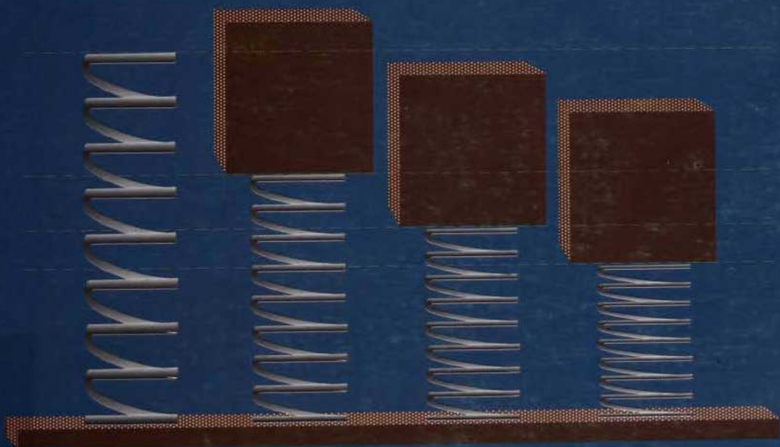
Notas de energías mecánica y eléctrica con problemario

Héctor Martín Luna García
Tomás David Navarrete González



Básicas

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

Notas de energías mecánica y eléctrica con problemario

Notas de energías mecánica y eléctrica con problemario
Este material fue dictaminado y aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 10 de marzo de 1998.

M. en C. Héctor Martín Luna García
M. en C. Tomás David Navarrete González

Notas de energías mecánica y eléctrica con problemario

Héctor Martín Luna García
Tomás David Navarrete González

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

DISEÑO DE PORTADA:
MODESTO SERRANO RAMIREZ

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO
AV. SAN PABLO 180
COL. REYNOSA TAMAULIPAS
DEL. AZCAPOTZALCO
C. P. 02200
MEXICO, D. F.

NOTAS DE ENERGIAS MECANICA Y ELECTRICA CON PROBLEMARIO
ISBN: 970-31-0093-7

1ª. EDICION, 1998
2ª. EDICION, 2002
3ª. EDICIÓN, 2006
4ª. EDICIÓN, 2009

IMPRESO EN MÉXICO

INDICE

INTRODUCCION

Estas notas representan el resultado de varios trimestres de dar el curso de energías mecánica y eléctrica y se pretendió darle un lenguaje sencillo como se enseña en el aula de clase; esto sin dejar a un lado la explicación formal de los conceptos fundamentales, los cuales se incluyen en estas notas. Al final se ha incluído un gran número de problemas resueltos utilizando el álgebra simple de matrices que se enseña en el curso de Complementos de Matemáticas. Sin embargo, el profesorado interesado en la utilización de estas notas puede de dedicar una sola clase para enseñar la forma de resolver de esta manera los ejercicios, o en su defecto, indicar la similitud de esta forma de resolver los ejercicios con la habitual que no requiere las matrices. Estamos concientes que la forma de enseñar la física varía de profesor a profesor y esperamos que quienes utilizen estas notas nos hagan saber todas las sugerencias a este manuscrito, las cuales agradecemos de antemano y tomaremos en cuenta para siguientes revisiones. También queremos agradecer la ayuda en la revisión de estas notas a los profesores Abelardo Rodríguez, Salvador Arellano Peraza y Sergio Becerril Hernández del Area de Física, así como al profesor Rubén Mares Gallardo de la ESFM del IPN.

Héctor Luna García
David Navarrete González.

Unidad I. Movimiento de una partícula.

I.1 Introducción.

Los fenómenos de la naturaleza relacionados con el movimiento de los cuerpos se estudian dentro de una de las ramas de la física clásica llamada ***mecánica***. A su vez la mecánica se subdivide en tres ramas para su estudio: ***cinemática, dinámica y estática***. La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar en lo absoluto las interacciones que generan dichos movimientos. Para estudiar ***el movimiento*** es necesario establecer ciertos ***conceptos fundamentales*** que sean el punto de partida para poder realizar ***descripciones cuantitativas***. Los principios fundamentales en los cuales se basa toda la teoría del movimiento fueron establecidos por Newton en sus ***Principia Mathematica***. Los resultados más relevantes en sus estudios de la mecánica se establecen ***mediante tres leyes fundamentales conocidas como las leyes de Newton. Estas leyes son la culminación de muchos siglos de desarrollo filosófico y de pensamiento racional***. Estructuralmente, éstas leyes se construyen como se indica en el diagrama de flujo de la figura 1:

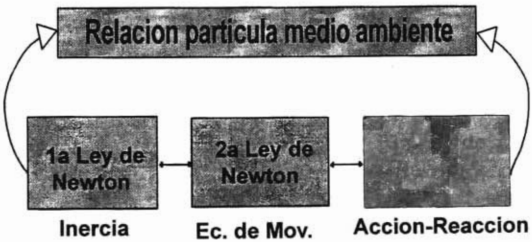


Figura 1

I.2 Leyes del Movimiento.

El movimiento de los cuerpos se rige mediante las tres leyes de Newton que se establecen de la siguiente manera:

Primera ley de Newton ó Ley de la inercia.

Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se le aplique un agente extemo que le cambie dicho estado.

En su primera ley, Newton pretende que se entienda que el movimiento es relativo a quien lo observa y de aquí nacen los conceptos de sistemas inerciales y la inercia de los cuerpos. Para entender estos conceptos, comenzaremos con:

(a) Sistemas inerciales.

Como dicha primera ley nos infiere que el movimiento de un cuerpo es **relativo** a quien lo observa; por estado de movimiento se debe entender su "movimiento" relativo a quien realiza dicha observación. Luego, es importante escoger un marco(s) de referencia(s) respecto del cual un observador al pretender describir el movimiento de un cuerpo, si lo observa en reposo, entonces ***concluya que esta libre de agentes externos***. De la misma forma, si se elige otro marco de referencia desde el cual otro observador describe el movimiento del cuerpo moviéndose en línea recta y recorriendo distancias iguales en tiempos iguales, éste concluya lo mismo que el primer observador: ***el cuerpo esta libre de agentes externos***. Obviamente, en dichos dos marcos de referencia, los observadores deben de utilizar sistemas de coordenadas cartesianos tridimensionales, orientados y derechos que ya fueron utilizados en sus cursos de matemáticas elementales. Para Newton, estos marcos de referencia y sus respectivos sistemas de coordenadas, se denominan ***sistemas inerciales***, y deben de estar así mismos libres de todo agente externo. Por lo tanto, ***estrictamente hablando no existen dichos sistemas***, pero es posible según la escala de los fenómenos físicos a tratar, elegir uno (y por lo tanto muchos) que sea lo más inercial posible. Esto es, para fenómenos que se llevan a cabo en una región pequeña cerca de la superficie (la cual se puede considerar plana) de la tierra, un sistema de coordenadas anclado a un punto (marco de referencia) sobre la superficie en dicha región, es un muy buen sistema inercial (la rotación de la tierra influye muy poco en el movimiento de los cuerpos en dicha región), y todos los sistemas que se muevan (en dicha región) en movimiento rectilíneo uniforme respecto al primero, son a su vez inerciales. ***De esto se***

concluye que desde dichos sistemas inerciales la observación del reposo o movimiento rectilíneo uniforme es equivalente: no hay agentes externos sobre el cuerpo bajo observación. *También, el movimiento de un cuerpo es más simple observado desde estos sistemas. Además, debemos estar en posibilidad de definir una cantidad física que nos permita medir "el reposo" y " el movimiento rectilíneo uniforme" y efectivamente, se podrá hacer y dicha cantidad es la velocidad del cuerpo y representa el estado de movimiento de él.*

(b) Inercia.

Cuando se pretende cambiar el estado de movimiento de un cuerpo (experimenta cambios de velocidad), o se le observa dicho cambio, entonces existe al menos un agente externo actuando sobre el cuerpo. Si se aplica el mismo agente externo a dos bloques de las mismas dimensiones (uno de madera y uno de acero), la intuición nos dice que el de "acero" experimenta un menor cambio en su estado de movimiento. Entonces se dice que los cuerpos poseen una oposición natural a que se les cambie su estado de movimiento; esta oposición se denomina ***inercia del cuerpo y una medida de ella es mediante el concepto masa, que es una propiedad universal de todos los cuerpos. Obviamente, también debemos poder definir una cantidad física que nos permita medir los cambios de movimiento de un cuerpo. Dicha cantidad será definida posteriormente y se denomina la aceleración del cuerpo***.

Como puede observarse, lo que en pocas palabras dice Newton en su primera ley, implica una serie de reflexiones de tipo filosófico que nos conducen a los dos conceptos ya tratados.

Segunda ley de Newton o Ecuación de Movimiento.

En esta ley, Newton pretende establecernos una relación entre la característica de un cuerpo (su masa) cuyo movimiento pretendemos describir (cambios de su estado de movimiento) y el medio ambiente que lo rodea (agentes externos). Dicha relación nos la ofrece Newton (y no sabemos como se le ocurrió) como

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1.1)$$

donde $\vec{p}$ es el ímpetu del cuerpo, $\vec{v}$ su velocidad y, $\vec{F}_R$ es la "fuerza" resultante sobre el cuerpo.

Aquí es necesario hacer un paréntesis para explicar el concepto de ímpetu y el de fuerza.

(a) Impetu de un cuerpo.

El concepto de ímpetu fue introducido por Newton (con el nombre de cantidad de movimiento lineal) en su segunda ley y es una variable (dinámica) más importante que la velocidad: Suponga el movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante) de dos bloques de las mismas dimensiones pero de distinta masa; si los dos están pintados de negro, es imposible decir, sin tocarlos, quién es quién. Sin embargo, si dichos bloques se lanzan hacia resortes idénticos, el cuerpo cuyo ímpetu es mayor, deformará más al resorte. Si usted piensa que se debe "obviamente" a la diferencia de masa que tienen, considere el mismo experimento con los bloques de distinta masa, distinta velocidad constante, pero con el mismo ímpetu. Es claro que los resortes se comprimen lo mismo. Luego, ***la combinación inercia-estado de movimiento es más importante que simplemente el estado de movimiento***.

En el caso de que la masa del cuerpo se pueda considerar constante (en un avión la masa va cambiando), la segunda ley toma la forma más familiar conocida en textos de menor nivel:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.2a)$$

o

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad (1.2b)$$

donde $\vec{a}$ se conoce como la aceleración del cuerpo y nos mide los cambios de estado de movimiento que experimenta el cuerpo respecto al tiempo.

(b) Fuerza.

Hasta antes de enunciar la segunda ley, se había omitido hablar del concepto de fuerza; esto se debe a los siguientes motivos:

El concepto físico importante que se relaciona con agente externo es el de ***interacción***. Se dice que el movimiento de un cuerpo se debe a la interacción que tiene con su medio ambiente. Es importante matemáticamente definir una cantidad (vectorial) que nos permita medir cuantitativamente a las interacciones que se pueden dar en la naturaleza. Estas cantidades matemáticas se conocen como fuerzas, tienen un carácter vectorial y por lo tanto cumplen la regla de adición de los vectores conocida como ley del paralelogramo o ***principio de superposición***. Desde tiempos pasados, los físicos se han dedicado ha encontrar expresiones matemáticas (fuerzas) que representen las interacciones que se observan en la naturaleza, que reproduzcan los fenómenos ya observados y que puedan predecir en muchos casos, otros fenómenos no observados aún. Sin embargo, surge la pregunta ¿cuántos tipos de interacciones (y por lo tanto de fuerzas) existen en la naturaleza que conforman al universo tal y como lo observamos actualmente?. La respuesta es cuatro: La primera se denomina ***interacción gravitacional*** y que aún siendo la más débil de las cuatro, es la más reconocida puesto que se manifiesta por una atracción entre toda la materia. Es responsable de la existencia de planetas, estrellas y estructuras más grandes en el universo; se debe a la característica de los cuerpos llamada masa; como se indicó antes es importante a escala planetaria, pero también cerca de la superficie de un planeta en cuyo caso se le renombra como el peso del cuerpo. La segunda denominada ***interacción electromagnética*** es la más importante tecnológicamente hablando, puesto que la escala a la que es dominante corresponde a lo atómico y a los cuerpos que formados por millones de átomos se encuentren cargados, esto es, con la característica de los cuerpos llamada la carga eléctrica, sin llegar a cuerpos voluminosos como los planetas, donde la interacción gravitacional es dominante. La tercera se denomina ***interacción débil*** se manifiesta a través de ciertos procesos, tales como algunas clases de desintegración o decaimiento radioactivo; esta interacción se relaciona a la característica denominada carga "débil". Finalmente, la cuarta es llamada la ***interacción nuclear*** que mantiene juntos a los protones y neutrones en el núcleo atómico así como también a los quarks dentro de protones, neutrones y piones; esta se relaciona a la característica de la materia denominada color de carga.

Hasta ahora, parece ser que dichas cuatro interacciones gobiernan nuestro universo, pero nada nos asegura que al evolucionar el universo, pudiesen haber fenómenos nuevos cuya explicación estuviera fuera del alcance de la interpretación dada con dichas interacciones. Debido al concepto físico de interacción, ***la segunda ley de Newton es conocida como la ley de las interacciones***.

Tercera ley de Newton.

En esta ley, Newton pretende mostrarnos una ley universal de la materia: ***a toda acción corresponde una reacción de la misma magnitud pero de sentido contrario***. Es decir, si un cuerpo interactúa con otro, ejerciéndole una fuerza, entonces el segundo responde sobre el primero ejerciéndole el mismo valor de la fuerza pero de sentido contrario. Por lo tanto, es importante que al analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuyo movimiento nos interesa describir, no se omita alguna interacción importante sobre el (al menos que sea despreciable su efecto). La figura 2, muestra esquemáticamente esta ley.

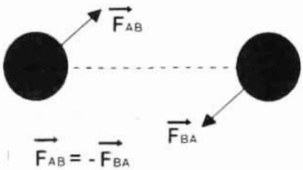


Figura 2

En los textos modernos de física se hace mención de una segunda versión de la tercera ley a la que se le agrega la frase en su forma "fuerte", que agrega a la anterior la consideración de que las fuerzas ***son centrales***, esto es, actúan según la línea recta imaginaria que une las posiciones de los cuerpos como se muestra en la figura 3.

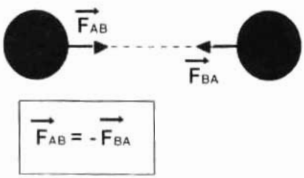


Figura 3

La mayor parte de las fuerzas cumplen la tercera ley en su forma fuerte, pero la fuerza magnética es un ejemplo de fuerza que no la cumple. Es importante mencionar que es indistinto a que fuerza se le denomina la acción y a cual la reacción, ***a la tercera ley se le conoce como la ley de las acciones recíprocas***.

I.3 Ecuaciones cinemáticas para el movimiento en dos dimensiones.

I.3.1 Definiciones cinemáticas.

Como ya mencionamos anteriormente, es necesario definir las cantidades matemáticas que nos midan cuantitativamente los conceptos estado de movimiento y cambios de estado que puede sufrir un cuerpo. Para esto, es importante definir los siguientes conceptos.

(a) Traslación y Rotación.

Consideremos el bloque que se mueve sobre una mesa horizontal y que se muestra en la figura 4. Como se observa, distintos puntos del cuerpo describen trayectorias equivalentes de él; esto nos permite elegir uno de dichos puntos (generalmente el llamado centro de masa) y asignarle la masa del cuerpo para describirle su movimiento, esto es lo que se conoce como ***partícula o punto material*** y el cual fué definido anteriormente pero sin justificación.

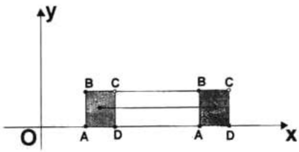


Figura 4

Este concepto de partícula es útil cuando un cuerpo tiene un movimiento como el mencionado y que se denomina traslación.

La figura 5 muestra el giro de una lámina alrededor de un eje perpendicular a su plano, este movimiento que efectúan los distintos puntos del cuerpo se denomina ***rotación***.

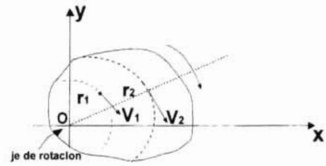


Figura 5

En esta rotación los distintos puntos del cuerpo realizan distintas trayectorias (distintos círculos) y por ello *no se puede elegir un único punto que represente este movimiento del cuerpo. Por lo tanto no tiene sentido hablar de partícula.*
En la figura 6 se muestra el movimiento general de un cuerpo rígido bajo la acción de su peso. Si se mira dicho movimiento desde muy lejos por medio de un observador inercial, anclado en la tierra, este dirá que observa el movimiento de una "partícula" efectuando una trayectoria parabólica.

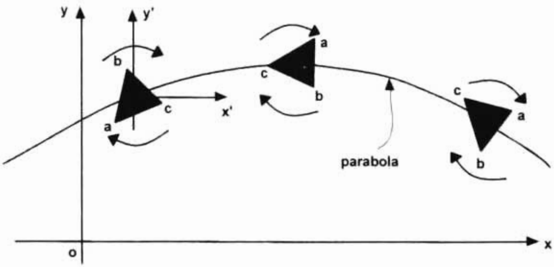


Figura 6

Si este observador se acerca lo más posible para distinguir las dimensiones del cuerpo, dirá que el único punto que sigue la trayectoria parabólica, es el centro de masa del cuerpo; al movimiento del centro de masa se le denomina ***el movimiento de traslación del cuerpo***. Como la descripción del movimiento del cuerpo no está aún completo (falta describir el "giro" que se observa en el), se elige un sistema de referencia (el cual es no inercial) anclado al centro de masa del cuerpo y se describe dicho "giro" el cual corresponde sólo a una rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto; a este movimiento de las partes que componen al cuerpo, relativo al centro de masa ***se le denomina movimiento de rotación del cuerpo***. Por lo tanto, el movimiento general de un cuerpo ***es un movimiento combinado de traslación y rotación***.

(b) Definiciones de cantidades cinemáticas.

Definición 1. Vector de posición y desplazamiento.

La figura 7 nos muestra la trayectoria que sigue una partícula y dos puntos de interés, pero arbitrarios, en la misma curva.

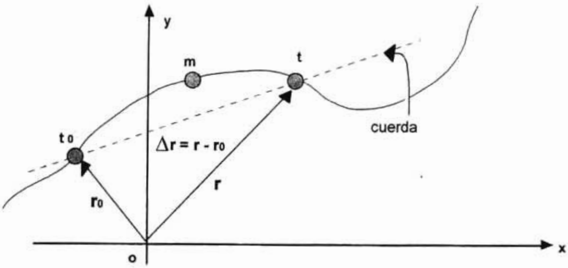


Figura 7

La posición de la partícula en dichos puntos y que corresponden a los tiempos t_o y t se determina por dos coordenadas cada uno; y a los vectores que podemos asociarles a dichos pares de coordenadas se les denomina ***vectores de posición***. Estos vectores son

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{r} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{1.3}$$

y se muestran en dicha figura.

El desplazamiento de la partícula corresponde al vector de posición de un punto relativo a otro (que no es el origen del sistema de coordenadas); para los dos vectores de posición mencionados anteriormente, el desplazamiento de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$ es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0) = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} \tag{1.4}$$

y que se muestra en la figura. Como puede notarse el desplazamiento no tiene que ver con la trayectoria sino con el segmento de línea recta entre dichos puntos; es más

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \qquad (1.5)$$

es la longitud de dicho segmento de recta; en el sistema internacional de unidades (denotado por SI), las unidades del vector de posición, desplazamiento y sus magnitudes es el metro que se denota como *m*.

Definición 2.Velocidad media e instantánea.

La figura 8 nos muestra la trayectoria de la partícula y el vector desplazamiento entre los dos puntos arbitrarios $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$ que denominaremos posición inicial y final respectivamente. Además, los tiempos en los cuales la partícula pasa por dichos puntos serán t_o y t, y serán denominados los tiempos inicial y final respectivamente.

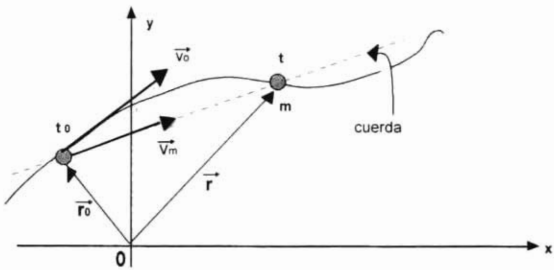


Figura 8

Una primera medida del estado de movimiento de una partícula, ***es la velocidad media*** que se define como el desplazamiento experimentado por ella entre dichos puntos dividido con el intervalo de tiempo invertido, esto es

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \qquad (1.6)$$

Como puede observarse, dicha definición implica que la velocidad media no nos proporciona información acerca de lo que ocurre en puntos intermedios entre los puntos inicial y final; esto es, es precisamente un promedio entre dichos dos puntos. Por lo tanto requerimos una cantidad vectorial que nos diga que ocurre con los cambios de posición en todo punto. Para este objetivo, definimos la

velocidad instantánea en t_o como un proceso límite de la velocidad media:

$$\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0} \qquad (1.7)$$

Es importante mencionar que fué precisamente Newton el que inició el cálculo diferencial por la necesidad que acabamos de observar. Este vector velocidad es tangente a la trayectoria en dicho punto como puede observarse al representar en la figura varias cuerdas que tienden en el límite mencionado al valor instantáneo de la velocidad evaluado en to; pero como el tiempo to es arbitrario, ***la velocidad instantánea en cualquier punto*** es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.8)$$

y de la definición de la derivada, ***el vector velocidad es tangente a la trayectoria en todo punto de ella***; en el SI la unidad del tiempo es el segundo, denotado como *s*. Para la velocidad media e instantánea las unidades son m/s en el SI. Como $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, la ecuación (1.8) que es vectorial se puede escribir como dos ecuaciones escalares para el movimiento en dos dimensiones:

$$\vec{v}(t) \equiv v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dx}{dt}\hat{j}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad (1.9a)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \qquad (1.9b)$$

Es importante recalcar que este concepto de velocidad instantánea nos mide el estado de movimiento de la partícula

Definición 3. Aceleración media e instantánea.

La figura 9 nos muestra la trayectoria de la partícula y las velocidades instantáneas que puede tener en nuestros dos puntos de interés.

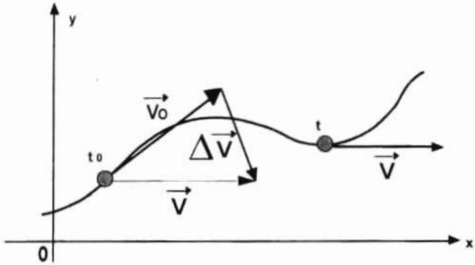


Figura 9

Una primera medida del cambio de estado de movimiento que experimenta la partícula tiene que ver con la ***aceleración media***, que se define como el cambio de la velocidad en dichos puntos entre el intervalo de tiempo invertido, esto es

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \qquad (1.10)$$

la cual apunta en general hacia la parte cóncava de la trayectoria como se muestra en la figura. Al igual que con la velocidad media, la aceleración media es un promedio entre los dos puntos de interés y no nos permite saber lo que ocurre en los puntos intermedios. Por ello, es necesario definir el concepto instantáneo de ella y que se denomina la ***aceleración instantánea***. Esta es

$$\vec{a}_0 \equiv \vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{t_0} \qquad (1.11)$$

calculada en el punto inicial; como el punto es arbitrario, ***la aceleración instantánea en cualquier punto de la trayectoria*** es

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.12)$$

Esta es la cantidad que nos mide cuantitativamente el cambio de estado instantáneo de la partícula; las unidades de la aceleración media e instantánea son m/s^2 . La ecuación (1.12) se puede escribir como dos ecuaciones escalares de la siguiente forma:

$$\vec{a}(t) \equiv a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \frac{d}{dt}\left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}\right) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}$$

o

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad (1.13a)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (1.13b)$$

No se necesita seguir definiendo más cantidades cinemáticas, puesto que para la descripción cinemática de la partícula, la segunda ley nos pide sólo hasta el concepto de aceleración instantánea. Cabe mencionar que la cantidad $\frac{d\vec{a}}{dt}$ se denomina en la biología como ***sensación***, y los seres vivos experimentan dichos cambios de aceleración en sus sentidos, pero no es necesaria conocerla para describir el movimiento de, *por ejemplo usted*. En los parques de diversiones "juegan" con nuestros sentidos haciéndonos experimentar cambios de aceleración.

I.3.2 Movimiento uniformemente acelerado. MUA.

El caso más simple de movimiento de una partícula corresponde a una fuerza resultante constante (por el momento distinta de cero), si este es el caso, de la ecuación de movimiento se despeja la aceleración

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m}$$

la que resulta ahora conocida y es obviamente constante. La ecuación (1.14) se puede despejar e integrar para la variable velocidad

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt$$

de donde

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad (1.15)$$

y corresponde a las dos ecuaciones escalares siguientes

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0) \quad (1.16a)$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y(t - t_0) \quad (1.16b)$$

Posteriormente, sustituyendo la ecuación (1.15) para la velocidad en la ecuación (1.8) de su definición, se tiene

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

e integrando, tenemos

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} dt + \vec{a} \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

de donde

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} (t - t_0)^2 \qquad (1.17)$$

y que corresponde al siguiente par de ecuaciones escalares

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2 \qquad (1.18a)$$

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_y (t - t_0)^2 \qquad (1.18b)$$

Note que en las anteriores ecuaciones tenemos al tiempo como un parámetro a conocer para poder determinar la velocidad y la posición de la partícula. Podemos encontrar otra pareja de ecuaciones (en dos dimensiones) que no involucren el tiempo. Para esto, consideremos la primera ecuación de (1.13) y la regla de la cadena del cálculo

$$a_x = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

de donde

$$\int_{v_{x0}}^{v} v_x dv_x = a_x \int_{x_0}^{x} dx$$

obteniendo la ecuación

$$v_x^2(x) = v_{x0}^2 + 2a_x (x - x_0) \qquad (1.19a)$$

y por analogía

$$v_y^2(y) = v_{y0}^2 + 2a_y (y - y_0) \qquad (1.19b)$$

Si $\vec{a} = 0$, $(\vec{F}_R = 0)$ tenemos el tan conocido ***movimiento rectilíneo uniforme***, que nos menciona Newton en su primera ley. Note que aparentemente se puede deducir la primera ley a partir de la segunda; pero esto no es así ya que la primera ley nos condiciona la descripción del movimiento en sistemas inerciales donde la segunda ley de movimiento adquiere ***la forma tan simple mostrada en su definición***.

Gráficas del movimiento uniformemente acelerado.

Puesto que este es el movimiento más simple de una partícula, es importante que a través de gráficas veamos su comportamiento; además estas gráficas las podemos relacionar mediante las operaciones de derivación e integración del cálculo. La figura 10 le muestra en una dimensión las gráficas x *vs* t, v_x *vs* t y a_x *vs* t

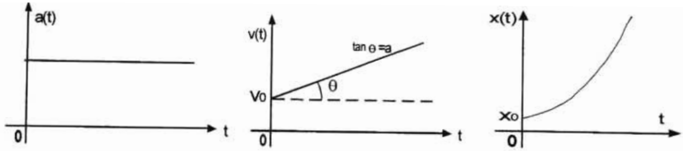


Figura 10

Note que derivando la primera gráfica (un polinomio de grado 2) se obtiene la segunda gráfica (un polinomio de grado 1); luego, si se deriva la segunda gráfica se obtiene la tercera y última gráfica (un polinomio de grado 0). De regreso, es suficiente tener en cuenta que si se integra un polinomio de grado 0 se obtiene un polinomio de grado 1 y finalmente, al integrar el polinomio de grado 1 se obtiene un polinomio de grado 2. Además, la segunda gráfica (v_x *vs* t) nos permite obtener de otra forma la velocidad media (exclusiva para el MUA).
La velocidad media se define en general como

$$v_{mx} = \frac{1}{t}\int_0^t v_x(t)dt$$

pero, si la velocidad varía linealmente con el tiempo (MUA) se tiene

$$v_{mx} = \frac{1}{t}\int_0^t (v_{x0} + a_x t)dt = \frac{\left(v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}\right)}{t} = \frac{v_{x0} + (v_{x0} + a_x t)}{2}$$

de donde

$$v_{mx} = \frac{v_{x0} + v_x}{2} \qquad (1.21a)$$

y por analogía

$$v_{my} = \frac{v_{y0} + v_y}{2} \qquad (1.21b)$$

las cuales se pueden resumir en la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} \qquad (1.22)$$

Con esta ecuación concluimos el conjunto de ecuaciones cinemáticas que nos dan la descripción del movimiento.
Para concluir con este subtema es importante mencionar que ***la ecuación de la trayectoria*** se determina por las ecuaciones paramétricas (1.18) para valores del parámetro tiempo, o por la

expresión y=y(x) que se obtiene de las ecuaciones (1.18) eliminando el tiempo como parámetro.

I.4 Ejemplos de movimientos en dos dimensiones.

En la descripción del movimiento de una partícula, merecen una atención especial dos tipos de movimiento: el tiro parabólico y el movimiento circular.

I.4.1 Tiro parabólico.

El tiro parabólico se puede definir como el movimiento de una partícula que resulta de aplicársele una fuerza constante y que se lanza con una velocidad que forma un ángulo con respecto a la fuerza (ángulo distinto de 0 y $\theta/2$).
La figura 11 muestra este movimiento respecto a la superficie de la tierra y con el origen de coordenadas en donde se lanza la partícula.

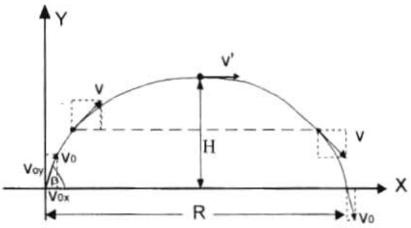


Figura 11

La fuerza constante que actúa sobre la partícula es su peso y se encuentra dada por la expresión

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \qquad (1.23)$$

y de la segunda ley se tiene

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -mg\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

o

$$a_x = 0 \qquad (1.24a)$$
$$a_y = -g \qquad (1.24b)$$

esto es, en el eje-x su comportamiento es uniforme y en el eje-y es uniformemente acelerado.
Sustituyendo (1.24) en las ecuaciones (1.16,1.18 y 1.19) se obtiene

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0) = v_{x0} = v_0 \cos\theta = constante \qquad (1.25a)$$

$$v_x^2(x) = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) = v_{x0}^2 = (v_0 \cos\theta)^2 = constante^2 \qquad (1.25b)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 = v_{x0}t = (v_0 \cos\theta)t \qquad (1.25c)$$

para el eje-x (note que se tomó el tiempo inicial como cero).
Nótese que sobre el eje-x podemos decir sólo dos cosas importantes: la primera se refiere a que la componente-x de la velocidad en cualquier punto de la trayectoria es constante (ver la figura 11); la segunda nos dice que la posición horizontal varía linealmente con el tiempo (movimiento rectilíneo uniforme).
En el caso del eje-y tenemos

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y(t - t_0) = v_{0y} - gt = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \qquad (1.26a)$$

$$v_y^2(y) = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{y0}^2 - 2gy = (v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 - 2gy \qquad (1.26b)$$

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1.26c)$$

Así se tiene que el movimiento en el eje-y es uniformemente acelerado, con la aceleración de la gravedad.
En este tipo de movimiento parabólico hay algunas cantidades de interés como son: el tiempo de vuelo, rango o alcance, altura máxima y el tiempo en el que se alcanza la altura máxima. Procederemos a calcular dichas cantidades.

(a) Alcance y tiempo de vuelo.
Como el rango es la distancia total horizontal recorrida por el proyectil, entonces y=0, y de la ecuación (1.26c) se tiene

$$0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t_v - \frac{1}{2}gt_v^2$$

de donde

$$t_v = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \qquad (1.27)$$

y que corresponde al tiempo de vuelo (el tiempo que invierte el proyectil en recorrer el rango). El rango o alcance se obtiene sustituyendo (1.27) en (1.25c):

$$R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \tag{1.28}$$

y el cual se muestra en la figura 11.

(b) Altura máxima y tiempo para la altura máxima.
Sólo existe un punto en la trayectoria donde la componente-y de la velocidad es cero, y corresponde al vértice de la parábola (ver la figura 11). Haciendo $v_y = 0$ en (1.26a) y (1.26b) se tiene

$$t_H = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \tag{1.29}$$

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\theta}{2g} \tag{1.30}$$

para el tiempo en el que se alcanza H que corresponde a la altura máxima (ver la figura 11).
Cabe mencionar que en los ejercicios se debe tener cuidado si $x_0 = y_0 \neq 0$ ya que entonces no se pueden aplicar los resultados anteriores; pero las condiciones impuestas y=0 y $v_y = 0$ son totalmente generales para encontrar dichos resultados.
Por ultimo, es necesario calcular la ecuación de la trayectoria para quedar convencidos de que efectivamente se tiene una parábola. Despejando t de (1.25c) y sustituyendo en (1.26c) y después de un poco de álgebra, tenemos

$$\left(y - \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}\right) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}\right)^2 \tag{1.31}$$

la cual corresponde a la ecuación de una parábola vertical convexa hacia arriba.

I.4.2 Movimiento circular.

En el movimiento circular no podemos, al igual que se hizo en el tiro parabólico, suponer la fuerza que actúa sobre la partícula y que la obliga a tener dicha trayectoria. De otra forma, existen muchas maneras de actuar sobre una partícula para que realize un movimiento circular. Por ello, ***supondremos que la trayectoria que realiza la***

partícula es circular y posteriormente investigaremos las fuerzas que ocasionaron dicho movimiento.

La figura 12 muestra el movimiento circular de una partícula. Como puede observarse en términos de coordenadas cartesianas (x,y) el movimiento es bidimensional; pero si se eligen las coordenadas θ y r (constante) llamadas ***coordenadas polares***, el movimiento es en una dimensión. Por lo anterior, consideraremos primeramente el estudio de este movimiento en términos de las últimas coordenadas y posteriormente se regresará a las cartesianas; también se encontrarán las relaciones que guardan ambas variables ***en los dos enfoques del mismo problema***. Podemos adelantar que las variables polares θ y r serán muy importantes *en el estudio del movimiento combinado de traslación y rotación del cuerpo rígido.*

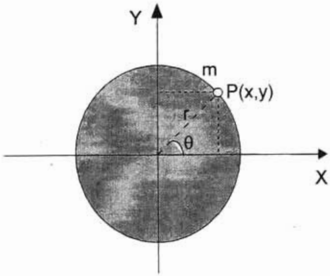


Figura 12

(a) Movimiento circular en términos de las variables angulares.

La figura 13 nos muestra a una partícula en dos "posiciones angulares" θ y θ_0 y definimos el desplazamiento angular $\Delta\theta$ en radianes como

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \qquad (1.32)$$

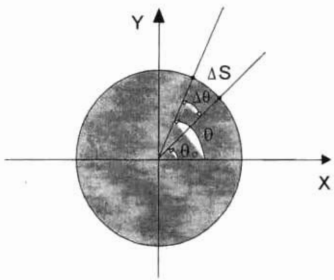


Figura 13

En particular, si la partícula se desplaza $\Delta s = 2\pi r$, que corresponde al perímetro del círculo, entonces el ángulo subtendido por la partícula es de 2θ rad; es muy conocido que el ángulo subtendido por un punto en el plano es de 180^0 o 2θ rad e independiente del radio del círculo. Es importante mencionar que los radianes como los grados son una escala y no unidades físicas del SI; esto queda claro si se observa que en la definición del ángulo, este es igual al cociente de dos longitudes y por lo cual no tiene unidades. Entre dichas dos posiciones angulares, podemos definir, por analogía al movimiento en una dimensión, ***la velocidad angular media*** como

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \qquad (1.33)$$

y que nos representa un promedio entre dichas dos posiciones angulares. Por esto, es importante definir el concepto de ***velocidad angular instantánea*** como

$$\omega(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0} \qquad (1.34)$$

definida en t_0, pero como el punto es arbitrario, ***la velocidad angular en cualquier punto o instante es***

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (1.35)$$

La figura 14 muestra nuevamente las dos posiciones angulares de la partícula, donde las velocidades angulares son ω_0 y ω.

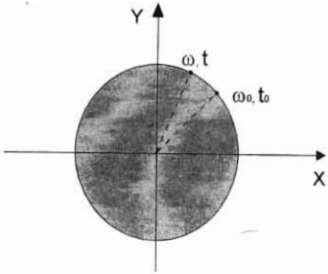


Figura 14

Las unidades de la velocidad angular media e instantánea son *rad/s* en el SI.

Definimos la ***aceleración angular media*** entre dichas posiciones como

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \qquad (1.36a)$$

En el caso de la ***aceleración angular instantánea*** tenemos

$$\alpha(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{t_0} \qquad (1.36b)$$

en la posición inicial. Para cualquier punto y por lo mismo para todo tiempo, la función ***aceleración angular instantánea*** es

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (1.37)$$

Las unidades de la aceleración angular media e instantánea son *rad/s*^{2} en el SI.

En el movimiento circular, un caso particular y simple resulta cuando α=cte y es llamado movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA). Puesto que nuestras variables angulares guardan una estrecha relación con las variables cartesianas en una dimensión (llamadas también variables lineales):

$$\begin{aligned} \theta &\to x \\ \omega &\to v \\ \alpha &\to a \end{aligned} \qquad (1.38)$$

nos resultan ecuaciones similares a las ecs.(1.17)-(1.22):

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (1.39)$$
$$\omega_m = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

(b) Movimiento circular en variables cartesianas. Relación entre ambos conjuntos de variables.

La figura 15 muestra el movimiento circular de una partícula, al cual se le ha anclado un sistema de vectores unitarios ortogonales: $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$.

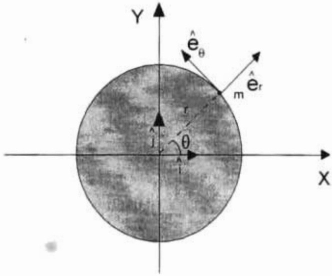


Figura 15

El vector de posición de la partícula es

$$\vec{r} = r\hat{e}_r = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad (1.40)$$

en donde se ha utilizado la relación entre los dos conjuntos de vectores unitarios:

$$\hat{e}_r = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (1.41a)$$
$$\hat{e}_\theta = -\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta \qquad (1.41b)$$

como se observa en la figura 16.

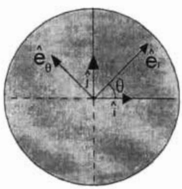


Figura 16

La velocidad se obtiene, como se sabe, derivando respecto al tiempo la ecuación (1.40) obteniéndose

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r(-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = r\omega\hat{e}_\theta \qquad (1.42a)$$

Como puede observarse de esta ecuación, en forma natural hemos obtenido que la velocidad es tangente a la trayectoria. También, la relación entre la rapidez lineal y la velocidad angular es

$$v = \omega r \qquad (1.42b)$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo la ecuación (1.42a) se tiene

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\hat{e}_r + r\alpha\hat{e}_\theta = -a_r\hat{e}_r + a_t\hat{e}_\theta \qquad (1.43)$$

donde

$$a_t = r\alpha = \frac{dv}{dt} \qquad (1.44)$$

$$a_r = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \qquad (1.45)$$

son las componentes ***tangencial y radial (o centrípeta) de la aceleración*** (ver la figura 17).

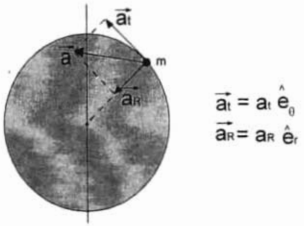


Figura 17

Si multiplicamos la ecuación (1.43) por la masa de la partícula, se obtiene la segunda ley de Newton en la dirección y sentido del nuevo conjunto de vectores unitarios

$$\vec{F} = m\vec{a} = -r\omega^2 m\hat{e}_r + r\alpha m\hat{e}_\theta = -F_r\hat{e}_r + F_t\hat{e}_\theta \qquad (1.46)$$

donde

$$F_t = mr\alpha = m\frac{dv}{dt} \qquad (1.47)$$

$$F_r = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r} \qquad (1.48)$$

son ***las componentes tangencial y radial (o centrípeta) que la fuerza resultante ejerce sobre la partícula y que, aunque se desconozca, produce el movimiento circular de ella***. En particular, para el MCUA, la condición ya dada (α=cte es equivalente a a_t=cte o Ft=cte). Un tipo de movimiento todavía más simple es el movimiento circular uniforme (MCU) que significa que ω=cte, v=cte, $a_t=0$ o $F_t=0$.
Como podemos ver de las ecuaciones (1.47) y (1.48), ***la fuerza tangencial (que es la responsable de que la velocidad cambie de magnitud) puede ser cero como es el caso en el MCU; pero la fuerza centrípeta (que es la responsable de que la velocidad cambie de dirección y sentido) nunca puede ser cero***.

Por último volvemos a insistir que en cada ejercicio a resolver, se debe investigar quienes son las fuerzas tangencial y centrípeta (***y por lo mismo la fuerza resultante***) que hacen que el movimiento de la partícula sea un círculo.

Unidad II. Trabajo y Energía Mecánica.

II.1 Introducción.

Antes de comenzar esta unidad es importante mencionar dos hechos que nos motivan a incluirla en este curso. Probablemente no sean los únicos, pero nos permiten ver la relevancia de su enseñanza.
En primer lugar, se tiene que en algunas ocasiones la fuerza resultante sobre una partícula (o alguna de las fuerzas componentes) ***depende de la posición en lugar del tiempo*** (y en otros casos de velocidad). Un ejemplo de esto corresponde a la fuerza ejercida por un resorte ideal, $\vec{F} = -kx\hat{i}$, sobre un bloque que se mueve en una superficie horizontal y que se muestra en la figura 1.

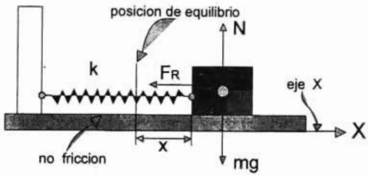


Figura 1

Si se sustituye dicha expresión de fuerza en la segunda ley de Newton, se llega a la siguiente "ecuación diferencial" de la incógnita x (ya que no nos es posible integrar como se hizo en el caso de que la fuerza resultante era constante):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (2.1)$$

de la cual surgen las siguientes preguntas ¿cómo se resuelve dicha ecuación? ¿qué hacemos si no lo sabemos? ¿será importante que se conoce la trayectoria del bloque? (por conocimiento de la trayectoria no se debe entender la solución x de dicha ecuación, sino saber que el bloque se mueve en el eje-x). La figura 2 muestra el tan llamado péndulo simple que corresponde a una cuerda en cuyo extremo está unida una partícula y se pone en movimiento en un plano vertical.

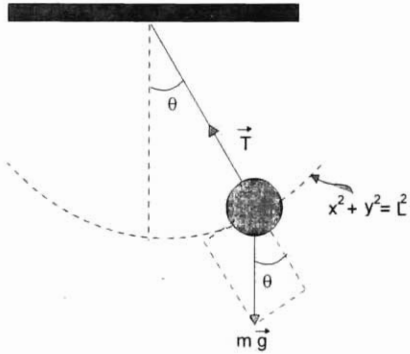


Figura 2

Aquí se encuentra que la ecuación diferencial de la incógnita θ es

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad (2.2a)$$

que es parecida a la ecuación del resorte, pero resulta que es mucho más complicada. Si se suponen desplazamientos angulares pequeños, $\sin\theta \cong \theta$, y la ecuación nos queda como

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0 \qquad (2.2b)$$

que es una ecuación similar a la del resorte. Aquí se tienen las mismas preguntas que se hicieron para el sistema masa-resorte, y además podemos decir que ***la trayectoria es un arco de la circunferencia*** $x^2 + y^2 = L^2$. Este tipo de problemas son tan importantes que no podemos dejarlos a un lado por nuestra falta del conocimiento en ecuaciones diferenciales. Por ello es importante resolver dichos problemas (y otros miles más) mediante una técnica distinta a la utilizada en la unidad I.

En segundo lugar, tenemos los problemas que ya se han resuelto en la unidad I directamente utilizando la segunda ley de Newton, y que como el mostrado en la figura 3, se puede notar que ***la trayectoria del bloque*** se conoce (parte del eje-x). Sería un gran logro si con la técnica por ver en esta unidad, este tipo de problemas se pueden incluir.

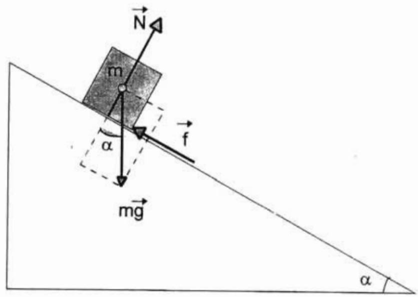


Figura 3

Sobre la base de que los dos tipos de problemas mencionados tienen un denominador común: ***se conoce la trayectoria del movimiento***; esto nos permitirá reescribir la segunda ley de Newton con otras cantidades físicas por definir y que ***efectivamente nos permitirán resolver las dos clases de problemas mencionados***.
Es importante decir en este momento que a pesar de utilizar una técnica distinta en la solución de los problemas, ***siempre es posible hecha mano de lo ya visto con anterioridad***, y que generalmente este es el caso.

II.2 Trabajo y Energía Cinética.

En el movimiento de una partícula cuya trayectoria (en general curvilínea) se conoce y se muestra en la figura 4, por lo visto en el movimiento circular, sólo la componente tangencial de la fuerza resultante, F_{RT}, ***puede cambiar de magnitud al vector velocidad***. Su dirección y sentido ya se conoce de antemano puesto que es tangente a la trayectoria en todo punto. Necesitamos por lo tanto, ***la proyección de la fuerza en la dirección de la velocidad***.

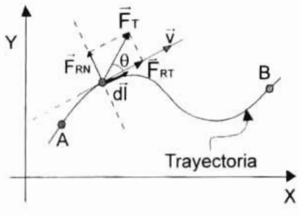


Figura 4

De esto último, nace el concepto del ***trabajo realizado sobre la partícula en un desplazamiento*** $d\vec{r}$ (el cual es obviamente paralelo a la velocidad) como

$$\delta W = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \qquad (2.3)$$

pero, lo más importante es el trabajo que realiza la fuerza resultante entre dos puntos A y B de la trayectoria

$$(A \to B) = \int_A^B \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \qquad (2.4)$$

de donde, las unidades, del trabajo son Newton-metro, que se denomina Joule y se denota en el SI como *J*.
De la definición anterior es posible enunciar varias características importantes del trabajo realizado por una fuerza o la fuerza resultante.

Características del trabajo.
(a) $(A \to B) > 0$. El trabajo realizado por la fuerza es positivo, si esta forma un ángulo agudo con el desplazamiento.
(b) $(A \to B) < 0$. El trabajo realizado por la fuerza es negativo, si esta forma un ángulo obtuso con el desplazamiento.
(c) $(A \to B) = 0$. El trabajo realizado por la fuerza es cero, si esta forma un ángulo recto con el desplazamiento. Esto es, ***si son perpendiculares***.
La figura 5 muestra estas características.

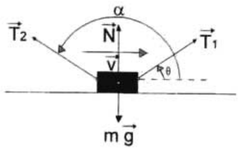


Figura 5

(d) $(A \to B) = \sum_{i=1}^{N} W_i(A \to B)$. El trabajo es aditivo. Esto significa que podemos calcular los trabajos realizados por las fuerzas componentes, utilizando para ellas las características (a), (b) y (c), y luego ***sumando algebraicamente dichos trabajos***. La demostración de esto es fácil y se muestra a continuación

$$(A \to B) = \int_A^B \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} W_i(A \to B) \qquad (2.5)$$

en donde se utilizó el principio de superposición: ***la fuerza resultante es igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales***.

(e) Para cualquier fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo θ con el desplazamiento $d\vec{r}$ (y por lo mismo con la velocidad $\vec{v}$), siempre es posible descomponerla en una componente perpendicular a la velocidad (***y por ello no hace trabajo***) y otra paralela a ella (***y que sí hace trabajo***) como se muestra en la figura 6.

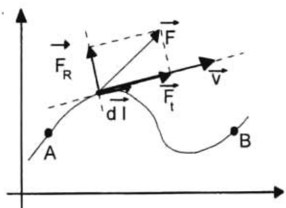


Figura 6

Si se sustituye la segunda ley en la expresión del trabajo, se tiene

$$(A \to B) = \int_A^B \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_A^B d(\frac{1}{2}mv^2)$$

en donde la cantidad

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.6)$$

se le define como ***la energía cinética de la partícula***. Su valor al igual que la velocidad (rapidez), depende del sistema inercial de referencia que se utilice para medirla; esto es, ***su valor es relativo***. Sus unidades son obviamente *J*. De esta definición tenemos

$$(A \to B) = \int_A^B d(\frac{1}{2}mv^2) = \int_A^B dK = K_B - K_A$$

y finalmente

$$\Delta K = W(A \to B) \qquad (2.7)$$

La ecuación (2.7) se conoce como ***el teorema del trabajo y la energía cinética*** y establece que: *el cambio de energía cinética que experimenta una partícula entre dos puntos de su trayectoria, es igual al trabajo total realizado sobre ella entre esos dos puntos.* Esta ecuación es otra forma de reescribir la segunda ley de Newton, pero en términos de otras variables. Esta es la ecuación (una primera forma) a la que pretendíamos llegar. *Resulta indispensable remarcar que el concepto de energía cinética sólo depende de la magnitud de la velocidad por la suposición del conocimiento de la trayectoria.*
Puesto que en los ejercicios manejaremos ciertas fuerzas importantes como: el peso, la fuerza de un resorte, la fuerza de fricción y la ley de Coulomb (para la siguiente unidad), calcularemos el trabajo realizado por cada una de dichas fuerzas.

II.3 Trabajos realizados por fuerzas importantes.

En este tema calcularemos algunos trabajos correspondientes a fuerzas conocidas.

II.3.1 Fuerza constante.

La figura 7 muestra el movimiento de una partícula bajo la influencia de una fuerza constante.

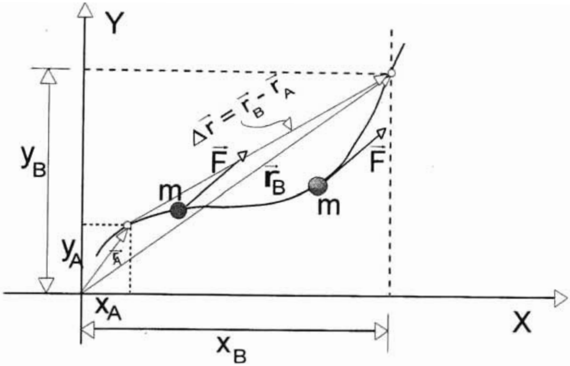


Figura 7

El trabajo que realiza dicha fuerza entre los puntos A y B es

$$(A \to B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r})_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} = \vec{F}(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \qquad (2.8)$$

de donde se observa que este trabajo es equivalente al obtenido sobre la partícula como si esta se hubiera desplazado en la línea recta entre los puntos A y B.

Es importante en este momento resaltar tres aspectos importantes de este trabajo:

(i) Este trabajo no depende de la trayectoria que pasa por los puntos A y B. Solo depende de las coordenadas de dichos puntos

(ii) El trabajo de regreso es el negativo del trabajo de ida.

Esto es fácil de probar puesto que el trabajo de regreso se obtiene con la misma ecuación (2.8) pero con los límites intercambiados, entonces

$$(B \to A) = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -W(A \to B) \qquad (2.9)$$

con lo cual queda demostrado. Es importante hacer notar que el trabajo de regreso puede ser calculado por otra trayectoria que vaya del punto B al A y lo anterior se sigue cumpliendo; esto se debe a lo expuesto en (i).

(iii) El trabajo realizado por dicha fuerza en una trayectoria cerrada es cero. De la ecuación (2.9) se tiene

$$(B \to A) + W(A \to B) = 0 \qquad (2.10)$$

La figura 8 nos servirá para tratar tres casos de fuerzas constantes:

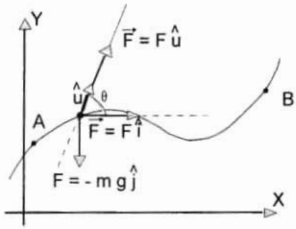


Figura 8

(a) Si $\vec{F} = -mg\hat{j}$, y como $\vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j}$ se tiene

$$(B \to A) = -mgy_B + mgy_A \qquad (2.11)$$

(b) Si $\vec{F} = F\hat{i}$, se tiene

$$(B \to A) = -Fx_B + Fx_A \qquad (2.12)$$

(c) Si $\vec{F} = F\hat{u}$, donde $\hat{u}$ es ***un vector unitario constante*** ,tenemos

$$(A \to B) = \int_A^B F dr \cos\theta = F\cos\theta \int_A^B dr = F(r_B - r_A)\cos\theta \qquad (2.13)$$

donde θ es el ángulo fijo entre la fuerza y el vector desplazamiento.

II.3.2 Fuerza de un resorte. $\vec{F} = -kx\hat{i}$.

La figura 9 muestra el sistema bloque-resorte en donde el resorte se alarga y el bloque se mueve de izquierda a derecha.

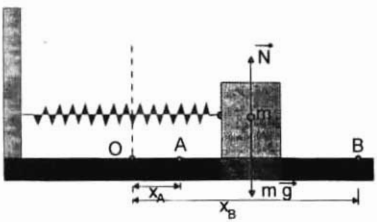


Figura 9

El trabajo realizado por la fuerza del resorte sobre el bloque entre los puntos A y B es

$$(A \to B) = \int_A^B (-kx\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 \qquad (2.14)$$

Note que si se considera compresión en lugar de alargamiento, el resultado no cambia debido al exponente al cuadrado de la posición x. Puede observarse claramente, ***que las tres observaciones hechas para la fuerza constante son válidas para la fuerza del resorte***.

II.3.3 Fuerza de Coulomb. $\vec{F} = K\frac{Qq}{r^2}$.

La figura 10 muestra el movimiento de una carga prueba q dentro del campo producido por la carga Q.

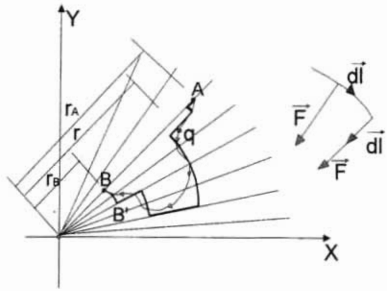


Figura 10

Para calcular el trabajo realizado por la fuerza que Q ejerce sobre q para moverla del punto A al punto B, procederemos como sigue: si en el cálculo integral se aproxima uno a la gráfica de una función por pedazos horizontales y verticales, nosotros nos aproximaremos a la trayectoria dibujada entre A y B en la figura, por medio de pedazos radiales y circulares. Note que el trabajo realizado por la fuerza en los tramos circulares es cero, mientras que en los tramos radiales el trabajo es distinto de cero. De esto se tiene

$$(A \to B) = \int_A^B (K\frac{Qq}{r^2}\hat{e}_r) \cdot (dr\hat{e}_r) = \int_{R_A}^{R_B} K\frac{Qq}{r^2}dr = K\frac{Qq}{R_B} - K\frac{Qq}{R_A} \qquad (2.15)$$

Debe quedar claro que este trabajo es equivalente calcularlo de A a B' o de A a B; es decir, este trabajo es entre cualesquiera dos puntos de las circunferencias de radio r_A y r_B.
Al igual que la fuerza constante y la fuerza de un resorte, esta fuerza también cumple las tres observaciones ya mencionadas-

II.3.4 Fuerza de fricción. $\vec{f} = -\mu N\hat{v}$.

Para la fuerza de fricción se tiene que $\hat{v}$ es un vector unitario en la dirección y sentido del vector velocidad, como se muestra en la figura 11. En el caso de la figura 11 se nota que la normal va cambiando de magnitud, dirección y sentido y, por lo tanto no se puede calcular el trabajo si no se conoce como varía la normal; equivalentemente, ***se requiere la ecuación de la trayectoria***.

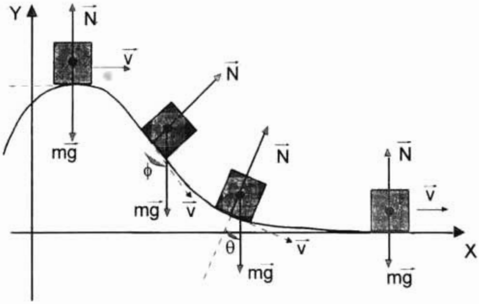


Figura 11

El trabajo realizado por esta fuerza es

$$(A \rightarrow B) = \int_A^B \mu N(\vec{v} \cdot d\vec{r}) = -\mu \int_A^B N(\theta)dr \qquad (2.16)$$

de donde se ve claro que la integral no se puede resolver *sin el conocimiento de la trayectoria*. En el caso en que la magnitud de la normal es constante (θ=cte) como se muestra en la figura 12, la integral ya se puede resolver.

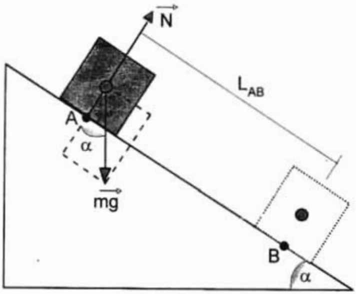


Figura 12

Para este caso, el trabajo es

$$(A \rightarrow B) = -\mu N(L_{AB}) \qquad (2.17)$$

donde L_{AB} es la longitud de la trayectoria entre los puntos A y B.
De lo anterior podemos resumir que: (i) la fuerza de fricción depende de la trayectoria; (ii)el trabajo de regreso no es igual al trabajo de ida aún en la misma trayectoria, puesto que esta fuerza cambia de sentido y también el desplazamiento dando lugar a un trabajo ***siempre negativo***; (iii) por lo dicho en (ii), ***el trabajo realizado por la fricción en una trayectoria cerrada no es cero***.
Aunque es imposible analizar todas las fuerzas que cumplen las tres observaciones mencionadas y todas las que no las cumplen, debe quedar claro que *nos encontramos ante la antesala de clasificar a las fuerzas en términos de si cumplen las tres observaciones o no*.
Esta clasificación será de suma importancia para reescribir el teorema del trabajo y la energía cinética en términos de otros conceptos de suma importancia en la ciencia e ingeniería: ***la energía potencial y la energía mecánica***.

II.4 Conservación de la Energía Mecánica.

En este tema nuestra meta es llegar a establecer un principio general de la naturaleza: ***el principio de conservación de la energía mecánica***; el cual resulta, como ya se indicó, de reescribir el teorema del trabajo y de la energía cinética en términos de otras variables físicas.

II.4.1 Fuerzas conservativas y no conservativas.

Estamos en la posición de hacer una clasificación de las fuerzas de la naturaleza. Diremos que ***una fuerza es conservativa si se cumple cualquiera de las siguientes aseveraciones***:

(i) El trabajo que realiza es independiente de la trayectoria.
(ii) El trabajo que realiza en una trayectoria cerrada es cero.
(iii) El trabajo que realiza se puede recuperar (el trabajo de regreso).
(iv) Existe una función escalar (x,y,z) tal que $\vec{F} = -\nabla U(x,y,z)$.
(v) Si $\nabla \times \vec{F} = 0$.
De lo anterior, se tiene que ***una fuerza es no-conservativa si no cumple cualquiera de dichas aseveraciones***.

Notemos que en el caso de los tres primeros trabajos, las fuerzas que los realizan *son fuerzas conservativas* y el último trabajo (el realizado por la fricción) corresponde a *una fuerza no conservativa*. Para el subtema que sigue es necesario hacer notar que de las aseveraciones (ii) y (iii), se tiene

$$(B \rightarrow A) = -W(A \rightarrow B) \qquad (2.18)$$

II.4.2 Energía potencial.

En la física se define ***el cambio de energía potencial de una partícula, como el trabajo que puede recuperarse, y este es por lo tanto el trabajo de regreso***:

$$\Delta U \equiv W(B \rightarrow A) = -W(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2.19)$$

en donde se utilizó la ecuación (2.18).
Puesto que los trabajos de ida ya fueron calculados para cuatro fuerzas, para cada una de ellas se puede definir un cambio de energía potencial. Procederemos a hablar de cada una de ellas.

(a) Cambio de Energía Potencial Gravitacional.
Este cambio se encuentra asociado a la fuerza que se denominó el peso de un cuerpo. Se tiene que dicho cambio es

$$\Delta U=\left(mgy_B\right)-\left(mgy_A\right) \tag{2.20}$$

cuya unidad es obviamente el Joule, *J* en el SI.

De esta ecuación, se observa que existe una función candidato (ver la aseveración (iv)) para llamarle la energía potencial gravitacional:

$$(y)=mgy \tag{2.21}$$

la cual si se evalúa en el punto final B y en el punto inicial A y se restan, se obtiene la ecuación (2.20). Notemos también, que la función

$$(y)=mgy+c \tag{2.22}$$

también reproduce la ecuación(2.20) si se evalúa en los mismos puntos y se resta. Todo esto nos indica que la función que nos permite definir el concepto abstracto de energía potencial gravitacional esta definida salvo una constante; esto es, la constante nos es indiferente puesto que ***lo que es físicamente importante son los cambios de energía potencial***. Por lo cual quitaremos la constante eligiendo adecuadamente un nivel de referencia donde se pueda definir el cero de energía potencial gravitacional, y desde dicho nivel de referencia se debe medir la energía potencial gravitacional. De la ecuación (2.22) se tiene que

$$(y=0)=0+c=c \tag{2.23}$$

lo que indica que en y =0 el valor de la energía potencial gravitacional es el valor de la constante. Precisamente es en y =0 donde se define el nivel 0*J* de dicha energía. De esta manera, la ***función energía potencial gravitacional***, se define como

$$(y)=mgy \tag{2.24}$$

en donde se supone que el nivel de 0J está en la superficie de la tierra. Es importante mencionar que se acostumbra suponer ***almacenada dicha energía***; en este caso se le asigna al objeto sujeto a la fuerza de atracción de la tierra.

(b) Cambio de Energía Potencial del Resorte.

En este caso se tiene

$$\Delta U=\left(\frac{1}{2}kx_B^2\right)-\left(\frac{1}{2}kx_A^2\right) \tag{2.25}$$

en donde la función energía potencial más general es

$$=\frac{1}{2}kx^2+c \tag{2.26}$$

De la ecuación (2.26) se observa que en x= 0 que corresponde a la posición no deformada del resorte, la constante es igual a la energía potencial en dicho lugar; por lo que si se define el 0J en dicha posición, *entonces la energía potencial asociada al resorte es*

$$=\frac{1}{2}kx^2 \tag{2.27}$$

y dicha energía potencial se supone almacenada en el resorte.

(c) Cambio de Energía Potencial Electrostática.

En este caso tenemos

$$\Delta U=\left(k\frac{qq_0}{r_B}\right)-\left(k\frac{qq_0}{r_A}\right) \tag{2.28}$$

y *la función energía potencial electrostática más general* es

$$(r)=k\frac{qq_0}{r}+c \tag{2.29}$$

De esta ecuación se puede observar que cuando las dos cargas se encuentran separadas una distancia infinita ($r\to\infty$), la constante es igual a la energía potencial en dicho lugar, por lo que si se define el 0*J* en dicha situación, *entonces la energía potencial electrostática de dichas cargas es*

$$(r)=k\frac{qq_0}{r} \tag{2.30}$$

y dicha energía potencial se supone almacenada en las cargas eléctricas.

Podemos generalizar diciendo que la energía potencial de cualquier especie depende de la configuración del sistema que está uno tratando (*entendiéndose por configuración, las coordenadas relativas de las partículas que constituyen el sistema*), y recuerde que la energía cinética depende del estado de movimiento de las partículas del sistema a tratar. Por último, debemos mencionar que ***el concepto de energía potencial no se puede asociar a las fuerzas no-conservativas, como es el caso de la fuerza de fricción***.

II.4.3 Conservación de la Energía Mecánica.

Con el nuevo concepto de energía potencial procederemos a reescribir el teorema del trabajo y la energía cinética. De la ecuación (2.7) se tiene

$$\Delta K=W(A\to B)) \tag{2.31}$$

$$\Delta K = \sum_i W_{ic}(A \rightarrow B)) + \sum_i W_{i\,nc}(A \rightarrow B) \qquad (2.32)$$

donde la c y nc corresponden a las palabras conservativo y no conservativo respectivamente. Por lo cual, el primer término de (2.32) corresponde a la suma de los trabajos que son realizados por fuerzas conservativas y, el segundo término corresponde a la suma de los trabajos realizados por fuerzas no-conservativas.
Luego, se tiene que

$$\Delta K = \sum_i W_{ic}(A \rightarrow B)) + \sum_i W_{i\,nc}(A \rightarrow B) \qquad (2.33)$$

de lo cual, la ecuación (2.32) nos queda como

$$\Delta K + \sum_i \Delta U_i = \sum_i W_{i\,nc}(A \rightarrow B) \qquad (2.34)$$

y reescribiendo la parte izquierda de la ecuación anterior se tiene

$$K_B + \sum_i U_B\Big) - \Big(K_A + \sum_i U_A\Big) = W_{T\,nc}(A \rightarrow B) \qquad (2.35)$$

en donde el índice T_{nc} indica que el lado derecho de la ecuación (2.35) corresponde al *trabajo total realizado por las fuerzas no-conservativas*. También, de dicha ecuación se observa en forma natural una cantidad que merece ser definida. Esta cantidad denominada ***la energía mecánica de una partícula y denotada con la letra E se define como***

$$E = K + \sum_i U_i \qquad (2.36)$$

y que es igual a la suma de su energía cinética y todas las formas de energía potencial.
Con esta definición la ecuación (2.35) se puede finalmente reescribir como

$$\Delta E = W_{Tnc}(A \rightarrow B) \qquad (2.37)$$

y que es la ecuación a la que se pretendía llegar. Esta establece que: ***el cambio de la energía mecánica de una partícula entre los puntos A y B es igual al trabajo total realizado por las fuerzas no-conservativas***. También, de esta ecuación surge ***el principio de conservación de la energía mecánica que establece que : en ausencia de fuerzas no-conservativas, la energía mecánica de una partícula permanece constante***.
Este principio se puede establecer matemáticamente como

$$E_A = E_B \qquad (2.38)$$

Finalmente cabe aclarar dos cosas; la primera se refiere a que la ecuación (2.38) es un caso particular de la ecuación (2.37); la segunda tiene que ver con la explicación clara y precisa de que al decir que la energía mecánica es constante, se refiere a que su valor es el mismo en dichos dos puntos independientemente del tiempo y que además la forma matemática de ella puede ser muy distinta en ambas posiciones.

Unidad III. Potencial Eléctrico.

III.1 Introducción.

En esta unidad continuaremos el estudio de la electrostática para cargas puntuales que se comenzó en el curso anterior de física (Fuerza y Equilibrio). Para centrar nuestra discusión, comenzaremos con un pequeño resumen de lo visto en dicho curso y que corresponde a la Ley de Coulomb y el Campo Electrostático; y posteriormente veremos los conceptos nuevos de potencial electrostático y energía potencial electrostática.

III.2 Ley de Coulomb.

La figura 1 muestra dos cargas puntuales denotadas por Q y q que se encuentran interactuando

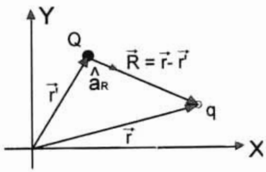


Figura 1

La fuerza que siente la carga q llamada la carga prueba, se encuentra dada por la expresión

$$\vec{F} = K\frac{Qq}{R_i^2}\hat{a}_R \tag{3.1}$$

en donde se deben sustituir los valores con todo y signo de las cargas eléctricas. Para generalizar lo anterior, considere el conjunto de N cargas: Q_1, Q_2, ..., Q_N actuando sobre la carga prueba como se muestra en la figura 2.

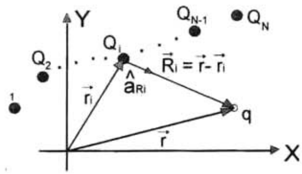


Figura 2

La fuerza que siente la carga prueba se encuentra dada por la expresión

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} K \frac{Q_i q}{R_i^2} \hat{a}_{Ri} \tag{3.2}$$

que nos indica que la fuerza total es la suma vectorial de las fuerzas individuales que le ejercen cada una de las cargas a la carga prueba. La ecuación *(3.2) nos representa el ya bien conocido principio* de superposición. También es importante recordar que en la unidad II se demostró que la fuerza electrostática es conservativa.

III.3 El Campo Electrostático.

Recordemos que en la mayoría de los fenómenos de carácter electrostático ***se puede suponer que la interacción es instantánea***. Sin embargo y para fenómenos más complejos, es importante que se considere el hecho de que ***todas las interacciones no se propagan en forma instantánea***. Se requiere de un tiempo finito para que en nuestro caso, una carga se informe que la fuerza que le ejerce otra carga ha cambiado en virtud de que, digamos, la posición de cualquiera de ellas ha cambiado. Para esto se introduce el concepto del campo electrostático como intermediario de la interacción: ***una carga produce en su alrededor un campo electrostático el cual cuando se ve perturbado produce una onda electromagnética que se propaga con la velocidad de la luz en el medio y es esta onda la que le informa a la otra carga de que la interacción entre ellas ha cambiado***.
La figura 3 nos muestra una carga Q que crea en el espacio que la rodea un campo electrostático (se ha caracterizado dicho campo con un sombreado alrededor de ella).

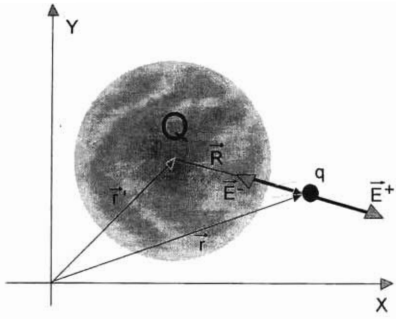


Figura 3

Se define ***el vector intensidad de campo electrostático*** (o por brevedad simplemente campo electrostático), $\vec{E}$, como

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\frac{Q}{R^2}\hat{a}_R \qquad (3.3)$$

en donde se ha sustituido la fuerza que siente la carga prueba (ecuación 3.1). *Este es el campo electrostático que produce Q en el punto del espacio donde estaba la carga prueba.*
Para generalizar a muchas cargas, considere las N cargas mostradas en la figura 4.

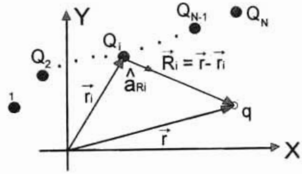


Figura 4

En este caso se tiene que el campo en el punto del espacio donde estaba la carga prueba está dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^{N} K \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{a}_{Ri} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \qquad (3.4)$$

donde nuevamente vemos el principio de superposición, pero para el caso de los vectores campos electrostáticos.

La figura 5 muestra las líneas de fuerza o de campo para el caso de una y dos partículas cargadas.

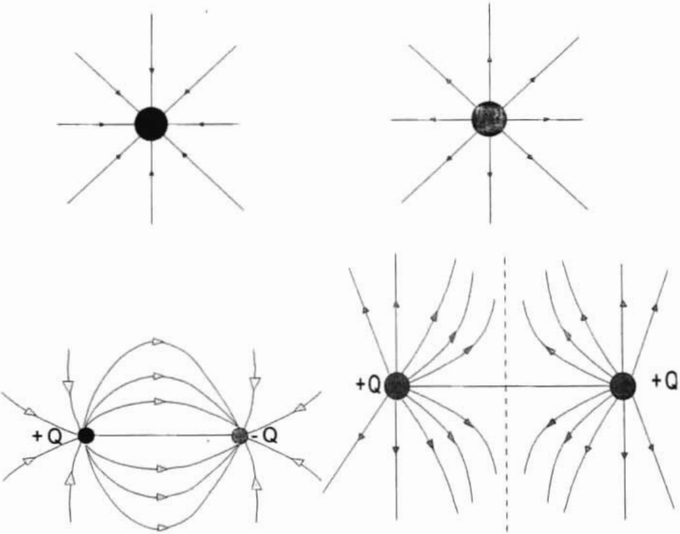


Figura 5

Para terminar este resumen, daremos las propiedades que tienen las líneas de fuerza.

(a) El vector $\vec{E}$ es tangente en todo punto a las líneas de campo.

(b) La magnitud del campo eléctrico es proporcional a la densidad de líneas de fuerza (No. de líneas/m^2). *Esto es equivalente ha decir que en las regiones donde las líneas de fuerza estén muy juntas, ahí se* *tiene un campo intenso; asimismo, en donde estén muy separadas se tiene un campo débil.* Finalmente, es importante recalcar que la naturaleza conservativa de la fuerza electrostática nos permitir definir los conceptos de este tema.

III.4 Energía Potencial Electrostática.

La figura 6 nos muestra a una carga prueba que se mueve por una trayectoria Γ bajo la acción de un campo electrostático cuya fuente por el momento no nos interesa.

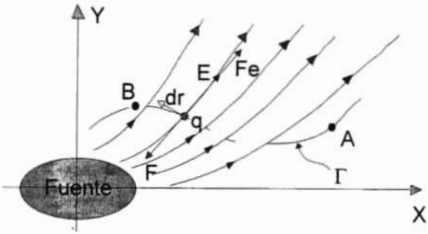


Figura 6

Se define el cambio de energía potencial electrostática como el trabajo que puede ser recuperado. Esto es equivalente a suponer que aplicamos una fuerza externa, $\vec{F}$, de la misma magnitud y dirección que la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e$, que siente la carga prueba pero de sentido contrario. Esto nos permite asegurar que al llevar a la partícula cargada desde A hasta B en equilibrio durante todo el trayecto, la energía que se mide es únicamente de carácter electrostático (por ejemplo, no hay energía cinética). De esto, se tiene

$$\Delta U = W_e(B \to A) = -\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = W(A \to B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ahora sí es importante saber la fuente que produce el campo electrostático que se supuso. La fuente puede ser:

(a) una carga puntual.

(b) un conjunto de N cargas puntuales.

(c) cuerpo(s) cargado(s).

Sólo nos interesaremos con los casos (a) y (b). La figura 7 muestra el caso de una carga fuente y la carga prueba.

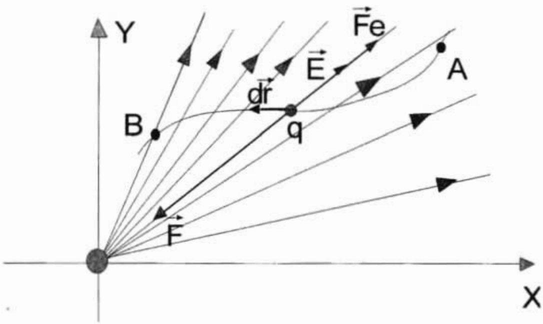


Figura 7

En este caso el cambio de energía potencial entre los puntos A y B es

$$\Delta U = K\frac{Qq}{R_B} - K\frac{Qq}{R_A} \qquad (3.6)$$

expresión ya encontrada en la unidad anterior. *Recordemos que el concepto energía potencial y en nuestro caso de origen electrostático se puede definir salvo una constante en la forma*

$$(r) = K\frac{Qq}{r} \qquad (3.7)$$

en donde el valor de la constante aditivo se elige cero tomando el cero de energía potencial en el infinito ($r \to \infty$). También, es importante recordar que en la resolución de problemas la elección de este nivel de referencia es indiferente, puesto que lo que es físicamente importante es el cambio de energía potencial.

Para generalizar el resultado anterior, consideremos el sistema de cargas de la figura 8:

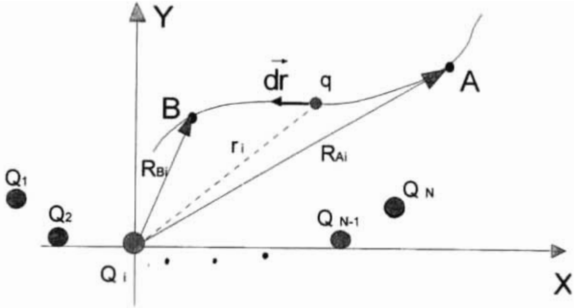


Figura 8

Para calcular el cambio de energía potencial entere A y B y la energía potencial, aprovechamos la propiedad aditiva del trabajo ya vista en la unidad anterior. De esta propiedad se tiene

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{N} K\frac{Q_i q}{R_{Bi}} - \sum_{i=1}^{N} K\frac{Q_i q}{R_{Ai}} \tag{3.8}$$

de donde

$$= \sum_{i=1}^{N} K\frac{Q_i q}{r_i} \tag{3.9}$$

con el cero de energía potencial electrostática nuevamente en el infinito. Si se nos preguntara ¿cuál es la energía potencial electrostática almacenada por las N cargas mostradas en la figura 8?, cometeríamos un error al pretender utilizar la ecuación (3.9) ya que en dicha expresión no se toma en cuenta la energía potencial electrostática entre las parejas Q_i y Q_j. Para encontrar la energía electrostática almacenada por un sistema de N cargas: Q_1, Q_2, ..., Q_N, se procede de la siguiente forma:

Consideremos el sistema de dos cargas que se muestra en la figura 9.

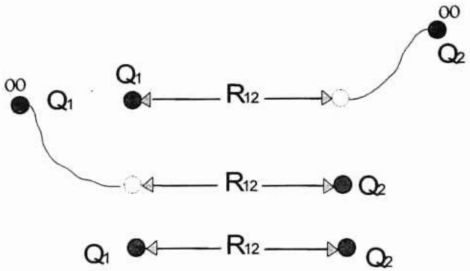


Figura 9

Existen dos maneras de formar dicha configuración, cada una de las cuales depende del orden en que se traigan las cargas desde el infinito.

Si suponemos que traemos primero la carga 1 desde el infinito hasta el lugar deseado, esto se puede hacer sin realizar ningún trabajo de origen electrostático (puesto que todavía no existe ningún campo electrostático en el espacio); luego, se trae la carga 2 bajo la influencia del campo producida por la carga 1 en el espacio. De esta forma y usando la ecuación (3.7), la energía almacenada por las dos cargas es

$$_{12} = K\frac{Q_1Q_2}{R_{12}} \qquad (3.10)$$

y si invertimos el orden en que se traen, se tiene

$$_{21} = K\frac{Q_2Q_1}{R_{21}} = U_{12} \qquad (3.11)$$

debido a lo conservativo de la fuerza electrostática.

Ahora bien, ya que sabemos que el orden en que se traigan las cargas no importa, procedemos a calcular la energía electrostática almacenada en un sistema de tres cargas que se muestra en la figura 10.

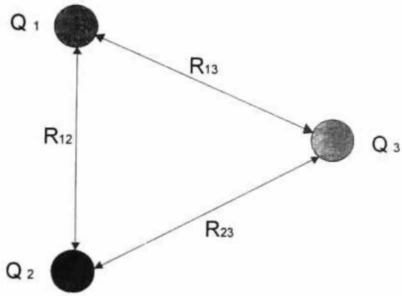


Figura 10

Para nuestro fin, traeremos las cargas según su numeración. Cuando se trae la carga 1 y se coloca en su lugar, no se requiere hacer ningún trabajo de origen electrostático, cuando traemos la carga 2, se requiere hacer un trabajo debido al campo producido por la primera carga, luego la energía almacenada por las dos cargas es

$$_{12} = K\frac{Q_1Q_2}{R_{12}} \qquad (3.12)$$

como era de esperarse. Cuando se trae la carga 3, *esta se vé bajo la influencia de los dos campos producidos por las dos primeras cargas.* ***Utilizando el principio de superposición*** podemos suponer que traemos la carga 3 bajo la influencia individual de la carga 1 y luego de la carga 2 y posteriormente sumar los efectos individuales. Es decir, bajo la influencia de la carga 1, el trabajo para traer la carga 3 y colocarla en su lugar es

$$K\frac{Q_1Q_3}{R_{13}}$$

y bajo la influencia de la carga 2 se tiene

$$_{23} = K\frac{Q_2Q_3}{R_{23}}$$

de donde, la energía almacenada por estas dos cargas es

$$_{13} + U_{23} = K\frac{Q_1Q_3}{R_{13}} + K\frac{Q_2Q_3}{R_{23}}$$

y, finalmente obtenemos la energía almacenada por las tres cargas:

$$=U_{12}+U_{13}+U_{23}=K\frac{Q_1Q_2}{R_{12}}+K\frac{Q_1Q_3}{R_{13}}+K\frac{Q_2Q_3}{R_{23}} \qquad (3.13)$$

Si se generaliza a N cargas como es nuestro objetivo, podemos escribir la energía almacenada por este sistema como

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}K\frac{Q_iQ_j}{R_{ij}} \qquad (3.14)$$

en donde el factor 1/2 se debe a que la doble sumatoria contiene el doble de términos de la energía; también, debe quedar claro que los términos i=j se deben descartar ya que no tienen sentido físico.

Es conveniente aclarar la ecuación (3.14) respecto a la ecuación (3.9):
(a) la última expresión representa la energía necesaria para construir la configuración de N cargas deseadas, (-) la energía necesaria para destruir dicha configuración ó la energía electrostática almacenada por dicha configuración.
(b) la ecuación (3.9) representa la energía potencial electrostática de la carga prueba respecto al sistema de las N cargas

III.5 Potencial Electrostático.

Así como el campo electrostático tiene entre otras virtudes no depender de la carga prueba, es posible asociar con la energía potencial electrostática un nuevo concepto independiente de la carga prueba, este es ***la diferencia de potencial electrostático*** (abreviado ddp) entre los puntos A y B de la trayectoria que sigue la carga puntual. *La ddp electrostático se define como la diferencia de energía potencial electrostática por unidad de carga entre los puntos A y B de la trayectoria* Γ de la figura 7 y figura 8.

Por lo tanto, la ddp electrostático es

$$\Delta V=\frac{\Delta U}{q}=K\frac{Q}{R_B}-K\frac{Q}{R_A} \qquad (3.15)$$

y la cual es producida por la fuente Q como se muestra en la figura 7. Asimismo, se tiene que

$$\Delta V=\frac{\Delta U}{q}=\sum_{i=1}^{N}K\frac{Q_i}{R_{Bi}}-\sum_{i=1}^{N}K\frac{Q_i}{R_{Ai}} \qquad (3.16)$$

que corresponde a la d.d.p. electrostático cuya fuente es el sistema de N cargas de la figura 8. Las unidades de la ddp es el Joule /coulomb que se denomina volt y se denota como V en el SI de unidades. De la ecuación(3.5) se tiene

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \frac{\vec{F}_e}{q} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (3.17)$$

la cual nos permite conocer la ddp en términos directamente del campo electrostático. Luego, si la fuerza se relaciona con la energía potencial, entonces el campo se relaciona con la ddp.
También, de la ecuación (3.17) se observa que otra unidad para el campo es *V/m* la cual es más utilizada en la ingeniería. Con el concepto ddp electrostático se puede definir ***el concepto denominado potencial electrostático el cual está definido salvo una constante al igual que el concepto de energía potencial***. El potencial electrostático en el caso en el cual la fuente es una carga puntual Q es

$$= \frac{U}{q} = K\frac{Q}{r} \qquad (3.18)$$

como se muestra en la figura 11.

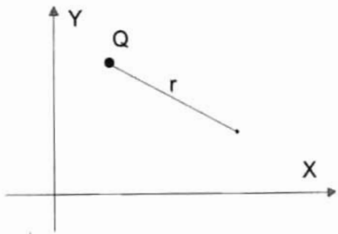


Figura 11

Si la fuente corresponde a N cargas puntuales se tiene que el potencial electrostático tiene la forma

$$= \frac{U}{q} = \sum_{i=1}^{N} K\frac{Q_i}{r_i} \qquad (3.19)$$

que se ilustra en la figura 12. Note que para el potencial se elige su valor de $0V$ en el infinito al igual que con la energía como era de esperarse por la relación existente entre ellas.

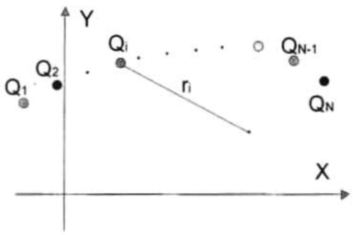


Figura 12

Es importante mencionar que por ser el potencial una función escalar, en lugar de vectorial, este simplemente se suma algebraicamente. De la definición de la energía mecánica vista en la unidad II:

$$E = K + \sum U_i \qquad (3.20)$$

si deseamos incluir la carga como una propiedad que pueden tener los cuerpos, entonces simplemente debemos agregar un término de energía potencial electrostática en la ecuación anterior.

Asimismo, la ecuación de balance de energía mecánica permanece inalterable y por su utilidad en esta unidad repetimos su expresión

$$\Delta E = W_{no-c}(A \to B) \qquad (3.21)$$

Para finalizar la unidad consideramos importante mencionar que los problemas que podemos resolver son muy parecidos a los de la anterior unidad, salvo que incluiremos una energía potencial extra, esta es, ***la energía potencial electrostática***.

Unidad IV. Fuerza electromotriz y Circuitos.

IV.I Introducción.

En esta unidad clasificaremos a los materiales en una forma simple y que corresponde a dos tipos. Luego estudiaremos las propiedades de transporte de carga a través de aquellos materiales del tipo denominados ***conductores*** y que nos ayudan en la vida cotidiana a tener corrientes eléctricas en ellos. Hablaremos de la propiedad de los conductores denominada resistencia y de varios tipos de fuentes que no son de origen electrostático. Finalizaremos resolviendo circuitos cuyos elementos son resistivos exclusivamente.

IV.2 Conductores y dieléctricos.

La figura 1 muestra un bosquejo del movimiento azaroso que tienen los electrones libres dentro de un material de los llamados conductores (en la figura se muestra solo a un electrón).

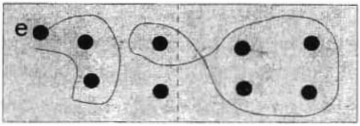


Figura 1

Estos materiales al conformarse mediante la unión de átomos por medio del enlace denominado iónico, permiten que cada átomo contribuya con un electrón que no queda enlazado al átomo en cuestión ni a ningún otro por lo que ***se les denomina electrones libres o portadores de carga***. Este flujo de portadores por ser azaroso no da lugar a un flujo neto de carga a través de la superficie transversal del conductor; es decir, en promedio es igual el número de portadores que atraviesan la superficie transversal de derecha a izquierda que los que la atraviesan de izquierda a derecha. Si se quiere que exista un flujo neto de carga hacia un sentido preferencial, es necesario darles un movimiento extra a los portadores. Este movimiento extra podemos darlo diciendo que les daremos energía, les aplicaremos un campo, una fuerza o les aplicaremos un potencial ya que todos estos conceptos se encuentran relacionados. Nos interesa pensar en términos energéticos (energía potencial o potencial). Para darles energía a estos portadores se requieren dispositivos que pueden proveer en forma permanente de energía a dichos portadores para que circulen por el circuito formado por el conductor y los alambres del cableado, a este tipo de dispositivos (ver la figura 2) se le denomina ***fuerza electromotriz, fuente de voltaje o electromotancia***. Cuando el material no es conductor se le denomina ***dieléctrico o aislante*** y debido al enlace covalente que es el que los forma, no posee las características ya mencionadas de los conductores.

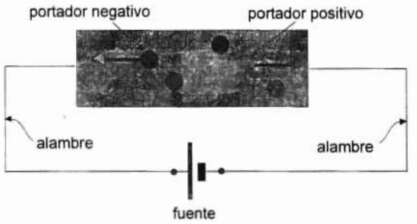


Figura 2

Esta fuente realmente no produce energía en forma permanente (recuerde la segunda ley de la termodinámica), pero supondremos que cuando la fuente se "agote", entonces simplemente se cambia por otra. Por agotar entendemos que el voltaje que suministra ya no es el suficiente para que los portadores continúen su movimiento que necesitamos de ellos. ***El voltaje que suministran estas fuentes se mide en volts pero su origen no puede ser de origen electrostático***. Esto puede quedar claro si consideramos dos placas de conductor cargadas en igual cantidad pero de signos contrarios; si se conecta esta fuente electrostática en el circuito ya mencionado, se establece un flujo de carga en un tiempo tan pequeño que posteriormente a dicho tiempo ya no se tiene ningún flujo de carga en el circuito. Entre las distintas fuentes que podemos mencionar, preferimos darle énfasis a la más conocida de todas por su utilización cotidiana por la gente; estas fuentes son las pilas, baterías o acumuladores que proveen de energía a los portadores mediante reacciones químicas que se realizan en su interior y que convierten esta energía química en energía eléctrica. En un curso posterior y más formal de electromagnetismo pueden ver otros tipos de fuentes.

IV.3 Corriente Eléctrica.

La figura 3 muestra un circuito formado por un conductor cilíndrico, alambres y una batería.

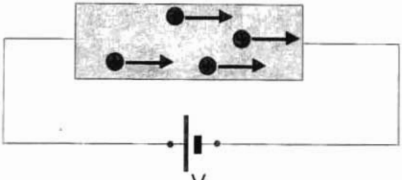


Figura 3

Se define la **corriente eléctrica** en un conductor como el flujo de carga neta que atraviesa la sección transversal por unidad de tiempo

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (4.1)$$

cuyas unidades son coulomb entre segundos a lo que se le da el nombre de amperes y se denota como *A* en el SI. *Esta definición es sólo válida en el caso en el cual la corriente eléctrica es continua, constante o directa lo cual ocurre cuando el cociente en la ecuación (4.1) es el mismo para cantidades proporcionales de carga en tiempos proporcionales.*

Si la corriente ***depende del tiempo****, es necesario hablar del concepto* ***corriente eléctrica instánea*** *(note la similitud con los conceptos promedio e instantáneo de la velocidad en una dimensión).* En este caso, la definición es

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad (4.2)$$

En lo que sigue nos dedicaremos al caso de corriente directa, por lo que las ecuaciones anteriores son la misma. *También es importante remarcar que supondremos que los portadores de carga* ***son***

***positivos** y por convención diremos que la corriente va en el sentido en el cual se mueven ellos.* En el siguiente tema se justificará esta suposición.

IV.4 Vector densidad de corriente.

La figura 4 muestra un corte oblicuo de un pedazo de conductor cilíndrico.

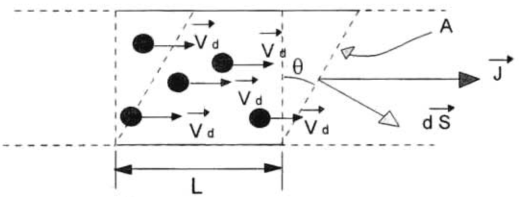


Figura 4

Se acostumbra en los libros de circuitos eléctricos para ingeniería y en algunos libros de física representar a las corrientes eléctricas mediante "flechas" y asignarles "dirección y sentido". Esto da la impresión de que la corriente es un "vector" lo cual no es verdad, puesto que se trata de un escalar. En todo caso esta "notación" permite resolver en forma simple los circuitos eléctricos y después de resolverlos, podemos mediante esta notación indicar el sentido de la corriente en algunas partes del circuito en donde a priori no podemos asegurarlo. Como vamos a observar, formalmente ***la flecha que se dibuja representa el vector densidad de corriente***.

Definamos las siguientes cantidades

n=No. de portadores/volumen.
Δt=tiempo en el cual, cualquier portador viaja una distancia L.

Puesto que el movimiento de los portadores de carga no es tan libre por todas las colisiones que tienen con las demás partículas del material en su interior, estos portadores desde el punto de vista macroscópico se mueven con una velocidad efectiva prácticamente constante denominada ***velocidad de arrastre*** que denotaremos como $\vec{v}_d$. Esta situación es parecida al movimiento de una piedra dentro de un fluido.

Con esto, el No. de portadores que atraviesan la sección transversal en el tiempo Δt es nLA $\cos\theta$ y la cantidad de carga que atraviesa dicha superficie se encuentra multiplicando la anterior cantidad por la carga, q, de los portadores, obteniendo

$$\Delta Q = qnLa\cos\theta = qnv_d\Delta tA\cos\theta$$

De donde el flujo de carga en el tiempo Δt, o corriente eléctrica es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (qnv_d)(A)\cos\theta = \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (4.3)$$

donde

$$\vec{J} = qn\vec{v}_d \qquad (4.4)$$

es el denominado ***vector densidad de corriente***. Note que si se consideran los portadores de carga como negativos, se tiene que hacer dos cambios de signo en la ecuación (4.4), uno en la velocidad y otro en la carga. ***Esto da lugar a que independientemente del signo del portador, el vector densidad de corriente señala hacia el mismo lugar***, *lo que justifica que se considerara a los portadores, por convención, de signo positivo; además, vemos que es éste vector el que realmente dibujamos en los circuitos eléctricos y que el asignárselos a las corrientes eléctricas es un artificio matemático muy útil para resolver circuitos eléctricos.* Es importante mencionar que si este vector es independiente del signo del portador, esto permite que un tercer tipo de material denominado ***semiconductor*** presente propiedades muy interesantes cuando se le contamina con otro tipo de átomos de tal forma que exhiben dos tipos de portadores de carga con vectores densidad de corriente en la misma dirección y sentido. En el caso que el vector densidad de corriente (que no depende del tiempo en nuestro caso) varíe espacialmente en cada punto dentro del material, la ecuación(4.3) se debe reescribir como

$$I = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A} \qquad (4.5)$$

Cabe recordar que seguiremos considerando a los portadores como positivos.

IV.5 Ley de Ohm.

De los experimentos realizados con conductores, estos presentan el siguiente comportamiento:
(a) n es independiente de las coordenadas. Esto es no varía dentro del material.
(b) $\vec{J}$ es proporcional a la primera potencia del campo eléctrico (no electrostático), $\vec{E}$, que crea la batería colocada en el circuito mostrado en la figura 5.

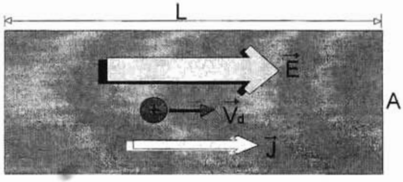


Figura 5

El anterior comportamiento se puede demostrar que se cumple para campos eléctricos no muy intensos, del orden de 10^6 V/m. Este valor de campo eléctrico permite una gran aplicación del modelo del conductor en distintas ramas de la ciencia e ingeniería. Escrita como una igualdad, el modelo descrito se expresa matemáticamente como

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (4.6)$$

donde σ es llamada la ***conductividad del conductor*** y a dicha ecuación se le conoce como la ***Ley de Ohm microscópica***. Esta cantidad nos dice que tan buen conductor es el material. Si aplicamos la relación voltaje-campo y densidad de corriente-corriente se tiene

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{L}$$

de la cual se obtiene

$$= IR \qquad (4.7)$$

que corresponde a ***la Ley de Ohm macroscópica*** y en donde

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A} = \rho \frac{L}{A} \qquad (4.8)$$

se conoce como la resistencia R del conductor y ρ la resistividad. Las unidades de la resistencia son volts entre ampere que recibe el nombre de ohm y se denota como Ω en el SI. De las unidades de la resistencia daremos las unidades de la resistividad del conductor

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad (4.9)$$

que son *Ω-m*. Finalmente, las unidades de la conductividad son *1/Ω-m =S/m*, donde *S* es la notación de las unidades llamadas siemens y que corresponde al inverso de las unidades de resistencia (ohms)en el SI.

IV.6 Potencia.

Es importante desde los cursos de mecánica definir el concepto de potencia como la rapidez con la cual se suministra o absorbe energía. En el caso de una fuente, cuando un portador es atraído por su terminal negativa, absorbe energía y es repelido por su terminal positiva, la rapidez con la cual la fuente suministra energía al portador es

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(qV) = V\frac{dq}{dtr} = VI \qquad (4.10)$$

En el caso en el cual el portador pasa por la resistencia (por el conductor), el portador cede energía la cual se transforma en energía calorífica del conductor (fenómeno que se conoce como efecto Joule). Esta energía que absorbe la resistencia, y más aún la rapidez con la cual la absorbe se encuentra con la misma ecuación (4.10); esto es, *la ecuación mencionada es general.* En el caso de que las resistencias tengan el comportamiento óhmico se puede sustituir la ley de Ohm en la ecuación (4.10) y obtener para la potencia absorbida por las resistencias óhmicas

$$P_R = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R} \qquad (4.11)$$

Para cualquier otro elemento de circuitos se utiliza la ecuación (4.10) para calcular la potencia que suministra o absorbe.

IV.7 Circuitos eléctricos con resistencias.

En lo que sigue estudiaremos los circuitos más simples, que son los que contienen fuentes de voltaje (baterías) y resistencias. ***Sin embargo, las reglas para resolver cualquier tipo de circuito son***

generales y son las que veremos en este tipo particular de circuitos.

IV.7.1 Ley de voltajes de Kirchhoff. LVK.

Consideremos el circuito de la figura 6 el cual es conocido como el circuito de ***una malla***(este término se detallará con más profundidad posteriormente).

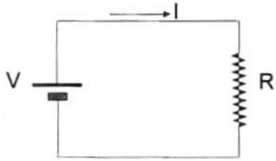


Figura 6

En este circuito se ha utilizado los símbolos circuitales para representar a la fuente y a la resistencia del conductor. También es importante mencionar que aunque el cableado de un circuito lo componen conductores y por lo mismo tienen resistencia, *se considerará que dichos conductores tienen resistencia cero*. De otra forma, *se debe considerar que la resistencia del cableado es despreciable respecto a la resistencia más pequeña que se halla en el circuito*.

Si consideramos ***la conservación de la energía*** en el circuito mostrado, se tiene que *la potencia suministrada por la fuente es igual a la potencia que se disipa por efecto Joule en la resistencia*, esto es

$$P = \ I = I^2 R = P_R \qquad (4.12)$$

de donde se obtiene

$$+V - IR = 0 \qquad \text{ó} \qquad -V + IR = 0 \qquad (4.13)$$

Como las dos ecuaciones (4.13) son la misma, podemos enunciar una regla denominada ***Ley de Voltajes de Kirchhoff*** (denotada por LVK) cuyo enunciado dice:

La suma algebraica de voltajes en una trayectoria cerrada es cero.

Esta ley es independiente de donde comenzamos y terminemos (el mismo punto); también, la trayectoria puede ser real (coincidir con el cableado) o imaginaria (pedazos de ella pueden no formar parte de la trayectoria elegida).

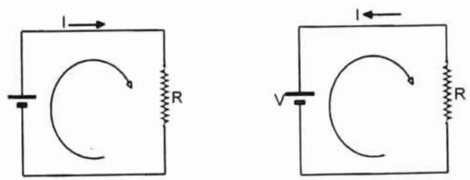
Para que el uso de esta regla nos permita no cometer errores, es indispensable agregar a su uso las siguientes convenciones:

(a) elige un recorrido arbitrario para tu trayectoria, que por el momento es el circuito de nuestra figura. Sólo hay dos posibilidades: horario o antihorario.

(b) se elige la "dirección" de la corriente en forma arbitraria en el circuito, ya que solo hay una corriente en el.

(c) respecto a la fuente, si esta se atraviesa respecto al recorrido elegido de - a + se escribe + V y se le denomina subida de voltaje. En el caso contrario se escribe - V y se dice que corresponde a una caída de voltaje. Para la resistencia, si se atraviesa respecto al recorrido elegido en la misma dirección que la corriente elegida se escribe - IR y se dice nuevamente que hay una cada de voltaje. En el caso contrario se tiene la subida de voltaje + IR.

Si aplicamos LVK para el circuito de la figura 7 con todas las posibilidades de elección de recorrido y sentido de la corriente, se pueden construir cuatro "distintos casos" para obtener el valor de la corriente en el circuito si se supone conocido el valor de la fuente y de la resistencia.



(a) (b)

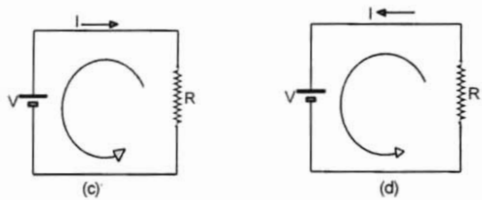


Figura 7

Las ecuaciones obtenidas obtenidas en los casos (a) y (c) son + V - IR = 0 y - V + IR = 0 lo que da como resultado

$$I = \frac{V}{R}$$

En cambio, para los casos (b) y (d) se tiene + V + IR = 0 y - V - IR = 0 obteniendo para la corriente

$$I = -\frac{V}{R}$$

Para conciliar los dos resultados obtenidos, llegamos a la siguiente conclusión: ***la magnitud de la corriente es única, pero el signo menos en el segundo resultado nos indica que la corriente tiene la "dirección" contraria a la correcta***. Por correcta se entiende lo que se obtiene en el primer resultado pues si los portadores los debemos suponer positivos como ya se mencionó, entonces estos portadores circulan en el circuito obviamente en el sentido horario. Es también importante resaltar el hecho de que en los casos (b) y (d) no se tendría la necesidad de volver a resolver el problema puesto que por lo último señalado en la conclusión, todos los casos son equivalentes.

Junto con la LVK es común considerar el circuito anterior pero con varias resistencias y tener ***el arreglo de resistencias llamado en serie***.

Resistencias en serie.

Consideremos el circuito de una malla que se muestra en la figura 8.

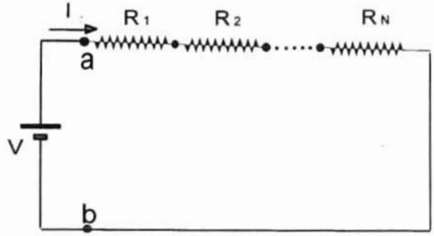


Figura 8

Se dice que las resistencias se encuentran conectadas en serie *porque se conectan a través de una terminal, una resistencia después de la otra. Esto da lugar a que la corriente que pasa por cada una de ellas sea la misma* como en el caso del circuito más simple ya visto. Resolviendo nuestro circuito mediante LVK se tiene

$$+V - I\left(\sum_{K=1}^{N} R_K\right) = 0$$

de donde

$$I = \frac{V}{\sum_{K=1}^{N} R_K} \qquad (4.14)$$

Podemos definir ***el circuito equivalente a nuestro circuito original, como aquél circuito que produce el mismo efecto físico que el original***. *Esto es, el circuito equivalente tiene la misma fuente de voltaje que el circuito original y suministra la misma corriente.* Como debe suministrar la misma corriente, entonces podemos preguntarnos ¿qué resistencia podemos colocar en dicho circuito equivalente? para tener el mismo efecto físico mencionado. En la figura 9 se muestra el circuito que pretendemos que sea el equivalente del circuito original, para que esto sea correcto debemos calcular el valor de la resistencia, R_{eq}, que debemos colocar en el.

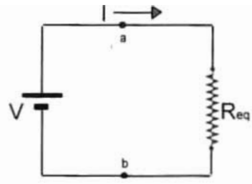


Figura 9

Aplicando LVK al circuito de la figura 9 se tiene

$$I = \frac{V}{R_{eq}} \qquad (4.15)$$

De las ecuaciones (4.14) y (4.15), *los circuitos son equivalentes si*

$$R_{eq} = \sum_{K=1}^{N} R_K \qquad (4.16)$$

Esta resistencia llamada la resistencia equivalente del arreglo en serie de resistencias *es simplemente la suma de las resistencias del arreglo.*

IV.7.2 Ley de corrientes de Kirchhoff. LCK.

Consideremos el circuito de la figura 10 el cual es conocido como el circuito de ***un par de nodos*** (este término se detallará con más profundidad posteriormente), denotados en la figura como los puntos a y b.

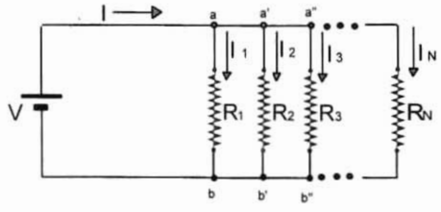


Figura 10

En este circuito puede no quedar claro que se tiene un par de nodos, pero por el momento podemos justificar esto diciendo que los puntos a, a', a'', etc son el mismo punto ya que el cableado tiene resistencia cero. Asimismo, los puntos b, b', b'', etc son el mismo por la misma razón ya expuesta. Aún así, el circuito mostrado en la figura 11, es el mismo que el de la figura 10, pero sin cableado extra; pero en este ultimo se observa lo dicho: *es un circuito de un par de nodos*.

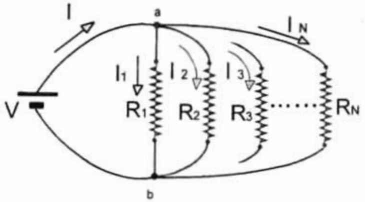


Figura 11

Notemos que en el nodo llamado a, al llegar una carga q por unidad de tiempo procedente de la fuente, se divide hacia cada resistencia con valores que denotaremos por q_1, q_2, ..., q_N, etc., y cuyos índices coinciden con los de las resistencias.
De ***la conservación de la carga eléctrica*** se tiene

$$q = \sum_{K=1}^{N} q_K \tag{4.17}$$

Si derivamos respecto al tiempo la ecuación (4.17)se tiene

$$I - \sum_{K=1}^{N} I_K = 0 \qquad \text{ó} \qquad -I + \sum_{K=1}^{N} I_K = 0 \tag{4.18}$$

De la ecuación (4.18) nace ***la Ley de corrientes de Kirchhoff*** (denotada LCK) cuyo enunciado dice:
La suma algebraica de las corrientes en un nodo es cero.

Para que se pueda utilizar LCK en forma aislada o en circuitos más complejos que los vistos hasta ahora y donde se requiere la utilización conjunta de LCK y LVK ***es importante agregar una convención extra a las ya mencionadas***: (d) a las corrientes ya tomadas arbitrariamente en LVK, ahora para el uso de LCK se les da un signo a las que entran a un nodo y el signo contrario a las que salen de el.
Recuerde que aun cuando la elección arbitraria de corrientes en un nodo sea tal que la suma (sin signos negativos) de ellas debe ser cero,

aun sin resolver el sistema de ecuaciones que se tenga, algunas de ellas deben ser (ó al menos una) negativas.

Junto con la LCK es común considerar el circuito anterior pero cuyo arreglo de resistencias ***es llamado en paralelo***.

Resistencias en paralelo.

Consideremos el circuito del par de nodos anterior (figura 10 o 11). Se dice que las resistencias se encuentran conectadas *en paralelo porque se conectan a través de sus parejas de terminales*. Esto da lugar a que *el voltaje en cada una de ellas sea el mismo como el de la fuente*. Resolviendo nuestro circuito mediante LCK en el nodo a se tiene

$$+I-V\left(\sum_{K=1}^{N}\frac{1}{R_K}\right)=0$$

en donde se ha utilizado la Ley de Ohm para cada resistencia. Resolviendo para el voltaje tenemos

$$I=\frac{V}{\sum_{K=1}^{N}\frac{1}{R_K}} \qquad (4.19)$$

Podemos definir *el circuito equivalente a nuestro circuito*, como aquél circuito que produce *el mismo efecto físico que el original*. ***Esto es, el circuito equivalente tiene la misma fuente de voltaje que el circuito original y suministra la misma corriente***. Como debe suministrar la misma corriente, entonces podemos preguntarnos ¿qué resistencia podemos colocar en dicho circuito equivalente? para tener el mismo efecto físico mencionado. En la figura 12 se muestra el circuito que pretendemos que sea el equivalente del circuito original, para que esto sea correcto debemos calcular el valor de la resistencia, R_{eq}, que debemos colocar en el.

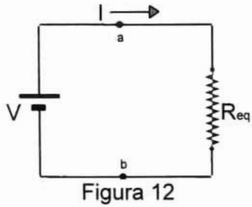


Figura 12

Aplicando LCK al circuito de la figura 12 se tiene

$$I = \frac{V}{R_{eq}}$$

De las ecuaciones (4.19) y (4.20), *los circuitos son equivalentes si*

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{R_K} \qquad (4.21)$$

Esta ecuación indica que el inverso de la llamada la resistencia equivalente del arreglo en paralelo de resistencias es simplemente la suma de los inversos de las resistencias del arreglo. En particular, cuando se tiene dos resistencias en paralelo se tiene que la resistencia equivalente del arreglo es

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

***Con todo lo visto en esta unidad ya puedo proceder a resolver circuitos más complejos a los mostrados en la teoría, pero nos limitaremos a aquellos que contienen fuentes de voltaje y resistencias*.**

IV.8 Circuitos de varias mallas.

Para que podamos distinguir en el número de veces que se deben de usar las reglas de Kirchhoff en un circuito, es importante definir con más claridad unos conceptos de los que ya hablamos: ***nodo*** y ***malla***. Además se requiere de los conceptos de ***rama*** y ***lazo***. Para esto, consideremos el circuito que se muestra en la figura 13 y que se denomina ***circuito de dos mallas***.

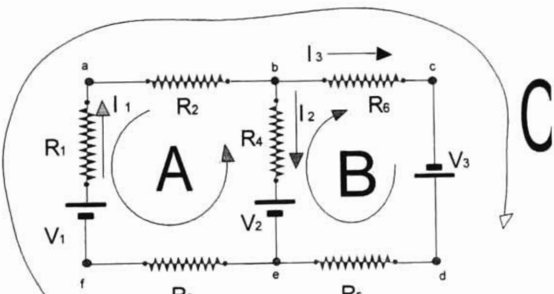


Figura 13

*Entenderemos por **lazo** cualquier trayectoria cerrada en el circuito; en el circuito anterior se tiene **un lazo** que corresponde a la trayectoria abcdefa.*
*Posteriormente definimos **la malla** como el lazo elemental o trayectoria que no contiene en su interior otras trayectorias cerradas. En el circuito se tienen **dos mallas**: abefa y bcdeb.*
*Por otro lado, **el nodo** es un punto del circuito donde convergen más de dos alambres del cableado, en el circuito se tienen **dos nodos**: b y e.* También, *es importante definir **la rama** como trayectoria abierta entre un par de nodos; esto se debe a que en una rama solo puede haber una corriente, en el circuito se tienen **tres ramas**: efab, be, bcde. **Por lo tanto, se tienen tres corrientes que corresponden a las incógnitas del problema**.*

Utilizando la LVK para las mallas A y B y para el lazo C se tienen las ecuaciones siguientes:

A: $$I_2R_4 + I_1R_2 + I_1R_1 - V_1 + I_1R_3 + V_2 = 0 \qquad (4.23)$$

B: $$_2 + I_2R_4 - I_3R_6 + V_3 - I_3R_5 = 0 \qquad (4.24)$$

C: $$_1 - I_1R_1 - I_1R_2 - I_3R_6 + V_3 - I_3R_{51} - I_1R_3 = 0 \qquad (4.25)$$

Note que si se suman las ecuaciones (4.23) y (4.24) se obtiene (-) la ecuación (4.25). *Esto indica que las anteriores tres ecuaciones no son linealmente independientes, y solo podemos escoger dos de ellas; estas corresponderán a las de las dos mallas.* La ecuación que falta para que el sistema tenga solución, se debe de encontrar de la LCK.
Utilizando LCK a los dos nodos del circuito, se tiene

b: $$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (4.26)$$

e: $$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad (4.27)$$

de donde es claro que son realmente la misma ecuación por lo que se utilizará solo la del nodo superior. Las ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.26) conforman el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que resultan de un circuito de un par de mallas. Para los valores R_1=R_4=R_5=3Ω; R_2=R_3=R_6=4Ω; V_1=3V; V_2=10V y V_3=2V se tiene el siguiente sistemas de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 1I_1 + 3I_2 + 0I_3 &= -7 \\ 0I_1 + 3I_2 - 7I_3 &= -12 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4.28)$$

El sistema de ecuaciones (4.28) tiene las soluciones siguientes

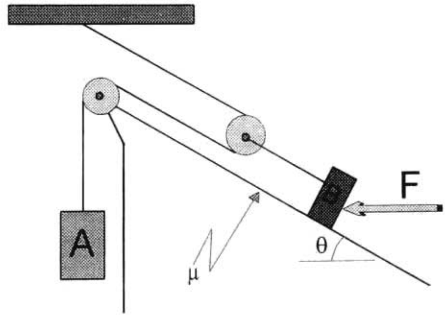
$$I_1 = -0.259 \text{ A}$$
$$I_2 = -1.38 \text{ A}$$
$$I_3 = 1.12 \text{ A}$$

Finalmente, como puede observarse de esto, ***las dos primeras corrientes van en "sentido" contrario*** a lo que se supuso.

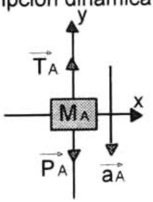
PROBLEMARIO

1.-Para el sistema mostrado y suponiendo que la fuerza que se aplica al bloque B está en dirección horizontal. Determine la distancia que ha recorrido el bloque B, cuando el bloque A tiene una velocidad de v=1 m/s, si ambos parten del reposo.

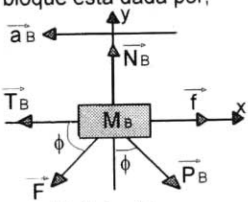
$\mu = 0.4$, $M_A = 10$ kg, $M_B = 3$ kg, F = 10 N, $\theta = 30^\circ$



La descripcion dinámica de cada bloque está dada por,



D.C.L. MA



D.C.L. M B

para M_A :

$$\vec{T}_A + P_A = M_A\vec{a}_A \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}0\\T_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-P_A\end{pmatrix}=M_A\begin{pmatrix}0\\-a_A\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_A - P_A = -M_A a_A \text{......(1)}$$

para M_B :

$$\vec{N}_B+\vec{P}_B+\vec{f}+\vec{F}+\vec{T}_B = M_B\vec{a}_B \rightarrow \begin{pmatrix}0\\N_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}P_B sen\phi\\-P_B\cos\phi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-F\cos\phi\\-Fsen\phi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-T_B\\0\end{pmatrix}=M_B\begin{pmatrix}-a_B\\0\end{pmatrix}$$

$$f - T_B + P_B sen\phi - F\cos\phi = -M_B a_B$$

$$\mu(Fsen\phi + M_B g\cos\phi) - 2M_A g + 4M_A a_B + M_B g sen\phi - F\cos\phi = -M_B a_B$$

Reduciendo y despejando a_B encontramos:

$$a_B = \frac{F\cos\phi - \mu F sen\phi + 2M_A g - M_B g sen\phi - \mu M_B g\cos\phi}{M_B + 4M_A}$$

$$a_B = \frac{10\cos 30° - 0.4(10)sen30° + 2(10)9.8 - 3(9.8)sen30° - 0.4(3)(9.8)\cos 30°}{3 + 4(10)}$$

$$a_B = 4.13\frac{m}{s^2}$$

$$a_A = 2a_B$$

$$a_A = 8.26\frac{m}{s^2}$$

Por la situación cinemática del sistema se tiene,

$$v_i^A = 0\,,\quad v_i^B = 0\,,\quad v_f^A = 1\frac{m}{s}\,,\quad v_f^B = \frac{v_f^A}{2} = 0.5\frac{m}{s}$$

además se sabe que, (para el cuerpo B):

$$d^B = d_i^B + v_i^B + \frac{1}{2}a_B t_f^2$$

$$v_f^B = v_i^B + a_B t_f \quad \rightarrow \quad t_f = \frac{v_f^B}{a_B}$$

y para el cuerpo A se tiene,

$$v_f^A = v_i^A + a_A t_f \quad \rightarrow \quad t_f = \frac{v_f^A}{a_A}$$

ya que el tiempo de recorrido es el mismo para los 2 cuerpos se encuentra

$$\frac{v_f^A}{a_A} = \frac{v_f^B}{a_B} \quad \Rightarrow \quad v_f^A = v_f^B\frac{a_A}{a_B} = v_f^B\left(\frac{2a_B}{a_B}\right)$$

$v_f^A = 2v_f^B$, sustituyendo el tiempo t_f, encontramos

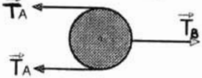
$$d^B = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_B\left(\frac{v_f^A}{a_A}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_B}{4a_B^{\,2}}\right)v_f^{A^2} = \frac{1}{8}\frac{v_f^{A^2}}{a_B}$$

$$d^B = \frac{1}{8}\frac{v_f^{A^2}}{a_B} = \frac{1}{8\times 4.13} = 0.030m$$

$$d^B = 0.030m$$

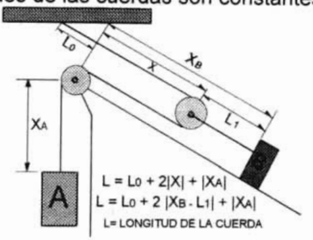
$$N_B - P_B \cos\phi - Fsen\phi = 0$$

considerando la polea sin masa se tiene,



$$2\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -2T_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_B = 2T_A \text{......(2).}$$

Como las longitudes de las cuerdas son constantes se tiene:



$$L = L_0 + 2|x| + |x_A| = L_0 + 2|x_B - L_1| + |x_A|$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo, la longitud L de la cuerda, se tiene que la relación entre aceleraciones está dada por,

$$a_A = 2a_B \text{.......(3)}$$

Usando las ecuaciones (1), (2) y (3) tenemos:

$$\frac{1}{2}T_B - M_A g = -M_A(2a_B) \quad \Rightarrow \quad -2M_A g + 4M_A a_B = -T_B \text{........(1')}$$

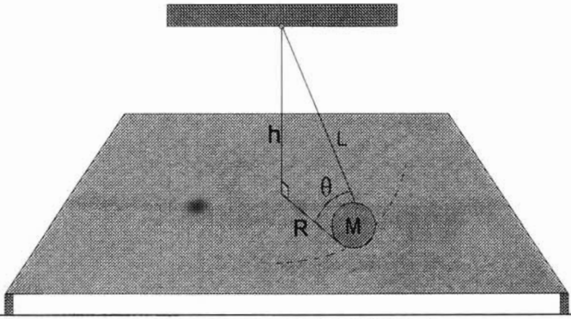
$$\mu N_B - T_B + M_B gsen\phi - F\cos\phi = -M_B a_B$$
$$N_B - M_B g\cos\phi - Fsen\phi = 0 \text{ , entonces,}$$
$$N_B = Fsen\phi + M_B g\cos\phi$$

$$\mu(Fsen\phi + M_B g\cos\phi) - T_B + M_B gsen\phi - F\cos\phi = -M_B a_B \text{.......(4)}$$

Simplificando la ec.(4) [sust.(1') en (4)], se tiene:

2.- La partícula de masa M está sujeta, através de una cuerda inextensible de longitud L, a un punto fijo O, situado a una altura h sobre una mesa horizontal fija y lisa. La partícula describe una circunferencia sobre la mesa, con rapidéz uniforme v. Hallar el intervalo de valores de v, que permiten que M esté en contacto con la mesa, así como el valor de la tensión en función de v en este intervalo.

M = 2 kg, L = 4 m, h = 3 m,



La dinámica de la partícula M está descrita por:

$$\begin{pmatrix} -T\cos\theta \\ Tsen\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} -a_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$T\cos\theta = Ma_c$$
$$Tsen\theta + N = P$$

además sabemos que;

$$a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{L\cos\theta}$$

donde

$R = L\cos\theta$

$h = Lsen\theta$

así que

$$T = \frac{Ma_c}{\cos\theta} = \frac{M\mathcal{v}^2}{L\cos^2\theta}$$

para la fuerza normal se tiene

$$N = P - Tsen\theta = Mg - \frac{M\mathcal{v}^2 sen\theta}{L\cos^2\theta} = Mg - \frac{M\mathcal{v}^2}{L}\left(\frac{sen\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$N = M\left(g - \frac{\mathcal{v}^2}{L}\tan\theta\sec\theta\right)$$

Para que la partícula esté en contacto, la fuerza normal, debe cumplir la condición crítica de que;

$$N \geq 0$$

es decir:

$$g - \frac{\mathcal{v}^2}{L}\tan\theta\sec\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g \geq \frac{\mathcal{v}^2}{L}\tan\theta\sec\theta$$

$$\mathcal{v}^2 \leq \frac{Lg}{\tan\theta\sec\theta}$$

por lo tanto

$0 < \mathcal{v} \leq \sqrt{\dfrac{Lg}{\tan\theta\sec\theta}} \quad \Rightarrow$ la velocidad crítica es,

$$\mathcal{v}_{crit} = \sqrt{\frac{Lg}{\tan\theta\sec\theta}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{h^2 + L^2}}{h}}$$

$$\mathcal{v}_{crit} = 4.04\,\frac{m}{s}$$

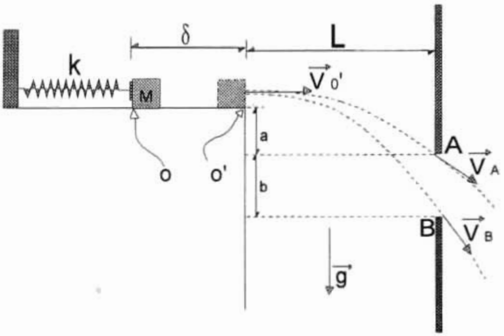
para esta velocidad se tiene la correspondiente tensión crítica,

$$0 < T \leq \frac{Mg}{sen\theta} \qquad \Rightarrow$$

$$T_{crit} = \frac{Mg}{sen\theta} = \frac{Mg}{\frac{h}{L}} = \frac{MgL}{h}$$

$$T_{crit} = 26.13\text{ N}$$

3.-El bloque de masa M comprime al resorte en δ. Si se suelta desde el reposo, encuentre el intervalo de valores de la constante del resorte k para que M pase por el hueco entre A y B. Suponer que no hay fricción. M = 3 kg, a =b= 0.3 m, L = 0.5 m, δ = 0.2 m



Se analiza la situación cinemática y energética del problema:

La cinemática del tiro parabólico está descrita por:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t$$

Para que pase por el punto A, se debe cumplir que:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} L \\ -a \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} L \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_o' \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

por lo tanto

$$L = v_o' t, \quad t = \frac{L}{v_o'} \quad , \quad -a = -\frac{1}{2}gt^2$$

y para la velocidad se tiene

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_o' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}\frac{L}{v_o'} \Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_o' \\ -g\dfrac{L}{v_o'} \end{pmatrix} \quad ; \quad v_A^2 = \left(v_o'^2 + \left(\frac{gL}{v_o'}\right)^2 \right) = \left(v_o'^2 + \frac{(gL)^2}{v_o'^2} \right)$$

Como no hay fricción, se conserva la energía mecánica, es decir,

$$E = \text{constante.}$$

$$E^i = E^f$$

$$E^{i} = E^{i}_{cin} + E^{elas-i}_{pot} + E^{grav-i}_{pot}$$

$$E^{i} = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgy_i + \frac{1}{2}kx_i^2$$

el bloque inicialmente se localiza en el punto O, siendo su energía,

$$E^{o} = 0 + 0 + \frac{1}{2}k\delta^2 \quad ,$$

suponiendo **primero un resorte de constante k_1** (> k_2), entonces

$$E^{o} = \frac{1}{2}k_1\delta^2 .$$

para el punto intermedio O' la energía es

$$E^{o'} = \frac{1}{2}Mv_{O'}^2 + 0 + 0$$

en el punto A la energía está dada como:

$$E^{A} = \frac{1}{2}Mv_A^2 - Mga + 0$$

por la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}k_1\delta^2 = \frac{1}{2}Mv_{O'}^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 - Mga$$

entonces ,

$$\frac{1}{2}Mv_{0'}^2 = \frac{1}{2}k_1\delta^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_{0'}^{\,2} = \frac{k_1}{M}\delta^2$$

sustituyendo el valor de $v_{o'}$ (en la velocidad encontrada por la cinemática para el punto A) tenemos,

$$v_A^2 = \left(\frac{k_1}{M}\delta^2 + \frac{(gL)^2}{\frac{k_1}{M}\delta^2} \right)$$

Para el otro resorte k_2 .

Cuando pasa por el punto B, se tiene

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} L \\ -(a+b) \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} L \\ -(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_o' \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

por lo tanto

$$L = v_o' t, \quad t = \frac{L}{v_o'} \quad -(a+b) = -\frac{1}{2}gt^2$$

y también se tiene

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_o' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}\frac{L}{v_o'} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_o' \\ -g\dfrac{L}{v_o'} \end{pmatrix} \quad ; \quad v_B^2 = \left(v_o'^2 + \left(\frac{gL}{v_o'}\right)^2 \right) = \left(v_o'^2 + \frac{(gL)^2}{v_o'^2} \right)$$

considerando ahora al resorte de constante k_2, entonces

$$E^{o} = \frac{1}{2}k_2\delta^2 .$$

para el punto intermedio O' la energía es

$$E^{o'} = \frac{1}{2}Mv_{O'}^2 + 0 + 0$$

en el punto B la energía está dada como:

$$E^{B} = \frac{1}{2}Mv_B^2 - Mg(a+b)$$

Por conservación de la energía se tiene

$$\frac{1}{2}k_2\delta^2 = \frac{1}{2}Mv_{o'}^2 = \frac{1}{2}Mv_B^2 - Mg(a+b) \quad \text{entonces}$$

$$\frac{1}{2}Mv_{0'}^2 = \frac{1}{2}k_2\delta^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_{0'}^{\;2} = \frac{k_2}{M}\delta^2$$

sustituyendo el valor de $v_{o'}$ (en la velocidad encontrada por la cinemática para el punto B) tenemos,

$$v_B^2 = \left(\frac{k_2}{M}\delta^2 + \frac{(gL)^2}{\frac{k_2}{M}\delta^2}\right)$$

usando los resultados cinemáticos, se encuentra que para el resorte k_1,

$$\frac{1}{2}k_1\delta^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{k_1}{M}\delta^2 + \frac{(gL)^2}{\frac{k_1}{M}\delta^2}\right) - Mga$$

y análogamente para el resorte k_2

$$\frac{1}{2}k_2\delta^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{k_2}{M}\delta^2 + \frac{(gL)^2}{\frac{k_2}{M}\delta^2}\right) - Mg(a+b)$$

simplificando encontramos (para el resorte k_1)

$$k_1\delta^2 = \frac{M\left(\left(\frac{k_1}{M}\delta^2\right)^2 + (gL)^2\right)}{\frac{k_1}{M}\delta^2} - 2Mga$$

$$k_1^2\left(\frac{\delta^4}{M}\right) = k_1^2\,\frac{\delta^4}{M} + M(gL)^2 - 2Mga\left(\frac{k_1}{M}\delta^2\right)$$

$$k_1^2\left(\frac{\delta^4}{M}\right) = k_1^2\left(\frac{\delta^4}{M}\right) + M(gL)^2 - 2gak_1\delta^2$$

$$M(gL)^2 = 2gak_1\delta^2$$

$$k_1 = \frac{Mg^2L^2}{2ga\delta^2} = \frac{MgL^2}{2a\delta^2}$$

similarmente (para el resorte k_2)

$$k_2^2\delta^4 = M\left(\left(\frac{k_2}{M}\delta^2\right)^2 + (gL)^2\right) - 2Mg(a+b)\left(\frac{k_2}{M}\delta^2\right)$$

$$\frac{k_2^2\delta^4}{M} = \frac{k_2^2\delta^4}{M} + M(gL)^2 - 2Mg(a+b)\left(\frac{k_2}{M}\delta^2\right)$$

$$M(gL)^2 = 2Mg(a+b)\frac{k_2}{M}\delta^2$$

$$k_2 = \frac{MgL^2}{2(a+b)\delta^2},$$

definiendo una constante c como:

$$c = \frac{MgL^2}{2\delta^2}$$

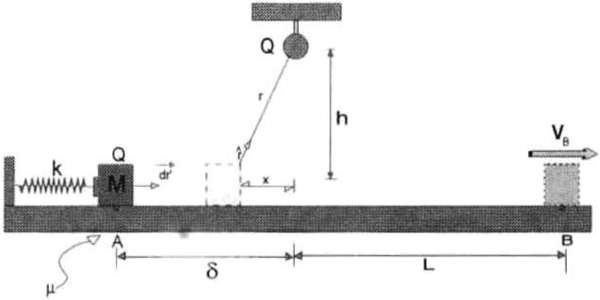
se tiene $k_1 = \frac{c}{a}$ & $k_2 = \frac{c}{a+b}$, así el intervalo está dado por:

$k_1 \le \frac{c}{a}$, $k_2 \ge \frac{c}{a+b}$ ya que $k_1 > k_2$

$$\frac{c}{a+b} \le k \le \frac{c}{a}$$

4.-El bloque de masa M y carga Q, se suelta desde el reposo después de comprimir el resorte en δ. Encontrar el trabajo realizado por cada fuerza que actúa sobre M, desde A hasta B, así como la velocidad que tiene al llegar a B.

M = 0.2 kg, Q = 2 x 10^{-5} C, μ = 0.3, k = 10 N /m, h =1 m, δ = 0.3 m



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

$$\vec{F}_{elast.} + \vec{F}_{elect.} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = M\vec{a}$$

Por lo tanto el trabajo elástico es:

$$W_{elast.} = \int_A^B -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_A^B = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$W_{elast.} = +\frac{1}{2}k\delta^2$$

el trabajo eléctrico es,

$$W_{elect.} = \int_A^B \frac{KQ^2}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}'$$

donde $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix}$, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $d\vec{r}' = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}\cdot d\vec{r}' = x\,dx$, $r^2 = (x^2 + h^2)$.

$$W_{elect} = KQ^2\int_{r_A}^{r_B} \frac{x\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = KQ^2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$W_{elect} = KQ^2\left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}}\right)$$

el trabajo del peso es,

$$W_{peso} = \int_A^B \vec{P}.d\vec{r} = 0$$

el trabajo de la fuerza normal es,

$$W_{normal} = \int_A^B \vec{N}.d\vec{r} = 0$$

(ya que son perpendiculares el peso y la normal con el desplazamiento)

El trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento es,

$$W_{friccion} = \int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = -f(L+\delta) = -\mu N(L+\delta) = -\mu P(L+\delta)$$

$$W_{friccion} = -\mu Mg(L+\delta)$$

Por el principio del trabajo y la energía se tiene:

$$W^{total} = \Delta E_{cin}\Big|_A^B = E_{cin}^B - E_{cin}^A = \frac{1}{2}Mv_B^2 - \frac{1}{2}Mv_A^2$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + W^{total}$$

Por lo tanto

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2}{M}W^{total} \qquad \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{2}{M}\left[\frac{1}{2}k\delta^2 - \mu Mg(L+\delta) + KQ^2\left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2+L^2}}\right)\right]}$$

ya que v_A =0,

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{0.2}\left[\frac{1}{2}10(0.3)^2 - 0.3(0.2)(9.8)(0.3+2) + 9\times10^9(2\times10^{-5})^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0.3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(0.3)^2+2^2}}\right)\right]}$$

$$v_B = \sqrt{10(0.45 - 1.3524 + 1.67)}$$

$$v_B = 2.43\frac{m}{s}$$

5.-En el circuito mostrado, encontrar:

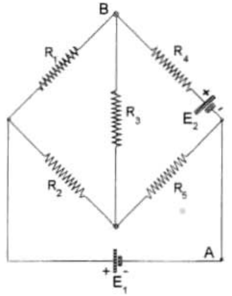
a) La corriente en cada resistencia, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5.

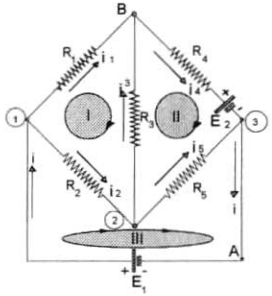
b) La diferencia de potencial de A a B, ΔV_{AB} = ?.

c) La potencia disipada por las resistencias, P_{R1}, P_{R2}, P_{R3}, P_{R4}, P_{R5}.

d) La potencia entregada por las fuentes, P_{E1}, P_{E2}.

E_1 =10 V, E_2 = 5 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 4 Ω, R_3 = 8 Ω, R_4 = 5 Ω, R_5 = 3 Ω





Aplicando las leyes de Kirchhoff se tiene,

Para las mallas:

Malla I $\quad i_1R_1 - i_2R_2 - i_3R_3 = 0$

Malla II $\quad i_4R_4 - i_5R_5 + i_3R_3 = -\varepsilon_2$

Malla III $\quad i_2R_2 + i_5R_5 = \varepsilon_1$

Para los nodos:

Nodo 1 $\quad i = i_1 + i_2$

Nodo 2 $\quad i_2 - i_3 - i_5 = 0 \quad \therefore \quad i_2 = i_3 + i_5$

Nodo 3 $\quad i_4 + i_5 = i \quad \therefore \quad i_4 + i_5 = i_1 + i_2$

Nodo b $\quad i_1 + i_3 - i_4 = 0 \quad \therefore \quad i_4 = i_1 + i_3$

Sustituyendo los valores de las resistencias en las ecuaciones de mallas, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones para las corrientes

$$10i_1 - 4i_2 - 8i_3 = 0 \qquad 10i_1 - 4i_2 - 8i_3 + 0i_4 + 0i_5 = 0 \qquad ......(1)$$

$$5i_4 - 3i_5 + 8i_3 = -5 \qquad 0i_1 + 0i_2 + 8i_3 + 5i_4 - 3i_5 = -5 \qquad ......(2)$$

$$4i_2 + 3i_5 = 10 \qquad 0i_1 + 4i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 3i_5 = 10 \qquad ......(3)$$

$$i_1 + i_3 - i_4 = 0 \qquad i_1 + 0i_2 + i_3 - i_4 + 0i_5 = 0 \qquad ......(4)$$
$$i_2 - i_3 - i_5 = 0 \qquad 0i_1 + i_2 - i_3 + 0i_4 - i_5 = 0 \qquad ......(5)$$

$$i_2 = i_3 + i_5 \qquad .....(5')$$
$$i_4 = i_1 + i_3 \qquad .....(4')$$

sustituyendo las ecuaciones (5') y (4') (de nodos) en las ecs'(1,2 y 3) el sistema se reduce a:

$$10i_1 - 4(i_3 + i_5) - 8i_3 = 0 \qquad 10i_1 - 12i_3 - 4i_5 = 0$$
$$5(i_1 + i_3) - 3i_5 + 8i_3 = -5 \qquad 5i_1 + 13i_3 - 3i_5 = -5$$
$$4(i_3 + i_5) + 3i_5 = 10 \qquad 4i_3 + 7i_5 = 10$$

simplificando el sistema,

$$4i_3 + 7i_5 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad i_3 = \frac{10 - 7i_5}{4}$$
$$10i_1 - 12\left(\frac{10 - 7i_5}{4}\right) - 4i_5 = 0$$
$$5i_1 + 13\left(\frac{10 - 7i_5}{4}\right) - 3i_5 = -5$$

se reduce a:

$$40i_1 - 12(10 - 7i_5) - 16i_5 = 0$$
$$20i_1 + 13(10 - 7i_5) - 12i_5 = -20$$

$$40i_1 + 68i_5 = 120$$
$$20i_1 - 103i_5 = -150$$

resolviendo por determinantes

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 68 \\ -150 & -103 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 68 \\ 20 & -103 \end{vmatrix}} = \frac{10200 - 12360}{-4120 - 1360} = \frac{-2160}{-5480} = 0.394\ A$$

$$i_5 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 120 \\ 20 & -150 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 68 \\ 20 & -103 \end{vmatrix}} = \frac{-6000 - 2400}{-5480} = \frac{-8400}{-5480} = 1.533\ A$$

$$i_3 = \frac{10 - 7(1.532846)}{4} = -0.182\ A$$

$$i_2 = i_3 + i_5 = -0.182 + 1.533 = 1.350\ A$$
$$i_4 = i_1 + i_3 = 0.394 - 0.182 = 0.212\ A$$

las potencias disipadas por las resistencias son:

$$P_{R\,1} = i_1^{\,2} R_1 = (0.394)^2 10 = 1.55\ Watts$$
$$P_{R\,2} = i_2^{\,2} R_2 = (1.350)^2 4 = 7.29\ Watts$$
$$P_{R\,3} = i_3^{\,2} R_3 = (-0.1824)^2 8 = 0.27\ Watts$$
$$P_{R\,4} = i_4^{\,2} R_4 = (0.212)^2 5 = 0.22\ Watts$$
$$P_{R\,5} = i_5^{\,2} R_5 = (1.533)^2 3 = 7.05\ Watts$$

$$P_T = P_{R\,1} + P_{R\,2} + P_{R\,3} + P_{R4} + P_{R\,5} = 16.39 \quad Watts$$

$$P_{E\,1} = E_1(i_1 + i_2) = 10(0.394 + 1.350) = 17.445\ Watts$$
$$P_{E\,2} = -E_2 i_4 = -5(0.212) = -1.058\ Watts$$

$$P_E = P_{E\,1} + P_{E\,2} = 17.445 - 1.058 = 16.39\ Watts$$

la diferencia de potencial entre los puntos A y B es,

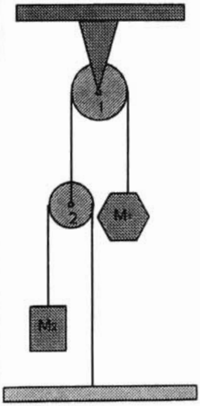
$$V(B) = V(A) + E_1 - i_1 R_1$$

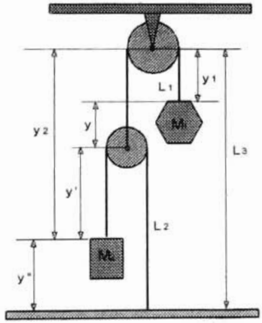
$$V(B) - V(A) = E_1 - i_1 R_1$$

$$V(B) - V(A) = 10 - (0.394)10 = 10 - 3.94$$

$$\Delta V_{AB} = 6.06\ V.$$

6.-Las masas M_1 y M_2 están en movimiento acelerado. Calcular las aceleraciones de dichas masas y las tensiones en las cuerdas, $a_1 = ?$, $a_2 = ?$, $T_1 = ?$, $T_2 = ?$.
$M_1 = 100$ kg. , $M_2 = 20$ kg.
Nota: ni las poleas ni las cuerdas tienen masa.





$L_1 = 2y_1 + y$ L_1 = longitud de la cuerda "1" (constante).
$y_2 = y_1 + y + y'$ L_2 = longitud de la cuerda "2" (constante).
$L_2 = 2y' + y''$ L_3= Altura constante entre el piso y el soport
$L_3 = y_1 + y + y' + y''$, $L_3 = L_1 + 4L_2 - y_2 - 2y_1$
$-2y_1 - y_2 =$ Constante

La dinámica de los cuerpos está dada por:
Para los bloques,

M_1 $\quad \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = M_1\vec{a}_1$

M_2 $\quad \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = M_2\vec{a}_2$

para las poleas,

Polea 2 $\quad \vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 = m_{pol\,2}\vec{a}_{pol\,2}$ $\qquad m_{pol\,2} = 0 \Rightarrow \vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2T_2$

Polea 1 $\quad \vec{R}_s + 2\vec{T}_1 = m_{pol\,1}\vec{a}_{pol\,1}$ $\qquad \vec{a}_{pol\,1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 \neq 0$

Por otro lado, ya que $\mathbf{L_3 = L_1 + 4L_2 - |y_2| - 2|y_1|}$ es constante (como se muestra en la fig.),

$$L_3 - L_1 - 4L_2 = -|y_2| - 2|y_1|$$

derivando respecto al tiempo dos veces, y de la constancia de las longitudes de las cuerdas se encuentra que,

$$2\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2a_1$$

Así tenemos que;

$$T_1 - M_1 g = -M_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad 2T_2 - M_1 g = -\frac{M_1 a_2}{2} \quad .....(1)$$

$$T_2 - M_2 g = M_2 a_2 \quad .... (2)$$

multiplicando la ec. (2) por -2,

$$-2T_2 + 2M_2 g = -2M_2 a_2 \quad ....(3)$$

sumando (1) y (3) se tiene, que la aceleracion de M_2 es:

$$2M_2 g - M_1 g = -2M_2 a_2 - \frac{M_1}{2} a_2$$

$$(2M_2 - M_1) g = -\left(\frac{M_1}{2} + 2M_2\right) a_2$$

$$a_2 = \frac{(M_1 - 2M_2)}{\left(\frac{M_1}{2} + 2M_2\right)} g$$

$$a_2 = \frac{(100 - 2(20))}{50 + 40} = \frac{60}{90} = 0.66 \frac{m}{s}$$

$$a_2 = 0.66 \frac{m}{s}$$

para el bloque M_1 se encuentra,

$$a_1 = \frac{(M_1 - 2M_2)}{2\left(\frac{M_1}{2} + 2M_2\right)} g$$

$$a_1 = 0.33 \frac{m}{s}$$

sustituyendo en (1) , T_1 por $2T_2$ y el valor de a_1 , se tiene:

$$2T_2 = M_1 g - M_1 \left(\frac{(M_1 - 2M_2)}{2\left(\frac{M_1}{2} + 2M_2\right)} \right) g \quad \therefore \quad 2T_2 = M_1 g - M_1 \left(\frac{M_1 - 2M_2}{M_1 + 4M_2}\right) g$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M_1 g - \frac{1}{2} M_1 g \left(\frac{M_1 - 2M_2}{M_1 + 4M_2}\right) = \frac{1}{2} M_1 g \left[1 - \frac{M_1 - 2M_2}{M_1 + 4M_2}\right] = M_1 g \left[\frac{6M_2}{M_1 + 4M_2}\right]$$

$$T_2 = 100(9.8)[\frac{6(20)}{180}]$$

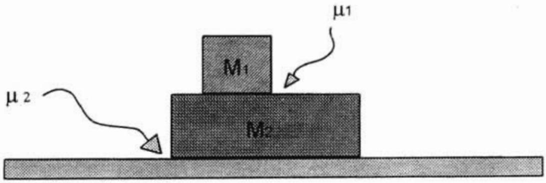
$$T_2 = 653.33 \text{ N}$$

$$T_1 = 2T_2$$

$$T_1 = 1306.66 \text{ N}$$

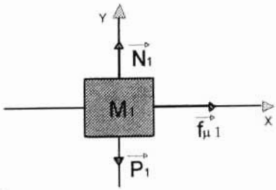
7.- Determinar las aceleraciones de M_1 y M_2 respectivamente.

M_1 = 60 kg., M_2 =100 kg., F = 800 N, $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.4$



Aplicando la segunda ley de Newton a los cuerpos M_1 y M_2 ,:

Cuerpo M_1



$$\vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{f}_{\mu 1} = M_1\vec{a}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ N_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\mu 1} \\ 0 \end{pmatrix} = M_1\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N_1 - P_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = P_1 = N_1'.$$

por otro lado, sabemos que $f_{\mu 1} = \mu_1 N_1$, así entonces

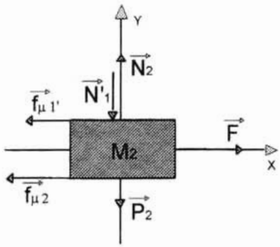
$$\mu_1 N_1 = \mu_1 P_1 = M_1 a_1 \qquad \therefore \qquad \mu_1 M_1 g = M_1 a_1$$

por lo tanto

$$\mu_1 g = a_1$$

a_1=(0.2)(9.8)=1.96 $^m/_s$

Cuerpo M_2,



$$\vec{N}_2 + \vec{P}_2 + \vec{N}_1' + \vec{F} + \vec{f}_{\mu 2} + \vec{f}_{\mu 1} = M_2 a_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ N_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -N_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_{\mu 2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_{\mu 1} \\ 0 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = M_2 a_2 , \qquad (1)$$
$$N_2 - N_1' - P_2 = 0 \qquad (2)$$

donde $f_{\mu 2} = \mu_2 N_2$ y $f_{\mu 1} = \mu_1 N_1$

$\therefore \quad N_2 = P_2 + N_1' = P_2 + P_1$

sustituyendo (2) en (1), se tiene

$$M_2 a_2 = F - \mu_1 M_1 g - \mu_2 (M_1 + M_2) g$$

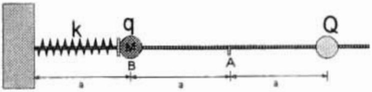
por lo tanto

$$a_2 = \frac{F}{M_2} - \mu_1 \frac{M_1}{M_2} g - \mu_2 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2} \right) g$$

$$a_2 = \frac{800}{100} - 0.2 \frac{60}{100} 9.8 - 0.4 \frac{160}{100} 9.8$$

a_2 = 0.55 m/s

8.- Un collarín de masa M y carga eléctrica q, está sujeto a un resorte de constante k cuya longitud neutra es a, este collarín se mueve a lo largo de un riel, en el punto A su velocidad es cero. Calcular la velocidad de dicho collarín en el punto B. Q es una carga eléctrica puntual fija en el riel. No hay fricción.
M = 0.15 kg., k = 500 N/m.,a = 0.15 m., q = 10^{-5} C., Q = 2×10^{-5} C.



Por conservación de energía se tiene:

$$E(A)=E(B)$$

$$E(A)=E^{A}_{cin}+E^{A}_{pot\,elect}+E^{A}_{pot\,elas}$$

$$E(B)=E^{B}_{cin}+E^{B}_{pot\,elect}+E^{B}_{pot\,elas}$$

$$E^{A}_{cin}=0 \quad E^{A}_{pot\,elect}=qV(A) \quad E^{A}_{pot\,elas}=\frac{1}{2}kX_A^2=\frac{1}{2}ka^2$$

$$E^{B}_{cin}=\frac{1}{2}Mv_B^2, \quad E^{B}_{pot\,elect}=qV(B), \quad E^{B}_{pot\,elas}=\frac{1}{2}kX_B^2=\frac{1}{2}k(0)^2=0$$

Siendo los potenciales eléctricos,

$$V(A)=K\frac{Q}{a}, \qquad V(B)=K\frac{Q}{2a}$$

así que, por la conservación de la energía; se tiene,

$$qV(A)+\frac{1}{2}ka^2=qV(B)+\frac{1}{2}Mv_B^2$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=\frac{1}{2}ka^2+q\left(V(A)-V(B)\right)$$

$$v_B^2=\frac{k}{M}a^2+\frac{2q}{M}\left[V(A)-V(B)\right]$$

$$v_B=\sqrt{\frac{k}{M}a^2+\frac{2q}{M}\left[K\frac{Q}{a}-K\frac{Q}{2a}\right]}$$

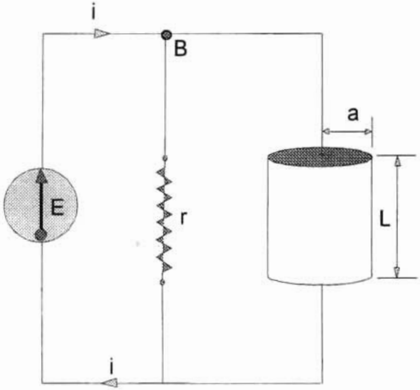
$$v_B=\sqrt{\frac{k}{M}a^2+K\frac{qQ}{Ma}}$$

$$v_B=\sqrt{\frac{500(0.15)^2}{0.15}+\frac{2\times10^{-5}\times10^{-5}\times9\times10^{9}}{(0.15)(0.15)}}=\sqrt{500(0.15)+\frac{1.8}{(0.15)^2}}$$

$$v_B=12..45\,\frac{m}{s}$$

9.- La fuente de voltaje E se conecta al resistor de resistencia r y al conductor cilíndrico de radio a y longitud L. Si la corriente eléctrica proporcionada por la fuente es y. Determinar el valor de la resistividad del conductor.

E = 12 V, r = 3 Ω, i = 5 A, a = 2 x 10^{-3} m, L = 10^{-2} m
$A = \pi r^2 = \pi a^2 = \pi (2 \times 10^{-3})^2$



Aplicando las leyes de Kirchhoff :

Nodo B $i = i_r + i_R$
Malla I $i_r r = \varepsilon$
Malla II $i_R R - i_r r = 0 \quad \Rightarrow \quad i_R R = i_r r$

$i_r = i - i_R \quad .....(1)$

$(i - i_R) r = \varepsilon \quad .....(2)$

$$i_R\left(\rho \frac{l}{A}\right) - (i - i_R) r = 0$$

$$i_R\left[\left(\rho \frac{l}{A}\right) + r\right] - ir = 0$$

$$i_R = \frac{ir}{\rho\left(\frac{l}{A}\right) + r}$$

$$\left(i-\frac{ir}{\rho\frac{l}{A}+r}\right)r=\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \left(i-\frac{ir}{\rho\frac{l}{A}+r}\right)=\frac{\varepsilon}{r}$$

$$i\left(1-\frac{r}{\rho\frac{l}{A}+r}\right)=\frac{\varepsilon}{r} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\frac{r}{\rho\frac{l}{A}+r}=\frac{\varepsilon}{ir}$$

$$1-\frac{\varepsilon}{ir}=\frac{r}{\rho\frac{l}{A}+r} \qquad \Rightarrow \qquad \rho\frac{l}{A}+r=\frac{r}{1-\frac{\varepsilon}{ir}}$$

$$\rho\frac{l}{A}=\frac{r}{1-\frac{\varepsilon}{ir}}-r \qquad \Rightarrow \qquad \rho=\frac{A}{l}\left(\frac{r}{1-\frac{\varepsilon}{ir}}-r\right)=\frac{Ar}{l}\left[\frac{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{ir}\right)}{1-\frac{\varepsilon}{ir}}\right]$$

Por lo tanto la resistividad es:

$$\rho=\left(\frac{Ar}{l}\right)\frac{\frac{\varepsilon}{ir}}{1-\frac{\varepsilon}{ir}}=\left(\frac{Ar}{l}\right)\left(\frac{\varepsilon}{ir-\varepsilon}\right)$$

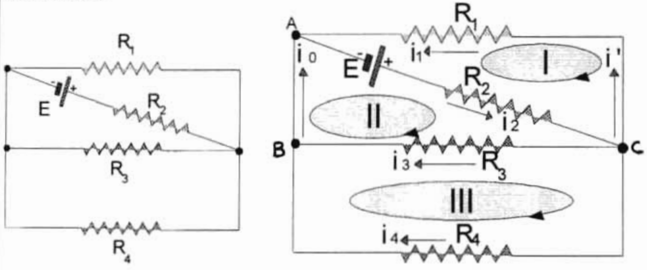
$$\rho=\frac{\pi a^2}{l}r\varepsilon\left(\frac{1}{ir-\varepsilon}\right)$$

$$\rho=\frac{(3.14)\left(2\times10^{-3}\right)^2}{10^{-2}}(3)(12)\left(\frac{1}{5(3)-12}\right)=(12.56)(12)\left(\frac{3}{3}\right)\times10^{-4}$$

$$\rho=(12)(12.56)\times10^{-4}=150.72\times10^{-4}\,\frac{\Omega}{m}$$

$$\rho=1.5072\times10^{-2}\,\frac{\Omega}{m}$$

10.-Supóngase que se conocen los valores de E, R_1,R_2,R_3, y R_4 se desea encontrar la corriente que circula en cada resistencia, plantear las ecuaciones independientes que se necesitan para encontrar dichas corrientes.



Nodos.

A: $i_1 + i_0 - i_2 = 0$

B: $i_3 + i_4 - i_0 = 0$

C: $i_2 - i_3 - i_4 - i' = 0$

Mallas.

I: $-i_2R_2 - i_1R_1 = -\varepsilon$

II: $i_3R_3 + i_2R_2 = \varepsilon$

III: $i_4R_4 - i_3R_3 = 0$

$i_2 = i_1 + i_0$

$i_0 = i_3 + i_4$ sustituyendo i_0 en la ec. anterior, se tiene

$i_2 = i_1 + i_3 + i_4$

$i' = i_1 + i_0 - i_0 = i_1$ obsérvese que, $i' = i_1$.

$i_2 = i_1 + i_3 + i_4$ ....(1)

$i_1R_1 + i_2R_2 = \varepsilon$ ....(2)

$i_2R_2 + i_3R_3 = \varepsilon$ ....(3)

$i_3R_3 = i_4R_4$ ....(4)

resolviendo el sistema de ecuaciones , se tiene:

$i_3 = i_4 \dfrac{R_4}{R_3}$, sustituyendo en la ec. (1), nos da

$$i_2 = i_1 + i_4 \frac{R_4}{R_3} + i_4 = i_1 + i_4\left(\frac{R_4}{R_3} + 1\right) \quad ....(1')$$

reemplazando (1') en (2) y (3), tenemos;

$$i_1 R_1 + \left(i_1 + i_4\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)\right) R_2 = \varepsilon$$

$$\left(i_1 + i_4\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)\right) R_2 + i_4 \frac{R_4}{R_3} = \varepsilon$$

Simplificando:

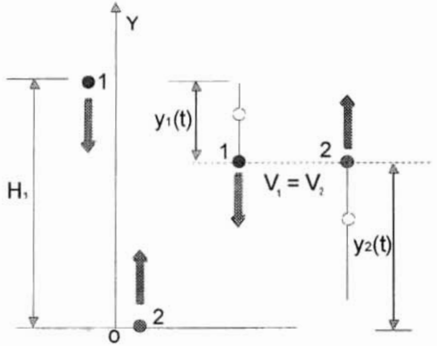
$$i_1 (R_1 + R_2) + i_4 R_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = \varepsilon$$

$$i_1 R_2 + i_4 \left(\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) R_2 + \frac{R_4}{R_3}\right) = \varepsilon$$

resolviendo por determinantes,

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & R_2\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right) \\ \varepsilon & \left(\dfrac{R_4}{R_3} + R_2\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & R_2\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right) \\ R_2 & \left(\dfrac{R_4}{R_3} + R_2\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)\right) \end{vmatrix}} \qquad i_4 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & \varepsilon \\ R_2 & \varepsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & R_2\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right) \\ R_2 & \left(\dfrac{R_4}{R_3} + R_2\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)\right) \end{vmatrix}}$$

11.- Una partícula es proyectada verticalmente hacia arriba y al mismo tiempo otra partícula se deja caer a su encuentro. Demuestre que si las partículas llevan la misma velocidad (en magnitud) cuando se encuentran, una de ellas ha viajado tres veces la distancia que ha viajado la otra.



Para la partícula "1" se tiene,

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1^{\,0} + \vec{V}_1^{\,0} t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ H_1 - y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -V_1^0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

$$H_1 - y_1(t) = H_1 - V_1^0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para la partícula "2" tenemos,

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2^{\,0} + \vec{V}_2^{\,0} t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

$$y_2(t) = 0 + V_2^0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para la velocidad de "1" se tiene:

$$\vec{V}_1(t) = \vec{V}_1^{\,0} + \vec{g}t$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -V_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -V_1^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t$$

$$V_1(t) = V_1^0 + gt$$

Para la velocidad de "2" tenemos;

$$\vec{V}_2(t) = \vec{V}_2^0 + \vec{g}t$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t$$

$$V_2(t) = V_2^0 - gt$$

para $t_1 = t_2 = T$ (tiempo en el cual se alcanzan)

$$V_1(T) = V_1^0 + gT$$

$$V_2(T) = V_2^0 - gT$$

como se libera en caída la partícula "1", $V_1^0 = 0$

para que la particula "2" suba se tiene que, $V_2^0 \neq 0$.

puesto que ambas llevan la misma velocidad se cumple que:

$$V_1(T) = V_2(T) \quad \Rightarrow \quad V_1^0 + gT = V_2^0 - gT$$

por lo tanto,

$$V_2^0 = 2gT$$

empleando estos resultados en las ecuaciones de posición para el instante T:

para "1" tenemos,

$$H_1 - y_1(T) = H_1 - V_1^0 T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$H_1 - y_1(T) = H_1 - \frac{1}{2} g T^2 \quad \Rightarrow \quad y_1(T) = \frac{1}{2} g T^2$$

para "2" tenemos,

$$y_2(T) = V_2^0 T - \frac{1}{2} g T^2$$

por lo tanto:

$$y_2(T) = 2gT - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{3}{2} gT \quad \text{y} \quad y_1(T) = \frac{1}{2} g T^2$$

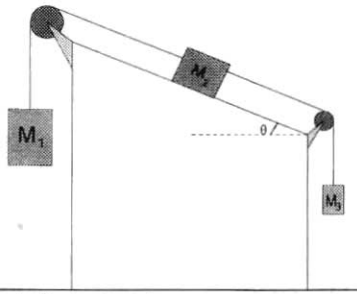
$$y_2(T) = 3\left(\frac{1}{2} gT\right) = 3(y_1(T))$$

Así tenemos que;

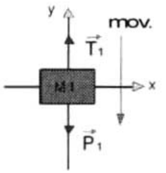
$$y_2(T) = 3y_1(T)$$

12.- Encontrar la aceleración del sistema de tres bloques de la figura, conectados por medio de dos cuerdas; el coeficiente de fricción es μ . Encuentre la tensión en los cables.

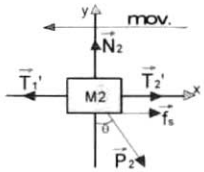
$M_1 = 10$ kg, $M_2 = 5$ kg, $M_3 = 3$ kg, $\theta = 37°$, $\mu = 0.1$, $a = ?$, $T_1 = ?$, $T_2 = ?$



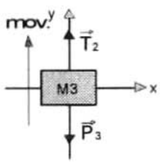
Las ecuaciones de movimiento para los cuerpos son:



D.C.L. M1



D.C.L. M2



D.C.L. M3

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = M_1\vec{a}_1$$

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_3 = M_3\vec{a}_3$$

$$\vec{T}_1' + \vec{T}_2' + \vec{N}_2 + \vec{f}_s + \vec{P}_2 = M_2\vec{a}_2$$

(las cuerdas son inextensibles) por lo tanto

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

además , se sabe que,

$$T_1 = T_1'$$

$$T_2 = T_2'$$

para el bloque "1" se tiene;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ T_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_1 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_1 - P_1 = -M_1 a \quad \Rightarrow \quad M_1 a = P_1 - T_1$$

para el bloque "2"

$$\begin{pmatrix} -T_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_2 sen\theta \\ -P_2 \cos\theta \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-T_1 + T_2 + f_s + P_2 sen\theta = -M_2 a$$

$$N - P_2 \cos\theta = 0$$

para el bloque "3"

$$\begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_3 \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_2 - P_3 = M_3 a$$

$$P_1 - T_1 = M_1 a \qquad ......(1)$$

$$T_2 - P_3 = M_3 a \qquad ......(2)$$

$$T_1 - T_2 - \mu P_2 \cos\theta - P_2 sen\theta = M_2 a \qquad .....(3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones , se encuentra:

$$P_1 - P_3 - \mu P_2 \cos\theta - P_2 sen\theta = (M_1 + M_2 + M_3)a$$

para la aceleración:

$$a = \frac{M_1 g - M_3 g - \mu M_2 g \cos\theta - M_2 g sen\theta}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$$a = \frac{M_1 - M_3 - M_2(sen\theta + \mu\cos\theta)}{M_1 + M_2 + M_3} g$$

$$a = \frac{10 - 3 - 5(sen37^\circ + 0.1\cos 37^\circ)}{10 + 5 + 3} 9.8 = \frac{7 - 5(sen37^\circ + 0.1\cos 37^\circ)}{18} 9.8$$

$$a = \frac{7 - 5(0.68)}{18} 9.8$$

$$a = 1.95 \frac{m}{s^2}$$

Para la tensión T_1:

$$T_1 = P_1 - M_1 a = M_1 g - M_1 a$$

$$T_1 = M_1(g - a)$$

$$T_1 = 10(9.8 - 1.95)$$

$$T_1 = 78.44 \text{ N}$$

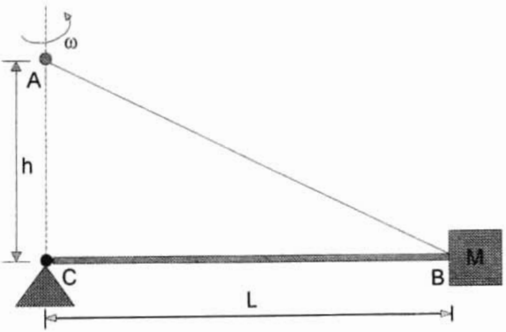
Para la tensión T_2:

$$T_2 = M_3 a + P_3 = M_3(a + g) = 3(9.8 + 1.95)$$

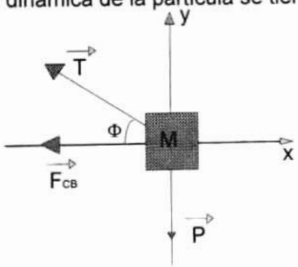
$$T_2 = 35.25 \text{ N}$$

13.- Una barra delgada y ligera CB de longitud L está pivoteada libremente en su extremo C que está fijo y lleva en B una masa M. La barra se mantiene en posición horizontal por medio de un hilo atado a B y a un punto fijo a A verticalmente arriba de C a una distancia h del mismo. Encuentre la fuerza en la barra CB en magnitud y dirección cuando CB gira alrededor de la vertical con velocidad angular constante ω.

h = 20 cm, L = 40 cm, M = 40 g, ω = 6 rad/s



De acuerdo a la dinámica de la partícula se tiene:



$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{CB} = M\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -T\cos\Phi \\ Tsen\Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{CB} \\ 0 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} -a_C \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-T\cos\Phi + F_{CB} = -Ma_C$$
$$Tsen\Phi - P = 0$$

Por lo tanto,

$$T\cos\Phi - F_{CB} = Ma_C = M\omega^2 L$$

y la tensión es;

$$T = \frac{P}{sen\Phi}$$

$$\frac{P}{sen\Phi}\cos\Phi - F_{CB} = M\omega^2 L$$

$$F_{CB} = -M\omega^2 L + \frac{Mg}{\tan\Phi} = M\left(\frac{g}{\tan\Phi} - \omega^2 L\right)$$

$\tan\Phi = \dfrac{h}{L}$ por lo tanto:

$$F_{CB} = M\left(\frac{gL}{h} - \omega^2 L\right) = ML\left(\frac{g}{h} - \omega^2\right)$$

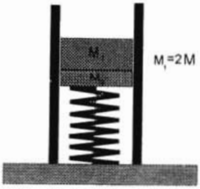
$$F_{CB} = ML\left(\frac{g}{h} - \omega^2\right)$$

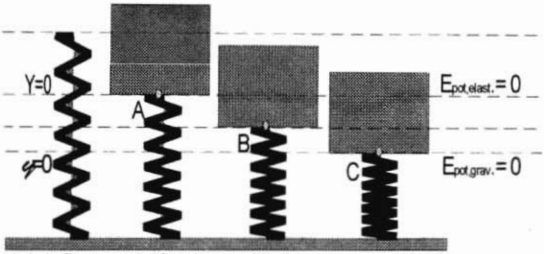
$$F_{CB} = \left(40\times10^{-3}\right)\left(40\times10^{-2}\right)\left(\frac{9.8}{0.2} - 36\right) = 20800\times10^{-5}$$

$$F_{CB} = 0.208N$$

Siendo su dirección hacia el punto C (centro de la circunferencia).

14.- Un bloque de M_1 está en reposo sobre un resorte de constante k. Se le pone encima otro bloque M_2 de de manera que lo toque justamente y luego se suelta. Determínese la velocidad máxima lograda por los bloques. M_1=1.0 kg, M_2=2.0 kg , k=100 N/m.
Sugerencia: Recordar que la velocidad es máxima cuando pasa por la posición de equilibrio.





A = posición inicial, B = posición de equilibrio,
C = posición de máxima compresión.
y = altura respecto al nivel cero de energía potencial de gravedad,
Y = deformación experimentada por el resorte, respecto al nivel cero de energía potencial elástica.
Para el punto A, se tiene: $v_A = 0$ $Y_A = 0$ (no hay deformación), $y_A \neq 0$
Para el punto C, se tiene: $v_C = 0$ $y_C = 0$ (altura nula para la energía de gravedad), $Y_C \neq 0$
Para el punto B, se tiene: $y_B \neq 0$, $Y_B \neq 0$.
Donde se cumple que: $y_A = Y_C$.
La energía mecánica total se conserva, es decir:

E = Constante

$$E = E_{cin} + E_{pot\,grav} + E_{pot\,elast}$$

entonces,

$$E(A) = E(B) = E(C)$$

donde:

$$E(A) = E^{A}_{cin} + E^{A}_{pot.grav} + E^{A}_{pot\,elast}$$

$$E(A) = \frac{1}{2}(M + 2M)v_A^2 + (M + 2M)gy_A + \frac{1}{2}kY_A^2$$

$E(A) = (3M)gy_A$, ya que $v_A = 0 \quad y \quad Y_A = 0$.

$$E(B) = E^{B}_{cin} + E^{B}_{pot\,grav} + E^{B}_{pot\,elast}$$

$$E(B) = \frac{1}{2}(3M)v_B^2 + (3M)gy_B + \frac{1}{2}kY_B^2$$

$$E(C) = E^{C}_{cin} + E^{C}_{pot.grav} + E^{C}_{pot\,elast}$$

$$E(C) = \frac{1}{2}(3M)v_C^2 + (3M)gy_C + \frac{1}{2}kY_C^2$$

$E(C) = \frac{1}{2}kY_C^2$, ya que $v_C = 0 \quad y_C = 0$.

Por lo tanto, se tiene:

$$3Mgy_A = \frac{1}{2}(3M)v_B^2 + 3Mgy_B + \frac{1}{2}kY_B^2 = \frac{1}{2}kY_C^2$$

empleando la primer igualdad, encontramos;

$$3Mgy_A = \frac{1}{2}ky_A^2 \qquad \Rightarrow \qquad y_A = \frac{6Mg}{k}$$

en equilibrio se cumple que:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{F}_k = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 = F_k \quad \Rightarrow \quad P_1 + 2P_1 = kY_B$$

$$3P_1 = kY_B \qquad \Rightarrow \qquad Y_B = \frac{3P_1}{k} = \frac{3Mg}{k} \qquad \therefore \qquad Y_B = \frac{y_A}{2}$$

donde Y_B es la compresión del resorte.

Sustituyendo las deformaciones en la conservación de la energía,

$$3Mgy_A = \frac{3}{2}Mv_B^2 + 3Mg\left(\frac{y_A}{2}\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{y_A}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{2}Mv_B^2 = 3Mgy_A - \frac{3}{2}Mgy_A - \frac{1}{2}k\frac{y_A^2}{4} = \frac{3}{2}Mgy_A - \frac{1}{8}ky_A^2$$

$$\frac{3}{2}Mv_B^2 = \frac{3}{2}Mgy_A - \frac{1}{8}ky_A^2$$

$$v_B^2 = \frac{2}{3M}\left(\frac{3}{2}Mgy_A - \frac{1}{8}ky_A^2\right)$$

$$v_B^2 = gy_A - \frac{k}{12M}y_A^2$$

$$v_B = \sqrt{gy_A - \frac{k}{12M}y_A^2}$$

empleando el valor de y_A se tiene, que la velocidad en B es:

$$v_B = \sqrt{g\left(\frac{6Mg}{k}\right) - \frac{k}{12M}\left(\frac{6Mg}{k}\right)^2}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{6Mg^2}{k} - \frac{k}{12M}\left(\frac{36M^2g^2}{k^2}\right)}$$

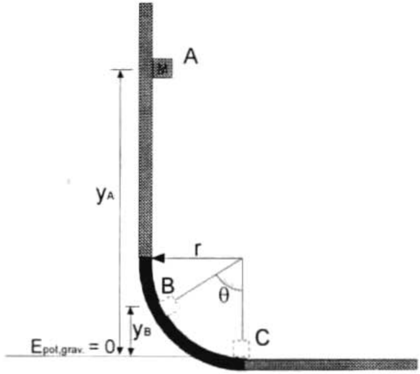
$$v_B = \sqrt{\frac{6Mg^2}{k} - \frac{3Mg^2}{k}} = \sqrt{\frac{3Mg^2}{k}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{3(1)(9.8)^2}{100}}$$

$$v_B = 1.7\frac{m}{s}$$

15.- Un objeto de masa M se suelta desde el reposo en A, y resbala sin rozamiento a lo largo de la superficie mostrada. Determinar la fuerza ejercida por la superficie sobre el objeto cuando éste pasa por:
a) el punto B y
b) el punto C.

$M = 0.57$ kg, $v_A = 0$ $r = 0.92$ m, $\mu = 0$, $y_A = 2.14$ m, $\theta = 60°$,
F_C =?, F_B = ?



Puesto que el sistema de fuerzas es conservativo se cumple:

$$E(A) = E(B) = E(C)$$

donde,

$$E(A) = E^A_{cin} + E^A_{pot\ grav}$$
$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgy_A = Mgy_A$$

$$E(B) = E^B_{cin} + E^B_{pot\ grav}$$
$$E(B) = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mgy_B$$

$$E(C) = E^{C}_{cin} + E^{C}_{pot\,grav}$$

$$E(C) = \frac{1}{2}Mv_C^2 + Mgy_C = \frac{1}{2}Mv_C^2$$

por otro lado tenemos,

$$y_C = 0 \quad , \qquad y_B = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) = 0.4575$$

$$Mgy_A = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}Mv_C^2$$

$$Mgy_A = 0.57(9.8)(2.14) = 11.954J$$

Por lo tanto las velocidades en los puntos C y B son:

$$v_C = \sqrt{\frac{2(11.954)}{M}} = \sqrt{\frac{2(11.954)}{0.57}} = \sqrt{41.944}$$

$$v_C = 6.47\frac{m}{s}$$

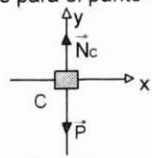
$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = Mgy_A - Mgr(1-\cos\theta)$$

$$v_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)} = \sqrt{2gy_A - 2gr(1-\cos\theta)}$$

$$v_B = \sqrt{32.977}$$

$$v_B = 5.74\frac{m}{s}$$

Analizando las fuerzas para el punto C, se tiene;



Punto C

$$\vec{N}_C + \vec{P} = M\vec{a}_C$$

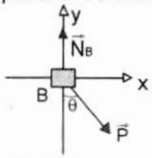
$$\begin{pmatrix} 0 \\ N_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Ma_C \end{pmatrix}$$

$$N_C = P + Ma_c^C = Mg + M\frac{v_C^2}{r} = M\left(g + \frac{v_C^2}{r}\right)$$

$$N_C = 0.57\left(9.8 + \frac{(6.47)^2}{0.92}\right)$$

$N_C = 31.52$ **N**

Análogamente para el punto B se encuentra:



Punto B

$$\vec{N}_B + \vec{P} = M\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ N_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Psen\theta \\ -P\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ma_t \\ Ma_c^B \end{pmatrix}$$

$$Psen\theta = a_t$$

$$N_B - P\cos\theta = Ma_c^B = M\frac{v_B^2}{r}$$

$$N_B = P\cos\theta + \frac{Mv_B^2}{r} = Mg\cos\theta + \frac{Mv_B^2}{r}$$

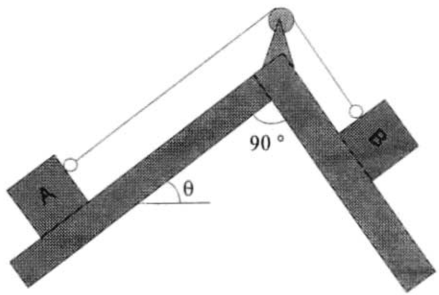
$$N_B = M\left(g\cos\theta + \frac{v_B^2}{r}\right)$$

$$N_B = 0.57\left(9.8\cos 60^\circ + \frac{(5.74)^2}{0.92}\right)$$

$N_B = 23.21$ **N**

16.- Los bloques que se muestran en la figura están inicialmente en reposo. Despreciando las masas de las poleas y el efecto del rozamiento, encuentre la velocidad del bloque A, después de recorrer una distancia d.

M_A = 90.8 kg, M_B = 136.2 kg, d = 1.83 m, $v_i(A) = 0 = v_i(B)$



Por el principio del trabajo y la energía se tiene:

$$W_{i\to f} = \Delta E_{cin} = E_{cin}\Big|_i^f ,$$

donde, $E_{cin}^i = 0$ por lo tanto

$$W_{i\to f} = E_{cin}^f = \frac{1}{2} M_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} M_B v_{Bf}^2$$

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}(M_A + M_B) v_{Af}^2$$

el trabajo para cada uno de los cuerpos es

$$W_{i\to f} = W_{i\to f}^A + W_{i\to f}^B$$

$$W_{i\to f} = \int_i^f \left(\vec{T}_A + \vec{P}_A + \vec{N}_A\right) \cdot d\vec{r}_A + \int_i^f \left(\vec{T}_B + \vec{P}_B + \vec{N}_B\right) \cdot d\vec{r}_B$$

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{T}_A \cdot d\vec{r}_A + \int_i^f \vec{P}_A \cdot d\vec{r}_A + \int_i^f \vec{T}_B \cdot d\vec{r}_B + \int_i^f \vec{P}_B \cdot d\vec{r}_B$$

donde se cumple que : $\int_i^f \vec{N}_A \cdot d\vec{r}_A = 0 = \int_i^f \vec{N}_B \cdot d\vec{r}_B$

$$W_{i\to f} = T_A\int_i^f dr_A - T_B\int_i^f dr_B + \int_i^f -P_A dy + \int_i^f \begin{pmatrix} 0 \\ -P_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ -dy \end{pmatrix}$$

$W_{i\to f} = T_A d - T_B d - P_A y_A + P_B y_B$ ya que $T_A = T_B$ entonces,

$$W_{i\to f} = -P_A y_A + P_B y_B = -M_A g d sen\theta + M_B g d\cos\theta$$

$$W_{i\to f} = gd(M_B\cos\theta - M_A sen\theta)$$

Por lo tanto tenemos:

$$gd(M_B\cos\theta - M_A sen\theta) = \frac{1}{2}(M_A + M_B)v_{Af}^2$$

$$v_{Af}^2 = \frac{2gd(M_B\cos\theta - M_A sen\theta)}{M_A + M_B} \qquad \Rightarrow$$

$$v_{Af} = \sqrt{\frac{2gd(M_B\cos\theta - M_A sen\theta)}{M_A + M_B}}$$

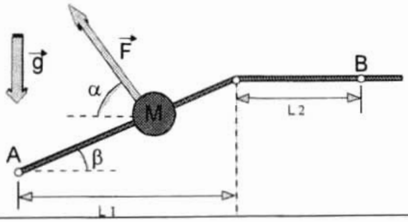
$$v_{Af} = \sqrt{\frac{2(9.8)(1.83)(136.2\cos 20^\circ - 90.8 sen 20^\circ)}{136.2 + 90.8}}$$

$$v_{Af} = \sqrt{15.316}$$

$$v_{Af} = 3.91\frac{m}{s}$$

17.- Sobre el collarín de masa M actúan la fuerza constante F, la gravedad y el riel lizo. Calcular el cambio de energía cinética del collarín entre los puntos A y B

$\alpha = 50°$, $\beta = 35°$, $M = 2$ kg, $F = 18$ N, $L_1 = 7$ m, $L_2 = 5$ m.



Por el principio del trabajo y la energía se tiene:

$$W^T_{A\to B} = \Delta E_{cin}\Big|_A^B$$

donde,

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}(B) - E_{cin}(A)$$

$$W_{A\to B}{}^T = W^F_{A\to B} + W^P_{A\to B} + W^N_{A\to B}$$

se sabe que el trabajo de la fuerza normal es

$$W^N_{A\to B} = 0$$

Por lo tanto;

$$W^P_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_A^B -Mgdy = -Mgy\Big|_A^B = -Mg(y_B - y_A)$$

$$W^P_{A\to B} = -Mgy_{BA} = -MgL_1 \tan\beta$$

$$W^P_{A\to B} = -2(9.8)\left(7\tan 35°\right)$$

dividiendo el camino en dos partes [A -> C y C -> B], se tiene

$$W^F_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{F}\cdot d\vec{r}\,' + \int_C^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\,''$$

para la primera parte del recorrido $A \to C$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}' = \begin{pmatrix} -F\cos\alpha \\ Fsen\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -F\cos\alpha dx + Fsen\alpha dy$$

para la segunda parte $C \to B$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}'' = \begin{pmatrix} -F\cos\alpha \\ Fsen\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = -F\cos\alpha dx$$

$$W_{A\to B}^{F} = \int_A^C(-F\cos\alpha dx + Fsen\alpha dy) + \int_C^B -F\cos\alpha dx$$

$$W_{A\to B}^{F} = -F\cos\alpha x\Big|_A^C + Fsen\alpha y\Big|_A^C - F\cos\alpha x\Big|_C^B$$

$$W_{A\to B}^{F} = -F\cos\alpha x_{AC} + Fsen\alpha y_{AC} - F\cos\alpha x_{BC}$$

donde

$x_{AC} = 7m$

$x_{BC} = 5m$

$y_{AC} = 7\tan 35^\circ$

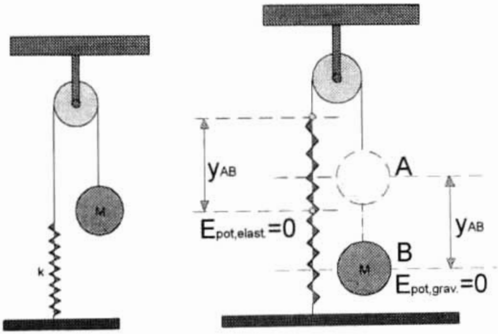
$$\Delta E_{cin}\Big|_A^B = -18\cos 50^\circ(7) + 18sen50^\circ\left(7\tan 35^\circ\right) - 18\cos 50^\circ(5) - 2(9.8)\left(7\tan 35^\circ\right)$$

$$\Delta E_{cin}\Big|_A^B = -18\times 7\cos 50^\circ + 18\times 7sen50^\circ\tan 35^\circ - 18\times 5\cos 50^\circ - 2\times 7\times 9.8\tan 35^\circ$$

$$\Delta E_{cin}\Big|_A^B = \frac{1}{2}M\left(v_B^2 - v_A^2\right) = 167.32J$$

18.- Se sujeta una masa M a un resorte ligero de constante k a través de una cuerda sin masa que pasa por una polea de masa despreciable. La masa se libera del reposo cuando el resorte no está estirado. Si la masa cae una distancia d antes de quedar en reposo. Determinar la constante k del resorte.

M = 3 kg,   d = 10 cm



Puesto que el sistema está sometido a fuerzas conservativas se cumple que:

$$E = \text{constante.}$$

$$E^A = E^B$$

A = punto inicial, B = punto final.

$$E^A = E^A_{cin} + E^A_{pot,grav} + E^A_{pot,elast} = E^B = E^B_{cin} + E^B_{pot,grav} + E^B_{pot,elast}$$

donde

$$E^A_{cin} = 0 = E^B_{cin}$$

$$E^A_{pot,grav} = 0 \quad ; \quad E^A_{pot,elast} = 0$$

igulando las energías en los puntos A y B (ya que $y_{AB} = \Delta y = d$), se tiene,

$$E^A_{cin} + Mg\Delta y + E^A_{pot,elast} = E^B_{cin} + E^B_{pot,grav} + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2$$

por lo tanto:

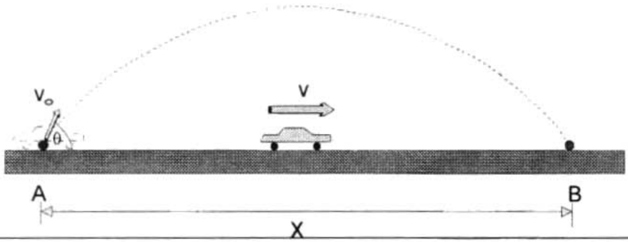
$$Mgd = \frac{1}{2}kd^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2Mgd}{d^2} = \frac{2Mg}{d}$$

$$k = \frac{2(3)(9.8)}{0.1} = 6 \times 98$$

$$k = 588\frac{N}{m}$$

19.- El carro y el proyectil parten del punto A, al mismo tiempo. Si el carro mantiene una velocidad constante v y el proyectil se lanza en la dirección indicada, encontrar la velocidad inicial $\mathcal{V}_0$ del proyectil para atinar al carro en el punto B, así como la distancia de A a B.

$\theta = 20°$, $\mathcal{V} = 3$ m/s, $\mathcal{V}_0 = ?$, $X_{AB} = ?$



La posición está descrita para el proyectil, en el instante t_v, por (t_v = tiempo de vuelo).

$$\vec{r}(t_v) = \vec{r}_0 + \vec{\mathcal{V}}_0 t_v + \frac{1}{2}\vec{a}t_v$$

$$\begin{pmatrix} X(t_v) \\ Y(t_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{V}_0 \cos\theta \\ \mathcal{V}_0 sen\theta \end{pmatrix} t_v + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_v^2$$

$$X(t_v) = \mathcal{V}_0 \cos\theta\, t_v \qquad \text{............(1)}$$

$$Y(t_v) = \mathcal{V}_0 sen\theta\, t_v - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{............(2)}$$

Para el automóvil,

$$\mathcal{V} = \frac{d}{t_v} \qquad \therefore \qquad d = \mathcal{V}t_v = X(t_v) \qquad \text{..........(3)}$$

igualando (1) y (3)

$$\mathcal{V}\, t_v = \mathcal{V}_0 \cos\theta\, t_v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_0 = \frac{\mathcal{V}}{\cos\theta} = \frac{3}{\cos 20°}$$

$$\mathcal{V}_0 = 3.1925\,\frac{m}{s}$$

Sustituimos v_0 en (2) y además sabemos que $Y(t_v) = 0$

$$0 = v_0 sen\theta \, t_v - \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$\frac{1}{2} g t_v^2 = v_0 sen\theta \, t_v \qquad \Rightarrow \qquad t_v = \frac{2v_0 sen\theta}{g} = \frac{2(3.1925) sen 20^\circ}{9.8}$$

$t_v = 0.2228$ s

Sustituyendo en (3) el tiempo (t_v),

$$d = v t_v = 3(0.2228) = 0.67 m$$

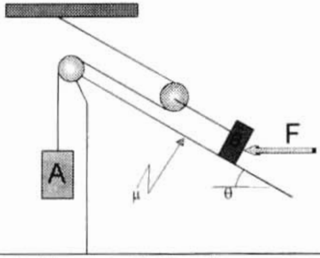
Solución:

a) v_0 proyectil = 3.2 $\frac{m}{s}$

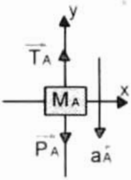
b) $d =$ distancia A-B = 0.67 m

20.- Para el sistema mostrado y suponiendo que la fuerza que se aplica al bloque B está en dirección horizontal, determine la aceleración de cada bloque.

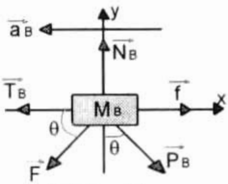
$M_A = 10$ kg, $M_B = 3$ kg, $F = 10$ N, $\mu = 0.4$, $\theta = 30°$, $a_A = ?$, $a_B = ?$



La dinámica para cada bloque está descrita por:



D.C.L. M_A



D.C.L. M_B

$$\vec{T}_A + \vec{P}_A = M_A \vec{a}_A$$

$$\vec{N}_B + \vec{f} + \vec{P}_B + \vec{F} + \vec{T}_B = M_B \vec{a}_B$$

Para la polea (sin masa)

$$2\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$$

$$2T_A = T_B$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ T_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_A \end{pmatrix} = M_A \begin{pmatrix} 0 \\ -a_A \end{pmatrix}$$

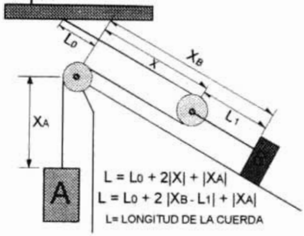
$$\begin{pmatrix} 0 \\ N_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_B sen\theta \\ -P_B\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F\cos\theta \\ -Fsen\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T_B \\ 0 \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} -a_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A - P_A = -M_A a_A \qquad (1)$$

$$f - T_B + P_B sen\theta - F\cos\theta = -M_B a_B \qquad (2)$$

$$N_B - P_B\cos\theta - Fsen\theta = 0 \qquad (3)$$

Por otro lado se tiene que:



$$L = L_0 + 2|X| + |X_A| = 2|X_B - L_1| + L_0 + |X_A|;$$

donde $|X_B - L_1| = X_B - L_1 \quad |X_A| = -X_A$.

por lo tanto, derivando respecto al tiempo dos veces L, se tiene:

$$0 = 2\ddot{X}_B - \ddot{X}_A \qquad \therefore \qquad a_A = 2a_B$$

$$\frac{T_B}{2} - P_A + M_A(2a_B) = 0$$

$$\mu N_B - T_B + P_B sen\theta - F\cos\theta = -M_B a_B$$

$$N_B - P_B\cos\theta - Fsen\theta = 0$$

Así que el sistema de ecuaciones por resolver es;

$$T_B - 2M_A g + 4M_A a_B = 0 \qquad \text{...............(1')}$$

$$\mu N_B - T_B + M_B g sen\theta - F\cos\theta = -M_B a_B \qquad \text{...............(2)}$$

$$N_B - M_B g\cos\theta - Fsen\theta = 0 \qquad \text{.............}(3)$$

Despejando N_B de (3) y T_B de la (1')

$$N_B = Fsen\theta + M_B g\cos\theta$$

$$T_B = 2M_A g - 4M_A a_B$$

sustituyendo estas en (2) , tenemos,

$$\mu(Fsen\theta + M_B g\cos\theta) - (2M_A g - 4M_A a_B) + M_B gsen\theta - F\cos\theta = -M_B a_B$$

$$\mu(Fsen\theta + M_B g\cos\theta) - 2M_A g + 4M_A a_B + M_B gsen\theta - F\cos\theta = -M_B a_B$$

$$\mu(Fsen\theta + M_B g\cos\theta) - 2M_A g + M_B gsen\theta - F\cos\theta = -4M_A a_B - M_B a_B$$

$$(4M_A + M_B)a_B = F\cos\theta + 2M_A g - M_B gsen\theta - \mu(Fsen\theta + M_B g\cos\theta)$$

resolviendo la ecuación para a_B, se encuentran,

$$a_B = \frac{F\cos\theta + 2M_A g - M_B gsen\theta - \mu(Fsen\theta + M_B g\cos\theta)}{4M_A + M_B}$$

$$a_B = \frac{F\cos\theta + 2M_A g - M_B gsen\theta - \mu Fsen\theta - \mu M_B g\cos\theta}{4M_A + M_B}$$

$$a_B = \frac{F\cos\theta - \mu Fsen\theta + 2M_A g - M_B gsen\theta - \mu M_B g\cos\theta}{4M_A + M_B}$$

$$a_B = \frac{100\cos 30^\circ - 0.4(100)sen30^\circ + 2(10)9.8 - 3(9.8)sen30^\circ - 0.4(3)(9.8)\cos 30^\circ}{3 + 4(10)}$$

$$a_B = 5.53\frac{m}{s}$$

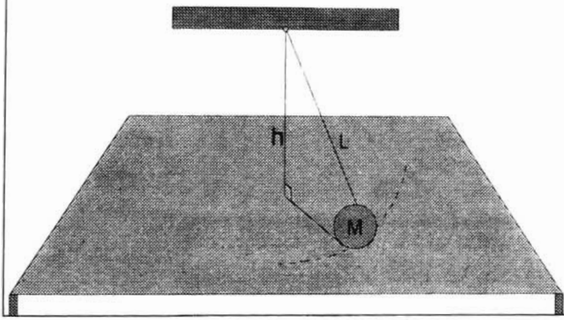
por lo tanto, para a_A se tiene:

$$a_A = 2a_B$$

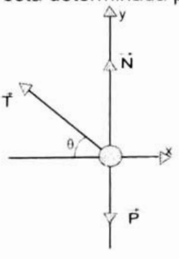
$$a_A = 11.06\frac{m}{s}$$

21.- Una partícula de masa M está sujeta, a través de una cuerda inextensible de longitud L, a un punto fijo O situado a una altura h sobre una mesa horizontal lisa. La partícula describe una circunferencia sobre la mesa, con rapidéz uniforme v. Hallar la fuerza ejercida por la mesa y la tensión en la cuerda.

M =0.2 g, L = 5 m, h = 4 m, v = 2 m/s



La dinámica de la partícula está determinada por:



$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = M\vec{a}_c$$

$$\begin{pmatrix} -T\cos\theta \\ Tsen\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} -a_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\cos\theta = Ma_c$$
$$Tsen\theta + N - P = 0$$

Por otro lado, sabemos que

$$L^2 = h^2 + R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{L^2 - h^2} = 3m$$

$$sen\theta = \frac{h}{L}, \quad \theta = Arc.sen\left(\frac{h}{L}\right)$$

$$a_c = \omega^2 R, \quad v = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$T = \frac{Ma_c}{\cos\theta} = \frac{Mv^2}{R\cos\theta}$$

$$T = \frac{0.2(2)^2}{3\cos 53.13^\circ}$$

$T = 0.44$ **N**

por lo tanto

$$N = P - Tsen\theta = Mg - \frac{Mv^2}{R\cos\theta}sen\theta$$

$$N = M\left(g - \frac{v^2}{R}tg\theta\right)$$

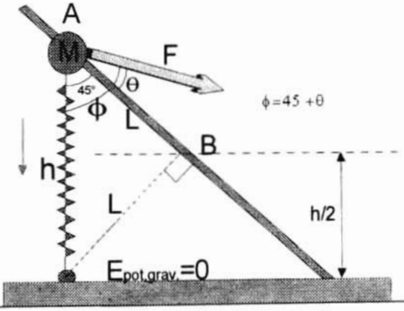
$$N = (0.2)\left(9.8 - \frac{2^2}{3}tg53.13^\circ\right)$$

$N = 1.6$ **N**

22.- Sobre el collarín de masa M actúan el resorte de constante k y longitud neutra L, la gravedad, y la fuerza constante F. La velocidad de M en el punto A es cero.
Encontrar la velocidad de M en el punto B, suponiendo que no hay fricción.

F = 100 N, M = 20 kg, L = 1.5 m, k = 500 N/m

$v_A = 0$, $v_B = ?$, $\mu = 0$, $\theta = 30°$



Por conservación de la energía, se tiene:

$$E = \text{constante}$$

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\ elast}(A) + E_{pot\ grav}(A) + E_{pot\ F}(A)$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot\ elast}(B) + E_{pot\ grav}(B) + E_{pot\ F}(B)$$

igualando las energías en los puntos A y B , se tiene

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}k(\Delta L)_A^2 + Mgy_A - Fsen\phi\,\Delta x_A - F\cos\phi\,\Delta y_A =$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}k(\Delta L)_B^2 + Mgy_B - Fsen\phi\,\Delta x_B - F\cos\phi\,\Delta y_B$$

$$h^2 = L^2 + L^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{2}L,$$

donde la deformación del resorte en los puntos A y B es,

$$\Delta L_A = \sqrt{2}L - L = \left(\sqrt{2} - 1\right)L\,, \qquad \Delta L_B = 0\,,$$

las alturas de la partícula en A y B son:

$$y_B = \frac{h}{2}, \quad y_A = h$$

y los correspondientes desplazamientos son:

$$\Delta x|_A = 0\,, \quad \Delta y|_A = 0\,, \quad \Delta x|_B = L sen 45^\circ\,, \quad \Delta y|_B = L\cos 45^\circ\,.$$

así tenemos que;

$$\frac{1}{2}k\left[\left(\sqrt{2}-1\right)L\right]^2 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mg\frac{h}{2} - Fsen\phi\left(Lsen45^\circ\right) - F\cos\phi\left(L\cos 45^\circ\right)$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(\sqrt{2}-1\right)L\right]^2 + Mg\frac{h}{2} + Fsen(45+\theta)\left(Lsen45^\circ\right) + F\cos(45+\theta)\left(L\cos 45^\circ\right)$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(\sqrt{2}-1\right)L\right]^2 + Mg\frac{h}{2} + FL\left[\cos\left(45^\circ+\theta\right)\cos(45) + sen(45+\theta)sen(45)\right]$$

finalmente la velocidad es,

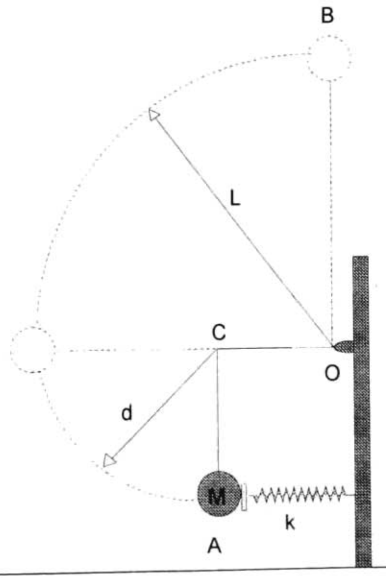
$$v_B = \sqrt{\frac{k}{M}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)L\right]^2 + gh + \frac{2FL\cos\theta}{M}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{500}{20}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)1.5\right]^2 + 9.8\left(\sqrt{2}\right)1.5 + \frac{2(100)(1.5)\cos 30^\circ}{20}}$$

$$v_B = 6.59\,\frac{m}{s}$$

23.- La esfera de masa M está unida a una cuerda que pasa por encima de un clavo colocado en C, y atado al punto O por su otro extremo. Inicialmente está en reposo comprimiendo el resorte en Δx en la posición indicada. Encontrar el valor mínimo de la constante del resorte k, que permita que la esfera llegue al punto B,

M = 2 kg, d = 0.3 m, L = 0.6 m, Δx = 0.03 m



Por la conservación de la energía, se tiene:

E = Constante.

Para los puntos importantes de la trayectoria se cumple;

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\ elast}(A) + E_{pot\ grav}(A)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 + Mgy_A$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot\ elast}(B) + E_{pot\ grav}(B)$$

$$E(B) = \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_B)^2 + Mgy_B$$

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 + Mgy_A = \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_B)^2 + Mgy_B$$

ya que; $v_A = 0$, $v_B = 0$, $\Delta x_B = 0$, $y_A = d$, y $y_B = L$, se tiene

$$\frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 - Mgd = MgL$$
$$\frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 = Mg(L + d)$$

Por lo tanto

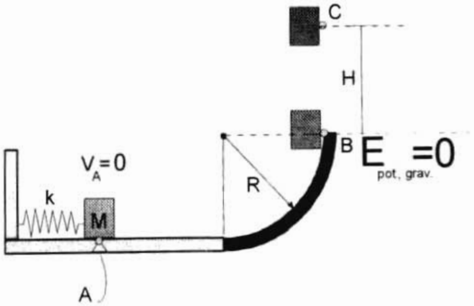
$$k = \frac{2Mg(L + d)}{(\Delta x_A)^2}$$

$$k = \frac{2(2)(9.8)(0.6 + 0.3)}{0.03^2} = 4(9.8) \times 10^3$$

$$k = 39200\,\frac{N}{m}$$

24.- El bloque de masa M está en reposo en el punto A, cuando el resorte de constante k está comprimido ΔX. Suponiendo que no hay fricción y despreciando las dimensiones del bloque, determinar:
a) La rapidéz del bloque en B, v_B = ?
b) La altura máxima H que sube el bloque, H_{max} = ?.

M = 3 kg, k = 2000 N/m, R = 0.20 m
$v_A = 0$, $\Delta x = x_A = 0.1$ m, $\mu = 0$,



Por la conservación de la energía;

E = Constante

Para los puntos importantes de la trayectoria se cumple:

$$E(A) = E(B) = E(C)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\ elast}(A) + E_{pot\ grav}(A)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 + Mgy_A$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot\ elast}(B) + E_{pot\ grav}(B)$$

$$E(B) = \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_B)^2 + Mgy_B$$

$$E(C) = E_{cin}(C) + E_{pot\ elast}(C) + E_{pot\ grav}(C)$$

$$E(C) = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x_C)^2 + Mgy_C$$

ya que: $v_A=0$, $v_C=0$, $\Delta x_A=x_A$, $\Delta x_B=0$, $\Delta x_C=0$, $y_A=R$, $y_B=0$, $y_C=H$.

se tiene, por conservación,

$$\frac{1}{2}kx_A^2 - MgR = \frac{1}{2}Mv_B^2 = MgH_{max}.$$

Entre los puntos A y B se cumple que:

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 - MgR$$

por lo tanto,

$$v_B^2 = \frac{k}{M}x_A^2 - 2gR \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \sqrt{\frac{k}{M}x_A^2 - 2gR}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2000}{3}(0.1)^2 - 2(9.8)(0.2)} = \sqrt{2.75}$$

$$v_B = 1.66\frac{m}{s}$$

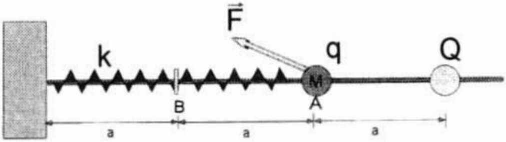
$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = MgH_{max}$$

$$H_{max} = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{2.75}{2(9.8)}$$

$$H_{max} = 0.14m$$

25.- Un collarín de masa M y carga eléctrica q, está sujeto a un resorte de constante k, cuya longitud neutra es "a" y a una fuerza constante F. M va de A a B desde el reposo; Q es una carga eléctrica puntual fija. Determine la velocidad en el punto B, $v_B = ?$.

M = 0.15 kg, k = 500 N/m, a = 0.15 m, F = 100 N, q = 10^{-5} C, Q = 2×10^{-4} C



Por el principio de conservación de la energía, se cumple que:

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\,elect}(A) + E_{pot\,F}(A) + E_{pot\,elast}(A)$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot\,elect}(B) + E_{pot\,F}(B) + E_{pot\,elast}(B)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + qV(A) - F\cos\phi(\Delta x)_A + \frac{1}{2}k(\Delta x_A)^2 = \frac{1}{2}Mv_B^2 + qV(B) - F\cos\phi(\Delta x)_B + \frac{1}{2}k(\Delta x_B)^2$$

ya que $v_A = 0$, $(\Delta x)_A = 0$, $(\Delta x)_B = a$

y las deformaciones del resorte son

$\Delta x_A = a$, $\Delta x_B = 0$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = F\cos\phi(\Delta x)_B + q(V(A) - V(B)) + \frac{1}{2}ka^2$$

donde los potenciales eléctricos son:

$$V(A)=\frac{KQ}{a}, \qquad V(B)=\frac{KQ}{2a}$$

así que;

$$V(A)-V(B)=\frac{KQ}{a}-\frac{KQ}{2a}=\frac{1}{2}\frac{KQ}{a}$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=F\cos\phi(\Delta x)_B+\frac{1}{2}K\frac{qQ}{a}+\frac{1}{2}ka^2$$

$$v_B^2=\frac{2F\cos\phi(\Delta x)_B}{M}+\frac{KqQ}{Ma}+\frac{ka^2}{M}$$

entonces la velocidad resultante es,

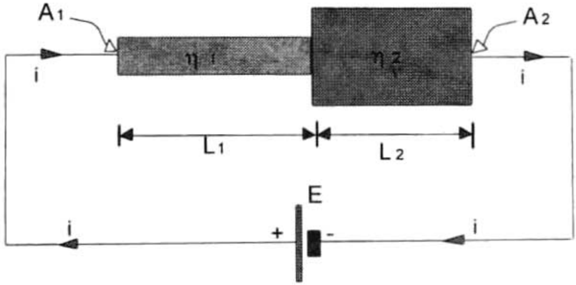
$$v_B=\sqrt{\frac{ka^2}{M}+\frac{KqQ}{Ma}+\frac{2F\cos\phi(\Delta x)_B}{M}}$$

$$v_B=\sqrt{\frac{500}{0.15}(0.15)^2+(\frac{1}{0.15})\frac{9\times10^9\times10^{-5}\times2\times10^{-4}}{0.15}+\frac{2}{0.15}\left[100\cos30^\circ(0.15)\right]}$$

$$v_B=\sqrt{800+75+173.21}=\sqrt{1048.21}$$

$$v_B=32.37\,\frac{m}{s}$$

26.- Dos materiales de resistividades η_1 y η_2 respectivamente, se encuentran conectados como se muestra en la figura. Determinar la resistencia en cada material y la diferencia de potencial en cada uno.



Debido a que las resistencias están definidas como:

$$R_1 = \eta_1 \frac{l_1}{A_1}$$

$$R_2 = \eta_2 \frac{l_2}{A_2}$$

entonces las caídas de potencial, son respectivamente:

$$iR_1 = \Delta V_1$$

$$iR_2 = \Delta V_2$$

por otro lado tenemos;

$$R_1 + R_2 = R_T$$

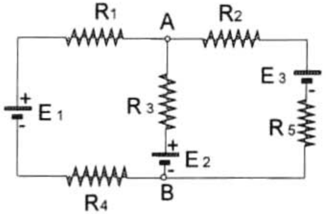
$$\varepsilon = iR_T \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

$$\Delta V_1 = \varepsilon\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\frac{\eta_1 l_1}{A_1}}{\frac{\eta_1 l_1}{A_1} + \frac{\eta_2 l_2}{A_2}}\right)$$

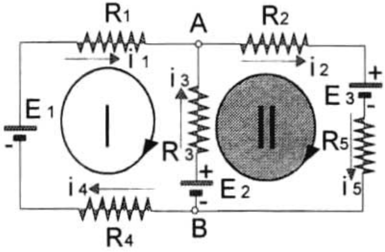
$$\Delta V_2 = \varepsilon\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\frac{\eta_2 l_2}{A_2}}{\frac{\eta_1 l_1}{A_1} + \frac{\eta_2 l_2}{A_2}}\right)$$

27.- En el circuito mostrado en la figura, encontrar:
a) La corriente en cada resistencia, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 .
b) La diferencia de potencial de A a B, ΔV_{AB} .
c) La potencia total disipada por las resistencias, $P_{total\ Disip}$.

$E_1 = 2$ V, $E_2 = E_3 = 4$ V, $R_1 = R_2 = R_4 = 1\ \Omega$, $R_3 = R_5 = 2\ \Omega$



Aplicando las leyes de Kirchhoff, se tiene:



Nodo A:

$$i_1 + i_3 = i_2 \quad \text{donde } i_1 = i_4 .$$

Nodo B

$$i_3 + i_4 = i_5 \qquad i_3 = i_5 - i_4 = i_5 - i_1$$

donde $i_2 = i_5$

Malla I

$$i_1R_1 - i_3R_3 + i_4R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

Malla II

$$i_2R_2 + i_5R_5 + i_3R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$i_1R_1 - i_3R_3 + i_1R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$i_5R_2 + i_5R_5 + i_3R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

por lo tanto se reduce a (usando i_3):

$$i_1R_1 - (i_5 - i_1)R_3 + i_1R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$
$$i_5R_2 + i_5R_5 + (i_5 - i_1)R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$i_1(R_1 + R_3 + R_4) - i_5R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$
$$i_5(R_2 + R_3 + R_5) - i_1R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$i_1(1 + 2 + 1) - i_5(2) = 2 - 4 = -2$$
$$i_5(1 + 2 + 2) - i_1(2) = 0$$

$$4i_1 - 2i_5 = -2$$

$$5i_5 - 2i_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_1 = \frac{5}{2}i_5$$

$$4\left(\frac{5}{2}i_5\right) - 2i_5 = -2$$

$$10i_5 - 2i_5 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad 8i_5 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad i_5 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

$$i_1 = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-5}{8} = -0.63$$

$$i_3 = i_5 - i_1 = -0.25 - (-0.63) = -0.25 + 0.63 = 0.38$$

$$i_1 = -0.63$$
$$i_2 = -0.25$$
$$i_3 = 0.38$$
$$i_4 = -0.63$$

$$i_5 = -0.25$$

$$V(B) + \varepsilon_2 - i_3 R_3 = V(A)$$

$$V(B) - V(A) = -\varepsilon_2 + i_3 R_3 = -4 + 0.38(2) = -4 + 0.76 = -3.24V$$

$$P_{total} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5}$$

$$P_{total} = R_1\left(i_1^2 + i_2^2 + i_4^2\right) + R_2\left(i_3^2 + i_5^2\right)$$

$$P_{total} = R_1\left(2i_1^2 + i_2^2\right) + R_2\left(i_3^2 + i_5^2\right)$$

$$P_{total} = 1\left[2(-0.63)^2 + (-0.25)^2\right] + 2\left[(0.38)^2 + (-0.25)^2\right]$$

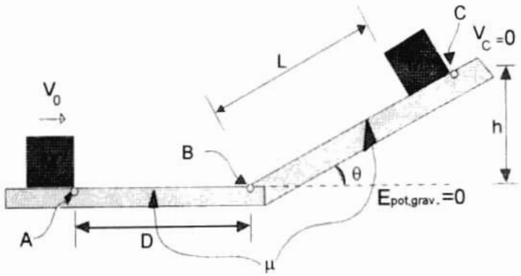
$$P_{total} = 2(-0.63)^2 + (-0.25)^2 + 2\left[(0.38)^2 + (-0.25)^2\right]$$

$$P_{total} = 0.79 + 0.06 + 2(0.14 + 0.06) = 0.79 + 0.06 + 0.41$$

$$P_{total} = 1.26 Watts.$$

28.- El bloque se lanza con una velocidad v_0 en el punto A. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el piso es μ, encontrar la longitud L que recorre sobre el plano inclinado hasta detenerse. Suponer que el coeficiente de fricción es el mismo en el plano horizontal y en el plano inclinado.

M = 3 kg, D = 2 m, θ= 30°, v_0= 5 m/s, μ = 0.3, L = ?



Por el principio del trabajo y la energía tenemos

$$W_{A\to C}^{fricc} = W_{A\to B}^{fricc} + W_{B\to C}^{fricc} = \Delta E\Big|_A^C = E(C) - E(A)$$

donde las energías están dadas por,

$$E(C) = E_{cin}(C) + E_{pot.grav}(C) = \frac{1}{2}Mv_C^2 + Mgy_C = Mgh$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot.grav}(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgy_A = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

se tiene, por lo tanto,

$$E(C) = Mgh = MgLsen\theta$$

$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

Así que ;

$$E(C) - E(A) = MgLsen\theta - \frac{1}{2}Mv_0^2$$

el trabajo realizado por la fricción es,

$$W_{A\to B}^{fricc} = -\int_0^D f_k dx = -\mu MgD$$

$$W_{B\to C}^{fricc} = -\int_0^L f_k dr = -\mu NL = -\mu Mg\cos\theta L$$

$$W_{A\to C}^{fricc} = -\mu Mg(D + L\cos\theta)$$

usando el principio del trabajo-energía

$$-\mu Mg(D + L\cos\theta) = MgLsen\theta - \frac{1}{2}Mv_0^2$$

$$-2\mu g(D + L\cos) = 2gLsen\theta - v_0^2$$

$$-2\mu gD - 2\mu gL\cos\theta - 2gLsen\theta = -v_0^2$$

$$v_0^2 = 2\mu gD + (2\mu g\cos\theta + 2gsen\theta)L$$

por lo tanto la longitud sobre el plano L es:

$$L = \frac{v_0^2 - 2\mu gD}{2\mu g\cos\theta + 2gsen\theta}$$

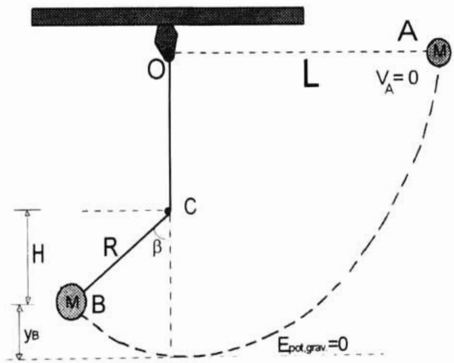
$$L = \frac{v_0^2 - 2\mu gD}{2g(sen\theta + \mu\cos\theta)}$$

$$L = \frac{5^2 - 2(0.3)(9.8)2}{2(9.8)(sen30^\circ + 0.3\cos 30^\circ)}$$

$$L = 0.89\ m$$

29.- La esfera de masa M se une a la cuerda de longitud L y el otro extremo de ésta se fija al punto O. Se suelta la esfera a partir del reposo en el punto A, y al llegar al punto mas bajo la cuerda se encuentra con un clavo fijo en el punto C, de manera que la esfera deja de girar alrededor de O y empieza a girar alrededor de C. Determine la tensión de la cuerda cuando la esfera llega al punto B.

$v_A = 0$, $M = 2$ kg, $L = 2$ m, $H = 0.3$ m, $\beta = 60°$, $T_B = ?$



Puesto que las fuerzas son conservativas;

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot.grav}(A)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgy_A \qquad \text{ya que } \; v_A = 0$$

$$E(A) = Mgy_A = MgL$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot.grav}(B)$$

$$E(B) = \frac{1}{2} M v_B^2 + M g y_B$$

donde, $y_B = R - H = \dfrac{H}{\cos\beta} - H$ y $R\cos\beta = H$, $R = \dfrac{H}{\cos\beta}$,

Aplicando la conservación se tiene:

$$MgL = \frac{1}{2} M v_B^2 + MgH\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2} M v_B^2 = MgL - MgH\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right)$$

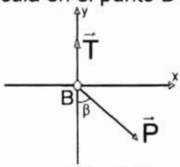
siendo la velocidad,

$$v_B = \sqrt{2gL - 2gH\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right)}$$

$$v_B = \sqrt{2(9.8)2 - 2(9.8)(0.3)\left(\frac{1}{\cos 60} - 1\right)}$$

$v_B = 5.77 \dfrac{m}{s}$

La dinámica de la partícula en el punto B está descrita por:



$$\vec{T}_B + \vec{P} = M\vec{a} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ T_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Psen\beta \\ -P\cos\beta \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_t \\ a_c \end{pmatrix}$$

$$T_B - P\cos\beta = Ma_c = M\frac{v_B^2}{R}$$

$$T_B = P\cos\beta + M\frac{v_B^2}{R} = Mg\cos\beta + M\frac{v_B^2}{H}\cos\beta$$

$$T_B = Mg\cos\beta + M\cos\beta\frac{v_B^2}{H}$$

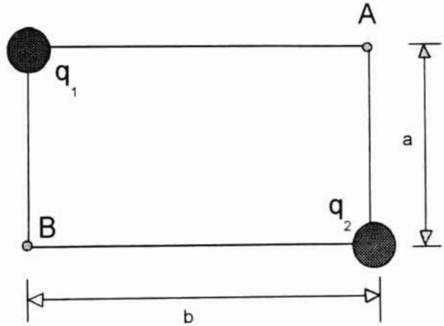
$$T_B = 2(9.8)\cos 60^\circ + \frac{2\cos 60^\circ}{0.3}(5.77)^2$$

$T_B = 120.86$

30.- La figura muestra dos cargas en reposo, calcular:

a) La diferencia de potencial entre los puntos A y B, $V(A), V(B), \Delta V_{AB}$.
b) El trabajo necesario para romper esa configuración, W_{romper}?.

$q_1 = -5 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = 2 \times 10^{-6}$ C, $a = 5 \times 10^{-2}$ m, $b = 15 \times 10^{-2}$ m, $K = 9 \times 10^9$ N m^2/C^2



Primeramente se determinan los potenciales eléctricos en los puntos A y B,

$$V(A) = K\frac{q_1}{b} + K\frac{q_2}{a} = K\left(\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{a}\right)$$

$$V(B) = K\frac{q_1}{a} + K\frac{q_2}{b} = K\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b}\right)$$

por lo tanto la diferencia de potencial es:

$$\Delta V_{AB} = V(A) - V(B) = K\left[\frac{q_1}{b} - \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{a} - \frac{q_2}{b}\right]$$

$$\Delta V_{AB} = K\left[q_1\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + q_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\Delta V_{AB} = 9 \times 10^9\left[-5 \times 10^{-6}\left(\frac{1}{15 \times 10^{-2}} - \frac{1}{5 \times 10^{-2}}\right) + 2 \times 10^{-6}\left(\frac{1}{5 \times 10^{-2}} - \frac{1}{15 \times 10^{-2}}\right)\right]$$

$$\Delta V_{AB} = 9 \times 10^9\left[-5\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right) \times 10^{-6} \times 10^2 + 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) \times 10^{-6} \times 10^2\right]$$

$$\Delta V_{AB} = 9\left[-5\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)\right]\times 10^{9}\times 10^{-6}\times 10^{2}$$

$$\Delta V_{AB} = \left[-45\left(\frac{1-3}{15}\right)+18\left(\frac{3-1}{15}\right)\right]\times 10^{5} = \left(-\frac{45}{15}(-2)+\frac{36}{15}\right)\times 10^{5}$$

$$\Delta V_{AB} = \left(6+\frac{36}{15}\right)\times 10^{5}$$

$$\Delta V_{AB} = 8.4\times 10^{5}\,Volts$$

$$W_{Formar} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad \Rightarrow \qquad W_{Romper} = -K\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$W_{Romper} = -K\dfrac{q_1 q_2}{r_{12}}$, donde $r_{12} = \sqrt{a^2+b^2}$

$$W_{Romper} = -K\frac{q_1 q_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

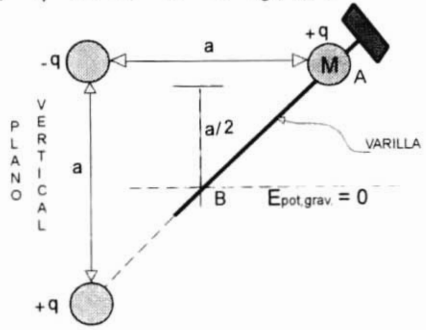
$$W_{romper} = -9\times 10^{9}\,\frac{\left(-5\times 10^{-6}\right)\left(2\times 10^{-6}\right)}{\sqrt{25\times 10^{-4}+(15)^2\times 10^{-4}}}$$

$$W_{Romper} = \frac{9\times 5\times 2\times 10^{9}\times 10^{-12}}{\sqrt{25+(15)^2}\times 10^{-2}} = \frac{90\times 10^{-3}\times 10^{2}}{\sqrt{25+225}} = \frac{90}{\sqrt{250}}\times 10^{-1} = \frac{90}{15.81}\times 10^{-1}$$

$$W_{Romper} = 0.57J$$

31.- Un collarín de masa M y cargado, está sujeto a la acción de su peso y va del punto A al B desde el reposo (ver figura).
Calcular la velocidad del collarín en B, (Las otras cargas están fijas).

$a = 3x10^{-1}$ m, $q = 10^{-7}$ C, $M = 10^{-2}$ kg , $v_A=0$



Puesto que las fuerzas son conservativas, se cumple:

$$E(A) = E(B) = E = \text{Constante.}$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot,grav}(A) + E_{pot,elect}(A)$$
$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgy_A + qV(A)$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot,grav}(B) + E_{pot,elect}(B)$$
$$E(B) = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mgy_B + qV(B)$$

donde los potenciales eléctricos en los puntos A y B son:

$$V(A) = \frac{K(-q)}{a} + \frac{K(q)}{\sqrt{2}\,a} = \frac{Kq}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{Kq}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$V(B)=\frac{K(-q)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}+\frac{K(q)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=0$$

Por la conservación de la energía se tiene,

$$\frac{1}{2}Mv_A^2+Mgy_A+qV(A)=\frac{1}{2}Mv_B^2+Mgy_B+qV(B)$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=Mg\left(\frac{a}{2}\right)+q\left[\frac{Kq}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=\frac{Mga}{2}+\frac{Kq^2}{2a}\left(\sqrt{2}-2\right)$$

$$v_B^2=ga+\frac{Kq^2}{aM}\left(\sqrt{2}-2\right)$$

entonces la velocidad es,

$$v_B=\sqrt{ga+\frac{Kq^2}{aM}\left(\sqrt{2}-2\right)}$$

$$v_B=\sqrt{9.8(0.3)+\frac{9\times10^9\left(10^{-7}\right)^2}{(0.3)\times10^{-2}}\left(\sqrt{2}-2\right)}=\sqrt{2.94+\frac{9}{3}\times10^9\times10^3\times10^{-14}\left(\sqrt{2}-2\right)}$$

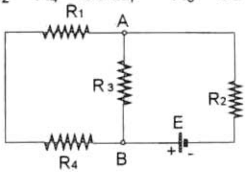
$$v_B=\sqrt{2.94+3\times10^{-2}\left(\sqrt{2}-2\right)}=\sqrt{2.92}$$

$$v_B=1.71\frac{m}{s}$$

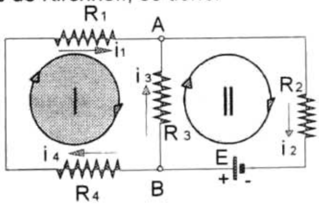
32.- En el circuito mostrado en la figura, calcular:

a) La corriente en cada resistencia.
b) La diferencia de potencial entre los puntos A y B.
c) La potencia disipada en la resistencia R_3

$R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 30\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $E = 4\ V$



Aplicando las leyes de Kirchhoff, se tiene:



Nodo A $\quad i_1 + i_3 = i_2$
Nodo B $\quad i_2 = i_3 + i_4 = i_1 + i_3 \quad$ ......(1)
donde se cumple que $i_1 = i_4$.

Malla I $\quad i_1R_1 + i_4R_4 - i_3R_3 = 0$ .....(2)
Malla II $\quad i_2R_2 + i_3R_3 = \varepsilon$ ......(3)

Sustituyendo (1) en (3), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, para las corrientes:

$$i_1R_1 + i_1R_4 - i_3R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1(R_1 + R_4) - i_3R_3 = 0$$
$$(i_1 + i_3)R_2 + i_3R_3 = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad i_1R_2 + i_3(R_2 + R_3) = \varepsilon$$

el cual nos da:

$$40i_1 - 60i_3 = 0$$
$$30i_1 + 90i_3 = 4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por determinantes,

$$i_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -60 \\ 4 & 90 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 40 & -60 \\ 30 & 90 \end{bmatrix}} = \frac{240}{3600+1800} = \frac{240}{5400} = \frac{4}{9} \times 10^{-1} = 0.044A$$

$$i_3 = \frac{\begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 30 & 4 \end{bmatrix}}{5400} = \frac{160}{5400} = \frac{8}{27} \times 10^{-1} = 0.029A$$

$$i_2 = i_1 + i_3 = 0.074A$$

$$i_4 = 0.044A$$

Para la diferencia de potenciales, iniciamos la trayectoria en A y seguimos a través de R_3 para llegar a B, así que

$$V(B) - i_3R_3 = V(A) \qquad \Rightarrow \qquad V(A) - V(B) = -i_3R_3 = -0.029(60)$$

$$V(A) - V(B) = -1.777 Volts.$$

o

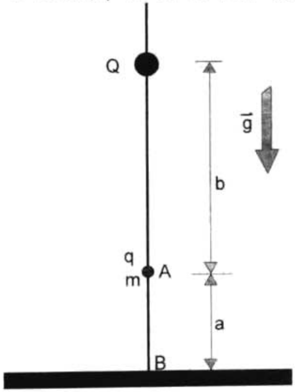
$$V(B) - V(A) = 1.777 \quad Volts$$

Para la potencia disipada por la resistencia R_3 tenemos,

$$P_{R_3} = i_3^2R_3 = (0.0296)^2(60) = 0.0526\frac{J}{s}$$

33.- Una cuenta esférica tiene masa m y esta cargada eléctricamente con una carga q, dicha cuenta se desplazará desde el punto A hasta el punto B a lo largo de una varilla vertical fija. El movimiento se realiza en la vecindad de la superficie terrestre, la velocidad del collarín en el punto A es de 1.0 m/s. Determine la velocidad que tendrá la cuenta esférica al llegar al punto B.

m= 50 g, a= 20 cm, b= 50 cm, q=10^{-6} C, Q=4×10^{-5} C.



Debido a que las fuerzas sobre la cuenta esférica son de tipo conservativo se tiene que se conserva la energía del sistema:

$$E=cte.$$

En particular para los puntos de interés A y B se tiene

$$E(A)=E(B).$$

Donde la energía se compone de tres partes: energía cinética, energía potencial de gravedad y energía potencial eléctrica.

$$E(A)=E_{cin}(A)+E_{pot\,grav}(A)+E_{pot\,elect.}(A),$$

$$E(B)=E_{cin}(B)+E_{pot\,grav.}(B)+E_{pot\,elect}(B).$$

Por lo tanto la energía en el punto A es:

$$E(A)=\frac{1}{2}m\upsilon_A^2+mgy_A+qV(A)$$

similarmente para el punto B tenemos:

$$E(B)=\frac{1}{2}m\upsilon_B^2+mgy_B+qV(B).$$

Igualando dichas energías tenemos

$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + mgy_A + qV(A) = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + mgy_{\mathbf{B}} + qV(B)$$

De la relación anterior podemos determinar la velocidad en el punto B.

$$\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + mgy_A - mgy_{\mathbf{B}} + qV(A) - qV(B)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + mg(y_A - y_{\mathbf{B}}) + q(V(A) - V(B))$$

$$\upsilon_B^2 = \upsilon_A^2 + 2g(y_A - y_{\mathbf{B}}) + \frac{2q}{m}(V(A) - V(B))$$

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_A^2 + 2g(y_A - y_{\mathbf{B}}) + \frac{2q}{m}(V(A) - V(B))}$$

En el resultado encontrado solo falta identificar cada término dentro del radical para dar el resultado numérico del problema.

υ_A es la velocidad inicial en el punto A, y_A es la distancia a, y_B es igual a cero, V(A) es el potencial eléctrico generado por la carga Q en el punto A, y V(B) es el potencial eléctrico generado por la carga Q en el punto B.

Los potenciales eléctricos están dados por:

$$V(A) = K\frac{Q}{b}$$

$$V(B) = K\frac{Q}{a+b}$$

de tal manera entonces la diferencia de potenciales (V(A)-V(B)) resulta ser:

$$V(A) - V(B) = K\frac{Q}{b} - K\frac{Q}{a+b} = KQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) = KQ\left(\frac{a}{b(a+b)}\right)$$

sustituyendo este resultado en υ_B,

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_A^2 + 2ga + \frac{2KQq}{m}\left(\frac{a}{b(a+b)}\right)}$$

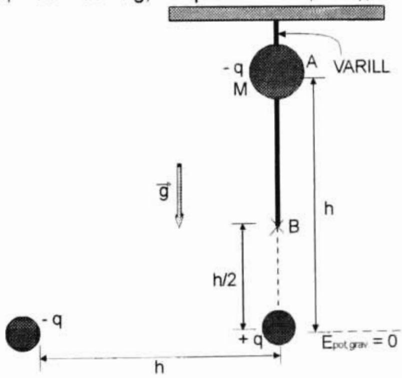
$$\upsilon_B = \sqrt{1 + 2(9.8)(0.2) + \frac{2\times 9\times 10^9 \times 4\times 10^{-5} \times 10^{-6}}{50\times 10^{-3}}\left(\frac{0.2}{0.5(0.2+0.5)}\right)}$$

$$\upsilon_B = \sqrt{1 + 9.8(0.4) + 14.4\left(\frac{0.2}{0.5(0.7)}\right)} = \sqrt{1 + 3.92 + 8.22} = \sqrt{13.14}$$

$$\upsilon_B = 3.62\,\frac{m}{s}.$$

34.- Un collarín de masa M y cargado está sujeto a la acción de dos cargas en reposo y a su peso. Si el collarín parte del reposo en el punto A como se muestra en la figura. Calcular la velocidad que lleva en el punto B.

$h = 10^{-1}$ m, $M = 10^{-1}$ kg, $q = 3 \times 10^{-7}$ C, $v_A = 0$, $v_B = ?$



Puesto que las fuerzas son conservativas se tiene:

$$E = \text{Constante.}$$

En particular en los puntos A y B tenemos,

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\,elect.}(A) + E_{pot\,grav}(A)$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot\,elect.}(B) + E_{pot\,grav}(B)$$

$$E(A) = \frac{1}{2} M v_A^2 + (-q)V(A) + Mgy_A$$

$$E(B)=\frac{1}{2}Mv_B^2+(-q)V(B)+Mgy_B$$

igulando las energías en los puntos A y B

$$\frac{1}{2}Mv_A^2+(-q)V(A)+Mgy_A=\frac{1}{2}Mv_B^2+(-q)V(B)+Mgy_B$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=-Mgy_B+Mgy_A-(-q)V(B)+(-q)V(A)$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=Mg(y_A-y_B)+(-q)(V(A)-V(B))$$

$$v_B=\sqrt{2g(y_A-y_B)+\frac{2}{M}(-q)(V(A)-V(B))}$$

Donde los potenciales eléctricos en los puntos A y B son:

$$V(B)=\frac{K(-q)}{\frac{\sqrt{5}h}{2}}+\frac{Kq}{\frac{h}{2}}=\frac{2Kq}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$V(A)=\frac{K(-q)}{\sqrt{2}h}+\frac{Kq}{h}=\frac{Kq}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V(A)-V(B)=\frac{Kq}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{2Kq}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{Kq}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$V(A)-V(B)=\frac{Kq}{h}\left(-1+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

donde se tiene, $y_A=h$, $y_B=\frac{h}{2}$.

Por lo tanto,

$$v_B=\sqrt{2g\left(h-\frac{h}{2}\right)+\frac{2}{M}\left(\frac{Kq^2}{h}\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2gh}{2} + \frac{2Kq^2}{Mh}\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{gh + \frac{2Kq^2}{Mh}\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$v_B = \sqrt{9.8\left(10^{-1}\right) + \frac{2 \times 9 \times 10^9\left(3 \times 10^{-7}\right)^2}{10^{-1}10^{-1}}\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$v_B = \sqrt{0.98 + 2 \times 81 \times 10^9 \times 10^{-14} \times 10^2\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

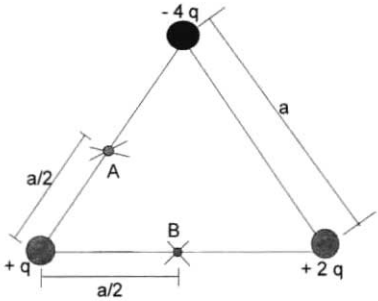
$$v_B = \sqrt{0.98 + 162 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$v_B = \sqrt{0.98 + \frac{0.162}{10}\left(10 - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)}$$

$$v_B = 1.05\,\frac{m}{s}$$

35.- En la figura se muestra un sistema de cargas eléctricas en reposo, calcular:
a) La diferencia de potencial eléctrica que existe entre los puntos A y B,
b) La energía eléctrica para formar dicho sistema.

a=1 m, q_1= - 4q, q_2= +2q, q_3= +q, q=10^{-7}C.



a) Para determinar los potenciales eléctricos en los puntos A y B empleamos la expresión del potencial generado por una carga puntual y el principio de superposición del potencial eléctrico.

Primero determinaremos el potencial eléctrico en el punto A,

$$V(A) = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} + K\frac{q_3}{r_3}$$

$$V(A) = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$

$$V(A) = K\left(\frac{-4q}{\frac{a}{2}} + \frac{+2q}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} + \frac{+q}{\frac{a}{2}}\right)$$

$$V(A) = \frac{Kq}{a}\left(-8 + 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$V(A) = \frac{2Kq}{a}\left(-3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

De manera similar el potencial eléctrico en el punto B es:

$$V(B) = K\frac{q_1}{r_1'} + K\frac{q_2}{r_2'} + K\frac{q_3}{r_3'}$$

$$V(B)=K\left(\frac{-4q}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{+2q}{\frac{a}{2}}+\frac{+q}{\frac{a}{2}}\right)$$
$$V(B)=\frac{Kq}{a}\left(2+4-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$$
$$V(B)=\frac{2Kq}{a}\left(3-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

Por lo tanto la diferencia de potencial entre los puntos A y B está dada por

$$\Delta V_{AB}=V(B)-V(A)$$
$$\Delta V_{AB}=\frac{2Kq}{a}\left(3-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)-\frac{2Kq}{a}\left(-3+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\Delta V_{AB}=\frac{2Kq}{a}\left(3-\frac{4}{\sqrt{3}}+3-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\Delta V_{AB}=\frac{2Kq}{a}\left(6-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\Delta V_{AB}=\frac{12Kq}{a}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$\Delta V_{AB}=\frac{12\times 9\times 10^{9}\times 10^{-7}}{1}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=108(0.42)\times 10^{2}$$
$$\Delta V_{AB}=4.5646\times 10^{3}\text{ Volts}.$$

b) La energía de formación del sistema se determina por medio de:

$$\mathrm{E}=-\mathrm{K}\left(\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}\right)\quad \text{con } i\neq j.$$

donde r_{ij} son las distancias relativas entre las cargas eléctricas localizadas en los vértices del tiángulo equilátero.

$$\mathrm{E}_{formacion}=-\mathrm{K}\left(\frac{q_1\,q_2}{r_{12}}+\frac{q_1\,q_3}{r_{13}}+\frac{q_2\,q_3}{r_{23}}\right)$$
$$\mathrm{E}_{formacion}=-\mathrm{K}\left(\frac{(-4q)(+2q)}{a}+\frac{(-4q)(+q)}{a}+\frac{(+2q)(+q)}{a}\right)$$
$$\mathrm{E}_{formacion}=-\frac{\mathrm{K}\,q^2}{\mathrm{a}}(-8-4+2)=10\frac{\mathrm{K}\,q^2}{\mathrm{a}}$$
$$\mathrm{E}_{formacion}=10\times 9\times 10^{9}\times\left(10^{-7}\right)^{2}=9\times 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

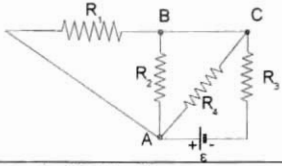
36.- En el circuito mostrado en la figura, calcular:

a) La corriente en cada resistencia i_1, i_2, i_3, i_4.

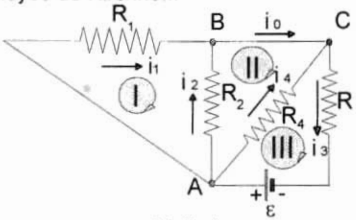
b) La resistencia equivalente del circuito R_{equiv}.

c) La potencia disipada por la resistencia R_4, P_{R4}.

$R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 75\ \Omega$, $E = 6$ V



Aplicando las leyes de Kirchhoff:



Nodo A: $i_1 + i_4 + i_2 - i_3 = 0$ Malla I $i_1R_1 - i_2R_2 = 0$

Nodo B: $i_1 + i_2 - i_0 = 0$ Malla II $i_2R_2 - i_4R_4 = 0$

Nodo C: $i_0 + i_4 - i_3 = 0$ Malla III $i_3R_3 + i_4R_4 = \varepsilon$ ......(1)

Reescribiendo las ecuaciones de Nodos y Mallas se tiene,

$$i_1 + i_2 = i_3 - i_4 \qquad i_1R_1 = i_2R_2 = i_4R_4$$

$$i_3 = i_1 + i_2 + i_4 \quad .....(2)$$

así que el sistema de ecuaciones se reduce a resolver (sustituyendo (2) en (1)):

$$(i_1 + i_2 + i_4)R_3 + i_4R_4 = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left(i_4\frac{R_4}{R_1} + i_4\frac{R_4}{R_2} + i_4\right)R_3 + i_4R_4 = \varepsilon$$

$$i_4\left(\frac{R_3R_4}{R_1} + \frac{R_3R_4}{R_2} + R_3 + R_4\right) = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad i_4 = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_4 + R_3R_4\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$i_4 = \frac{6}{50+75+50(75)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{50}\right)} = \frac{6}{125+\frac{50(75)}{100}(3)} = \frac{6}{125+\frac{75}{2}(3)}$$

así que la corriente que pasa por la resistencia R_4 es;

$$i_4 = \frac{6}{125+\frac{225}{2}} = \frac{12}{250+225} = \frac{12}{475} = 0.025Amp$$

la corriente en R_2 es,

$$i_2 = i_4\frac{R_4}{R_2} = 0.025\left(\frac{75}{50}\right) = \frac{3}{2}(0.025) = 1.5(0.025) = 0.0375Amp$$

la corriente en R_1 es,

$$i_1 = i_4\frac{R_4}{R_1} = 0.025\left(\frac{75}{100}\right) = \frac{3}{4}(0.025) = 0.75(0.025) = 0.01875Amp$$

la corriente en R_3 es,

$$i_3 = i_1 + i_2 + i_4 = 0.08125Amp$$

Reduciendo el circuito, agrupando en serie o en paralelo de acuerdo a las resistencias, tenemos:

para R_1 y R_2 ; $$R_P^1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \quad ;$$

para R_4 y $R_P{}^1$; $$R_P^2 = \frac{R_P^1R_4}{R_P^1+R_4} \quad ;$$

para R_3 y $R_P{}^2$; $$R_{equi} = R_3 + R_P^2 = R_3 + \frac{\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)R_4}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_4} = 50 + \frac{75\left(\frac{100(50)}{150}\right)}{\frac{100(50)}{150}+75}$$

así la resistencia equivalente es,

$$R_{equi} = 50 + \frac{\frac{75(100)}{3}}{\frac{100}{3}+75} = 50 + \frac{\frac{7500}{3}}{\frac{100+225}{3}} = 50 + \frac{7500}{325} = 50 + 23.07 = 73.076\Omega$$

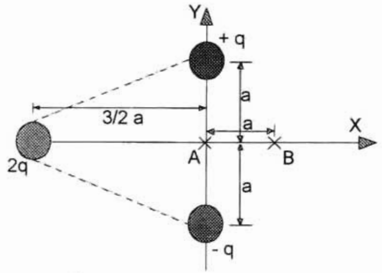
$R_{equiv} = 73.076\Omega$.

Para la potencia disipada por R_4 se tiene,

$$P_{R_4} = R_4 i_4^2 = 75(0.025)^2 = 0.0468Watts.$$

37.- En la figura se muestra un sistema de cargas en reposo, calcular:

a) La diferencia de potencial entre los puntos A y B, ΔV_{AB}.
b) El trabajo necesario para romper dicha configuración, W_{romper}
$q_1 = 2q$, $q_2 = q$, $q_3 = -q$, $q = 6 \times 10^{-6}$ C, $a = 10^{-1}$ m



El trabajo para romper la configuracion es el mismo trabajo para formar la configuracion, salvo que son de signos contrarios.

$$W_{romper} = -W_{formar}$$

el trabajo para formar esta configuración está expresado por

$$W_{formar} = \sum_{i<j} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = K \sum_{i<j}^{3} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W_{formar} = K\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$

donde las distancias están dadas por,

$$r_{12} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}a = \frac{\sqrt{13}}{2}a$$

$$r_{13} = \frac{\sqrt{13}}{2}a, \qquad r_{23} = 2a \ .$$

$$W_{formar} = K\left[\frac{(2q)(q)}{\frac{\sqrt{13}}{2}a} + \frac{(2q)(-q)}{\frac{\sqrt{13}}{2}a} + \frac{(q)(-q)}{2a}\right]$$

$$W_{formar} = \frac{Kq^2}{a}\left[\frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}K\frac{q^2}{a}$$

$$W_{romper} = \frac{1}{2}\frac{\left(9\times10^9\right)\left(6\times10^{-6}\right)^2}{10^{-1}} = \frac{9\times36}{2}\times10^{10}\times10^{-12}$$

$$W_{romper} = 162\times10^{-2}$$

el trabajo para romper la configuración es,

$$W_{romper} = 1.62J$$

Por otro lado, los potenciales eléctricos son,

$$V(A) = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) = K\left(\frac{2q}{\frac{3}{2}a} + \frac{q}{a} + \frac{-q}{a}\right) = \frac{4}{3}K\frac{q}{a}$$

$$V(B) = K\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3}\right) = K\left(\frac{2q}{\frac{5}{2}a} + \frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{-q}{\sqrt{2}a}\right) = \frac{4}{5}K\frac{q}{a}$$

por lo tanto la diferencia de potencial es,

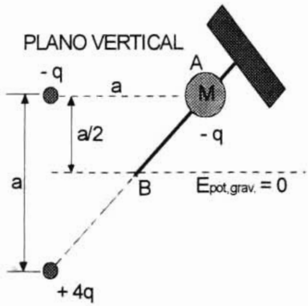
$$\Delta V_{AB} = V(B) - V(A) = \frac{4}{5}K\frac{q}{a} - \frac{4}{3}K\frac{q}{a} = 4K\frac{q}{a}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Delta V_{AB} = -\frac{8}{15}K\frac{q}{a}$$

$$\Delta V_{AB} = -28.8\times10^4 Volts.$$

38.-Un collarín de masa M y cargado está sujeto a la acción de dos cargas en reposo y a su peso. Si el collarín parte del reposo en el punto A como se muestra en la figura. Calcular la velocidad que lleva en el punto B.

M = 0.1 kg, a = 0.2 m, q = 10^{-6} C, $v_A = 0$, $v_B = ?$



Por conservación de la energía se tiene:

$$E = \text{constante.}$$

En los puntos A y B

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot.grav}(A) + E_{pot.elect}(A)$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot.grav}(B) + E_{pot.elect}(B)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgy_A - qV(A) = 0 + Mg\left(\frac{a}{2}\right) - qV(A)$$

$$E(B) = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mgy_B - qV(B) = \frac{1}{2}Mv_B^2 + 0 - qV(B)$$

igualando las energías en los puntos A y B, se tiene:

$$Mg\left(\frac{a}{2}\right) - qV(A) = \frac{1}{2}Mv_B^2 - qV(B)$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}Mga + qV(B) - qV(A)$$

$$v_B = \sqrt{\left(\frac{2}{M}\right)\left[\frac{1}{2}Mga + q\left(V(B) - V(A)\right)\right]}$$

$$v_B = \sqrt{ga + \frac{2q}{M}\left[V(B) - V(A)\right]}$$

Los potenciales eléctricos en los puntos A y B son

$$V(A) = K\left\{-\frac{q}{a} + \frac{4q}{\sqrt{2}a}\right\}$$

$$V(A) = \frac{Kq}{a}\left\{2\sqrt{2} - 1\right\}$$

$$V(B) = K\left\{\frac{-q}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} + \frac{4q}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\right\} = \frac{Kq}{a}\left\{-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{Kq}{a}\left(\frac{8\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$V(B) = \frac{Kq}{a}\left(3\sqrt{2}\right)$$

entonces, la velocidad está dada por:

$$v_B = \sqrt{ga + \frac{2q}{M}\left[\frac{Kq}{a}\left(3\sqrt{2}\right) - \frac{Kq}{a}\left(2\sqrt{2} - 1\right)\right]}$$

$$v_B = \sqrt{ga + \frac{2Kq^2}{aM}\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$v_B = \sqrt{(9.8)(0.2) + \frac{2\left(9 \times 10^9\right)\left(10^{-6}\right)^2}{2 \times 10^{-1} \times 10^{-1}}\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$v_B = \sqrt{1.96 + 9 \times 10^{11} \times 10^{-12}\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

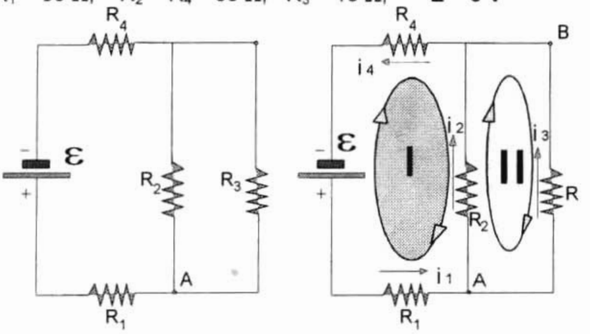
$$v_B = \sqrt{1.96 + 0.9\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$v_B = 2.0329\frac{m}{s}$$

39.- En el circuito mostrado en la figura, calcular:

a) La corriente en cada resistencia, i_1, i_2 ,i_3 i_4.
b) La potencia disipada por la resistencia R_1, P_{R1}.
c) La diferencia de potencial entre los puntos A y B, ΔV_{AB}.

$R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 30\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $E = 6\ V$



Aplicando las leyes de Kirchhoff se tiene:

Nodo A: $i_1 = i_2 + i_3$ donde $i_1 = i_4$

Malla I $i_1R_1 + i_2R_2 + i_4R_4 = \varepsilon$ ....(1)

Malla II $i_2R_2 - i_3R_3 = 0 \Rightarrow i_2R_2 = i_3R_3$ ....(2)

$$i_2 = i_3\frac{R_3}{R_2}$$

Sustituyendo i_4 por i_1 en (1), se tiene el sistema de ecuaciones para las corrientes en el circuito:

$$i_1R_1 + i_2R_2 + i_1R_4 = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad i_1(R_1 + R_4) + i_2R_2 = \varepsilon \quad \text{.........(1')}$$
$$i_2R_2 - (i_1 - i_2)R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3) = 0 \quad \text{.........(2')}$$

Resolviendo el sistema por eliminación, (de la ec. (2') tenemos):

$$i_1 = i_2 \frac{(R_2 + R_3)}{R_3}$$

Sustituyendo en (1') encontramos:

$$i_2 \frac{(R_2 + R_3)}{R_3}(R_1 + R_4) + i_2 R_2 = \varepsilon \qquad \therefore \qquad i_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}{R_3}}$$

por lo tanto la corriente en la resistencia R_2 es,

$$i_2 = \frac{6}{30 + \frac{(60+30)(30+10)}{10}} = \frac{6}{30 + \frac{(90)(40)}{10}} = \frac{6}{30 + 360} = \frac{6}{390} = 0.01538A$$

la corriente en la resistencia R_1 es,

$$i_1 = 0.01538\left(\frac{30+10}{10}\right) = 0.01538\left(\frac{40}{10}\right) = 0.01538 \times 4 = 0.0615A.$$

así que las corrientes i_3 e i_4 son

$$i_3 = 0.0461A.$$
$$i_4 = 0.0615A.$$

la potencia disipada en la resistencia R_1 es,

$$P_{R_1} = i_1^2 R_1 = 60(0.0615)^2 = 0.2269W.$$

la diferencia de potencial entre los puntos A y B es igual a:

$$V(A) - i_3 R_3 = V(B)$$

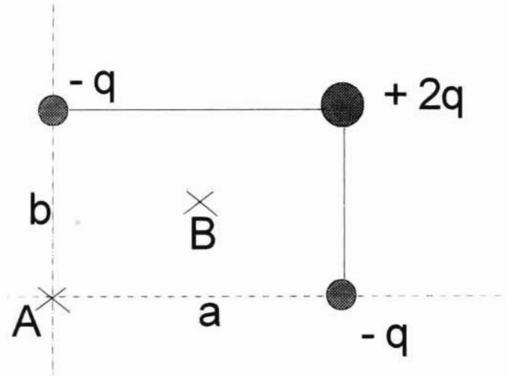
$$\Delta V_{AB} = V(A) - V(B) = i_3 R_3 = 10(0.04614)$$

$$\Delta V_{AB} = 0.4614V.$$

40.- En el sistema de cargas fijas mostrado en la figura, calcular:

a) El potencial eléctrico en los puntos A y B, V (A), V (B).
b) El trabajo efectuado por la fuerza eléctrica sobre una carga q' al pasar del punto A al B, $W_{A\text{-}B}$.
c) La energía potencial eléctrica del sistema, E_{sist}.

$a = 0.5$ m, $b = 0.3$ m, $q = 3 \times 10^{-4}$ C, $q' = 4.5 \times 10^{-5}$ C



Por el principio del trabajo y la energía se tiene:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_{Pot}\Big|_A^B = -\left(E_{Pot}(B) - E_{Pot}(A)\right)$$

donde, el potencial eléctrico en el punto A es

$$V(A) = K\frac{q_1}{a_1} + K\frac{q_2}{a_2} + K\frac{q_3}{a_3}$$

$$q_1 = -q \qquad a_1 = b$$
$$q_2 = 2q \qquad a_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$q_3 = -q \qquad a_3 = a$$

$$V(A) = K\frac{-q}{b} + K\frac{2q}{\sqrt{a^2+b^2}} + K\frac{-q}{a}$$

$$V(A) = Kq\left\{-\frac{1}{b} + \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a}\right\}$$

$$V(A) = \left(9\times10^9\right)\left(3\times10^{-4}\right)\left\{-\frac{1}{0.3} + \frac{2}{\sqrt{(0.5)^2+(0.3)^2}} - \frac{1}{0.5}\right\}$$

$$V(A) = -27\times10^5(1.94) = -52.38\times10^5\,Volts$$

Para el potencial eléctrico en el punto B tenemos,

$$V(B) = K\frac{q_1}{b_1} + K\frac{q_2}{b_2} + K\frac{q_3}{b_3}$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

$$V(B) = K\frac{-q}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} + K\frac{2q}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} + K\frac{-q}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$V(B) = Kq\left\{\frac{-1}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-1}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

$$V(B) = 0$$

por lo tanto,

$$W_{A\to B} = -q'\Delta V = -q'\left[V(B) - V(A)\right] = -\left(-q'V(A)\right) = q'V(A)$$

entonces,

$$W_{A\to B} = -235.71J$$

Por otro lado para la energía potencial del sistema, se encuentra

$$E_{Pot\,Sist} = (2q)V_{q} + (-q)\left[V_{-q} + V_{2q}\right] = 2q\left[K\frac{-q}{a}\right] + (-q)\left[K\frac{-q}{\sqrt{a^2+b^2}} + K\frac{2q}{b}\right]$$

$$E_{Pot\,Sist} = -\frac{2Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2Kq^2}{b}$$

$$E_{Pot\,Sist} = Kq^2\left\{-\frac{2}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2}{b}\right\} = 9\times10^9\left(9\times10^{-8}\right)\left[-4 - \frac{20}{3} + \frac{1}{0.58}\right] = 810\left(-\frac{32}{3} + \frac{5}{3}\right)$$

$$E_{Pot\,Sist} = -\frac{28}{3}(810)$$

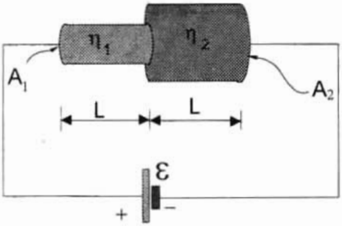
$$E_{Pot\,Sist} = -(8.95)(810)$$

$$E_{Pot\,Sist} = -7250.86J.$$

41.- Dos conductores de resistividad η_1 y η_2 respectivamente, se conectan a una fem E como se muestra en la figura. Calcular:

a) La resistencia de cada conductor.
b) La corriente en cada resistencia.
c) La potencia disipada por el circuito.

$\eta_1 = 5.3 \times 10^{-5}\ \Omega$-m, $A_1 = 6.2 \times 10^{-7}\ m^2$, $L = 0.9$ m
$\eta_1 = 6.8 \times 10^{-5}\ \Omega$-m, $A_1 = 2.7 \times 10^{-6}\ m^2$, $E = 10$ V



Para cada uno de los conductores se tiene:

$$R_1 = \eta_1 \frac{L}{A_1} = \left(5.3 \times 10^{-5}\right)(0.9)\left(\frac{1}{6.2}\right) \times 10^{7}\,\Omega$$

$$R_2 = \eta_2 \frac{L}{A_2} = \left(6.8 \times 10^{-5}\right)(0.9)\left(\frac{1}{2.7}\right) \times 10^{6}\,\Omega$$

$$R_1 = \frac{4.77}{6.2} \times 10^{2} = 76.93\Omega$$

$$R_2 = \frac{6.12}{2.7} \times 10 = 22.66\Omega$$

por lo tanto la resistencia total es,

$$R_T = R_1 + R_2$$

$$\varepsilon = iR_T \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{\varepsilon}{R_T} = \frac{10}{99.59} = 0.1004\,Amp$$

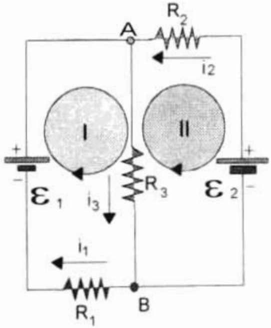
así la potencia resulta ser:

$$P = \varepsilon\, i = \frac{\varepsilon^2}{R_T} = \frac{(10)^2}{99.59} = \frac{100}{99.59} = 1.004\frac{J}{s}$$

42.- Considere el circuito de la figura:

a) Aplicar las Leyes de Kirchhoff al nodo "A" y a las trayectorias I y II y plantear las ecuaciones correspondientes.
b) Resolver el sistema de ecuaciones obtenido en (a) y calcular la corriente en cada resistencia.
c) Encuentre la diferencia de potencial entre A y B

$E_1 = 6$ V, $E_2 = 8$ V, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$



Por las leyes de Kirchhoff :
Para el nodo A se tiene,

$$i_1 - i_3 + i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_3 = i_1 + i_2$$

Para las mallas I y II tenemos,
Malla I

$$\varepsilon_1 - i_3 R_3 - i_1 R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = i_1 R_1 + i_3 R_3$$

Malla II

$$\varepsilon_2 - i_2 R_2 - i_3 R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = i_2 R_2 + i_3 R_3$$

sustituyendo la ec. del nodo A en las ecs. de mallas, se tiene,

$$\varepsilon_1 = i_1(R_1 + R_3) + i_2 R_3 \qquad\qquad 6 = i_1(6+15) + i_2 6$$
$$\varepsilon_2 = i_1 R_3 + i_2(R_2 + R_3) \qquad\qquad 8 = i_1 6 + i_2(12+6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para las corrientes (por determinantes),

$$6 = 21i_1 + 6i_2$$
$$8 = 6i_1 + 18i_2$$

$$\Rightarrow \qquad i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{6(18) - 6(8)}{21(18) - 6(6)} = 0.175A$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 21 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{21(8) - 6(6)}{21(18) - 6(6)} = 0.386A$$

siendo las corrientes,

$$i_1 = 0.1754\ A$$
$$i_2 = 0.3859\ A$$
$$i_3 = 0.5613\ A$$

para la diferencia de potenciales tenemos.

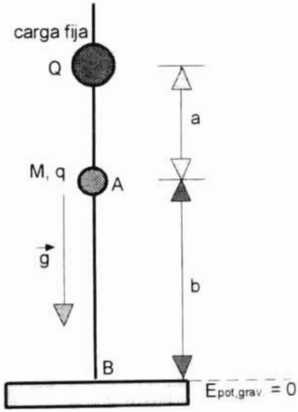
$$\Delta V = V(B) - V(A) = -i_3 R_3 = -3.3678\ V$$

o

$$(\Delta V)' = V(A) - V(B) = i_3 R_3 = 3.3678\ V$$

43.- Un collarín, de masa M y carga eléctrica q, se esplaza del punto A al punto B. El movimiento del collarín ocurre cerca de la superficie de la tierra. La velocidad del collarín, en el punto A es cero $v_A = 0$. Calcular la velocidad de dicha carga en el punto B, v_B . Q es una carga eléctrica puntual y fija en el riel. No hay fricción.

$M = 0.15$ kg, $a = 0.1$ m, $b = 0.2$ m, $q = 10^{-6}$ C, $Q = 4 \times 10^{-6}$ C,



Por la conservacion de la energía se tiene:

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\ grav}(A) + E_{pot\ elect}(A)$$

$$E(B) = E_{cin}(B) + E_{pot\ grav}(B) + E_{pot\ elect}(B)$$

$$E(A) = \frac{1}{2} Mv_A^2 + Mgy_A + qV(A)$$

donde el potencial eléctrico en A es

$$V(A) = K\frac{Q}{a}$$

$$E(B)=\frac{1}{2}Mv_B^2+Mgy_B+qV(B)$$

donde el potencial eléctrico en B es

$$V(B)=K\frac{Q}{a+b}$$

por lo tanto tenemos,

$$Mgb+q\left(K\frac{Q}{a}\right)=\frac{1}{2}Mv_B^2+qK\frac{Q}{a+b}$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=Mgb+KqQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$v_B^2=\frac{2}{M}\left(Mgb+KQq\left(\frac{b}{a(a+b)}\right)\right)$$

así que la velocidad está dada como:

$$v_B=\sqrt{2gb+\frac{2KqQb}{a(a+b)M}}$$

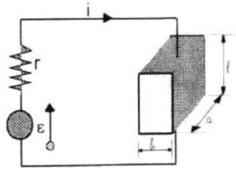
$$v_B=\sqrt{2(9.8)(0.2)+\frac{9\times10^9\left(10^{-6}\right)\left(10^{-6}\right)4(0.2)2}{(0.3)(0.1)(0.15)}}$$

$$v_B=\sqrt{3.92+3.2}$$

$$v_B=2.67\ \frac{m}{s}$$

44.- La f.e.m. con voltaje E se conecta al resistor, cuya resistencia es r y al conductor que tiene la forma de paralelepípedo rectangular, las dimensiones del conductor son a, b y ℓ. Si la corriente eléctrica proporcionada por la f.e.m. es i determinar el valor de la resistividad del conductor.

ρ = ?, E = 12 V, r = 2 Ω, i = 5 A, $a = 3 \times 10^{-3}$ m, $b = 4 \times 10^{-3}$ m, $\ell = 10^{-2}$ m



Para el circuito, se tiene:

$$R_T = r + R$$

$$\varepsilon = R_T\, i \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = (r + R)\, i$$

$$r + R = \frac{\varepsilon}{i} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{\varepsilon}{i} - r$$

además por otro lado sabemos que;

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{RA}{\ell}$$

por lo tanto la resistividad es,

$$\rho = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{i} - r\right) A}{\ell} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{i} - r\right)(ab)}{\ell}$$

$$\rho = \frac{\left(\frac{12}{5} - 2\right)(3 \times 4) \times 10^{-6}}{10^{-2}}$$

$$\rho = 12\left(\frac{12}{5} - 2\right) \times 10^{-4} = \frac{2}{5} \times 12 \times 10^{-4}$$

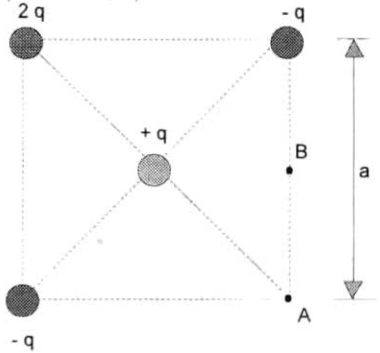
$$\rho = 4.8 \times 10^{-4}\ \Omega - m$$

45.- Se colocan cuatro cargas en la posición que se muestra en la figura. Calcular:

a) El trabajo necesario para lograr esa configuración, $W_{formacion}$

b) La diferencia de potencial entre los puntos A y B. ΔV_{AB}

$q = 1 \times 10^{-7}$ C, a = 15 cm,



Sabemos que el trabajo para configurar un sistema de cargas está dado por:

$$W_{Formacion} = \sum_{i<j}^{4} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W_F = K\left\{\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right\}$$

donde las distancias entre las cargas son r_{12}, r_{13}, ….. , r_{34} :

$q_1 = 2q \qquad r_{12} = a$

$q_2 = -q \qquad r_{13} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$q_3 = q \qquad r_{14} = a$

$q_4 = -q \qquad r_{23} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r_{24} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$ y $r_{34} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

las distancias de las cargas a los puntos A y B son: r_1, r_2, r_3, r_4 y R_1, R_2, R_3, R_4 respectivamente.

$$r_1 = \sqrt{2}a \,, \qquad R_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}a$$

$$r_2 = a \,, \qquad R_2 = \frac{a}{2}$$

$$r_3 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \,, \qquad R_3 = \frac{a}{2}$$

$$r_4 = a \,, \qquad R_4 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}a$$

$$W_F = K\left\{\frac{(2q)(-q)}{a} + \frac{(2q)(q)}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{(2q)(-q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(q)(-q)}{a\frac{\sqrt{2}}{2}}\right\}$$

$$W_F = \frac{Kq^2}{a}\left\{-2 + \frac{4}{\sqrt{2}} - 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$W_F = \frac{Kq^2}{a}\left\{-4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{Kq^2}{a}\left\{\frac{\sqrt{2} - 8}{2}\right\}$$

$$W_F = \frac{\left(9 \times 10^9\right)\left(10^{-7}\right)^2}{0.15}\left\{\frac{\sqrt{2} - 8}{2}\right\}$$

$$W_F = \frac{9}{15} \times 10^9 \times 10^2 \times 10^{-14}\left\{\frac{\sqrt{2} - 8}{2}\right\} = \frac{9}{15} \times 10^{-3}\left\{\frac{\sqrt{2} - 8}{2}\right\} = 0.6 \times 10^{-3}(-3.3)$$

$$W_F = -1.98 \times 10^{-3} J$$

los potenciales eléctricos en los puntos A y B están dados por;

$$V(A)=K\left\{\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}+\frac{q_4}{r_4}\right\}=K\left(\frac{2q}{\sqrt{2}a}+\frac{-q}{a}+\frac{q}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{-q}{a}\right)$$

$$V(A)=K\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{q}{a}-\frac{2q}{a}\right)=\frac{Kq}{a}\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

$$V(A)=\frac{2Kq}{a}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$V(B)=K\left\{\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}+\frac{q_3}{R_3}+\frac{q_4}{R_4}\right\}=K\left(\frac{2q}{\frac{\sqrt{5}a}{2}}+\frac{-q}{\frac{\sqrt{5}a}{2}}+\frac{q}{\frac{a}{2}}+\frac{-q}{\frac{a}{2}}\right)$$

$$V(B)=K\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{q}{a}\right)$$

$$V(B)=\frac{2Kq}{a}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

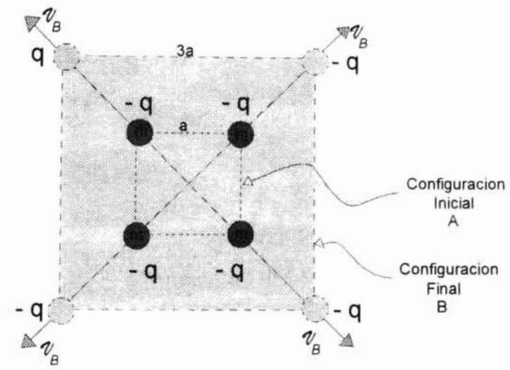
se encuentra que la diferencia de potencial es,

$$\Delta V_{AB}=V(B)-V(A)=\frac{2Kq}{a}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}-\sqrt{2}+1\right)$$

$$\Delta V_{AB}=0.039\times 10^{4}\ V$$

46.- Se tienen partículas en reposo de la misma carga q y masa M en la configuración inicial A. Posteriormente, debido a la fuerza eléctrica entre ellas se desplazan a la configuración final B (ver figura).
a) Calcular la velocidad de éstas cargas en la configuración B, v_B = ?.

$q = 5 \times 10^{-7}$ C, $a = 10^{-2}$ m, $M = 10^{-3}$ kg



Por la conservación de la energía, se tiene:

E = constante.

Para la situación inicial y final se tiene:

$$E(A) = E(B)$$

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{Config}(A)$$

$$E(A) = 4\left(\frac{1}{2}Mv_A^2\right) + K\left(\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + \frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + \frac{q^2}{a}\right)$$, ya que $v_A = 0$

$$E(A) = K\frac{q^2}{a}(4 + \sqrt{2})$$

$$E(B) = Ec_{Cin}(B) + E_{Config}(B)$$

$$E(B) = 4(\frac{1}{2} M v_B^2) + K\left(\frac{q^2}{3a} + \frac{q^2}{a\sqrt{18}} + \frac{q^2}{3a} + \frac{q^2}{3a} + \frac{q^2}{a\sqrt{18}} + \frac{q^2}{3a}\right)$$

$$E(B) = 4(\frac{1}{2} M v_B^2) + K\frac{q^2}{a}\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{18}}\right) = E(A) = K\frac{q^2}{a}(4+\sqrt{2})$$

Por lo tanto,

$$2Mv_B^2 + K\frac{q^2}{a}\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{18}}\right) = K\frac{q^2}{a}(4+\sqrt{2})$$

$$2Mv_B^2 = K\frac{q^2}{a}(4+\sqrt{2} - \frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{18}})$$

$$v_B^2 = \frac{Kq^2}{2aM}(\frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

así que la velocidad resulta ser,

$$v_B = \sqrt{\frac{Kq^2}{2aM}(\frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3})}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{Kq^2}{6aM}\left(8 + 2\sqrt{2}\right)}$$

$$v_B = 28.5\,\frac{m}{s}$$

Otra solución alternativa sería analizar lo que le ocurre a una sola partícula cargada en presencia de las otras tres y usar el teorema de conservación de la energía.

$$E(A) = E_{cin}(A) + E_{pot\ elect}(A)$$

$$E(A) = \frac{1}{2} M v_A^2 + qV(A)$$

$$E(A) = -qV(A)$$

$$E(B)=E_{cin}(B)+E_{pot\,elect}(B)$$

$$E(B)=\frac{1}{2}Mv_B^2-qV(B)$$

Por lo tanto,

$$-qV(A)=\frac{1}{2}Mv_B^2-qV(B)$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2=qV(B)-qV(A)$$

$$v_B^2=\frac{2q}{M}(V(B)-V(A))$$

donde los potenciales eléctricos están dados por,

$$V(B)=K\left(\frac{-q}{3a}+\frac{-q}{3a}+\frac{-q}{\sqrt{9a^2+9a^2}}\right)=-\frac{Kq}{a}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$V(B)=-\frac{Kq}{3a}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{Kq}{6a}\left(4+\sqrt{2}\right)$$

$$V(A)=K\left(\frac{-q}{a}+\frac{-q}{a}+\frac{-q}{\sqrt{a^2+a^2}}\right)=-\frac{Kq}{a}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$V(A)=-\frac{Kq}{2a}\left(4+\sqrt{2}\right)$$

así que la velocidad resulta ser,

$$v_B=\sqrt{\frac{2q}{M}(V(B)-V(A))}=\sqrt{\frac{2q}{M}\left(-\frac{Kq}{6a}\left(4+\sqrt{2}\right)+\frac{Kq}{2a}\left(4+\sqrt{2}\right)\right)}$$

$$v_B=\sqrt{\frac{2q}{M}\left(\frac{2}{3}\frac{Kq}{2a}\left(4+\sqrt{2}\right)\right)}=\sqrt{\frac{Kq^2}{3aM}\left(4+\sqrt{2}\right)}$$

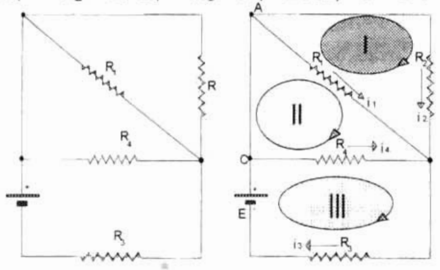
$$v_B=28.5\,\frac{m}{s}$$

Por ambos procedimientos se encuentra el mismo resultado.

47.- En el circuito que se muestra en la figura, calcular:

a) La corriente en cada resistencia, i_1, i_2, i_3, i_4
b) La resistencia equivalente del circuito, $R_{Equiv.}$
c) La potencia disipada por la resistencia R_3, , P_{R3}

$R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 20\ \Omega$, $E = 8$ V



Por las leyes de Kirchhoff, se tiene:

Nodo A $\quad -i_1 - i_2 + i_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = i_1 + i_2$
Nodo B $\quad i_1 + i_2 + i_4 - i_3 = 0$ ....(1) $\qquad i_0 = i_1 + i_2 = i_3 - i_4$
Nodo C $\quad i_3 - i_4 - i_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = i_3 - i_4$

Malla I $\quad i_2R_2 - i_1R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2R_2 = i_1R_1$
Malla II $\quad i_1R_1 - i_4R_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1R_1 = i_4R_4$
Malla III $\quad i_3R_3 + i_4R_4 = \varepsilon$ ....(2)
$\qquad i_2R_2 = i_1R_1 = i_4R_4$ ....(3)

De (1) tenemos $\quad i_3 = i_1 + i_2 + i_4$ ....(1')
Sust (1') en (2) $\quad \varepsilon = (i_1 + i_2 + i_4)R_3 + i_4R_4 = i_1R_3 + i_2R_3 + i_4R_3 + i_4R_4$ ...... (2')
Resolviendo el sistema de ecuaciones para las corrientes:

Sust (3) en (2')

$$\varepsilon = i_4\left(\frac{R_4}{R_1}\right)R_3 + i_4\left(\frac{R_4}{R_2}\right)R_3 + i_4R_3 + i_4R_4 = i_4\left(R_3 + R_4 + \frac{R_3R_4}{R_1} + \frac{R_3R_4}{R_2}\right)$$

$$i_4 = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_4 + \left(\frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2}\right)R_3} = \frac{8}{20 + 20 + \left(\frac{20}{30} + \frac{20}{60}\right)20} = \frac{8}{40 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)20} = \frac{8}{60}$$

$$i_4 = 0.13\ A$$

$$i_1 = i_4\frac{R_4}{R_1} = \frac{20}{30}(0.13)$$

$$i_1 = 0.0866\ A$$

$$i_2 = i_4\frac{R_4}{R_2} = \frac{20}{60}(0.13)$$

$$i_2 = 0.0433\ A$$

$$i_3 = 0.26\ A$$

La resistencia equivalente se determina haciendo las correspondientes reducciones serie-paralelo.

$$R_{P_1} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \qquad ; \qquad R_{P_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{P_1}} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_4R_{P_1}}{R_4 + R_{P_1}}$$

$$R_{equivalente} = R_{S_1} = R_{P_2} + R_3 = R_3 + \frac{R_4\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)}{R_4 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$R_{equiv} = 30\ \Omega$$

La potencia disipada por la resistencia R_3 es,

$$P_{R3} = i_3^2R_3 = 20(0.26)^2 = 1.353\ W$$

Notas de energías mecánica y eléctrica con problemario

Se terminó de imprimir en el mes de
abril de 2009 en los talleres de la sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Se imprimieron 100 ejemplares
más sobrantes para reposición

La edición estuvo a cargo de la
sección de Producción y Distribución Editoriales
de la Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

ISBN 970-31-0093-7

9789703100934

NOTAS DE ENERGIAS MECANICA Y ELECTRICA C/PR

MARTIN LUNA/GARCIA/N • SECCION DE IMPRESION

23878

R. 40 $ 24.00

40-ANTOLOGIAS CBI • 01-CBI

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias