Notas de energías mecánica y eléctrica

M. Ricardo Vázquez Alvidrez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Notas de energías mecánica y eléctrica

M. Ricardo Vázquez Alvidrez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-654-479-8

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Notas de energías mecánica y eléctrica
1a. edición, 2000
6a. reimpresión, 2007
Impreso en México

CONTENIDO

	Presentación	5
I	FUERZAS Y MOVIMIENTO Movimiento: Descripción y Causas	7
	Sistemas de referencia y cantidades cinemáticas	9
	Componentes cartesianos de las cantidades cinemáticas	13
	Ejemplos de: movimiento y cantidades cinemáticas	15
	Sistemas de referencia con movimiento relativo	17
	Leyes de Newton del movimiento y Marcos de referencia inerciales.	20
	Ejemplos de: leyes de Newton y Sistemas inerciales	26
	Ejemplos de Aplicación de la 2a. ley	27
	Deducción del movimiento y condiciones iniciales	27
	Fuerzas de rozamiento	29
	Fuerzas de restricción	30
	Fuerzas de restricción; caso de estudio: movimiento rectilineo de cada masa	31
	Fuerzas de restricción; caso de estudio: movimiento circular.	35
II	TRABAJO Y ENERGIA	47
	Trabajo y Teorema de Trabajo-Energía Cinética	49
	Ejemplos W-T	53
	Energía Potencial	56
	Ejemplos de Energía Potencial	59
	Energía Potencial Total	61
	Ecuación de balance de energía incluyendo fuerzas no conservativas	62
	Ejemplos de: conservación de la energía mecánica	64
	Ejemplos de: cambios de energía mecánica total	66
	Potencia	70
III	ENERGIA ELECTRICA	75
	Potencial eléctrico y energía potencial eléctrica	77
	Ejemplos de: potencial eléctrico	79
	Balance de energía en presencia de un campo electrostático	81
	Fuentes de fem ideales	82
	Corriente eléctrica	84
	Potencia entregada por una fuente de fem	86
	Ley de Ohm	87
	Resistencia equivalente o efectiva	89
	Potencia absorbida por un sistema con resistencia R	90
	Resistencia interna de una fuente de fem real	91
	Corrientes, balance de energía en circuitos eléctricos y leyes de Kirchoff	92
	Ejemplo: máxima potencia que puede entregar una fuente de fem real	95
	Método de mallas para un circuito	
	Ejemplos varios	97

PRESENTACIÓN

El principal interés para la elaboración de estas notas ha sido el de tener en un solo cuaderno los temas que abarca este curso, al nivel adecuado y tratando de tener un equilibrio entre la teoría fundamental presentada y los ejemplos y discusión de apoyo. Se ha intentado conservar un estilo uniforme a lo largo de este trabajo, tratando de ser breve y de pasar a los apéndices los temas que podrían distraer al lector de los objetivos fundamentales del curso.

El autor se ha basado para la forma y contenido de los temas aquí tratados, en las notas anteriores, en valiosos comentarios de profesores del Area de Física y en su propia experiencia a través de la impartición de esta materia.

Agradezco a todos ellos, al Prof. J. A. Rocha M. por el apoyo brindado, y también a la Profa. Elia Benitez M. por su especial y paciente discusión de los manuscritos.

Las secciones de ejercicios al final de cada unidad fueron preparadas por los profesores: unidad I - V. Gaftoi, unidad II - N. Falcón, unidad III - J. Quintanilla, G. González y R. Vázquez A.

La teoría expuesta en estas notas fue preparada por el prof. M. Ricardo Vázquez A.

I FUERZAS Y MOVIMIENTO
Movimiento: Descripción y Causas

SISTEMAS DE REFERENCIA Y CANTIDADES CINEMÁTICAS

En la experiencia cotidiana, cuando se dice que un cierto objeto se ha movido, generalmente estamos dando a entender que este movimiento se ha efectuado respecto algún otro cuerpo.

Debe resultar claro que realmente nunca podemos hablar del movimiento de un cuerpo respecto un punto "abstracto" del espacio. Siempre, explícita o implícitamente, hay un cuerpo de referencia.

Cualquier cuerpo nos puede servir para este objetivo, pero ¿hay algún cuerpo preferible sobre todos los demás, en rigor? NO, porque p. ej. un edificio se mueve respecto el centro de la tierra, el mismo centro de la tierra se mueve respecto el sol y las estrellas, el sol se mueve ... etc., etc.

Precisemos, pués el concepto de posición y movimiento en Física.

En primer lugar, se debe describir el movimiento o posición de un cierto cuerpo, como resultado de mediciones efectuadas después de elegir a algún otro cuerpo como referencia

Para poder definir bien la orientación de alguna recta sólo en base a este cuerpo, es necesario que fijos a él haya un conjunto suficiente de puntos distinguibles.

Cuando tenemos un cuerpo o conjunto de cuerpos y suficientes puntos distinguibles referidos a ellos, decimos que tenemos un Marco de Referencia.

Ejemplos de Marcos de Referencia: El marco fijo a un edificio, el fijo a un auto en movimiento respecto una carretera, el fijo al centro de la tierra y a las estrellas lejanas, el fijo al centro del sol y a las estrellas lejanas, etc.

Una vez que tenemos definido un Marco o Sistema de Referencia, podemos continuar en nuestro propósito de definir posición, movimiento, y otros conceptos asociados a estos. Estableceremos la restricción de que las mediciones necesarias de distancias ángulos y tiempos, se deducen de la utilización de instrumentos en reposo respecto el Marco de Referencia.

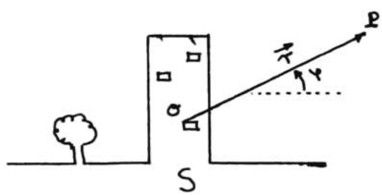
Hay muchas maneras posibles de definir en base a <u>mediciones</u> la localización de un cuerpo puntual P <u>respecto</u> a este Marco de Referencia "S".

Por ejemplo, hay una infinidad de diferentes Sistemas de Coordenadas fijas a este marco S.

Pero independientemente de un sistema de coordenas en particular, estableceremos el concepto muy útil también, de "vector de posición".

Con este propósito elejimos un punto O fijo a nuestro marco S, al que llamaremos "origen". Es claro que con mediciones efectuadas tomando como referencia sólo el conjunto de cuerpos o marco S, se puede definir sin ambiguedad el segmento de recta dirigido $\vec{OP}$ en un instante t cualquiera de tiempo, donde P es un cuerpo puntual o "punto". El conjunto de segmentos de recta dirigidos, medidos todos respecto a un marco S, satisface la definición de espacio vectorial. Es decir, en palabras más útiles para nosotros, es un conjunto de vectores. Podemos sumarlos entre ellos y multiplicarlos por números. Esta propiedad será útil para definir más adelante velocidad y aceleración respecto de S.

Definimos como vector de posición $\vec{r}$ del cuerpo puntual P en un instante dado, al vector $\vec{r}/S = \vec{OP}/S$ = segmento de O en el instante t a P en el mismo instante, (según es determinado con mediciones respecto de S).



La trayectoria la definimos como la función "$\vec{r}(t)$". "vector de posición en términos del tiempo t".

El desplazamiento de P entre t_1 y t_2 , $\vec{\Delta r}$ es el vector $\overrightarrow{P_{t_1}P_{t_2}}$.

La velocidad media $\bar{\vec{V}}$ la definimos en Física formalizando la idea usada en el uso cotidiano. Decimos simplemente, que la velocidad media $\bar{\vec{V}}$ (respecto de cierto marco S) que ha tenido P entre los instantes t_1 y t_2, es el vector medio de desplazamiento ocurrido por unidad de tiempo:

$$\bar{\vec{V}}_{t_1,t_2} := \frac{\overrightarrow{P_{t_1}P_{t_2}}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

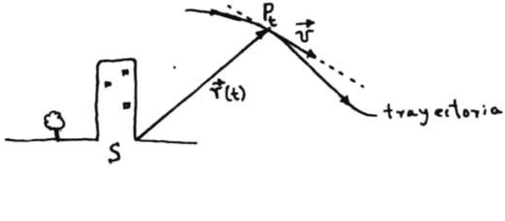
Mide la rapidez media y dirección del movimiento que <u>ha ocurrido</u> entre <u>dos</u> instantes t_1 y t_2.

De manera semejante formalizamos en Física la noción de <u>velocidad</u> $\vec{V}$ (o "velocidad instantánea"):

$$\vec{V} := \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Observe oue la podemos describir diciendo que es la rapidez con que <u>está</u> cambiando la posición, en cierto instante,

También observe que es el límite de la velocidad media cuando ambos instantes tienden a coincidir. Y en base a esto último podemos ver que <u>el vector $\vec{V}$ en el instante t es tangente a la trayectoria con el punto $\vec{r}(t)$</u> (ver figura).



También la misma velocidad de una partícula puede variar en el tiempo. Por ejemplo, aún cuando una partícula tenga $||\vec{V}||$ constante, la dirección de $\vec{V}$ puede estar variando contínuamente.

A la cantidad que mide la rapidez de la variación en el tiempo de la velocidad se le llama aceleración. Formalmente y en analogía con las definiciones de $\bar{\vec{V}}$ y $\vec{V}$ definimos:

$$\text{aceleración media} = \bar{\vec{a}}_{t_1,t_2} := \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_1) - \vec{V}(t_2)}{t_2 - t_1}$$

$$\text{aceleración (instantánea)} = \vec{a} := \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Estos conceptos son los fundamentales, y a estas cantidades se les llama "cinemáticas".

Se acostumbra utilizar "/S" para indicar una cantidad medida respecto un marco S de referencia.

CUADRO RESUMEN

cantidad	media	instantánea
velocidad	$\bar{\vec{V}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
aceleración	$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

<u>Todo respecto de cierto marco de referencia S.</u>

COMPONENTES CARTESIANOS DE LAS CANTIDADES CINEMATICAS

Dado un cuerpo o un Marco de Referencia, podemos definir y fijar a él una infinidad de diferentes sistemas de coordenadas.

En este curso serán especialmente útiles los sistemas cartesianos de coordenadas. Nuestro objetivo en esta sección es plantear las componentes en los ejes cartesianos "x" "y" y "z" de las cantidades cinemáticas: $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$.

Si el origen de coordenadas coincide con el origen "O" empleado para definir el vector de posición, entonces $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición de un punto P respecto a S, "x,y,z" son las coordenadas cartesianas de posición del punto P y los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ apuntan en la dirección de los ejes "x", "y" y "z", respectivamente.

Entonces tenemos que las componentes del vector desplazamiento $\Delta\vec{r}_{t_0 \to t_1}$ son:

$$\Delta x = x_{t_1} - x_{t_0},\ \Delta y,\ \Delta z$$

, por lo tanto las componentes de la velocidad media serán:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t},\ \bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t},\ \bar{v}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

y análogamente tendremos:

componentes de $\vec{v}$: $v_x = \frac{dx}{dt}$, similar para "y" y "z"

componentes de $\bar{\vec{a}}$: $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$, similar para "y" y "z"

componentes de $\vec{a}$: $a_x = dvx/dt$, similar para "y" y "z"

Esta misma información se puede expresar vectorialmente, por ejemplo:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = dx/dt\hat{\imath} + dy/dt\hat{\jmath} + dz/dt\hat{k}$$

$$\vec{a} = d^2x/dt^2\hat{\imath} + d^2y/dt^2\hat{\jmath} + d^2z/dt^2\hat{k}$$

Obsérvese que si se empleara un sistema de coordenadas distinto, p. ej. un sistema S'{x'y'z'} girado respecto el sistema S {x y z}, las componentes respecto a S' de los mismos vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$, serían distintas que las componentes respecto a S.
La importancia de las anteriores "ecuaciones en componentes" radica en que permite utilizar el cálculo diferencial para calcular la velocidad y la aceleración dada la trayectoria $\vec{r}(t)$, o viceversa, dada la aceleración $\vec{a}(t)$, usar el cálculo integral para obtener la velocidad y la trayectoria.

EJEMPLOS DE MOVIMIENTO Y CANTIDADES CINEMÁTICAS

1. En un parque de diversiones hay un tiovivo en el que una persona describe ángulos iguales en tiempos iguales respecto al piso, y su distancia R al centro del tiovivo es constante. ¿Cuáles son las funciones $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ respecto un marco fijo al piso?

Resolución:

a) Elija un sistema de coordenadas fijo al piso, con eje z vertical, y con origen en el centro del tiovivo. Defina a θ como el ángulo entre el vector de posición $\vec{r}$ (ver figura) y el eje x. En este caso $r = R\cos\theta\hat{\imath} + R\mathrm{sen}\theta\hat{\jmath}$.

b) Dese cuenta que si "describe ángulos iguales en tiempos iguales" se sigue que el ángulo θ varía linealmente con el tiempo, o sea:

$\theta = \theta_0 + wt, \quad \theta_0 = \text{cte}, \quad w = \text{cte}$

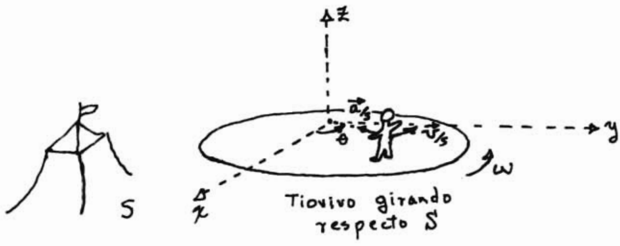
c) Observe que una vez dada la función $\theta(t)$ (inciso b), ha quedado completamente definida la función trayectoria de la partícula $\vec{r}(t)$ usando al inciso a). Así pues derive respecto al tiempo para obtener la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración. Reagrupe términos y concluya:

$\vec{v} = wR\hat{\theta}$, $\vec{a} = -w^2 R\hat{r}$

dónde $\hat{\theta}$ = vector unitario tangente a la trayectoria (en dirección del ángulo θ creciente)

$\hat{r}$ = vector unitario en dirección del centro a la posición de la partícula.

d) Re-interpretación física del resultado: "Respecto al marco fijo al piso, la velocidad de la partícula es constante en magnitud con valor wR, y la aceleración de la partícula también tiene magnitud constante pero con valor w^2R y va dirigida de la posición en un instante dado <u>hacia el centro</u> del círculo descrito".



2. Un vagón se desplaza en línea recta respecto al piso, hacia el Oeste, distancias iguales en tiempo iguales a razón de 2 metros cada minuto. Un insecto sobre el vagón recorre distancias iguales en tiempos iguales sobre una línea recta dibujada sobre él, hacia el Norte, a razón de 1 cm. cada segundo. Después de elegir un sistema de ejes fijos al piso S encuentre:

   a) La trayectoria $\vec{r}(t)/S$ del insecto.

   b) Su $\vec{v}/S$ y $\vec{a}/S$.

<u>Respuestas</u>:

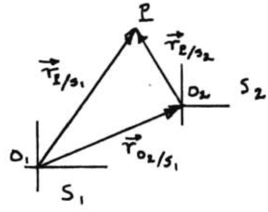
   a) Si el origen 0 se elige en la posición del insecto en t=0:

   $$\vec{r}/S(t) = 2\frac{m}{minuto}t\ \hat{Oeste} + 0.60\frac{m}{minuto}\ t\ \hat{Norte}$$

   b) $$\vec{v}/S = 2\ \frac{m}{minuto}\ \hat{Oeste} + 0.60\ \frac{m}{minuto}\ \hat{Norte}$$

   $$\vec{a}/S = \vec{0}$$

SISTEMAS DE REFERENCIA CON MOVIMIENTO RELATIVO



Supongamos que se observa el movimiento de un ave a la vez desde un vagón de ferrocarril en movimiento y desde un edificio. ¿Coinciden los vectores velocidad medidos? ¿si no coinciden, qué relación hay entre velocidad y aceleración observados (medidos) desde el vagón y desde el ferrocarril?. Veremos a continuación una manera de responder a ésto.

Para simplificar y a la vez tratar de una manera general nuestro argumento, llamaremos simplemente a un sistema de referencia S_1 y al otro S_2.

Denotemos por "/S" a las cantidades medidas respecto al sistema S de referencia. En este caso tenemos que la relación entre los vectores de posición del <u>mismo</u> punto P <u>medidos</u> respecto S_1 y respecto S_2, está dada por:

$$\vec{r}_{P/S_1} = \vec{r}_{P/S_2} + \vec{r}_{O_2/S_1} \qquad (1.a)$$

La relación entre las velocidades y las aceleraciones se encuentra derivando la anterior ecuación respecto al tiempo. Obtenemos pues:

$$\vec{v}_{P/S_1} = \vec{v}_{P/S_2} + \vec{v}_{O_2/S_1} \qquad (1.b)$$

$$\vec{a}_{P/S_1} = \vec{a}_{P/S_2} + \vec{a}_{O_2/S_1} \qquad (1.c)$$

Así vemos, que en general, la velocidad del mismo cuerpo tal y como es medida respecto un sistema de referencia S, no coincide con la medición efectuada desde otro sistema de referencia. Tampoco hay coincidencia en la medición de la aceleración.

Por otro lado, si se conoce cómo se mueve un sistema S' respecto S, entonces sí es posible mediante 1.b y 1.c, deducir cual sería el resultado de la medición de velocidad y aceleración respecto del otro sistema de referencia.

Por ejemplo, si un vagón de ferrocarril se mueve de Sur a Norte con una velocidad constante de 100 Km/hr. respecto tierra, y si desde este vagón se mide la velocidad de un ave y resulta ser de 50 Km/hr en cierto instante en dirección exactamente Este, entonces la velocidad del ave en ese mismo instante es de 111.80 Km/hr. respecto la sup. terrestre, con una dirección de 30° girados desde el Norte hacia el Este. La aceleración coincidiría pues el vagón tiene por hipótesis aceleración nula respecto la superficie terrestre.

A partir de las ecs. 1 (a, b, y c) podemos relacionar las componentes de los vectores en {x y z}. Para ésto, sin embargo, es necesario establecer además del movimiento de O_2 respecto S_1, una información acerca de si el sistema (o cuerpo) S_2 gira o no alrededor de su centro O_2, según lo vé el sistema S_1.

Veremos aquí sólo el caso simple en que según S_1, el marco S_2 no gira alrededor de su origen O_2. En este caso y sólo para simplificar, podemos pensar que en cierto instante los ejes cartesianos de S_2 y S_1 son paralelos. Entonces, puesto que S_2 no gira alrededor de O_2 según lo ve S_1, los ejes cartesianos serán paralelos en todo instante.

Es decir:

$$\hat{\imath}_1 = \hat{\imath}_2 \qquad \hat{\jmath}_1 = \hat{\jmath}_2 \qquad \hat{k}_1 = \hat{k}_2 \tag{2}$$

y podemos llamar a estos tres vectores $\hat{i}$ $\hat{j}$ y $\hat{k}$, simplemente.

Entonces de la ec. 1.a:

$$x_{P/1}\hat{\imath}_1+y_{P/1}\hat{\jmath}_1+z_{P/1}\hat{k}_1=x_{P/2}\hat{\imath}_2+y_{P/2}\hat{\jmath}_2+z_{P/2}\hat{k}_2+x_{O_2/1}\hat{\imath}_1+y_{O_2/1}\hat{\jmath}_1+z_{O_2/1}\hat{k}_1$$

, pero debido a (2):

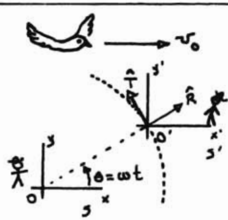
$x_{P/1} = x_{P/2} + x_{O_2/1}$ (...idem para y , z) ... (1.a)'

y análogamente:

$v_{xP/1} = v_{xP/2} + v_{xO_2/1}$ (...idem para ejes {y,z}) ...(1.b)'

$v_{xP/1} = a_{xP/2} + a_{xO_2/1}$ (...idem para ejes {y,z}) ...(1.c)'

<u>Ejemplos:</u>



1. Supongamos que O' describe una circunferencia de radio R respecto S, con velocidad angular ω.

   Un ave se mueve con velocidad v_o constante respecto a S.

   ¿Cuál es la velocidad y aceleración del ave según es medida por S'?.

<u>R</u>. En este caso (ver figura)

$$\vec{v}_{O'/S} = \omega R \hat{T}$$

$$\vec{a}_{O'/S} = -\omega^2 R \hat{R}$$

y entonces (despejando de 1.b y 1.c):

$$\vec{v}\ \text{ave}_{/S'} = v_o\hat{\imath} - \omega R \hat{T} = (v_o + \omega R \,\text{sen}\, \theta)\hat{\imath}' - \omega r \cos \theta \hat{\jmath}'$$

$$\vec{a}\ \text{ave}_{/S'} = \vec{0} - (-\omega^2 R \hat{R}) = \omega^2 R \hat{R} = \omega^2 R \cos \theta\, \hat{\imath}' + \omega^2 R \,\text{sen}\, \theta\, \hat{\jmath}'.$$

LEYES DE NEWTON DEL MOVIMIENTO Y MARCOS DE REFERENCIA INERCIALES

Nuestro objetivo en esta sección es enunciar y discutir las Leyes de Newton del movimiento.

Esta ley puede ser anticipada o sospechada hasta cierto punto después de una consideración detenida de nuestra experiencia cotidiana.

Es necesario tener en cuenta que la descripción del movimiento depende del marco de referencia.

¿Cuál es el marco que resulta más adecuado para movimientos cercanos a la superficie terrestre, es decir, movimientos cotidianos?

Nuestra experiencia nos parece indicar que el marco cercano a nosotros y fijo a edificios u objetos en reposo respecto la superficie terrestre, debe ser el indicado.

Aceptemos provisionalmente ésto como un primer punto de partida.

De nuestra experiencia cotidiana podemos extraer algunos hechos relevantes.

1) El movimiento de "proyectiles" queda determinado no sólo por su posición en un instante dado, sino también por su velocidad inicial $\vec{v}$.

2) Cuando sobre un móvil como una esfera o una locomotora ya no actúa su fuerza impulsora, aún así tienda a conservar la velocidad que tenía inicialmente (se llama propiedad de inercia).

3) ¡es más fácil detener a una esfera que a una locomotora!, y también es más fácil mover a la primera que a la segunda. Parece ser, pues que:

"otros cuerpos ejercen una acción sobre uno dado, si están en contacto. Además esta acción tiende a producir un cambio en la velocidad". A esta acción o agente que modifica al movimiento le llamaremos "fuerza".

¿Pero entonces, cómo explicaríamos que un proyectil sin estar en contacto con otro cuerpo tiende a aumentar su velocidad en la dirección vertical hacia abajo?.

Si queremos mantener nuestro anterior punto de vista sobre cual es el efecto de una fuerza, debemos aceptar que sobre el proyectil actúa una fuerza. Más aún, podríamos pensar que esta fuerza actúa aún cuando el proyectil descansa ya sobre la superficie terrestre, pero que en este caso el piso la contrarresta.

Así podríamos decir que cuando se empuja a un cuerpo sobre un plano horizontal lo que sucede es que se ejerce una fuerza horizontal no balanceada, mientras que en la dirección vertical las fuerzas se contrarrestan.

Esto nos lleva a pensar que las fuerzas se superponen si están en direcciones perpendiculares sin influir una componente a la otra. En otras palabras, se comportan como cantidades vectoriales.

¿Cuál podrá ser la naturaleza de la fuerza sobre un proyectil?.

¿Existen algún otro tipo de observaciones físicas que corroboren la existencia de esta fuerza?. Aquí es donde puede surgir a nuestra consideración el movimiento planetario.

Podría ser que la luna girase respecto a la tierra por la acción del mismo tipo de fuerza que atrae a un proyectil.

Pero entonces tendríamos que aceptar que esta fuerza se ejerce entre todos los cuerpos. En particular, ¿No será la acción de esta fuerza entre el sol y los planetas la explicación del movimiento observado de estos?

Así pues, surge la necesidad de considerar un marco de referencia apropiado para analizar el movimiento del sol y los planetas.

Curiosamente, la tierra ya no resulta un marco adecuado, respecto a ella el movimiento observado es demasiado complicado. Y no es razonable por tanto, tratar de establecer un "orden" o luz si nos basamos en este marco. ¿Por qué para nuestra experiencia cotidiana fue tan "bueno" y ahora no?. Tal vez ésto esté asociado con el hecho de que los fenómenos cotidianamente observados cercanos a nosotros transcurren en tiempos y distancias muy pequeños respecto al movimiento planetario.

Consideremos pues, que según observaciones astronómicas muy detalladas y cálculos matemáticos cuidadosos, efectuados por mencionar a algunos, por Copérnico, Kepler, Brahe, Galileo, se deduce que el movimiento de los planetas es relativamente sencillo si se describe respecto un marco centrado en el sol y con ejes fijos respecto a las estrellas lejanas. Llamaremos a este marco S_o.

De hecho los planetas y la tierra misma describen elipses con el sol como foco, respecto este marco.

De acuerdo con los datos astronómicos, se puede encontrar mediante cálculos que respecto a S_o, la aceleración $d\vec{v}/dt$ de los planetas siempre va dirigida hacia el foco de la elipse, donde está el sol. Esto concuerda con las apreciaciones anteriores que las fuerzas sobre un cuerpo determinan cambios en la velocidad $\vec{v}$, es decir, determinan $d\vec{v}/dt$, y de que existe una fuerza de atracción entre los cuerpos, por ejemplo, el sol etrae a los planetas.

Pero tadavía queda algo que debemos responder: ¿Por qué el marco fijo respecto la superficie terrestre aparentemente es adecuado para describir los fenómenos cotidianos, pero no el movimiento planetario?. Probablemente ésto se deba a que a pesar de que la tierra se mueve y gira respecto el marco S_o, la aceleración de ella respecto S_o es muy pequeña.

Más aún, ahora podemos establecer de una manera un poco más precisa qué queremos entender por "marco adecuado". Estos deberán ser aquellos en los que al suponer que la fuerza neta sobre un cuerpo determina por completo a la aceleración $d\vec{v}/dt$, las conclusiones sobre la trayectoria concuerdan con las observaciones físicas.

A estos marcos les llamamos inerciales, puesto que en ellos un cuerpo con fuerza neta pequeña debe tender a moverse con velocidad constante.

¿Pero qué hay acerca de nuestra apreciación anterior acerca de la locomotora y la esfera?

Podríamos decir que el efecto de una fuerza queda determinado no sólo por la magnitud de la fuerza sino también por una cantidad asociada al cuerpo y que mida de alguna manera la resistencia del objeto a variar su velocidad.

Nuestra experiencia nos hace ver que en cierta forma esta cantidad debe estar conectada con el "tamaño" del objeto.

Aceptando la existencia de esta cantidad le llamaremos masa.

Así podemos decir, que en un marco de referencia inercial, la aceleración $\vec{a}$ de un objeto debe ser proporcional a la fuerza aplicada $\vec{F}$ e inversamente proporcional a la masa M de este objeto.

Probablemente, razonamientos similares fueron los que llevaron a Newton a proponer sus "Leyes del Movimiento". A continuación se presenta un conjunto de postulados que corresponde a estas leyes, esperando que la discusión previa nos ayude a entender y a aceptar su contenido.

Una Presentación de Las Leyes de Newton del Movimiento

1. Existe una cantidad que llamaremos masa asociada a cada cuerpo.
2. Cada fuerza que actúa sobre un cuerpo tiene su origen en algún otro.
3. La fuerza resultante sobre un cuerpo es la superposición (vectorial) de todas las fuerzas que actúan sobre él.
4. Existe al menos un sistema o Marco de Referencia que se extiende en todo el espacio y bien definido en todo instante respecto los objetos físicos, al que llamaremos <u>inercial</u>, y tal que <u>en él</u> (después de establecer un cierto sistema de unidades de medición de masa, distancia, tiempo y fuerza) <u>se cumple</u>:
5. <u>1a. Ley de Newton</u>: Todo cuerpo permanece con su velocidad vectorial constante mientras la fuerza neta que actúe sobre él sea nula.

   <u>2a. Ley de Newton</u>. Una fuerza neta $\vec{F}$ sobre un cuerpo cambia la velocidad de éste en cada instante de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

   <u>3a. Ley de Newton.</u> Si la fuerza neta que un cuerpo ejerce sobre otro es $\vec{F}$, la fuerza neta que el segundo ejerce sobre el primero es $-\vec{F}$.

Como complemento podemos establecer las siguientes observaciones o énfasis.

i) Así enunciados, los párrafos (5) <u>sólo son válidos</u> en un Marco o Sistema de Referencia Inercial.

ii) Un marco de referencia es <u>aproximadamente</u> inercial si en él son casi válidas las Leyes de Newton en los fenómenos observados hasta cierto tiempo y hasta ciertas distancias. Un marco en reposo respecto la superficie terrestre es aproximadamente inercial.

iii) Las masas de los cuerpos se miden de manera muy diferente, según el cuerpo. Así por ejemplo se usa un procedimiento distinto para medir la masa de un electrón, de un litro de agua, de un planeta o de una estrella. Así pues, aquí proponemos como el concepto general de masa aquella cantidad que al asignarse a un cuerpo en la 2a. Ley de Newton concuerda adecuadamente con su movimiento.

iv) Si un marco de referencia se mueve con velocidad uniforme y constante respecto uno inercial, también es inercial. Esto se debe a que entonces la aceleración medida de un cuerpo, en ambos marcos es la misma.

v) Debido a que las fuerzas entre los cuerpos son cantidades que sólo dependen de la relación física entre los cuerpos mismos, el diagrama de cuerpo libre de un cierto objeto es el mismo en todo marco de referencia, inercial o no.

vi) En un cuerpo extenso que gira respecto un S.I. de referencia, diferentes puntos de él tienen diferentes velocidades y aceleración. En este caso la ecuación $\vec{F} = M\vec{a}$ es válida pero ahora aplicada al centro de masa* del cuerpo.

* Esto se demuestra en el siguiente curso de Física: "DINAMICA".

1. Un observador que va dentro de la cabina de un movil cercano a la superficie terrestre escoge un sistema de ejes cartesianos, x-y fijos a él, hace el experimento de soltar un objeto de masa m y <u>mide</u> su trayectoria x(t), y(t).

   Obtiene:

$$x(t) = x_o - (0.7\ m/S^2)t^2 \qquad (A)$$
$$y(t) = y_o - (6.0\ m/S^2)t^2$$

¿Puede el observador a partir de ésto decir si el marco x-y fue inercial?

R. El observador sabe que una vez que ha sido soltada la partícula esta estará sujeta sólo a la fuerza mg, así pues concluye que si el marco x-y fuese inercial entonces habría medido para x(t) y y(t) los valores:

$$x_o + \frac{1}{2} g_x t^2 \quad , \quad y_o + \frac{1}{2} g_y\ t^2$$

respectívamente.

Por lo tanto él puede ver si x-y es inercial vía la pregunta

$$\sqrt{g_x{}^2 + g_y{}^2} \stackrel{?}{=} g$$

$$\sqrt{\left[2(0.7\ \frac{m}{S^2})\right]^2 + \left[2(6.0\ \frac{m}{S^2})\right]^2} \stackrel{?}{=} 9.81\ m/S^2$$

$$12.08\ \frac{m}{S^2} \stackrel{?}{=} 9.81\ m/S^2$$

De esta manera concluye que x-y fijo a la cabina <u>no fue</u> un marco inercial.

2. EJEMPLOS DE APLICACION DE LA 2a. LEY

DEDUCCION DEL MOVIMIENTO Y CONDICIONES INICIALES

Usando la 2a. Ley de Newton es posible deducir la trayectoria que seguirá un cuerpo. En esta sección veremos este proceso en un caso especialmente sencillo.

Consideremos que la fuerza <u>resultante</u> $\vec{F}$ sobre una masa m es <u>constante</u>.

En lo que sigue supondremos que nuestro marco de referencia es uno <u>inercial</u>.

La 2a. Ley nos indica entonces que la aceleración a es constante y de valor

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

por otro lado, sabemos que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \vec{a} \ (=\text{cte})$$

y entonces se deduce que

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_o, \text{ con } \vec{v}_o = \text{cte}$$

Al aplicar la definición de velocidad $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$, deducimos que la trayectoria "$\vec{r}(t)$" esta dada por:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + v_o t + \vec{r}_o \quad ; \vec{r}_o = \text{cte}$$

La interpretación física de las "constantes de integración" $\vec{v}_o$ $\vec{r}_o$ es clara al evaluar en t = 0 las dos funciones anteriores, obteniendo.

$\vec{v}_o = \vec{v}(t = o)$ = velocidad en instante cero.

$\vec{r}_o = \vec{r}(t = o)$ = vector de posición en el instante cero.

Observemos que la trayectoria de la partícula sólo queda determinada, si además de conocer la fuerza resultante en todo tiempo (constante en este ejemplo), se conoce el valor de la posición inicial y velocidad inicial de la partícula. A estas cantidades se les llama, pre cisamente, "condiciones iniciales".

Cuando es lanzado un proyectil, la fuerza resultante (depreciando el efecto del aire) es $m\vec{g}$, que es constante*. Así pues, en este caso:

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_o$$
$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t \quad + \vec{v}_{ot} + \vec{r}_o$$

, donde, recordemos, estas cantidades son respecto un marco de referencia <u>inercial</u>. En este caso podemos, sin mucho error, considerar a la superficie terrestre como este marco.

Si usamos unos ejes cartesianos {x,y} fijos a la superficie terrestre, cuyo plano contiene al vector $\vec{v}_o$ y tal que el eje "y" es vertical hacia arriba, tenemos;

$$v_x = v_{x_o} \qquad ; \; x = v_{x_o}t \; + x_o$$
$$v_y = v_{y_o}gt \qquad ; \; y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y_o}t + y_o$$

Si despejamos t de la ecuación para "x" y sustituímos en la ecuación de "y", observamos que la <u>forma de la trayectoria</u>, dada por la función y(x), es del tipo $y = \text{cte } x^2 + \text{cte } x \; + \text{cte}$

y así pues, concluímos que esta forma es parabólica. A este movimiento se le llama <u>tiro parabólico</u>. Esta parábola se reduce a una recta cuando v_{x_o} es nula.

Al caso $\vec{v}_o = \vec{0}$ se le llama <u>caída libre</u>.

Regresemos al caso general. Vimos que si la fuerza resultante $\vec{F}$ aplicada sobre un cuerpo es constante entonces:

$$\vec{v} = \vec{a}t \; + \vec{v}_o.$$
$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_ot + \vec{r}_o, \text{ con } \vec{a} = \vec{F}/m = \text{cte}.$$

Observemos que si el vector $\vec{v}_o$ es colineal a la aceleración $\vec{a}$, entonces el movimiento (respecto nuestro sistema inercial) tiene lugar en una línea recta. A éste caso se le llama <u>movimiento rectilíneo acelerado</u>.

FUERZAS DE ROZAMIENTO

Ya en el curso de Fuerza y Equilibrio se estudió la fuerza de rozamiento estática. Esta fuerza es una fuerza de contacto en dirección tangencial a las superficies en contacto, y cuya magnitud f_s obedece la siguiente relación con la fuerza de contacto en dirección normal N:

$$f_s \leq \mu_s N$$

dónde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático entre estas superficies. Esta fuerza actúa cuando no hay movimiento (velocidad) relativo entre las superficies en contacto.

Cuando las superficies en contacto se desplazan entre sí, es decir, cuando tienen velocidad relativa no nula, se ejercen fuerzas de rozamiento cinético.

La magnitud f_c de esta fuerza de rozamiento está asociada a la fuerza de contacto normal N vía la siguiente ecuación:

$$f_c = \mu_c N$$

donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético.

En este caso, el valor de N determina el valor de f_c. La dirección de esta fuerza de rozamiento es tal que se opone al movimiento relativo entre las dos superficies. Esto se puede expresar con la ecuación:

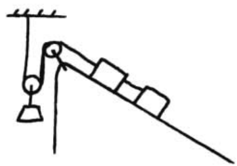
$$\hat{f}_{c\ \text{sup 2}\rightarrow\text{superficie 1}} = -\hat{v}_{\text{superficie 1/superficie 2}}$$

FUERZAS DE RESTRICCIÓN

Consideremos un conjunto de masas puntuales ligadas entre sí y restringidas a moverse c/u en una sola dirección. Un ejemplo puede ser una o varias masas sobre un plano inclinado ligadas por cuerdas y poleas entre sí y posiblemente con el plano mismo. Otro ejemplo puede ser cuatro masas puntuales en los vértices de un marco cuadrado metálico, girando todo en un plano horizontal sin rozamiento.
En estos casos, son las fuerzas que ejercen las cuerdas, varillas, planos inclinados, etc., las que restringen a que el movimiento sea con distancia fija a un centro de giro, o con distancia fija entre masas, o en dirección de cierto plano inclinado, etc.
A estas fuerzas se les llama de Restricción.
Por ejemplo; las tensiones en unas cuerdas o barras, las fuerzas de contacto normales, son fuerzas de restricción.
Una aplicación importante de las leyes del movimiento consiste, precisamente, en poder determinar el valor de las fuerzas de restricción que aparecen entre las diferentes partes de un mecanismo o sistema físico dado.
La tensión máxima que sufrirá un cable de un elevador, determina la elección del material y dimensiones de este cable, p. ej. Los esfuerzos o fuerzas de restricción que aparecen entre las diferentes partes de un automóvil, cuando éste se mueve violentamente (respecto un S.R.I.) imponen condiciones de diseño sobre dicho auto.
En este curso aprenderemos, por medio de algunos ejemplos, a calcular las fuerzas de restricción en casos relativamente sencillos.

FUERZAS DE RESTRICCION; CASO DE ESTUDIO: MOVIMIENTO RECTILINEO DE CADA MASA

Estamos en esta situación cuando las condiciones iniciales o las conexiones y contactos entre las masas que forman al sistema,son tales que, c/u de estas masas se mueve en una cierta línea recta fija al sistema de referencia (edificio, elevador o superficie terrestre) y además, si el desplazamiento de una sola de las masas determina completamente el desplazamiento de todas las demás.
Un caso típico es el de la figura.



En este curso consideraremos que todas las cuerdas y poleas son de masa despreciable y todas las cuerdas son inextensibles.
Una forma general de resolver estos problemas consiste en:

i) Plantear los D.C.L. para c/u de las poleas y masas.
En estos diagramas aparecen tanto las fuerzas de restricción, que tienen valor "desconocido", como fuerzas de valor conocido (p. ej. el peso $m\vec{g}$). También aparecen las fuerzas de rozamiento.

ii) De cada D.C.L., plantear las componentes cartesianas de la ec. de 2a. Ley $\vec{F} = m\vec{a}$, usando en cada diagrama, como uno de los ejes la dirección en que tiene lugar el movimiento según nuestro marco de referencia. El otro eje irá perpendicular a éste.

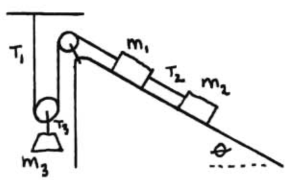
iii) Plantear las ecuaciones de información cinemática adicional p. ej. asociada a la presencia de poleas y cuerdas, o a la aceleración del marco de referencia respecto un S.R.I., si está acelerado. Usar que la masa de c/polea es nula. Usar la relación entre las fuerzas de rozamiento y la normal.

iv) Plantear el (ya simplificado mediante iii) sistema de ecuaciones (lineales) simultáneas a resolver. En este paso se debe haber sustituido la aceleración de cada masa por su relación con la aceleración de cierta masa elegida del sistema.

v) Mediante multiplicación por enteros de cada ecuación y suma de todas las ecuaciones, se llega a una ecuación en que la única incógnita es la aceleración de cierta masa (ver (iv)).

vi) Ya despejado el valor de esta aceleración, se usa al conjunto iv) y a las relaciones de iii) para encontrar la aceleración de las otras masas del sistema y el valor de las tensiones (fuerzas de restricción).

Ejemplo:

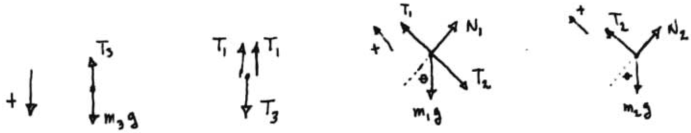


Supóngase que el techo y el plano inclinado son un S.I. de

Referencia.

R:

i) D.C.L.:



"$\longrightarrow$ +" es <u>una dirección de referencia</u>, para usar en ii).

ii) 2a. Ley:

$$m_3 g - T_3 = m_3 a_3$$

$$2T_1 - T_3 = m_{polea}\, a_{polea}$$

$$T_1 - T_2 - m_1 g \text{ sen } \theta = m_1 a_1$$

$$T_2 - m_2 g \text{ sen } \theta = m_2 a_2$$

iii) $a_1 = a_2$; y además debido a que un desplazamiento $\Delta \ell$ del centro de la polea hacia abajo causa un desplazamiento de 2 $\Delta \ell$ de la masa m_1, tenemos:

$$a_1 = 2a_3$$

Por otro lado

$$m_{polea} = 0 \Longrightarrow 2T_1 = T_3$$

iv) Sustituyendo la información de iii) tenemos:

$$m_3 g - 2T_1 = m_3 a_3$$

$$t_1 - t_2 - m_1 g \text{ sen } \theta = 2m_1 a_3$$

$$t_2 - m_2 g \text{ sen } \theta + 2\, m_2 a_3$$

2893222

; multiplicando por 2 la 2a. y 1a. ecuación, y sumando, tenemos:

v) $m_3 g - 2m_3 g \text{ sen } \theta - 2m_2 g \text{ sen } \theta = (m_3 + 4rm_1 + 4rm_2)\ a_3$

$$\Longrightarrow \quad a_3 = \frac{m_3 - 2m_1 \operatorname{sen}\theta - 2m_2 \operatorname{sen}\theta}{m_3 + 4m_1 + 4m_2}\, g = \frac{m_3 - 2(m_1 + m_2)\operatorname{sen}\theta}{m_3 + r(m_1 + m_2)}\, g$$

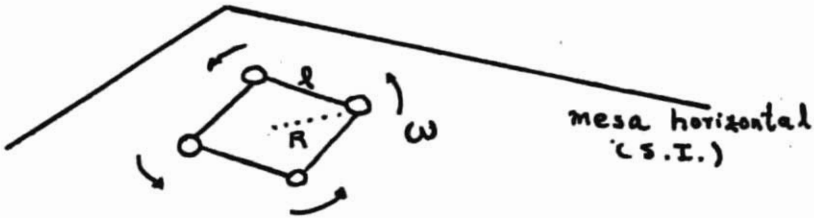
vi) T_2 se despeja de la 3er. ec. de iv) y T_1 de la 2a. Los valores de T_3, a_1 y a_2 se despejan de iii). Este paso vi) es preferible hacerlo numéricamente, ya dados los datos m_1, m_2, m_3 θ; p. ejemplo.

FUERZAS DE RESTRICCION; CASO DE ESTUDIO: MOVIMIENTO CIRCULAR.

En este caso, al menos una de las masas del sistema efectúa un movimiento, respecto al marco S, con distancia constante a cierto centro. Llamaremos R (radio) a esta distancia. Supondremos que esta partícula tiene masa m y velocidad tangencial v en ciento instante.
La componente radial de la aceleración, (respecto S) es decir, la componente de la aceleración en la recta dirigida del centro C a la partícula, vale $a_{r/S} = - v^2/R = -\omega^2 R$
Esta información cinemática es la que se usa para resolver este tipo de problemas. Es decir, después de haber elaborado los D.C.L. para cada masa, en las masas con movimiento ciercular se plantea la componente radial de la ecuación de 2a. Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$/S.I., en donde se sustituye el valor arriba mencionado para $a_{r/S}$
Cuando S es un S.I. de Referencia, lo que nos muestra la ecuación para $a_{r/S}$ es que la fuerza resultante debe tener una componente no nula en dirección de la partícula hacia el centro, en todo instante. A esta componente de la resultante se le llama fuerza centrípeta, y su valor es estonces $mv^2/R = m\omega^2 R$.

Ejemplos:

1. En una mesa horizontal giran sin rozamiento cuatro masas unidas por varillas rígidas de igual longitud y masa despreciable. ¿Cuál es la tensión de c/varilla? Suponga que la mesa está en reposo respecto la superficie terrestre.



R. El D.C.L. de una cualquiera de las masas es:

y entonces:

$$\Sigma F_z = N - mg = ma_{z/S.I} = 0$$

$$\underset{\text{hacia C}}{\Sigma F_{radial}} = 2\ T \cos 45° = ma_{r/S.I.} = m\omega^2 R$$

$$T = m\omega^2 R/(2 \cos 45°)$$

1.4 Problemas

01. Se define un sistema inercial como aquel sistema en el que es válida la primera ley de Newton. Supóngase que un sistema fijo con respecto a las estrellas lejanas es un sistema inercial. Indicar cuáles de los siguientes sistemas son inerciales: a) sistema fijo respecto a la superficie de la Tierra; b) sistema fijo en el Sol; c) sistema fijo en la Luna; d) un sistema moviéndose con velocidad constante respecto a las estrellas lejanas.

02. (Figura 01) Conociendo la gráfica posición-tiempo, identificar las regiones en las que la velocidad instantánea es: a) cero; b) positiva; c) negativa.

03. (Figura 02) Obtener la gráfica posición tiempo si para $t = 0s$, $x = +5m$.

04. (Figura 03) Obtener la gráfica velocidad-tiempo.

05. En una competencia se mide la velocidad de un automóvil cada 2 segundos, obteniéndose los siguientes datos:

t/s	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v/(m/s)	0	3	15	30	45	50	50	40	35	25	20

Obtener: a) la gráfica velocidad-tiempo; b) la aceleración en $t = 16s$; c) un valor aproximado del desplazamiento 20 segundos después de haber arrancado; d) la velocidad media del automóvil durante los primeros 20 segundos.

07. (Figura 04) Se dice que corresponde a la gráfica de un viaje en automóvil. ¿Representa una situación real? ¿Por qué?

08.(Figura 05) Calcular: a) la aceleración instantánea para $t = 3s$; b) la aceleración instantánea para $t = 7s$; c) la aceleración instantánea para $t = 11s$; c) la distancia recorrida en los primeros 5 segundos; e) la distancia recorrida en los primeros 9 segundos.

09.(Figura 06) La gráfica muestra la velocidad a lo largo de una línea recta de un objeto de masa 2 kg en función del tiempo. Obtener: a) la gráfica de la fuerza en función del tiempo; b) la fuerza máxima; c) la fuerza promedio en el intervalo de tiempo de 0 a 10 segundos y de 0 a 20 segundos.

10.(Figura 07) Obtener la distancia recorrida.

11. Una persona de peso W está en un elevador. Determine la fuerza P que ejerce el pasajero sobre el piso del elevador, cuando: a) el elevador está en reposo; b) el elevador sube con la aceleración a; c) el elevador baja con la aceleración $a < g$; d) el elevador baja con la aceleración $a = g$, donde g es la aceleración de la gravedad.

12.(Figura 08) Un bloque de masa $m_1 = 43.8$ kg que descansa en un plano inclinado liso a 30°con respecto a la horizontal, está unico, mediante una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, con otro bloque de masa $m_2 = 29.2$ kg suspendido verticalmente. Calcular: a) la aceleración de cada cuerpo; b) la tensión en la cuerda.

13.(Figura 09) Dos bloques están en contacto en una mesa sin rozamiento. Se aplica una fuerza horizontal a uno de los bloques. Si $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg y $F = 3$ N, a) encontrar la fuerza de contacto entre los bloques; b) demostrar que si se aplica la misma fuerza a m_2 en lugar de hacerlo a m_1, la fuerza de contacto entre los bloques es de 2N, que no es igual al valor obtenido en a) Explicar porqué.

Explicar porqué.

14. Un trozo de hielo resbala por un plano inclinado a 45°en un tiempo doble del que tardaba para resbalar sin rozamiento. Determinar el coeficiente de rozamiento cinético entre el hielo y el plano inclinado.

15. (Figura 10) Considerando el siguiente diagrama fuerza-tiempo, ¿qué interpretación podría dar a la variación de la velocidad?

16. De las siguientes afirmaciones, indicar cuáles son verdaderas: a) un objeto puede tener una velocidad constante a pesar de que su rapidez este cambiando; b) un objeto puede tener una rapidez constante a pesar de que su velocidad esté cambiando; c) un objeto puede tener una velocidad cero a pesar de que su aceleración no es cero; d) un objeto sujeto a una aceleración constante puede invertir su velocidad.

17. Un cuerpo cae verticalmente desde una altura h = 19.6 m con una velocidad inicial igual a cero. Determinar su desplazamiento: a) durante el primer 0.1 segundo de estar en movimiento; b) durante el último 0.1 segundo de su caída. Despreciar la resistencia del aire.

18. Si un cuerpo recorre la mitad de su distancia total de caída libre durante el último segundo de su movimiento a partir del reposo, calcula el tiempo y la altura desde la cual cae. Explicar la solución físicamente inaceptable de la ecuación cuadrática del tiempo.

19. Se dispara un cohete verticalmente y sube con una aceleración vertical constante de 19.6 m/s durante 1 minuto. En este momento agota su combustible y sigue subiendo hasta cierta altura. Calcular: a) la máxima altura que alcanza; b) el tiempo total transcu-

rrido desde el momento en que despega el cohete hasta que regresa al suelo.

20. Un automóvil se desplaza con una velocidad constante de 100 km/h. Un agente de tránsito en reposo lo ve y empieza a acelerar su motocicleta cuando el auto pasa de frente a él. La motocicleta puede acelerar a $6 m/s^2$ y alcanza una velocidad máxima de 150 km/h. ¿Alcanzará al aumovilista? En caso afirmativo ¿Cuánto tiempo tarda y que distancia recorrerá antes de alcanzarlo?

21.(Figura 11) No hay fricción entre los bloques y la mesa. Calcular la tensión en la cuerda y la aceleración de m_2 si m_1=300 g, m_2 = 200 g y F = 0.40 N.

22. Un bloque rectangular de masa m está sobre otro bloque similar que, a su vez, está sobre una mesa lisa. La máxima fuerza de fricción posible de un bloque sobre el otro es de 2.0 mN ¿Cuál es la mayor aceleración posible que se puede dar al bloque inferior, sin que el superior se resbale y caiga? ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre los dos bloques?

23. Considérese un proyectil en el punto más alto de su trayectoria. a) ¿Cual es su rapidez en función v_0 y de θ? b) ¿Cuál es su aceleración ? c) ¿Cómo es la dirección de su aceleración en relación con la de su velocidad?

24. Un rifle que tiene una velocidad de salida de 457 m/s dispara una bala a un blanco pequeño colocado a 45.7 m de distancia. Determinar la elevación del rifle respecto a la horizontal, para que la bala dé en el blanco.

25. Una partícula está en reposo en la parte superior de un hemisferio de radio R. Encontrar la mínima velocidad horizontal que deberá imprimírsele a la partícula para que salga del hemisferio sin resbalar sobre él.

26. En un tubo de rayos catódicos se dispara horizontalmente un haz de electrones con una velocidad de 10^7 m/s en la región situada entre un par de placas horizontales de 0.02 m de largo. Un campo eléctrico entre las placas ejercen sobre los electrones una aceleración constante hacia abajo de magnitud 10^{15} m/s^2. Encontrar: a) el desplazamiento vertical del haz al pasar a través de las placas; b) la velocidad el haz (dirección y magnitud) cuando sale de las placas.

27.(Figura 12) Un muchacho de pie sobre la plataforma de una vagoneta que lleva una velocidad constante de 9 m/s desea lanzar una pelota de forma que pase por un aro colocado a 4.80 m de altura sobre su mano y que lo atraviese horizontalmente. Arroja la pelota con una velocidad de 12 m/s respecto a sí mismo. a) ¿Cuál debe ser la componente vertical de la velocidad inicial de la pelota? b) ¿Cuántos segundos transcurren desde que caiga la pelota hasta que ésta atraviesa el aro? c) ¿A qué distancia horizontal de la vertical del aro debe lanzar la pelota?

28. ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que en una carretera da una vuelta de 110 m de radio con una velocidad de 48.3 km/h?

29. En un parque de diversiones hay un rotor (cilindro hueco que gira alrededor de un eje central), en el cual una persona se para contra la pared. El rotor aumenta gradualmente su velocidad de rotación a partir del punto de reposo, hasta que a una velocidad predeterminada, el piso bajo la persona se abre y el pasajero no cae sino permanece pegado a la pared del rotor. Encontrar el coeficiente de rozamiento necesario para impedir la caída.

30. (Figura 13) Una masa m colocada sobre una mesa sin rozamiento está unida a una masa M suspendida mediante una cuerda que pasa por una agujero en la mesa. Si M está en reposo, encontrar la relación entre v y r, cuando gira la masa.

31. Una curva circular de carretera esta proyectada para vehículos con velocidad de 64.4 km/h. a) si el radio de la curva es de 122 m ¿cuál es el ángulo adecuado de peraltado de la carretera? b) si la curva no esta peraltada, ¿cuál es el mínimo coeficiente entre las llantas y la carretera para evitar que los vehículos se deslicen a esa velocidad?

32. Encontrar la velocidad angular de la Tierra con respecto a su eje (no considere el movimiento de la Tierra alrededor del Sol).

33. Una piedra atada a una cuerda gira uniformemente en un plano vertical. Hallar la masa de la piedra sabiendo que la diferencia entre la tensión máxima y la mínima de la cuerda es igual a 9.8 N.

34. Hallar el valor númerico de la primera velocidad cósmica, es decir, la velocidad que hay que comunicarle a un cuerpo en la superficie de la Tierra, en dirección horizontal, para que comience a moverse alrededor de ésta siguiendo una órbita circular.

35. ¿Con qué rapidez debe volar un avión que describe un círculo perpendicular al suelo 1 km de radio, si el piloto no experimenta ninguna fuerza en el asiento ni en el cinturón de seguridad cuando se halla en el punto más alto del recorrido? En estas circunstancias se suele decir que el piloto no tiene peso.

36. ¿Con qué velocidad angular debe girar la Tierra para que el peso aparente de un cuerpo en el Ecuador sea cero?: b) ¿Cuál sería en este caso la duración de un día?

37. Una pesa atada a un hilo de 30 cm de largo, describe en el plano horizontal circunferencias de 15 cm de radio. ¿Qué número de revoluciones por minuto será el correspondiente a esta velocidad de rotación de la pesa?

38.(Figura 11) La longitud de las varillas de un regulador centrí fugo es igual a 12.5 cm. ¿Qué número de revoluciones por segundo dará el regulador si, al girar, los contrapesos se desvían de la vertical un ángulo a) de 60°y b) de 30°.

39. Los glóbulos rojos y otras partículas suspendidas en la san - gre son tan ligeras que difícilmente se asientan cuando la sangre se deja en reposo. ¿Qué tan rápido (en rev/s) debe rotarse una muestra de sangre en una centrífuga con un radio de 10 cm si la fuerza centrípeta necesaria para retener una de las partículas en una trayectoria circular es 10,000 veces el peso mg de la partí - cula? ¿Por qué las partículas se separan de la solución en una centrífuga?

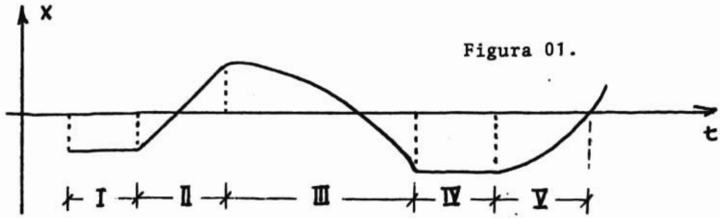


Figura 01.

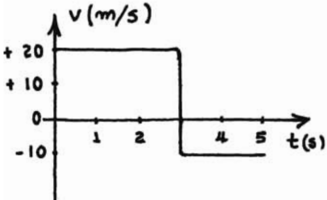


Figura 02.

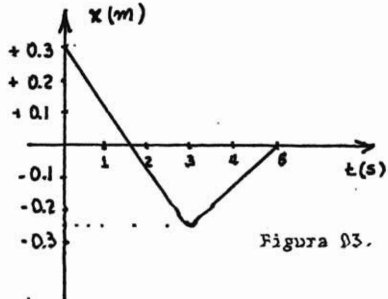


Figura 03.

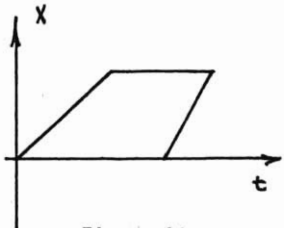


Figura 04.

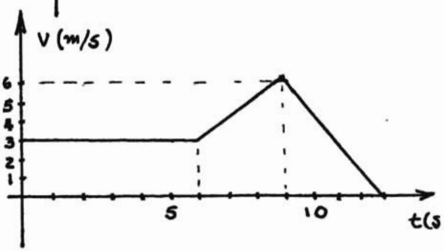


Figura 05.

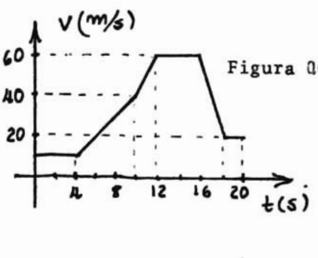


Figura 06.

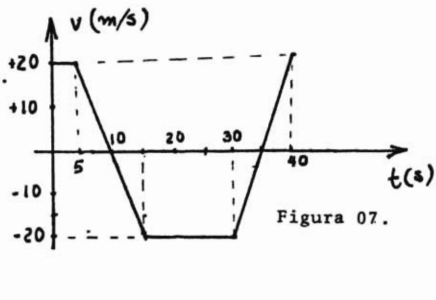


Figura 07.

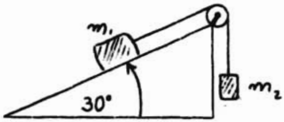


Figura 08

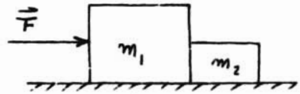


Figura 09.

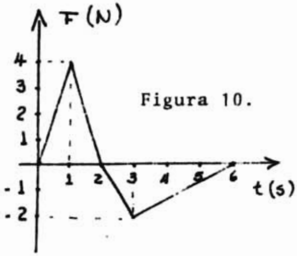


Figura 10.

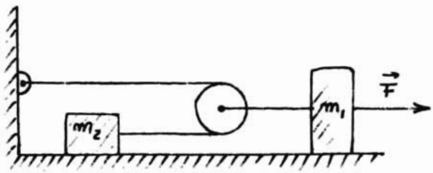


Figura 11.

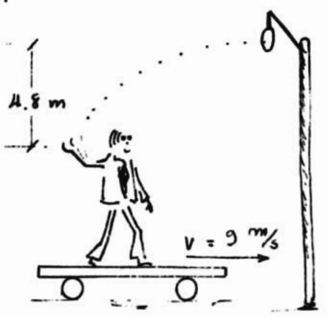


Figura 12.

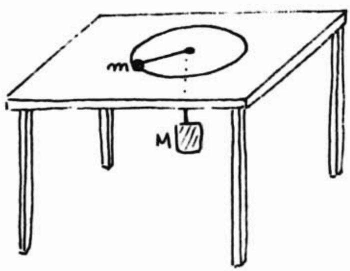


Figura 13.

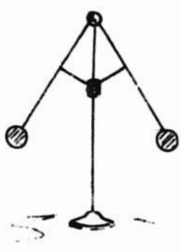


Figura 14.

II TRABAJO Y ENERGIA

TRABAJO Y TEOREMA DE TRABAJO-ENERGIA CINETICA

Hemos visto ya que una fuerza es capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo. Si recordamos algunos casos ya vistos anteriormente podemos llegar a conclusiones interesantes.

Por ejemplo, si se tiene una partícula con velocidad inicial en dirección del eje x positivo y se aplica una fuerza constante en esta misma dirección, observamos que la magnitud de la velocidad de la partícula está aumentando contínuamente.

Por otro lado, en el caso del movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad de la partícula se mantiene constante, mientras que la fuerza aplicada está ahora en dirección siempre perpendicular al movimiento.

De acuerdo con estos ejemplos, parecería ser que es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento la que es capaz de modificar la magnitud de la velocidad de una partícula. Para investigar esta proposición observemos que de acuerdo con la 2a. Ley de Newton, si $\vec{F}$ es la fuerza total sobre una partícula entonces $\vec{v}.m d\vec{v}/dt = \vec{v}.\vec{F}$, y por otro lado $\vec{v}.d\vec{v}/dt = v_x dv_x/dt + v_y dv_y/dt$

$$= d(\tfrac{1}{2}\, v_x{}^2)/dr + d(\tfrac{1}{2}\, v_y{}^2)/dt$$

$$= dv^2/dt,$$

Obteniendo por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2) = \vec{F}.\vec{v} = F(\cos\theta)v$$

Esta ecuación nos dice que en efecto, es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento ($F\cos\theta$) la que influye en la variación de v^2.

De la ecuación anterior podemos obtener otras conclusiones de considerable importancia. Si en esa ecuación observamos que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$

y además multiplicamos la ec. por dt, obtenemos:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}.d\vec{r} = F\ ||d\vec{r}||\cos\theta$$

Es decir, si la partícula ha seguido una cierta trayectoria en el espacio y fijamos nuestra atención a cualesquiera dos instantes t y t' obtenemos:

$$\int_{\substack{\text{trayectoria}\\ \text{de t a t'}}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_{\substack{\text{trayectoria}\\ \text{de t a t'}}} \vec{F}.d\vec{r}$$

y como en el término de la izquierda se tiene una diferencial exacta, se tiene:

$$\left.\frac{1}{2}mv^2\right|_{p(t)=p}^{p(t')=p'} = \int_{\substack{\text{trayectoria}\\ \text{de p a p'}}} \vec{F}.\ d\vec{r}$$

¡Pero esto es interesante!. Resulta que según este resultado, si se conoce previamente la forma de la trayectoria del cuerpo podemos calcular la velocidad en cualquier punto p' conociendo la velocidad en el punto p. Para ésto bastaría con poder calcular la integral que está en el lado derecho de la igualdad. Y lo importante es que esta integral se podrá calcular de manera sencilla en muchos casos.

$$\int_{\substack{\text{trayectoria}\\ \text{de p a p'}}} \vec{F}.d\vec{r}$$

se le llama el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$. Generalmente se denota a un trabajo conla letra W.

A la cantidad $(1/2)mv^2$ se le llama energía cinética. Se le denota usualmente con la letra "T".

Con esta nomenclatura el resultado anterior simplemente establece que (Teorema de Trabajo-Energía Cinética):

El cambio en la energía cinética de una partícula es igual al trabajo efectuado sobre ella: $\Delta T = W_T$.

Debido a su uso frecuente es útil hacer la observación de que: el trabajo de la fuerza resultante es la suma de los trabajos hechos por cada una de las fuerzas aplicadas a la partícula. Esto se debe a que si $\vec{F}_r = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots$ entonces $\vec{F}_T \cdot d\vec{r} = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{f}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots$.

Las unidades del trabajo son las mismas que las de la energía cinética y se les llama unidades de energía. Así pués energía = fuerza. distancia = masa. longitud^2. tiempo^{-2} . En el S.I. de unidades la unidad de energía es el Joule o Julio:

$$\text{Joule} = J = Kg.m^2.\ S^{-2}$$

Una consideración que nos será útil en varios casos, es que si la partícula se mueve en una trayectoria perpendicular en todo punto a la fuerza normal $\vec{N}$ según nuestro S.I., entonces $\vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$ por lo que concluimos que en estos casos la normal no hace trabajo.

W - T

PREGUNTAS - RESPUESTAS

1. ¿Cuándo conocemos previamente la forma de la trayectoria de la partícula?

R. Por ejemplo en el caso de un esquiador moviéndose en una rampa curva, o el de una partícula que cae libremente en una línea vertical, o el de un "péndulo simple".

2. ¿Qué en estos casos no se puede aplicar directamente la 2a. Ley de Newton y calcular así la velocidad de la partícula en algún punto arbitrario de la trayectoria?

R. Claro que sí. Pero con este camino a veces resultan ecuaciones diferenciales demasiado complicadas al compararse con el cálculo del trabajo total. Vease la sección de "ejemplos".

3. ¿Sustituye este "método de energías" al método de aplicar la 2a. Ley de Newton directamente?

R. No. De hecho en muchos casos es necesario aplicar tanto el teorema de W-T para encontrar ciertas incógnitas como aplicar la 2a. Ley de Newton para encontrar otras.

4. ¿Nunca hace trabajo la normal?

R. En el siguiente ejemplo sí hace trabajo: considérese un collarín en una barra que puede moverse en un plano horizontal. Aún sin rozamiento, si colocamos al collarín en el centro y luego hacemos girar a la barra, el collarín se desplazará a la periferia y adquirirá cierta velocidad tangencial final distinta de cero. Por lo que el trabajo hecho por la normal vale en este caso:

$$\frac{1}{2}\,mv_f{}^2 = \frac{1}{2}\,m\omega^2 R$$

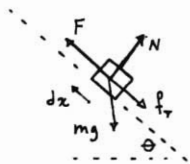
1. Una persona desea subir un piano desde el piso hasta un nivel que está a una altura h más arriba. ¿Qué trabajo necesita efectuar como mínimo?

R. Es razonable subir el piano con velocidad pequeña usando un plano inclinado. Supondremos pues que la velocidad inicial es cero y la final también. Entonces $\Delta T = 0$. Supongamos que el coeficiente de rozamiento cinético es μ_c, que la masa del piano es M, y que el plano está inclinado θ respecto la horizontal.

Una consecuencia de lo anterior es que $W_{total} = 0$.

Pero sabemos que $W_T = W_{persona} + W_{rozamiento} + W_{normal} + W_g$

Además, del D.C.L. podemos observar que el trabajo de la normal es:



$\int \vec{N}\cdot d\vec{r} = Ndx \cos 90° = 0$

y de manera análoga tenemos

$W_g = -mg \cos (90° - \theta).\ell$

$W_{roz} = -mg(\cos\theta)\mu_c.\ell$

Observemos que no podemos tener una expresión semejante para W_F puesto que si queremos que $v_f = 0$ entonces F debe ser una fuerza variable en magnitud y sentido.

Aplicando que $W_T = 0$ tenemos pues:

$0 = -mg\ell\ (\mu_c \cos\theta + \text{sen}\ \theta) + W_F$

Concluimos entonces, que sea como sea la manera en F ha sido variada, el trabajo efectuado por ella debe ser:

$W_F = mg\ell\ (\mu_c \cos\theta + \text{sen}\ \theta)$

2. Un esquiador cae por una rampa curva sin impulsarse con sus bastones. ¿Cómo se le puede hacer para que al salir de la rampa caiga hasta una distancia D más adelante?

R. Con la misma velocidad de salida de la rampa pero a diferentes ángulos tendrá diferentes alcances. Es razonable elegir entonces un ángulo de 45° en la salida para tener un alcance máximo. En este caso tenemos:

$$D = 2\, v_o{}^2 \cos\Theta_o \operatorname{sen}\Theta_o / g = v_o{}^2/g$$

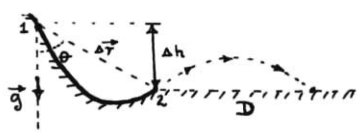
donde v_o es la velocidad de salida de la rampa.
La normal no hace trabajo. Entonces, el único trabajo efectuado sobre el esquiador desde que se dejó caer por la rampa hasta la salida es el de la gravedad, puesto que el rozamiento es despreciable. En la expresión para este trabajo, el término mg es constante durante la integración, así pues puede salir de la integral y el trabajo total queda entonces:

$$m\vec{g}\cdot\int_1^2 d\vec{r}$$

pero como la integral de una diferencial es la misma función, el segundo término en este producto es simplemente el vector de desplazamiento $\vec{\Delta r}_{1\to 2}$, entonces el trabajo total es

$$mg||\Delta r||\cos\Theta$$

donde Θ es el ángulo formado entre $\vec{g}$ y $\Delta\vec{r}$. Observemos de la figura que $||\Delta r||\cos\Theta$ es simplemente el cambio de altura del esquidaor desde que se dejó caer hasta la salida.



Así pues, por el teorema de W-T tenemos:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2} m{v_o}^2$$

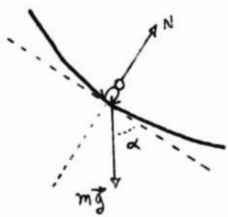
Es decir, para lograr el alcance D máximo basta que el ángulo de salida de la rampa valga 45° y que la altura neta de caída del esquiador esté dada por:

$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{{v_o}^2}{g} = \frac{1}{2} D$$

Es decir, que la altura sea la mitad del alcance.

Obsérvese en este ejemplo, de el diagrama del esquiador en un punto arbitrario de la trayectoria, que según la 2a. Ley la aceleración de la partícula en la dirección tangencial es:

$$g \cos \alpha$$



donde α es el ángulo entre la tangente a la trayectoria y la vertical. Como el ángulo α varía de punto en punto, se concluye que la aceleración tangencial del esquiador no es constante.

Hemos visto en un ejemplo un resultado interesante: el trabajo hecho por la gravedad sobre una partícula de masa m sólo depende del cambio de alturas:

$$W_{g \atop P\to P'} = -mg\Delta h = mg\ (h - h')$$

y no de la trayectoria específica seguida. Si la única fuerza que hace trabajo es la gravedad tenemos entonces:

$$\frac{1}{2}\ m\ (v'^2 - v^2) = mg\ (h - h')$$

es decir, rearreglando términos obtenemos:

$$\frac{1}{2}\ mv'^2 + mgh' = \frac{1}{2}\ mv\ \ + mgh$$

o sea, en estos casos la suma de enrgía cinética y "m·g·h" se mantiene constante durante todo el movimiento de la partícula.

Observemos que este resultado sólo ha usado esencialmente el hecho de poder expresar al trabajo de P a P' como una diferencia: algo'- algo .

Decimos que un campo de fuerzas $\vec{f}$ sobre m que tiene esta propiedad es conservativo. Es decir:

<u>Si dado el campo de fuerzas $\vec{f}$ aplicado sobre m, existe alguna función U de la posición de m tal que, para cualquier trayectoria de P a P' el trabajo $W_{\vec{f}}$ vale $-(U'-U) = -\Delta U$, entonces $\vec{f}$ es un campo conservativo.</u>

Una condición necesaria para que $\vec{f}$ sea conservativa se puede obtener al considerar una trayectoria que vaya de P al mismo punto P. En este caso debido a que P' = P tenemos U' = U y $\Delta U = 0$, por lo que concluimos que:

$$W_{P\to P} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \text{trayectoria cerrada.}$$

es necesario para que $\vec{f}$ sea conservativa.

En el caso de una fuerza de rozamiento, es claro que $W_{P\to P}<0$, así pues éste es un ejemplo de una fuerza no-conservativa.

Si f es una fuerza conservativa aplicada sobre m, tenemos pues que existe U tal que:

$$W_{\vec{f}\to\vec{m}} = -\Delta U$$

Como las unidades del trabajo son de energía, la función U también tiene unidades de energía. Más aún, si pensamos que U(P) es una cantidad asociada a la partícula "m" debido a su posición P, la ecuación anterior la podemos expresar diciendo: la energía <u>dada</u> por $\vec{f}$ a la masa m ($W_{\vec{f}\to m}$) se "explica" por una <u>disminución</u> en la cantidad U. (Si el trabajo hecho por $\vec{f}$ es negativo, podemos sustituir "dada" y "disminución" por "quitada" y "aumento").

Esto sugiere que podemos entender a la función U como una especie de energía de reserva. De hecho esta es la idea atrás de la siguiente definición.

> <u>A una "función U" asociada al campo conservativo $\vec{f}$ aplicado sobre m, se le llama energía potencial de la masa m debida a este campo.</u>

Si el campo $\vec{f}$ es conservativo, se puede <u>construir una función U</u> si se elige <u>arbitrariamente</u> un punto P_o:

$$U(P) = -\int_{P_o}^{P} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -W_{P_o\to P,\vec{f}}$$

puesto que entonces:

$$W_{P\to P'} = W_{P\to P_o} + W_{P_o\to P'} = U_P - U_{P'} = -\Delta U$$

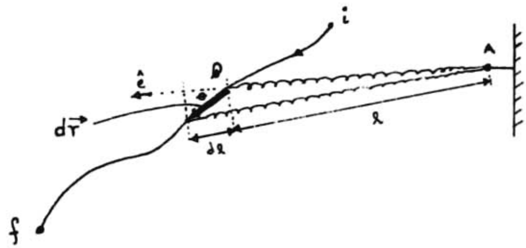
Al punto arbitrario P_o se le llama punto de referencia y es simplemente un punto auxiliar puesto que $W_{P\to P'}$ no depende realmente de P_o.

Con los conceptos aquí presentados y de acuerdo con la ec. (1), tenemos pues que la energía potencial gravitacional de la masa m, al elegir un nivel de referencia, es $U(P) = W_{ref\to P} = mgh$, donde h mide la altura respecto este nivel de referencia.

EJEMPLOS DE ENERGÍA POTENCIAL

1. ¿Es conservativa una fuerza elástica?

R. Consideremos una partícula sujeta a una fuerza elástica, que simbolizaremos por un resorte fijo en uno de sus extremos al S.I.



La fuerza sobre m cuando está en posición P es $-K\Delta\ell\hat{e}$ donde $\hat{e}$ es el vector unitario dirigido desde el punto fijo A al punto P y $\Delta\ell$ es la elongación del resorte. Así pues el trabajo desde "i" a "f" es:

$$\int_i^f -K\Delta\ell\hat{e}\cdot d\vec{r} = \int_i^f -k\Delta\ell dr\cos\Theta$$

pero observando que $dr\cos\Theta$ es simplemente $d\ell$, y que la elongación $\Delta\ell$ es $\ell-L$ donde L es la longitud no deformada del resorte, tenemos que el trabajo es:

$$-k\int_i^f(\ell-L)\,d\ell = -k\,\frac{1}{2}\,(\ell-L)^2\Big|_{\ell=\ell_i}^{\ell=\ell_f}$$

es decir, el trabajo es el negativo del cambio de la función

$$\frac{1}{2} k (\ell-L)^2 = \frac{1}{2} k\Delta\ell^2$$

y así pues concluímos:

. La fuerza elástica es conservativa.

. Si caracterizamos a la fuerza elástica por la constante k que es fuerza por unidad de elongación $\Delta\ell$, entonces la energía potencial de la partícula sujeta a esta fuerza es:

$$\frac{1}{2} k\Delta\ell^2$$

ENERGÍA POTENCIAL TOTAL

Supongamos que varias fuerzas conservativas $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ actúan sobre una cierta partícula.

El trabajo de la resultante de todas estas fuerzas es la suma de los trabajos hechos por cada una $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Y entonces, como cada uno de estos trabajos se puede expresar como el cambio de cierta energía potencial U_i asociada a la fuerza $\vec{f}_i$, tenemos que el trabajo total es:

$$-(U_{1f} - U_{1i}) \ - \ (U_{2f} - U_{2i}) - \ldots$$

o bien, rearreglando términos:

$$-(\{U_{1f} + U_{2f} + \ldots\} - \{U_{1i} + U_{2i} + \ldots\})$$

es decir, el trabajo <u>total</u> W_{TC} hecho por las fuerzas <u>conservativas</u> $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ también se puede expresar como el cambio de cierta función: la "energía potencial total U_T",

$$W_{TC} = -(W_{Tf} - U_{Ti}) = -\Delta U_T$$

donde:

$$U_T = U_1 + U_2 + \ldots + \ldots$$

Por ejemplo, si una masa está sujeta a un resorte y a la gravedad entonces la energía potencial total será la suma de la energía potencial gravitacional mgh y la energía potencial asociada a la presencia del resorte $\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$.

ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA INCLUYENDO FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Si un cuerpo está sujeto tanto a fuerzas conservativas como no conservativas, podemos separar a las fuerzas en estos dos tipos y también al trabajo, resultando entonces que el trabajo total se puede expresar como la suma del trabajo W_c conservativo y del trabajo W_c no-conservativo: $W_T = W_c + W_{nc}$.

Pero podemos usar el hecho de que el trabajo conservativo es el negativo del cambio de la energía potencial total, quedando pues

$$W_T = -\Delta U_T + W_{nc}$$

y si aplicamos el teorema de trabajo-Energía Cinética encontramos que:

$$-\Delta U_T + W_{nc} = \Delta T$$

donde T representa la energía cinética.

obtenemos pues que:

$$\Delta(T + U_T) = W_{nc}$$

resultado que dice: la <u>energía mecánica total</u> (definida como <u>$T + U_T$</u>) <u>cambia</u> exactamente en la misma cantidad en que se ha hecho trabajo no <u>conservativo</u> sobre la partícula.

Así por ejemplo, si existe fuerza de rozamiento sobre la partícula entonces debido a que el trabajo que hace esta fuerza es <u>negativo</u>, se concluye que la energía mecánica total del sistema estará disminuyendo continuamente. De ahí que este tipo de fuerzas se conozcan como <u>disipativas</u>.

Por otro lado, si un agente externo o fuerza externa hace trabajo <u>positivo</u> sobre la partícula entonces la energía mecánica total de la partícula se verá incrementada.

Un ejemplo de éste último es cuando se tiene una masa sujeta a un resorte, estando el sistema inicialmente en reposo y equilibrio. Se puede entonces aplicar una fuerza externa sobre la masa dandole un cierto impulso, quedando entonces incrementada la energía mecánica del sistema "masa + resorte".

Cuando no hay fuerzas no conservativas que hagan trabajo sobre la partícula, se dice que el sistema es conservativo, porque en este caso la energía mecánica total de la partícula no cambia (es decir: $\Delta(T + U_T) = 0$. Se dice también en este caso que se "conserva la energía mecánica".

EJEMPLOS DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

1. Consideremos un bloque ligado a un resorte en un plano horizontal sin rozamiento.

   Si la masa del bloque es m, la constante del resorte es k, y x representa la elongación del resorte, tenemos entonces que la energía mecánica total de bloque es:

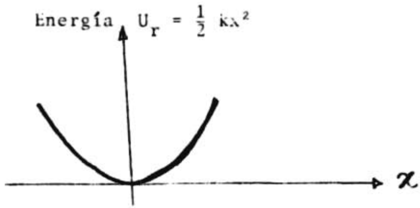
   $$\frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,kx^2, \quad \text{con} \quad v = dx/dt$$

   Observamos pues, que si la elongación x aumenta, la velocidad v tiene que disminuir para conservar esta suma constante. De hecho, la cantidad exacta de energía cinética que pierde el bloque se convierte íntegramente en energía potencial. Y viceversa, cuando el resorte disminuye su elongación x, la energía potencial elástica perdida se convierte íntegramente en energía cinética.

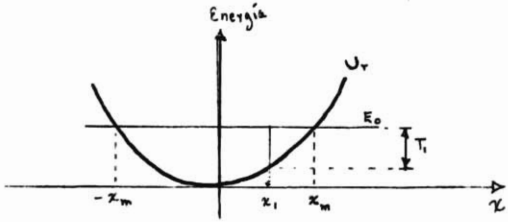
   De esta manera el bloque está oscilando entre una posición en que toda la energía está en forma potencial elástica y la posición (x=0) en que toda su energía es cinética.

   Cuando toda su energía es cinética, el bloque tiene velocidad máxima.

   Si hacemos una gráfica de la energía potencial U_r elástica, tenemos:



Si E_o representa el valor numérico de la enrgía mecánica total $T + U_r$ del bloque, y si añadimos una recta al anterior diagrama que represente este valor, obtenemos:



y observamos entonces gráficamente que T es precisamente la cantidad que hay que añadir a U_r para llegar al valor E_o, como se muestra en la figura para la posición $x=x_1$.

También resulta claro entonces que x_m y $-x_m$ son las máximas elongaciones del resorte puesto que en estos puntos $T=0$

PREGUNTAS Y EJEMPLOS DE: CAMBIOS DE ENERGIA MECANICA TOTAL

Preguntas.

P. ¿ El trabajo no conservativo es siempre negativo?

r. No,si una persona empuja a un carro, hace un trabajo positivo.

P. ¿Por qué a la ecuación $\Delta(T+U_T) = W_{NC}$ se le llama ecuación de balance?

r. Porque hace una comparación de la energía mecánica total inicial y la final (balance) y explica el origen o agente de la diferencia entre estas cantidades.

Ejemplos.

ejemplo: Encontrar la posición final de reposo de un bloque en movimiento horizontal, si hay rozamiento entre el bloque y el piso.

resolución: En este caso la energía cinética inicial es simplemente $\frac{1}{2}\, m\, v_o^2$ y la final es cero. Además la energía potencial de la gravedad es igual al inicio que al final. Por otro lado el trabajo no conservativo W_{NC} es

$$W_{NC} = - f_r . d$$

donde d es la distancia que recorrerá el bloque hasta detenerse; la ecuación de balance dirá pues que

$$T_f + U_f - T_i - U_i = - \mu_c mg.d$$

o sea

$$0 + mgh_o - \frac{1}{2} mv_o^2 - mgh_o = - \mu_c mgd$$

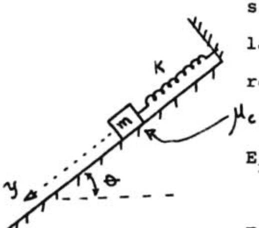
quedando pues que el valor de la distancia recorrida es

$$d = + \frac{v_o^2}{2\mu_c g}$$

Si no hay realmente rozamiento, esta ecuación predi-dica que d= ∞ como es de esperarse.

ejemplo: Encontrar la mínima posición de un bloque sujeto a un resorte en un plano inclinado con rozamiento.

resolución: Si se escoge el origen de la coordenada "y" en la posición inicial del bloque, y si en esta posición la la velocidad del bloque es nula y la elongación del resorte también, tenemos:



$$E_{final} = T_f + mg(-y_f \text{ sen } \theta) + \frac{1}{2} k y_f^2$$

$$E_{inicial} \; T_i + mg(- y_i \text{ sen } \theta) + \frac{1}{2} k y_i^2 = 0$$

$$W_{NC} = - (\mu_c mg \cos \theta) . y_f$$

y entonces la ecuación de balance queda:

viendo que con motores distintos, la velocidad máxima será mayor cuando el motor entregue la energía en el menor tiempo, es decir, cuando sea mayor $\Delta E_m/\Delta t_o$

Preguntas.

p. ¿ se conserva la energía mecánica si hay fuerzas de rozamiento sobre un bloque? ¿se conserva la energía?

p. ¿ Es nulo, positivo o negativo el trabajo hecho por el rozamiento cuando un bloque se desliza sobre un plano y regresa al punto inicial?

p. Si hay rozamiento, ¿Debe disminuir la energía mecánica hasta el valor cero? ¿Debe disminuir hasta menos infinito?

P O T E N C I A

Cuando un motor actúa sobre un cuerpo, resulta importante no sólo conocer el trabajo que ha desarrollado sino el tiempo en que lo ha llevado a cabo. Hay una cantidad física adecuada para este tipo de consideraciones que recibe el nombre de potencia y que es la cantidad de energía por unidad de tiempo que está siendo entregada o recibida por un cierto agente en un determinado instante,

$$P \equiv \Delta\text{Energía} / \Delta t$$

si este agente es una fuerza $\vec{F}$ actuando sobre la partícula, la potencia entregada a ésta última se puede re-expresar de otra manera. Considerando que la diferencial de trabajo efectuado por $\vec{F}$ sobre la partícula en el intervalo dt de tiempo es:

$$dW_F = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

donde $d\vec{r}$ representa el pequeño desplazamiento ocurrido en este lapso, obtenemos entonces que:

$$P_F = dW_F/dt = \vec{F}\cdot d\vec{r}/dt$$

es la potencia hecha por F sobre esta masa, quedando pues:

$$P_F = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad instantanea.

Esta potencia representa la rapidez con la que F está haciendo trabajo sobre la partícula.

P R E G U N T A S

P. ¿Cuál es la unidad de potencia en el S.I.?

r. El watt, el cual es joule-seg^{-1} ($w = j\cdot s^{-1}$)

P. ¿Puede una fuerza $\vec{F}$ desarrollar potencia negativa sobre una masa dada?

r. Por supuesto, basta con que $\vec{F}$ esté opuesta a la dirección del movimiento en cierto instante.

P. ¿Es la potencia una cantidad instantánea?

r. Sí, de hecho, si se aplica una fuerza constante $\vec{F}$ sobre una partícula y la velocidad $\vec{v}$ de la partícula cambia, el producto $\vec{F}\cdot\vec{v}$ cambiará también de instante en instante.

P. ¿Tiene alguna importancia especial la potencia efectuada por la fuerza resultante sobre una partícula?

r. Sí, puesto que al aplicar la relación entre trabajo total o resultante y energía cinética T, se obtiene:

$$P_T = dW_T \;/\; dt = dT \;/dt$$

donde T es la energía cinética, concluyendo que esta potencia resulta igual a la rapidez con que la partícula está cambiando precisamente su energía cinética. Por otro lado podemos observar que este resultado es simplememte la segunda Ley de Newton, puesto que:

$$\vec{F}_T\cdot\vec{v} = P_T = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv\;\right) = m\vec{a}\cdot\vec{v}$$

2.3 Problemas

01. Se dispara verticalmente y hacia arriba una bala de 5 g con una pistola de resorte. Se encuentra que el resorte debe comprimirse por lo menos en 10 cm si se quiere que la bala alcance a un balancín que está a una altura de 20 m. ¿Cuál es la constante elástica del resorte?

02. Un proyectil de 10 kg se dispara directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 500 m/s. (a) ¿Cuál es la energía potencial del proyectil en el punto máximo de su trayectoria?, (b) ¿Cuál sería la máxima energía potencial si el proyectil hubiese sido disparado con un ángulo de 45° en lugar de haberlo hecho directamente hacia arriba?

03. Una moneda de 2.0 g se empuja hacia abajo apretándola contra un resorte vertical comprimiéndolo en 1.0 cm. La constante elástica del resorte es de 40 N/m ¿Hasta qué distancia de su posición original brincará la moneda si se le soltara?

04. Un bloque de 2.0 kg se deja caer desde una altura de 0.40 m sobre un resorte cuya constante elástica es 1960 N/m. Encontrar la distancia máxima en que se comprimiría el resorte. La fricción es despreciable.

05. Se fija un objeto a un resorte vertical y se le hace descender lentamente hasta su posición de equilibrio lo cual hace estirar al resorte en una cantidad d. Si el mismo objeto se fija al mismo resorte vertical y se le permite que caiga. ¿Cuál será la distancia máxima en que se estirará el resorte?

06. (Figura 01) La cuerda de la figura tiene una longitud L = 4.0 m. Cuando se suelta la bola, se balancea hacia abajo por el arco punteado ¿Cuál será su velocidad cuando llegue al punto más bajo de su movimiento?

07. Desde una ventana se arroja una pelota de 50 gr con una velocidad inicial de 8.0 m/s y con un ángulo de 30° por encima de la horizontal. Usando métodos de energía, determinar: (a) la energía cinética de la pelota en el máximo de su vuelo. (b) su rapidez cuando esté a 3.0 m por debajo de la ventana.

08. (Figura 02). Un bloque de 2.0 kg se coloca contra un resorte comprimido sobre una rampa sin fricción. El resorte, cuya constante elástica es de 1960 N/m, se comprime en 20 cm después de lo cual se suelta el bloque. ¿Cuán lejos subirá por la rampa antes de llegar a deternerse?

09. (Figura 03). El carro de una montaña rusa sin fricción parte del punto A con rapidez v_0. Supóngase que puede ser considerado como una partículo y que siempre se mantiene sobre su carril ¿Con qué rapidez pasará por los puntos B y C?

10. El clavo del problema 06. está situado a una distancia D por debajo del punto de suspensión. Demostrar que D debe valer por lo menos 0.6 L si se quiere que la bola dé una vuelta completa en un círculo cuyo centro sea el clavo.

11. (Figura 04). Dos niños están jugando a un juego en el cual tratan de pegarle a una cajita en el suelo, usando una pistola de balines accionada por un resorte y que está colocada horizontalmente sobre una mesa sin fricción. El primer niño comprime el resorte en 1.0 cm y el balín cae a 20 cm por delante del blanco, cuya distancia horizontal al borde de la mesa es de 2.0 m. ¿Cuánto deberá comprimir el resorte el segundo niño para que el mismo balín caiga dentro de la caja?

12. Una cadena de longitud 1 y masa uniformemente distribuida se apoya sobre una mesa sin fricción con la mitad de su longitud colgando desde el borde. Calcular (a) el trabajo que habrá que efectuar para que, al jalarla, quede totalmente sobre la mesa, (b) el trabajo que habrá que efectuar hasta que toda la cadena quede colgando. (c) Discutir por qué los resultados (a) y (b) eran de esperarse.

13. Un objeto de 1.0 kg está accionado por una fuerza $F = -3.0x -5.0x^2$, donde F está dada un newton y x en metro. La energía potencial es cero en x = 0. (a) ¿Cuál es la energía del objeto en x = 2.0 m? (b) Si el objeto tiene una rapidez de 4.0 m/s en el sentido negativo cuando está en x = 5.0, describir su movimiento posterior.

14. (Figura 05) Un pequeño bloque de masa m resbala sin fricción por un riel en forma de rizo. Si en P se encuentra en reposo, (a) ¿Cuál es la fuerza resultante que actúa sobre él en Q? (b) ¿A qué altura por encima de la base del rizo tendrá que soltarse el bloque para que la fuerza ejercida por él sobre el riel, en la cima del rizo, sea igual a su peso?

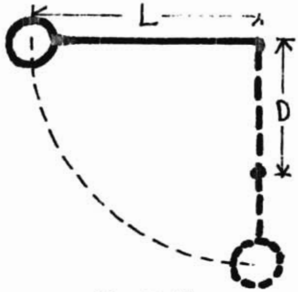


Figura 01

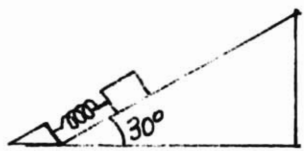


Figura 02

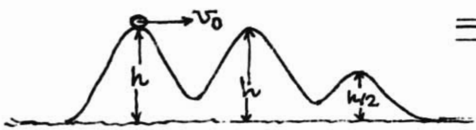


Figura 03

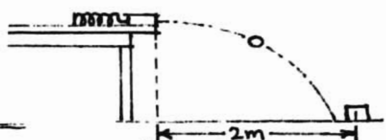


Figura 04

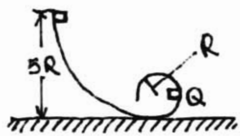


Figura 05

III ENERGÍA ELÉCTRICA

1. POTENCIAL ELECTRICO Y ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Sabemos que sobre una carga se ejerce una fuerza debido a otras cargas eléctricas, y es de esperar que entonces al moverse esta carga el campo eléctrico generado por las otras cargas efectúe un trabajo sobre ella.

Un gran número de aplicaciones tecnológicas de la física se basan precisamente en el movimiento de las cargas eléctricas y en las transformaciones de energías asociadas a este movimiento. Podemos mencionar por ejemplo: la generación de energía eléctrica en una presa, la obtención de movimiento mecánico usando un motor eléctrico, sistemas eléctricos de alumbrado, sistemas eléctricos de medición, etc.

Es por esto que tiene considerable interés físico el estudio de el trabajo que se efectúa sobre un conjunto de cargas en movimiento en presencia de un campo eléctrico. Para esto, empecemos con el caso de una sola carga eléctrica.

Pensemos pues que esta carga está sujeta a varias fuerzas de distinto origen, pero también a un campo electrostático, es decir, generado por una multitud de cargas pero todas en reposo.

En los apéndices de estas notas se demuestra que:

el campo electrostático es conservativo

y entonces, como vimos anteriormente en estas notas,ésto permite definir la energía potencial de una carga. Además, sabemos que el trabajo hecho por este campo sobre la carga es simplemente el negativo del cambio de energía potencial cuando se mueve la carga.

Pero nuestro interés es aplicar estas ideas al caso de varias cargas en movimiento, es por esto que nos resultará de gran utilidad el concepto de potencial , que definimos:

El potencial eléctrico en un punto del espacio es la energía potencial por unidad de carga que tendría una carga eléctrica que se colocará en ese punto.

En forma elgebraica, si V es el potencial eléctrico en P tenemos:

$$V \equiv U/q$$

donde U es la energía potencial electrostática de la carga q debida a estar en el punto P.

La energía potencial eléctrica de cualquier carga q está relacionada con el trabajo que el campo eléctrico hace sobre ella. De hecho si la carga se desplaza de un punto A a un punto B del espacio, el trabajo W hecho sobre ella es:

$$W = -\Delta U = -\ (U_B - U_A),$$

por otro lado, de acuerdo con la definición de potencial resulta que:

$$U_B - U_A = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A),$$

y finalmente obtenemos pues, la ecuación que conecta al trabajo con la diferencia de potencial:

$$W = -\ q\Delta V$$

Observe que éste es el trabajo hecho por el campo electrostático sobre la carga q, es decir, la cantidad ($-q\Delta V$) es la energía obtenida por la carga q y proporcionada por el campo electrostático.

La unidad de potencial (electrostático) en el S.I. de unidades es el volt que se denota V y se define como:

$$V = jC^{-1}$$

donde j es joule y C es coulomb.

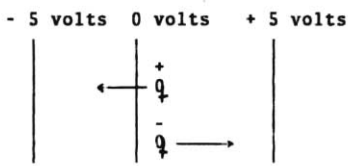
En muchas ocasiones a la diferencia de potencial se le denota también con la letra "V", pero siempre es posible por el contexto determinar si la referencia se hace al potencial o a la diferencia de potencial.

EJEMPLOS DE: POTENCIAL ELÉCTRICO

P. ¿Hacia donde se "tiende" a mover una carga eléctrica, hacia menor potencial o hacia mayor?

r. Podemos encontrar la respuesta aprovechando nuestro conocimiento con otras formas de energía potencial, así por ejemplo sabemos que una masa tiende a moverse en el campo gravitancional hacia regiones de menor energía potencial. Así pues, si la carga q es positiva entonces al viajar a regiones de menor potencial V, también disminuye el producto qV que es la energía potencial U y concluimos que una carga positiva tiende a moverse a regiones de menor potencial eléctrico V.

Por otro lado, si q es negativa, el producto qV se hace más negativo, y por lo tanto decrece, al moverse q hacia regiones de mayor valor de V, y así vemos que una carga negativa tiende a moverse hacia regiones de mayor potencial.



P. ¿Es lo mismo voltaje que potencial eléctrico?

r. No exactamente. Se usa la expresión "voltaje" para referirse al valor en volts del potencial en un cierto punto, pero también para referirse al valor de una "fuente de fuerza-electromotríz" o fem en cuyo caso el "voltaje" esta asociado en origen a una fuerza química o electromagnética o de otro tipo pero no electrostática, mientras que el potencial tiene por definición origen electrostático (para mas detalle conviene ver la sección sobre "fem" en estas mismas notas).

P. ¿Se puede medir el potencial eléctrico?

r. No. Lo que es observable físicamente, y por lo tanto mensurable, es únicamente la diferencia de potencial. Esto se debe a que el trabajo hecho sobre una carga solo tiene que ver con la diferencia de potencial.

Sin embargo, en muchas aplicaciones o en ingeniería se define o conviene, en que el potencial de la superficie terrestre sea cero y entonces cuando se hable de "voltaje" se está por lo tanto haciendo referencia a la diferencia de potencial respecto a la superficie terrestre, o como es llamada a veces: "tierra".

P. ¿Qué genera al potencial eléctrico?

r. El campo electrostático. Pero el campo electrostático es generado por cargas eléctricas en reposo. De hecho, el potencial en un punto del espacio es la suma del potencial generado por cada una y todas las cargas eléctricas, y cada carga q contribuye con el valor

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ q\cdot\frac{1}{r}$$

donde r es la distancia de q al punto. Para mas detalle se puede ver el apéndice en estas mismas notas.

P. Si en un punto no hay carga, ¿es cero ahí el potencial?

r. ¡No!. Vease la pregunta anterior y se concluye que una carga alejada del punto P crea un potencial distinto de cero en este punto.

BALANCE DE ENERGÍA EN PRESENCIA DE UN CAMPO ELECTROSTATICO

Si una partícula de masa m y carga q está sujeta a la fuerza de gravedad, a algunos resortes y además a un campo electrostático $\vec{E}$ con potencial asociado V, entónces la energía potencial total de m será:

$$U_T = U_{gravitacional} + U_{resortes} + U_{electrostática}$$

Las expresiones para U_g y U_r son conocidas y la expresión para $U_{electrostática}$ es:

$$U_{electrostática} = qV$$

donde (ver apéndice) el potencial V es la suma de los términos

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_j}{r}$$

y donde las q_j $(j=1,\ldots,n)$ son las otras cargas eléctricas presentes.

De esta manera, si W_{nc} es el trabajo hecho sobre m por las fuerzas no conservativas cuando la partícula viaja de A a B, obtenemos:

$$U_{TB} - U_{TA} = W_{nc}$$

o sea:

$$W_{nc} = U_{gB} - U_{gA} + U_{rB} - U_{rA} + q(V_B - V_A)$$

FUENTES DE FEM IDEALES

En muchas situaciones físicas o técnicas importantes, se ejercen fuerzas sobre las cargas eléctricas por ejemplo por: pilas eléctricas, "generadores de electricidad" por viento o agua, celdas fotoeléctricas, etc. A estos dispositivos se les llama: fuentes de fuerza electro-motriz, o fuentes de fem.

Estas fuerzas, macroscópicamente hablando, no son de origen electrostático sino por ejemplo: químico, magnético, electromagnético, etc. Para aplicar estas fuentes en este curso y obtener resultados cuantitativos, nos será suficiente con el siguiente concepto de fem:

> Se define una fuente de fem ideal de valor ε como un dispositivo con dos bornes o terminales que es capaz de mantener una diferencia de potencial electrostático ε constante entre estos bornes.*

En base a este concepto, podemos obtener algunos resultados que nos serán útiles.

Si una cantidad de carga q_o se transporta del borne de menor potencial al de mayor, entonces q_o gana una energía potencial electrostática,

$$U_{final} - U_{inicial} = q_o \Delta V = q_o \varepsilon$$

y como esta energía tuvo que ser entregada a esta carga por la fuente (además como estas cargas se mueven con velocidad constante) concluímos que: una fuente de valor ε hace un trabajo $q_o\varepsilon$, sobre una cantidad de carga q_o que se transporte a través de ella desde el borne "negativo (-)" al "positivo (+)".

Algebráicamente.

$$W = q_o \varepsilon$$

Si q_o por el contrario viaja del borne de mayor potencial al de menor,

* Nota: para una definición más general ver por ejemplo el texto de Resnick o de Mac Kelvey.

la fem recibe (y almacena) el trabajo $q_0\varepsilon$.

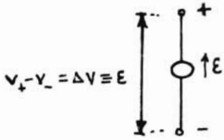


fig 1

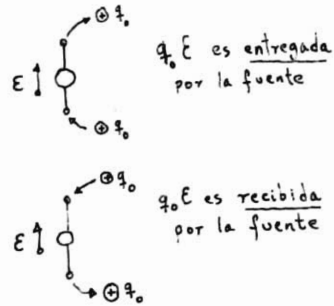


fig 2

p. ¿En qué unidades se debe medir entonces el valor ε de una fem en el S I de unidades?

r. En volts, como el potencial electrostático.

p. ¿Qué significa que un acumulador tenga una fem de 12 volts?

r. Que cada coulumb que viaja a través de él desde el borne (-) al borne (+) recibirá un trabajo de 12 joules (despreciando la "resistencia interna", ver la sección con este nombre).

p. ¿En qué se convierte el trabajo que una fuente de fem hace sobre las cargas que las atraviesan?

r. En energía potencial electrostática.

CORRIENTE ELECTRICA

Son varios los agentes que pueden "entregar" trabajo negativo o positivo a las cargas: fuentes de fem, campo electrostático, o el cuerpo dentro del cual se mueven estas cargas.

La cantidad de trabajo dependerá de la cantidad total de carga que ha fluido.

Así por ejemplo si un acumulador de 12 volts se conecta a un motor y ha fluido una carga de 10 coulombs, las cargas eléctricas habrán recibido 120 joules del acumulador en total y estos mismos 120 joules es la energía máxima que podrá recibir el motor.

En este caso se ve claramente que son las cargas eléctricas el medio físico empleado para transferir energía de cierta región (el acumulador) a otra (el motor).

Si el motor recibe 120 joules podrá subir a una masa de 10 kg a una altura de aproximadamente 1.2 metros y así realizar un trabajo útil.

Pero en este ejemplo es claro que este trabajo no sería de mucha utilidad si toma toda una hora para realizarse.

Es claro que si se pretende realizar este trabajo en 10 segundos y no en una hora, entonces los 10 coulumbs deberán fluir precisamente en estos diez segundos y no en 3600 segundos.

Podemos pues darnos cuenta que no solo es importante analizar la cantidad de carga Δq que ha viajado a través de cierto <u>sistema</u> físico, sino el tiempo que se ha tomado para ésto.

Precisamente a la cantidad que mide esta rapidez de flujo de carga eléctrica se le llama <u>corriente eléctrica</u>, y se le define como la cantidad neta de carga (positiva) que está fluyendo por unidad de tiempo en cierta dirección (ver ejemplos). Algebraicamente si I representa a la corriente Δq a la carga neta que ha fluido y Δt al tiempo transcurrido, tenemos:

$$I \equiv \Delta Q / \Delta t$$

Esta cantidad según podemos ver por lo que hemos discutido, será muy útil para analizar la rapidez con que se efectua trabajo cuando hay cargas eléctricas en movimiento.

Pero su importancia va mas allá que este uso. De hecho en electrónica y eléctrica, esta cantidad es mas usada directamente que el mismo concepto de carga eléctrica.

POTENCIA ENTREGADA POR UNA FUENTE DE FEM

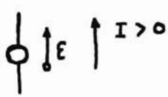
Si una cantidad de carga eléctrica ΔQ ha fluido a través de una fuente de valor ε de su borne negativo a su positivo, sabemos por su definición que esta fuente ha entregado a ΔQ la energía

$$\varepsilon \Delta Q$$

si este flujo de carga ha ocurrido en el tiempo Δt tenemos entonces que la energía entregada por unidad de tiempo o potencia entregada por la fuente es:

$$\varepsilon \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varepsilon I$$

donde I es el valor de la corriente eléctrica a través de la fuente, tomado como positivo si está en la misma dirección que el incremento de potencial que produce la fuente (ver figura).



LEY DE OHM

Algunos materiales tienen la propiedad de permitir el movimiento o flujo neto de carga eléctrica en su interior cuando se aplica un campo eléctrico, aunque este sea muy débil.

Estos materiales reciben el nombre de conductores. Ejemplos de ellos son: el cobre, la plata, el carbón, una solución salina, etc.

A conductores de la misma forma geométrica se les puede aplicar diferentes "voltajes" (diferencias de potencial) y medir la corriente eléctrica resultante. Al hacer este experimento resulta que no todos los conductores presentan la misma relación entre voltaje aplicado y corriente resultante, pero hay algunos que presentan el comportamiento más sencillo posible entre estas cantidades, que de hecho consiste en que en ellos el voltaje aplicado es proporcional a la corriente resultante, siempre y cuando se mantenga fija la temperatura, la presión, etc.:

$$V = IR \quad \text{con} \quad R = \text{constante} > 0 \qquad (1)$$

A estos materiales se les llama óhmicos y a la propiedad que cumplen se le llama "Ley de Ohm".

Al parámetro "R" se le llama resistemcia. Podemos con otras palabras decir que un material óhmico es aquel en el que su resistencia no varía al variar el voltaje aplicado (a temperatura, presión, etc. constantes).

Una manera más precisa de plantear la ecuación anterior es usar el hecho de que las cargas positivas y por ende la corriente, tienden a moverse en el conductor desde regiones de mayor potencial a regiones de menor potencial electrostático.

De esta manera observamos que si I va de A a B entonces B es un punto de menor potencial que A y entonces, puesto que en la ec. (1) V es positivo, tenemos:

$$V = V_A - V_B = -(V_B - V_A) \equiv -\Delta V$$

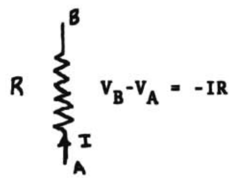
sustituyendo en la ec. (1) obtenemos:

$$\Delta V = -IR$$

que significa que:

la diferencia de potencial ΔV en <u>la dirección de la corriente I</u> es -IR.

Este enunciado nos será útil más adelante. En la figura se muestra un esquema que representa a este resultado.



Es importante mencionar (ver apéndice) que las cargas en movimiento en un conductor óhmico tienen una velocidad (llamada de arrastre) que prácticamente se mantiene <u>constante</u> a lo largo de todo el conductor.

RESISTENCIA EQUIVALENTE O EFECTIVA

Se puede ampliar la noción de resistencia, la cual tiene sentido estricto para el caso de sistemas en que haya conducción eléctrica y donde se satisface la Ley de Ohm, para aplicarla en casos más generales.

En el caso general, simplemente suponemos que en cierto instante entra una corriente I al "borne A" de un sistema físico, p. ej. un motor eléctrico, o un arreglo complicado de conductores y otros componentes, (necesariamente sale del "borne B" también una corriente I en este mismo instante), si además la diferencia de potencial entre B y A es ΔV, entonces definimos a la resistencia efectiva en <u>este instante</u> como:

$$R_e = -\frac{\Delta V}{I} = -\frac{V_B - V_A}{I}$$

Observese que esta <u>ecuación</u> es realmente la misma que la de la Ley de Ohm, pero la diferencia es que los procesos físicos entre A y B pueden ser distintos y más complejos a los que ocurren dentro de un conductor óhmico, y es por esto que R_e <u>no</u> necesariamente es una constante. De hecho, en algunos sistemas se habla, por ejemplo, de "la gráfica de la resistencia en función de la corriente".

POTENCIA ABSORBIDA POR UN SISTEMA CON RESISTENCIA R

Si una corriente I circula de A a V a travĕs de un sistema físico con resistencia eléctrica, entonces la diferencia de potencial $V_B - V_A$ es:

$$- IR$$

Por otro lado, cada cantidad de carga ΔQ que viaja de A a B recibe del campo electrostático la energía

$$\Delta Q \cdot (V_A - V_B)$$

Así pues, la energía por unidad de tiempo o potencia, recibida por las cargas eléctricas es en este caso:

$$\frac{\Delta Q}{t} \cdot (V_A - V_B)$$

que resulta ser entonces

$$- I \cdot (V_B - V_A)$$

Si en esta última ecuación sustituimos $V_B - V_A$ obtenemos pues, que la potencia entregada a las cargas eléctricas por el campo electrostático es:

$$+ I^2 R$$

Entonces, puesto que las cargas eléctricas no están ganando energía cinética neta (viajan con velocidad aproximada constante) se concluye que

$$I^2 R$$

es la potencia que el sistema con resistencia R está recibiendo de las cargas eléctricas.

En un conductor óhmico esta potencia se transforma íntegramente en calor y recibe el nombre de calor de Joule.

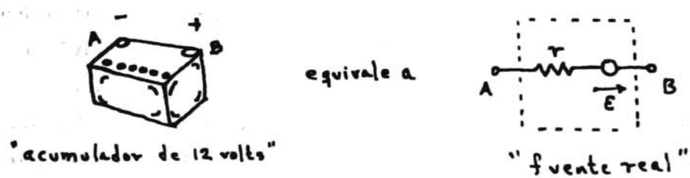
RESISTENCIA INTERNA DE UNA FUENTE DE FEM REAL

Cuando un acumulador, o tal vez un adaptador que se conecta a una calculadora, o en general una fuente de fem proporciona corriente a algún dispositivo, se puede observar que su temperatura aumenta. Esto se debe a que hay conversión de energía en calor en el interior de la fuente. No sólo esto ocurre sino además se puede medir la diferencia de potencial en los extremos o bornes de la fuente y se observa que este voltaje disminuye conforme aumenta la corriente proporcionada.

Como una explicación a este comportamiento podemos pensar que la fuente se comporta como si tuviera cierta resistencia interna r, ya que entonces podemos explicar el calor como producido por la cantidad i^2r, y además si restamos el voltaje ir al valor nominal ε de la fuente podemos explicar también porqué disminuye el voltaje a la salida de este dispositivo.

Precisamente esto que hemos hecho, que ha consistido en entender a un cierto objeto físico complicado en términos de objetos más sencillos es lo que en Física se conoce como "establecer un modelo".

En definitiva, pues, el modelo que empleamos para la fuente de fem real será para nosotros como una fem ideal en serie con una resistencia a la que llamaremos interna.



CORRIENTE, BALANCE DE ENERGÍA EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y LEYES DE KIRCHOFF

Cuando las cargas eléctricas fluyen a través de una pila o generador, de un motor, o de un conductor óhmico, hay intercambio de energía entre estas cargas y estos objetos. De hecho es muy útil, y es la base de la ingeniería electrónica y eléctrica, el uso de las corrientes eléctricas para generar los intercambios de energía que nos convengan y produzcan un cierto efecto deseado.

Así por ejemplo, podemos usar a la corriente eléctrica para que ésta reciba trabajo en los generadores de una presa y luego hacer que esta energía sea entregada por estas cargas en movimiento a un aparato de televisión, a un refrigerador doméstico o bien a una instalación industrial.

Precisamente el objetivo de esta sección es mostrar al lector las técnicas y conceptos útiles en el análisis de estos intercambios de energía en circuitos eléctricos que contengan una o más fuentes de fem.

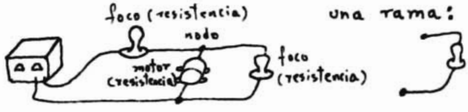
Pero empecemos por definir el contexto en que haremos nuestro análisis.

En primer lugar, por circuito eléctrico se entiende un arreglo de conductores y objetos tal que ofrecen sólo trayectorias cerradas ininterrumpidas a la corriente eléctrica.

Debido a que la potencia que una fuente ε entrega a las cargas depende del sentido y magnitud de la corriente que circule a través de ellas y que la potencia que absorbe un objeto con resistencia R depende también de la corriente a través de este objeto, resulta importante el problema de determinar la corriente que fluye en cada parte del circuito. A la parte o región en que la corriente eléctrica no se puede bifurcar se le llama rama. Así pues, por definición, a lo largo de una rama la corriente siempre vale lo mismo.

A la región de contacto entre varias ramas se le llama nodo.

Son circuitos eléctricos:



No es circuito electrico:

A nuestra disposición para establecer una relación entre los voltajes aplicados y corrientes resultantes en un circuito, tenemos las que se conocen como Leyes de Kirchoff:

1a. Ley: la corriente total que llega a un nodo es exactamente la misma que la que sale de él.

2a. Ley: la suma de las diferencias de potencial entre puntos sucesivos en un circuito, es cero al regresar al punto inicial.

La la. Ley de Kirchotf simplemente plantea que no se acumule carga en ningún nodo y la segunda es simplemente una consecuencia de que el potencial es una función o campo escalar y entonces la suma:

$$(\underline{V_2}-V_1) + (V_3-\underline{V_2}) + (V_4-V_3) + \ldots + (V_1-V_n)$$

resulta idénticamente nula.

Estas leyes nos permiten encontrar un conjunto de ecuaciones lineales en las corrientes en las que los coeficientes en ellas tienen una relación simple con las resistencias de cada rama en el circuito.

Así, por ejemplo, se pueden calcular las corrientes si esto era lo desconocido.

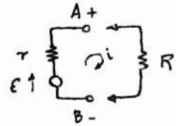
En el análisis de los intercambios de energía debidos a la corriente que circula, que es realmente nuestro objetivo, aplicamos nuestro conocimiento previo y así tenemos:

- la potencia entregada o recibida por un fem es $+ I\varepsilon$ o $-I\varepsilon$ según la corriente positiva I esté en la dirección de la fem o opuesta, respectivamente.
- La potencia absorbida por una rama con resistencia R es I^2R

y tal vez lo más importante es ver que debido a la conservación de la energía la potencia total entregada por las fuentes de fem es exactamente igual a la potencia total absorbida en todas las diferentes partes del circuito:

$$P_T \text{entregada} = P_T \text{ absorbida}$$

EJEMPLO: MÁXIMA POTENCIA QUE PUEDE ENTREGAR UNA FUENTE DE FEM REAL



Si conectamos un objeto con resistencia R a una fuente real de fem ε y resistencia interna r, obtenemos usando la 2a. Ley de Kirchotf que:

$$+ \varepsilon + (-ir) + (-iR) = 0$$

si de aquí despejamos, la corriente resulta:

$$i = \frac{\varepsilon}{r+R}$$

Obsérvese por lo tanto que la corriente i aumenta a medida que R disminuye, lógico!... pero la corriente máxima no es infinita sino es el valor de i cuando hacemos <u>corto circuito</u>; lo cual es por defición hacer R = 0 y así:

$$i_{máx} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Lo que nos interesa sin embargo, es más bien encontrar la potencia P_R disipada (o equivalente: "absorbida") por la carga R, potencia que está dada simplemente por i^2R y entonces:

$$P_R = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} R$$

Al variar el valor R de la carga, pero siempre conectándolo a la misma fuente, resulta que la potencia absorbida P_R también varía. El valor R' de la carga para el cual P_R es máxima se puede encontrar por el procedimiento bien conocido de cálculo diferencial:

$$0 = \frac{dP_R}{dR} = \frac{d}{dR} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} R \right\}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{(r + R)} + \varepsilon^2 R \; (-2(r+R)^{-3})$$

entonces:

$$0 = (r+R) + R(-2)$$

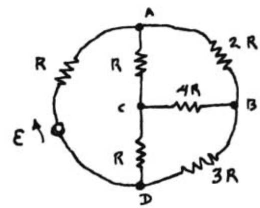
$$= r-R$$

y así vemos el importante resultado de que la carga R obtiene la máxima potencia de la fuente cuando es igual en valor a la resistencia interna de dicha fuente. Este resultado por ejemplo, es el que se aplica cuando se conectan unas bocinas con resistencia total de 8 Ω a un aparato de sonido para lograr la máxima potencia. En este caso por supuesto, la salida del "estéreo" es "la fuente de fem", y ésta tiene una resistencia interna de 8 Ω.

MÉTODO DE MALLAS PARA UN CIRCUITO

Este método resulta sencillo cuando el esquema del circuito se puede dibujar en un plano.

Explicaremos este método vía un ejemplo, cuyo circuito es:



Este método consiste en usar el hecho de que la 1a. Ley de Kirchoff resulta automáticamente válida si todas las corrientes en el circuito son corrientes "circulantes" es decir, corrientes que siguen una trayectoria cerrada (que llamaremos malla).

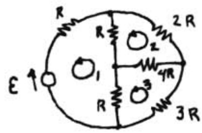
En este ejemplo podemos ver tres mallas principales:

1 DCAD

2 CBAC

3 DBCD

y entonces, asociaremos una corriente i_1 i_2 o i_3 a cada una de estas mallas, obteniendo la figura:



Aplicaremos también que la corriente neta en una rama dada debe obtenerse como una suma o diferencia, según el caso, de las corrientes circulantes que pasen por ella.

Finalmente aplicaremos que las únicas ecuaciones necesarias para resolver el sistema son las correspondientes a la 2a. Ley de Kirchoff en cada una de las mallas ya definidas.

En este ejemplo obtenemos entonces:

malla	ecuación (2a. Ley de Kirchoff)
1	$-(i_1-i_3)R - (i_1-i_2)R - i_1R - \varepsilon = 0$
2	$-(i_2-i_3)4R - i_2\cdot 2R - (i_2-i_1)R = 0$
3	$-i_3\cdot 3R - (i_3-i_2)4R - (i_3-i_1)R = 0$

Es decir, reagrupando términos:

1	$-3R\cdot i_1 + R\cdot i_2 + R\cdot i_3 - \varepsilon = 0$
2	$+R\cdot i_1 - 7R\cdot i_2 + 4R\cdot i_3 = 0$
3	$+R\cdot i_1 + 4R\cdot i_2 - 8R\cdot i_3 = 0$

Mediante este ejemplo observamos que es más fácil encontrar la ecuación para la malla j-ésima a partir de:

1) el coeficiente de i_j es la suma de las resistencias en esta malla j tomada con signo negativo (-).
2) el coeficiente de las otras corrientes i_k es la resistencia común a esta malla j y a la malla k, tomada con signo (+).

De esta manera obtenemos n ecuaciones para las n incógnitas i_j $j=1,\dots,n$.

Una vez encontradas las i_j se pueden calcular las corrientes netas en cada rama.

4.3 Problemas

01. Determine la potencia eléctrica disipada por un dispositivo que porta una corriente estacionaria de 0.50 A cuando este es conectado directamente a una fuente de potencia de 110 V.

02. Si un motor eléctrico desarrolla 0.45 hp y su eficiencia es del 90%, determine la corriente que fluye a través del circuito cuando es directamente colocada a una fuente de potencia de 120 V.

03. Una burbuja luminosa tiene una resistencia de 80Ω y porta una corriente de 1.2 A durante 8 horas. (a) Determinar la potencia disipada. Si el kilowatt hora cuesta 0.50 pesos (b) ¿Cuál es el costo de mantenerlo encendido las 8 horas?

04. Para prepararse una taza de café, un estudiante emplea un calentador de resistencia para calentar 1 kg de agua a una temperatura inicial de 20°C al punto de ebullición. La resistencia del calentador es de 200Ω y porta una corriente promedio de 2.0 A. Si sólo se comunica al agua un 50% del calor total, ¿Que tanto tiempo le tomará llevar al punto de ebullición al agua?

05. Una diferencia de potencial de 60 V mantiene una corriente de 2×10^{-1} A en un conductor metálico. Determinar la corriente en el conductor cuando se triplica la diferencia de potencial.

06. Una diferencia de potencial de 110 V da lugar a una corriente de 2.5 A en el filamento metálico de un calentador. Determinar (a) la resistencia del filamento. (b) la diferencia de potencial necesaria para mantener una corriente de 3.5 A.

07. Determinar la resistencia eléctrica de un alambre de plata a 20°C si su longitud es de 30 m y su diámetro es de 1.5 mm.

08. Determinar la resistividad de un alambre de 50.0 m de largo y diametro de 0.8 mm y cuya resistencia de 2.50 Ω.

09. ¿Cuál es la longitud de un alambre de cobre de 1.4×10^{-5} m de diámetro si su resistencia es de 20Ω a 0°C?

10. Determinar la resistencia eléctrica de un objeto en el que se produce una corriente de 20 mA bajo una diferencia de potencial de 30 V.

11. Determinar la corriente eléctrica promedio cuando fluyen: (a) 5.0×10^{-6} C de carga positiva y 3.0×10^{-6} C de carga negativa en direcciones opuestas y en un punto fijo durante 2.0×10^{-3} s. (b) 5.0×10^{18} electrones durante 2.0×10^{-3}s.

12. (Figura 01) Cuántos coulomb de electricidad pasan a través de un circuito, si la corriente varía en el tiempo de acuerdo a la gráfica de la figura?

13. Si se transportan 10 C de electricidad de un punto a otro de un circuito donde el potencial es 20 V más bajo que en el punto inicial y el tiempo requerido es de 2 s; (a) ¿Qué tanta energía es empleada, (b) ¿Qué tantos electrones habrán pasado a través de una sección transversal cualquiera en 2 s?. (c) ¿Cuál es la resistencia entre estos puntos?

14. Dos alambres A y B poseen las siguientes condiciones: la longitud del alambre B es la mitad del A, el diámetro de B es 2/3 del de A, ¿Cuál es la relación entre sus resistencias?

15. Cuando fluyen 4 A a través de una cierta resistencia se disipan 80 W. ¿Cuál es el trabajo requerido para transportar cada coulomb a través de la resistencia?

16. ¿Depende el sentido de la fem proporcionada por una batería del sentido de la corriente que pasa por la batería?

17. Discutir detalladamente la afirmación de que para la resolución de circuitos el método de la energía y el método del teorema de mallas son perfectamente equivalentes.

18. Frotando un peine con un trozo de lana es posible generar una diferencia de potencial de 10 000 V ¿Por qué no resulta peligroso este alto voltaje, si un voltaje mucho menor suministrado por una toma eléctrica ordinaria es muy peligroso?

19. ¿Cuál es la diferencia entre la fem y la diferencia de potencial?

20. Una batería de 6.0 V establece una corriente de 5.0 A en un circuito externo durante un minuto. ¿En cuánto se reduce la energía química de la batería?

21. Una batería de automóvil de 12 V tiene una carga inicial de 120 A-h. Suponiendo que el potencial a través de las terminales permanece constante hasta que la batería se descarga totalmente ¿Durante cuántas horas puede suministrar una potencia de 200 W?

22. En un circuito simple circula una corriente de 5.0 A. Cuando se añade una resistencia de 2.0Ω en serie, la corriente decae a 4.0 A. ¿Cuál era la resistencia original del circuito?

23. (Figura 02) Demostrar que la potencia suministrada en R por efecto Joule, en el circuito de la figura, es un máximo cuando R es igual a la resistencia interna r de la batería. Demostrar que esta potencia máxima es $P = \mathcal{E}^2/4r$.

24. Una resistencia de 0.10Ω debe generar calor con un ritmo de 10 W al conectarse a una batería cuya fem es 1.5 V. (a) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial que existe a través de la resistencia?

25. Una bombilla eléctrica diseñada para consumir una potencia de 100 W al conectarse a una fuente de 100 V, se conecta a una fuente de 50 V. ¿Cuál es la potencia que consume?

26. (Figura 03) Una porción del circuito AB absorbe una potencia de 50 W y, a través de él, circula una corriente 1.0 A en la dirección mostrada. La resistencia R es de 2Ω. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre A y B? (b) ¿Cuál es la fem del elemento C, suponiendo que no tiene resistencia interna? (c) ¿Cuál es la polaridad de C?

27. Una batería cuya fem es de 2.0 V y cuya resistencia interna es de 1.0 Ω se utiliza para mover a un motor que sube un peso de 2.0 N con una rapidez constante de 0.50 m/s. Suponiendo que no existen pérdidas de potencia, determinar (a) la corriente en el circuito y (b) la caída de potencial a través de las terminales del motor.

28. Dos resistencias R_1 y R_2 pueden conectarse en serie o en paralelo a través de una batería (sin resistencia interna) cuya fem es $\mathcal{E}$. Se desea que la energía de Joule para la combinación en paralelo sea cinco veces mayor que para la combinación en serie.

Si R_1 es igual a 100 Ω, ¿Cuál debe ser el valor de R_2?

29. (Figura 04) (a) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la red mostrada? (b) ¿Cuáles son las corrientes en cada una de las resistencias? Supóngase que $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = R_3 = 50\Omega$ y $\xi = 6.0$ V.

30. (Figura 05) ¿Qué potencia aparece como energía Joule en R_1, R_2 y R_3? (b) ¿Cuál es la potencia suministrada por ξ_1 y ξ_2? (c) Discutir el balance de energía del circuito. Suponer que $\xi_1 = 3.0$ V, $\xi_2 = 1.0$ V, $R_1 = 5.0\Omega$, $R_2 = 2.0\Omega$ y $R_3 = 4.0\Omega$.

31. (Figura 06) Se cuenta con dos baterías cuya fem es ξ y cuya resistencia interna es r. Estas baterías pueden conectarse en serie, o en paralelo y se utilizan para suministrar corriente a una resistencia R, como se muestra en la figura (a) Encontrar una expresión de la corriente en R en ambas conexiones. (b) ¿Cuál de las conexiones produce la mayor corriente si $R > r$ y si $R < r$?

32. (Figura 07) Cuál es la lectura de la corriente en el medidor M expresada en función de ξ y R?

33. (Figura 08) ¿Cuál es la resistencia equivalente entre los puntos terminales x e y de los circuitos mostrados? Supóngase que el valor de cada resistencia es de 10 Ω.

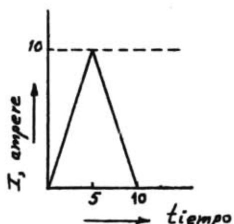


Figura 01

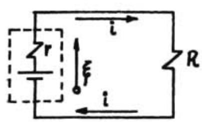


Figura 02

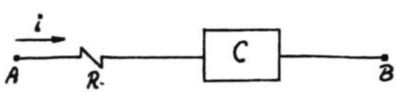


Figura 03

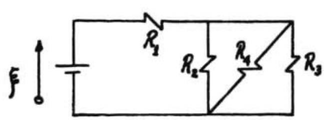


Figura 04

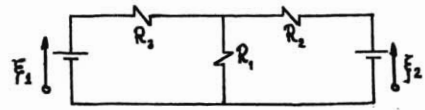


Figura 05

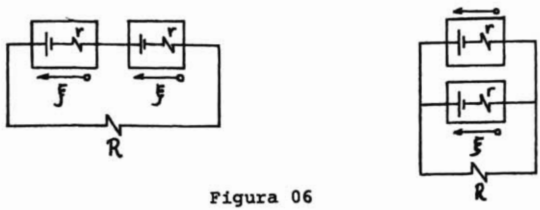


Figura 06

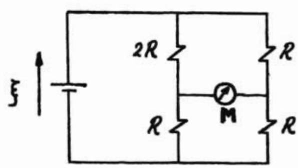


Figura 07

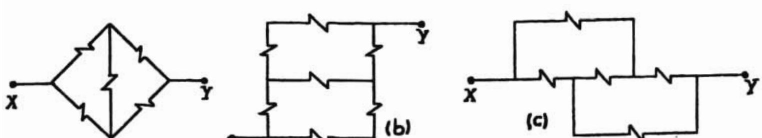


Figura 08

NOTAS DE ENERGÍAS MECÁNICA Y ELÉCTRICA
Se terminó de imprimir en el mes de abril del año 2007 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana *Unidad Azcapotzalco*

La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales

Se imprimieron 50 ejemplares más sobrantes para reposición.

ISBN: 970-654-479-8
978-97065-44797

NOTAS DE ENERGIAS MECANICAS Y ELEC.
VAZQUEZ ALVIDRES
05255
$ 13.00

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales