de penalizaciones queda:

$$\text{Minimizar} \quad z=x_1-2x_2+Mx_1^a+Mx_2^a$$

s.a

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_1^a = 2$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_2^a = 1$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1 \geq 0;\ \ldots\ ;\ x_5 \geq 0;\ x_1^a \geq 0;\ x_2^a \geq 0.$$

El tableau del simplex queda:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD
1	1	-1	0	0	1	0	2
-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	3
-1	2	0	0	0	-M	-M	0

Multiplicando las filas 1 y 2 por -M y sumándoles la últi ma fila (fila de las $z_j - c_j$ o fila de costos reducidos) tenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD	
1	1	-1	0	0	1	0	2	
-1	1	0	-1	0	0	1	1	→
0	1	0	0	1	0	0	3	
-1	2M+2	-M	-M	0	0	0	3M	
	↑							

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD	
2	0	-1	1	0	1	-1	1	→
-1	1	0	-1	0	0	1	1	
1	0	0	1	1	0	-1	2	
2M+1	0	-M	M+2	0	0	-2M-2	M-2	
↑								

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD	
1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2	→
0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	3/2	
0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2	
0	0	1/2	3/2	0	-M-1/2	-M-3/2	-5/2	
			↑					

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD	
2	0	-1	1	0	1	-1	1	
1	1	-1	0	0	1	0	2	
-1	0	1	0	1	-1	0	1	→
-3	0	2	0	0	-M-2	-M	-4	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_4^a	LD
1	0	0	1	1	0	-1	2
0	1	0	0	1	0	0	3
-1	0	1	0	1	-1	0	1
1	0	0	0	-2	-M	-M	-6

Como $(z_j - c_j) \leq 0 \ \forall \ j \varepsilon J$ el último tableau es óptimo, por lo tanto $x_1^* = 0$; $x_2^* = 3$; $x_3^* = 1$; $x_4^* = 2$; $x_5^* = 0$; $x_1^{*a} = 0$; $x_2^{*a} = 0$; $z^* = 6$.

La sucesión de puntos generada en el espacio (x_1, x_2) se muestra en la figura 5.5.

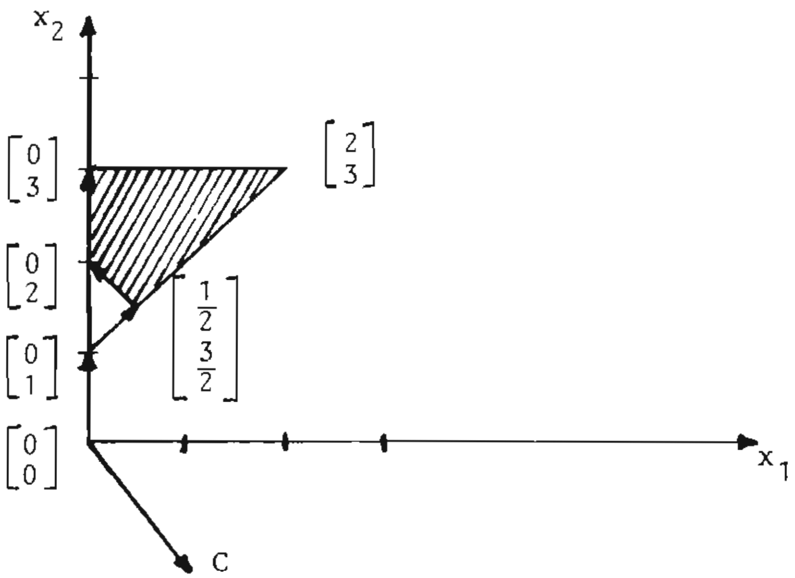


Figura 5.5. Ejemplo del método de penalizaciones.

5.11. <u>Análisis del método de penalizaciones.</u>

Consideremos el problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimice} \quad & z = cx \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax = b \qquad \text{(P)} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde no existe ninguna matriz identidad de orden m, sub-matriz a su vez de la matriz A de orden m×n y de rango m. Por lo tanto es necesaria la inclusión de un vector artificial x^a y entonces el problema (P) queda:

$$\begin{aligned} &\text{Minimice} \quad z = cx + Mx^a \\ &\text{s.a} \\ &\qquad Ax + x^a = b \qquad\qquad (P') \\ &\qquad x \geq 0; \; x^a \geq 0. \end{aligned}$$

Estamos interesados en obtener la solución de (P) y en el proceso de solución, se pueden presentar los siguientes casos:

CASO A. - Solución óptima finita de (P').

En este caso se presentan dos posibilidades. La primera es aquella donde la solución óptima a (P') tiene todas las variables artificiales a nivel cero. En la segunda posibilidad no todas las variables artificiales se encuentran a nivel cero. Estas variantes constituyen los subcasos A.1 y A.2, respectivamente y se analizan a continuación.

Sub-caso A.1. $(x^*, x^{*a}) = (x^*, 0)$ es la solución óptima de (P').

En este caso x^* es una solución óptima del problema (P).

Para demostrar esta aseveración, supongamos que $\bar{x}$ es una solución de (P) y observamos que $(\bar{x}, 0)$ es una solución factible al problema (P'). Si $(x^*, 0)$ es una solución factible óptima del problema (P) , entonces, $cx^* + 0 \quad c\bar{x} + 0$, esto es, $cx^* \quad c\bar{x}$. Por lo tanto x^* es una solución factible del problema (P) y por lo tanto x^* es la solución óptima de (P).

Subcaso A.2. (x^*,x^{*a}) es solución óptima de (P') y $x^{*a} \neq 0$.

Si M es un número positivo muy grande, podemos concluir que no existe solución factible de (P). Supongamos, que es solución factible de (P). Entonces (x,0) es una solución factible de (P') y por las condiciones de optimalidad de (x^*, x^{*a}) tenemos

$$cx^* + Mx^{*a} \leq cx + 0 = .cx.$$

Dado que M es muy grande y $x^{*a} \geq 0$ y $x^{*a} \neq 0$ y como x^{*a} corresponde a una de las soluciones básicas factibles, las cuales son finitas, la desigualdad anterior es imposible.

Por lo tanto x no puede ser solución factible de (P).

Caso B. (P') tiene una solución óptima no acotada.

Supongamos que durante la solución de (P'), la columna actualizada y_k es no positiva, esto es, $y_k \leq 0$, donde el índice corresponde al más positivo de los $z_j - c_j$. Entonces (P') tiene una solución óptima no acotada. Si todas las variables artificiales son iguales a cero, entonces el problema original, esto es, el problema (P) tiene una solución óptima no acotada. Por otra parte si al me-

nos una variable artificial es positiva, entonces el problema original es no factible.
Estos dos subcasos los discutimos a continuación con más detalle.

<u>Subcaso B.1: z_k-c_k=máximo$\{(z_j-c_j);\ z_j-c_j > 0;\ j\varepsilon J\}$, $y_k \leq 0$, y todas las variables artificiales son iguales a cero.</u>

A este subcaso le corresponde tener una solución factible en el problema original. Además, dado que P' es no acotado, existe una dirección $(d_1, d_2) \geq (0,0)$ del conjunto

$\{(x,x^a) : Ax + x^a = b,\ x \geq 0,\ x^a \geq 0$ tal que $cd_2+Md_2 < 0$

ya que esto precisamente es condición necesaria y suficiente para que (P') sea no acotado. Dado que M es muy grande y $d_2 \geq 0$, tenemos que si $cd_1+Md_2 < 0$ implica que $d_2=0$ y además $cd_1 < 0$. Pero d_1 entonces es la dirección sobre el conjunto $\{x : Ax=b,\ x \geq 0\}$ tal que $cd_1 < 0$ lo cual implica que (P) no tiene solución óptima acotada.

<u>Subcaso B.2: z_k-c_k=máximo $\{(z_j-c_j);\ z_j-c_j > 0;\ j\varepsilon J\}$ $y_k \leq 0$, y no todas las variables artificiales son iguales a cero.</u>

En esta situación no existe solución factible del problema original (P). Supongamos que la base consiste de las primeras m columnas de A, donde las columnas de 1 a la p están asociadas a las variables originales y la columna p + 1 a la m están asociadas a las variables artificiales. El tableau correspondiente se da a continuación.

$x_1 \ldots x_p$	$x_{p+1} \ldots x_m$	x_{m+1}	$\ldots x_j$	$\ldots x_n$	LD
$1 \ldots 0$	$0 \ldots 0$	y_{1m+1}	$\ldots y_{1j}$	$\ldots y_{1n}$	$\bar{b}_1$
$0 \ldots 0$	$0 \ldots 0$	y_{2m+1}	$\ldots y_{2j}$	$\ldots y_{2n}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\vdots$		
$0 \ldots 1$	$0 \ldots 0$	y_{pm+1}	$\ldots y_{pj}$	$\ldots y_{pn}$	$\bar{b}_p$
$0 \ldots 0$	$1 \ldots 0$	$y_{p+1+m+1}$	$\ldots y_{p+1j}$	$\ldots y_{p+1n}$	$\bar{b}_{p+1}$
$\vdots$			$\vdots$		
$0 \ldots 0$	$0 \ldots 1$	y_{mm+1}	$\ldots y_{mj}$	$\ldots y_{mn}$	$\bar{b}_m$

Observamos que $c_i = M$ para $i = p + 1, \ldots, m$. Para $j = m+1, \ldots, n$ tenemos:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{p} c_i y_{ij} + M \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) - c_j \qquad (5.15)$$

Es fácil notar que $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \quad 0 \forall j = m+1, \ldots, n.$

Para demostrarlo recordemos que $y_k \leq 0 \ \forall\ k \varepsilon J$

lo cual implica que $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ik} \leq 0$ es trivial. Por contradicción, supongamos que $\sum_{i=p}^{m} y_{ij} > 0$ para alguna x_j no básica, esto es, $j \varepsilon J$. De la ecuación (5.15), dado que M es muy grande se tiene que $z_j - c_j$ es un número positivo muy grande, violando la definición de

$z_k - c_k \ (z_k - c_k) = \text{máximo}\{(z_j - c_j),\ y_k \leq 0\}$

Por lo tanto:

$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leq 0 \ \forall\ j = m+1,\ldots,n$. Sumando las últimas m-p ecuaciones del tableau anterior, tenemos:

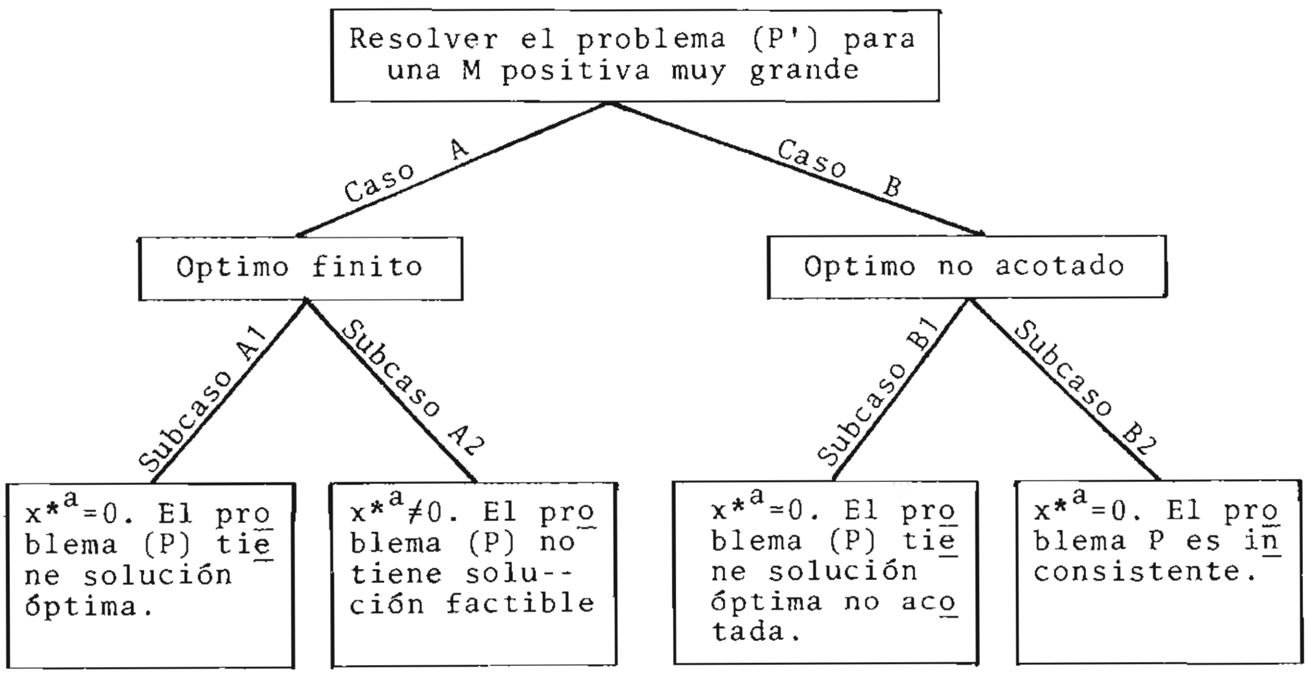
$$\sum_{i=p+1}^{m} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_1 \qquad (5.16)$$

Por contradicción, supongamos que el problema (P) tiene una solución factible. Entonces $x_i^a = 0$ para todas las varibles artificiales y por lo tanto $x_i = 0$ para $i = p+1,\ldots,m$.

Por otro lado $x_j \geq 0$ y $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leq 0$ para $j = m+1, m+2,\ldots,n$. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación (5.16) es no positivo. Pero el lado derecho de la misma ecuación es positivo ya que no todas las variables artificiales son iguales a cero. Esta contradicción demuestra que el problema original (P) no puede tener solución factible.

Debemos observar que no podemos concluir que el problema original (P) es inconsistente si alguna $z_j - c_j > 0$, $y_j \leq 0$ y no todas las variables artificiales son cero. Es necesario que utilicemos en la demostración el más positivo de las $z_j - c_j$.

Podemos resumir el análisis del método de penalizaciones de la siguiente manera:



5.12. El método de las dos fases.

En este método durante la primera fase reducimos las variables artificiales al nivel cero o concluimos que el problema original (P) no tiene solución factible. En la segunda fase minimizamos la función objetivo original a partir de la solución básica factible obtenida al final de la primera fase. Consideremos el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad z=cx \\ &\text{s.a} \\ &\qquad Ax=b \qquad\qquad (P) \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, el método de las dos fase consiste en:

FASE I. Debemos resolver el siguiente problema lineal, iniciando con la solución básica factible inicial $x=0$ y $x^a=b$.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad z_0=x^a \\ &\text{s.a} \\ &\qquad Ax+x^a=b \qquad\qquad (P') \\ &\qquad x \geq 0,\ x^a \geq 0. \end{aligned}$$

Si en el óptimo $x^a \neq 0$, entonces alto, el problema original no tiene solución factible. De otra manera, denotemos por x_B y x_R las variables básicas y no básicas, respectivamente, correspondientes al problema original (P) ya que implícitamente estamos suponiendo que todos los componentes del vector x^a han salido de la base.

Vamos a la fase II.

FASE II. Resolvemos el siguiente problema lineal, empezando con la solución básica factible $x_B=B^{-1}b$ y $x_R=0$.

$$\text{Minimizar } \overline{z} = c_Bx_B + c_Rx_R$$

$$\text{s.a}$$

$$x_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \qquad (P'')$$

$$x_B \geq 0;\ x_R \geq 0.$$

La solución óptima del problema original P es dada por la solución óptima del problema (P'').

Ejemplo 5.10.

$$\text{Minimizar } z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

La región factible y los pasos seguidos durante las fases I y II hasta alcanzar el óptimo se muestran en la figura 5.6. Después de la introducción de variables de holgura x_3, x_4 y x_5 y las variables artificiales x_1^a y x_2^a , tenemos:

$$\text{Minimizar } z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_1^a & = & 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_2^a & = & 1 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad & = & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots;\ x_5 \geq 0;\ x_1^a \geq 0;\ x_2^a \geq 0.$$

La fase I la iniciamos minimizando el siguiente problema:

Minimizar $x_0=x_1^a+x_2^a$

s.a

$$\begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_1^a & & =2 \\ -x_1 & +x_2 & & -x_4 & & & +x_2^a & =1 \\ & x_2 & & & +x_5 & & & =3 \end{array}$$

$x_j \geq 0;\ j=1,\dots,5;\ x_1^a \geq 0;\ x_2^a \geq 0$

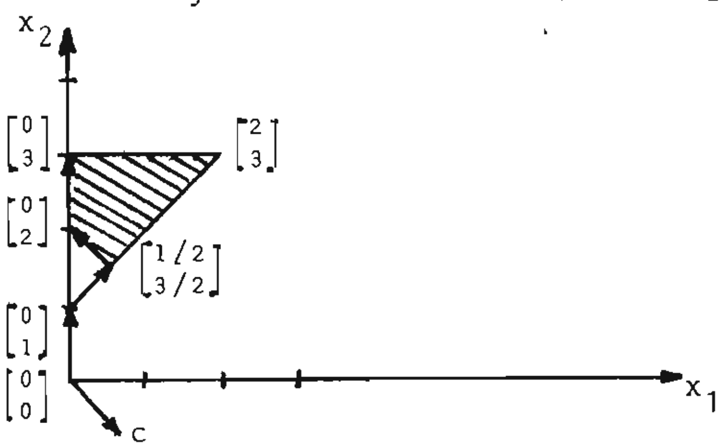


Figura 5.6. Método de las dos fases.

<u>FASE I.</u>

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD
1	1	-1	0	0	1	0	2
-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	3
0	0	0	0	0	-1	-1	0

Sumando las filas 1 y 2 a la última fila obtenemos:

$z_6-c_6=z_7-c_7=0$, esto es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD	
1	1	-1	0	0	1	0	2	
-1	1	0	-1	0	0	1	1	→
0	1	0	0	1	0	0	3	
0	2	-1	-1	0	0	0	3	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD	
2	0	-1	1	0	1	-1	1	→
-1	1	0	-1	0	0	1	1	
1	0	0	1	1	0	-1	2	
2	0	-1	1	0	0	-2	1	
↑								

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	LD
1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2
0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	3/2
0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2
0	0	0	0	0	-1	-1	0

El tableau anterior es el fin de la fase I pues $z_j - c_j \geq 0 \ \forall \ j \varepsilon J$ y $x_o^* = 0$. Debemos empezar la fase II con la solución básica factible $(x_1, x_2) = (1/2, 3/2)$ y la función objetivo original z será minimizada a partir del punto extremo (1/2, 3/2),(ver figura 5.6). En la fase II ya no consideraremos las variables artificiales.

FASE II.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
1	0	-1/2	1/2	0	1/2
0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
0	0	1/2	1/2	1	3/2
-1	2	0	0	0	0

Multiplicando las filas 1 y 2 por el 1 y -2 respectivamente y sumando estas a la fila de las $z_j - c_j$, logramos hacer

$z_1-c_1=0$ y $z_2-c_2=0$, esto es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
1	0	-1/2	1/2	0	1/2 →
0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
0	0	1/2	1/2	1	3/2
0	0	1/2	3/2	0	-5/2
			↑		

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
2	0	-1	1	0	1
1	1	-1	0	0	2
-1	0	1	0	1	1 →
-3	0	2	0	0	-4
		↑			

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
1	0	0	1	1	2
0	1	0	0	1	3
-1	0	1	0	1	1
-1	0	0	0	-2	-6

Dado que $z_j-c_j \leq 0 \; \forall \; j\varepsilon J$, el tableau anterior es óptimo y $x_1^*=0$, $x_2^*=3$ y $z^*=-6$. Observamos que la fase I traslada la solución del problema del punto extremo no factible (0,0) al punto extremo no factible (0,1) y finalmente al punto extremo factible (1/2, 3/2). Desde este punto, la fase II traslada la solución al punto extremo factible (0,2) y finalmente al punto extremo óptimo (0,3), tal y como se ilustra en la figura 5.6. El propósito de la fase I es lograr alcanzar un punto extremo de la región factible, el cual toma como punto inicial la fase II hasta alcanzar el punto óptimo.

5.13. Análisis del método de las dos fases.

Al final de la fase I se pueden presentar dos casos: $x^a \neq 0$ o $x^a = 0$. Ambos casos los discutimos a continuación.

Caso A: $x^a \neq 0$.

Si $x^a \neq 0$, el problema original no tiene solución factible, ya que si existe $x \geq 0$ con $Ax=b$, entonces $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución factible del problema de la fase I y $0x+0=0 < x^a$ violando la optimalidad de x^a.

Caso B: $x^a = 0$.

Este caso lo podemos dividir en dos subcasos. En el subcaso B.1 todas las variables artificiales salen de la base al final de la fase I. El subcaso B.2 corresponde a la presencia de al menos una variable artificial en la base, a nivel cero. Ambos subcasos los discutimos a continuación.

Subcaso B 1. (Todas las variables artificiales salen de la base).

Dado que al final de la fase I tenemos una solución básica factible formada totalmente por las variables legítimas, el vector x lo descomponemos en x_B y x_R y entonces tenemos el siguiente tableau al final de la fase I:

x_B	x_R	x^a	LD
I	$B^{-1}R$	B^{-1}	$B^{-1}b$
0	0	-1	0

Ahora podemos comenzar con la fase II, después de omitir las columnas correspondientes a x^a. (En las columnas de x^a aparece B^{-1}, por lo tanto ninguna variable artificial volverá a entrar a la base). Las $z_j - c_j$ para las variables no básicas están dadas por el vector $c_B B^{-1}R - c_R$ el cual puede ser fácilmente calculado de la matriz $B^{-1}R$ dada en el tableau final de la fase I. El tableau inicial de la fase II es dado a continuación y a partir de este tableau aplicamos el método simplex para encontrar la solución óptima.

x_B	x_R	LD
I	$B^{-1}R$	$B^{-1}b$
0	$c_B B^{-1}R-c_R$	$c_B B^{-1}b$

Subcaso B 2. (Al menos una variable artificial a nivel cero pertenece a la base).

En este caso procedemos directamente a la fase II, o antes eliminamos la(s) varible(s) artificial(es) básica(s) y en-seguida proseguimos con la fase II. Estas dos acciones las discutimos a continuación con más detalle.

i. Proceder directamente a la fase II.

Primero eliminamos las columnas correspondientes a las varibles artificiales no básicas de la fase I. El tableau inicial de la fase II contiene entonces algunas variables legítimas y alguna(s) variable(s) artificial(es) a nivel cero. La fila de costos reducidos, esto es, la fila de los $z_j - c_j$ se constituye para la función objetivo original de tal manera que todas las variables legítimas que son básicas tienen asociados a ellas $z_j - c_j = 0$. Los coeficientes de costos de las variables artificiales (que son básicas) tienen también un valor cero. Procedemos a resolver la fase II, por el método simplex, cuidando mucho de que nunca las variables artificiales alcancen un nivel positivo ya que en este caso, destruimos la factibilidad. Para ilustrar lo anterior, consideremos el siguiente tableau, donde por facilidad suponemos que las variables básicas legítimas son $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y las variables artificiales $x^a_{n+k+1}, \ldots, x^a_{n+m}$ (las variables artificiales $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ salieron de la base durante la fase I).

$x_1 \dots x_k$	x_{k+1}	$\dots x_j$	$\dots x_n$	$x_{n+k+1} \dots x_{n+m}$	LD
$1 \dots 0$	y_{1k+1}	$\dots y_{ij}$	$\dots y_{in}$	$0 \dots 0$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
$0 \dots 1$	y_{kk+1}	$\dots y_{kj}$	$\dots y_{kn}$	$0 \dots 0$	$\bar{b}_k$
$0 \dots 0$	y_{k+1k+1}	$\dots y_{k+1,j}$	$\dots y_{k+1,n}$	$1 \dots 0$	0
$\vdots \quad \vdots$		$\vdots$		$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
$0 \dots 0$	y_{rk+1}	$\dots y_{rj}$	$\dots y_{r,n}$	$0 \dots 1 \dots 0$	0
$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
$0 \dots 0$	y_{mk+1}	$\dots y_{mj}$	$\dots y_{m,n}$	$0 \dots 0 \dots 1$	0
$0 \dots 0$	$z_{k+1}-c_{k+1}$	$\dots z_j-c_j$	$\dots z_n-c_n$	$0 \dots 0 \dots 0$	$c_B\bar{b}$

Supongamos que $z_j - c_j > 0$ es el más positivo de las $z_i - c_i$, $i = k+1,\dots,n$, esto es, x_j entra a la base. Si $y_{ij} \geq 0$ para $i = k+1,\dots,m$, entonces la variable artificial x_{n+i} permanece al nivel cero, mientras x_j entra a la base y realizamos la prueba del radio mínimo. De otra manera, supongamos que al menos una componente $y_{rj} \leq 0$ $(r = k+1,\dots, m)$, entonces la variable artificial x_{n+r} alcanza un nivel mayor que cero cuando x_j se incrementa, lo cual está prohibido dado que destruimos la factibilidad. Lo anterior es posible hacerlo si pivoteamos sobre y_{rj} en lugar de utilizar la prueba del radio mínimo usual.

Por lo tanto si $y_{rj} < 0$, pivoteamos sobre y_{rj} manteniendo de esta manera la factibilidad, dado que el lado derecho de la correspondiente fila $(\bar{b}_r)$ es cero. En este caso x_j entra a la base y la variable artificial x_{n+r} sale de la base y el valor de la función objetivo permanece constante. Con esta pequeña modificación, utilizamos el método simplex para resolver la fase II.

ii. Se eliminan las variables básicas artificiales al final de la fase I.

En lugar de adoptar el procedimiento anterior, el cual nos garantiza que las variables artificiales siempre estarán en el nivel cero durante la fase II, podemos eliminar totalmente las variables artificiales antes de proceder con la fase II. El siguiente tableau el cual se obtiene al final de la fase I, nos muestra que la fila de costos no desempeña ningún papel importante en el siguiente análisis , razón por la cual lo omitimos.

Variables básicas legítimas.	Variables no básicas legítimas.	Variables no básicas artificiales.	Variables básicas artificiales.	
$x_1\ x_2 \dots x_k$	$x_{k+1} \dots x$	$x_{n+1} \dots x_{n+k}$	$x_{n+k+1} \dots x_{n+m}$	
1 0 ... 0			0 ... 0	$\bar{b}_1$
0 1 ... 0	R_1	R_3	0 ... 0	$\bar{b}_2$
.			.	.
.			.	.
.			.	.
0 0 ... 1			0 ... 0	$\bar{b}_k$
0 0 ... 0			1 ... 0	0
.			.	.
.	R_2	R_4	.	.
.			.	.
0 0 ... 0			0 ... 1	0

Vamos a proceder a sacar de la base las variables artificiales $x_{n+k+1}, \dots, x_{n+m}$ y reemplazarlas por las varibles no básicas legítimas $x_{k+1}, \dots, x_n$. Por ejemplo, la variable básica artificial x_{n+k+1} la podemos sacar de la base, pivoteando en cualquier elemento no nulo de la primera columna de R_2. La variable no básica legítima correspondiente entra a la base, saliendo de ella x_{n+k+1}, y actualizando totalmente el tableau continuamos con el mismo procedimiento hasta eliminar de la base las variables básicas artificiales restantes, con lo cual la base estará constituida ahora unicamente de variables legítimas, y procedemos con la fase II descrita en el caso B. Sin embargo, en el caso de que el tableau final correspondiente a la fase I tuviera la matriz $R_2=0$, ninguna de las variables básicas artificiales puede salir de la base introduciendo en ella alguna de las variables no básicas legítimas. Si denotamos a $(x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ y $(x_k, \dots, x_n)^T$ por x_1 y x_2 respectivamente y descomponiendo la matriz A y el vector b de acuerdo a $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ respectivamente, entonces es fácil observar que el sistema

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ m-k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

se puede transformar en

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ m-k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} I & R_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que constituye una sucesión de operaciones elementales con matrices. Esto muestra que el rango de $(A, b) = k < m$, esto es, las últimas $m - k$ ecuaciones son matemáticamente redundantes y $R_1 = A_{11}^{-1} A_{12}$ y $\bar{b}_1 = A_{11}^{-1} b_1$. Las últimas $m-k$ filas del último tableau pueden ser eliminadas y entonces podemos proceder con la fase II sin icluir ya las variables artificiales. Las variables básicas serán $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y las variables no básicas $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

El tableau inicial de la fase II, en este caso, será como el que a continuación exponemos, donde $c_B = (c_1, \ldots, c_k)$.

$x_1 \ldots x_k$	$x_{k+1} \ldots x_n$	b
I	$A^{-1} \quad A_{12} = R_1$	$\bar{b}_1$
0	$c_B A_{11}^{-1} A_{12} - c_R$	$c_B \bar{b}_1$

Bibliografía.

1. BAZARAA, M.S. JARVIS, J.J. "Linear Programming and Network Flows". John Wiley & Sons, Inc. 1977.
2. BRADLEY, S.P. HAX, A.C. MAGNANTI, T.L. "Applied Mathematical Programming". Addison-Wesley Publishing Co. 1977.
3. FUENTES, M.S. Notas no publicadas del curso de Teoría y Técnicas de Optimización I. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM. 1976.
4. HADLEY, A. "Linear Programming". Addison Wesley. 1962.
5. LUENBERGER, D.G. "Introduction to Linear and Nonlinear Pro-

gramming". Addison Wesley. 1973.

6. MURTY, K.G. "Linear and Combinatorial Programming". John Wiley & Sons Inc. 1976

7. SHAPIRO, J.F. "Mathematical programming. Structures and Algorithms". John Wiley & Sons. 1979.

8. SIMMONARD, W. "Linear Programming". Prentice Hall Inc. 1966.

E J E R C I C I O S

5.1 Utilizando el método del pivoteo resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$$

5.2 Resuelva el siguiente problema de programación lineal, utilizando el método simplex.

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

S.a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0.$$

5.3 Utilizando el método simplex resuelva:

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

S.a

$$x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,4.$$

Maximizar $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$

S.a.

$$x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,4.$$

5.4

Minimizar $Z = 12x_1 - 10x_2 - 30x_3$

S.a

$$-3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 17$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$-2x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 16$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

5.5

Minimizar $Z = -x_1 - 4x_2 - 5x_3$

S.a.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

5.6

Minimizar $Z = -3x_1 - 11x_2 - 9x_3 + x_4 + 29x_5$

S.a.

$$x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_5 \leq 1$$

x_1 no restringida; $x_j \geq 0$, $j = 2,\dots,5$

Utilice solo una iteración.

5.7

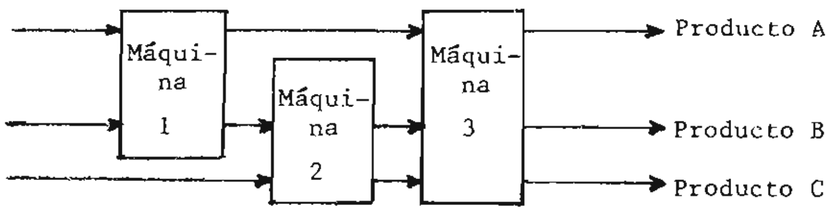
$$\text{Minimizar} \quad Z = x_6$$

S.a

$$\begin{array}{rcl}
2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 0 \\
3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 & \leq & 15 \\
x_1 + x_3 & \leq & 5 \\
9x_1 + 8x_2 + x_3 - 2x_4 - x_6 & = & 0
\end{array}$$

$x_j \geq 0$; $j = 1,\ldots,5$; x_6 no restringida.

5.8 Una planta química puede fabricar tres productos A,B y C que requieren ser procesados en las máquinas 1 y 3; 1,2 y 3; 2 y 3, respectivamente, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Cada producto requiere de una unidad de capacidad de cada máquina por la que pasa para cada litro del producto elaborado. Las máquinas 1,2 y 3 tienen una capacidad máxima de 100, 200 y 400 unidades por día, respectivamente y las utilidades por litro producido de A,B y C siguen la proporción 3:4:2.

Existe demanda ilimitada para los productos A y C pero no se pueden vender más de 80 litros diarios de B. Actualmente la planta se utiliza para fabricar todo el producto B que puede ser vendido diariamente ya que este producto representa las mayores utilidades. Despues se fabrican 20 litros de A para utilizar toda la capacidad de la máquina 1 en el segundo producto de mayor utilidad y por último el producto C se fabrica para utilizar la capacidad de las máquinas restantes, o sean 120 litros, por la limitación de la máquina 2.

El jefe de producción considera que esta es una solución lógica al problema de maximizar utilidades. ¿Qué opina Ud.?

5.9 El siguiente tableau corresponde a un problema de maximización. La función objetivo es $Z = 5x_1 + 3x_2$ y las variables x_3 y x_4 son de holgura. Las restricciones son del tipo $\leq$.

x_1	x_2	x_3	x_4	LD
C	0	1	1/5	2
d	e	0	1	a
b	1	f	g	10

i. Determine los valores de a hasta g, así como B^{-1}.
ii. Encuentre la solución óptima del problema.

5.10 Considere el siguiente tableau del método simplex, el cual corresponde a un problema de minimización en donde todas las restricciones son del tipo $\leq$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
1	-2	0	4	0	c
0	-1	1	5	0	d
0	0	0	7	1	e
0	a	0	b	0	f

i. Suponga que $a < 0$, $b \leq 0$ y $c, d, e \geq 0$.

a. Determine B^{-1}.

b. ¿El tableau es óptimo?

c. Determine el primer tableau, considerando que

$$B = (B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -5/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ -7/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, donde el lado derecho quedará en función de c, d y e.

d. En el tableau dado, ¿ f es mayor, igual o menor que cero? Justifique su respuesta.

ii. Ahora suponga que $a > 0$; $b \leq 0$ y $c,d,e \geq 0$.

a. ¿Es óptimo el tableau?

b. Sean $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ y $f = -10$, donde c_1 y c_2 son los coeficientes de x_1 y x_2 en la función objetivo. Calcule el elemento c del lado derecho del tableau dado. ¿Cómo es la solución básica que se obtiene?

5.11 Explique los casos particulares que se presentan en problemas de programación lineal (degeneración, no factibilidad, no acotamiento, soluciones alternativas). ¿Qué significa cada uno de ellos? ¿Cómo se identifican en el tableau del simplex?

Resuelva los siguientes problemas de programación lineal utilizando el método de penalización (método de los M grandes).

5.12

Minimizar $Z = x_1$

S.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 &\geq 2 \\ -x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 &\geq 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 - 5x_6 &\leq 7 \end{aligned}$$

$x_j \geq 0;\ j = 1,\ldots,6.$

5.13

Maximizar $Z = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3$

S.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 20 \end{aligned}$$

$x_j \geq 0;\ j = 1,2,3.$

5.14

Minimizar $Z = 2x_1 + 4x_2 - x_4$

S.a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &\geq 3 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; x_3 no restringido; $x_4 \geq 0$.

5.15

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

s.a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 8$$

$$x_j \geq 0;\ j = 1,\ldots,4.$$

5.16

$$\text{Maximizar } Z = 5x_1 - 2x_2 + x_3$$

s.a

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \text{ no restringido};\ x_3 \geq 0$$

5.17

$$\text{Minimizar } Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$-3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_j \geq 0;\ j = 1,2,3.$$

Resuelva los siguientes problemas de programación lineal, empleando el método de las dos fases.

5.18

$$\text{Minimizar } Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4$$

5.19

$$\text{Minimizar } Z = x_1 + 3x_2 - x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \quad &\geq 2 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0; \; j = 1,2,3.$$

5.20

$$\text{Minimizar } Z = 5x_1 - 2x_2 + x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; x_3 no restringida.

5.21

$$\text{Maximizar } Z = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 \quad &\geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 20 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0; \; j = 1,2,3.$$

5.22 Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

i. Resuelva el problema geométricamente.

ii. Resuelva el problema por el método de las dos fases

Muestre que los puntos generados por la fase I corresponden a las soluciones básicas del sistema original.

5.23 Compare los métodos de las dos fases y el de penalización. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno? ¿Cuán grande puede elegirse la M?

CAPÍTULO VI

TEORÍA DE DUALIDAD

Para cada problema lineal existe otro problema lineal asociado a aquel. Este nuevo problema lineal satisface algunas muy importantes propiedades, las cuales pueden ser utilizadas para obtener la solución al problema original. Las variables del problema lineal asociado al original, proporcionan información muy útil acerca del óptimo del problema original.

6.1. Problemas lineales duales.

Consideremos los problemas lineales:

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{l} \text{Minimice } Z = cx \\ \text{s.a.} \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \text{Maximice } \omega = \lambda b \\ \text{s.a} \\ \quad \lambda A \leq c \\ \quad \lambda \geq 0 \end{array}\quad \text{(D)}$$

Donde A es una matriz $m \times n$; b - un vector columna de m componentes; c - un vector hilera de n componentes; x - un vector columna de n incógnitas y λ - un vector hilera de m variables. Estos problemas se denominan problemas lineales duales y se dice que (P) es el problema primal y (D)-el correspondiente problema dual. También se dice que estos problemas están en forma simétrica, pues el vector de variables a determinar en ambos problemas es no negativo y el número de restricciones del primal (dual) es igual al número de variables a determinar del problema dual (primal).

Además, observamos que el problema primal (P) está dado en la forma canónica, esto es, el problema dual (D), está asociado al problema primal en forma canónica.

Ejemplo .1

$$\text{Minimizar } Z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\text{s.a.} \quad 3x_1 + x_2 \geq 4$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 7 \qquad (P)$$
$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

El problema dual asociado a (P) será:

$$\text{Maximizar } \omega = 4\lambda_1 + 7\lambda_2$$
$$\text{s.a}$$
$$3\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 6$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 8 \qquad (D)$$
$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

La definición dada de problemas lineales duales nos permite determinar el problema dual de un problema lineal cualquiera. Esto se obtiene, básicamente, mediante la transformación del problema lineal a la forma del problema (P), esto es, llevándolo a la forma canónica. Por ejemplo, consideremos el problema lineal en forma están - dar.

$$\text{Minimice } Z = CX$$
$$\text{s.a}$$
$$(P) \qquad AX = b$$
$$X \geq 0$$

que puede escribirse en forma equivalente como:

$$\text{Minimice } Z = cx$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} Ax &\geq b \\ -Ax &\geq -b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

cuyo correspondiente problema dual es:

$$\text{Maximice } \omega = ub - vb$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} uA - vA &\leq c \\ u \geq 0, &\ v \geq 0 \end{aligned}$$

donde u,v son vectores hilera de m componentes. Sea $\lambda = u-v$. Entonces podemos concluir que el correspondiente par de problemas duales asociados son:

$$\text{(P')} \quad \begin{aligned} &\text{Minimice } Z = cx \\ &\text{s.a} \\ &\quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\text{Maximice } \omega = \lambda b \\ &\text{s.a} \\ &\quad \lambda A \leq C \\ &\quad \lambda \ \text{ no restringido} \end{aligned} \quad \text{(D')}$$

denominada la forma asimétrica, pues en un problema el vector de variables es restringido y en el otro problema no lo es.

EJEMPLO 6.2

Consideremos el problema lineal:

$$\text{Minimizar } Z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{s.a}\quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0$$

El problema dual correspondiente será:

$$\text{Maximizar } \omega = 4\lambda_1 + 7\lambda_2$$

$$\text{s.a}\quad \begin{aligned} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 6 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &\leq 8 \\ -\lambda_1 \quad &\leq 0 \\ -\lambda_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ no restringidos}$$

En general, se cumple que si alguna de las desigualdades del problema primal se cambia a igualdad, el componente correspondiente del vector λ en el problema dual será una variable no restringida. Recíprocamente, si alguno de los componentes del vector X en el problema primal es no restringido, la desigualdad correspondiente en el problema dual será igualdad.

Más aun, de la definición dada de la forma canónica del problema dual observamos que el problema primal asociado deberá ser de minimización con restricciones " mayor o igual " y todas las variables no negativas. Asimismo, de las definiciones de la forma canónica o estándar del problema dual, es fácil demostrar que la otra es válida. Por ejemplo supongamos que partimos de la forma estándar como definición y queremos demostrar que la forma canónica es correcta. Añadiendo variables de holgura a la forma canónica podemos entonces obtener la forma estándar del problema dual, esto es:

	Minimice $Z = CX$	Maximice $\omega = \lambda b$	
	s.a	s.a	
(P)	$AX - IX_H = b$	$\lambda A \leq C$	(D)
		$-\lambda I \leq 0$	
	$X \geq 0,\ X_H \geq 0$	λ no restringida	

Dado que $-\lambda I \leq 0$, tenemos que $\lambda \geq 0$, obteniendose de esta manera la forma canónica del problema dual.

6.2 Dual del dual.

Dado que el problema dual es un problema lineal, podemos obtener el dual del problema dual. Consideremos el siguiente problema dual en forma canónica:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \omega = \lambda b \\ &\quad \text{s.a} \\ &\qquad \lambda A \leq C \\ &\qquad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

el cual es equivalente al problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -\omega = -(b^T)\,\lambda^T \\ \text{s.a} \quad & (-A^T)\,\lambda^T \geq (-C^T) \\ & \lambda^T \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual asociado a este problema está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & -Z = X^T\,(-C^T) \\ \text{s.a.} \quad & X^T\,(-A^T) \leq (-b^T) \\ & X^T \geq 0 \end{aligned}$$

El cual es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z = CX \\ \text{s.a} \quad & AX \geq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

El cual corresponde precisamente al problema primal del problema dual original.

Lema 6.1. El dual del dual es el primal.

6.3. Formas mixtas de problemas duales.

Hemos visto ya en el capítulo IV como podemos transformar cualquier tipo de problema lineal a la forma estándar o canónica. Por lo cual estamos en condiciones de obtener el dual de cualquier tipo de problema lineal. Consideremos el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \; & Z = cx \\ \text{s.a} \; & \\ & A_1 x \geq b_1 \\ & A_2 x = b_2 \qquad\qquad (P) \\ & A_3 x \leq b_3 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Convirtiendo (P) a la forma estándar, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \; & Z = cx \\ \text{s.a} \; & \\ & A_1 x - I x_{h_1} = b_1 \\ & A_2 x \qquad\quad\; = b_2 \qquad (P') \\ & A_3 x + I x_{h_2} = b_3 \\ & x \geq 0;\; x_{h_1} \geq 0;\; x_{h_2} \geq 0. \end{aligned}$$

El dual de (P') es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \; & \omega = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\ \text{s.a} \; & \\ & \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 \leq c \\ & -\lambda_1 I \leq 0 \\ & \lambda_3 I \leq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ no restringidas.} \end{aligned}$$

A continuación damos en la figura 6.1 las relaciones entre problemas primales y duales.

	Problemas de Minimización		Problemas de Minimización	
Variables	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	Restricciones
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	
	No restringida	$\longleftrightarrow$	$=$	
Restricciones	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	Variables
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	No restringida	

Figura 6.1 Relaciones entre los problemas primales duales.

Ejemplo 6.3. Consideremos el siguiente problema lineal

$$
\begin{aligned}
\text{M imizar} \quad Z &= 8x_1 + 3X_2 \\
\text{s.a} \quad X_1 - 6X_2 &\geq 2 \\
5X_1 + 7\,X_2 &= -\,4 \\
X_1 &\leq 0 \\
X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Aplicando los resultados de la tabla, podemos de inmediato obtener el dual correspondiente.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \omega = 2\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ \text{s.a} & \\ & \lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 8 \\ & -6\lambda_1 + 7\lambda_2 \geq 3 \\ & \lambda_1 < 0 \\ & \lambda_2 \text{ no restringida} \end{array}$$

6.4. Teorema de dualidad.

La relación más importante y significativa de los problemas lineales en la sección anterior es considerada. Con el propósito de establecer esta relación, denominada el "teorema de dualidad", es conveniente considerar el siguiente resultado de los problemas lineales duales.

Proposición 6.1. Se cumple que:

$$\min.\ \{cx; Ax \geq b,\ x \geq 0\} \geq \max\ \{\lambda b;\ \lambda A \leq c,\ \lambda \geq 0\}$$

Prueba. Sean x y λ soluciones factibles (arbitrarias) de los respectivos problemas lineales duales. Entonces:

$$cx \geq (\lambda A)\, x = \lambda(Ax) \geq \lambda b$$

que es equivalente al resultado de la proposición.

Corolario 6.1 Sean x^* y λ^* soluciones factibles de los problemas lineales anteriores. Si $cx^* = \lambda^* b$ se tiene que x^* y λ^* son soluciones óptimas de estos problemas.

Se observa de estos resultados que las soluciones factibles de los problemas lineales duales permiten acotar el valor óptimo de las funciones objetivo. Asimismo, si el valor de la función objetivo de estas soluciones factibles es el mismo, las soluciones son óptimas. El resultado recíproco se implica del teorema de dualidad.

TEOREMA DE DUALIDAD. Consideremos los problemas lineales duales:

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{min.} & Z = cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \text{max.} & \omega = \lambda b \\ & \lambda A \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}\quad (D)$$

a. Si (P) y (D) son factibles tenemos min. z = max. ω (finito).

b. Si (P) factible y (D) no factible tenemos min. z no acotado.

c. Si (D) factible y (P) no factible tenemos max. ω no acotado.

d. Los problemas (P) y (D) pueden ser ambos no factibles.

<u>Prueba a.</u> Si x y λ son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente, se tiene que $cx \geq \lambda b$ (Proposición 6.1). De donde <u>a</u> queda demostrada si existen souciones factibles x y λ tales que $cx < \lambda b$. Probaremos que el sistema

$Ax \geq b; \quad \lambda A \leq c; \quad cx \leq \lambda b; \quad x \geq 0,\ \lambda \geq 0$

tiene solución. Este sistema puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & -A \\ -b^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^T \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c^T \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \lambda^T \\ x \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (6.1)$$

Sin embargo, si este sistema no tiene solución sabemos que

$$[u,v,s]\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & -A \\ -b^T & c \end{bmatrix} \geq 0 \qquad [u,v,s]\begin{bmatrix} c^T \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \qquad (6.2)$$

donde $u \geq 0$, $v \geq 0$, $s \geq 0$ tiene solución (Teorema C.3, apéndice C). Observamos que s es un escalar y que los vectores hilera u y v tienen tantos componentes como número de columnas e hileras tiene la matriz A respectivamente. Analizaremos dos casos.

Caso 1: $s > 0$. Sin pérdida de generalidad, hagamos $s = 1$. En este caso se tiene que existe $u \geq 0$ y $v \geq 0$ tales que

$$Au^T \geq b \ ; \qquad vA \leq c \ ; \qquad cu^T < vb$$

Sin embargo, esto contradice la proposición 6.1.

Caso 2: $s = 0$. Si el sistema (6.2) tiene solución se tiene que

$$\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^T \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c^T \\ -b \end{bmatrix} \ ; \qquad \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} \geq 0$$

no tiene solución (teorema C.3, anexo C). Sin embargo, esto contradice la suposición inicial, esto es, (P) y (D) son factibles Estos argumentos demuestran que a se cumple.

Dada la simetría de b y c sólo probaremos b. Primeramente, si (D) es no factible, se tiene que

$$A^T\lambda^T \leq c^T \ ; \qquad \lambda^T \geq 0$$

no tiene solución. Consecuentemente,(teorema C.3, apéndice C)

$$Ay \geq 0 \quad ; \quad cy < 0 \quad ; \quad y \geq 0$$

tiene solución. Por otra parte, sea x una solución factible de (P) esto es, $Ax \geq b$; $x \geq 0$. Entonces, se observa que el vector $x+\alpha y$, donde $\alpha>0$, satisface las restricciones

$$A(x+\alpha y) \geq b \quad ; \quad x+\alpha y \geq 0$$

y el valor de la función objetivo es $z = cx + \alpha cy$. Sin embargo, si α tiende a infinito el valor de z tiende a menos infinito. De ésto se concluye que el mínimo de z es no acotado. Finalmente, es sencillo construir ejemplos de problemas lineales duales que sean ambos no factibles.

Una forma equivalente y simple de establecer el teorema de dualidad se resume a continuación.

Corolario 6.2. (Teorema de dualidad) Si alguno de los problemas lineales duales (P) ó (D) tiene solución óptima, lo mismo es cierto del otro problema y el correspondiente valor de la función objetivo es el mismo. Por otra parte, si uno de los problemas tiene función objetivo no acotada, el otro problema no tiene solución factible.

Las soluciones óptimas de los problemas lineales duales satisfacen ciertas relaciones adicionales que permiten establecer una interpretación económica de los mismos. Estas relaciones se resumen en el siguiente resultado denominado el Teorema de complementaridad.

6.5 TEOREMA DE COMPLEMENTARIDAD. Consideremos los problemas lineales duales

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{l} \min\ z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \max\ \omega = \lambda b \\ \lambda A \leq c \\ \lambda \geq 0 \end{array} \quad \text{(D)}$$

Sean * y λ^{*} soluciones factibles de los problemas respectivos. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que x^{*} y λ^{*} sean óptimas es que satisfagan las relaciones

$$\begin{array}{llcclcc}
\text{a.} & x_i^{*} & > 0 & \text{implica} & \lambda\, a_i^{*} & = & c_i \\
\text{b.} & x_i^{*} & = 0 & \text{si} & \lambda\, a_i^{*} & < & c_i \\
\text{c.} & \lambda_j^{*} & > 0 & \text{implica} & a^j x^{*} & = & b_j \\
\text{d.} & \lambda_j^{*} & = 0 & \text{si} & a^j x^{*} & > & b_j
\end{array}$$

donde $a_i(a^j)$ es el i-ésimo (j-ésimo) vector hilera (columna) de la matriz A.

Prueba. Si x^{*} y λ^{*} son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente

$$\alpha = \lambda^{*}(Ax^{*} - b) \geq 0$$

$$\beta = (c - \lambda^{*}A)\, x^{*} \geq 0$$

De donde, $\alpha + \beta = cx^{*} - \lambda^{*}b$. Sin embargo, el teorema de dualidad establece que x^{*} y λ^{*}son soluciones óptimas si y sólo si se cumple que $x^{*} = \lambda^{*}b$; que es equivalente a $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Esto termina la prueba, pues las relaciones del teorema son fáciles de implicar dado que α y β resultan del producto de vectores no negativos.

Otra forma de presentar el teorema de complementaridad es la que -

se conoce como las condiciones de Kuhn-Tucker para restricciones de desigualdad. Sean x^* y λ^* soluciones óptimas de los problemas lineales primal, en forma canónica, y dual respectivamente. Entonces las siguientes tres condiciones se satisfacen

$$AX^* \geq b \quad , \quad X^* \geq 0 \qquad (6.3)$$

$$C - \lambda^* A - V = 0 \quad ; \quad \lambda^* \geq 0, \ V \geq 0 \qquad (6.4)$$

$$\lambda^* (AX^* - b) = 0 \quad , \quad VX = 0 \qquad (6.5)$$

La primera condición es obvia. Dado que X* es solución óptima, podemos asegurar que es factible, por lo que la condición (6.3) se cumple. La segunda condición (6.4) se refiere a la factibilidad del dual. Recordemos que la restricción del dual asociado al primal en forma canónica es $\lambda A \leq C$. Entonces si la ponemos en forma estándar obtenemos la condición (6.4). En este caso las variables λ^* y V reciben el nombre de multiplicadores de Lagrange o variables duales correspondientes a las restricciones $AX \geq b$ y $X \geq 0$ respectivamente. Finalmente la condición (6.5) se refiere precisamente a la holgura complementaria.

Dado que $\lambda^* \geq 0$ y $AX \geq b$ entonces $\lambda^* (AX-b) = 0$ se satisface si y sólo si λ_i^* es cero o la i-ésima variable de holgura es cero. Análogamente VX = 0 si y sólo si $X_j = 0$ ó $V_j = 0$.

6.6 Ejemplos y aplicaciones.

En esta sección se considera la aplicación del teorema de dualidad ó su equivalente, el teorema de complementaridad, el análisis ó solución de algunos problemas de programación lineal.

6.6.1 Consideremos el problema lineal:

$$\text{Minimice } Z = 20x + 10x + x + 15x$$

s.a.

$$(P) \quad \begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 3x_4 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 20x_3 & + & x_4 & \leq & 15 \\ x_1 \geq 0 & ; & x_2 \geq 0 & ; & x_3 \geq 0 & ; & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Determine la solución óptima de este problema y de su dual.

El problema dual de (P) es

$$\text{minimice } \omega = 10\lambda_1 + 15\lambda_2$$

$$(D) \quad \begin{array}{ccccc} 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & \geq & 20 \\ 2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & \geq & 10 \\ 10\lambda_1 & + & 20\lambda_2 & \geq & 1 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & \geq & 15 \\ \lambda_1 \geq 0 & ; & \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

cuya solución óptima, obtenida gráficamente, es

$$\omega^* = 200/3 \quad ; \quad \lambda_1^* = 20/3 \quad ; \quad \lambda_2^* = 0$$

Usando esta información y el teorema de complementaridad se implica que la solución óptima x^* de (P) satisface

$$x_2^* = 0 \; ; \; x_3^* = 0 \; ; \; x_4^* = 0$$

pues la segunda, tercera y cuarta restricciones del problema dual se satisfacen con estricta desigualdad cuando se sustituye la solución óptima $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$. Por otra parte dado que λ_1^* es positivo se implica que la solución óptima del problema (P), satisface con igualdad la primera de las restricciones de desigualdad, esto es, se cumple que

$$3x_1^* + 2x_2^* + 10x_3^* + 3x_4^* = 10$$

Sin embargo, dado que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ se tiene $x_1^* = 10/3$.

Finalmente, es fácil verificar que el vector x^* es una solución factible del problema (P), y que el valor de la función objetivo es $z^* = 200/3$. Esto demuestra que x^* es la solución óptima del problema (P).

6.6.2 Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad Z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz mxn; b, un vector columna de m componentes; c, un vector hilera de n componentes; y x, un vector columna de n variables. Supongamos que este problema y su dual tienen soluciones factibles. Sean x^* y λ^* las soluciones óptimas del problema primal y su dual, respectivamente.

a. Supongamos que la k-ésima ecuación del problema primal se multiplica por el escalar $\alpha \neq 0$. ¿Cuál es la solución óptima del dual asociado al problema modificado?

b. Supongamos que al problema primal se suma α veces la k-ésima ecuación a la r-ésima. ¿Cuál es la solución óptima del dual asociado al problema modificado?

c. Supongamos que en el problema primal se suma α veces la hilera k de A al vector c. ¿Cuál es la solución óptima del problema primal modificado?

Empecemos por considerar el problema obtenido de multiplicar por $\alpha \neq o$ la k-ésima del problema primal original.

Este problema lineal es equivalente a

$$\text{Minimizar } \omega = cx$$
$$E_k A_X = E_x b$$
$$x \geq 0$$

donde E_k es una matriz elemental de orden mxn cuyos elementos están dados como

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq k \\ \alpha & \text{si } i = j = k \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El dual asociado al problema lineal modificado es

$$\text{Maximizar } wE_k b$$
$$wE_k A \leq c$$

Sin pérdida de generalidad podemos definir el vector de variables

$\lambda = wE_k$; que es equivalente a multiplicar por α el k-ésimo componente del vector w. De aquí obtenemos el problema

$$\text{Maximizar} \quad \lambda b$$
$$\lambda A \leq c$$

que resulta ser el dual del primal original. Este problema tiene como solución óptima λ^*. Consecuentemente la solución óptima del -- dual asociado el problema modificado es $w^* = E_k^{-1}\lambda^*$; que es equivalente a dividir por α el k-ésimo elemento de λ^*

La pregunta b puede contestarse usando los mismos argumentos que en la pregunta a. En tal caso la matriz elemental E_k deberá cambiarse por la matriz elemental correspondiente. Se pide al lector que proporcione los detalles.

Finalmente consideremos el caso en que suma α veces la hilera k de - la matriz A al vector de costos c en el problema primal. En este caso el problema lineal resultante es

$$\text{Minimizar} \quad cx + a^k x$$
$$cx + \alpha \; a^k x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

donde a^k es el k-ésimo vector hilera de matriz A. Sin embargo, se observa de las restricciones que $a^k x = b_k$ donde b_k es el k-ésimo componente del vector b. Consecuentemente el problema anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & cx + \alpha b_k \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Es claro que la solución óptima de este problema es x^*, la solución óptima del problema primal original.

6.6.3. Consideremos el Lema de Farkas (Teorema C.2, apéndice C). Sea A una matriz $m \times n$ y b un vector columna de m componentes. Entonces uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución

i. $Ax = b$; $x \geq 0$.

ii. $\lambda A \geq 0$; $\lambda b < 0$.

Demuestre Farkas usando programación lineal.

Prueba. Si el sistema (i) tiene solución, el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & cx + \alpha b_k \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

tiene solución óptima y el valor mínimo de Z es cero. Asimismo, el problema dual

$$\begin{aligned} \max. \ \omega &= \mu b \\ \mu A &\leq 0 \end{aligned}$$

tiene solución óptima y el valor máximo de ω es cero (teorema de dualidad). Consecuentemente, si el vector μ satisface $\mu A \leq 0$, se tiene que $\mu b < 0$ por ser $\omega^* = 0$.

Haciendo $\lambda = -\mu$ se tiene que

$$\lambda A \geq 0 \quad \text{implica} \quad \lambda b \geq 0.$$

Esto demuestra que el sistema (ii) no tiene solución.

Si el sistema (i) no tiene solución, el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad Z &= 0x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

no tiene solución factible. Sin embargo, el problema dual

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad \omega &= \mu b \\ \mu A &\leq 0 \end{aligned}$$

tiene solución factible, esto es, $\mu = 0$. Aplicando el teorema de dualidad se tiene que el problema dual es no acotado: esto es, existen vectores μ tales que $\mu A \leq 0$ y $\mu b \geq 0$.

Haciendo $\lambda = -\mu$ se concluye que el sistema

$$\lambda A \geq 0 \quad ; \quad \lambda b < 0$$

tiene solución. Esto termina la prueba.

6.6.4. Asignación de recursos en una economía en competencia perfecta.

Consideremos una economía formada por m industrias $(k=1,...,m)$ que planean sus actividades para maximizar sus respectivas ganancias. Supongamos que cada industria k tiene caracterizado su nivel de actividades por un vector $x_k^{'}$ y sus restricciones de producción o tecnológicas por medio del sistema

$$B_k x_k \leq b_k$$

$$x_k \geq 0$$

donde B_k es una matriz $m_k x n_k$; y b_k un vector columna de m_k componentes. Puede decirse que b_k es el vector de máxima capacidad (esto es, número de máquinas, horas-hombre, etc.) disponible en la industria k. Asimismo, cada elemento (i,j) de la matriz B_k puede interpretarse como la cantidad de recurso i necesario para obtener una unidad de nivel de la actividad j. Las ganancias en la industria son dadas por $c_k x_k$, donde c_k es un vector hilera de n_k componentes. Las industrias consumen un determinado número de recursos básicos cuya cantidad depende del nivel de actividad a que operan. Específicamente, la industria k consume un vector de recursos $A_k x_k$, donde A_k es una matriz $m_0 x n_k$. Sin embargo, los recur básicos son limitados e iguales al vector s.
Consecuentemente, la suma de los recursos básicos consumidos por todas las industrias debe ser menor o igual a s, esto es:

$$(0) \qquad \sum_{k=1}^{m} A_k x_k \leq s$$

Ante esta situación, el gobierno decide que los precios de los re cursos básicos sean cero si al seleccionar las industrias separadamente sus niveles óptimos de actividades se satisface la restricción anterior. En el caso contrario, el gobierno establecerá un vector de precios p sobre los recursos de manera tal que la restricción (0), se satisfaga.

En tal caso cada industria $k=1,...,m$ buscará

$$\text{Maximizar} \quad Z = (c_k - pA)x_k$$

$$B_k x_k \leq b_k$$

$$x_k \geq 0$$

Podemos interpretar la función objetivo de este problema diciendo que la ganancia de la industria k será $c_k x_k$ menos la cantidad de dinero que debe pagar por los recursos básicos que consume, esto es, pAx_k.

El Departamento de control del estado procede a la determinación del vector de precios que permitirá reducir el consumo de recursos básicos por las industrias a una cantidad menor o igual a s. Con este propósito, el Departamento plantea el problema lineal:

$$(1) \qquad \text{Max.} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_mx_m \leq s$$

$$(2) \qquad \begin{array}{llll} B_1x_1 & & & \leq b_1 \\ & B_2x_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & B_mx_m \leq b_m \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \; \ldots \; x_m \geq 0$$

Este problema correspondería a pedir que el conjunto de industrias maximice sus ganancias totales, pero que el consumo de recursos bá sicos no exceda al vector de cantidades disponibles. Supongamos que en este problema las ganancias totales son acotadas. Equivalen temente, existe solución óptima del problema lineal dual asociado a (1) - (2), esto es:

(4) $\min.\ \omega = ps + y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ . \ . \ . \ \ y_m b_m$

$$
\begin{array}{ll}
 & pA_1 + y_1 B_1 \geq c_1 \\
 & pA_2 + y_2 B_2 \geq c_2 \\
(5) & . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
 & pA_m + y_m B_m \geq c_m \\
(6) & p \geq 0;\ y_i \geq 0; i=1,\dots,m.
\end{array}
$$

6.7. Interpretación económica del dual.

Consideremos el siguiente problema lineal y su respectivo dual:

$$
\begin{array}{lcc r}
 & \text{Minimice } \ Z = cx & \text{Maximice } \ \omega = \lambda b & \\
 & \text{s.a} & \text{s.a.} & \\
(P) & Ax \geq b & \lambda A < c & (D) \\
 & x \geq 0 & \lambda \geq 0 &
\end{array}
$$

Si B es la base óptima del problema primal y c_B es el vector de costos básico, sabemos que

$$Z^* = c_B B^{-1} b = \lambda^* b$$

ya que

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b} = c_B B^{-1} = \lambda^*$$

Por lo tanto λ_i^* es la tasa de cambio del valor de la función objetivo óptima, con un incremento de una unidad en el i-ésimo componente del vector de disponibilidades o recursos. Dado que $\lambda_i^* \geq 0$, Z^* se incrementará, permanecerá constante o disminuirá según b_i se incremente, permanezca constante o disminuya.

Desde el punto de vista económico, podemos pensar en el vector λ^* como el vector de precios sombra para el vector de recursos. Si la i-ésima restricción representa una demanda para prodicir al menos b_i unidades del i-ésimo producto y cx representa el costo total de producción, entonces λ_i^* es el costo incremental (o incremento en el costo) de producir una unidad más del i-ésimo producto. Esto es, λ_i^* es el precio que nosotros pagaríamos por tener una unidad extra del i-ésimo producto.

El problema dual completo, tiene también una interpretación económica. Supongamos que contratamos una empresa para que nos fabrique determinadas cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de m productos o bienes. La empresa puede a su vez, contratar a otra empresa la fabricación de los productos, en cualquiera de las n actividades y variando los niveles de producción.

Cada actividad j tiene su propio costo unitario c_j, y nosotros estamos de acuerdo en pagar el costo total de producción. Desde nuestro punto de vista, nos gustaría tener control sobre las opera---

ciones de la empresa de tal manera que pudiésemos especificar las combinaciones o mezclas y niveles de actividades que la firma recontratará de tal forma que minimizáramos el costo total de producción. Si a_{ij} representa la cantidad del producto i generada por una unidad de actividad j, entonces

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ representa las unidades del producto i que se

producen, el cual debe ser mayor o igual que la cantidad requerida b_i. Por lo tanto nosotros deseamos resolver el siguiente problema, el cual es precisamente el problema primal:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0; \quad j=1,2,\ldots,n$$

En lugar de tratar de controlar la operación de la empresa que contratamos para obtener más de las combinaciones deseadas, supongamos que convenimos en pagar a la empresa precios unitarios $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ por cada uno de los m productos fabricados. Por lo

tanto, estipulamos que estos precios declarados por la empresa deban ser justos. Entonces, a_{ij} es el número de unidades del producto i fabricado por una unidad de actividad j, y dado que λ_1 es el precio unitario del producto terminado i, entonces

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij\ i}$ lo podemos interpretar como el precio unitario de la actividad j conforme o compatible con los precios $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

Por lo cual, podemos pedir a la empresa que el precio implícito de la actividad j, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i$ nc exceda el precio actual c_j. Por cual, la empresa debe respetar las restricciones $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \leq c_j$, j=1,...,n. Con estas restricciones a la empresa le gustaría poder seleccionar un conjunto de precios que maximice su ganancia $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$. Esto nos conduce al siguiente problema dual de la empresa:

$$\text{Maximizar} \quad \omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \leq c_j \qquad j=1,\ldots,n$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i=1,\ldots,m$$

El teorema de dualidad estatlece que existe un equilibrio entre el conjunto de actividades y el conjunto de precios donde el mínimo costo de producción es igual al máximo pago. Que estos dos valores objetivos son iguales en el óptimo es intuitivo, si observamos que ellos representan los cargos favorables al comprador, donde el objetivo del primal está constituido por consideraciones de costos y el objetivo del dual se alcanza por un mecanismo de precios. Para ilustrar lo anterior, vamos ahora a analizar la interpretación dual del ejemplo 4.4.3 del capítulo IV. La formulación de este problema tal y como se vió en el capítulo IV es:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 1.5 \sum_{j=1}^{4} x_j + 2 \sum_{j=1}^{4} \omega_j + 0.2 \sum_{j=1}^{3} y_j$$

s.a.

$$\begin{array}{lcr}
x_1 + \omega_1 - y_1 & = & 90 \\
y_1 + x_2 + \omega_2 - y_2 & = & 160 \\
y_2 + x_3 + \omega_3 - y_3 & = & 490 \\
y_3 + x_4 + \omega_4 & = & 360 \\
-x_1 & \geq & -300 \\
-x_2 & \geq & -250 \\
-x_3 & \geq & -300 \\
-x_4 & \geq & -300
\end{array}$$

$x_j \geq 0$, $\omega_j \geq 0$, $y_i \geq 0$, $j=1,...,4$, $i=1,2,3$,

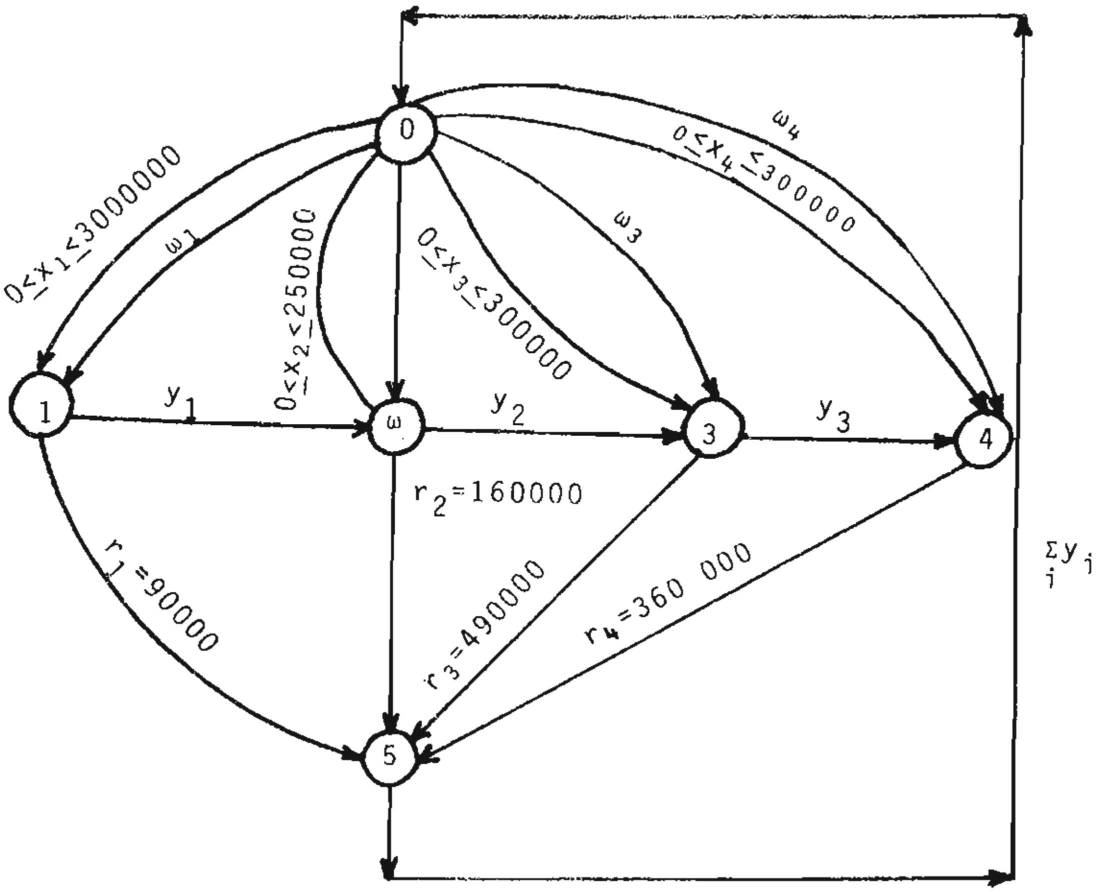
donde

x_i = producción de pintura en el trimestre i (lts.$\times 10^3$), $i=1,...,4$.

ω_i = cantidad de pintura comprada al competidor en el trimestre i (lts.$\times 10^3$), $i=1,...,4$.

y_i = nivel de inventario la final del trimestre i (lts.$\times 10^3$), $i=1,2,3$.

La representación gráfica de las restricciones de este modelo es:



donde r_i, $i = 1,\ldots,4$ son requerimientos en el mes i.

Tratamos de minimizar el flujo que va del nodo 0 al nodo 5 de manera que las pérdidas sean mínimas.

El problema dual asociado a este problema primal consiste en determinar los precios trimestrales q_i(\$/lt.) a que se alquilaría la capacidad de producción de la compañía Atlántico y los precios trimestrales p_i(\$/lt.) a que se vendería la pintura a la compañía Atlántico de manera tal que se cumpla el contrato, esto es, la compañía Atlántico subcontrata el pedido que tiene, alquilando su capacidad de producción a una tercera persona. En estas condiciones el problema dual es:

$$\text{Maximizar } \omega = 90\ p_1+160\ p_2+490\ p_3+360\ p_4-300\ q_1-250\ q_2-300\ q_3-300\ q_4$$

s.a.

$$
\begin{array}{lllllllll}
p_1 & & & & -q_1 & & & & \leq 1.5 \\
p_1 & & & & & & & & \leq 2.0 \\
-p_1 & + p_2 & & & & & & & \leq 0.2 \\
 & p_2 & & & & -q_2 & & & \leq 1.5 \\
 & p_2 & & & & & & & \leq 2.0 \\
 & -p_2 & + p_3 & & & & & & \leq 0.2 \\
 & & p_3 & & & & -q_3 & & \leq 1.5 \\
 & & p_3 & & & & & & \leq 2.0 \\
 & & p_3 & + p_4 & & & & & \leq 0.2 \\
 & & & p_4 & & & & -q_4 & \leq 1.5 \\
 & & & p_4 & & & & & \leq 2.0
\end{array}
$$

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4 \geq 0$$

La solución de este problema es:

i	1	2	3	4
x_i	190 000	250 000	300 000	300 000
ω_i	0	0	0	60 000
y_i	100 000	190 000	0	0
p_i	1.5	1.7	1.9	2.0
q_i	0	0.2	0.4	0.5

6.8. METODO DUAL SIMPLEX.

Vamos a describir el método dual simplex, el cual resuelve el problema dual diredtamente del tableau del simplex para el problema primal. En cada iteración nos movemos de una solución básica factible del problema dual a una solución básica factible mejorada hasta llegar al óptimo del dual (y también del primal) ó hasta concluir que el dual es no acotado y por lo tanto el primal es no factible.

6.8.1. Interpretación de la factibilidad del dual en el tableau del simplex para el problema primal.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z = cx \\ \text{s.a.} \quad & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Sea B una base que no necesariamente es factible y consideremos el siguiente tableau:

				variables de holgura			
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_n	$\cdots$	x_{n+m}	LD
y_{11}	y_{11}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$\cdots$	$y_{1,n+m}$	$\bar{b}_1$
y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2,n+1}$	$\cdots$	$y_{2,n+m}$	$\bar{b}_2$
y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$\cdots$	$y_{m,n+m}$	$\bar{b}_m$
Z_1-c_1	Z_2-c_2	$\cdots$	Z_n-c_n	$Z_{n+1}-c_{n+1}$	$\cdots$	$Z_{n+m}-c_{n+m}$	$c_B\bar{b}$

El tableau presenta una solución factible primal si $\overline{b}_1 \geq 0$, $i=1,\ldots,m$, esto es, si $\overline{b}=B^{-1}b \geq 0$. Más aún, el tableau es óptimo si $z_j-c_j \leq 0$ para $j=1,\ldots,n+m$. Definamos $\lambda=c_B B^{-1}$. Para $j=1,2,\ldots,n$ tenemos:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = \lambda a_j - c_j$$

En este caso $z_j-c_j \leq 0$ para $j=1,\ldots,n$ omplica que $\lambda a_j-c_j \leq 0$ para $j=1,\ldots,n$ que además implica que $\lambda A \leq c$. Además observamos que $a_{n+i}=-e_i$ y $c_{n+i}=0$ para $i=1,2,\ldots,m$ y por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} z_{n+1} - c_{n+i} &= \lambda a_{n+i} - c_{n+i} \\ &= \lambda(-e_i) - 0 \\ &= -\lambda_i \qquad\qquad i=1,\ldots,m \end{aligned}$$

Además, si $z_{n+i}-c_{n+i} \leq 0$ para $i=1,\ldots,m$, entonces $\lambda_i \geq 0$ para $i=1,\ldots,m$ y por lo tanto $\lambda \geq 0$. Debemos entonces demostrar que si $z_j-c_j \leq 0$ para $j=1,2,\ldots,n+m$, implica que $\lambda A \leq c$ y $\lambda \geq 0$, donde $\lambda=c_B B^{-1}$. En otras palabras, la factibilidad del dual consiste precisamente en el criterio de optimalidad del simplex, esto es, $z_j-c_j \leq 0 \forall j$. En el óptimo $\lambda^*=c_B B^{-1}$ y la función objetivo del dual $\omega^*=\lambda^* b=(c_B B^{-1})b=c_B(B^{-1}b)=c_B\overline{b}=z^*$, esto es, las funciones objetivo del dual y primal son iguales en el óptimo. Lo cual demuestra el siguiente lema.

Lema 6.2.

En el óptimo de un problema de minimización del primal, en la forma canónica, esto es, $z_j-c_j \leq 0 \forall j$, $\lambda^*=c_B B^{-1}$ es una solución óptima del problema dual. Más aún $\lambda^*=-(z_{n+i}-c_{n+i})=-z_{n+i}$ para $i=1,2,\ldots,m$.

El lema anterior fácilmente se puede extender a un problema de minimización en la forma estándar. En este caso se debe cumplir que en el óptimo $c_B B^{-1} R - c_R \leq 0 \Rightarrow c_B B^{-1} R \leq c_R$. Si definimos a $\lambda^* = c_B B^{-1}$ se tiene:

$$\lambda^* A = [\lambda B, \lambda R] = [c_B B^{-1} B,\ c_B B^{-1} R] = [c_B, c_B B^{-1} R] \leq [c_B, c_R] = 0$$

$\Rightarrow \lambda^*$ es factible y además

$$\lambda^* b = c_B B^{-1} b = c_B x_B.$$

Esto es, λ^* es factible y $\omega^* = z^*$ en el óptimo; lo cual a su vez prueba el siguiente teorema.

<u>Teorema 6.1</u>.

Si el problema lineal

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad Z = cx \\ &\text{s.a} \\ &\qquad Ax = b \qquad (P) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

tiene solución básica óptima correspondiente a la base B, donde esta es una submatriz de A de orden $m \times m$, entonces el vector $\lambda^* = c_B B^{-1}$ es una solución óptima del problema dual de (P) y los valores óptimos de ambos problemas son iguales.

<u>Ejemplo 6.3.</u>

Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ &\text{s.a} \\ &\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \qquad (P) \\ &\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Introduciendo nuevas variables de holgura se tiene que el proble ma lineal en forma estándar tiene el tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
2	2	1	1	0	4 →
1	2	2	0	1	6
-1	-4 ↑	-3	0	0	0
1	1	1/2	1/2	0	2
-1	0	1	-1	1	2 →
3	0	-1 ↑	2	0	8
3/2	1	0	1	-1/2	1
-1	0	1	-1	1	2
2	0	0	1	1	10

=> tableau óptimo con: $z^* = 10$; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 1$; $x_3^* = 2$; $x_4^* = 0$;

$x_5^* = 0$.

El problema dual del problema (P) en la forma estándar será:

$$\text{Min} \quad \omega = 4\lambda_1 + 6\lambda_2$$

s.a

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 4$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 3$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

y la solución óptima del dual será: $\lambda_1^*=1; \lambda_2^*=1;\ \omega^*=10$.

6.8.2. El método dual simplex.

Consideremos el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = cx \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Es frecuente el no encontrar una solución básica inicial que sea factible (esto es, $\bar{b}_i \geq 0 \forall i$) en un problema lineal, sin necesidad de añadir variables artificiales.

Sin embargo, frecuentemente podemos encontrar una base inicial, aunque esta no sea necesariamente factible, cuya solución dual es factible (esto es, $z_j - c_j \leq 0$ para un problema de minimización). En tales casos será útil desarrolar una variante del método simplex el cual nos puede producir una serie de tableaus simplex que mantengan la factibilidad dual y por la holgura complementaria nos mantendremos dentro de la factibilidad del primal.

Consideremos el siguiente tableau del simplex el cual representa una solución básica en una iteración cualquiera.

x_1		x_j		x_k		x_n	LD
y_{11}	...	y_{1j}	...	y_{1k}	...	y_{1n}	$\bar{b}_1$
y_{21}	...	y_{2j}	...	y_{2k}	...	y_{2n}	$\bar{b}_2$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
y_{r1}	...	y_{rj}	...	y_{rk}	...	y_{rn}	$\bar{b}_r$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
y_{m1}	...	y_{mj}	...	y_{mk}	...	y_{mn}	$\bar{b}_m$
z_1-c_1	...	z_j-c_j	...	z_k-c_k	...	z_n-c_n	$c_B\bar{b}$

Supongamos que el tableau es dual factible (esto es, $z_j-c_j \leq 0$ para un problema de minimización). Entonces, si el tableau es también primal factible (esto es, $\bar{b}_i \geq 0$) tendremos la solución óptima. Si esto no se cumple, consideremos algún $\bar{b}_r < 0$. Seleccionando la fila r-ésima como fila pivote y la columna k tal que $y_{rk} < 0$ como columna pivote, podemos transformar el nuevo elemento del lado derecho tal que este será $\bar{b}'_r > 0$. Realizando la misma operación descrita, podemos lograr que todos los $\bar{b}_i \geq 0$ manteniendo todos los $z_j-c_j \leq 0$ y por lo tanto logrando la optimalidad.

El problema que salta a la vista, consiste en como debemos seleccionar la columna pivote de tal manera que mantengamos la factibilidad dual después del pivoteo. La columna pivote k, se determina por la siguiente prueba del radio mínimo.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \underset{j}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0, \ j \in J \right\} \qquad (8.1)$$

Observemos que los nuevos elementos en la fila de costos reducidos (última fila del tableau) están dados por

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$$

Si $y_{rj} \geq 0$ y como $\bar{z}_k - c_k \leq 0$ y $y_{rk} < 0$, entonces $(y_{rj}/y_{rk})(\bar{z}_k - c_k) \geq 0$ por lo tanto $(z_j - cj)' \leq z_j - c_j$.

Resumiendo, si la columna pivote la seleccionamos de acuerdo a la ecuación (8.1), entonces la nueva base que se obtiene pivoteando sobre y_{rk} será dual factible. Además, la función objetivo del dual después del pivoteo es dada por

$c_B B^{-1}b - (z_k - c_k)\bar{b}_r / y_{rk}$. Dado que $z_k - c_k \leq 0$, $\bar{b}_r \leq 0$ y $y_{rk} < 0$, entonces $-(z_k - c_k)\bar{b}_r / y_{rk} \geq 0$ y el objetivo del dual es mejorado sobre el valor $c_B B^{-1}b = \lambda b$.

Hemos descrito un procedimiento que nos permite desplazarnos de una solución básica dual factible a una solución básica dual factible mejorada. Para completar el análisis debemos considerar el caso cuando $y_{rj} \geq 0 \forall j$ y por lo tanto no podemos elegir columna pivote. En este caso la j-ésima fila es;

$\sum_j y_{rj} x_j - \bar{b}_r$. Dado que $y_{rj} \geq 0 \forall j$ y $x_j \geq 0$, entonces $\sum_j y_{rj} x_j \geq 0$ para cualqier solución factible. Sin embargo $\bar{b}_r < 0$, lo cual es una contradicción. Esto nos muestra que el primal no es factible y el dual es no acotado. Para ver que el dual, en este caso, es no acotado consideremos que el problema dual es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \omega = b \\ \text{s.a} \quad & \\ & \lambda A \leq c \\ & \lambda \text{ no restringida.} \end{aligned}$$

Supongamos que $\bar{b}_r < 0$ y $y_{rj} \geq 0 \forall j$. Consideremos el vector $(0,0,\dots,-1,0,\dots,0)B^{-1}$, donde -1 ocupa la r-ésima posición.

Este vector es precisamente el negativo de la r-ésima fila de B^{-1}. Sea μ cualquier solución factible del problema dual, esto es, $\mu A \leq c$. Entonces:

$[\lambda + \mu(0,\dots,-1,0,\dots,0)B^{-1}]A = \lambda A + \mu(0,\dots,0,\dots,0)B^{-1}A$, pe ro $B^{-1}A$ es el tableau actual, y $(0,0,\ldots,-1,0,\ldots,0)B^{-1}A$ es precisamente $-(y_{r1},y_{r2},\ldots,y_{rn}) \leq 0$, por hipótesis. Entonces $(0,0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0)B^{-1}$ es factible para todo $\mu \geq 0$. Por lo tanto, esta es una dirección de la región dual factible. Además, $(0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0)B^{-1}b = -\bar{b}_r > 0$ ya que $\bar{b}_r < 0$. Por lo tanto hemos establecido una dirección de la región dual factible tal que $\lambda b > 0$. Esta es la condición necesaria y suficiente para no acotamiento del dual.

6.8.3. <u>Algoritmo del método dual simplex.</u>

<u>Paso 0.</u> Encuentre una base B del problema primal tal que

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0.$$

<u>Paso 1.</u> Si $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$, alto; la solución actual es óptima. De otra manera seleccione la fila pivote r con

$$\bar{b}_r < 0, \text{ donde } \bar{b}_r = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{mínimo}} \left\{ \bar{b}_i \right\}$$

<u>Paso 2.</u> Si $y_{rj} \geq 0 \forall j$, alto; el dual es no acotado y el primal es no factible. De otra manera, seleccione la columna pivote k por medio de la prueba del radio mínimo.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \underset{j}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \; ; \; y_{rj} < 0 \right\}$$

<u>Paso 3.</u> Pivotee sobre y_{rk} y regrese al paso 1.

Ejemplo 6.4.

Considere el siguiente problema: (el cual es un problema lineal típico donde se aplica el método dual simplex, esto es, los coeficientes de costo son positivos, las desigualdades "mayor o igual" y el vector de recursos tiene sólo elementos positivos).

$$\text{Minimizar} \quad Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

s.a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 3$$

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 \geq 4$$

$$X_1 \geq 0; \; X_2 \geq 0; \; X_3 \geq 0$$

Una solución básica inicial que es dual factible puede ser obtenida introduciendo las variables de holgura y cambiando de signo las ecuaciones restantes, con lo cual ya podemos formar el tableau inicial.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
-1	-2	-1	1	0	-3
-2	1	-3	0	1	-4
-2	-3	-4	0	0	0

$$\underset{i}{\text{mínimo}} \; \{\bar{b}_i\} = \text{mínimo } \{-3,-4\} = -4 \Rightarrow \text{ fila pivote = fila 2}$$

$$\underset{j}{\text{mínimo}} \left\{\frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\right\} = \text{mínimo } \left\{\frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-3}\right\} = \text{mínimo } \{1, 1.33\} = 1$$

$\Rightarrow$ columna pivote = columna 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
1/2	-5/2	1/2	1	-1/2	-1
1	-1/2	3/2	0	-1/2	2
0	-4	-1	0	-1	4

Fila pivote = fila 1 ya que $\bar{b}_1 < 0$ es el mínimo ,

columna pivote = fila 2 ya que sólo $y_{21} < 0$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5
0	0	-9/5	-8/5	-1/5	28/5

Dado que $\bar{b} \geq 0$ y $Z_j - c_j \leq 0 \forall j$, hemos obtenido las soluciones óptimas del primal y del dual. En particular tenemos:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)^T = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)^T$$

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = (8/5, 1/5)$$

Observamos que λ_1^* y λ_2^* son respectivamente el negativo de $Z_j - C_j$ correspondientes a las variables de holgura X_4 y X_5 respectivamente. También observamos que en cada iteración el valor de la función objetivo se incrementa, ya que el problema dual correspondiente es de maximización.

La convergencia del método dual simplex es sencilla de establecer, ya que existe un número finito de bases y en cada intención el valor asociado con la función objetivo aumenta. La diferencia en el valor de la función objetivo del dual entre dos iteraciones sucesivas es:

$-(z_k-c_k)\bar{b}_r/Y_{rk}$. Observamos que $\bar{b}_r<0$, $Y_{rk}<0$ y $z_k-c_k \leq 0$ lo cual implica que $-(\bar{z}_k-c_k)\bar{b}_r/Y_{rk} \geq 0$. En particular si $z_k-c_k < 0$, entonces el valor de la función objetivo del dual estrictamente se incrementa y por lo tanto no se pueden repetir bases por lo que el algoritmo converge en un número finito de pasos.

Bibliografía

1. BAZARAA, M.S. JARVIS, J.J. "Linear Programming and Network Flows". John Wiley & Sons, Inc. 1977

2. BRADLEY, S.P. HAX, A.C. MAGNANTI, T.L. "Applied Mathematical Programming". Addison- Wesley Publishing Co. 1977.

3. FUENTES, M.S. Notas no publicadas del curso de Teoría y Técnicas de Optimización I. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM. 1976.

4. GALE, D. "The Theory of Linear Economic Models". Mc Graw Hill Co. 1960.

5. HADLEY, A. "Linear Programming". Addison Wesley. 1962.

6. LUENBERGER, D.G. "Introduction to Linear and Nonlinear Programming". Addison Wesley. 1973.

7. MURTY, K.G. "Linear and Combinatorial Programming". John Wiley & Sons, Inc. 1976.

8. SHAPIRO, J.F. "Mathematical Programming: Structures and Algorithms". John Wiley & Sons. 1979.

9. SIMMONARD, W. "Linear Programming". Prentice Hall Inc.1966

Ejercicios.

6.1 Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } Z = 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 19$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 57$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5$$

i. Escriba el problema dual y verifique que $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)=(4,5)$ es una solución factible.

ii. Utilice la información del inciso anterior y obtenga a partir de ella la solución óptima de los problemas primal y dual utilizando holgura complementaria.

6.2 Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \qquad \text{(P)}$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

i. Escriba el problema dual.

ii. Resuelva por el método simplex el problema (P). En cada iteración identifique las variables duales y muestre las restricciones duales que se violan.

iii. En cada iteración identifique la base dual correspondiente a la iteración del simplex. Identifique las variables duales básicas y no básicas.

iv. Muestre que en cada iteración del método simplex el ob jetivo dual "empeora".

v. Identifique en el tableau óptimo las soluciones primales y duales óptimas. Verifique que los valores de las funciones objetivo son iguales y que se satisface la holgura complementaria.

6.3 Considere el problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } Z = 2x_1 + x_2 & \\ \text{s.a.} \quad 2x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 1 \qquad (P) \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre, por holgura complementaria, que $(X_1^*, X_2^*)^T = (0,2)^T$ es la solución óptima de (P) y determine la solución óptima del dual.

6.4 La compañía ABC, S.A. produce dos tipos de sillas reclinables para exportación. Dos tipos básicos de trabajo calificado se requieren durante el ensamble y en la terminación o acabado. Una unidad de la cabeza reclinable requiere 1.5 horas de ensamble y 1 hora de acabado y se vende con una ganancia de \$200.00. Una unidad del cuerpo reclinable requiere 0.5 horas de ensamble y 0.5 horas de terminación y se vende con una utilidad de \$120.00. Actualmente se disponen de 100 horas de ensamble y de 80 horas de terminación en la compañía, la cual se encuentra en negociaciones de tipo salarial para el próximo año. Usted es el consultor de la com pañía y debe de proporcionarle el costo de una hora de trabajo de ensamble y el costo por hora del acabado.

6.5 Considere el modelo lineal de selección de inversiones para la maximización de capital al término de un período, dado como

$$\text{Maximizar } z = v_N$$

$$\text{s.a}$$

$$\sum_{j=1}^{J} (-c_{ij}x_j) \leq f_i, \quad i=0,\ldots,N-1$$

$$\sum_{j=1}^{J} (-c_{Nj}x_j) + v_N \leq f_N$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j=1,\ldots,J$$

donde J es el conjunto que caracteriza a las distintas maneras posibles de inversión; f_i es la cantidad neta de fondos monetarios exógenos de que se puede disponer al final del período i (f_i puede ser positivo o negativo); c_{ij} es el dinero que necesita (si $c_{ij} < 0$) o produce (si $c_{ij} > 0$) el proyecto i al final del período j; x_j es la variable de decisión que representa el nivel de inversión en el proyecto j; y v_N es la variable que representa el valor del capital al final del período de planeación. Este modelo se denomina <u>selección de inversiones sin descuento.</u>

Otra manera de escribir las primeras restricciones es:

$$0 \leq f_i + \sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_j \quad , \quad j=0,\ldots,N$$

y en este caso se puede decir que de lo que se dispone al final del período i, f_i, más el dinero neto que producen los proyectos en ese período $\sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_j$, debe ser mayor o igual a cero.

Las otras restricciones son sencillas de entender. Considere un caso concreto del problema de delección sin descuento donde se tiene una cartera de 4 proyectos y el horizonte de planeación es de tres años.

Proyecto	Fin del año 0	Fin del año 1	Fin del año 2	Cota Superior (Cantidad máxima que se puede invertir en el proyecto)
A	-1	0.60	0.60	00
B	-1	1.10	0	500
C	0	-1. 0	1.25	00
D	-1	0	1.30	00

donde los coeficientes negativos indican una erogación de dinero en el proyecto y los coeficientes positivos - un beneficio. Asimismo se supone que el capital inicial es de 1000 unidades monetarias.

El modelo sin descuento consiste en:

$$\text{Maximizar} \quad Z = v$$

s.a

$$\begin{aligned}
x_A + x_B + x_D &\leq 1000 \\
-0.6\,x_A - 1.1x_B + x_C &\leq 0 \\
-0.6\,x_A - 1.25x_C - 1.30x_D + v &\leq 0 \\
x_B &\leq 500
\end{aligned}$$

$$x_A \geq 0;\ x_B \geq 0;\ x_C \geq 0;\ x_D \geq 0.$$

La solución óptima de este problema es:

$x_A^* = 500;\ x_B^* = 500;\ x_C^* = 850;\ x_D^* = 0;\ v^* = 1362.5$

Los precios sombra (variables duales) son:

$\lambda_0^*=1.35$; $\lambda_1^*=1.25$; $\lambda_2^*=1.0$; $\lambda_3^*=0.025$.

Especifique la manera en que una unidad monetaria adicional al final del año 1 sería invertida para obtener el precio sombra de 1.25.De manera semejante explique como invertiría una unidad monetaria en los proyectos al final del año o para obtener un beneficio adicional de 1.35.

Resuelva los siguientes problemas de programación lineal aplicando el método dual simplex. Proporcione los valores óptimos de las variables primales y duales. Demuestre que se satisface la holgura complementaria.

6.6

$$\text{Maximizar } Z = -4x_1 - 6x_2 - 18x_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 &\geq 3 \\ x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6.7

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\geq 2 \\ -2x_2 + x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq -3 \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,\dots,4 \end{aligned}$$

6.8 Considere el problema lineal:

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 16 \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\geq 12 \qquad (P) \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

i. Determine el problema dual asociado a (P).

ii. Utilice el dual simplex para resolver el problema (P)

iii. A partir del tableau óptimo del dual simplex, determine la solución del problema dual asociado a (P).

6.9 El siguiente tableau es óptimo y corresponde a un problema de maximización con todas las restricciones del tipo $\leq$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
1	1	0	2	0	1	2
0	0	1	1	0	4	3/2
0	-2	0	1	1	6	1
0	0	0	4	0	9	5

i. Proporcione el valor de la solución primal óptima (x^*, Z^*).

ii. Proporcione el valor de la solución dual óptima (λ^*, ω^*).

iii. Determine $\partial Z/\partial b_1$. Interprete este número.

iv. Si usted pudiera comprar una unidad adicional del primer recurso a un costo de 5/2, ¿lo compraría?, ¿porqué?

v. Otra empresa de la competencia desea adquirir de usted una unidad adicional del tercer recurso. ¿En cuánto lo vendería usted? ¿Porqué?

vi. ¿Existe otra solución alternativa? ¿Porqué? Si existe, proporcione al menos una.

6.10 Considere los dos tableaus que a continuación se dan. El primero corresponde al tableau original y el segundo al actual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
5	-4	13	b	1	1	0	20
1	-1	5	c	1	0	1	8
1	6	-7	a	5	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
-1/7	0	1	-2/7	3/7	-1/7	4/7	12/7
-12/7	1	0	-3/7	8/7	-5/7	13/7	4/7
72/7	0	0	11/7	8/7	23/7	-50/7	60/7

Determine:

i. Los valores de a, b y c.

ii. B^{-1}.

iii. $\partial x_2/\partial x_5$.

iv. $\partial x_3/\partial b_2$.

v. $\partial x_3/\partial b_2$.

vi. $\partial z/\partial x_6$.

vii. La solución dual.

6.11 Aplique el método dual simplex para resolver el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar $\omega = \lambda_3$

s.a

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{4}\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \qquad &\leq -3/4 \\
8\lambda_1 + 12\lambda_2 \qquad &\leq 20 \\
\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 - \lambda_3 &\leq -\tfrac{1}{2} \\
-9\lambda_1 - 3\lambda_2 \qquad &\leq 6 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Investigación de operaciones
Se terminó de imprimir en
el mes de mayo del año 2004
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de l
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcepotzalco

La edición
estuvo a cargo de la
Sección de Producción
y Distribución Editoriales
Se imprimieron
100 ejemplares más
sobrantes para reposición.

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2893896

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

30 AÑOS

...transformando el diálogo por la razón

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

INVESTIGACION DE OPERACIONES 1.1A PARTE * P
REYES * SECCION DE IMPRESION
35343 $ 31.00
$ 31.00

ISBN: 970-654-481-x

978-97065-44810