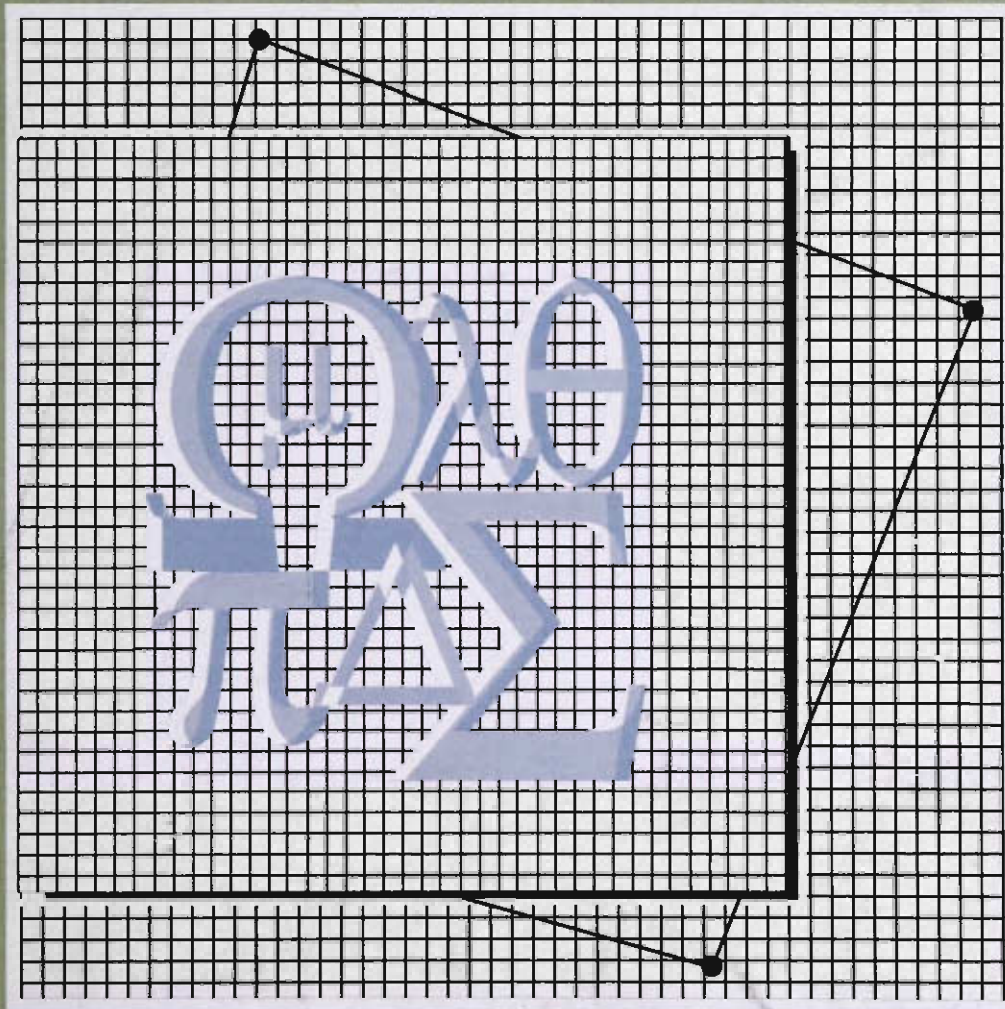


# ELEMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL Y ESTÁTICA EN EL PLANO

Hugo Sergio Becerril Hernández  
José Luis Fernández Chapou  
Nicolás Falcón Hernández  
Alejandro Pérez Ricárdez  
Abelardo Rodríguez Soria



**ELEMENTOS  
DE ÁLGEBRA VECTORIAL  
Y ESTÁTICA EN EL PLANO**

**ELEMENTOS  
DE ÁLGEBRA VECTORIAL  
Y ESTÁTICA EN EL PLANO**

Este material fue aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 24 de marzo del 2004.

# ELEMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL Y ESTÁTICA EN EL PLANO

Hugo Sergio Becerril Hernández  
José Luis Fernández Chapou  
Nicolás Falcón Hernández  
Alejandro Pérez Ricárdez  
Abelardo Rodríguez Soria



2892819



División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Departamento de Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO

RECTOR  
DR. ADRIÁN GERARDO DE GARAY SÁNCHEZ

SECRETARIA  
DRA. SYLVIE JEANNE TURPIN MARION

COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO  
DRA. NORMA RONDERO LÓPEZ

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA  
D. I. JORGE ARMANDO MORALES ACEVES

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES  
LIC. FRANCISCO JAVIER RAMÍREZ TREVIÑO

ILUSTRACIÓN DE DE PORTADA:  
CONSUELO QUIROZ REYES  
DISEÑO DE PORTADA:  
MODESTO SERRANO RAMÍREZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO  
AV. SAN PABLO 180  
COL. REYNOSA TAMAULIPAS  
DEL. AZCAPOTZALCO  
C. P. 02200  
MÉXICO, D. F.

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO

HUGO SERGIO BECERRIL HERNÁNDEZ  
JOSÉ LUIS FERNÁNDEZ CHAPOU  
NICOLÁS FALCÓN HERNÁNDEZ  
ALEJANDRO PÉREZ RICARDEZ  
ABELARDO RODRÍGUEZ SORIA

*ELEMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL Y ESTÁTICA EN EL PLANO*  
ISBN: 970-31-0374-X

1ª. EDICIÓN, 2005  
2ª. REIMPRESIÓN, 2007  
3ª. REIMPRESIÓN, 2009

IMPRESO EN MÉXICO

## RESUMEN DE CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b> .....	<b>iv</b>
<b>CONVENCIONES NOTACIONALES</b> .....	<b>iv</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>vi</b>
 <b>MÓDULO I. ÁLGEBRA VECTORIAL EN EL PLANO</b>	
CAPÍTULO 1. VECTORES Y FLECHAS. REPRESENTACIONES ANALÍTICAS .....	I-3
CAPÍTULO 2. EJEMPLOS DE VECTORES FÍSICOS .....	I-14
CAPÍTULO 3. OPERACIONES VECTORIALES .....	I-23
CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN DE LOS VECTORES. BASES VECTORIALES.....	I-44
CAPÍTULO 5. PRODUCTOS ESCALAR Y EXTERNO DE VECTORES .....	I-62
 <b>MÓDULO II. ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA EN EL PLANO</b>	
CAPÍTULO 1. FUERZAS. LEYES DE NEWTON DE LA MECÁNICA .....	II-3
CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA .....	II-15
CAPÍTULO 3. MODELOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA. SISTEMAS DE POLEAS .....	II-27
CAPÍTULO 4. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE .....	II-43
CAPÍTULO 5. SISTEMAS EN EQUILIBRIO. FUERZAS COPLANARIAS .....	II-58
CAPÍTULO 6. LA FUERZA DE FRICCIÓN O ROZAMIENTO .....	II-76
 <b>MÓDULO III. ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO EN EL PLANO</b>	
CAPÍTULO 1. MOMENTO DE UNA FUERZA. SISTEMAS DE FUERZAS .....	III-3
CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO. RESULTANTE LOCALIZADA .....	III-16
CAPÍTULO 3. REACCIONES EN APOYOS. PROBLEMAS SOBRE EQUILIBRIO .....	III-26
APÉNDICE. CÁLCULO DE RESULTANTES .....	III-48



## PRÓLOGO

El propósito de este libro es auxiliar al estudiante en el curso de FUERZA Y EQUILIBRIO, materia que se imparte a todos los alumnos de ingeniería de primer ingreso en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.

El libro trata los siguientes temas generales:

Álgebra vectorial en el plano

Estática de partículas en el plano

Estática de cuerpos rígidos en el plano

El tema de álgebra vectorial se trata aquí con mayor extensión que la señalada en el programa de la materia, con el fin de que el libro sirva de consulta en trimestres posteriores.

En cuanto a la estática de partículas hemos presentado los conceptos con mucho detalle, y atendido con igual importancia el aspecto aplicativo del tema.

En la estática del cuerpo rígido nos hemos limitado a los temas más básicos. Sin embargo, hemos añadido otros temas, fuera del programa oficial, con el objeto de que el estudiante ligue bien esta materia introductoria con su curso más completo de Estática que llevará en un trimestre posterior. Las secciones que abordan estos temas adicionales se marcan con un asterisco y pueden ser omitidas.





## CONVENCIONES NOTACIONALES

- Cantidades positivas por definición se escriben en tipo normal (Palatino Linotype, 9 puntos).

Caracteres normales:

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz      ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Ejemplos: masa "m"; longitud "L"; constante elástica "k"; tiempo "t"; magnitud de fuerza "F", peso  $W$ , etc.

- Cantidades algebraicas (o signadas, esto es, que pueden ser positivas, negativas o nulas) se escriben en tipo cursivo.

Caracteres en tipo cursivo:

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz      ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Ejemplos: coordenadas "(x, y)"; componentes de fuerzas  $F_x, F_y$ ; trabajo  $W$ , etc.

Se exceptúan de las reglas anteriores las letras griegas  $\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \dots$ , etc. y las diferencias formadas con la letra griega " $\Delta$ ", como " $\Delta L$ ", " $\Delta \theta$ ", etc., que son cantidades algebraicas.

- Cantidades vectoriales se escriben en negrita. Ejemplos:  $\mathbf{F}, \mathbf{v}, \Delta \mathbf{r}, \mathbf{F}_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ , etc.

Las magnitudes de estos vectores se designan como sigue:  $F, v, |\Delta \mathbf{r}|, F_i, a, b$ , etc. Si estos vectores estuvieran todos a lo largo de un "eje X", sus componentes (únicas) según este eje se escribirían:  $F, v, \Delta x, F_{ix}, a, b$ , etc.

El vector de posición se denota con  $\mathbf{r} = (x, y)$ .

El vector separación entre los puntos A y B se escribe  $\mathbf{AB}$ . Su magnitud se escribe  $|\mathbf{AB}|$  o bien AB.

- Las unidades físicas se escriben en tipo Courier New de 10 puntos. Ejemplos:

$N = 20 \text{ N}$  (Fuerza normal igual a 20 newtons)

$G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$  (Constante de gravitación universal)

- Como es usual en física, los símbolos algebraicos usados para las cantidades físicas representan el producto del valor numérico de la cantidad y sus unidades físicas. Por ejemplo:

$d = 15 \text{ m}$        $F_x = -234 \text{ N}$

En los cálculos muchas veces suprimiremos las unidades físicas, teniendo cuidado, por supuesto, de expresar previamente todas las cantidades en el Sistema Internacional de Unidades o sistema "SI". En el resultado del cálculo sí añadiremos las unidades físicas.

Ejemplo. Dados  $k = 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  y  $x = 0.08 \text{ m}$ , calcular  $F$  de la relación  $F = kx$ .

Cálculo que incluye unidades:  $F = 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.08 \text{ m} = 160 \text{ N}$

Cálculo sin incluir unidades excepto al final:  $F = 2000 \cdot 0.08 = 160 \text{ (N)}$ .

(Note que en este último caso la unidad la escribimos entre paréntesis).

- La numeración de las fórmulas, ecuaciones, figuras, ejemplos, etc., empieza desde "1" en cada Módulo. Al hacer referencia a una fórmula o resultado se da solamente el número de la fórmula si ésta se encuentra en la misma o anterior página a la que contiene la referencia. Ejemplo: "ecuación (15)". Si la fórmula se encuentra "lejos", se añade al paréntesis la página donde se encuentra. Ejemplo: "ecuación (48)-p43", que indica la ecuación número 48 sita en la página 43.



## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

### **GUÍA DE FUERZA Y EQUILIBRIO**

Francisco Medina, Juan Quintanilla

Publicación de la Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.

### **FUERZA Y EQUILIBRIO**

Luz María García Cruz, Tomás David Navarrete Gonzalez, José Ángel Rocha Martínez

Innovación Editorial Lagarta, S.A. de C.V., México 2003.

### **INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA**

Alejandro Pérez Ricardez, Mauricio Bastián, Sergio Beceril,

J. de Jesús Castro, Nicolás Falcón, Samuel Alcántara

Just in Time Press, S.A. de C.V.

México 2002



# MÓDULO I

## ÁLGEBRA VECTORIAL EN EL PLANO

### CONTENIDO

<b>CAPÍTULO 1. VECTORES Y FLECHAS.</b>	
<b>REPRESENTACIONES ANALÍTICAS</b>	
1.1. Introducción .....	I-3
1.2. ¿Qué es un vector físico? .....	I-3
1.3. Igualdad de vectores .....	I-5
1.4. Representaciones analíticas de los vectores .....	I-6
1.5. Cálculo de componentes .....	I-8
1.6. Paso de la representación por componentes a la de magnitud y dirección .....	I-10
1.7. Problemas .....	I-11
<b>CAPÍTULO 2. EJEMPLOS DE VECTORES FÍSICOS</b>	
2.1. Introducción .....	I-14
2.2. El vector separación .....	I-14
2.3. El vector desplazamiento .....	I-17
2.4. El vector velocidad del movimiento uniforme .....	I-17
2.5. El vector de posición .....	I-19
2.6. Problemas .....	I-20
<b>CAPÍTULO 3. OPERACIONES VECTORIALES</b>	
3.1. Introducción .....	I-23
3.2. Relación de igualdad de vectores .....	I-23
3.3. Suma vectorial .....	I-24
3.4. Ejemplos relativos a la suma de dos vectores .....	I-25
3.5. Vector nulo. Negativo de un vector .....	I-28
3.6. Propiedades de la suma vectorial .....	I-28
3.7. Producto de un vector y un número real .....	I-30
3.8. Resta de vectores y división de un vector por un número real .....	I-32
3.9. Ejemplos .....	I-33
3.10. Combinaciones lineales de vectores .....	I-37
3.11. Independencia lineal de vectores .....	I-38
3.12. Problemas .....	I-40
<b>CAPÍTULO 4. TRANSFORMACIÓN DE LOS VECTORES. BASES VECTORIALES</b>	
4.1. Marco de referencia o referencial .....	I-44
4.2. Sistema de coordenadas .....	I-45
4.3. Velocidad relativa .....	I-45
4.4. Manejo de los vectores en una dimensión .....	I-47
4.5. Traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas .....	I-49
4.6. Transformación del vector de posición .....	I-52
4.7. ¿Qué es la aceleración? .....	I-53
4.8. Vectores unitarios .....	I-54
4.9. Bases vectoriales .....	I-55
4.10. Base ortonormal cartesiana .....	I-57
4.11. Relación entre las bases cartesianas correspondientes a dos sistemas distinto .....	I-58
4.12. Base ortonormal polar .....	I-59
4.13. Problemas .....	I-61
<b>CAPÍTULO 5. PRODUCTOS ESCALAR Y VECTORIAL</b>	
5.1. Producto escalar .....	I-62
5.2. Usos del producto escalar .....	I-62
5.3. Invariantes o escalares .....	I-65
5.4. Producto externo .....	I-66
5.5. Usos del producto externo .....	I-67
5.6*. Aplicaciones a la geometría clásica .....	I-69
5.7*. Aplicaciones a la geometría analítica .....	I-71



## CAPÍTULO 1

## VECTORES Y FLECHAS. REPRESENTACIONES ANALÍTICAS

## 1.1. Introducción

La definición más general de vector se da en las matemáticas, donde se introduce el concepto de *espacio vectorial real*. Estos espacios son conjuntos cuyos elementos, denominados *vectores*, obedecen un sistema de axiomas que incorpora una relación de igualdad de vectores y regula dos operaciones vectoriales básicas: la suma vectorial y el producto de un vector por un número real.

El concepto matemático de vector es abstracto. No concierne esencialmente a las matemáticas la cuestión de qué son los vectores, sino cómo se comportan, es decir, cuál es el álgebra que los gobierna. Corresponde ya a las diversas disciplinas, aplicadas o no, el crear o identificar las especies de vectores que les sean útiles y naturales.

Esto último es lo que haremos en la física. Vamos a introducir una especie de vectores concretos que, por darles un nombre, denominaremos *vectores físicos*. Esta clase de vectores son parejas ordenadas de números reales, a las que podemos hacerles corresponder propiedades de magnitud y dirección. El estudiante interesado en profundizar en el aspecto lógico y formal de los vectores abstractos hará bien en consultar los libros de matemáticas dedicados.

Nos limitaremos a vectores bidimensionales, basándonos en un espacio plano euclideo donde estableceremos sistemas de coordenadas cartesianas.

## 1.2. ¿Qué es un vector físico?

En la física hay muchas cantidades con propiedades de magnitud y dirección. La velocidad es una de ellas: para muchos fines prácticos no bastaría decir, por ejemplo, que la velocidad de un avión fuera de, digamos, 300 km/h; sería menester especificar además en qué dirección se está moviendo el avión. Lo mismo podemos decir acerca de las fuerzas. El efecto de un jalón o empujón depende no solamente de qué tan fuerte lo demos, sino también de hacia dónde jalamos o empujemos. Otras cantidades físicas como el desplazamiento, la aceleración, el ímpetu o momento lineal, el campo eléctrico, magnético o gravitatorio, etc., pertenecen a este género de cantidades, las cuales se denominan *vectores* o *cantidades vectoriales*.

(1) Un *vector físico* es una cantidad con propiedades de magnitud y dirección.

Nota. De ahora en adelante abreviaremos "vector físico" por "vector", a secas.

Pasemos de la física a la geometría. Hay objetos geométricos simples a los que también podemos atribuirles propiedades de magnitud y dirección. Son los *segmentos rectos dirigidos* o *flechas*.

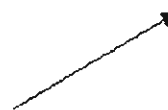


Fig. 1. Flecha.

A todo vector físico le podemos asociar una flecha. La longitud de la flecha correspondería a la magnitud de la cantidad física vectorial considerada, y la dirección de la flecha en el papel o pizarrón correspondería a la dirección de la cantidad física en el espacio físico (más sobre este asunto en la sección 4.5). Claro está, habría que definir una escala de conversión entre las unidades de longitud de la flecha y las unidades físicas del vector. Por ejemplo, podríamos convenir en que un segmento de 10 mm representara 100 km/h; entonces una velocidad de 500 km/h vendría representada por una flecha de 50 mm. Necesitaríamos definir una escala conveniente para cada clase de cantidad vectorial física examinada, según las unidades que tenga. Todas estas escalas coexistirían junto con la escala de longitud de los ejes X y Y del sistema adoptado.

La correspondencia vector  $\leftrightarrow$  flecha va más allá de la mera representación gráfica de magnitud y dirección. Las operaciones algebraicas con vectores tienen sus análogas con flechas (citamos, por ejemplo, la ley del paralelogramo). Las leyes de transformación de los vectores frente a traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas son muy comprensibles si echamos mano de las flechas. Finalmente, en la física se usan muchas clases de diagramas con base en flechas, las cuales nos permiten reconocer inmediatamente las interdependencias direccionales de las cantidades físicas que representan.



Si bien el vector es una cantidad física y la flecha un objeto geométrico, conviene fundir ambos conceptos en uno sólo, así que usaremos los términos "vector" y "flecha" indistintamente desde aquí en adelante.

En la *notación simbólica*, un vector o flecha se representa por una literal en negrita (como  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{P}$ , etc.). La magnitud del vector se denota con la misma literal en fuente normal (como  $A$ ,  $u$ ,  $i$ ,  $V$ ,  $P$ , etc.), o bien encerrando el símbolo vectorial en barras de valor absoluto (como  $|\mathbf{A}|$ ,  $|\mathbf{u}|$ ,  $|\mathbf{i}|$ ,  $|\mathbf{V}|$ ,  $|\mathbf{P}|$ , etc.). Se suele llamar también *módulo* o *tamaño* a la magnitud de un vector.

Podemos decir también que una cantidad física vectorial es una pareja de números reales denominados magnitud y dirección.

La *magnitud* de un vector se obtiene en el laboratorio o emplazamiento observacional mediante un procedimiento de medición pertinente a la clase de cantidad física considerada. También puede obtenerse indirectamente empleando alguna ley física que la relacione con otras cantidades físicas conocidas. La magnitud de un vector es un número *positivo* multiplicado por una unidad física.

La *dirección* de un vector es una relación espacial determinada por dos puntos del espacio físico. Estos puntos pertenecen a los cuerpos materiales que circundan al fenómeno físico considerado (al llamado "marco de referencia", concepto que precisaremos más adelante, en la Sección 4.1).

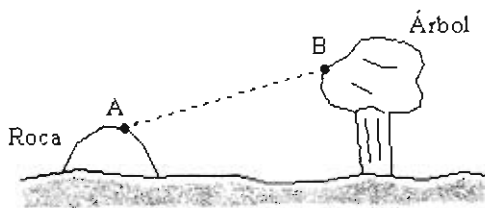


Fig. 2

Así, en la Fig. 2 la pareja de puntos "A" y "B", en ese orden, determinan una dirección espacial, la cual consideramos distinta de la dirección determinada por "B" y "A", en ese orden.

Cuantitativamente: la dirección de un vector es un ángulo que se define con ayuda de un sistema de coordenadas, como explicamos a continuación.

(2) La *dirección* de un vector es el ángulo  $\theta$  que forma el vector con la *dirección positiva* del eje X, medido en sentido antihorario (Fig. 3).

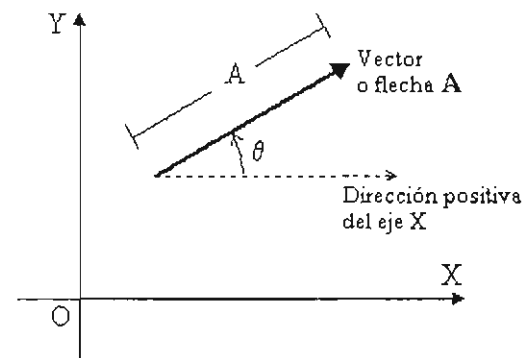


Fig. 3

Note que este concepto de dirección engloba ambas cosas que en los cursos elementales se nombran "dirección" y "sentido". Corresponde además al uso cotidiano: uno dice "camine Ud en esta dirección", y señala hacia una *dirección y sentido* bien definidos.

Así por ejemplo, los vectores A y B de la Fig. 4 tienen *direcciones opuestas*, que son ángulos que se diferencian en  $180^\circ$ .

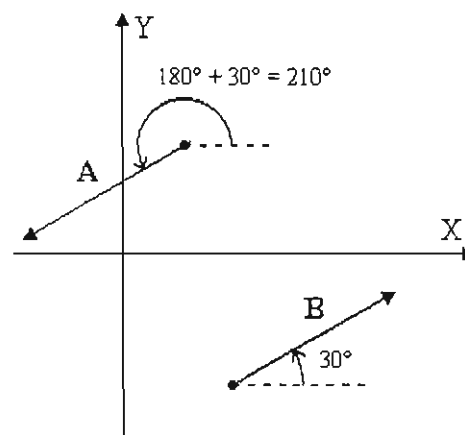


Fig. 4. Vectores con direcciones opuestas.

De acuerdo con esta noción, el eje X define dos *direcciones*. La dirección hacia donde crece la coordenada  $x$  es la *dirección positiva* del eje X (o *dirección +X*); la opuesta es la *dirección negativa* del eje X (o *dirección -X*). Véase la Fig. 5. Análogamente con respecto al eje Y.

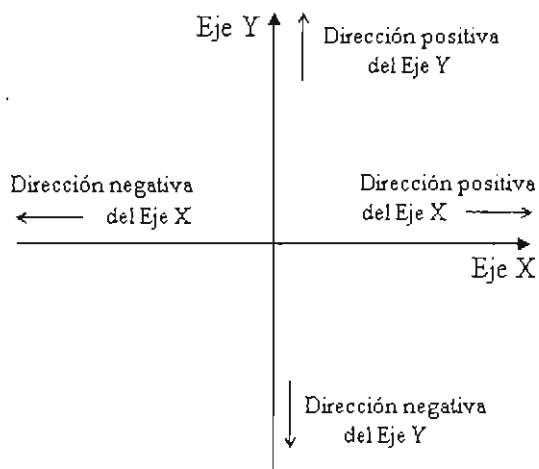


Fig. 5

No abandonaremos definitivamente el concepto de "sentido", que seguiremos usando ocasionalmente. Así, con respecto a los vectores de la Fig. 4, podemos decir también que poseen *sentidos* opuestos.

La dirección  $\theta$  se expresa en radianes o grados y puede tomar valores en el intervalo  $[0, \infty)$ . Ahora bien, en este escrito emplearemos los ángulos casi siempre como argumentos de funciones trigonométricas, que repiten sus valores cada  $2\pi$  radianes. Ello nos permitirá limitar  $\theta$  al intervalo  $[0, 2\pi]$  (en radianes) o al intervalo  $[0, 360^\circ]$  (en grados). Más aun, acordaremos medir el ángulo optativamente en sentido *horario*, en cuyo caso deberemos tomarlo como *negativo*. Esta última convención proviene de identidades trigonométricas como las siguientes:

$$\text{sen } 290^\circ = \text{sen } (290^\circ - 360^\circ) = \text{sen}(-70^\circ)$$

$$\text{cos } 290^\circ = \text{cos } (290^\circ - 360^\circ) = \text{cos}(-70^\circ)$$

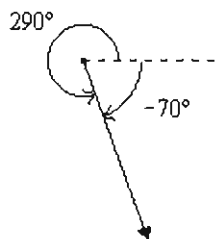


Fig. 6

De esta manera, por ejemplo, las direcciones "290°" y "-70°" se considerarán equivalentes (Fig. 6).

### 1.3. Igualdad de vectores

Aparte de magnitud y dirección, toda flecha posee otra propiedad importante: su "ubicación" o "localización" en el plano. Definiremos el *punto de aplicación* de una flecha como el punto desde donde se traza la misma. Por ejemplo, los puntos de aplicación de las flechas P, Q, R y S mostradas en la Fig. 7 son respectivamente a, b, c y d.

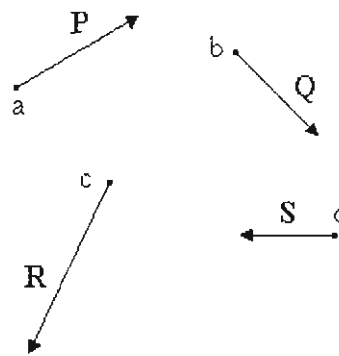


Fig. 7. a, b, c, d: puntos de aplicación.

Al punto de aplicación le llamaremos también *punto inicial* o *pluma* del vector. Al otro extremo, *punta* o *punto final*.

Ahora bien, en los cálculos con vectores físicos muchas veces no figuran los puntos de aplicación. Por ejemplo, el vector velocidad de un móvil no está ligado a ningún punto del móvil; su flecha representativa se suele trazar cerca del móvil, en cualquier lugar.

La Fig. 8 muestra un automóvil que sube por una pendiente. Las líneas paralelas indican lluvia. El automóvil y la lluvia tienen velocidades vectoriales  $v$  y  $u$ , respectivamente. Estos vectores se han trazado libremente, sin atribuirles un respectivo punto de aplicación.

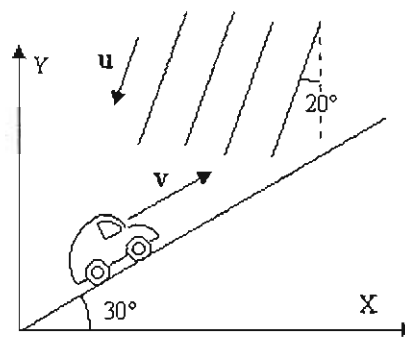


Fig. 8

Asimismo, generalmente no hay necesidad de dibujar a escala los vectores de magnitud conocida excepto, naturalmente, cuando queremos efectuar alguna operación vectorial por métodos gráficos.

Aquellos vectores a los que no es necesario atribuirles puntos de aplicación se denominan vectores *libres* o *no-localizados*. La flecha que representa geoméricamente un vector libre puede trazarse en cualquier lugar del plano. Dicho de otra manera, la flecha puede *trasladarse* a cualquier lugar del plano y sigue representando el mismo vector.

Nota. La *traslación* de una flecha es un movimiento en el que la flecha se desplaza "paralelamente a sí misma" y conservando su tamaño.

Por otra parte existen clases de vectores, como las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos extendidos, cuyos puntos de aplicación sí juegan un papel determinante. En estos casos, tales puntos se manejan matemáticamente *por separado* de las propiedades de magnitud y dirección. Esta clase de vectores los llamaremos *localizados*. Los usaremos en el Módulo III.

En el álgebra vectorial conviene dar la siguiente definición de igualdad vectorial, la cual hace referencia solamente a las propiedades de magnitud y dirección de los vectores:

(3) Dos vectores son *iguales* si y sólo si poseen la misma magnitud y la misma dirección (aunque posean puntos de aplicación diferentes).

Así por ejemplo, en la Fig. 9 tenemos 4 flechas, todas ellas con la misma dirección y tamaño, pero puntos de aplicación distintos. Cualquiera de estas flechas representa el *mismo vector*, denotado con "V".

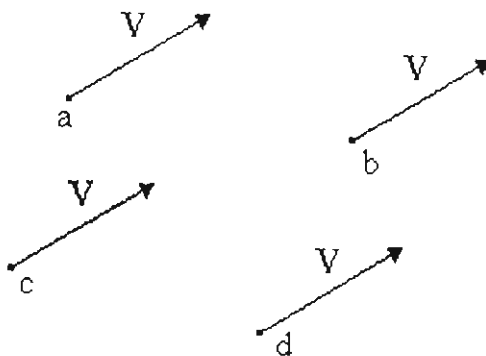


Fig. 9

### 1.4. Representaciones analíticas de los vectores

(4) En la *representación por magnitud y dirección*, un vector cualquiera **A** se escribe

$$\mathbf{A} = (A \angle \theta)$$

donde *A* es la magnitud y  $\theta$  la dirección del vector.

Por ejemplo, si la magnitud del vector de la Fig. 6 es igual a "25" unidades, entonces este vector es:

$$(25 \angle -70^\circ)$$

o, equivalentemente,

$$(25 \angle 290^\circ)$$

**Ejemplo 1.** Representaremos por magnitud y dirección los vectores mostrados en la Fig. 10. El número junto a cada vector es su magnitud, y los ejes se colocan del *modo estándar* (Eje X "horizontalmente hacia la derecha" del papel, Eje Y "verticalmente hacia arriba").

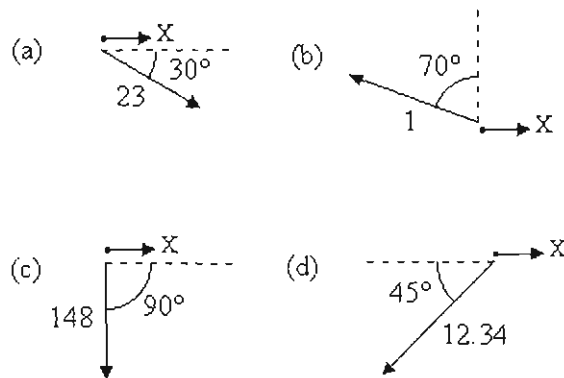


Fig. 10

Notemos que ninguno de los ángulos mostrados en la Fig. 10 es propiamente lo que hemos definido como la "dirección" del vector respectivo.

Antes que nada debemos indicar en el punto inicial de cada vector la dirección positiva del eje X, desde donde mediremos la dirección  $\theta$ . Esto ya lo hemos hecho en la figura, en donde hemos trazado una pequeña flecha horizontal hacia la dirección +X en el punto inicial de cada vector. Luego, con el pivote en la pluma del vector, rotamos la dirección +X hasta que

coincida con la dirección del vector. Esto lo hacemos a través del menor ángulo posible, valiéndonos ya sea de rotación antihoraria u horaria.

Hallamos estas direcciones:

- (a)  $\theta = -30^\circ$       (b)  $\theta = 160^\circ$
- (c)  $\theta = -90^\circ$     (d)  $\theta = -135^\circ$

Las representaciones que buscamos son entonces

- (a)  $(23 \angle -30^\circ)$     (b)  $(1 \angle 160^\circ)$
- (c)  $(148 \angle -90^\circ)$  (d)  $(12.34 \angle -135^\circ)$

Existe otra representación analítica de los vectores, la cual se revelará más conveniente a la hora de introducir las operaciones vectoriales. Es la representación por componentes.

(5) Las **componentes X y Y de un vector**  $\mathbf{A} = (A \angle \theta)$ , denotadas con " $A_x$ " y " $A_y$ ", son sus **proyecciones ortogonales algebraicas** sobre los ejes X y Y, respectivamente. Se tiene

- (a)  $A_x = A \cos \theta$
- (b)  $A_y = A \sin \theta$

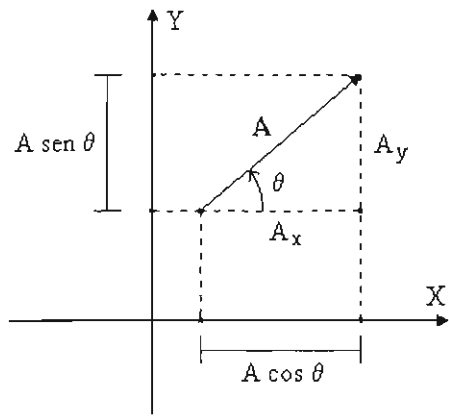


Fig. 11

En la **representación por componentes**, un vector  $\mathbf{A}$  con componentes  $A_x$  y  $A_y$  se escribe

- (c)  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$

Proyecciones "algebraicas" significa que poseen signo algebraico, según hacia donde apunte el vector. Al respecto, he aquí lo que se desprende de las definiciones (5a,b):

No importa en qué lugar del plano esté el vector,

- Si el vector apunta hacia el semiplano *derecho* (o sea hacia valores crecientes de x), su componente X es positiva (Fig. 12a). Si apunta hacia el semiplano *izquierdo* es negativa (hacia valores decrecientes de x, Fig. 12b).

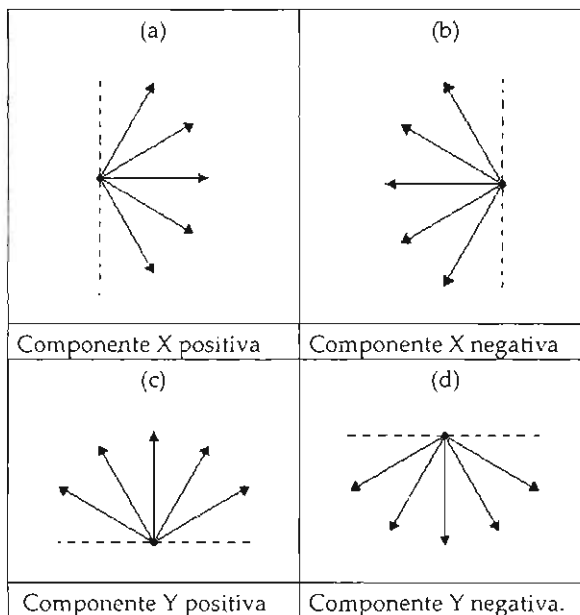


Fig. 12

- Si el vector apunta hacia el semiplano *superior* (hacia valores crecientes de y, Fig. 12a), su componente Y es positiva. Si apunta hacia el semiplano *inferior* (hacia valores decrecientes de y, Fig. 12b), es negativa.
- Flechas alineadas con el Eje X tienen nula componente Y. Flechas alineadas con el eje Y tienen nula componente X. Ejemplos en la Fig. 13.

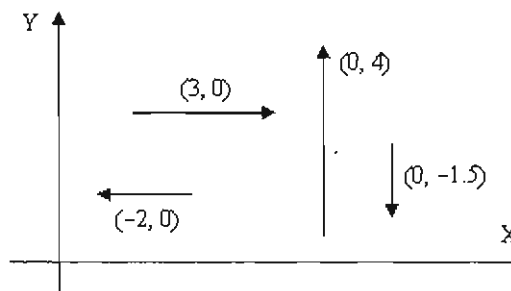


Fig. 13

Dado que los vectores son libremente trasladables, pueden trazarse en cualquier cuadrante del plano sin afectar los signos de sus componentes, las cuales no dependen de la posición del origen de coordenadas O, sino solamente de la orientación de los ejes coordenados X y Y. Esto es a diferencia de los puntos del plano, cuyas coordenadas tienen signos que dependen del cuadrante del plano en que se encuentren.

**Ejemplo 2.** Calcular las componentes de los vectores

$$P = (4 \angle 123^\circ) \quad \text{y} \quad M = (46 \angle -36^\circ)$$

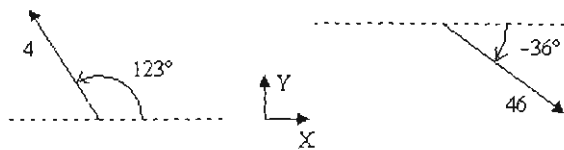


Fig. 14

Están dadas las direcciones ( $123^\circ$  y  $-36^\circ$ ), así que podemos aplicar directamente las fórmulas (5a,b). Obtenemos

Vector	Componente X	Componente Y
$P = (4 \angle 123^\circ)$	$4 \cos 123^\circ = -2.178$	$4 \operatorname{sen} 123^\circ = 3.355$
$M = (46 \angle -36^\circ)$	$46 \cos(-36^\circ) = 37.215$	$46 \operatorname{sen}(-36^\circ) = -27.038$

Note que el signo correcto de cada componente lo da automáticamente la función seno o coseno.

**Ejemplo 3.** Calcular las componentes del vector U mostrado en la Fig. 15. La magnitud es  $U = 200$ .

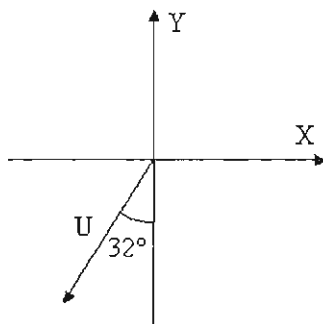


Fig. 15

Para usar las fórmulas (5a,b) primeramente debemos obtener la dirección del vector.

Para que la dirección +X coincida con la del vector debemos girar el Eje X en un ángulo de

$$-(90^\circ + 32^\circ) = -122^\circ = \text{dirección de U}$$

Entonces

$$U = (200 \angle -122^\circ)$$

$$\Rightarrow U_x = 200 \cos(-122^\circ) = -105.984$$

$$U_y = 200 \operatorname{sen}(-122^\circ) = -169.610$$

o sea

$$U = (-105.984, -169.610)$$

### 1.5. Cálculo de componentes

El cálculo de componentes es una tarea que estaremos haciendo con bastante frecuencia. A este respecto es importante evitar el error común de usar la función seno cuando debe ser coseno, o viceversa.

Por otra parte, en muchas ocasiones usaremos ejes X y Y que no están colocados del modo estándar (o sea el Eje X "horizontal hacia la derecha" y el Eje Y "vertical hacia arriba"), sino *inclinados*. En este escenario algunos estudiantes suelen girar los ejes, junto con los vectores, para "lograr" que los ejes queden horizontal y vertical. Esta práctica no es eficiente y no se recomienda. Debemos aprender a calcular componentes con respecto a cualquier sistema de ejes, estén como estén.

Las fórmulas (5a,b) nos dan un método para calcular componentes. Según estas fórmulas la componente X de un vector se calcula con el *coseno de la dirección* ( $A_x = A \cos \theta$ ) y la componente Y con el *seno de la dirección* ( $A_y = A \operatorname{sen} \theta$ ). Obviamente, este modo de calcular las componentes exige que se determine previamente la dirección del vector (si es que no está dada ya, como fue el caso en el Ejemplo 2).

Sin embargo, muchas veces la orientación de los vectores en el plano se da mediante ángulos que no son propiamente las direcciones de estos vectores, como ocurrió con el vector U en el Ejemplo 3. Representa una pérdida de tiempo valioso el tener que obtener previamente la dirección  $\theta$ . Es mejor aprender a calcular componentes usando directamente los ángulos dados en las figuras.

El cálculo se basa en el siguiente teorema de trigonometría:

- (6) En un triángulo rectángulo:  
Un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo adyacente.

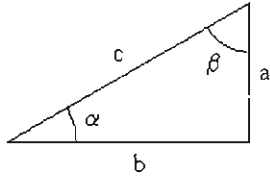


Fig. 16

En la Fig. 16:

El ángulo opuesto al cateto "a" es " $\alpha$ ", y el ángulo adyacente es " $\beta$ ".

El ángulo opuesto al cateto "b" es " $\beta$ ", y el ángulo adyacente es " $\alpha$ ".

Se tiene

$$a = c \operatorname{sen} \alpha = c \operatorname{cos} \beta$$

$$b = c \operatorname{sen} \beta = c \operatorname{cos} \alpha$$

En la aplicación de este teorema la hipotenusa será el vector y los catetos serán las componentes.

Consideremos un ejemplo.

Digamos que queremos calcular las componentes X y Y del vector **A** de la Fig. 17.

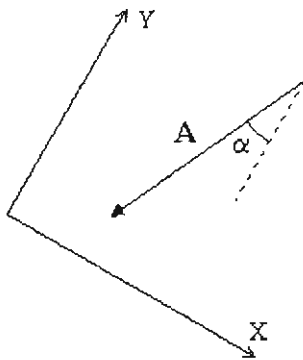


Fig. 17

Lo primero que hacemos es completar (o imaginar completo) un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el vector **A** dado y cuyos catetos sean paralelos a los ejes X y Y. Este triángulo se muestra en la Fig. 18.

Si conocemos el ángulo  $\alpha$  en la Fig. 18, entonces calculamos las componentes  $A_x$  y  $A_y$  en la

forma

$$A_x = -A \operatorname{sen} \alpha$$

$$A_y = -A \operatorname{cos} \alpha$$

Por otra parte, si el ángulo que conocemos es  $\beta$ , tendríamos

$$A_x = -A \operatorname{cos} \beta$$

$$A_y = -A \operatorname{sen} \beta$$

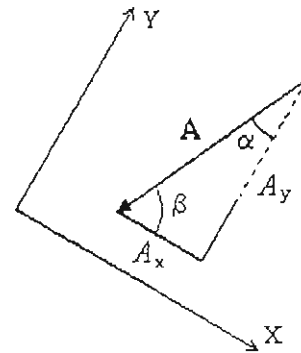


Fig. 18

Échele un vistazo a la Fig. 19, que muestra unos vectores, junto con los respectivos triángulos rectángulos formados con catetos paralelos a los ejes X, Y de algún sistema, distinto en cada caso. Para cada vector se indica cuál es la componente que se forma con el seno. La otra componente se forma automáticamente con el coseno

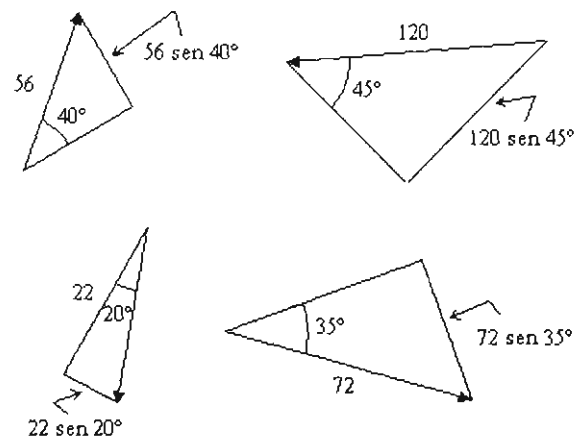


Fig. 19

**Ejemplo 4.** En términos del ángulo mostrado para cada vector, obtener sus componentes X y Y. Las líneas a rayas son líneas axiales (paralelas a algún eje).

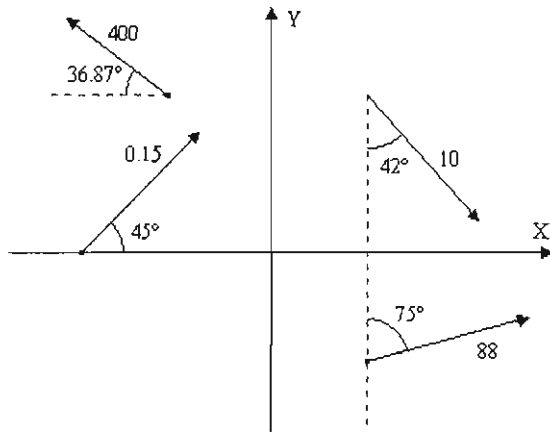


Fig. 20

En la Fig. 21 hemos completado los triángulos rectángulos. En cada caso el cateto opuesto al ángulo dado es el que se forma con el seno de este ángulo, como se muestra en la figura.

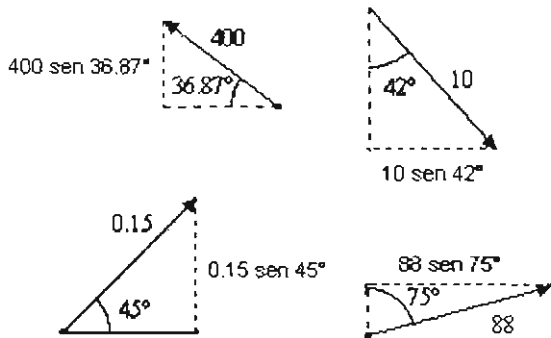


Fig. 21

Entonces los vectores son los siguientes:

$$(-400 \cos 36.87^\circ, 400 \sin 36.87^\circ)$$

$$(10 \sin 42^\circ, -10 \cos 42^\circ)$$

$$(0.15 \cos 45^\circ, 0.15 \sin 45^\circ)$$

$$(88 \sin 75^\circ, 88 \cos 75^\circ)$$

**Ejemplo 5.** En la Fig. 22 se muestra un bloque colocado sobre un plano inclinado a 35°. Sobre el bloque existen varios vectores—fuerza denotados con P, W, N, T y F, en las direcciones indicadas (la figura muestra las respectivas magnitudes P, W, N, T y F).

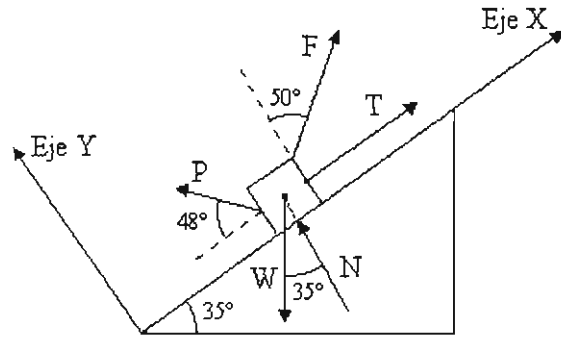


Fig. 22

El eje X se ha definido a lo largo del plano inclinado, y el eje Y perpendicularmente. Calcular las componentes de cada fuerza a lo largo de X y Y.

Daremos los resultados. La componente subrayada en cada uno es la que está frente al ángulo respectivo dado en la figura.

$$P = (-P \cos 48^\circ, \underline{P \sin 48^\circ})$$

$$F = (\underline{F \sin 50^\circ}, F \cos 50^\circ)$$

$$W = (-W \sin 35^\circ, -W \cos 35^\circ)$$

En cuanto a las fuerzas T y N tenemos simplemente

$$T = (T, 0)$$

$$N = (0, N)$$

### 1.6. Paso de la representación por componentes a la de magnitud y dirección

Consideremos el siguiente problema:

“Dadas las componentes X y Y, ¿cómo encontramos la magnitud y la dirección?”

Explicaremos a través de un ejemplo concreto, el de la Fig. 23. Tenemos allí el vector  $V = (-12, 5)$ , y deseamos calcular la magnitud V y el ángulo  $\theta$  mostrado.

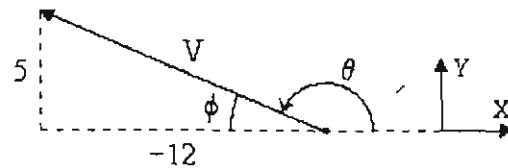


Fig. 23

La magnitud  $V$  es inmediata. Del triángulo rectángulo que forma el vector  $V$  con sus proyecciones o componentes tenemos

$$V = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{69} = 13$$

En cuanto al ángulo  $\theta$  conviene calcular primeramente el ángulo agudo positivo  $\phi$  mostrado, y luego obtener  $\theta$  a partir de  $\phi$ . Esto lo podemos hacer *sin considerar los signos de las componentes*, en la forma

$$\phi = \arctan\left(\left|\frac{5}{-12}\right|\right) = \arctan(0.4166) = 22.62^\circ$$

Luego ajustamos  $\theta$ . Como vemos en la Fig. 23, existe la relación  $\theta = 180^\circ - \phi$ . Entonces,

$$\theta = 180^\circ - 22.62^\circ = 157.38^\circ$$

La representación por magnitud y dirección del vector  $V = (-12, 5)$  es así

$$V = (13 \angle 157.38^\circ)$$

He aquí las fórmulas:

(7) Dado el vector  $A = (A_x, A_y)$ , su magnitud viene dada por

$$(a) \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

y su dirección por

$$(b) \quad \theta = \text{atan2}(A_x, A_y)$$

donde

$$(c) \quad \text{atan2}(A_x, A_y) = \begin{cases} \phi & \text{Si } A_x, A_y > 0 \\ 180^\circ - \phi & \text{Si } A_x < 0, A_y > 0 \\ -180^\circ + \phi & \text{Si } A_x < 0, A_y < 0 \\ -\phi & \text{Si } A_x > 0, A_y < 0 \end{cases}$$

con

$$(d) \quad \phi = \arctan\left(\left|\frac{A_y}{A_x}\right|\right) \quad \text{y} \quad \phi \in [0, 90]$$

Las cuatro opciones de la fórmula (7c) corresponden a los casos en que el vector  $A$  apunta hacia el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante, respectivamente (suponiendo que el punto inicial de  $A$  estuviese en el origen  $O$ ). Para convencerse de ello estudie la Fig. 24.

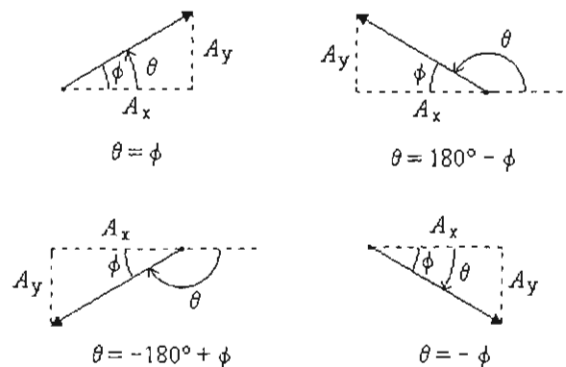


Fig. 24

**Ejemplo 6.** Calcular la magnitud y dirección del vector  $S = (60, -80)$ .

Usando (7a), la magnitud es

$$S = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{10000} = 100$$

Calculemos ahora la " $\phi$ " de la fórmula (7d):

$$\phi = \arctan\left(\frac{80}{60}\right) = \arctan(1.333) = 53.13^\circ$$

Como  $S_x > 0$  y  $S_y < 0$  tenemos el cuarto caso de la fórmula (7c), de modo que  $\theta = -\phi = -53.13^\circ$  y finalmente

$$S = (100 \angle -53.13^\circ)$$

## 1.7. Problemas

1. Señalar el error en las siguientes expresiones para el vector  $A$ :

$$A = 4, -5$$

$$A = (12 \angle 56)$$

$$A = (20; -33)$$

$$A = [3, 6]$$

$$A = 9 \angle 236^\circ$$

$$A = (\sqrt{23}, 79^\circ)$$

$$A = (-30 \angle 12^\circ)$$



2. Convierta las siguientes direcciones a otras equivalentes comprendidas entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ :

- (a)  $230^\circ$             (b)  $350^\circ$   
 (c)  $-270^\circ$             (d)  $-210^\circ$

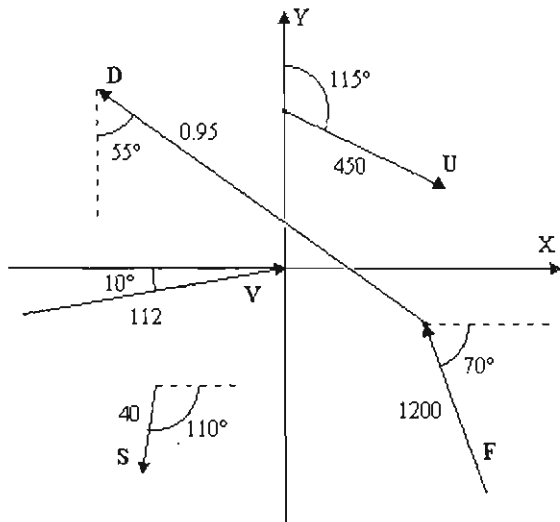
3. Establezca un sistema de ejes XY en el plano. Trace flechas que representen los vectores siguientes.

- $A = (8 \angle 68^\circ)$              $B = (\sqrt{15} \angle -10^\circ)$   
 $C = (23 \angle 250^\circ)$          $D = (9.5 \angle -120^\circ)$   
 $E = (12 \angle 90^\circ)$           $F = (0.124 \angle 180^\circ)$

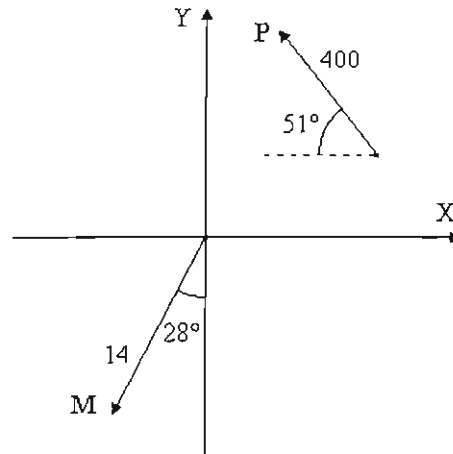
4. Dé en cada caso el vector que tiene la misma magnitud que el vector dado pero dirección opuesta:

- (a)  $(6 \angle 45^\circ)$             (b)  $(32 \angle -38^\circ)$   
 (c)  $(120 \angle 90^\circ)$         (d)  $(0.24 \angle 170^\circ)$

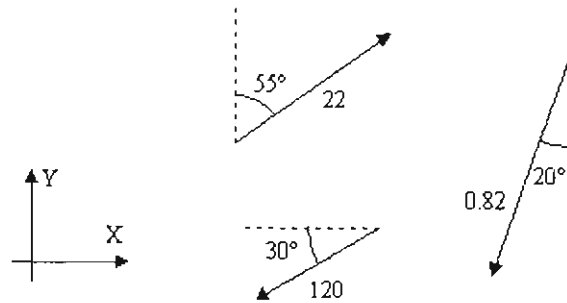
5. Representar por magnitud y dirección los vectores de la figura.



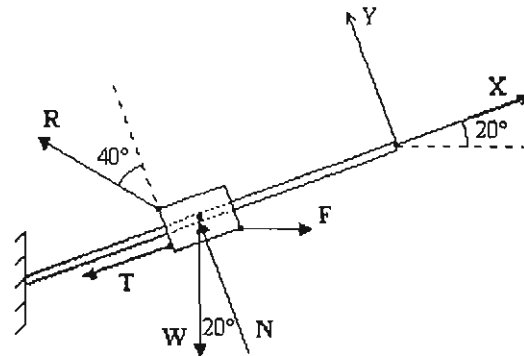
6. Representar los vectores de la figura por magnitud y dirección, y calcular sus componentes mediante las fórmulas (5a,b)-p.7.



7. Usando el ángulo dado en la figura para cada vector, calcular las componentes X y Y de cada uno. Las líneas a rayas son paralelas a un eje.



8. Un collarín, que puede deslizarse a lo largo de una guía recta lisa, sufre las fuerzas R, F, N, W y T mostradas en la figura. El Eje X se ha definido a lo largo de la guía recta del collarín. La fuerza F es horizontal, y la fuerza N es perpendicular al eje X, lo mismo que la línea a rayas. Calcular las componentes X y Y de cada fuerza.



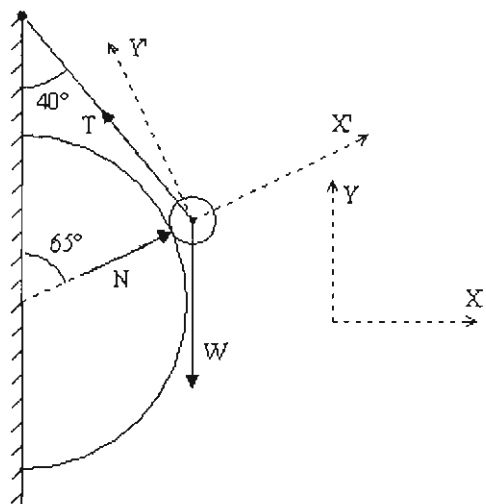
9. Una esferilla está atada a un hilo inclinado a  $40^\circ$  con la vertical. La esferilla se apoya en una superficie semiesférica. Dadas las fuerzas:

T, a lo largo del hilo, hacia arriba,

N, dirigida desde el centro de la semiesfera al centro de la esferilla,

W, peso de la esferilla, dirigido verticalmente hacia abajo,

de magnitudes T, N y W, respectivamente, obtener las componentes de estas fuerzas (a) a lo largo de los ejes X, Y; (b) a lo largo de  $X'$  y  $Y'$ , donde  $X'$  tiene la misma dirección que N.



10. Empleando las fórmulas (7a,b,c,d)-p11 calcular la magnitud y dirección de los siguientes vectores:

$A = (-8, 8)$

$B = (5, -24)$

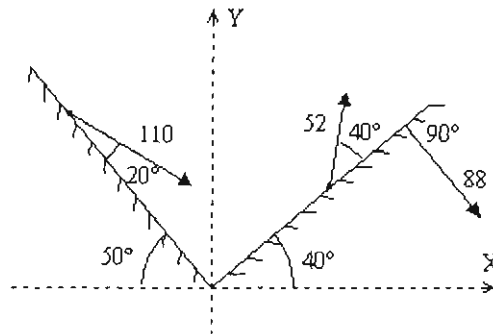
$C = (-3, 10)$

$D = (-120, -160)$

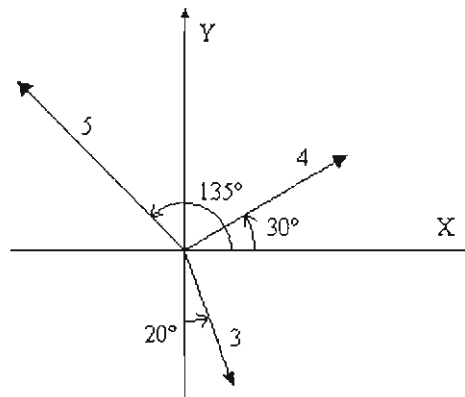
Dibuje los vectores en un plano.

11. Calcular las componentes X y Y de los vectores dados en el problema 5.

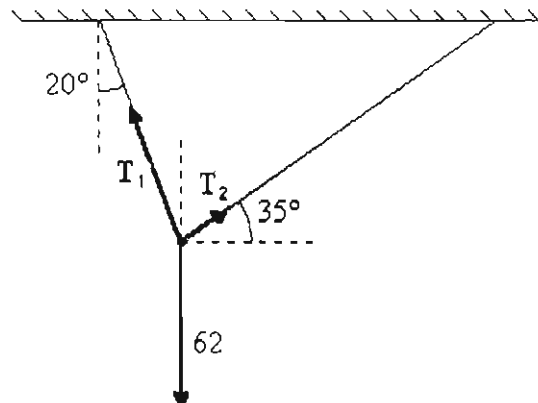
12. Calcular las componentes X y Y de los vectores dados en la siguiente figura.



13. Calcular las componentes X y Y de los vectores dados en la siguiente figura.



14. Calcular las componentes X y Y de los vectores dados en la siguiente figura.



## EJEMPLOS DE VECTORES FÍSICOS

## 2.1 Introducción

Los vectores que hemos venido considerando hasta el momento representaban alguna cantidad física cuya naturaleza no se especificaba. Todo lo que hemos dicho acerca de los vectores era aplicable a cualquier clase de vector físico, independientemente de su significado.

En esta sección introduciremos unos vectores físicos concretos.

Para definir una cantidad vectorial en física es preciso hacer una de dos cosas:

- Dar el significado de su magnitud y dirección, o bien
- Dar el significado de sus componentes.

Generalmente se prefiere hacer lo primero, aunque en nuestro primer ejemplo haremos lo segundo.

## 2.2. El vector separación

Sean A y B dos puntos cualesquiera del plano, con coordenadas  $(x_A, y_A)$  y  $(x_B, y_B)$ , respectivamente, relativas a un sistema cartesiano XY.

Traslademos el sistema XY hasta el punto A, obteniendo así el sistema X'Y' (Fig. 25).

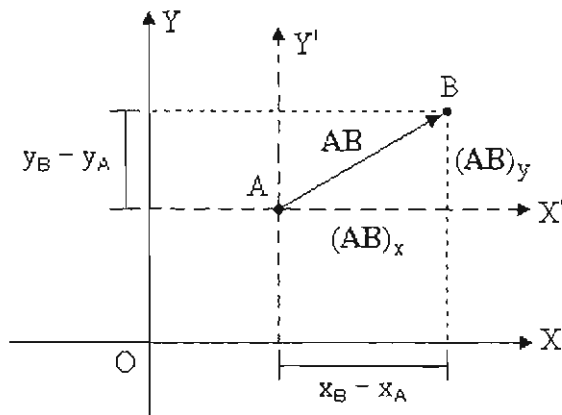


Fig. 25

Las coordenadas del punto B, relativas al sistema trasladado hasta A (o sean  $x_B - x_A$  y  $y_B - y_A$ ), se denominan brevemente *coordenadas de B relativas a A*.

(8) Se define el *vector separación* entre los puntos  $A(x_A, y_A)$  y  $B(x_B, y_B)$ , denotado con "AB", como el vector cuyas componentes son las coordenadas de B relativas a A (propriadamente, relativas a un sistema trasladado hasta A).

Este vector se representa por la flecha con punto inicial en A y final en B, como en las Figs. 25 y 26. Se tiene

$$\mathbf{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

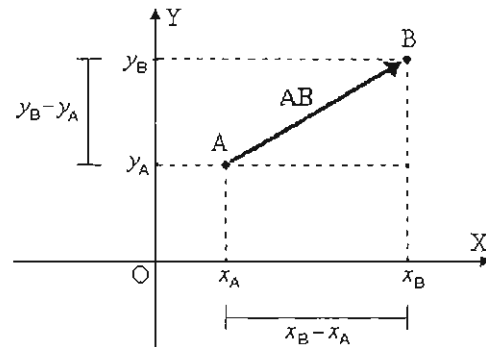


Fig. 26

Las componentes se indican así:

$$(\mathbf{AB})_x = x_B - x_A \quad (\mathbf{AB})_y = y_B - y_A$$

Si se define una escala de longitud, digamos "metros", sobre los ejes X y Y, entonces las coordenadas y las componentes de  $\mathbf{AB}$  tienen unidades de metros.

La magnitud de  $\mathbf{AB}$  es la distancia entre los puntos A y B, o longitud de la flecha  $\mathbf{AB}$ :

$$AB = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

La dirección de  $\mathbf{AB}$  se calcula de

$$\theta = \text{atan2}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

**Ejemplo 7.** Obtener el vector separación RS entre los puntos R(-2, 3) y S(8, -3).

Las componentes de RS son, por (8), las diferencias de las coordenadas del punto final S y el punto inicial R, o sea,

$$RS = (x_S - x_R, y_S - y_R)$$

$$\Rightarrow RS = (8 - (-2), -3 - 3)$$

$$\Rightarrow RS = (10, -6)$$

Podemos verificar estas componentes en la Fig. 27.

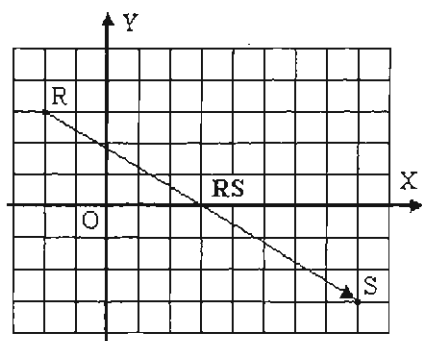


Fig. 27

Es de notarse muy especialmente que:

(9) Las componentes de los vectores separación no dependen de la ubicación del origen de coordenadas.

**Ejemplo 8.** Consideremos varios puntos A, B, C y D del plano, situados como vemos en la Fig. 28. Digamos que la cuadrícula mostrada conste de cuadrados de lados unitarios, alineados con los ejes X y Y de un sistema cartesiano OXY.

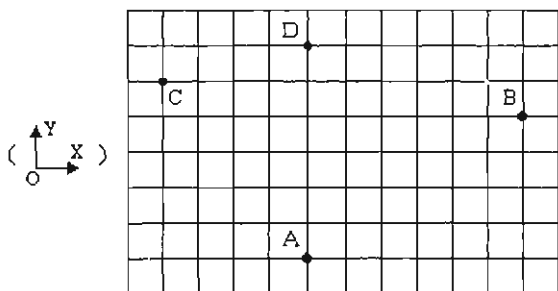


Fig. 28

Ojo: no especificaremos dónde se encuentra el origen de coordenadas O. No es necesario hacerlo en

relación con el concepto de vector separación. Por lo mismo no podemos dar las coordenadas cartesianas de ninguno de los puntos mostrados.

No obstante, lo que sí podemos hacer es localizar todos estos puntos *relativamente* a uno cualquiera de ellos. Esto lo hacemos mediante vectores separación. Tomemos por caso la tarea de localizar los puntos B, C y D relativamente al punto A. Entonces, sabiendo dónde se encuentra A, los siguientes vectores localizan a los demás puntos:

$$AB = (6, 4), \quad AC = (-4, 5), \quad AD = (0, 6)$$

Para obtener estos valores simplemente *imaginamos* que el origen de coordenadas O estuviese en el punto A, y luego obtenemos las coordenadas de B, C y D según este "nuevo" origen, usando el método estándar de geometría analítica.

En los problemas de estática, sobre todo los que trataremos en el Módulo III, se nos presenta con frecuencia la tarea de calcular triángulos. A este respecto debemos saber aplicar:

- Las proporciones entre lados de triángulos semejantes.
- Las igualdades entre ángulos correspondientes, opuestos por el vértice, alternos internos y externos, y comprendidos entre lados perpendiculares.
- La ley de los senos.
- La ley de los cosenos.

A continuación daremos un par de ejemplos, relacionándonos con el cálculo de componentes de vectores separación.

**Ejemplo 9.** Refiriéndonos al triángulo de la Fig. 29, digamos que queremos obtener las componentes de la flecha AC. Conocemos dos lados del triángulo, de 7 y 9 unidades, así como el ángulo de 15° en el vértice B.

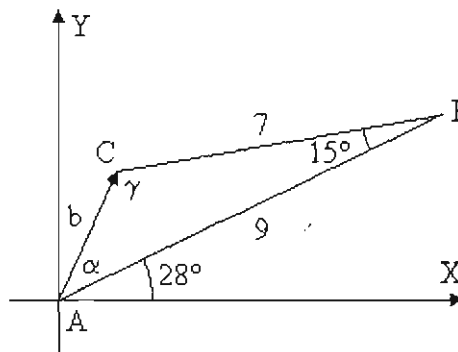


Fig. 29

Denotemos con  $\alpha$  y  $\gamma$  los ángulos internos en los vértices A y C, respectivamente, y pongamos  $AC \equiv b$ .

Apliquemos la ley de los cosenos para obtener "b":

$$b^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7 \times 9) \cos 15^\circ = 8.293$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{8.293} = 2.879$$

Ahora apliquemos la ley de los senos para obtener  $\alpha$ :

$$\frac{7}{\sin \alpha} = \frac{2.879}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \alpha = 38.985^\circ$$

Por lo tanto, AC forma con el eje X un ángulo igual a

$$\alpha + 28^\circ = 38.985^\circ + 28^\circ = 66.985^\circ$$

Entonces,  $AC = (2.879 \angle 66.98^\circ)$ . Las componentes son:

$$(AC)_x = 2.879 \cos 66.985^\circ = 1.126$$

$$(AC)_y = 2.879 \sin 66.985^\circ = 2.651$$

$$\Rightarrow AC = (1.126, 2.651)$$

**Ejemplo 10.** Una barra AB de 6 m de longitud, inclinada  $20^\circ$  con respecto a la horizontal, descansa sobre dos superficies, una de inclinación conocida de  $50^\circ$  y la otra de inclinación desconocida  $\alpha$ , como se ve en la Fig. 30. Desde los extremos A y B se trazan sendas perpendiculares a las superficies, que se intersecan en el punto C. La línea CM es vertical y pasa justamente por el punto medio M de la barra AB. Obtener el ángulo  $\alpha$  y el vector BC.

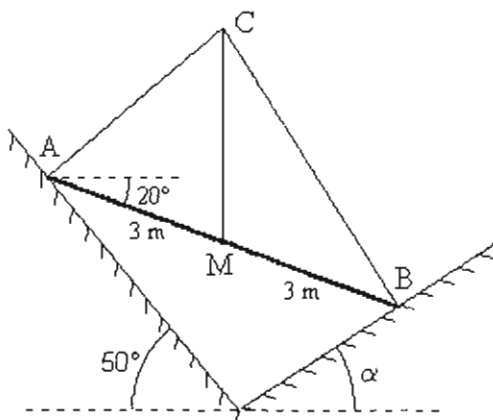


Fig. 30

En la Fig. 31 hemos añadido los ángulos de  $50^\circ$  y  $\alpha$  junto al vértice C, usando la igualdad de ángulos de lados respectivamente perpendiculares. Se deducen luego los valores de los ángulos de  $40^\circ$  y  $110^\circ$  mostrados en esa figura.

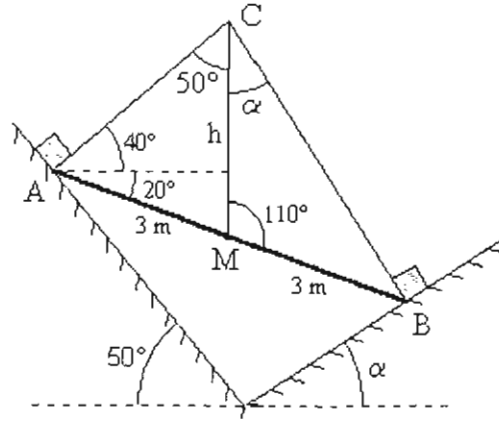


Fig. 31

Ahora podemos resolver el triángulo ACM, puesto que conocemos el lado AM, de 3 unidades, y dos de sus ángulos (de  $60^\circ$  y  $50^\circ$ ). Resulta (en metros)

$$h = 3.392$$

$$AC = 3.680$$

Con este valor de "h" ya podemos obtener BC. La componente X de BC es la misma que la del vector BM, a saber,

$$(BC)_x = (BM)_x = -3 \cos 20^\circ = -2.819$$

Por otra parte, la componente Y de BC es la suma de "h" y de la componente Y de BM, o sea

$$(BC)_y = h + (BM)_y = 3.392 + 3 \sin 20^\circ = 4.418$$

$$\Rightarrow BC = (-2.819, 4.418) \quad \text{o bien}$$

$$BC = (5.241 \angle 122.541^\circ)$$

Para obtener el ángulo  $\alpha$  resolvemos ahora el triángulo CMB, del que conocemos los lados "h" y BM, y el ángulo de  $110^\circ$ . Hallamos finalmente

$$\alpha = 32.541^\circ \quad BC = 5.241 \quad \angle CBM = 37.459^\circ$$

### 2.3. El vector desplazamiento

(10) En un contexto cinemático el vector separación se denomina también *vector desplazamiento*.

Al moverse, una partícula (o "punto material") genera una curva. Refiriéndonos a la Fig. 32, imaginemos que la curva mostrada es la trayectoria (o "camino") de una partícula móvil. La forma de esta trayectoria no viene al caso ahora, es arbitraria. Definamos sobre los ejes una escala en "metros". Al moverse la partícula entre los puntos  $A(-4 \text{ m}, 1 \text{ m})$  y  $B(5 \text{ m}, 5 \text{ m})$ , decimos que ha efectuado un desplazamiento vectorial cuyo valor es

$$\mathbf{AB} = (9 \text{ m}, 4 \text{ m})$$

En la cinemática, "desplazamiento" es sinónimo de "cambio de posición". Que un móvil se desplace durante un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  significa que la posición del móvil en el instante  $t_2$  ya no será la misma que en  $t_1$ .

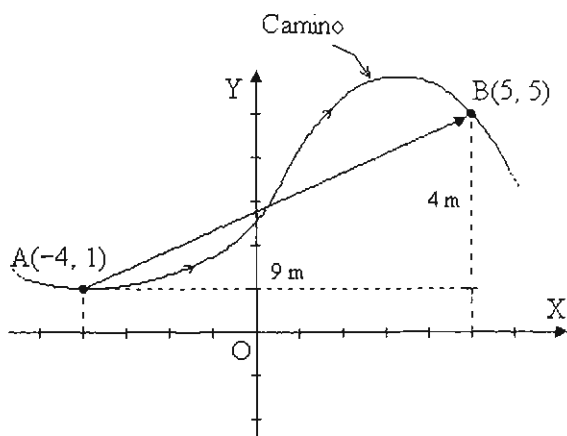


Fig. 32

(11) Se define el *desplazamiento nulo* como aquel cuyas componentes son ambas nulas. Se designa con el símbolo "0":

$$\mathbf{0} = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$$

Un desplazamiento nulo puede resultar de dos maneras:

- La partícula no se movió en absoluto durante el intervalo  $[t_1, t_2]$ , o bien

- La partícula, partiendo en  $t_1$ , recorrió un camino que la llevó de regreso en  $t_2$  al mismo punto de partida.

Como vemos, el valor de un desplazamiento, como el desplazamiento  $(9 \text{ m}, 4 \text{ m})$  en la Fig. 32, *no tiene que ver con la forma del camino recorrido*. Se define en términos solamente de los *puntos terminales* A y B. Podemos pensar en muchas trayectorias distintas que pasen por A y B; sin embargo, no importa cuál de ellas se verifique en realidad, el vector desplazamiento  $\mathbf{AB}$  tendrá el mismo valor  $(9 \text{ m}, 4 \text{ m})$ . Además, el tiempo que le tome a la partícula viajar de A a B tampoco interviene en la definición del desplazamiento  $\mathbf{AB}$ .

Note asimismo que la magnitud de un vector desplazamiento  $\mathbf{AB}$  *no es la distancia recorrida* por la partícula en su traslado de A a B, porque esta distancia habría que medirla evidentemente *a lo largo del camino*, no en línea recta desde A hasta B. No por ello, sin embargo, el concepto de desplazamiento deja de tener utilidad en cinemática.

(12) Diremos que el desplazamiento de una partícula entre dos puntos A y B es *directo* (o *recto*) si la partícula se desplaza en *línea recta* de A a B.

Para desplazamientos directos la distancia recorrida por el móvil *sí es* igual a la magnitud del vector desplazamiento (Fig. 33). Pero sólo en este caso.

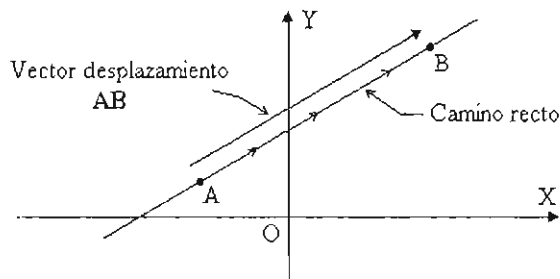


Fig. 33. Desplazamiento directo (o sea en línea recta).

Más adelante ilustraremos el uso del vector desplazamiento en la cinemática.

### 2.4. El vector velocidad del movimiento uniforme

Consideremos una partícula que se mueve en un espacio plano, por ejemplo una canica en movimiento sobre una mesa horizontal.

(13) El movimiento de la canica se denomina *uniforme* si

- Se mueve en *línea recta*.
- Recorre siempre la misma distancia " $\delta$ " cada mismo tiempo " $\tau$ ", independientemente de dónde se encuentre.

Por simplicidad supondremos que el movimiento de la canica es uniforme. En este tipo de movimiento todos los desplazamientos son directos.

Tal como sucede con el vector separación y con todo vector físico, el vector velocidad posee dos representaciones analíticas. En la representación por componentes se escribe

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y)$$

donde  $v_x$  es la componente X del vector velocidad  $\mathbf{v}$ , y  $v_y$  es su componente Y. En la representación por magnitud y dirección,

$$\mathbf{v} = (v \angle \theta)$$

donde  $v$  es la magnitud del vector  $\mathbf{v}$  y  $\theta$  su dirección.

(14) La *magnitud del vector velocidad* es la razón de la distancia recorrida al tiempo empleado en ello. La *dirección del vector velocidad* es la del desplazamiento (o movimiento) de la partícula.

De acuerdo con ello debemos medir cuál es la distancia " $\delta$ " que recorre la canica en un tiempo arbitrario " $\tau$ ", tras lo cual calculamos la magnitud de la velocidad en la forma

$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{\delta}{\tau}$$

La dirección de  $\mathbf{v}$  está determinada por dos puntos físicos  $M_1$  y  $M_2$  de la mesa (Fig. 34). Con objeto de expresarla numéricamente adoptamos un sistema cartesiano XY como se muestra, y definimos la dirección de  $\mathbf{v}$ , como lo hemos hecho anteriormente para cualquier clase de vector, como el ángulo  $\theta$  que forma la trayectoria (más propiamente, la dirección de movimiento) con la dirección +X, medido en sentido antihorario.

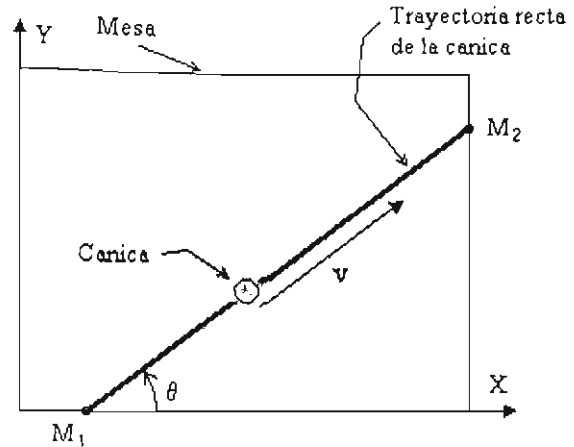


Fig. 34

(15) El vector velocidad se puede poner en la forma

$$(a) \quad \mathbf{v} = \left( \frac{\delta}{\tau} \angle \theta \right)$$

Las componentes X y Y de  $\mathbf{v}$  son las proyecciones ortogonales de la flecha  $\mathbf{v}$  sobre los ejes X y Y (medidas en la escala de velocidades):

$$(b) \quad v_x = v \cos \theta \quad v_y = v \sin \theta$$

En la representación por componentes,

$$(c) \quad \mathbf{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$$

Obviamente se cumplen las relaciones

$$(d) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$(e) \quad \theta = \text{atan2}(v_x, v_y)$$

La magnitud del vector velocidad, como la de todo vector físico, no es un número puro, sino que posee unidades físicas. Lo mismo podemos decir de las componentes X y Y.

He aquí el significado físico de las componentes: proyectemos la canica  $P$  ortogonalmente sobre los ejes coordenados, obteniendo así los puntos  $P_1$  y  $P_2$  (Fig. 35). Conforme la canica  $P$  se desplaza a lo largo de su trayectoria, sus proyecciones  $P_1$  y  $P_2$  se desplazan cada cual a lo largo de un eje de coordenadas. Entonces:

El movimiento de  $P_1$  es uniforme con velocidad  $(v_x, 0)$ , lo mismo que el de  $P_2$ , este con velocidad  $(0, v_y)$ .

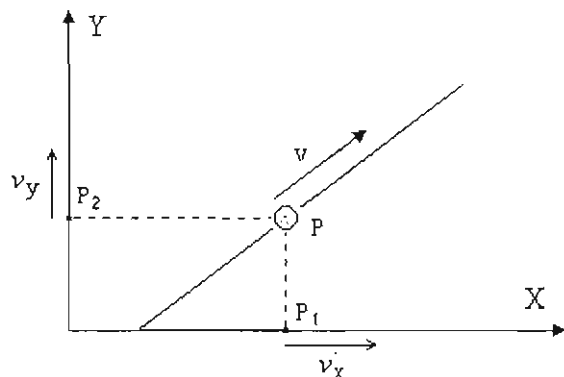


Fig. 35

**Ejemplo 11.** Una partícula en movimiento uniforme se traslada entre los puntos  $P(-3, 8)$  y  $Q(10, -2)$  en un tiempo de 5 segundos. Calcular su vector velocidad. Las coordenadas están dadas en metros.

La distancia " $\delta$ " recorrida por la partícula entre  $P$  y  $Q$  es

$$\begin{aligned}\delta = PQ &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(10 - (-3))^2 + (-2 - 8)^2} = \sqrt{13^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{269} = 16.4 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Además,

$$\tau = 5 \text{ s}$$

de modo que la magnitud de la velocidad es

$$v = \frac{\delta}{\tau} = \frac{16.4 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 3.28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por otra parte, la dirección de  $v$  es la misma que la dirección del vector desplazamiento  $PQ$ , es decir,

$$\begin{aligned}\theta &= \text{atan2}(x_Q - x_P, y_Q - y_P) \\ &= \text{atan2}(13, -10) = -37.57^\circ\end{aligned}$$

Entonces,

$$v = \left( 3.28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \angle -37.57^\circ \right)$$

Las componentes de la velocidad son

$$v_x = 3.28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(-37.57^\circ) = 2.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y = 3.28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(-37.57^\circ) = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

de modo que también

$$v = \left( 2.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, -2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

## 2.5. El vector de posición

La posición de una partícula móvil en el plano  $XY$  es la pareja de sus coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Ahora bien, en la mecánica conviene tratar a la posición como vector, de acuerdo con la siguiente definición:

(16) El *vector de posición* de una partícula, denotado con " $r$ ", es aquel vector separación cuyas componentes son iguales a las coordenadas cartesianas de la partícula, o sean  $x$  y  $y$ .

Es decir,

$$r = (x, y)$$

Este vector no es otra cosa que el vector separación  $OP$  entre el origen de coordenadas  $O$  y la partícula  $P$  (Fig. 36). La flecha que representa al vector  $r$  se traza partiendo siempre del origen de coordenadas  $O$ . Está "anclada" en este punto.

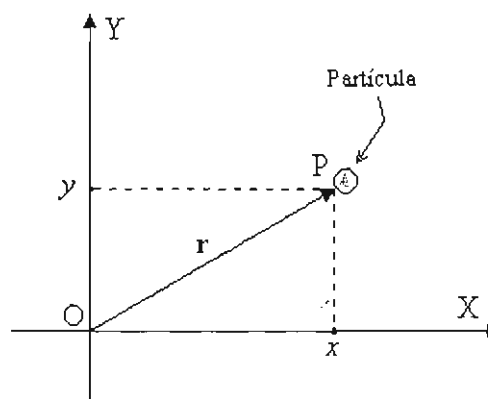


Fig. 36



**Ejemplo 12.** Localice en el plano XY los puntos P, Q, M y N, cuyos vectores de posición son respectivamente

$$\mathbf{r}_P = (9, 3) \quad \mathbf{r}_Q = (0, -5)$$

$$\mathbf{r}_M = (-2, 4) \quad \mathbf{r}_N = (2, -7)$$

Los puntos dados son las puntas de los vectores de la Fig. 37.

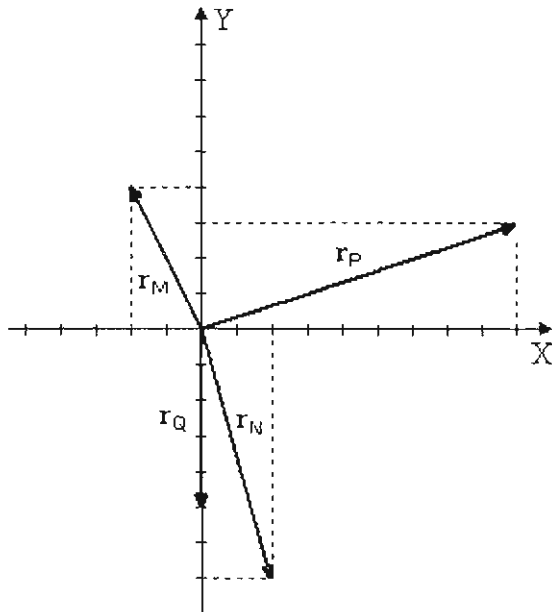


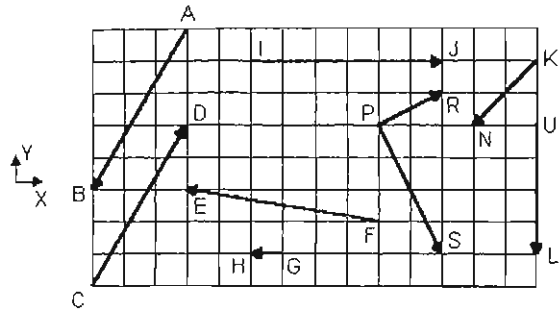
Fig. 37

En las secciones anteriores hemos introducido dos clases de vectores: el vector separación y el vector velocidad del movimiento uniforme. Los otros dos, el vector desplazamiento y el vector de posición, son esencialmente vectores del tipo separación.

No podemos hacer mucho hasta ahora con las definiciones de estos vectores. Es necesario echar mano de las operaciones vectoriales, que estudiaremos en el siguiente capítulo.

**2.6. Problemas**

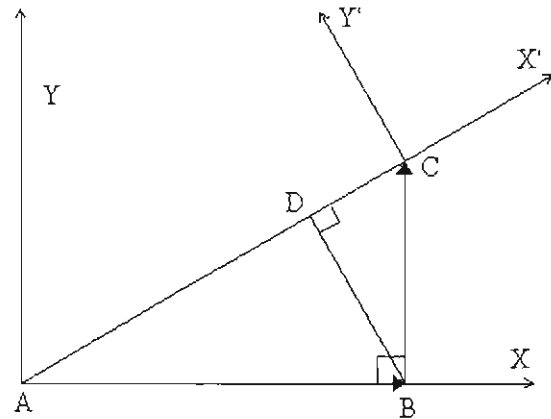
1. La cuadrícula de la figura consta de cuadrados de lado unitario. Los ejes X y Y están alineados con la cuadrícula. Obtener las componentes de los siguientes vectores: AB, CD, FE, GH, IJ, PR, PS, KN, UL.



2. Asocie cada uno de los casos (1) a (4) con la correspondiente pareja en (i)-(vi)

Componentes de	Relativas a los ejes
(1) AB	XY
(2) AB	X'Y'
(3) BC	XY
(4) BC	X'Y'

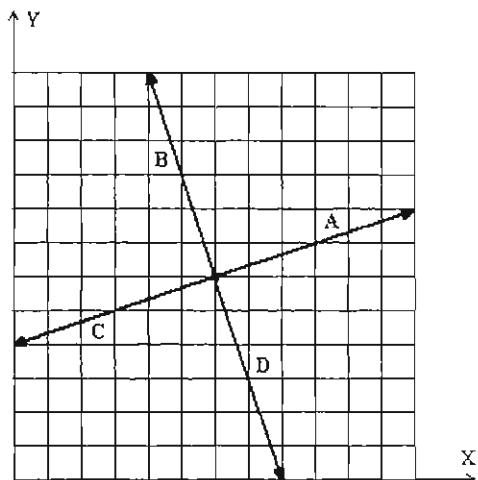
- (i) (AB, 0)
- (ii) (AD, -BD)
- (iii) (0, BC)
- (iv) (DC, BD)
- (v) (AD, BD)
- (vi) (AC, 0)



3. Dados los puntos  $P_1(-2, 1)$ ,  $P_2(9, 3)$ ,  $Q(5, -7)$  y  $S(0, 12)$ , obtener las componentes de los vectores separación siguientes:

$$P_1P_2, SQ, QS, P_2Q \text{ y } SP_1$$

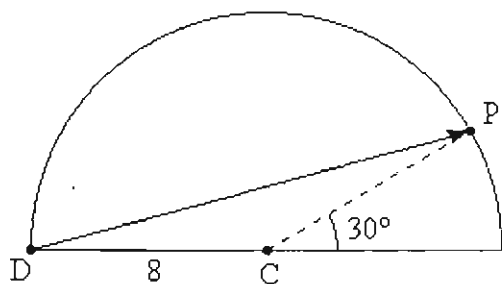
4. Los vectores A, B, C y D mostrados en la figura forman una cruzeta a ángulos rectos. La cuadrícula tiene lados unitarios. Dar las componentes de los 4 vectores.



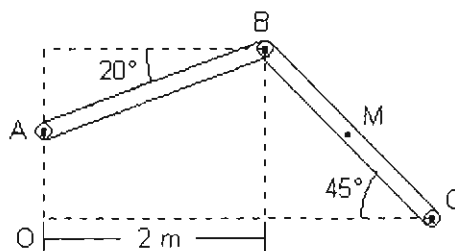
5. Una partícula en movimiento uniforme recorre la distancia entre los puntos  $M(8, 1)$  y  $N(-3, 15)$  en un tiempo de 4 segundos. Calcular su vector velocidad (suponer unidades en metros para las coordenadas).

-----  
**Nota.** Los problemas 6-14 se refieren a vectores separación. El objetivo es repasar algunos teoremas sobre igualdad de ángulos, así como el cálculo de triángulos. Pueden pasarse por alto si se desea. Tome los ejes del modo estándar en todos ellos.

6. El semicírculo de la figura tiene radio de 8 unidades. Obtener el ángulo  $\angle CDP$  y las componentes de la flecha  $DP$ . Obtener también su longitud y dirección.  
 Resp.  $DP = (14.93, 4)$ ,  $DP = (15.45 \angle 15^\circ)$

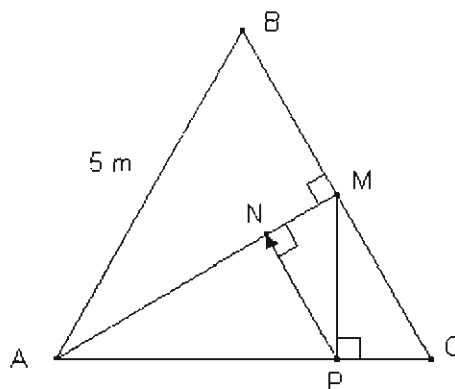


7. En la figura, las barras  $AB$  y  $BC$  tienen la misma longitud. La línea  $OA$  es vertical y la  $OC$  es horizontal. La proyección de  $AB$  sobre la dirección horizontal (Eje  $X$ ) vale 2 metros. El punto  $M$  es el punto medio de la barra  $BC$ . Calcular la flecha  $AM$ .

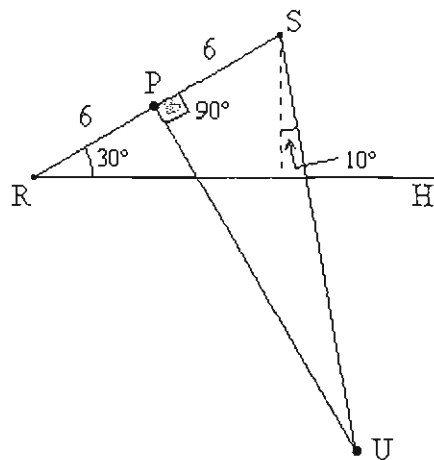


Resp.  $AM = (2.752 \angle -0.511^\circ)$

8. En la figura,  $ABC$  es un triángulo equilátero de lado 5 metros. Las líneas  $AM$ ,  $MP$  y  $PN$  son perpendiculares respectivamente a los lados  $BC$ ,  $AC$  y a la línea  $AM$ . Obtener la flecha  $PN$ .  
 Resp.  $PN = (1.875 \angle 120^\circ)$

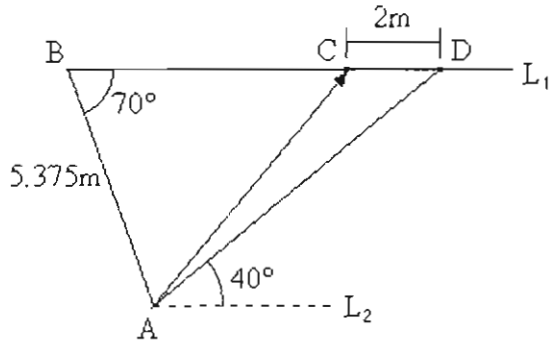


9. En la figura, la línea  $RH$  es horizontal. El segmento  $RS$  mide 12 unidades de longitud.  $P$  es el punto medio de dicho segmento, y la línea  $PU$  es perpendicular a  $RS$ . La línea  $SU$  forma ángulo de  $10^\circ$  con la vertical. Obtener la flecha  $UP$ .  
 Resp.  $UP = (-8.243, 14.276)$



10. En la figura, las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas. Los segmentos  $CD$  y  $BA$  miden 2 m y 5.375 m, respectivamente. Obtener la flecha  $AC$ .

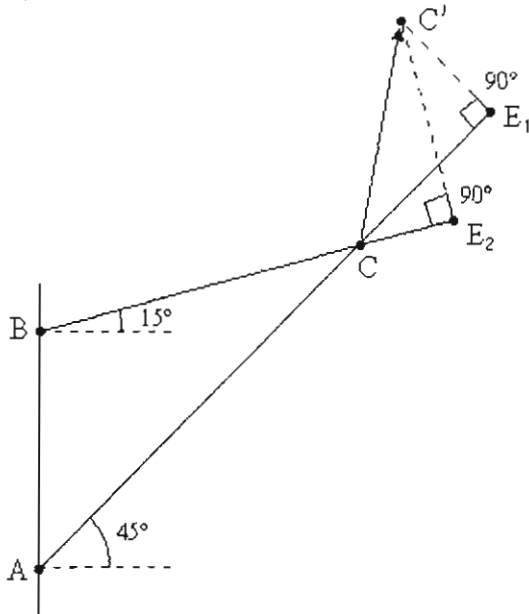
Resp.  $AC = (4.02, 5.051)$  o bien  
 $AC = (6.455 \angle 51.486^\circ)$



11. Desde dos puntos  $A$  y  $B$  se trazan segmentos rectos  $ACE_1$  y  $BCE_2$ , a ángulos de  $45^\circ$  y  $15^\circ$  con la horizontal, respectivamente. Desde  $E_1$  y  $E_2$  se trazan rectas perpendiculares a  $AC$  y  $BC$ , respectivamente; estas rectas se intersectan en el punto  $C'$ . Dados los segmentos  $CE_1 = 0.45$ ,  $CE_2 = 0.20$ , obtener la flecha  $CC'$ .

Sugerencia. Resolver primeramente el triángulo  $CE_2E_1$ .

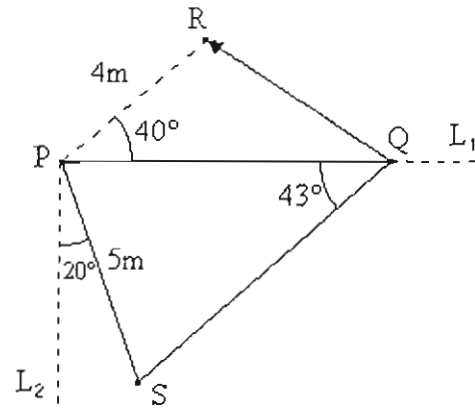
Resp.  $CC' = (0.0499, 0.5865)$



12. En la figura, las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares.

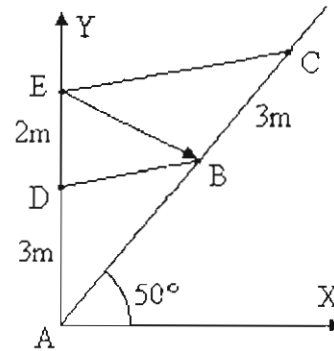
Calcular la longitud y dirección de la flecha  $QR$ .

Resp.  $QR = (4.493 \angle 145.1^\circ)$

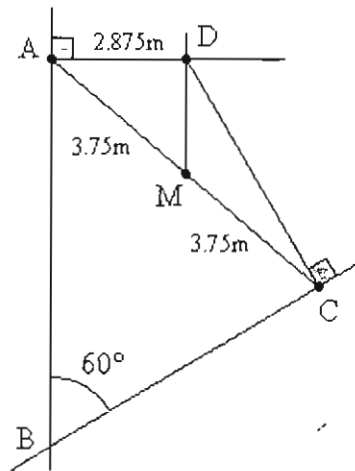


13. En la figura, los segmentos  $DB$  y  $EC$  son paralelos. Se dan las medidas  $ED = 2$  m,  $DA = 3$  m y  $BC = 3$  m. Calcular las componentes de la flecha  $EB$ .

Resp.  $EB = (3.283 \angle -28.228^\circ)$



14.  $M$  es el punto medio del segmento  $AC$ , cuya longitud es 7.5 m.  $AB$  es vertical,  $AD$  horizontal y  $DM$  vertical. El segmento  $CD$  es perpendicular al segmento  $BC$ . Obtener la flecha  $CD$ .



Resp.  $CD = (5.637 \angle 120^\circ)$  o bien  
 $CD = (-2.818, 4.882)$

## CAPÍTULO 3

## OPERACIONES VECTORIALES

## 3.1. Introducción

El álgebra vectorial se basa en:

- Una relación de igualdad de vectores.
- Una operación de suma vectorial.
- Una operación de producto de un vector y un número real.

En términos de la suma y el producto se definen también las operaciones de resta o diferencia vectorial y división de un vector por un número real.

Podemos manipular algebraicamente un vector ya sea a través de su magnitud y dirección o bien a través de sus componentes. Sin embargo las operaciones vectoriales, que introduciremos en este capítulo, toman su forma más simple cuando se expresan en términos de las componentes de los vectores. De acuerdo con ello, trabajaremos con esta definición de vector, equivalente a la ya dada:

(17) Un *vector* es una pareja ordenada de números reales denominados las *componentes* del vector.

Nota. Como ya hemos visto, dado un vector  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ , su magnitud y dirección se calculan de

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \text{atan2}(A_x, A_y)$$

Las definiciones de suma vectorial y producto de vector por número real que daremos generan un álgebra vectorial que tiene muchas similitudes con el álgebra de los números reales. Debemos tener presente, sin embargo, que no está definido el producto de dos vectores (algo como  $\mathbf{AB}$ ) ni la división de vectores (algo como  $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ ).

## 3.2. Relación de igualdad de vectores

Sabemos que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y dirección. Equivalentemente tenemos que dos vectores son iguales si tienen las mismas componentes:

(18) Dos vectores,  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  y  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$ , son *iguales* si y sólo si

$$A_x = B_x \quad \text{y} \quad A_y = B_y$$

Para indicar que dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son iguales se usa el signo de igualdad “=” en la forma

$$(A_x, A_y) = (B_x, B_y)$$

Nota. Es importante observar que, si bien el signo de igualdad *vectorial*, “=”, es el mismo signo usado para la igualdad de números reales (“ $3 = 6/2$ ”), los significados son distintos. Como vemos en el cuadro (18), una igualdad vectorial como  $(A_x, A_y) = (B_x, B_y)$  equivale a *dos* igualdades entre números reales, que son las igualdades  $A_x = B_x$  y  $A_y = B_y$ .

Por otra parte, en las representaciones analíticas de los vectores, que escribimos en la forma  $\mathbf{A} = (A \angle \theta)$  y  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ , hemos venido usando el signo de igualdad con una función que no es propiamente indicar una relación de igualdad vectorial. Tal signo indicaba en estos casos meramente una relación de equivalencia entre las notaciones “ $\mathbf{A}$ ” y “ $(A \angle \theta)$ ” o “ $(A_x, A_y)$ ”.

Más adelante introduciremos expresiones vectoriales como sería por ejemplo esta:

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{B} + \mathbf{C} = -2\mathbf{D}$$

Si se tiene que  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$ , entonces es válido escribir la expresión anterior en la forma

$$\mathbf{A} + 3(B_x, B_y) + \mathbf{C} = -2\mathbf{D}$$

Análogamente podríamos sustituir en esta ecuación los símbolos vectoriales  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  por sus representaciones por componentes, o viceversa.

En la última expresión estamos mezclando dos notaciones: la *notación simbólica*, en la que un vector se denota con una literal en negrita ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ), y la

notación estándar, en la que un vector se escribe como una pareja de componentes  $((B_x, B_y))$ . En el álgebra vectorial resulta muy conveniente utilizar ambos tipos de notaciones en una misma expresión o ecuación. Para ser consistentes en el uso de ambas notaciones en lo que toca a la igualdad vectorial acordaremos entonces lo siguiente:

(19) La relación  $(A_x, A_y) = (B_x, B_y)$  se escribirá en la notación simbólica en la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Nota. Si  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  y  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$  y  $\mathbf{A}$  es igual a  $\mathbf{B}$ , son válidas las relaciones

$$\mathbf{A} = (B_x, B_y) \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (A_x, A_y)$$

-----

La igualdad de vectores, expresada en términos de magnitudes y direcciones, va así:

Los vectores  $\mathbf{A} = (A \angle \alpha)$  y  $\mathbf{B} = (B \angle \beta)$  son iguales sí y solo si

$$A = B \quad \text{y} \quad \alpha = \beta \pm 360^\circ \times n$$

donde "n" es un número entero positivo.

No se permite usar el signo de igualdad entre representaciones distintas:

NO:  $(A_x, A_y) = (A \angle \alpha)$

**Ejemplo 13.** Dados los puntos

$$M(5, 1), \quad N(-1, 6) \quad \text{y} \quad P(9, 7)$$

encontrar el punto Q tal que  $MN = PQ$ .

Tenemos primeramente

$$\begin{aligned} MN &= (x_N - x_M, y_N - y_M) = \\ &= (-1 - 5, 6 - 1) = (-6, 5) \end{aligned}$$

Sean  $(x, y)$  las coordenadas de Q; entonces

$$\begin{aligned} PQ &= (x_Q - x_P, y_Q - y_P) \\ &= (x - 9, y - 7) \end{aligned}$$

La igualdad  $MN = PQ$  nos da

$$(-6, 5) = (x - 9, y - 7)$$

de donde se obtienen dos ecuaciones entre componentes correspondientes, a saber,

Igualdad de componentes X:  $-6 = x - 9$

Igualdad de componentes Y:  $5 = y - 7$

De aquí obtenemos

$$x = 3, \quad y = 12$$

o sea que el punto pedido es

$$Q(3, 12)$$

### 3.3. Suma vectorial

Dos vectores pueden sumarse solamente si son de la misma naturaleza física. Así por ejemplo, no podemos sumar un vector separación a un vector velocidad, ni cualquiera de ellos a un vector fuerza.

De sus cursos elementales de vectores seguramente Ud recuerda que la suma de dos vectores se efectúa gráficamente mediante la ley del paralelogramo. En términos analíticos, dicha ley es equivalente a la siguiente definición:

(20) Sean  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  y  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$  dos vectores de la misma naturaleza física. Se define la suma vectorial de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como otro vector cuyas componentes se obtienen sumando componentes homónimas de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Esto es,

(a)  $(A_x, A_y) + (B_x, B_y) = (A_x + B_x, A_y + B_y)$

Sucintamente: "Para sumar dos vectores se suman sus componentes".

En la notación simbólica la suma de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se escribe

(b)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

Como vemos, la suma vectorial se indica con el mismo signo "+" usado para la suma de números reales. En la ecuación (20a), el signo "+" en el miembro izquierdo indica suma vectorial, y ambos signos "+" en el miembro derecho indican suma de números reales. No habrá lugar a confusión puesto que la función del "+" se puede inferir a partir de la clase de operandos que enlace, vectores o números (no existe la suma de un número real y un vector).

Nota. La magnitud del vector suma "A + B" se escribe en la forma " $|A + B|$ ".

**Ejemplo 14.** Tracemos los vectores separación  $a = (2, 3)$  y  $b = (6, -1)$ , así como su suma vectorial  $a + b$ , en una cuadrícula. Comprobaremos visualmente que la operación algebraica de suma es equivalente a la construcción geométrica del paralelogramo. Asimismo calcularemos la magnitud y dirección del vector suma.

La suma de  $a$  y  $b$  es

$$a + b = (2, 3) + (6, -1) = (2 + 6, 3 + (-1)) = (8, 2)$$

En la Fig. 38 están los tres vectores, trazados desde un mismo punto. Vemos que el vector  $a + b$  es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son  $a$  y  $b$ .

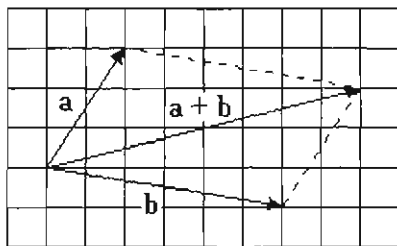


Fig. 38

La magnitud del vector suma es

$$|a + b| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8.246$$

y su dirección es

$$\theta = \text{atan2}(8, 2) = 14.036^\circ$$

$$\Rightarrow a + b = (8.246 \angle 14.036^\circ)$$

Existe una construcción geométrica que es esencialmente la misma que la ley del paralelogramo. Se denomina la *regla del polígono*. Consiste, como vemos en la Fig. 39, en trazar los vectores-sumandos  $a$  y  $b$  de tal modo que  $b$  empiece donde termina  $a$ . Entonces el vector suma es el que va de la pluma del primero a la punta del segundo. Los tres vectores forman un triángulo.

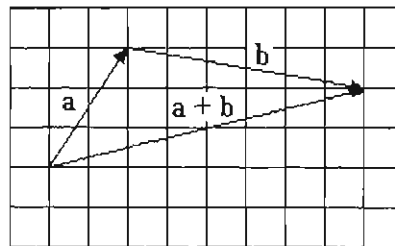


Fig. 39

La operación de suma de vectores se conoce también con el nombre de *superposición de vectores*. Todos los vectores físicos satisfacen la ley del paralelogramo, si bien la interpretación física de la suma vectorial es distinta según la clase de vectores físicos considerados. De hecho la regla para sumar dos vectores físicos corresponde en cada caso a una ley física aplicable al tipo de vectores sumados. Por ejemplo, es un principio físico que el efecto conjunto de dos fuerzas es el mismo que el de una sola fuerza obtenida conforme a la ley del paralelogramo.

### 3.4. Ejemplos relativos a la suma de dos vectores

Si los vectores a sumar están dados en la representación por componentes, para hacer la suma simplemente sumamos separadamente componentes X y Y. Por otra parte, si lo que se da son las representaciones por magnitud y dirección, debemos primeramente obtener las componentes, como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 15.** Calcular la suma de los vectores

$$P = (12 \angle 32^\circ) \quad \text{y} \quad Q = (9 \angle -28^\circ)$$

Para obtener la suma debemos primeramente calcular las componentes de P y Q y luego sumar componentes homónimas. Tenemos

$$P_x = 12 \cos 32^\circ = 10.176$$

$$P_y = 12 \sin 32^\circ = 6.359$$

$$Q_x = 9 \cos(-28^\circ) = 7.946$$

$$Q_y = 9 \sin(-28^\circ) = -4.225$$

$$\Rightarrow P + Q = (P_x + Q_x, P_y + Q_y) =$$

$$= (10.176 + 7.946, 6.359 - 4.225)$$

El resultado es

$$P + Q = (18.122, 2.134)$$

La magnitud del vector  $P + Q$  es

$$|P + Q| = \sqrt{(18.122)^2 + (2.134)^2} = 18.247$$

y su dirección,

$$\text{atan2}(18.122, 2.134) = 6.716^\circ$$

$$\Rightarrow P + Q = (18.247 \angle 6.716^\circ)$$

**Ejemplo 16.** En este ejemplo vamos a considerar una superposición (o suma) especial de velocidades: la del aire atmosférico y la de un avión en vuelo.

Supongamos que el empuje de las turbinas del avión es tal que en aire quieto enfilaría el avión hacia la dirección norte con una velocidad de 200 kilómetros por hora, y que el avión vuela dentro en un viento de 50 kilómetros por hora que sopla en dirección noreste (Fig. 40). El efecto del viento consiste en desviar el avión de la dirección norte en un pequeño ángulo  $\delta$ , el cual se obtiene geoméricamente superponiendo los vectores velocidad de avión y viento según la construcción de *suma vectorial*, tal como se muestra en la Fig. 41.

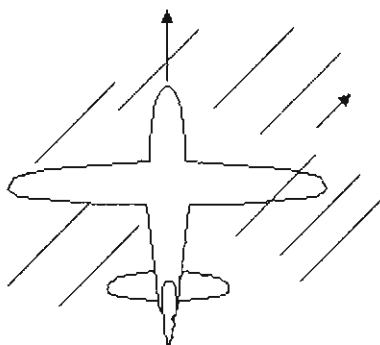


Fig. 40

La velocidad del avión con respecto a Tierra (la modificada por el viento) se calcula gráficamente midiendo la longitud de la flecha que va del inicio de la primera flecha a la punta de la segunda (flecha punteada en la Fig. 41).

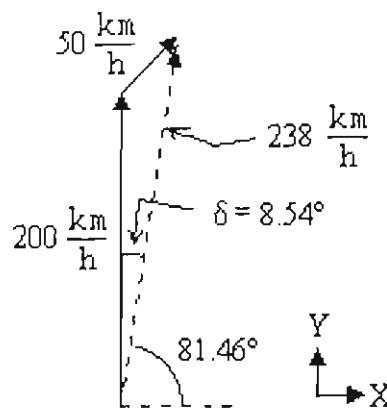


Fig. 41

Por supuesto, también se puede calcular analíticamente aplicando la regla para sumar vectores, como haremos a continuación.

Sean  $v$  la velocidad del avión y  $U$  la velocidad del viento. Colocando el eje  $Y$  paralelamente al eje longitudinal del avión tendríamos (en unidades de kilómetros por hora):

$$v = (0, 200)$$

$$U = (50 \cos 45^\circ, 50 \sin 45^\circ) = (35.35, 35.35)$$

Superposición de velocidades:

$$v + U = (0, 200) + (35.35, 35.35) = (35.35, 235.35)$$

Por lo tanto, la magnitud y dirección de la suma son

$$|v + U| = |(35.35, 235.35)| = 238$$

$$\theta = \text{atan2}(35.35, 235.35) = 81.46^\circ$$

con lo que la desviación pedida es

$$\delta = 90^\circ - 81.46^\circ = 8.54^\circ$$

Consideremos dos vectores  $A$  y  $B$  de magnitudes fijas. Queremos dirigir estos vectores de tal manera que el vector suma  $A + B$ :

Tenga magnitud máxima.

Tenga magnitud mínima.

Queremos además calcular la magnitud de  $A + B$  dado que estos vectores forman un ángulo dado " $\chi$ ".

Es evidente que para obtener el máximo valor de la magnitud de  $A + B$  hay que colocar  $A$  y  $B$  paralelamente y en la misma dirección, como vemos

en la Fig. 42. En este caso tendremos que

$$|A + B| = A + B$$

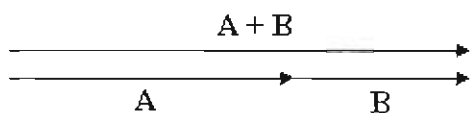


Fig. 42

Para que la magnitud  $|A + B|$  sea mínima debemos colocarlos en direcciones opuestas (Fig. 43). Se tiene aquí que

$$|A + B| = |A - B|$$

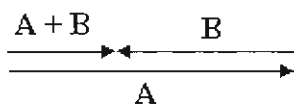


Fig. 43

Si los colocamos perpendicularmente tendremos que

$$|A + B| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

(Véase la Fig. 44).

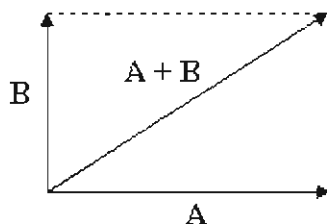


Fig. 44

Supongamos ahora que A y B forman un ángulo  $\chi$  (Fig. 45)

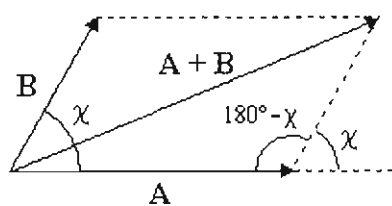


Fig. 45

Construyamos el paralelogramo formado por los vectores A y B. Apliquemos la ley de los cosenos al triángulo formado por A, B y A + B:

$$|A + B|^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(180^\circ - \chi)$$

Pero  $\cos(180^\circ - \chi) = -\cos \chi$  y entonces

(21) La magnitud de la suma  $A + B$  de dos vectores A y B cuyas direcciones forman un ángulo  $\chi$  viene dada por

$$|A + B| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \chi}$$

De la expresión (21) se ve claramente que el valor máximo de  $|A + B|$  se da cuando  $\cos \chi = 1$ , es decir,  $\chi = 0$ . Por otra parte, el valor mínimo corresponde a  $\cos \chi = -1$ , o sea  $\chi = 180$ . Tenemos entonces que

(22) La magnitud de la suma de dos vectores A y B no puede ser menor que  $|A - B|$  ni mayor que  $A + B$ :

$$|A - B| \leq |A + B| \leq A + B$$

Por ejemplo, la suma de dos vectores de magnitudes 8 y 5 no puede ser menor que 3 ni mayor que 13.

La desigualdad  $|A + B| \leq A + B$  se conoce como *desigualdad del triángulo*. Consideremos los lados de un triángulo como vectores. Dirigiendo estos vectores apropiadamente, cualquiera de los lados se puede escribir como la suma vectorial de los otros dos (Fig. 46). Entonces La desigualdad expresa que un lado (cualquiera) del triángulo no puede ser mayor que la suma de los otros dos lados.

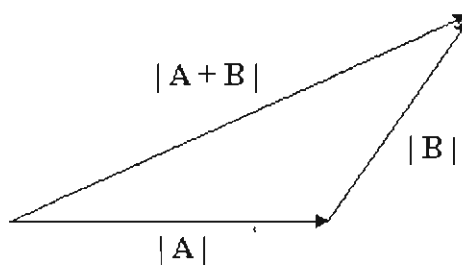


Fig. 46



**Ejemplo 17.** Tres vectores tienen la misma magnitud "M" y uno de ellos es la suma de los otros dos. Calcular el ángulo  $\chi$  que forman estos últimos.

Designemos los tres vectores con A, B y A + B, con los datos

$$A = B = |A + B| = M$$

De acuerdo con la fórmula (21) tenemos

$$M = \sqrt{M^2 + M^2 + 2 \cdot M \cdot M \cos \chi}$$

o bien

$$M^2 = 2M^2 + 2M^2 \cos \chi$$

de donde

$$\cos \chi = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \chi = 120^\circ$$

Los vectores determinan un rombo, como vemos en la Fig. 47. El vector suma bisecta el ángulo entre A y B.

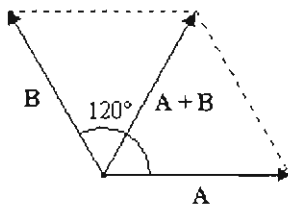


Fig. 47

### 3.5. Vector nulo. Negativo de un vector

(23) El *vector nulo*, simbolizado por "0", se define como

$$0 = (0, 0)$$

El vector nulo no posee representación geométrica, pues correspondería a una "flecha" de longitud nula. Si bien la magnitud del vector 0 es un número bien definido (cero), su dirección es indeterminada: puede tomarse como cualquier dirección del plano (Así tendríamos, pues, que los vectores  $(0 \angle 23^\circ)$ ,  $(0 \angle -35^\circ)$ ,  $(0 \angle 157^\circ)$ , etc. representan por igual al vector 0).

La interpretación del vector nulo varía según la clase de cantidad física considerada. Un vector velocidad nulo ( $v = (0, 0)$ ) significa que el móvil está en reposo; un vector fuerza igual al vector nulo significa "ausencia de fuerzas" o "fuerza neta nula", etc.

(24) Todo vector  $A = (A_x, A_y)$  tiene su *vector negativo*, simbolizado por " $-A$ " y definido por

$$-A = (-A_x, -A_y)$$

El negativo de A tiene la misma magnitud que A pero la dirección contraria (Fig. 48).

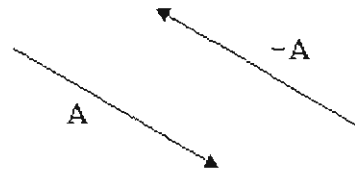


Fig. 48

Está claro que para cualquier vector A tenemos:

$$(25a) \quad A + (-A) = 0$$

$$(25b) \quad A + 0 = A$$

### 3.6. Propiedades de la suma vectorial

La suma vectorial tiene las siguientes propiedades:

(26a) Conmutatividad:

$$A + B = B + A$$

(26b) Asociatividad:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

La propiedad de asociatividad expresa que para sumar 3 vectores da lo mismo sumar primero los dos primeros sumandos que sumar primero los dos últimos. Por lo tanto, la suma de los 3 vectores se puede escribir sin paréntesis (y, por inducción, lo

mismo para más de 3 vectores):

$$A + B + C$$

Para sumar gráficamente más de dos vectores podemos irlos sumando de dos en dos usando la ley del paralelogramo reiteradamente o, mejor, podemos usar la ley del polígono.

(27) *Para sumar vectores gráficamente:*  
 Se colocan los vectores en cadena, de modo que cada vector empiece donde termina el anterior. Entonces la suma de todos los vectores es el vector que va de la pluma del primer vector hasta la punta del último.

La Fig. 49 ilustra la suma vectorial gráfica de los vectores

$$A = (9, 2), B = (4, 5), C = (5, 1) \text{ y } D = (-6, 7)$$

que vale

$$S \equiv A + B + C + D = (12, 15)$$

Si los vectores sumandos son tales que, puestos en cadena, la punta del último vector coincide con la pluma del primero, entonces la suma vectorial es el vector nulo. En este caso los vectores sumandos forman un polígono.

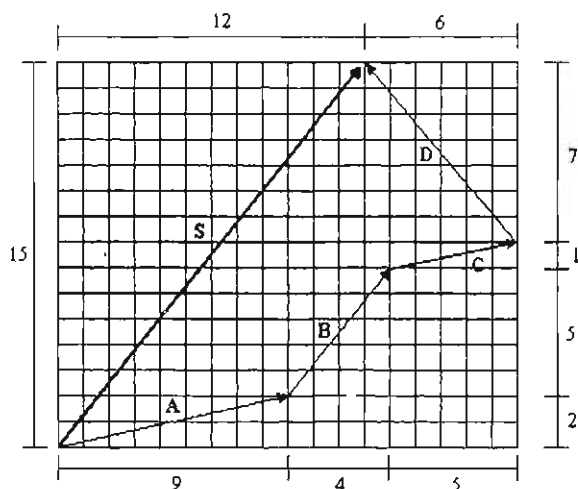


Fig. 49

La Fig. 50 muestra un conjunto de vectores cuya suma es nula.

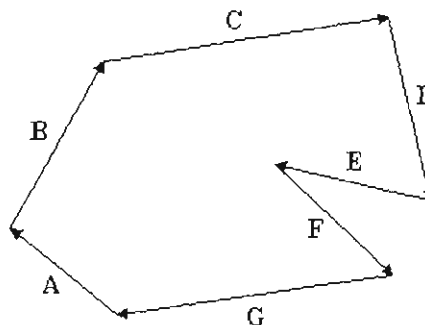


Fig. 50.  $A + B + C + D + E + F + G = 0$

**Ejemplo 18** Calcular la suma vectorial de los tres vectores mostrados en la Fig. 51. Calcular el vector  $V$  que habría que añadir a estos tres para que la suma vectorial de los 4 vectores fuese 0.

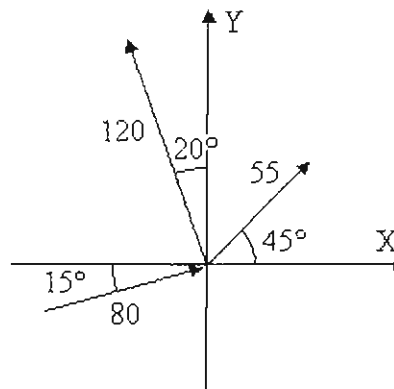


Fig. 51

Obtengamos las componentes X y Y de cada vector, usando directamente los ángulos dados en la figura:

Componentes X	Componentes Y
$55 \cos 45^\circ = 38.89$	$55 \operatorname{sen} 45^\circ = 38.89$
$-120 \operatorname{sen} 20^\circ = -41.04$	$120 \cos 20^\circ = 112.76$
$80 \cos 15^\circ = 77.27$	$80 \operatorname{sen} 15^\circ = 20.71$

Entonces la suma vectorial de los 3 vectores dados, que denotaremos con "R", es

$$R = (38.89, 38.89) + (-41.04, 112.76) + (77.27, 20.71) = (38.89 - 41.04 + 77.27, 38.89 + 112.76 + 20.71)$$

$\Rightarrow R = (75.12, 172.36)$

o bien

$R = (188.02 \angle 66.45^\circ)$

El vector  $V$  que habría que añadir para que los 3 vectores dados, junto con el vector  $V$ , sumaran cero, es evidentemente  $-R$ , o sea

$V = -R = (-75.12, -172.36)$

Nota. Para obtener las componentes también podríamos haber expresado los vectores por magnitud y dirección, o sea:

$(55 \angle 45^\circ), (120 \angle 110^\circ), (80 \angle 15^\circ)$

y luego aplicado las fórmulas (5a,b)-p7, que darían

Componentes X	Componentes Y
$55 \cos 45^\circ = 38.89$	$55 \sin 45^\circ = 38.89$
$120 \cos 110^\circ = -41.04$	$120 \sin 110^\circ = 112.76$
$80 \cos 15^\circ = 77.27$	$80 \sin 15^\circ = 20.71$

### 3.7. Producto de un vector y un número real

(28) Sea  $A = (A_x, A_y)$  un vector y  $\lambda$  un número real. Se define el *producto* del vector  $A$  y el número  $\lambda$  como otro vector cuyas componentes se obtienen multiplicando las componentes de  $A$  por  $\lambda$ , es decir,

(a)  $\lambda (A_x, A_y) = (\lambda A_x, \lambda A_y)$

Sucintamente: "Para multiplicar un vector por un número se multiplican ambas componentes del vector por el número".

En la notación simbólica el producto de  $A$  y  $\lambda$  se escribe

(b)  $\lambda A$

Notemos que el producto del número "- 1" y el vector  $A$  es el negativo de  $A$ :

$(-1) A = -A$

Por otra parte, el producto del número "1" y cualquier vector es ese mismo vector, y al multiplicar un vector por el número "0" se obtiene el vector 0.

(29a)	$1 A = A$
(29b)	$0 A = 0$
Asimismo,	
(29c)	$\lambda 0 = 0 \quad (\lambda \text{ arbitrario})$

Las relaciones (29a,b,c) se demuestran fácilmente. Hagámoslo para la relación (29b). De (28a) tenemos

$0 A = 0 (A_x, A_y) = (0 \cdot A_x, 0 \cdot A_y) = (0, 0) = 0$

Nota. En lo sucesivo acordaremos que  $A \lambda$  es lo mismo que  $\lambda A$ .

Veremos la interpretación gráfica del producto utilizando de nuevo un vector separación, conforme al siguiente ejemplo.

**Ejemplo 19.** Sea el vector separación  $a = (2, 1)$  (Véase la Fig. 52).

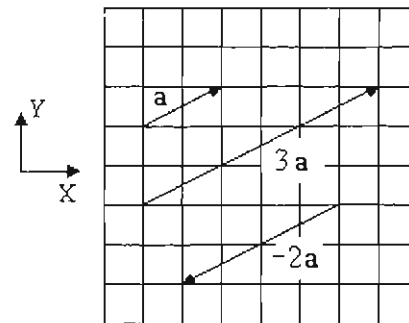


Fig. 52

Formemos los productos  $3a$  y  $(-2)a$ :

$3a = 3(2, 1) = (6, 3)$

$(-2)a = (-2)(2, 1) = (-4, -2)$

(Note que en el producto de un número negativo por un vector, el número debe encerrarse entre paréntesis, por ahora.)

Trazando las flechas correspondientes vemos que la flecha  $3a$  tiene la misma dirección que la flecha  $a$ , pero es 3 veces más larga que ésta. Por otra parte, la flecha  $(-2)a$  es 2 veces más larga que  $a$  y tiene dirección opuesta a ésta.

La interpretación geométrica del producto es pues la siguiente:

(30) La longitud del vector producto  $\lambda a$  es  $|\lambda|$  veces la de  $a$ .

Si  $\lambda > 1$  la longitud de  $\lambda a$  es mayor que la de  $a$ .

Si  $\lambda < 1$ , la longitud de  $\lambda a$  es menor que la de  $a$ .

Si  $\lambda > 0$ , el vector  $\lambda a$  tiene la misma dirección que  $a$ , y si  $\lambda < 0$ ,  $\lambda a$  tiene la dirección opuesta a la de  $a$ .

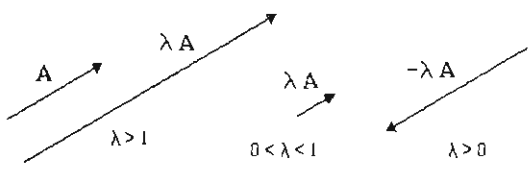


Fig. 53

Las propiedades anteriores son evidentes al examinar la expresión para la magnitud del vector general  $\lambda A$ . En primer lugar tenemos que

$$|\lambda A| = \sqrt{(\lambda A_x)^2 + (\lambda A_y)^2} = |\lambda| \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = |\lambda| A$$

o sea

(31) La magnitud del vector  $\lambda A$  es el producto del valor absoluto de  $\lambda$  y de la magnitud de  $A$ :

$$|\lambda A| = |\lambda| A$$

Por otra parte tenemos que si  $\lambda > 0$ ,

$$\text{atan2}(A_x, A_y) = \text{atan2}(-\lambda A_x, -\lambda A_y) \pm 180^\circ$$

la cual expresa que los vectores  $A$  y  $-\lambda A$  tienen direcciones opuestas.

Abundan en la física los casos en que un vector se obtiene como el producto de un número y otro vector. Demos unos ejemplos.

**Ejemplo 20.** La expresión matemática de la segunda ley de Newton tiene la forma

$$F = m a \quad (\text{Fuerza} = \text{Masa} \times \text{Aceleración})$$

donde  $F$  es el vector fuerza,  $m$  es la masa y  $a$  es el vector aceleración.

Supongamos que

$$m = 5 \text{ kg} \quad \text{y que} \quad a = \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

Entonces el vector fuerza viene dado por

$$F = m a = 5 \text{ kg} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \\ = \left(-10 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 35 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

El producto de unidades "kg  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ " se abrevia "N" y se denomina "newton", así que podemos escribir la fuerza también en la forma

$$F = (-10 \text{ N}, 35 \text{ N})$$

Es importante observar que los símbolos de las unidades se manejan como símbolos algebraicos. De acuerdo con la regla (28a)-p30, la expresión anterior para la fuerza  $F$  podemos escribirla también como

$$F = (-10, 35) \text{ N}$$

Análogamente podríamos haber escrito

$$a = (-2, 7) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

De acuerdo con (30) y dado que la masa "m" siempre es positiva, los vectores fuerza y aceleración tienen la misma dirección en todo momento.

**Ejemplo 21.** El momento lineal o ímpetu de una partícula de masa "m" que se mueve con velocidad "v", es un vector denotado con "p", definido como el producto de la masa y el vector velocidad:

$$p = m v$$

Las unidades del momento lineal son el producto de la unidad de masa y la unidad de velocidad, o sea " $\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ". Los vectores  $p$  y  $v$  tienen siempre la misma dirección.

El producto de vector por real tiene las siguientes propiedades:

(32a) Distributividad 1:

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

(32b) Distributividad 2:

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

(32c) Asociatividad:

$$\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$$

Consideremos las expresiones

$$(-5) A \quad \text{y} \quad -(5 A)$$

La primera es el producto del número "-5" y el vector  $A$ , y la segunda es el negativo del vector " $5A$ ". Con los axiomas dados se demuestra fácilmente que ambas expresiones valen lo mismo, de modo que se pueden escribir en la forma sin paréntesis:

$$-5 A$$

### 3.8. Resta de vectores y división de un vector por un número real

(33) La *resta o diferencia* de dos vectores  $A = (A_x, A_y)$  y  $B = (B_x, B_y)$ , es otro vector denotado con " $A - B$ ", que se define económicamente como la suma de  $A$  y el negativo de  $B$ :

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) = \\ &= (A_x, A_y) + (-B_x, -B_y) \\ &= (A_x - B_x, A_y - B_y) \end{aligned}$$

Sucintamente:

"Para restar dos vectores se restan sus componentes".

Utilizando una cuadrícula y vectores separación, podemos convencernos de la siguiente construcción gráfica:

Trácese los vectores  $A$  y  $B$  desde un mismo punto inicial. Entonces el vector diferencia  $A - B$ , trazado desde la punta de  $B$  (el sustrahendo) es tal que su punta coincide con la punta de  $A$  (el minuendo), como vemos en la Fig. 54.

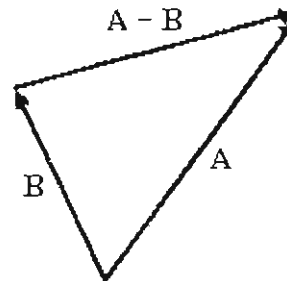


Fig. 54

Según esta construcción, el vector  $B - A$  iría en dirección opuesta a  $A - B$ , y tendría la misma magnitud que éste, de tal manera que, recordando la definición del negativo de un vector tendremos la relación

$$A - B = -(B - A)$$

Por otra parte, aplicando la regla del polígono a los vectores de la Fig. 54 se obtiene la relación

$$B + (A - B) = A$$

Estas dos últimas relaciones muestran la semejanza que tiene el álgebra vectorial con el álgebra ordinaria de los números reales. Según la primera podemos "quitar paréntesis" a una expresión precedida de un signo "-" cambiando el signo a todos los términos de la expresión. Según la segunda relación podemos cancelar en el miembro izquierdo los vectores  $B$  y  $-B$ . Hay más semejanzas, que expondremos posteriormente.

(34) La *división* de un vector  $\mathbf{A}$  por un número  $\lambda$  se define económicamente en términos del producto, en la forma

$$\begin{aligned}\left(\frac{A_x}{\lambda}, \frac{A_y}{\lambda}\right) &\equiv \frac{1}{\lambda}(A_x, A_y) = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} \cdot A_x, \frac{1}{\lambda} \cdot A_y\right) = \left(\frac{A_x}{\lambda}, \frac{A_y}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

Sucintamente: para dividir un vector por un número se dividen ambas componentes del vector por el número.

En notación simbólica,

$$\frac{\mathbf{A}}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{A}$$

Si  $\lambda$  es positivo, la dirección de  $\frac{\mathbf{A}}{\lambda}$  es la misma que la de  $\mathbf{A}$ . Esto se suele expresar también así: al dividir (o multiplicar) un vector por un número positivo, "la dirección del vector no se altera".

Si  $\lambda$  es negativo sí hay una inversión de la dirección.

Existe la siguiente relación, análoga a la (31) de la página 31:

$$(35) \quad \left| \frac{\mathbf{A}}{\lambda} \right| = \frac{|\mathbf{A}|}{|\lambda|} = \frac{A}{|\lambda|}$$

### 3.9. Ejemplos

**Ejemplo 22.** Supongamos que una partícula en movimiento uniforme describe una trayectoria como la mostrada en la Fig. 55, en la que "Posición 1" y "Posición 2" son dos posiciones *arbitrarias* de la partícula. Sea  $\delta$  el vector desplazamiento entre ambas posiciones, y  $\tau$  el tiempo empleado para pasar de una a otra, como antes. Entonces el vector velocidad se obtiene dividiendo el vector  $\delta$  por el tiempo  $\tau$  en la forma

$$\mathbf{v} = \frac{\delta}{\tau}$$

2892819

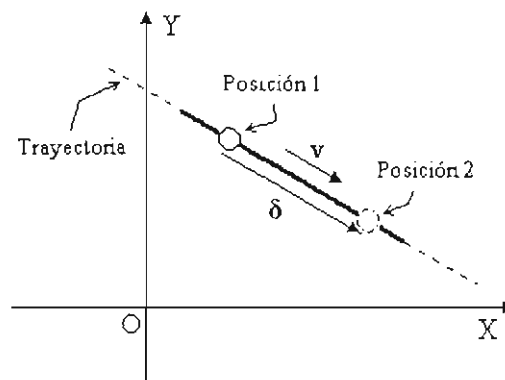


Fig. 55

Esto lo podemos demostrar haciendo ver que la magnitud y dirección del vector velocidad, tal como se definió en los cuadros (14) y (15) de la página 18, son las mismas que las del vector  $\frac{\delta}{\tau}$ . Veamos.

– Usando (35) tenemos para la magnitud de  $\mathbf{v}$ :

$$|\mathbf{v}| = \left| \frac{\delta}{\tau} \right| = \frac{|\delta|}{\tau} = \frac{\delta}{\tau} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

– Por otra parte, la dirección del vector  $\frac{\delta}{\tau}$  es claramente la misma que la del desplazamiento, puesto que al dividir  $\delta$  por el número positivo  $\tau$  se obtiene otro vector con la misma dirección que  $\delta$ , QED.

Por ejemplo, si la trayectoria (recta) forma un ángulo de  $-22^\circ$  con el eje X y el móvil recorre una distancia de 12 metros en 1.5 segundos, entonces su vector desplazamiento correspondiente a este lapso es

$$\delta = (12 \text{ m} \angle -22^\circ) = (11.126 \text{ m}, -4.495 \text{ m})$$

y su vector velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{\delta}{\tau} = \frac{(11.126 \text{ m}, -4.495 \text{ m})}{1.5 \text{ s}} = \left( 7.417 \frac{\text{m}}{\text{s}}, -2.996 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

La diferencia de vectores es muy usada en la física para expresar *cambios* o *variaciones* de cantidades vectoriales. Veámoslo por analogía con cambios de cantidades numéricas.

Si la temperatura media  $T_1$  de un día fue de  $23^\circ\text{C}$  y la temperatura media  $T_2$  del día siguiente fue de  $26^\circ\text{C}$ , entonces el *cambio* o *variación de temperatura media* es la diferencia

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 26^\circ\text{C} - 23^\circ\text{C} = 3^\circ\text{C}$$

Existe una definición análoga para el cambio o variación de una cantidad vectorial:

(36) Se define el *cambio* o *variación* de un vector  $\mathbf{u}$ , al pasar de un valor  $\mathbf{u}_1$  a otro valor  $\mathbf{u}_2$  como la diferencia vectorial

$$(a) \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$$

El valor final de  $\mathbf{u}$  es igual al valor inicial  $\mathbf{u}_1$  más el cambio  $\Delta \mathbf{u}$ :

$$(b) \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \Delta \mathbf{u}$$

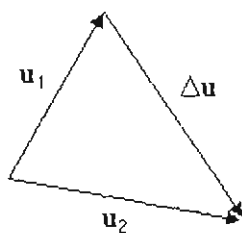


Fig. 56

Para ilustrar el uso de la diferencia de vectores, volvamos al vector velocidad del movimiento uniforme.

En el ejemplo 22 en la página precedente dimos la siguiente expresión para el vector velocidad del movimiento uniforme:

$$\mathbf{v} = \frac{\delta}{\tau}$$

donde  $\delta$  es el vector desplazamiento entre dos posiciones arbitrarias "1" y "2", y  $\tau$  es el tiempo invertido por la partícula entre ambas posiciones. Daremos todavía otra forma vectorial, más conveniente, para este vector.

Tracemos los vectores de posición  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  correspondientes a las posiciones "1" y "2", respectivamente (Fig. 57). Denotemos el vector desplazamiento entre ambas posiciones con " $\Delta \mathbf{r}$ " en lugar del símbolo " $\delta$ " usado anteriormente. La razón de este nuevo símbolo para el desplazamiento proviene (como puede verse en la Fig. 57) de la

relación

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (= \delta)$$

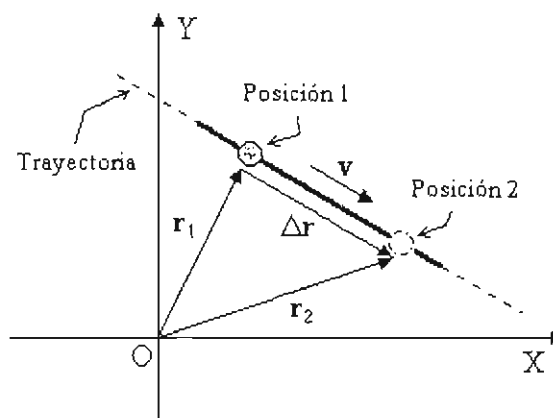


Fig. 57

Si la partícula pasa por "1" en  $t_1$  y por "2" en  $t_2$ , entonces el desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}$  se lleva a cabo en un tiempo

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (= \tau)$$

Por lo tanto, la velocidad puede ponerse alternativamente en la forma

$$(37) \quad \mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$\Delta \mathbf{r}$  es el vector desplazamiento entre dos posiciones *arbitrarias*, y  $\Delta t$  es el tiempo invertido en viajar de una a otra posición.

Naturalmente, (37) expresa lo mismo que la relación  $\mathbf{v} = \delta / \tau$ , pero es más conveniente a la hora de aplicarla.

**Ejemplo 23.** Supongamos que una partícula en movimiento uniforme se desplace entre los puntos (2 m, -5 m) y (6 m, 1 m) en 2 segundos. Calculemos su velocidad usando la fórmula (37).

Los vectores de posición de los puntos dados son

$$\mathbf{r}_1 = (2 \text{ m}, -5 \text{ m}) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = (6 \text{ m}, 1 \text{ m})$$

El desplazamiento entre ambos puntos es

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (6 \text{ m}, 1 \text{ m}) - (2 \text{ m}, -5 \text{ m}) = \\ &= (4 \text{ m}, 6 \text{ m})\end{aligned}$$

Por consiguiente el vector velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{(4 \text{ m}, 6 \text{ m})}{2 \text{ s}} = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

**Ejemplo 24.** El *momento lineal* de una partícula, denotado con "p", se define como el producto de la masa m y la velocidad v de la partícula, o sea  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ .

Una partícula de masa  $m = 0.4 \text{ kg}$  choca con un piso viniendo con una velocidad  $\mathbf{v}_1$  de magnitud 5 m/s. La partícula rebota con una velocidad  $\mathbf{v}_2$  de magnitud 3.6 m/s. Las direcciones de las velocidades son las mostradas en la Fig. 58.

Calcular el cambio del momento lineal en el choque.

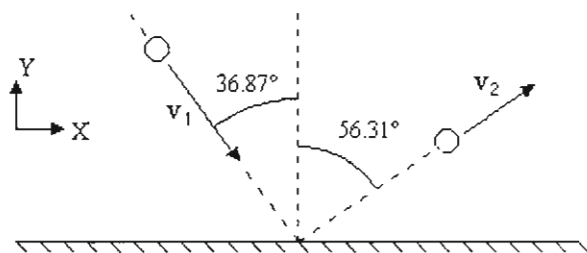


Fig. 58

En magnitud y dirección tenemos (Ojo con los ángulos que forman las velocidades *con la dirección +X*)

$$\mathbf{v}_1 = \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \angle -53.13^\circ\right) \quad \mathbf{v}_2 = \left(3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \angle 33.69^\circ\right)$$

Para operar algebraicamente con estos vectores debemos expresarlos en componentes:

$$\mathbf{v}_1 = (3, -4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \mathbf{v}_2 = (3, 2) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El momento lineal antes del choque es

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= m \mathbf{v}_1 = 0.4 \text{ kg} (3, -4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= (1.2, -1.6) \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

El momento lineal después del choque es

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_2 &= m \mathbf{v}_2 = 0.4 \text{ kg} (3, 2) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= (1.2, 0.8) \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio del momento lineal es

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p} &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \\ &= (1.2, 0.8) \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} - (1.2, -1.6) \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{p} = (0, 2.4) \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En este tipo de cálculos se suele suprimir las unidades durante el desarrollo, teniendo cuidado de expresar todos los valores en el Sistema Internacional de Unidades (u otro sistema que se emplee). Así lo haremos en lo sucesivo. En los resultados finales sí añadiremos las unidades.

**Ejemplo 25.** Dados los vectores

$$\mathbf{A} = (8, -3), \quad \mathbf{B} = (0, 9)$$

$$\mathbf{C} = (4, 7) \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = (-5, 2)$$

efectuar las siguientes operaciones vectoriales:

(a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + (-\mathbf{D})$

(b)  $\mathbf{A} \mathbf{C} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}) \mathbf{B}$

(c)  $1(-3) \mathbf{A} + 5 \mathbf{C} \mid (\mathbf{D} + 2 \mathbf{B})$

(a) Ya que

$$-\mathbf{D} = (5, -2)$$

tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} + (-\mathbf{D}) &= (8, -3) + (0, 9) + (5, -2) = \\ &= (8 + 0 + 5, -3 + 9 - 2) = (13, 4)\end{aligned}$$

(b) En el cálculo de toda expresión vectorial debemos tener cuidado de separar aquellas partes que son números reales de las partes que son vectores.

La expresión "(b)" dada es la suma de dos



vectores: el primer sumando se forma como el producto del número "A" (o sea la magnitud del vector **A**) y el vector **C**; el segundo sumando es el producto del número "D - B" y el vector **B**. Calculemos los números por separado:

$$A = \sqrt{8^2 + (-3)^2} = \sqrt{73} = 8.544$$

$$D - B = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} - \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{29} - 9 = -3.615$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \mathbf{C} + (D - B) \mathbf{B} &= \\ &= 8.544 \cdot (4, 7) + (-3.615) \cdot (0, 9) = \\ &= (34.176, 59.808) + (0, -32.535) \\ &= (34.176, 27.273) \end{aligned}$$

(c) La expresión dada es un vector, formado como el producto del número "1(-3) **A** + 5 **C**" y el vector "**D** + 2 **B**".

Calculemos el vector "(-3) **A** + 5 **C**" y luego obtengamos su magnitud "1(-3) **A** + 5 **C**":

$$\begin{aligned} (-3) \mathbf{A} + 5 \mathbf{C} &= (-3)(8, -3) + 5(4, 7) = \\ &= (-24, 9) + (20, 35) = (-4, 44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(-3\mathbf{A}) + 5\mathbf{C}| &= \sqrt{(-4)^2 + 44^2} \\ \Rightarrow &= \sqrt{1940} = 44.181 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\mathbf{D} + 2 \mathbf{B} = (-5, 2) + 2(0, 9) = (-5, 20)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |(-3) \mathbf{A} + 5 \mathbf{C}| (\mathbf{D} + 2 \mathbf{B}) &= \\ &= 44.181 \cdot (-5, 20) = \\ &= (-220.905, 883.620) \end{aligned}$$

**Ejemplo 26.** Centro de masa.

(38) Consideremos un conjunto de **N** partículas de masas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , ubicadas en los puntos (cuyos vectores de posición son)  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , respectivamente (Fig. 59).

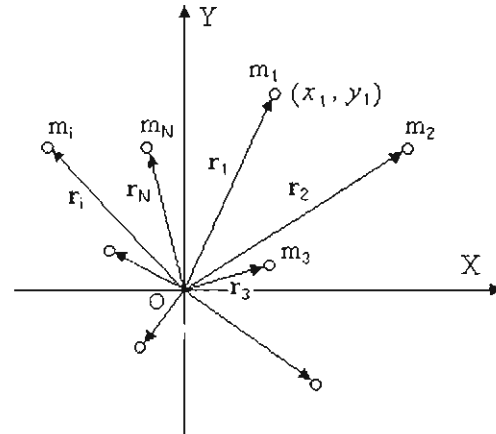


Fig. 59

El centro de masa del conjunto es un punto **G** del plano cuyo vector de posición, denotado con " $\mathbf{r}_G$ ", se define por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_G &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} \end{aligned}$$

donde  $M \equiv \sum m_i$  es la masa total del conjunto.

Calcularemos el centro de masa del conjunto de partículas de la Fig. 60.

Numeremos las partículas como sigue:

- $m_1 = 2 \text{ kg} \quad \mathbf{r}_1 = (5, 0) \text{ m}$
- $m_2 = 3 \text{ kg} \quad \mathbf{r}_2 = (4, 3) \text{ m}$
- $m_3 = 5 \text{ kg} \quad \mathbf{r}_3 = (-1, 6) \text{ m}$
- $m_4 = 1 \text{ kg} \quad \mathbf{r}_4 = (-5, 2) \text{ m}$
- $m_5 = 2 \text{ kg} \quad \mathbf{r}_5 = (-2, -2) \text{ m}$

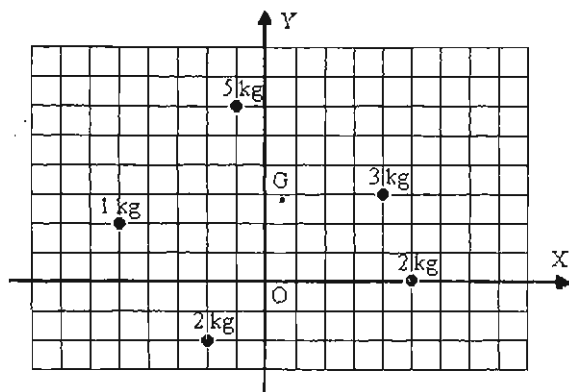


Fig. 60

Sustituyendo en la expresión (38) para  $r_G$ ,

$$\begin{aligned} r_G &= \frac{2(5,0) + 3(4,3) + 5(-1,6) + 1(-5,2) + 2(-2,-2)}{2+3+5+1+2} \\ &= \frac{(10,0) + (12,9) + (-5,30) + (-5,2) + (-4,4)}{13} \\ &= \frac{(8,37)}{13} = (0.61, 2.84) \end{aligned}$$

El resultado está en "metros": (0.61 m, 2.84 m). El centro de masa es el punto G que vemos en la Fig.60.

### 3.10. Combinaciones lineales de vectores

(39) Una *combinación lineal* de vectores es una expresión de la forma general

$$\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \dots + \chi \mathbf{U}$$

donde  $\lambda, \mu, \dots, \chi$  son números reales y  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{U}$  son vectores.

Una *ecuación vectorial* es una relación de igualdad entre dos combinaciones lineales. La forma general de una ecuación vectorial es

$$\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \dots + \chi \mathbf{U} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{N} + \dots + \eta \mathbf{S}$$

De toda ecuación vectorial se deducen dos ecuaciones entre números reales. Así, "sacando componentes X en ambos miembros de la ecuación" anterior tenemos

$$\lambda A_x + \mu B_x + \dots + \chi U_x = \alpha M_x + \beta N_x + \dots + \eta S_x$$

y "sacando componentes Y",

$$\lambda A_y + \mu B_y + \dots + \chi U_y = \alpha M_y + \beta N_y + \dots + \eta S_y$$

**Ejemplo 27.** Sea la ecuación vectorial

$$F_1 - T + \mu N = m a$$

Igualando componentes correspondientes de cada miembro de la ecuación se obtienen las ecuaciones

$$F_{1x} - T_x + \mu N_x = m a_x$$

$$F_{1y} - T_y + \mu N_y = m a_y$$

Notemos que las ecuaciones entre componentes tienen la misma estructura que la ecuación vectorial dada.

En una ecuación vectorial se puede pasar cualquier término de un miembro a otro mediante un cambio de signo. Por ejemplo, la ecuación

$$2a - 3b + 7c = -6d + u$$

es equivalente a

$$2a - u + 7c = -6d + 3b$$

Un factor numérico se pasa de un miembro a otro como divisor. Por ejemplo, despejando al vector  $m$  de

$$4m - 9p = -6q$$

llegamos a

$$m = \frac{-6q + 9p}{4} = -\frac{2}{3}q + \frac{9}{4}p$$

Sin embargo, no es posible despejar el número  $\chi$  de la igualdad

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \chi \mathbf{c} + \nu \mathbf{u}$$

mediante un procedimiento (similar a uno con números reales) que llevara a

$$\chi = \frac{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} - \nu \mathbf{u}}{\mathbf{c}} \quad (\text{¡NO!})$$

porque la división de vectores (algo como  $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ ) no está definida (como tampoco la multiplicación de vectores, algo como  $\mathbf{A} \mathbf{B}$ ). La cosa se hace como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 28.** Calcular el factor numérico  $\chi$  de la ecuación

$$2\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \chi\mathbf{c} = (-3, 65)$$

donde  $\mathbf{a} = (-5, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (4, -10)$  y  $\mathbf{c} = (1, 6)$ .

Despejemos el término  $\chi\mathbf{c}$  y sustituyamos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  por sus representaciones por componentes:

$$\chi\mathbf{c} = (-3, 65) - 2\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \chi(1, 6) = (-3, 65) - 2(-5, 6) + \frac{1}{2}(4, -10)$$

Hagamos las operaciones indicadas:

$$(\chi, 6\chi) = (-3, 65) + (10, -6) + (2, -5)$$

$$\Rightarrow (\chi, 6\chi) = (-3 + 10 + 2, 65 - 6 - 5) = (9, 54)$$

de donde, igualando componentes X y Y de  $(\chi, 6\chi)$  y  $(9, 54)$ ,

$$\chi = 9 \quad \text{y} \quad 6\chi = 54$$

Ambas dan  $\chi = 9$ . Si dieran valores distintos no existiría un número  $\chi$  que satisficiera la ecuación dada, la cual sería inválida.

### 3.11. Independencia lineal de vectores

Las operaciones básicas de suma vectorial y producto de un vector por un número real nos permiten relacionar cualquier vector  $\mathbf{A}$  del plano con otros dos vectores dados  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ . Para investigar este asunto introduciremos unos términos:

(40) Generar un vector  $\mathbf{A}$  a partir de otros dos vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  significa encontrar números  $\lambda$  y  $\mu$  tales que

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B} + \mu \mathbf{C}$$

En otras palabras significa, de acuerdo con (39), escribir  $\mathbf{A}$  como una combinación lineal de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

No cualquier pareja  $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  permite generar cualquier vector. Así tenemos que si  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son paralelos o antiparalelos (direcciones iguales o que difieren en  $\pm 180^\circ$ , respectivamente), entonces cualquier combinación lineal de la forma " $\lambda \mathbf{B} + \mu \mathbf{C}$ " produce un vector que es paralelo o antiparalelo a  $\mathbf{B}$  o a  $\mathbf{C}$ . La Fig. 57 muestra un ejemplo numérico: los vectores  $\mathbf{B}$  (de magnitud 2) y  $\mathbf{C}$  (de magnitud 1) son antiparalelos. La combinación lineal  $5\mathbf{B} + 6\mathbf{C}$  produce un vector de magnitud 4 que es paralelo a  $\mathbf{B}$ .

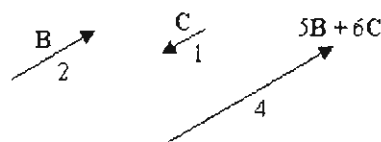


Fig. 57

Cualquier vector que sea paralelo (o antiparalelo) a  $\mathbf{B}$  o a  $\mathbf{C}$  puede escribirse en cualquiera de las formas

$$\lambda \mathbf{B} \quad \mu \mathbf{C} \quad \text{ó} \quad \chi \mathbf{B} + \nu \mathbf{C}$$

donde  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\chi$  y  $\nu$  son números apropiados que siempre podremos calcular.

Ahora bien, si  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  no son paralelos ni antiparalelos, ya podemos generar a partir de ellos cualquier otro vector del plano.

#### (41) Teorema.

Todos los vectores del plano se pueden generar a partir de dos vectores cualesquiera (excepto si estos son paralelos o antiparalelos), mediante las operaciones básicas de suma vectorial y producto por un número real.

Sean  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  vectores dados, no paralelos ni antiparalelos. Entonces el teorema afirma que para cualquier vector  $\mathbf{A}$  existen números  $\lambda$  y  $\mu$  tales que

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B} + \mu \mathbf{C}$$

La interpretación gráfica del teorema es simple. Consideremos tres vectores arbitrarios  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  y tracémoslos a partir del mismo punto, como los mostrados en la Fig. 58. Supongamos que queremos expresar  $\mathbf{A}$  como una combinación lineal de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

Desde la punta de  $\mathbf{A}$  tracemos una línea paralela a  $\mathbf{B}$  y otra línea paralela a  $\mathbf{C}$ . De esta manera formamos un paralelogramo cuya diagonal es  $\mathbf{A}$ . Los

lados de este paralelogramo se pueden expresar como " $\lambda B$ " y " $\mu C$ ", donde  $\lambda$  y  $\mu$  son números apropiados (en la Fig. 58 tendríamos aproximadamente  $\lambda = 1.6$  y  $\mu = 0.45$ ). Presto.

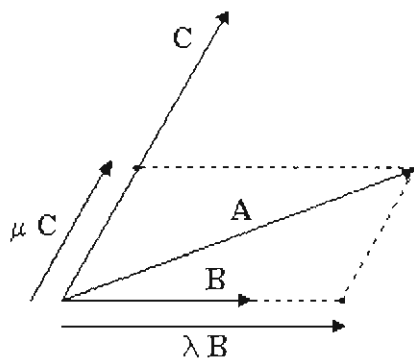


Fig. 58

Existe un método analítico simple para calcular  $\lambda$  y  $\mu$ . Lo ilustramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 29.** Escribir el vector  $U = (2, 9)$  como una combinación lineal de los vectores  $V = (5, -3)$  y  $W = (4, 1)$ .

De acuerdo con (41), el problema es encontrar los números  $\lambda$  y  $\mu$  tales que

$$U = \lambda V + \mu W$$

Sustituyamos en la relación anterior cada vector por su representación por componentes:

$$(2, 9) = \lambda (5, -3) + \mu (4, 1)$$

Efectuemos las operaciones de producto de real por vector, y luego suma vectorial, indicadas en el miembro derecho:

$$(2, 9) = (5\lambda, -3\lambda) + (4\mu, \mu) = (5\lambda + 4\mu, -3\lambda + \mu)$$

La igualdad de los vectores  $(2, 9)$  y  $(5\lambda + 4\mu, -3\lambda + \mu)$  conduce a dos igualdades entre componentes a lo largo de un mismo eje, a saber:

$$2 = 5\lambda + 4\mu$$

$$9 = -3\lambda + \mu$$

Este es un sistema de ecuaciones para  $\lambda$  y  $\mu$ , cuya solución es

$$\lambda = -2, \quad \mu = 3$$

Se tiene entonces que

$$U = -2V + 3W$$

La interpretación gráfica de esta relación la tenemos en la Fig. 59.

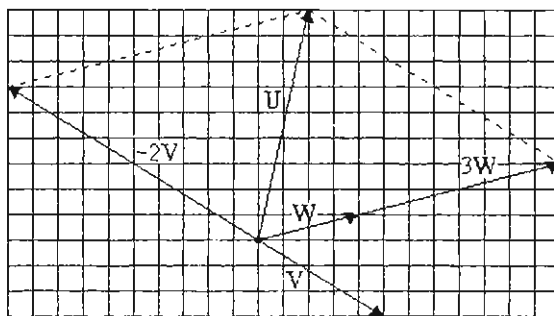


Fig. 59

Dados 3 vectores  $A, B$  y  $C$ , deduciremos una fórmula para calcular los números  $\lambda$  y  $\mu$  tales que

$$A = \lambda B + \mu C$$

Pongamos en esta relación las representaciones

$$A = (A_x, A_y), \quad B = (B_x, B_y) \quad \text{y} \quad C = (C_x, C_y)$$

Obtenemos

$$(A_x, A_y) = \lambda (B_x, B_y) + \mu (C_x, C_y)$$

Haciendo las operaciones en el miembro derecho:

$$\begin{aligned} (A_x, A_y) &= (\lambda B_x, \lambda B_y) + (\mu C_x, \mu C_y) = \\ &= (\lambda B_x + \mu C_x, \lambda B_y + \mu C_y) \end{aligned}$$

de donde se obtienen

$$A_x = \lambda B_x + \mu C_x$$

$$A_y = \lambda B_y + \mu C_y$$

Este es un sistema de ecuaciones simultáneas para  $\lambda$  y  $\mu$ . Resolviéndolo tenemos

(42) Dados los vectores  $A = (A_x, A_y)$ ,  $B = (B_x, B_y)$  y  $C = (C_x, C_y)$ , los coeficientes  $\lambda$  y  $\mu$  de la relación  $A = \lambda B + \mu C$  son

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} A_x & C_x \\ A_y & C_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix}}, \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix}}$$

En la extensión del álgebra vectorial a espacios de tres o más dimensiones es útil la siguiente terminología:

(43) Dos o más vectores  $A, B, C, \dots, M$  son *linealmente independientes* si la única forma como se puede cumplir la ecuación

(a)  $\lambda A + \mu B + \nu C + \dots + \chi M = 0$

es que todos los coeficientes sean iguales a cero:

(b)  $\lambda = \mu = \nu = \dots = \chi = 0$

Por otra parte, se dice que los vectores son *linealmente dependientes* si existe una relación como "(a)", en la que no todos los coeficientes son iguales a cero.

En el espacio de dos dimensiones que estamos usando, el decir que dos vectores son "linealmente independientes" es simplemente otro modo de decir que estos dos vectores "no son paralelos ni antiparalelos". Por otra parte, tres vectores  $A, B, C$  cualesquiera del plano (ninguna pareja de ellos paralelos ni antiparalelos) siempre son linealmente dependientes, puesto que como expresa el cuadro (41), siempre existe una relación del tipo

$$A = \lambda B + \mu C$$

o, puesta en la forma del cuadro (43),

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

donde  $\alpha = 1, \beta = -\lambda$  y  $\gamma = -\mu$ .

### 3.12. Problemas

1. Los símbolos "s" y "t" son parámetros reales. ¿Cuánto deben valer para que se cumpla la ecuación vectorial

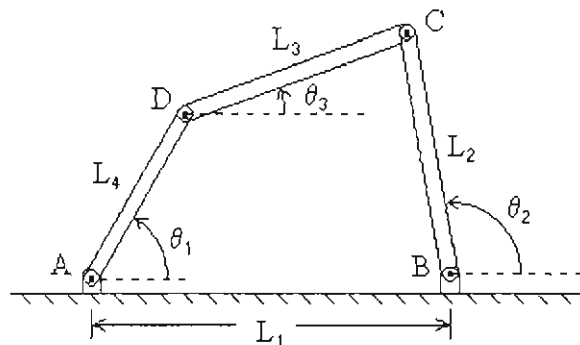
$$(5, -1) + (2s - 3t, -5s) = (0, -s + 9t)$$

Resp. 0.6, -1.6.

2. "t" es una variable real. Dados los vectores  $r = (x, y)$ ,  $r_0 = (x_0, y_0)$ ,  $v_0 = (v_{0x}, v_{0y})$  y  $a = (0, -g)$ , escriba las dos ecuaciones entre componentes a que da lugar la ecuación vectorial

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

3. La figura muestra un mecanismo de 4 eslabones. Tres de los eslabones son las barras articuladas BC, CD y DA; el cuarto eslabón es el soporte horizontal fijo.



Sacando componentes de la ecuación vectorial

$$AB + BC + CD + DA = 0$$

obtener las relaciones

$$L_1 + L_2 \cos \theta_2 - L_3 \cos \theta_3 - L_4 \cos \theta_1 = 0$$

$$L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \theta_3 - L_4 \sin \theta_1 = 0$$

4. Calcular la suma vectorial de los siguientes vectores:

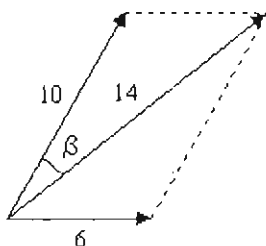
$$P = (8 \angle -36.87^\circ), \quad Q = (12 \angle 59^\circ), \quad R = (5, -7)$$

Resp. (17.58, -1.514) ó (17.646  $\angle$  -4.922°)

5. Los vectores  $U$  y  $V$  tienen magnitudes iguales de 12 unidades. El vector suma  $U + V$  tiene magnitud 6. Calcular el ángulo entre  $U$  y  $V$ .

Resp.  $151^\circ$ .

6. La suma de dos vectores de magnitudes 6 y 10 unidades tiene magnitud 14. Calcular el ángulo  $\beta$  entre el vector de magnitud 10 y el vector suma.

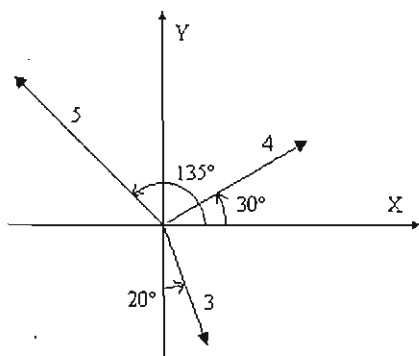


Resp.  $\beta = 21.79^\circ$ .

7. ¿Qué ángulo deben formar los vectores de magnitudes 6 y 10 del problema anterior para que su suma vectorial tenga magnitud igual a 10?

Resp.  $107.46^\circ$ .

8. Obtener la suma vectorial de los tres vectores mostrados en la figura. ¿Qué vector  $F$  habría que añadir para que la suma de los 4 vectores fuese igual a 0?



Resp. La suma es  $(0.954, 2.71)$  o bien  $(2.879 \angle 70.64^\circ)$

9. Una partícula está sometida a las tres fuerzas

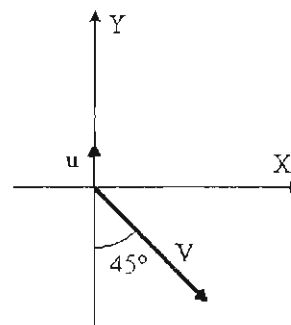
$$F_1 = (0, -120), \quad F_2 = (34, 78), \quad F_3 = (-12, 45)$$

¿Qué fuerza adicional  $F = (F_x, F_y)$  debe aplicársele para que se verifique la ecuación

$$F_1 + F_2 + F_3 + F = 0 \quad ?$$

10. Superponer (sumar vectorialmente) las velocidades  $V$  de un avión y  $u$  del viento, como se muestran en la figura. Tomar

$$u = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad V = 480 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Resp.  $(404.15 \frac{\text{km}}{\text{h}} \angle -32.88^\circ)$  o  $(339.41, -219.41) \frac{\text{km}}{\text{h}}$

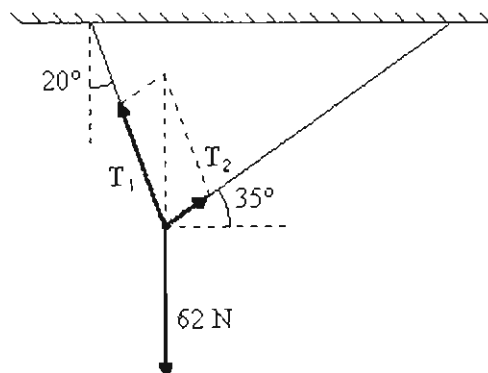
11. Una partícula que pesa 62 newton está suspendida de dos hilos con las inclinaciones dadas en la figura. Las tensiones  $T_1$  y  $T_2$  en estos hilos equilibran el peso de 62 N.

Calcular las magnitudes de  $T_1$  y  $T_2$  a partir de la condición de equilibrio

$$T_1 + T_2 + (0, -62) = 0$$

Sugerencia. Escriba  $T_1 = (-T_1 \cos 70^\circ, T_1 \sin 70^\circ)$ , etc., en la ecuación de equilibrio, aplique la relación de igualdad y resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas para  $T_1$  y  $T_2$ .

Resp.  $T_1 = 52.58$ ,  $T_2 = 21.95$ .



12. En una cuadrícula dibuje los vectores

$$E = (10, 2), F = (0, -6), G = (-3, 9) \text{ y } H = (4, 5)$$

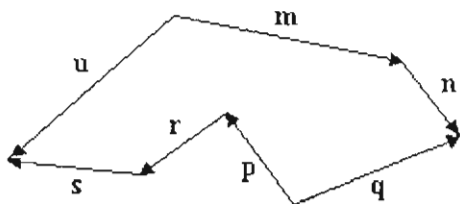
Sume estos vectores gráficamente usando el método del polígono. Obtenga la magnitud y dirección del vector-suma aproximadamente usando regla y transportador.

Resp. (14.8  $\angle$  42.2°)

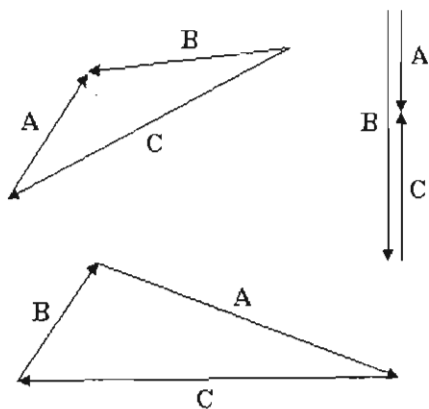
13. Los vectores mostrados en la figura forman un polígono. Sustituya en la relación

$$m \pm n \pm q \pm p \pm r \pm s \pm u = 0$$

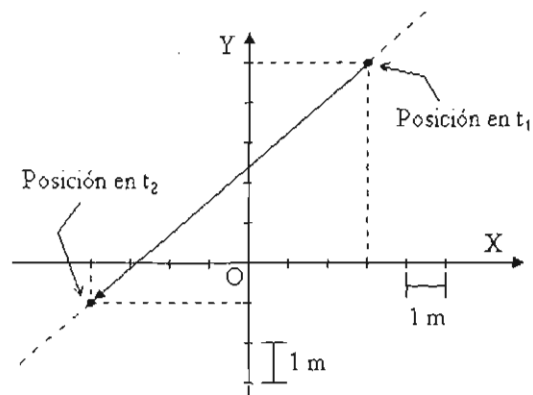
cada signo "±" apropiadamente por un signo "+" o un signo "-" de modo que la relación sea válida.



14. Para cada una de las ternas de vectores mostradas en la figura, escriba una relación que exprese el vector A en términos de una suma o resta de los vectores B y C.



15. Un móvil realiza un movimiento uniforme entre las posiciones mostradas en la figura. Dado que tarda 0.5 s en pasar de una a otra, calcular su (vector) velocidad.



Resp.  $v = (-14, -12) \frac{m}{s}$ .

16. Sobre un movimiento uniforme se sabe que en  $t = 0$  la partícula se halla en el punto  $r_0 = (-4 \text{ m}, 15 \text{ m})$ , y que en  $t = 6 \text{ s}$  se halla en  $r_1 = (0 \text{ m}, -7 \text{ m})$ . Obtener el vector velocidad "v".

17. Un sistema consta de 4 partículas de masas

$$m_1 = 4 \text{ kg} \quad m_2 = 8 \text{ kg}$$

$$m_3 = 1 \text{ kg} \quad m_4 = 3 \text{ kg}$$

ubicadas respectivamente en los puntos

$$(-1, 8) \text{ m}, \quad (5, 0) \text{ m}, \quad (9, -10) \text{ m}, \quad (-3, -6) \text{ m}$$

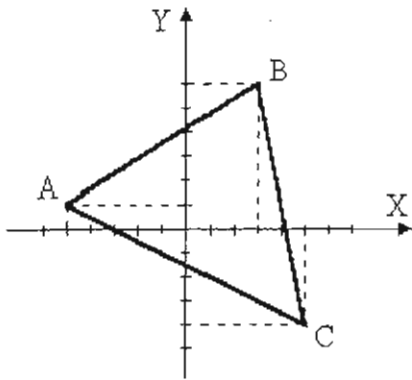
Obtener el vector separación que va desde el centro de masa hasta la primera partícula. Haga una figura.  
Resp. (5/4 m, 31/4 m)

18. Los vértices de un triángulo son  $A = (-5, 1)$ ,  $B = (3, 6)$  y  $C = (5, -4)$ . Obtener su baricentro G aplicando la fórmula

$$r_G = \frac{1}{3}(r_A + r_B + r_C)$$

donde las r's son vectores de posición de los vértices. Obtener el vector GC.

(El *baricentro* o *centroide* es el centro de gravedad de la placa triangular ABC, supuesta homogénea. Es el punto de intersección de las medianas del triángulo).  
Resp.  $r_G = (1, 1) \text{ m}$ ,  $GC = (4, -5) \text{ m}$ .



19. Efectuar las siguientes operaciones vectoriales:

(a)  $(3, -2) - 5(8, 9)$

(b)  $-\frac{1}{3}(-12, 6) + \frac{(20, 30)}{5}$

(c)  $\frac{(10, 2) - 3(-5, -6)}{|(3, -4)|}$

(d)  $\sqrt{2}|(0, -9)|(4, -2) - (4, -2)$

20. Dados los vectores  $a = (8, 0)$ ,  $b = (-9, 2)$ ,  $c = (-5, 1)$  y  $d = (6, 0)$ , calcular

(a)  $-a + \frac{1}{5}b + |c|d$

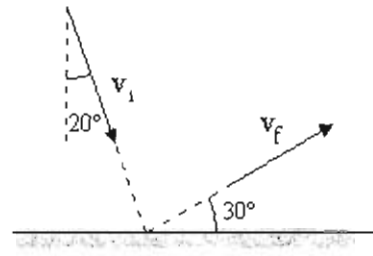
(b)  $\frac{c - 3d}{4} - \frac{a}{|(-2, 3)|}$

21. El vector  $S$  se obtiene dividiendo el vector  $(4, -8)$  por 2 y luego restándole el vector  $(2, 5)$ . El vector  $T$  se obtiene multiplicando el vector  $(-1, 6)$  por 5 y luego restándole el vector  $(1, 22)$ . Calcular la diferencia  $S - T$ .

Resp.  $(6, -17)$

22. Una partícula golpea una superficie con una velocidad  $v_i$  como la indicada en la figura, y rebota con velocidad  $v_f$ . Calcular el cambio de su velocidad.

Tomar  $|v_i| = 12 \frac{m}{s}$  y  $|v_f| = 10 \frac{m}{s}$ .



Resp.  $\Delta v = (4.55, 16.27) \frac{m}{s}$ .



## CAPÍTULO 4

## TRANSFORMACIÓN DE LOS VECTORES. BASES VECTORIALES

## 4.1. Marco de referencia o referencial

Los conceptos cinemáticos poseen una cualidad de relatividad muy evidente. Por ejemplo, todos nos percatamos de que la velocidad de un automóvil con respecto a un tren que viaje paralelamente a él no es la misma que con respecto a un observador apostado junto a las vías. El concepto de velocidad es, pues, "relativo al observador".

Todo movimiento constituye una relación entre al menos dos cuerpos. Uno de ellos es el móvil, cuyo movimiento queremos describir u observar, y el otro cuerpo es el llamado "marco de referencia", desde donde hacemos las mediciones que caracterizan numéricamente el movimiento observado.

El *marco de referencia* o *referencial* es aquel cuerpo rígido, o conjunto de cuerpos rígidos en reposo relativo mutuo, en donde se *fijan* los instrumentos para la medición de toda cantidad física pertinente al fenómeno en observación.

El marco de referencia es nuestra "plataforma" de observación de los fenómenos físicos. El marco de referencia más común en ingeniería es una porción de la superficie terrestre. Le llamaremos el *referencial Tierra*. Cuando no se especifique explícitamente el marco de referencia, supondremos que es éste.

Dos marcos de referencia que estén en reposo relativo mutuo son equivalentes. Constituyen de hecho un mismo referencial. Así, un laboratorio, un edificio, etc., fijos a Tierra, son equivalentes al referencial Tierra.

Por definición, dos referenciales son distintos si están en *movimiento relativo mutuo*, es decir, si uno de ellos se está moviendo, según se observa desde el otro.

El concepto de marco de referencia es fundamental en física. Todas las cantidades físicas, en particular las usadas en cinemática y dinámica para la descripción y explicación de los movimientos, tienen un sentido preciso solamente si se especifica el referencial que les subyace.

El término *observador* se suele tomar en física como sinónimo de referencial. La expresión "según el observador X" significa lo mismo que "según las mediciones efectuadas con base en el referencial X". El

término se aplica también cuando las mediciones se registran automáticamente, sin intervención humana. Por ejemplo, si el referencial es un satélite artificial, éste o sus instrumentos hacen las veces de "observadores" (de fenómenos atmosféricos, astrofísicos, meteorológicos, etc.).

La distinción entre referenciales tiene un contenido físico fundamental: los valores experimentales de las cantidades físicas siempre están asociados a un referencial, en el sentido de que no se puede afirmar a priori que tales medidas resulten las mismas de ser efectuadas con base en un referencial distinto.

La teoría física permite traducir valores experimentales de un referencial a otro. Podemos medir una cantidad con base en un referencial A y luego calcular el valor que le correspondería en otro referencial B. Por ejemplo, si las velocidades del automóvil y el tren citados, con respecto a Tierra, son respectivamente de 90 km/h y 50 km/h, ambas en la misma dirección, entonces la velocidad del automóvil con respecto al tren es de 40 km/h. Por esta razón no es necesario mantener instrumentos de medición en todos los referenciales considerados. Más aun, muchas veces conviene definir como referencial un objeto pequeño incapaz de albergar aparatos de medida, como por ejemplo un elemento de un mecanismo.

Demos otros ejemplos de referenciales.

El Sol se usa como marco de referencia para describir los movimientos de los planetas del sistema solar.

Un avión en vuelo.

Cierto conjunto de estrellas, de las más lejanas de la Tierra, sirve como marco para estudiar los movimientos de cuerpos celestes. A éste se le denomina el *referencial de las estrellas fijas*.

Un elevador en caída libre.

Una cabina centrífuga (para experimentos de fisiología).

La Vía Láctea, nuestra galaxia (para el movimiento del Sol y otras estrellas).

Un vehículo acelerado en línea recta.

Un Carrusel.

La pluma de una grúa durante una maniobra.

Etc. Etc.

## 4.2. Sistema de coordenadas

Es necesario distinguir bien entre "marco de referencia" (un cuerpo rígido) y "sistema de coordenadas". Un sistema de coordenadas consta generalmente de algunos puntos especiales (origen, polo), unas direcciones de referencia (ejes) o curvas características, y un procedimiento para asignar coordenadas a los puntos del espacio.

Una vez estipulado el marco de referencia que se utilizará en el análisis de un movimiento, hay que fijar en él un sistema de coordenadas, o varios, según convenga. Los puntos especiales del sistema, y las rectas que constituyen sus ejes, se definen valiéndose de puntos fijos y distinguibles del referencial. Así por ejemplo, si el referencial es digamos una mesa de billar, podríamos definir en él un sistema cartesiano bidimensional cuyo origen  $O$  fuese una de las esquinas de la mesa, y cuyos ejes  $X$  y  $Y$  fuesen los filos de dos bandas. Para el referencial Sol tomaríamos el origen en el centro del Sol y definiríamos los ejes como rectas que parten del Sol hacia estrellas fijas determinadas.

Todos conocemos el sistema de coordenadas geográficas "latitud" y "longitud", usado para localizar puntos sobre la superficie terrestre. Este es un sistema de coordenadas fijado en el referencial Tierra.

## 4.3. Velocidad relativa

Sean  $A$  y  $B$  dos partículas en movimiento con velocidades  $v_A$  y  $v_B$  medidas desde el referencial Tierra. Fijemos en las partículas sendos sistemas de coordenadas, cuyos ejes se trasladan junto con ellas (Fig. 60).

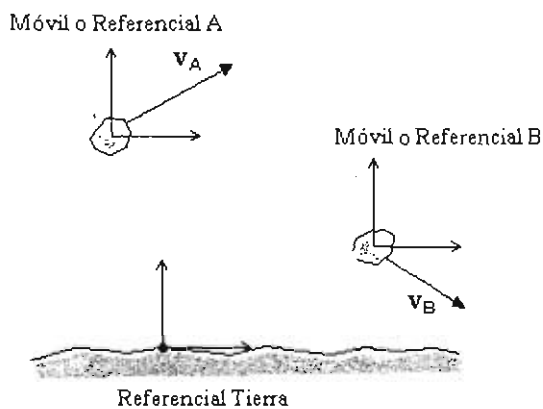


Fig. 60

### (44) Fórmula de la velocidad relativa.

Se define la *velocidad relativa* de la partícula  $B$  con respecto a la partícula  $A$  (propriadamente, con respecto al referencial  $A$ ) mediante la expresión

$$v_{B/A} = v_B - v_A$$

Notemos que en la Fig. 60 hay tres cuerpos implicados: la Tierra, la partícula  $A$  y la partícula  $B$ . Cualquiera de ellos puede verse como "móvil" o como "referencial", dependiendo del observador que se considere. Fijémonos también que los ejes de cada sistema no están rotando unos relativamente a otros, sino trasladándose (podemos suponer que los tres ejes  $X$  y  $Y$  se conservan respectivamente paralelos).

El símbolo " $v_{B/A}$ " se lee "velocidad de  $B$  con respecto a  $A$ ". La diagonal "/" en " $B/A$ " significa "con respecto a".

La velocidad de un móvil  $M$  con respecto a Tierra se podría escribir en la forma " $v_{M/T}$ ", donde la literal " $T$ " indicaría "Tierra". Sin embargo, en este caso se suele suprimir el indicador " $T$ " y escribirla simplemente como " $v_M$ ". Las velocidades con respecto a Tierra, aparte de no llevar indicador, se denominan *absolutas* (con las reservas del caso, ya que de hecho toda velocidad es relativa —depende del marco de referencia subyacente).

**Ejemplo 30.** Un camión viaja con velocidad horizontal  $v_C$  (con respecto a Tierra). Cae lluvia con velocidad  $v_A$  vertical (con respecto a Tierra). Calcular la velocidad de la lluvia con respecto al camión, suponiendo los siguientes valores para las magnitudes:  $v_C = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,

$$v_A = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

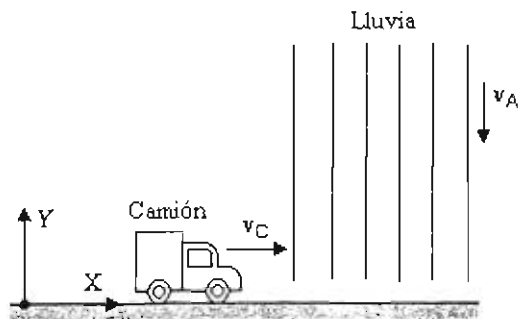


Fig. 61

Denotemos con  $v_{A/C}$  la velocidad de la lluvia con respecto al camión. De acuerdo con la fórmula de la velocidad relativa tenemos

$$v_{A/C} = v_A - v_C$$

Usando el sistema XY fijo a Tierra mostrado en la figura tenemos (en unidades de km/h):

$$v_C = (60, 0) \quad v_A = (0, -40)$$

Entonces

$$v_{A/C} = (0, -40) - (60, 0) = (-60, -40)$$

Equivalentemente,

$$v_{A/C} = 72.11 \frac{\text{km}}{\text{h}} \angle -146.31^\circ$$

El conductor del camión ve caer la lluvia con una velocidad de 72.11 km/h a un ángulo de 56.31° con la vertical, como se muestra en la construcción gráfica de la Fig. 62.

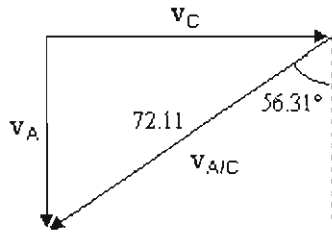


Fig. 62

Hay un par de fórmulas concernientes a velocidades relativas. Son las siguientes:

$$(45a) \quad v_{A/B} = -v_{B/A}$$

$$(45b) \quad v_{A/C} = v_{A/B} + v_{B/C}$$

A, B y C son móviles/referenciales arbitrarios.

De hecho la fórmula (45b) es equivalente a la fórmula de la velocidad relativa. Para demostrarlo sustituiremos en (45b) el referencial B por Tierra (T):

$$v_{A/C} = v_{A/T} + v_{T/C}$$

pero  $v_{A/T} \equiv v_A$  y, usando (45a),  $v_{T/C} = -v_{C/T} \equiv -v_C$ .

$$\Rightarrow \underline{v_{A/C} = v_A - v_C} \quad \underline{\text{QED.}}$$

La fórmula (45b) se puede generalizar a más de tres móviles. Para 5 móviles A, B, C, D y M tendríamos

(46)

$$v_{A/M} = v_{A/B} + v_{B/C} + v_{C/D} + v_{D/M}$$

Observe cómo se encadenan los índices B, C y D en el miembro derecho de (46).

**Ejemplo 31.** En la Fig. 63, cada una de las velocidades anotadas es relativa al cuerpo sobre el que se apoya el móvil respectivo. Calcular la velocidad del conejo C con respecto a Tierra. Suponer ejes igualmente orientados en cada marco de referencia considerado.

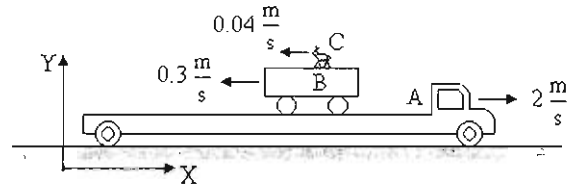


Fig. 63

Ninguna de las velocidades posee componente Y, así que los datos del problema son (en metros por segundo):

$$v_{A/T} = (2, 0) \quad v_{B/A} = (-0.3, 0) \quad v_{C/B} = (-0.04, 0)$$

(El camión es "A", el carrito sobre él es "B", el conejo es "C" y Tierra es "T").

Aplicando (46),

$$\begin{aligned} v_{C/T} &= v_{C/B} + v_{B/A} + v_{A/T} \\ &= (-0.04, 0) + (-0.3, 0) + (2, 0) \\ &= (1.66, 0) \end{aligned}$$

Relativamente a Tierra, pues, el conejo C se mueve con una velocidad de 1.66 metros por segundo hacia la derecha.

**Nota.** En este ejemplo todos los vectores que intervienen tienen solamente componente X. Sus representaciones por componentes son todas de la forma " $(C_x, 0)$ ", con nula componente Y. En las aplicaciones del álgebra vectorial a la física encontraremos frecuentemente este escenario, así que daremos a continuación un método conveniente para manejarlo.

#### 4.4. Manejo de los vectores en una dimensión

Muchas leyes físicas se expresan matemáticamente en forma de una ecuación vectorial. Así tenemos por ejemplo la expresión matemática de la segunda ley de Newton, " $F = m a$ ", o la fórmula de la velocidad relativa, " $v_{A/B} = v_A - v_B$ ", etc. Explicaremos en el siguiente ejemplo cómo manejar tales relaciones en una dimensión.

**Ejemplo 32.** Tres bolas tienen las velocidades indicadas en la Fig. 64, todas con respecto a Tierra. Calcular (a) La velocidad de la bola C con respecto a la bola A; (b) La velocidad de la bola B con respecto a la bola C.

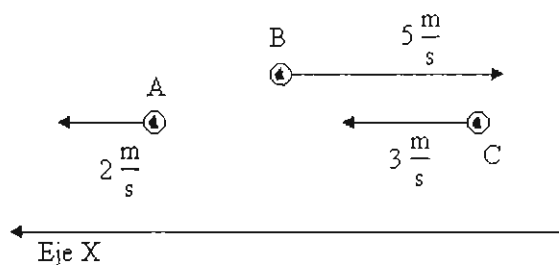


Fig. 64

He aquí los pasos del método:

**Paso #1.** Escribir en forma *vectorial* las relaciones o leyes físicas aplicables al problema.

Este ejemplo se resolverá con la fórmula de la velocidad relativa, aplicada dos veces, a saber,

$$(i) \quad v_{C/A} = v_C - v_A$$

$$(ii) \quad v_{B/C} = v_B - v_C$$

**Paso # 2.** Escribir las relaciones o leyes físicas vectoriales en términos de las *componentes* a lo largo del eje adoptado.

Las ecuaciones (i) y (ii), escritas en términos de las componentes X de los vectores que figuran en ellas, son

$$(iii) \quad v_{C/A} = v_C - v_A$$

$$(iv) \quad v_{B/C} = v_B - v_C$$

Note que (iii) y (iv) tienen la misma estructura que (i) y (ii), y que las componentes de  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $v_C$ ,  $v_{C/A}$  y  $v_{B/C}$  se han denotado con  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $v_C$ ,  $v_{C/A}$  y  $v_{B/C}$ .

**Paso # 3.** Expresar cada componente en la forma

$$\text{Componente} = \pm \text{Magnitud}$$

o dejarla indicada, si es desconocida.

Antes de hacer el paso # 3, notemos que este ejemplo introduce una pequeña "complicación": el eje X se ha definido *hacia la izquierda* del papel. Por consiguiente, las componentes de velocidades son positivas si apuntan hacia la izquierda, negativas si hacia la derecha. Por tanto, los valores son, en "m/s",

$$v_A = 2, \quad v_B = -5, \quad v_C = 3$$

**Paso #4.** Sustituir en la ecuación de componentes.

Sustituyendo los valores anteriores en las ecuaciones (iii) y (iv) tenemos

$$v_{C/A} = v_C - v_A = 3 - 2 = 1$$

$$v_{B/C} = v_B - v_C = -5 - 3 = -8$$

Con esto el problema queda resuelto.

En las Figs. 65a y 65b se indica el movimiento visto desde los marcos de referencia "A" y "C" (en los que las bolas A y C, respectivamente, están en reposo):

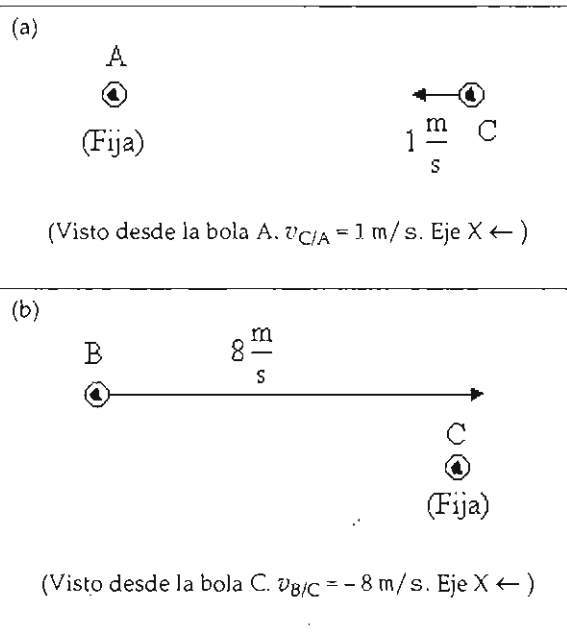


Fig. 65

Como ejercicio, calcule la velocidad de la bola A con respecto al referencial "C". Debe encontrar que  $v_{A/C} = -1 \text{ m/s}$ .

Uno se puede ahorrar el Paso # 1 dado en el ejemplo anterior, debido a que las leyes físicas aplicables al equilibrio y a movimientos en una dimensión se suelen expresar ya en términos de las *componentes* de los vectores implicados. Veamos.

En el denominado "movimiento rectilíneo" que, como su nombre lo indica, tiene lugar a lo largo de una recta, todos los vectores de interés poseen solamente *una* componente. Observe los vectores de posición  $r$ , velocidad  $v$  y aceleración  $a$ , mostrados en la Fig. 66; todos ellos apuntan bien en la dirección  $+X$ , bien en la dirección  $-X$ . Dado que no poseen componente  $Y$ , su forma matemática general es

$$r = (x, 0), \quad v = (v_x, 0), \quad a = (a_x, 0)$$

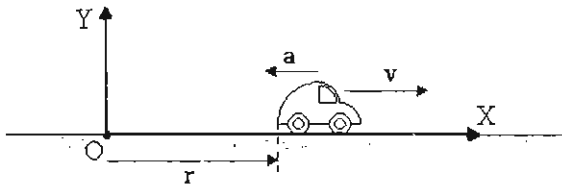


Fig. 66

Análogamente, las fuerzas de interés (las que están a lo largo del movimiento) a que está sometido el móvil tienen la forma general

$$F = (F_x, 0)$$

Las cantidades de interés son pues las componentes (únicas)  $x$ ,  $v_x$ ,  $a_x$  y  $F_x$ . En virtud de que las componentes  $Y$  son nulas, convencionalmente se suprime el subíndice "x" y se escriben las componentes anteriores en la forma  $x$ ,  $v$ ,  $a$  y  $F$ .

Ahora bien, consideremos alguna ley física que se exprese como una ecuación vectorial, como por ejemplo la segunda ley de Newton,  $F = ma$ . Especializada al movimiento rectilíneo podemos formularla así:

$$F = m a$$

Esto equivale a igualar las componentes  $X$  de cada lado de la ecuación  $F = ma$ . Demos otros ejemplos, todos ellos concernientes al movimiento rectilíneo:

- La fórmula de la velocidad relativa,  $v_{A/B} = v_A - v_B$ , se escribe alternativamente en la

forma  $v_{A/B} = v_A - v_B$ .

- La ecuación que expresa que la suma vectorial de varios vectores, digamos  $c$ ,  $B$ ,  $p_A$  y  $V$ , es cero, se escribe

$$c + B + p_A + V = 0$$

en lugar de  $c + B + p_A + V = 0$ .

- Si  $m_1$  y  $m_2$  son números reales y  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$  y  $v_2$  son vectores, la ecuación

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

adopta en una dimensión la forma

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Es sumamente importante advertir que todas las cantidades introducidas arriba,  $x$ ,  $v$ ,  $a$ ,  $F$ ,  $v_{A/B}$ ,  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $c$ ,  $B$ ,  $p_A$ ,  $V$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ , por ser *componentes* de vectores (no magnitudes), pueden ser *positivas*, *negativas* o *cero*. Valores positivos de estas cantidades significan que los vectores respectivos apuntan hacia la dirección *positiva* del eje  $X$ ; valores negativos, que apuntan hacia la dirección *negativa* del eje  $X$ .

Recopilemos. En el movimiento rectilíneo, y en otras situaciones en que todos los vectores tengan solamente una componente, podemos prescindir de la notación vectorial y trabajar algebraicamente con las componentes (únicas) de los vectores. A dichas componentes se les suprime el índice "x" o "y".

**Ejemplo 33.** En los "diagramas de cuerpo libre" (gráficos donde se muestra la totalidad de las fuerzas que solicitan a un cuerpo) es convencional poner junto a cada vector-fuerza un símbolo que representa su *magnitud*. La Fig. 67, supuestamente el diagrama de cuerpo libre de una partícula, incluye cuatro fuerzas de magnitudes  $W$ ,  $N$ ,  $R$  y  $T$ , con las direcciones mostradas.

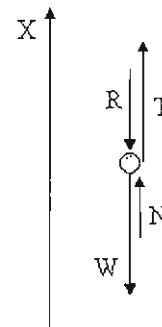


Fig. 67

La ecuación de equilibrio de una partícula sometida a fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$ , todas ellas a lo largo digamos del eje  $X$ , se escribe en una forma que se refiere ya las componentes  $X$  de las fuerzas, así:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

(donde  $F_i$  es la componente  $X$  de la fuerza  $F_i$ ).

Aplicando la ecuación de equilibrio al diagrama de la Fig. 67 tendríamos entonces:

$$-W + N - R + T = 0$$

Esta última ecuación es la suma de las componentes “-W”, “N”, “-R” y “T” de los vectores del diagrama.

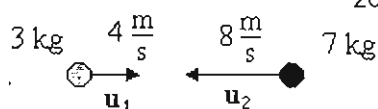
**Ejemplo 34.** En un choque elástico entre dos partículas de masas  $m_1 = 2 \text{ kg}$  y  $m_2 = 6 \text{ kg}$ , que se mueven a lo largo de la misma recta, las velocidades antes del choque ( $u_1$  y  $u_2$ ) tienen los valores mostrados en la Fig. 68a. Se sabe que después del choque la velocidad de la partícula 1 es  $12.8 \text{ m/s}$ , como se ve en la Fig. 68b.

Calcular la velocidad de la partícula 2 después del choque empleando la ecuación

$$(r1) \quad m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades después del choque (más bien son las *componentes* de las velocidades después del choque).

(a) Antes:



(b) Después:



Fig. 68

La ecuación (r1) es la ley física que nos ha sido proporcionada para resolver el problema. Como

hemos dicho, esta ley se ha expresado ya en términos de las componentes de los vectores de interés.

Tomando los ejes del modo estándar (Eje  $X$  hacia la derecha, Eje  $Y$  hacia arriba) tenemos los siguientes datos (en unidades de  $\text{m/s}$ ):

$$u_1 = 4, \quad u_2 = -8, \quad v_1 = -12.8$$

De la ecuación (r1) obtenemos, con  $m_1 = 3$  y  $m_2 = 7$ :

$$v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 - m_1 v_1}{m_2}$$

$$v_2 = \frac{3 \cdot 4 + 7(-8) - 3(-12.8)}{7} = -0.8$$

El signo negativo de  $v_2$  indica que el vector velocidad  $v_2$  está dirigido opuestamente al Eje  $X$ , es decir, hacia la izquierda.

#### 4.5. Traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas

Consideremos dos sistemas cartesianos  $OXY$  y  $O'X'Y'$  cuyos ejes son paralelos entre sí. Figurémonos que el sistema  $O'X'Y'$  se obtiene sometiendo al sistema  $OXY$  a una *traslación*, esto es, a un desplazamiento que conserva las direcciones de los ejes  $X$  y  $Y$  (Fig. 69).

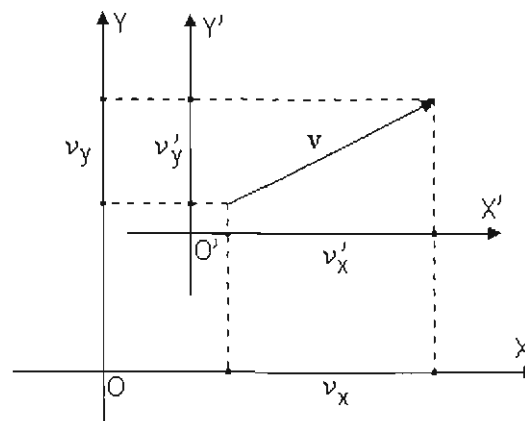


Fig. 69

Sea  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  un vector arbitrario. Como vemos en la Fig. 69, las proyecciones ortogonales (componentes) del vector  $\mathbf{v}$  sobre los ejes  $X$  y  $Y$  son las mismas que sobre  $X'$  y  $Y'$ . Esta es una propiedad común a todos los vectores:

(47) Las componentes de un vector no se alteran frente a una traslación del sistema de coordenadas. Matemáticamente,

$$v'_x = v_x \quad v'_y = v_y$$

Consideremos ahora dos sistemas con origen común, uno de aquellos rotado con respecto al otro. Observe la Fig. 70; los ejes  $X'$  y  $Y'$  se han obtenido girando los ejes  $X$  y  $Y$  en su propio plano en un ángulo  $\alpha$  alrededor del origen  $O$ .

De la Fig. 70 podemos sacar la relación entre las componentes de  $v$  en ambos sistemas: la componente  $v_x$  es la diferencia de dos segmentos: el primero de ellos es la proyección del segmento  $v'_x$  sobre el eje  $X$  (que vale  $v'_x \cos \alpha$ ), el segundo la proyección de  $v'_y$  sobre este mismo eje (que vale  $v'_y \sin \alpha$ ). Obtenemos así las ecuaciones de transformación.

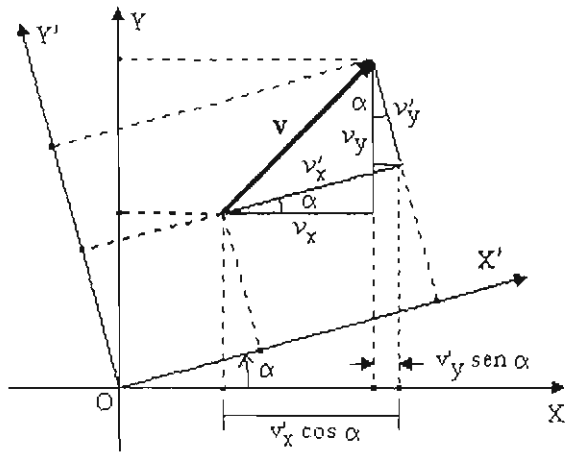


Fig. 70

(48) Ecuaciones de transformación de las componentes de vectores ante una rotación del sistema de coordenadas.

(a)  $v_x = v'_x \cos \alpha - v'_y \sin \alpha$

(b)  $v_y = v'_x \sin \alpha + v'_y \cos \alpha$

Resolviendo (a) y (b) para  $v'_x$  y  $v'_y$  tenemos las relaciones recíprocas

(c)  $v'_x = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha$

(d)  $v'_y = -v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha$

Dado que en la traslación las componentes no se alteran, las ecuaciones (48a,b) y (48c,d) son otras tantas formas de expresar la ley de transformación de todo vector frente a traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas.

Las propiedades de transformación son muy simples dadas en términos de la magnitud y dirección del vector (Véase la Fig. 71). Si en el sistema  $OXY$  el vector tiene la expresión  $v = (v \angle \theta)$ , entonces en otro sistema  $O'X'Y'$  trasladado y rotado un ángulo  $\alpha$  con respecto a aquel la expresión del vector será  $v = (v \angle \theta - \alpha)$ .

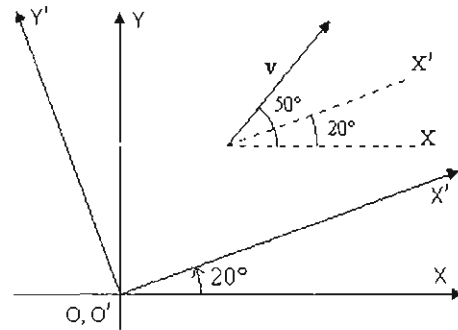


Fig. 71

Así, el vector  $v$  mostrado en la Fig. 71 es

$$v = (v \angle 50^\circ) \quad \text{en } OXY$$

$$y \quad v = (v \angle 30^\circ) \quad \text{en } O'X'Y'$$

Como vemos, la magnitud no se altera, y la dirección se reduce en " $\alpha$ ", que es el ángulo que se gira el eje  $X$  para obtener el eje  $X'$  (el valor de este ángulo  $\alpha$  se obtiene con la misma regla de signos que atañe a la dirección de un vector; varía entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ ).

(49) En la notación simbólica se usa el mismo símbolo para denotar a un mismo vector en dos sistemas de coordenadas distintos. De esta manera, si un vector  $A$  se expresa en la forma

$$A = (A_x, A_y)$$

en algún sistema  $OXY$ , entonces en otro sistema  $O'X'Y'$  será

$$A = (A'_x, A'_y)$$

El símbolo " $A$ " no cambia, las componentes sí.

La razón de este convenio notacional estriba en una propiedad fundamental de *invariabilidad* (o *invarianza*) de los vectores físicos frente a traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas. Esta propiedad significa esencialmente que un vector físico posee el mismo significado en todo sistema de coordenadas, lo cual se expresa matemáticamente mediante las leyes de transformación de los vectores, o sea las ecuaciones (48a,b) o (48c,d).

Ilustremos este importante punto con un ejemplo simple.

Imaginemos que una catarina se mueve en línea recta sobre este papel, con una velocidad de 7.071 mm/s (valor igual a  $\sqrt{50} = 7.071$ ), dirigida hacia cierto punto fijo P de la hoja (Fig. 72).

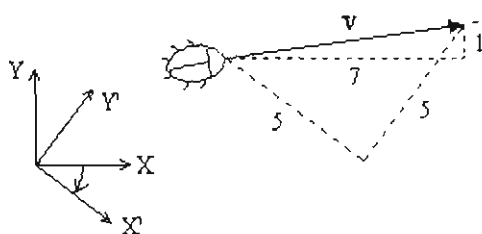


Fig. 72

Podríamos tomar esta hoja de papel como marco de referencia para el movimiento de la catarina. Tenemos

En el sistema XY mostrado,

$$\mathbf{v} = (7, 1) \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{v} = (\sqrt{50} \frac{\text{mm}}{\text{s}} \angle 8.13^\circ)$$

Supongamos que rotamos el sistema XY en un ángulo de  $-36.87^\circ$ , obteniendo así otro sistema X'Y'. La velocidad de la catarina en este nuevo sistema tiene componentes que se calculan de (48c,d):

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha = \\ &= 7 \cdot \cos(-36.87^\circ) + 1 \cdot \sin(-36.87^\circ) = \\ &= 7 \cdot 0.8 + 1 \cdot (-0.6) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_y &= -v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha = \\ &= -7 \cdot \sin(-36.87^\circ) + 1 \cdot \cos(-36.87^\circ) = \\ &= -7 \cdot (-0.6) + 1 \cdot (0.8) = 5 \end{aligned}$$

(Otro modo más simple de calcularlas es a partir de la representación  $\mathbf{v} = (\sqrt{50} \angle 45^\circ)$  en el sistema X'Y':

$$v'_x = 7.071 \cos 45^\circ = 5, \quad v'_y = 7.071 \sin 45^\circ = 5).$$

En el sistema X'Y',

$$\mathbf{v} = (5, 5) \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{v} = (\sqrt{50} \frac{\text{mm}}{\text{s}} \angle 45^\circ)$$

Ahora bien, aunque las dos representaciones analíticas dadas (las encerradas en los cuadros de la columna precedente) son distintas, ambas se traducen en el mismo movimiento de la catarina con respecto al papel (o sea, en el caso general, con respecto a los demás objetos físicos del marco de referencia).

Las magnitudes de ambos vectores velocidad,

$$\mathbf{v} = (7, 1) \text{ en } XY \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (5, 5) \text{ en } X'Y'$$

son iguales, a saber,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{50}$ , y ambas direcciones ( $8.13^\circ$  y  $45^\circ$ ) describen un movimiento hacia el punto P de la hoja (Véase la Fig. 72).

Esto es una ventaja más de la representación de los vectores físicos por medio de flechas. Al trasladar y/o rotar un sistema de coordenadas la flecha permanece inmóvil con respecto al papel (no se traslada y rota junto con el sistema de coordenadas). El papel representa, por analogía, los cuerpos circundantes al móvil (el llamado *marco de referencia* del movimiento), y la inmovilidad de la flecha con respecto al papel representa la relación inmutable del vector físico con el marco de referencia. Esta relación se expresa matemáticamente mediante las fórmulas de transformación dadas.

Las leyes físicas cuya expresión matemática es una ecuación vectorial son *covariantes*, esto es, tienen la misma forma matemática en todo sistema de coordenadas. Por ejemplo, la segunda ley de Newton se expresa siempre en la forma única

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

independientemente del sistema de coordenadas empleado para operar con los vectores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{a}$ . Para diversos sistemas OXY, O'X'Y', O''X''Y'', etc., la segunda ley se resuelve en



$$F_x = m a_x \quad F_y = m a_y \quad \text{en OXY}$$

$$F'_x = m a'_x \quad F'_y = m a'_y \quad \text{en O'X'Y'}$$

$$F''_x = m a''_x \quad F''_y = m a''_y \quad \text{en O''X''Y''}$$

Etc.

#### 4.6. Transformación del vector de posición

El "vector" de posición no cumple la ley de transformación de todo vector (Ecs. 48a,b o 48c,d). Expliquemos.

En la Fig. 73 imaginemos que los sistemas OXY y O'X'Y' coinciden inicialmente: O y O' son un mismo punto, X es paralelo a X' y Y lo es a Y'. En este caso tendremos que el vector de posición del punto arbitrario P es el mismo en ambos sistemas, o sea  $r = r'$ . Ahora dejemos fijo el sistema OXY y traslademos el sistema O'X'Y'; entonces la flecha  $r$  permanecerá fija, pero la flecha  $r'$  variará, puesto que su punto inicial siempre debe estar anclado en el origen O', por definición. Esto es, el sistema O'X'Y' arrastra consigo la flecha  $r'$ . En este sentido los vectores de posición son *dependientes* del sistema de coordenadas; no obedecen la ley de transformación (48a,b).

(50) La relación entre los vectores de posición  $r$  y  $r'$ , referidos a dos sistemas OXY y O'X'Y', es

$$r' = r - b$$

donde  $b = OO'$  es el vector de posición del origen O' relativo al sistema OXY.

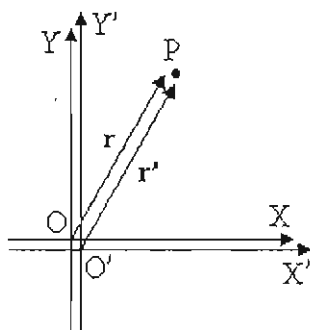


Fig. 73

Por esta razón los vectores de posición se designan con símbolos distintos ( $r$  y  $r'$ ) en sistemas coordenados distintos (esto es una excepción a la regla (49)-p51).

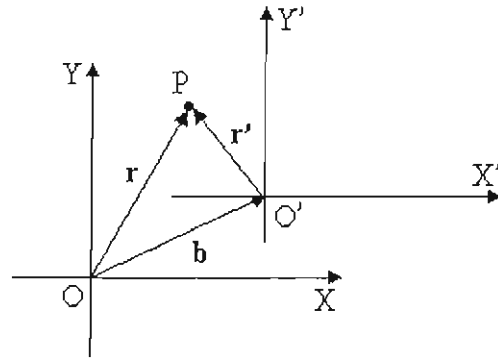


Fig. 74

Sin embargo, si limitamos las transformaciones del sistema de coordenadas a puras rotaciones (excluyendo las traslaciones, o sea, haciendo que los orígenes O y O' siempre coincidan), entonces el vector de posición sí obedece la ley de transformación (48a,b).

Un *vector propio* es el que cumple (48a,b) bajo cualquier movimiento rígido (traslación + rotación) del sistema; el vector de posición no es un vector propio; decimos que es un *vector solamente ante rotaciones*. Esta particularidad del vector de posición debe tomarse en consideración al formar "invariantes" o "escalares".

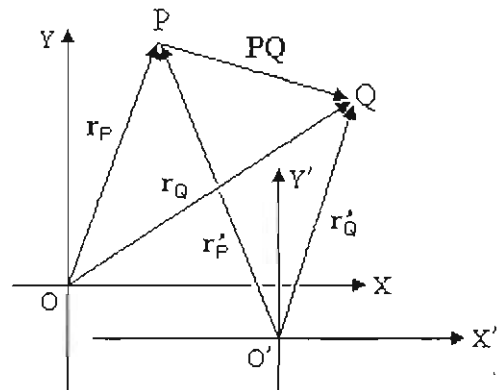


Fig. 75

Los vectores separación, formados por diferencias de vectores de posición, sí son vectores propios. La razón es que los vectores separación enlazan dos puntos *inmutables* del plano (o del marco de referencia). En la Fig. 75 vemos que, si bien los vectores de posición de P y Q son flechas distintas en los sistemas OXY y O'X'Y', la flecha PQ es la misma en ambos sistemas. Matemáticamente, usando (50) tenemos

$$r'_Q - r'_P = (r_Q - b) - (r_P - b) = r_Q - r_P$$

Como vemos, se cancela el efecto “- b” de la traslación al formar la diferencia.

**4.7\* ¿Qué es la aceleración?**

Relativamente a un marco de referencia prefijado, un móvil puede estar:

- En reposo.
- En movimiento uniforme.
- En movimiento acelerado.

Ya hemos estudiado el movimiento uniforme, en el que el móvil se desplaza en línea recta, recorriendo siempre la misma distancia cada mismo tiempo. Si el móvil se desvía de la línea recta, y/o empieza a recorrer cada vez mayor o menor distancia por unidad de tiempo, entonces “está acelerado”.

En términos generales *existe aceleración cuando la velocidad del móvil está cambiando*. Ahora bien, en virtud de que la velocidad es un *vector*, determinado por sus *dos* propiedades de magnitud y dirección, un cambio de la velocidad puede significar cambios solamente de magnitud, o solamente de dirección, o cambios de ambos magnitud y dirección.

Ejemplos de movimientos acelerados:

- Un automóvil se mueve en línea recta de tal modo que en tiempos iguales sucesivos va recorriendo cada vez más distancia. En este caso la velocidad va aumentando en magnitud solamente (Fig. 76a).
- Una partícula describe un círculo de tal modo que recorre distancias iguales en tiempos iguales. En este caso la dirección de la velocidad es su única propiedad que va cambiando (Fig. 76b).
- Un móvil se desplaza a lo largo de una curva recorriendo distancias distintas en tiempos iguales sucesivos. En este caso tanto la magnitud como la dirección de la velocidad varían. Es el caso general.

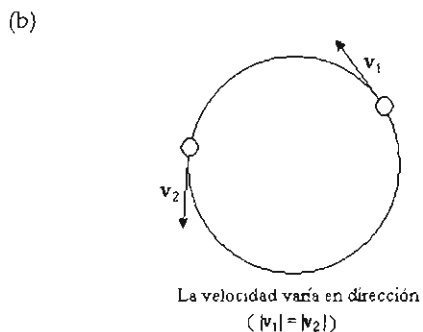
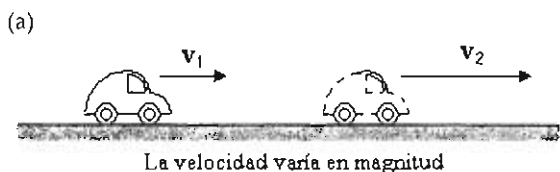


Fig. 76

La gran mayoría de los movimientos que observamos cotidianamente son acelerados. En esta categoría se cuenta una clase muy especial, la siguiente:

(51) El *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)* es aquel en el que:

- El móvil se desplaza en línea recta.
- La magnitud de la velocidad del móvil va variando a una tasa constante en el transcurso del tiempo.

Sean  $v_1$  y  $v_2$  las velocidades del móvil en dos tiempos arbitrarios  $t_1$  y  $t_2$ . Se define la aceleración del MRUA en la forma

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

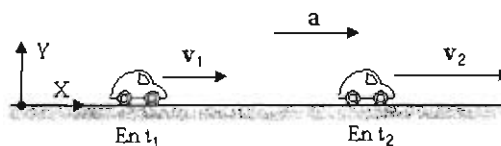


Fig. 77

Recuerde que estamos tratando con un movimiento rectilíneo, de modo que los vectores velocidad  $v_1$  y  $v_2$  están a lo largo del Eje X (Fig. 77). Su cambio  $\Delta v$  está a lo largo de X, de modo que la aceleración ( $a = \Delta v/\Delta t$ ) también es un vector a lo largo de X (Fig. 78).

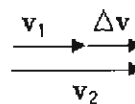


Fig. 78

Nota. Las unidades físicas de la aceleración se sacan de su definición (51): son las unidades de velocidad divididas por las unidades de tiempo, o sea

$$\frac{\left(\frac{m}{s}\right)}{s} = \frac{m}{s^2}$$

El ejemplo más importante de movimiento uniformemente acelerado es el denominado *movimiento de caída libre*. Este movimiento lo ejecuta todo cuerpo que se deja caer libremente cerca de la superficie terrestre (Fig. 79)

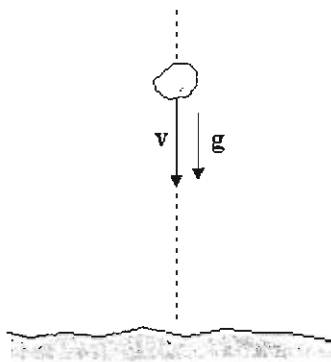


Fig. 79

La aceleración del cuerpo es un vector que se denota con "g". Su magnitud es aproximadamente

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

y su dirección es vertical hacia el centro de la Tierra en la localidad supuesta. Esta se denomina *aceleración de caída libre* o *aceleración de la gravedad*. Es un hecho notable que todos los cuerpos, independientemente de su forma, tamaño y composición, caen con la misma aceleración g.

En el movimiento de caída libre la magnitud de la velocidad va creciendo a razón de  $9.8 \frac{m}{s}$  cada segundo. Por tanto, en los primeros 4 segundos de caída la velocidad del móvil vale:

- En t = 1 s     v = 9.8 m/s
- En t = 2 s     v = 19.6 m/s
- En t = 3 s     v = 29.4 m/s
- En t = 4 s     v = 39.2 m/s

A los 4 segundos el cuerpo ha adquirido una velocidad de  $141.12 \frac{km}{h}$ .

Demostremos otro ejemplo de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Supongamos que un automóvil se desplaza en línea recta, partiendo del reposo con una aceleración constante de magnitud  $2 \text{ m/s}^2$ . Este valor de aceleración significa que la velocidad del móvil se está incrementando (en magnitud) a razón de  $2 \text{ m/s}$  cada segundo (Fig. 80).

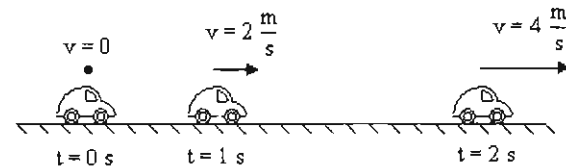


Fig. 80

Entonces durante los primeros 4 segundos del movimiento las velocidades del automóvil serán:

- En t = 1 s:     v =  $0 \frac{m}{s}$
- En t = 2 s:     v =  $2 \frac{m}{s}$
- En t = 3 s:     v =  $4 \frac{m}{s}$
- En t = 4 s:     v =  $6 \frac{m}{s}$

Como vemos, la magnitud de la velocidad crece en  $2 \frac{m}{s}$  cada segundo.

En cuanto a la distancia recorrida por el automóvil, resulta que es proporcional al cuadrado del tiempo:

$$d \propto t^2$$

#### 4.8. Vectores unitarios

Un *vector unitario*, o *versor*, es un vector de magnitud igual a la unidad.

Los vectores unitarios se suelen distinguir superponiéndoles un acento circunflejo o "capucha", como en " $\hat{a}$ ". Así lo haremos cuando se requiera por claridad. Lo interesante de los vectores unitarios son obviamente sus *direcciones*. Son muy usados para definir direcciones en el plano; incluso podemos usar la frase "la dirección  $\hat{a}$ ", con un significado obvio.

(52) Dado un vector cualquiera,  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ , el vector unitario  $\hat{\mathbf{a}}$  que tiene la misma dirección que  $\mathbf{A}$  es (Fig. 81):

$$(a) \quad \hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (\text{con } A = |\mathbf{A}|)$$

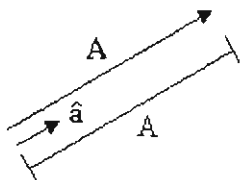


Fig. 81

Puesta la relación (a) en la forma

$$(b) \quad \mathbf{A} = A \hat{\mathbf{a}}$$

podemos leerla en una forma muy sugestiva:

$$[\text{Vector } \mathbf{A}] = [\text{Magnitud } A] \cdot [\text{Dirección } \hat{\mathbf{a}}]$$

En palabras: todo vector se puede escribir como el producto de su magnitud y un vector unitario en su misma dirección.

Notemos que *la componente de  $\mathbf{A}$  a lo largo del unitario  $\hat{\mathbf{a}}$  es " $A$ ".*

Nota. Las componentes de un vector unitario son números puros (no tienen unidades físicas). Esto lo vemos de (52a), ya que al dividir el vector  $\mathbf{A}$  por su magnitud  $A$  las unidades físicas se cancelan.

Dado un vector  $\mathbf{A}$  en la representación por magnitud y dirección, o sea  $\mathbf{A} = (A \angle \theta)$ , es inmediato ponerlo en la forma (52b):

$$\mathbf{A} = A (\cos \theta, \sin \theta)$$

ya que el vector unitario cuya dirección es  $\theta$ , la misma que la de  $\mathbf{A}$ , es

$$\hat{\mathbf{a}} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Si  $\hat{\mathbf{u}}$  es un vector unitario antiparalelo a  $\mathbf{A}$  (Fig. 82), entonces tendríamos obviamente que

$$\mathbf{A} = -A \hat{\mathbf{u}}$$

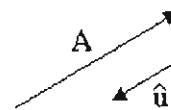


Fig. 82

En este caso *la componente de  $\mathbf{A}$  a lo largo del unitario  $\hat{\mathbf{u}}$  es " $-A$ ".*

**Ejemplo 35.** Una fuerza  $F$  tiene magnitud 80 N y actúa según la línea que va del punto  $A(-2 \text{ m}, 8 \text{ m})$  al punto  $B(10 \text{ m}, 1 \text{ m})$ . Escribir el vector fuerza como el producto de su magnitud y un vector unitario en su misma dirección.

Calculemos el vector separación  $\mathbf{AB}$ :

$$\mathbf{AB} = (10 - (-2), 1 - 8)$$

$$= (12, -7)$$

La magnitud de este vector es

$$AB = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{189} = 13.89$$

El vector unitario en la dirección de  $\mathbf{AB}$  es

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{AB}}{AB} = \frac{(12, -7)}{13.89} = (0.87, -0.51)$$

La expresión de la fuerza es

$$\mathbf{F} = F \hat{\mathbf{u}} = 80 \hat{\mathbf{u}} = 80 (0.87, -0.51) \text{ N}$$

#### 4.9. Bases vectoriales

(53) Una *base vectorial en el plano* es una pareja de vectores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  linealmente independientes.

Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se llaman *vectores básicos*.

Cualquier otro vector  $\mathbf{A}$  del plano se puede escribir como una combinación lineal de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

Representar un vector  $\mathbf{A}$  en la base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  es escribirlo en la forma  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ .

En el cuadro (42), página 40, dimos las fórmulas para calcular los coeficientes  $\lambda$  y  $\mu$  de la relación  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B} + \mu \mathbf{C}$ . Trasladando aquí el resultado obtenido tenemos:

(54) La expresión de un vector  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  en la base formada por los vectores  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  y  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ , es decir  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ , viene dada por los coeficientes

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} A_x & v_x \\ A_y & v_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} u_x & A_x \\ u_y & A_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}}$$

**Ejemplo 36.** Representar el vector  $\mathbf{A} = (-11, -10)$  en la base vectorial formada por los vectores  $\mathbf{u} = (1, 2)$  y  $\mathbf{v} = (-3, 0)$ .

Queremos encontrar valores de  $\lambda$  y  $\mu$  tales que  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ . Apliquemos las fórmulas del cuadro (54):

$$\begin{vmatrix} A_x & v_x \\ A_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ -10 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

$$\begin{vmatrix} u_x & A_x \\ u_y & A_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Entonces

$$\lambda = \frac{-30}{6} = -5, \quad \mu = \frac{12}{6} = 2$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = -5\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Observe la construcción gráfica en la Fig. 83.

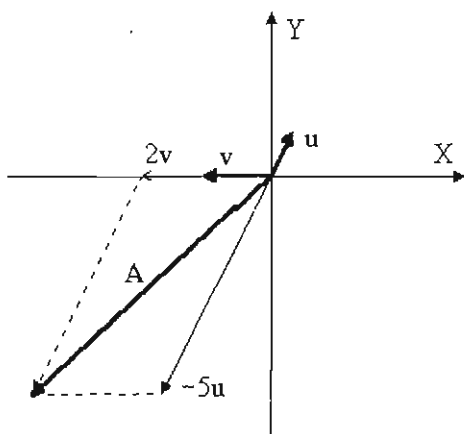


Fig. 83

(55) Una *base ortonormal* es aquella cuyos vectores básicos son *unitarios* y *mutuamente perpendiculares*.

Toda base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$  se puede escribir en la forma

$$(a) \quad \hat{\mathbf{u}} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$(b) \quad \hat{\mathbf{v}} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $\hat{\mathbf{u}}$  con el eje X, y  $\hat{\mathbf{v}}$  se obtiene girando el vector  $\hat{\mathbf{u}}$  en  $90^\circ$  en el sentido de rotación antihorario. Se verifica que los vectores básicos son unitarios,

$$|\hat{\mathbf{u}}| = |\hat{\mathbf{v}}| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

y que  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  forman un ángulo recto (Fig. 84).

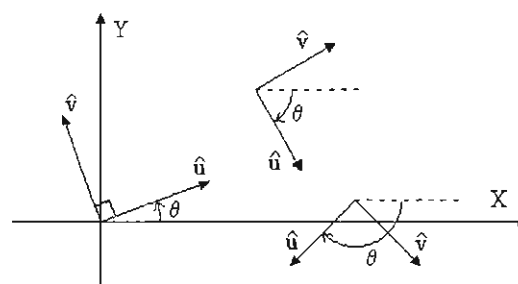


Fig. 84. Bases ortonormales.

Es fácil obtener una base ortonormal, a partir de cualquier vector  $\mathbf{U}$  dado, usando el siguiente teorema:

(56) Dado cualquier vector  $\mathbf{U} = (s, t)$ , el vector  $\mathbf{V} = (-t, s)$  es perpendicular a  $\mathbf{U}$ . Además,  $\mathbf{V}$  se obtiene girando  $\mathbf{U}$  en  $90^\circ$  en el sentido de rotación antihorario (Fig. 85).

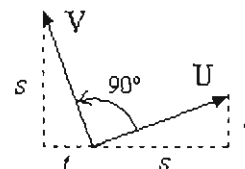


Fig. 85

**Ejemplo 37.** Obtener una base ortonormal a partir del vector  $\mathbf{U} = (12, 5)$ .

De acuerdo con (56), el vector perpendicular a  $\mathbf{U}$  es  $\mathbf{V} = (-5, 12)$ . Por otra parte, la magnitud común de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  es

$$U = V = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

La base ortonormal se compone entonces de los siguientes vectores unitarios:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{U}}{U} = \frac{(12, 5)}{13} = \left( \frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{V}}{V} = \frac{(-5, 12)}{13} = \left( -\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right)$$

En la forma (55a,b) tendríamos

$$\hat{\mathbf{u}} = (\cos 22.62^\circ, \sin 22.62^\circ)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = (-\sin 22.62^\circ, \cos 22.62^\circ)$$

porque el ángulo que forma  $\hat{\mathbf{u}}$  con el eje X es  $\text{atan2}(12, 5) = 22.62^\circ$ .

#### 4.10. Base ortonormal cartesiana

En las aplicaciones a la física son muy usadas dos bases ortonormales especiales denominadas la base ortonormal cartesiana y la base ortonormal polar.

(57) La *base ortonormal cartesiana* se compone de los vectores

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

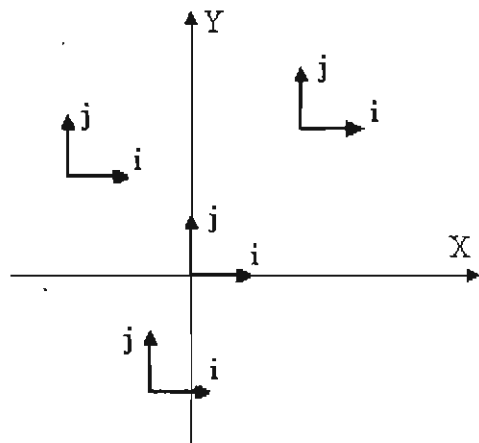


Fig. 86

El vector  $\mathbf{i}$  apunta en la dirección +X, el vector  $\mathbf{j}$  en la dirección +Y.

<Nota. Por ser tan usados, a estos vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  no les pondremos el acento “^”.>

La representación por componentes de un vector  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  es de hecho una representación en la base cartesiana  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  correspondiente a un sistema cartesiano OXY, como se deduce de:

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y) = (A_x, 0) + (0, A_y) =$$

$$= A_x (1, 0) + A_y (0, 1) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$$

(58) Todo vector se puede escribir como la suma de dos vectores, uno a lo largo del Eje X y el otro a lo largo del Eje Y, en la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

donde los *vectores*

$$\mathbf{A}_x = A_x \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_y = A_y \mathbf{j}$$

se denominan las *componentes vectoriales* de  $\mathbf{A}$  a lo largo de los ejes X y Y, respectivamente.

Observe en la Fig. 87 cómo la suma vectorial de  $\mathbf{A}_x$  y  $\mathbf{A}_y$  da el vector  $\mathbf{A}$ .

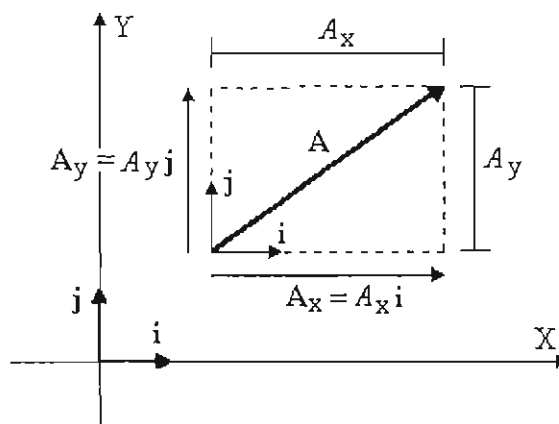


Fig. 87

Favor de distinguir claramente las *componentes numéricas*  $A_x$  y  $A_y$  de las *componentes vectoriales*  $\mathbf{A}_x$  y  $\mathbf{A}_y$ .

Tenemos ahora dos notaciones equivalentes para todo vector  $A$ , a saber,

$$A = (A_x, A_y) \quad \text{y} \quad A = A_x i + A_y j$$

ambas asociadas con una base ortonormal  $\{i, j\}$ , o con un sistema de ejes  $XY$ .

La igualdad y las operaciones de suma y producto por real, en la segunda notación, lucen así:

$$A_x i + A_y j = B_x i + B_y j \Rightarrow A_x = B_x \quad \text{y} \quad A_y = B_y$$

$$(A_x i + A_y j) + (B_x i + B_y j) = (A_x + B_x) i + (A_y + B_y) j$$

$$\lambda(A_x i + A_y j) = \lambda A_x i + \lambda A_y j$$

### 4.11. Relación entre las bases cartesianas correspondientes a dos sistemas distintos

La expresión de un vector como una combinación lineal de los vectores básicos de una base ortonormal tiene sus ventajas. Expliquemos.

En muchos problemas se ofrece introducir más de un sistema de coordenadas. Consideremos los sistemas cartesianos  $OXY$  y  $OX'Y'$  ilustrados en la Fig. 88.

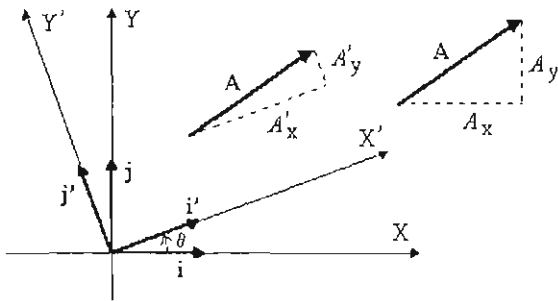


Fig. 88

Como ya hemos indicado, en la notación de paréntesis un mismo vector  $A$  se escribe

$$\boxed{e1} \quad A = (A_x, A_y) \quad \text{en el sistema } OXY$$

$$\boxed{e2} \quad A = (A'_x, A'_y) \quad \text{en el sistema } OX'Y'$$

Dado que hemos acordado usar el mismo símbolo "A" en los dos sistemas, en esta "notación de paréntesis" es preciso aclarar cuál es el sistema coordinado subyacente, tal como hemos apuntado a la derecha de

ambas representaciones (e1) y (e2). Ahora bien, definiendo en estos sistemas sendas bases ortonormales  $\{i, j\}$  e  $\{i', j'\}$  pondríamos

$$\boxed{e3} \quad A = A_x i + A_y j$$

$$\boxed{e4} \quad A = A'_x i' + A'_y j'$$

A diferencia de las expresiones (e1) y (e2), en (e3) y (e4) no hay necesidad de especificar a qué sistema coordinado se refiere cada expresión de  $A$ , ya que la base vectorial empleada lo pone de manifiesto.

Advertamos que en la notación de paréntesis no se permite igualar vectores referidos a sistemas coordinados distintos, como en

$$\text{¡NO! } (A_x, A_y) = (A'_x, A'_y)$$

pero sí es válido hacerlo con (e3) y (e4):

$$\boxed{e5} \quad A_x i + A_y j = A'_x i' + A'_y j'$$

Observemos que en esta relación intervienen las componentes  $A_x, A_y, A'_x$  y  $A'_y$  de un mismo vector, referidas a dos sistemas de coordenadas distintos. Anteriormente, en la sección 4.5, pág. 50, encontramos las relaciones que satisfacen estas componentes. Podemos llegar a estas mismas relaciones como se explica a continuación.

Para empezar tenemos que (Véase la Fig. 88):

$$i' = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{en el sistema } OXY$$

$$j' = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad \text{en el sistema } OXY$$

o bien, equivalentemente,

$$\boxed{e6} \quad i' = \cos \theta i + \sin \theta j$$

$$\boxed{e7} \quad j' = -\sin \theta i + \cos \theta j$$

Insertando éstas en (e5),

$$A_x i + A_y j = A'_x i' + A'_y j' =$$

$$= A'_x (\cos \theta i + \sin \theta j) + A'_y (-\sin \theta i + \cos \theta j) =$$

$$= (A'_x \cos \theta - A'_y \sin \theta) i + (A'_x \sin \theta + A'_y \cos \theta) j$$

De la igualdad vectorial

$$\begin{aligned} A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} &= \\ &= (A'_x \cos \theta - A'_y \sin \theta) \mathbf{i} + (A'_x \sin \theta + A'_y \cos \theta) \mathbf{j} \end{aligned}$$

se sigue ahora, igualando coeficientes de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ ,

$$\boxed{\text{e8}} \quad A_x = A'_x \cos \theta - A'_y \sin \theta$$

$$\boxed{\text{e9}} \quad A_y = A'_x \sin \theta + A'_y \cos \theta$$

Hemos recuperado así la ley de transformación de los vectores frente a rotaciones del sistema de coordenadas.

También se puede proceder a la inversa en (e5), expresando  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en términos de  $\mathbf{i}'$  y  $\mathbf{j}'$ , o sea, invirtiendo las relaciones (e6) y (e7),

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{i}' - \sin \theta \mathbf{j}'$$

$$\mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{i}' + \cos \theta \mathbf{j}'$$

Arribaríamos a las expresiones de  $A'_x$  y  $A'_y$  en términos de  $A_x$  y  $A_y$  (Ecs. (48c,d)-p51).

(59) Usaremos la notación de paréntesis

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y)$$

(más cómoda) siempre que tratemos con *un sólo* sistema cartesiano.

Si hay necesidad de utilizar dos o más sistemas, emplearemos la notación

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$$

Esta última notación también se usa para vectores muy simples que tienen solamente una componente. Así, los vectores  $\mathbf{V} = (2, 0)$  y  $\mathbf{M} = (0, -4)$  se pondrían simplemente en las formas

$$\mathbf{V} = 2 \mathbf{i}, \quad \mathbf{M} = -4 \mathbf{j}$$

**Ejemplo 38.** La aceleración de un cuerpo en caída libre es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra (verticalmente hacia abajo en la localidad supuesta). La magnitud de la aceleración es

$g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Tomando los ejes  $X$  y  $Y$  en las direcciones

horizontal y vertical, respectivamente, como vemos en la Fig. 89, podríamos escribir el vector aceleración "a" en cualquiera de estas formas:

$$\mathbf{a} = (0, -g) \quad \text{o bien} \quad \mathbf{a} = -g \mathbf{j}$$

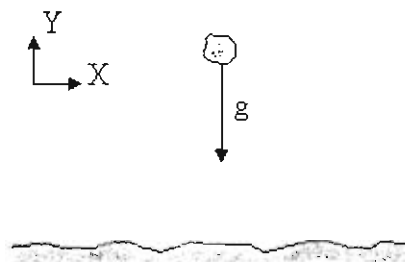


Fig. 89

#### 4.12. Base ortonormal polar

Aparte de la base cartesiana, que emplearemos mayormente, haremos uso de la llamada *base polar*.

Como hemos dicho, un uso frecuente de los vectores unitarios consiste en definir direcciones en el plano  $XY$ . Los vectores básicos cartesianos  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  definen en cada punto del plano sendas direcciones que, por darles un nombre, podríamos denominar dirección "horizontal" (la de  $\mathbf{i}$ ) y dirección "vertical" (la de  $\mathbf{j}$ ). Naturalmente, estas direcciones son las mismas en todo punto. En cada punto del plano existe una infinidad de direcciones, y las bases vectoriales se usan para distinguir ciertas direcciones especiales muy útiles en las aplicaciones.

La conveniencia de la base polar se aprecia mejor en el contexto del movimiento de una partícula.

En la Fig. 90, imaginemos que el pequeño círculo sombreado representa una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria mostrada. En el sistema de coordenadas polares, los puntos del plano son parejas de coordenadas definidas como sigue:

- La coordenada radial "r" es la distancia del punto al origen O.
- La coordenada angular "θ" es el ángulo que forma con el eje X la línea radial que va desde el origen hasta el punto considerado. (Este ángulo se mide en sentido antihorario. Si se mide en el sentido horario se considera negativo.)

Se usa la notación  $P(r, \theta)$  para denotar que P es aquel punto del plano cuyas coordenadas polares son r y θ.



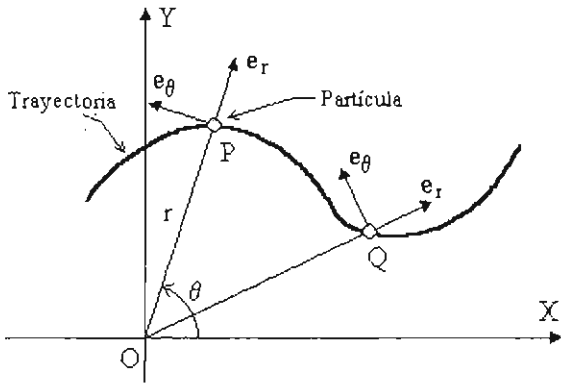


Fig. 90. Base ortonormal polar.

Ahora bien, supongamos que la partícula se encuentre en el punto  $P(r, \theta)$  de su trayectoria.

(60) La *base ortonormal polar establecida en el punto P* se compone de dos vectores unitarios mutuamente ortogonales, definidos como sigue:

- El *vector unitario radial*  $e_r$  apunta en la dirección de la línea radial OP.
- El *vector unitario transversal o azimutal*  $e_\theta$  se obtiene girando el vector  $e_r$  un ángulo de  $90^\circ$  en el sentido antihorario.

A diferencia de la base cartesiana, la base polar es *variable*, porque las direcciones radial y transversal son distintas según el punto que se considere del plano. Compare la base polar en P con la base polar en Q en la Fig. 90.

En la Fig. 91 se muestran las bases polares correspondientes a diversos puntos del plano.

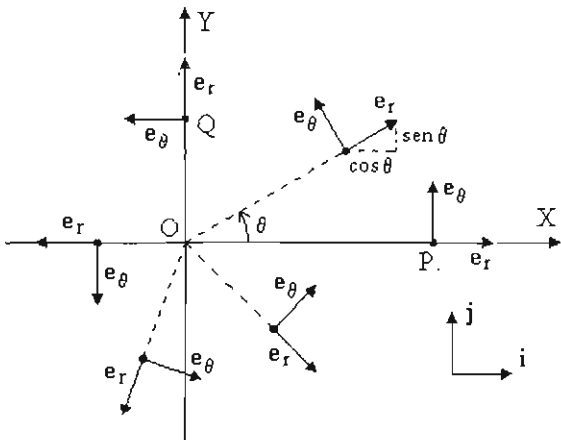


Fig. 91

Los vectores  $e_r$  y  $e_\theta$  definen en cada punto del

plano dos direcciones locales que son la *dirección radial*, la del primero, y la *dirección transversal o azimutal*, la del segundo.

(61) *Expresión de los vectores básicos polares en términos de  $i$  y  $j$ .*

$$e_r = \cos \theta i + \text{sen } \theta j$$

$$e_\theta = -\text{sen } \theta i + \cos \theta j$$

Para puntos con  $\theta = 0$  (como el punto P en la Fig. 91) el vector  $e_r$  correspondiente coincide con el cartesiano  $i$ , y el vector  $e_\theta$  coincide con  $j$ . Cuando  $\theta = 90^\circ$  (como para el punto Q en la misma figura) tendremos que  $e_r = j$  y  $e_\theta = -i$ .

La representación de un vector A en la base polar tiene la forma

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta$$

donde  $A_r$  y  $A_\theta$  son las componentes de A a lo largo de los vectores unitarios radial  $e_r$  y transversal  $e_\theta$ , respectivamente (Figs. 92 y 93).

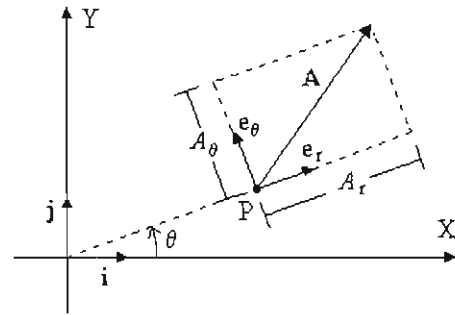


Fig. 92. Componentes de A en la base polar en P.

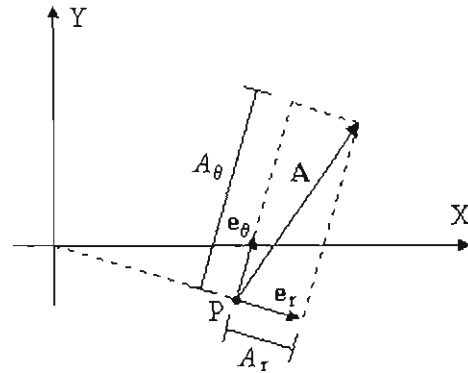


Fig. 93. Mismo vector que arriba, ubicado en otro punto.

Como vemos claramente en las Figs. 92 y 93, un mismo vector **A** tiene distintas componentes radial  $A_r$  y angular  $A_\theta$  según el lugar del plano donde se ubique el vector. Esto se debe naturalmente a que la base polar cambia de punto a punto. Por consiguiente, la representación de un vector en dicha base será útil para vectores *localizados*, esto es, vectores asociados con puntos específicos del plano.

Dadas las componentes de un vector en la base cartesiana,  $\mathbf{A} = (A_x, A_y) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ , ¿cómo calculamos sus componentes en la base polar  $\{ \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta \}$  erigida en  $P(r, \theta)$ ?

Observando la Fig. 92, vemos que el problema es el mismo que el de obtener las componentes de un vector en un sistema que se ha obtenido girando un ángulo  $\theta$  el sistema  $OXY$ . Las fórmulas (48a,b)-p51 dan entonces

$$A_r = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta$$

$$A_\theta = -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta$$

Recíprocamente,

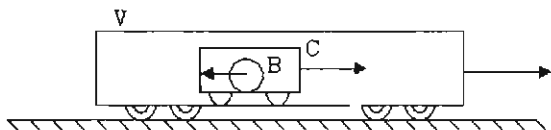
$$A_x = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta$$

$$A_y = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta$$

Vemos que estas conversiones no dependen de la coordenada radial  $r$ , sino del ángulo  $\theta$ , y también del punto donde esté localizado el vector **A**.

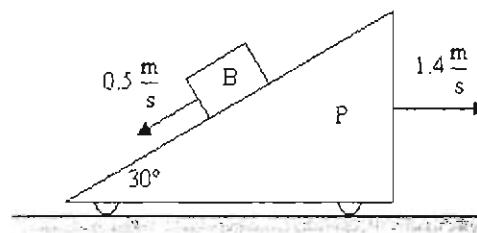
### 4.13. Problemas

1. El vagón **V**, el carro **C** y la bola **B** están en movimiento con las velocidades en las direcciones indicadas en la figura.



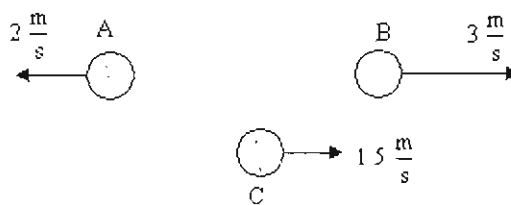
Dados  $v_V = 3 \text{ m/s}$ ,  $v_{C/V} = 1.2 \text{ m/s}$  y  $v_{B/C} = 0.4 \text{ m/s}$ , calcular la velocidad de la bola **B** con respecto a Tierra.

2. La velocidad del plano **P** con respecto a Tierra es de  $1.4 \text{ m/s}$ , y la velocidad del bloque **B** con respecto a **P** es de  $0.5 \text{ m/s}$ . Calcular la velocidad del bloque **B** con respecto a Tierra.

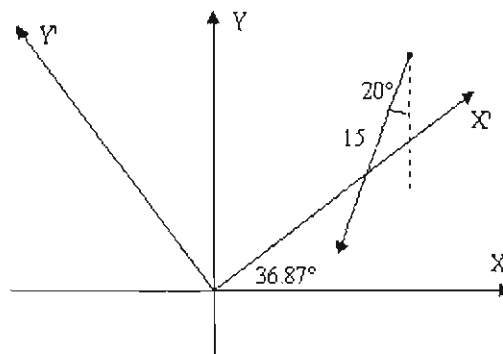


3. Las bolas **A**, **B** y **C** tienen las velocidades indicadas, con respecto a Tierra. Calcular:

- (a) La velocidad  $v_{A/B}$
- (b) La velocidad  $v_{B/C}$ .



4. Calcular las componentes del vector de magnitud 15 mostrado, con respecto a los ejes  $XY$  y  $X'Y'$ .



5. Calcular el vector unitario que va desde el punto  $A(12, -8)$  al punto  $B(9, -5)$ .

6. Una partícula en movimiento uniformemente acelerado tiene a dos instantes  $t_1 = 3 \text{ s}$  y  $t_2 = 8 \text{ s}$  las velocidades  $\mathbf{v}_1 = (8, 4) \text{ m/s}$  y  $\mathbf{v}_2 = (-3, 5) \text{ m/s}$ . Calcular su aceleración.

## CAPÍTULO 5

## PRODUCTOS ESCALAR Y EXTERNO DE VECTORES

## 5.1. Producto escalar

Consideremos el problema de calcular el ángulo  $\theta$  que forman dos vectores  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  y  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$ . Definamos el vector  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A} - \mathbf{B}$  y apliquemos la ley de los cosenos al triángulo cuyos lados son  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

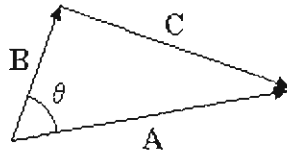


Fig. 94

Ahora bien,

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - C^2 &= A_x^2 + A_y^2 + B_x^2 + B_y^2 \\ &- [(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2] = \\ &= 2(A_x B_x + A_y B_y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y$$

De aquí ya podemos obtener el ángulo  $\theta$ .

La combinación de componentes

$$A_x B_x + A_y B_y$$

aparece frecuentemente en las aplicaciones; tiene un nombre especial:

(62) *Producto escalar de dos vectores.*

El producto escalar de los vectores  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  y  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$ , operación indicada con el signo " $\cdot$ ", se define por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y = AB \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el menor ángulo entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

Notemos que el producto escalar de vectores no es un vector, sino un *número real*.

Se deducen de (62) las siguientes propiedades del producto escalar:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$(\lambda \mathbf{A}) \cdot (\mu \mathbf{B}) = \lambda \mu (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

Los productos escalares de los vectores de la base cartesiana  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  son

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$$

## 5.2. Usos del producto escalar

He aquí un par de usos frecuentes del producto escalar:

- Podemos expresar que dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  (distintos de  $\mathbf{0}$ ) son perpendiculares mediante la relación

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

puesto que el producto escalar es  $AB \cos \theta$ , y si es cero, entonces  $\cos \theta = 0$  y por tanto  $\theta = 90^\circ$ .

- Para obtener la componente de un vector  $\mathbf{A}$  a lo largo de un vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$  (Fig. 95), formamos el producto escalar

$$\begin{aligned} A_u &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}} = A \cos \theta = \\ &= \text{componente de } \mathbf{A} \text{ a lo largo de } \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

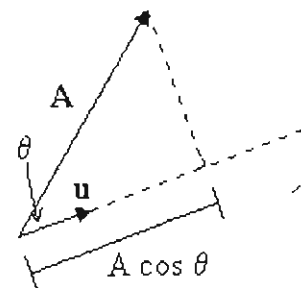


Fig. 95

**Ejemplo 39.** Hallar el ángulo entre los vectores

$S = (7, 2)$  y  $M = (4, -6)$  (Véase la Fig. 96)

De acuerdo con la fórmula (62),

$$S \cdot M = SM \cos \theta$$

Calculemos las magnitudes  $S$  y  $M$  y el producto escalar  $S \cdot M$ :

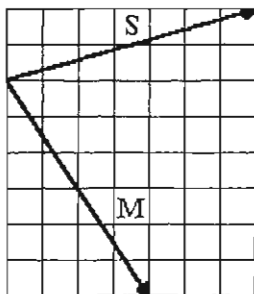


Fig. 96

$$S = \sqrt{7^2 + 2^2} = 7.28$$

$$M = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7.21$$

$$S \cdot M = (7, 2) \cdot (4, -6) = 7(4) + 2(-6) = 16$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{S \cdot M}{SM} = \frac{16}{7.28 \cdot (7.21)} = 0.305$$

$$\theta = \text{ang} \cos (0.305) = 72.24^\circ$$

**Ejemplo 40.** Calcular el número "p" de tal manera que los vectores  $S = (7, 2)$  y  $N = (4, p)$  sean perpendiculares.

Para que  $S$  y  $N$  sean perpendiculares, el producto escalar  $S \cdot N$  debe ser cero:

$$S \cdot N = (7, 2) \cdot (4, p) = 7(4) + 2p = 0$$

$$\Rightarrow p = -14$$

**Ejemplo 41.** Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Sean los vectores  $a$  y  $b$  los lados del rombo (Fig. 97). Entonces las diagonales son los vectores

$b - a$  y  $a + b$ . Formemos el producto escalar de estos vectores diagonales:

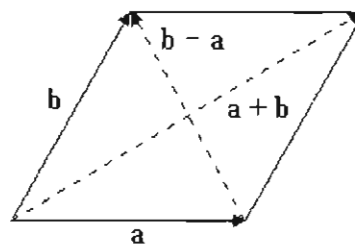


Fig. 97

$$\begin{aligned} (b - a) \cdot (a + b) &= \\ &= b \cdot a + b \cdot b - a \cdot a - a \cdot b \\ &= b^2 - a^2 \end{aligned}$$

Como  $a = b$  tenemos que el producto escalar de los vectores  $b - a$  y  $a + b$  es cero, lo cual significa que son perpendiculares, QED.

**Ejemplo 42.** Calcular la componente del vector

$V = (-5, 2)$  a lo largo de la dirección del vector

$P = (3, -8)$ .

Otengamos primeramente el vector unitario en la dirección del vector  $P$ :

$$\hat{p} = \frac{P}{|P|} = \frac{(3, -8)}{\sqrt{3^2 + 8^2}} = (0.351, -0.936)$$

Ahora proyectemos el vector  $V$  sobre  $\hat{p}$ , a través del producto escalar:

$$V_p = \{\text{componente de } V \text{ a lo largo de } \hat{p}\}$$

$$= V \cdot \hat{p}$$

$$= (-5, 2) \cdot (0.351, -0.936) =$$

$$= -5(0.351) + 2(-0.936)$$

$$\Rightarrow V_p = -3.627$$

**Ejemplo 43.** Calcular el producto escalar de los vectores  $s = -3j$  y  $t = 2i + j$ .

**Método 1.** Expresemos los vectores en la notación de paréntesis,

$$s = (0, -3) \quad \text{y} \quad t = (2, 1)$$

Entonces

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = s_x t_x + s_y t_y = 0(2) + (-3)(1) = -3$$

**Método 2.** Usando  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ,  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$  y las propiedades del producto escalar tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} &= (-3\mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -3\mathbf{j} \cdot (2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} = \\ &= (-3)(2)\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -6(0) - 3(1) = -3 \end{aligned}$$

**Ejemplo 44.** ¿De la relación  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  se puede deducir que  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ?

No, porque al vector  $\mathbf{b}$  o  $\mathbf{c}$  podríamos añadirle cualquier vector perpendicular a  $\mathbf{a}$  y se seguiría cumpliendo la igualdad inicial:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}_\perp) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\text{ya que } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\perp = 0$$

donde  $\mathbf{a}_\perp$  es perpendicular a  $\mathbf{a}$ .

Lo que se puede deducir de la igualdad  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  es entonces que

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{a}_\perp$$

donde  $\mathbf{a}_\perp$  es cualquier vector perpendicular a  $\mathbf{a}$ . Note que de  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  si se sigue que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ .

**Ejemplo 45.** Desde dos puntos A y B se trazan segmentos rectos  $ACE_1$  y  $BCE_2$ , a ángulos de  $45^\circ$  y  $15^\circ$  con la horizontal, respectivamente. Desde  $E_1$  y  $E_2$  se trazan rectas perpendiculares a AC y BC, respectivamente; estas rectas se intersecan en el punto C'. Dados los segmentos  $CE_1 = 0.45$  y  $CE_2 = 0.20$ , obtener el vector  $CC'$ . (Véase la Fig. 98).

Tomemos un sistema de ejes X hacia la derecha y Y hacia arriba. Definamos dos vectores unitarios: el versor  $\hat{\mathbf{a}}$  en la dirección de AC, y el versor  $\hat{\mathbf{b}}$  en la dirección de BC.

Está claro que

$$\hat{\mathbf{a}} = (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ), \quad \hat{\mathbf{b}} = (\cos 15^\circ, \sin 15^\circ)$$

o bien

$$\hat{\mathbf{a}} = (0.707, 0.707), \quad \hat{\mathbf{b}} = (0.966, 0.259)$$

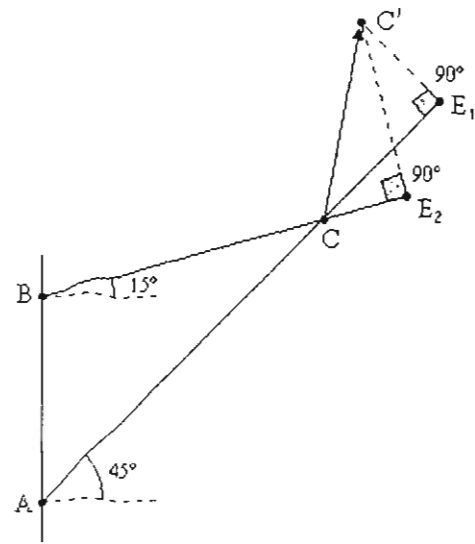


Fig. 98

Ahora podemos expresar los datos  $CE_1$  y  $CE_2$  en la forma:

$$CC' \cdot \hat{\mathbf{a}} = 0.45, \quad CC' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0.20$$

Abreviando  $\mathbf{c} \equiv CC'$  e indicando explícitamente los productos,

$$(c_x, c_y) \cdot (0.707, 0.707) = 0.45$$

$$(c_x, c_y) \cdot (0.966, 0.259) = 0.20$$

Desarrollando los productos escalares,

$$0.707 c_x + 0.707 c_y = 0.45$$

$$0.966 c_x + 0.259 c_y = 0.20$$

Resolviendo este sistema simultáneamente para  $c_x$  y  $c_y$ ,

$$c_x = 0.050, \quad c_y = 0.587$$

$$\Rightarrow CC' = (0.050, 0.587)$$

o bien

$$CC' = (0.589 \angle 85.13^\circ)$$

### 5.3. Invariantes o escalares

Existen funciones de las componentes de uno o más vectores que poseen el mismo valor no importa el sistema de coordenadas en que se expresen. Tales funciones o cantidades se denominan *invariantes* o *escalares*.

Por ejemplo, he aquí tres de esta clase de funciones:

$$f(A_x, A_y) = A_x^2 + A_y^2$$

$$g(A_x, A_y, B_x, B_y) = A_x B_x + A_y B_y$$

$$h(A_x, A_y, B_x, B_y) = A_x B_y - A_y B_x$$

La función "f" es simplemente el cuadrado de la magnitud del vector **A**:

$$|\mathbf{A}|^2 = \left( \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \right)^2 = A_x^2 + A_y^2$$

Esta cantidad es obviamente un invariante.

La función "g" es el producto escalar de los vectores **A** y **B**. El producto escalar es un invariante. Esto es, al calcular el producto escalar de **A** y **B** se obtiene el mismo valor ya sea que se expresen **A** y **B** en en la forma

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y) \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y)$$

o bien, en otro sistema de coordenadas distinto,

$$\mathbf{A} = (A'_x, A'_y) \quad \mathbf{B} = (B'_x, B'_y)$$

En otras palabras, se encuentra que

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y = A_x B_x + A_y B_y$$

La razón es evidente geoméricamente: el producto escalar de **A** y **B** es igual también al producto de las magnitudes **A** y **B** y el coseno del ángulo  $\theta$  que forman ambos vectores:

$$AB \cos \theta$$

Como las magnitudes y el ángulo entre los vectores son los mismos en todo sistema de coordenadas, el producto escalar debe ser también el mismo.

Para demostrar que la función *h* es un invariante habría que sustituir  $A_x$  y  $A_y$  como funciones de  $A'_x$  y  $A'_y$ , según las fórmulas (48a,b)-p51. Lo mismo con respecto a  $B_x$  y  $B_y$ . Se encontraría que

$$A_x B_y - A_y B_x = A'_x B'_y - A'_y B'_x$$

lo cual demuestra que "h" es un invariante. Esta función tiene una interpretación geométrica simple, como veremos más adelante.

El calificativo de "invariante" o "escalar" se extiende a todas las cantidades físicas invariables por naturaleza, o cuyo valor queda determinado por un sólo valor numérico (multiplicado en general por una unidad física), como por ejemplo la temperatura, la masa, la energía, el trabajo, la potencia, la cantidad de calor, el número de electrones en un átomo de helio, etc.

Hay expresiones compuestas de magnitudes de vectores y/o productos escalares de vectores, que poseen *invarianza manifiesta*, es decir, su carácter de invariante se reconoce inmediatamente con sólo ver la expresión. Este es el caso, por ejemplo, de las expresiones

$$A(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}}{D}$$

$$-3 B^3 (\mathbf{B} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

las cuales están formadas con combinaciones de invariantes, como magnitudes de vectores y productos escalares.

Las cantidades físicas descritas por un sólo número real son invariantes. He aquí algunas cantidades físicas invariantes:

- El trabajo *W* efectuado por una fuerza constante **F** en un desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}$  se define por

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

- La energía cinética de una partícula de masa *m* y velocidad *v* se define por

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

Estas cantidades son ostensiblemente invariantes.

Una observación:

El producto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  es un invariante frente a traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas. Ello presupone que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son vectores *propios*, esto es, que se transforman de acuerdo con (48a,b)-p51. Como hemos visto, los vectores de posición no son vectores propios, de tal manera que por ejemplo un producto escalar de dos vectores de posición,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$$

no es un invariante. Sin embargo, si se excluyen las traslaciones (o sea si los orígenes  $O$  y  $O'$  coinciden), el producto anterior sí es invariante.

### 5.4. Producto externo

(63) El *producto externo* de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , denotado con  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ , se define por

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = A_x B_y - A_y B_x = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

El producto externo es un invariante o escalar, como puede demostrarse usando las ecuaciones de transformación de los vectores. Debido a esta invariancia, podemos evaluarlo en cualquier sistema de coordenadas y obtener el mismo valor. Hagámoslo para un sistema como el de la Fig. 99, en el que los vectores se expresan así:

$$\mathbf{A} = (A, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (B \cos \theta, B \sin \theta)$$

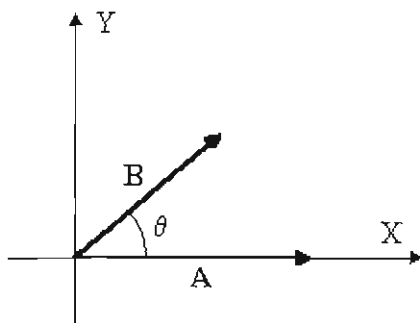


Fig. 99

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B \cos \theta & B \sin \theta \end{vmatrix} = AB \sin \theta$$

Ahora bien, la expresión " $AB \sin \theta$ " es un

invariante geométrico porque las magnitudes  $A$ ,  $B$  y el ángulo  $\theta$  son los mismos en todo sistema de coordenadas.

Es importante enfatizar que el ángulo  $\theta$  se obtiene colocando los vectores desde un mismo punto inicial, luego girando el *primer* factor,  $\mathbf{A}$ , en sentido *antihorario* hasta hacerlo coincidir con el segundo factor  $\mathbf{B}$ . Por tanto,  $\theta$  está comprendido entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . La Fig. 100 muestra un par de ejemplos de la obtención de  $\theta$ .

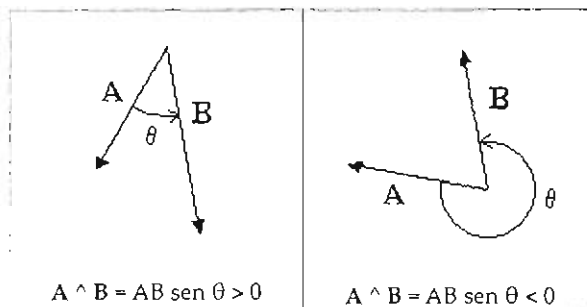


Fig. 100

Si los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos o antiparalelos (Fig. 101), entonces el producto externo es nulo.

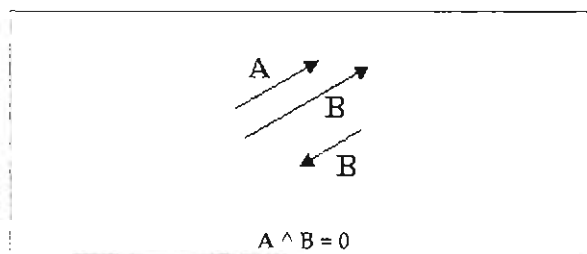


Fig. 101

El producto externo se puede escribir también en la forma

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \pm AB \sin \theta_m$$

donde  $\theta_m$  es el *mínimo* ángulo que forman los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y el signo se escoge así:

El producto es positivo (negativo) si, colocados los dos vectores desde un mismo punto inicial, la rotación de  $\mathbf{A}$  hacia  $\mathbf{B}$ , a través del *mínimo* ángulo entre ambos vectores, es una rotación *antihoraria* (horaria). Por ejemplo, en la Fig. 100b, el *mínimo* ángulo entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es  $360^\circ - \theta$ , y la rotación de  $\mathbf{A}$  hacia  $\mathbf{B}$  a través de este ángulo es horaria, de modo que el producto externo es negativo.

La magnitud de  $A \wedge B$  tiene una interpretación geométrica muy simple: es el área del paralelogramo determinado por  $A$  y  $B$ , como vemos en la Fig. 102.

$$\text{Área} = (\text{Base}) \cdot (\text{Altura}) = A (B \text{ sen } \theta)$$

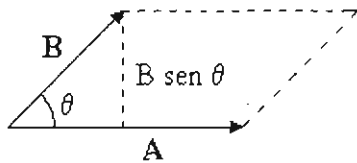


Fig. 102

Los vectores  $A$  y  $B$  determinan también un triángulo (Fig. 103). El área " $\Delta$ " de este triángulo es la mitad del área del paralelogramo formado por  $A$  y  $B$ :

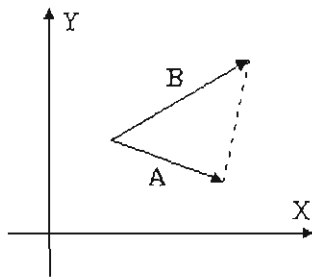


Fig. 103

$$\Delta = \frac{1}{2} |A \wedge B|$$

### 5.5. Usos del producto externo

El producto externo tiene estas propiedades:

$$A \wedge B = -B \wedge A$$

$$(\lambda A) \wedge (\mu B) = (\lambda \mu) A \wedge B$$

$$A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$$

Note muy especialmente que este producto, a diferencia del producto escalar, no es conmutativo.

**Ejemplo 46.** Calcular el área del paralelogramo determinado por los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  mostrados en la figura.

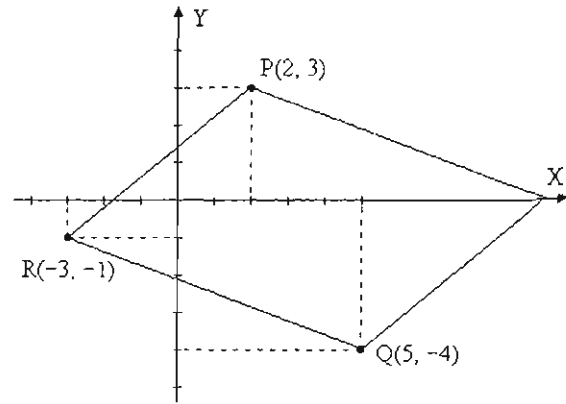


Fig. 104

Primeramente calculemos los vectores  $RQ$  y  $RP$ ,

$$RQ = r_Q - r_R = (5, -4) - (-3, -1) = (8, -3)$$

$$RP = r_P - r_R = (2, 3) - (-3, -1) = (5, 4)$$

Para obtener un área positiva, hagamos el producto en el orden  $RQ \wedge RP$ ,

$$RQ \wedge RP = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 - (-15) = 47$$

El área del triángulo  $PQR$  es la mitad, 23.5.

El área de un polígono se puede calcular dividiéndolo en triángulos. Por ejemplo, calculemos el área " $D$ " del polígono  $PABC$  sombreado de la Fig. 105.

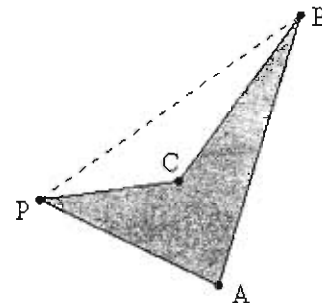


Fig. 105

Es igual a la diferencia de las áreas de los triángulos  $PAB$  y  $PBC$ , o sea

$$\Delta = \frac{1}{2} (PA \wedge PB + PB \wedge PC)$$



Note que el término  $\frac{1}{2} \mathbf{PB} \wedge \mathbf{PC}$  saldrá negativo, porque al rotar el vector  $\mathbf{PB}$  hacia el vector  $\mathbf{PC}$  el sentido de la rotación es el horario. Entonces la expresión para el área  $\Delta$  es de hecho la diferencia de las áreas de dos triángulos.

Generalicemos para un polígono de un número arbitrario de vértices. He aquí el procedimiento:

- Escoger uno de los vértices como "pivote" (Llamémosle "P").
- A partir de P, recorrer el contorno del polígono en sentido antihorario, nombrando los vértices, conforme se me vayan encontrando, con  $P_1, P_2, \dots, P_{N-1}$ .

Entonces el área del polígono es

$$\Delta = \frac{1}{2} (\mathbf{PP}_1 \wedge \mathbf{PP}_2 + \mathbf{PP}_2 \wedge \mathbf{PP}_3 + \dots + \mathbf{PP}_{N-2} \wedge \mathbf{PP}_{N-1})$$

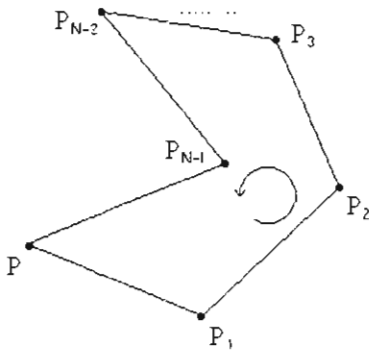


Fig. 106

Poniendo  $P_0(x_0, y_0)$  y  $P_i = (x_i, y_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , se puede demostrar que el área del polígono es

$$\Delta = \frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{N-1} & x_0 \\ y_{N-1} & y_0 \end{vmatrix} \right)$$

lo cual podemos poner en una forma más práctica para el cálculo así:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_0 \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{N-1} & y_0 \end{vmatrix}$$

donde el arreglo de 2 renglones y N columnas que aparece aquí es la suma de los N determinantes  $2 \times 2$  que aparecen en la expresión anterior.

**Ejemplo 47.** Calcular el área del cuadrilátero mostrado en la Fig. 107.

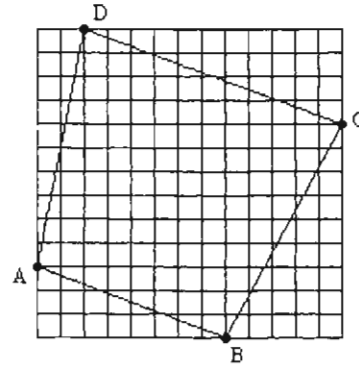


Fig. 107

Tomemos como pivote (y origen de coordenadas) el punto A. Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 8 & 13 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 10 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0.5 [8(6) - (-3)13 + 13(10) - 6(2)] = 102.5 \end{aligned}$$

Veamos otra aplicación del producto externo.

**Ejemplo 48.** Para obtener la representación de un vector  $\mathbf{A}$  en una base vectorial arbitraria  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , o sea los números  $\lambda$  y  $\mu$  en la relación

$$(e1) \quad \mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$

podemos proceder como sigue:

Premultiplicando (e1) en ambos miembros externamente por  $\mathbf{u}$  tenemos

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} + \mu \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

Usando  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$  y despejando  $\mu$  obtenemos

$$(e2) \quad \mu = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}}{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = \frac{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ A_x & A_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}$$

Análogamente se calcula  $\lambda$ . (Compare (e1) con la ecuación (42)-p40).

### 5.6\*. Aplicaciones a la geometría clásica

Con el fin de mostrar el poder del álgebra vectorial veremos en esta sección unas aplicaciones a la geometría clásica. Empezaremos por definir una notación conveniente para los vectores separación.

Consideremos un polígono determinado por, digamos, 5 puntos. Escojamos uno cualquiera de estos puntos como origen "O", y denotemos los restantes con "A", "B", "C" y "D" (Fig. 108).

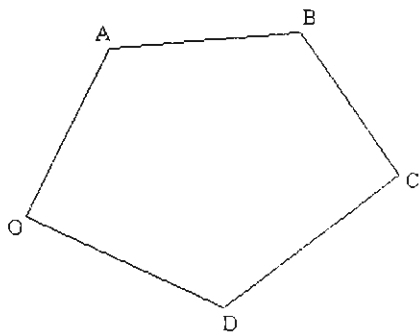


Fig. 108

Los vectores separación que van desde el punto O hasta cada uno de los puntos A, B, C y D se denotarán con la letra que designa el punto final, es decir, con **A**, **B**, **C** y **D**, respectivamente, como se ve en la Fig. 109. En la notación anteriormente usada para vectores separación tendríamos entonces que

$$A \equiv OA, \quad B \equiv OB$$

$$C \equiv OC, \quad D \equiv OD$$

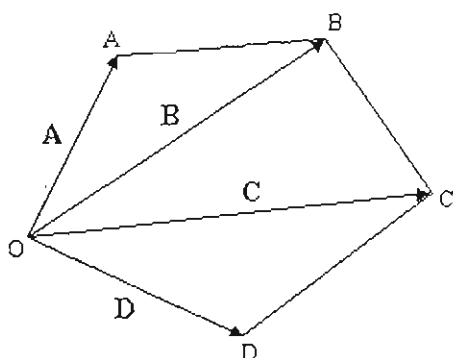


Fig. 109

Esto es por lo que toca a los vectores que parten de O. Por otra parte, el vector separación entre A y B se denotará como originalmente con "**AB**", y así para los demás vectores que no implican al punto O.

Considere ahora los siguientes teoremas:

(64) El vector que va del punto A al punto B es  $AB = B - A$

(65) Todo vector que parta de O y cuya punta P esté sobre la recta determinada por los puntos A y B se puede poner en la forma

$$P = (1 - \lambda) A + \lambda B$$

donde  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

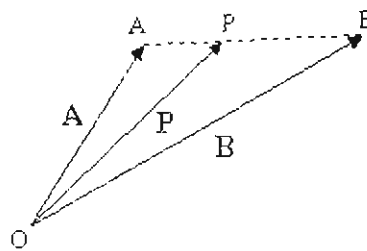


Fig. 110

Demostremos la relación (65). En la Fig. 110 observamos que P es la suma de A y AP:

$$P = A + AP$$

pero el vector AP, por ser paralelo a AB, se puede poner en la forma

$$AP = \lambda AB \quad (\text{con } \lambda < 1)$$

Poniendo en esta última relación

$$AB = B - A$$

tenemos que

$$AP = \lambda (B - A)$$

de donde la relación  $P = A + AP$  nos da

$$P = A + \lambda (B - A)$$

o sea

$$P = (1 - \lambda) A + \lambda B \quad \text{QED.}$$

Un caso particular de (44) es cuando el punto P llega justamente al punto medio del segmento AB.

(66) Si el punto P cae justamente a la mitad del segmento AB, entonces se tiene que

$$P = \frac{1}{2}(A + B)$$

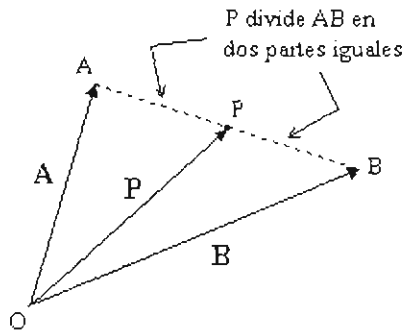


Fig. 111

Es mucho lo que podemos hacer con los resultados (64), (65) y (66).

**Ejemplo 49.** Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero arbitrario son los vértices de un paralelogramo (Fig. 112).

Habrá que demostrar una de las siguientes igualdades vectoriales:

(r1)  $M_1M_2 = M_4M_3$

(r2)  $M_1M_4 = M_2M_3$

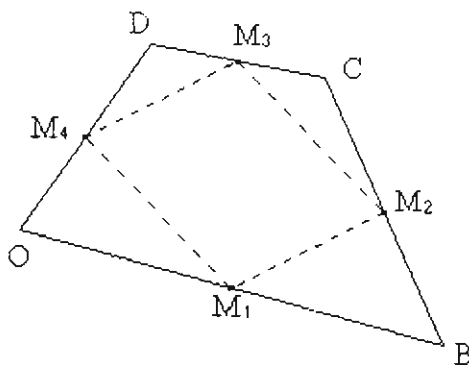


Fig. 112

La ecuación (r1) significa que el segmento  $M_1M_2$  tiene la misma longitud que el segmento  $M_4M_3$ , y además que ambos segmentos son paralelos. Cosa análoga significa la (r2).

Empecemos por expresar los "datos" en forma vectorial. Las siguientes relaciones identifican a  $M_1$ ,  $M_2$ , etc. como los puntos medios de los segmentos OB, BC, etc. Hemos tomado como origen el vértice O.

(r3)  $M_1 = \frac{1}{2} B$       (r4)  $M_2 = \frac{1}{2} (B + C)$

(r5)  $M_3 = \frac{1}{2} (C + D)$       (r6)  $M_4 = \frac{1}{2} D$

Ahora bien,

$$M_1M_2 = M_2 - M_1 = \frac{1}{2} (B + C) - \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} C$$

Del mismo modo obtenemos

$$M_4M_3 = \frac{1}{2} (C + D) - \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} C$$

Tanto  $M_1M_2$  como  $M_4M_3$  son iguales a  $\frac{1}{2} C$ , por lo que  $M_1M_2 = M_4M_3$ . Lo mismo hacemos para demostrar la relación (r2).

**Ejemplo 50.** Sean OA y OB dos segmentos rectos que emanan del mismo punto O. Tiremos desde los extremos A y B sendas líneas hasta el punto medio del segmento ajeno respectivo (Fig. 113). Demostraremos que el punto de intersección G de estas líneas divide las mismas en una relación de uno a dos.

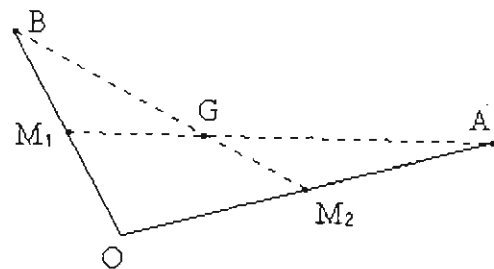


Fig. 113

Sean  $M_1$  y  $M_2$  los puntos medios de OB y OA, respectivamente. Debemos demostrar una de las siguientes relaciones:

(r1)  $M_2G = \frac{1}{2} GB$       (r2)  $M_1G = \frac{1}{2} GA$

Escojamos el punto  $O$  como el origen de los vectores de posición de todos los puntos (o sea  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{OA}$ ,  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{OG}$ , etc.)

Expresemos primeramente los "datos" en forma vectorial:

$M_1$  es el punto medio de  $OB$ :

$$(r3) \quad \mathbf{M}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{B}$$

$M_2$  es el punto medio de  $OA$ :

$$(r4) \quad \mathbf{M}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{A}$$

El punto  $G$  está en la línea  $AM_1$ :

$$(r5) \quad \mathbf{G} = (1 - \lambda) \mathbf{A} + \lambda \mathbf{M}_1$$

El punto  $G$  está en la línea  $BM_2$ :

$$(r6) \quad \mathbf{G} = (1 - \mu) \mathbf{B} + \mu \mathbf{M}_2$$

(Con respecto a las dos últimas relaciones consulte el cuadro (65)-p70.)

Lo que sigue está claro, pues viene sugerido por la estructura de los datos.

Igualemos las expresiones (r5) y (r6) de  $G$ :

$$(1 - \lambda) \mathbf{A} + \lambda \mathbf{M}_1 = (1 - \mu) \mathbf{B} + \mu \mathbf{M}_2$$

Luego sustituimos aquí  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  por sus valores en términos de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , dados por (r3) y (r4):

$$(1 - \lambda) \mathbf{A} + \lambda \frac{1}{2} \mathbf{B} = (1 - \mu) \mathbf{B} + \mu \frac{1}{2} \mathbf{A}$$

Simplificando llegamos a

$$(1 - \lambda - \frac{1}{2} \mu) \mathbf{A} + (-1 + \frac{1}{2} \lambda + \mu) \mathbf{B} = 0$$

Como  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son linealmente independientes (no paralelos), la única forma de que se cumpla la ecuación anterior es que los coeficientes de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean iguales a cero:

$$1 - \lambda - \frac{1}{2} \mu = 0$$

$$-1 + \frac{1}{2} \lambda + \mu = 0$$

Resolviendo este sistema se encuentra que

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}$$

Entonces, de (r3) y (r4):

$$\mathbf{G} = \frac{1}{3} \mathbf{A} + \frac{2}{3} \mathbf{M}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{B} + \frac{2}{3} \mathbf{M}_2$$

Usando esta expresión para  $G$  tenemos ahora

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{G} = \mathbf{G} - \mathbf{M}_2 = \frac{1}{3} (\mathbf{B} - \mathbf{M}_2) = \frac{1}{3} \mathbf{M}_2 \mathbf{B}$$

De aquí se sigue (r1). Lo mismo hacemos para demostrar (r2).

## 5.7. Problemas

1. Calcular el producto escalar de los vectores

(a)  $\mathbf{M} = (-4, 9)$  y  $\mathbf{N} = (2, 7)$

(b)  $\mathbf{S} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$  y  $\mathbf{Q} = 12\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Resp. 55; 56

2. Hallar el ángulo que forman los vectores

$$\mathbf{a} = (1, 9) \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = (-3, 1)$$

Resp. 77.9°

3. Considere la ecuación trigonométrica

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números dados y la incógnita es  $\theta$ . Resuélvala por métodos vectoriales del siguiente modo: exprese el miembro izquierdo de la ecuación en forma de un producto escalar de los vectores  $\mathbf{A} = (a, b)$  y  $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ . ¿Qué condición debe cumplirse para que exista solución? Defina el vector unitario

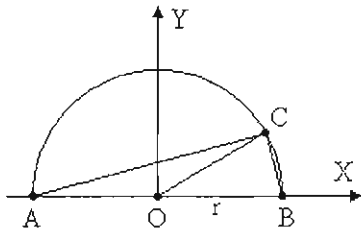
$a = A \cos \theta$  y ponga  $a/A = \cos \theta$  y  $b/A = \sin \theta$ . Luego use la identidad  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ , etc.

Resp. . .

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Interprete gráficamente la ecuación. ¿Es única la solución?

4. C es un punto cualquiera del círculo de radio r y centro en el origen del sistema cartesiano XY. Demostrar que los vectores AC y BC son perpendiculares, partiendo de que las coordenadas de C son  $C(x, \sqrt{r^2 - x^2})$ .



5. Dada la base ortonormal  $\{ u, v \}$  en un plano, demostrar que la representación del vector A en dicha base es

$$A = (A \cdot u) u + (A \cdot v) v$$

Hallar la representación del vector  $A = 6i - 2j$  en la base ortonormal formada por

$$u = \cos 20^\circ i - \sin 20^\circ j$$

$$v = \sin 20^\circ i + \cos 20^\circ j.$$

Resp.  $A = 6.322 u + 0.173 v$

6. Obtenga algebraicamente las representaciones de los vectores de la base polar  $\{ e_r, e_\theta \}$  en la base cartesiana  $\{ i, j \}$ , a saber,

$$e_r = \cos \theta i + \sin \theta j$$

$$e_\theta = -\sin \theta i + \cos \theta j$$

partiendo de las relaciones

$$e_r = (e_r \cdot i) i + (e_r \cdot j) j$$

$$e_\theta = (e_\theta \cdot i) i + (e_\theta \cdot j) j$$

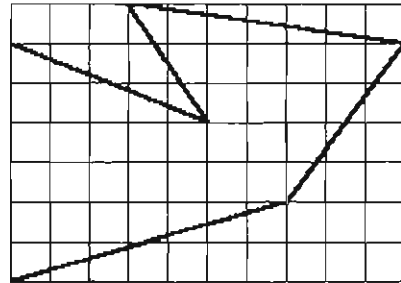
y evaluando los productos escalares en la forma  $A \cdot B = AB \cos \theta$ .

7. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos

$$A(5, 1) \quad B(2, 8) \quad C(-3, 3)$$

Resp. 18.

9. Calcular el área del polígono mostrado en la figura abajo.

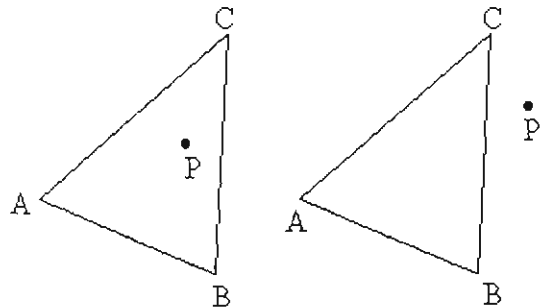


Resp. 40.5 unidades de la cuadrícula.

10. Un algoritmo eficiente para averiguar si un punto P se encuentra dentro del triángulo formado por los puntos A, B y C se basa en examinar el signo algebraico de los productos externos

$$AB \wedge AP \quad BC \wedge BP \quad CA \wedge CP$$

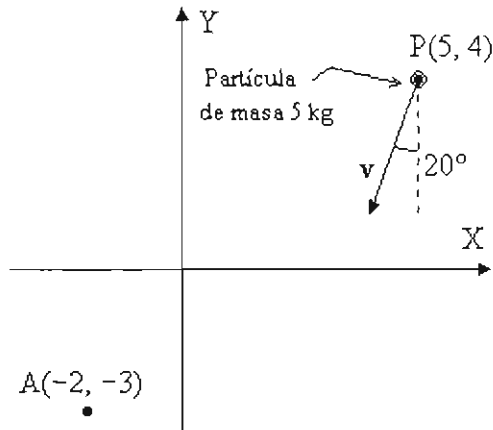
¿Cómo deben ser estos signos para que el punto P esté contenido en dicho triángulo?



11. En la dinámica se define el "momento angular  $L$ " de una partícula  $P$ , con respecto a cierto punto fijo  $A$ , como el producto externo

$$L = AP \wedge (mv)$$

donde  $AP$  es el vector de posición de la partícula con respecto a  $A$ ,  $m$  es la masa de la partícula, y  $v$  su velocidad.



Calcular el momento angular en la configuración mostrada en la figura. La magnitud de la velocidad es

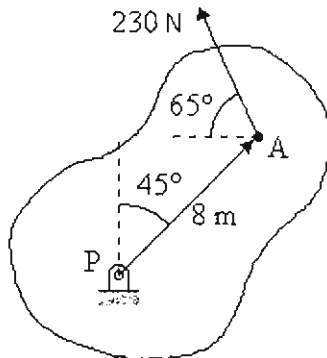
$$v = 10 \frac{m}{s}$$

Resp. 209.18 kg-m/s.

12. En la estática del cuerpo rígido se define el momento de una fuerza  $F$  con respecto a un punto  $P$  fijo del espacio como el producto externo

$$M_P = PA \wedge F$$

donde  $A$  es el punto de aplicación de la fuerza  $F$ . Calcular el momento de la fuerza  $F$  de 230 N mostrada en la figura, con respecto al punto  $P$ .



Resp.  $M_P = -1729 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

13. Calcular el producto externo  $M \wedge N$  de los vectores

$$M = -2i + 3j \quad N = 5i + 9j$$

usando los productos

$$i \wedge i = 0, \quad j \wedge j = 0, \quad i \wedge j = 1$$

14. Calcular el producto externo  $a \wedge b$  de los vectores

$$a = (\cos \theta, \sin \theta) \quad b = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

donde  $\theta$  es un ángulo arbitrario.

15. ¿Qué puede decir sobre el producto externo  $A \wedge B$  si  $A$  y  $B$  son perpendiculares?



## MÓDULO II

# ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA EN EL PLANO

## CONTENIDO

<b>CAPÍTULO 1. FUERZAS. LEYES DE NEWTON DE LA MECÁNICA</b>	
1.1. El vector fuerza y la tercera ley de Newton .....	II-3
1.2 La primera ley de Newton .....	II-6
1.3 La segunda ley de Newton .....	II-9
1.4 Fuerza gravitatoria o peso .....	II-10
1.5 La ley de Hooke .....	II-12
1.6 Resortes lineales .....	II-13
1.7 Problemas .....	II-13
<b>CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA</b>	
2.1. Equilibrio. Sistema físico (I) .....	II-15
2.2. Fuerza de acción per campo .....	II-16
2.3. Fuerza de contacto .....	II-16
2.4. Abrir los contactos con cuerda .....	II-17
2.5. Abrir los contactos con resorte .....	II-17
2.6. Fuerza con el contacto simple .....	II-18
2.7. Descomposición del sistema global .....	II-19
2.8. Diagramas de cuerpo libre .....	II-19
2.9. Ecuaciones de equilibrio .....	II-19
2.10. Diagramas de cuerpo libre de sistemas compuestos .....	II-21
2.11. Fuerzas internas y externas .....	II-22
2.12. Problemas .....	II-23
<b>CAPÍTULO 3. OPERACIONES VECTORIALES</b>	
3.1. Modelos básicos .....	II-27
3.2. Distribución continuas de fuerza .....	II-27
3.3. Fuerza resultante o equivalente .....	II-29
3.4. Principio de Arquímedes .....	II-29
3.5. El modelo de "partícula" .....	II-30
3.6. Fuerza de tensión en cables .....	II-31
3.7. Tensión simple, más en detalle .....	II-32
3.8. Tensión como función de punto .....	II-33
3.9. Un ejemplo de variación continua de la tensión .....	II-34
3.10. Acción de superficie lisa sobre cuerda, y viceversa .....	II-34
3.11. Sistemas de poleas. Ejemplos .....	II-37
3.12. Problemas .....	II-40
<b>CAPÍTULO 4. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE</b>	
4.1. Problema y método generales de la estática de partículas .....	II-43
4.2. Reglas básicas .....	II-43
4.3. Cómo trazar las fuerzas de tensión de cables .....	II-45
4.4. Cómo trazar las fuerzas de compresión de resortes .....	II-46
4.5. Cómo trazar la fuerza normal en el contacto simple .....	II-48
4.6. Asuntos de lenguaje .....	II-50
4.7. Sistemas compuestos .....	II-52
4.8. Fuerzas de dirección a determinar .....	II-53
4.9. Fuerzas negativas .....	II-54
4.10. Problemas .....	II-55
<b>CAPÍTULO 5. SISTEMAS EN EQUILIBRIO. FUERZAS COPLANARIAS</b>	
5.1. Fuerzas inclinadas .....	II-58
5.2. Equilibrio bajo tres fuerzas .....	II-58
5.3. Ejemplos varios .....	II-59
5.4. Problemas .....	II-68
<b>CAPÍTULO 6. LA FUERZA DE FRICCIÓN O ROZAMIENTO</b>	
6.1. Una experiencia .....	II-76
6.2. Propiedades de la fuerza de fricción .....	II-77
6.3. Ejemplos .....	II-78
6.4. Ángulo de fricción .....	II-83
6.5. Problemas .....	II-87





CAPÍTULO 1

FUERZAS. LEYES DE NEWTON DE LA MECÁNICA

1.1. El vector fuerza y la tercera ley de Newton

La noción básica de fuerza se remonta a la acción de nuestros músculos: al jalar o empujar un objeto estamos ejerciéndole una fuerza.

Las fuerzas se caracterizan por dos clases de efectos:

- Pueden *deformar* cuerpos restringidos a no moverse.
- Pueden *acelerar* cuerpos libres de moverse (es decir, modificarles su velocidad).

El efecto de un jalón o empujón depende no solamente de qué tan fuerte lo demos, sino también de la dirección en que lo apliquemos. Las fuerzas son vectores, con propiedades de magnitud y dirección.

Al jalar un resorte sujeto a una pared (Fig. 1), el resorte se deforma, aumentando de longitud. El efecto de la fuerza ejercida por el brazo es *deformativo*.



Fig. 1

No es el resorte el único cuerpo que se deforma; también la pared sufre una deformación (casi imperceptible, pero mensurable), así como los dedos de la persona que jala el resorte. Los tres cuerpos encerrados en la Fig. 1 se ejercen fuerzas mutuamente.

¿Cómo están las fuerzas que deforman cada uno de los cuerpos "pared", "resorte" y "mano"?

La respuesta viene dada por la tercera ley de Newton, cuyo enunciado original, que data del año 1687, es este:

(1) Tercera ley de Newton  
(ley de Acción-Reacción)

A toda acción siempre se le opone una reacción igual, o: las acciones mutuas de dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas en sentidos opuestos.

Unas observaciones con respecto a la 3a. ley:

- La "acción" y la "reacción" a que hace referencia esta ley son *fuerzas*.
- La expresión matemática general de la tercera ley es la siguiente:

$$F_{AB} = - F_{BA}$$

donde  $F_{AB}$  es la fuerza que ejerce el cuerpo A sobre el B, y  $F_{BA}$  es la fuerza recíproca, la que ejerce B sobre A (Fig. 2).

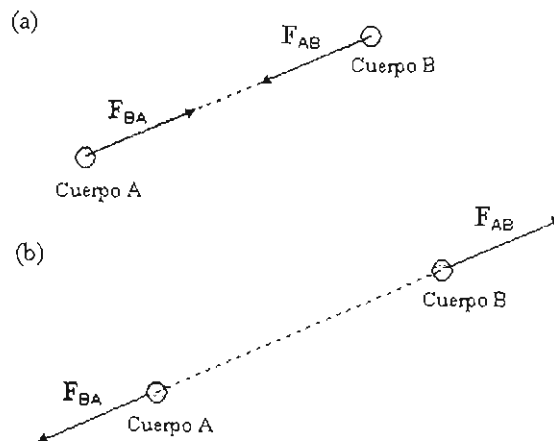


Fig. 2

- La acción y la reacción actúan siempre sobre cuerpos *distintos*.
- Las fuerzas  $F_{BA}$  y  $F_{AB}$  están dirigidas según la línea que une ambos cuerpos (esta afirmación no se cumple para todo tipo de fuerzas, por lo que el enunciado dado se denomina "tercera ley en su forma restringida"). Las fuerzas de acción y reacción pueden apuntar de una partícula hacia la otra (Fig. 2a) o en direcciones antipartícula (Fig. 2b).
- Cualquiera de las fuerzas  $F_{AB}$  o  $F_{BA}$  se denomina la *acción*, y la otra recibe automáticamente el nombre de *reacción*. No se implica aquí una relación causa-efecto: la "acción" no es la causa de la "reacción"; son meramente nombres.
- Toda fuerza proviene de la acción mutua (o "interacción") de dos cuerpos. Las fuerzas no surgen de la nada: si un cuerpo experimenta una

fuerza (es decir, una deformación o una aceleración), debe existir en algún lugar otro cuerpo responsable de esta fuerza, el cual experimenta a su vez una fuerza igual y de sentido contrario. Las fuerzas nacen siempre por parejas acción-reacción.

A la luz de la tercera ley de Newton podemos afirmar, con respecto a las acciones mutuas de los 3 cuerpos ilustrados en la Fig. 3, lo siguiente:

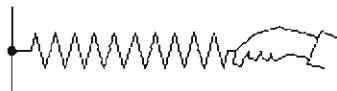


Fig. 3. Esta es la Fig. 1, repetida aquí.

La mano ejerce cierta fuerza sobre el resorte (el cual suponemos muy ligero o "ingrávido"). Recíprocamente, el resorte ejerce sobre la mano la misma fuerza, con sentido contrario.

El resorte ejerce fuerza sobre la pared. A la inversa, la pared ejerce sobre el resorte la misma fuerza, con sentido contrario.

Con objeto de mostrar las direcciones de estas fuerzas, así como el cuerpo sobre el que actúa cada una, es necesario "desmembrar" el conjunto "Pared-Resorte-Mano". Semejante desmembramiento no significa, por supuesto, una separación física que rompa los enlaces moleculares entre los cuerpos, sino una segmentación mental o imaginada.

El desmembramiento se hace de la siguiente manera:

- Se identifican los cuerpos "distintos" que figuran en el dispositivo considerado, a saber, "Pared", "Resorte" y "Mano".
- Se buscan los *puntos de contacto* o unión entre los diversos cuerpos, como se ve en la Fig. 4.

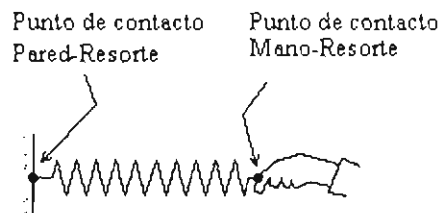


Fig. 4

- Se dibujan los cuerpos separados unos de otros por sus puntos de contacto. Esto lo hemos hecho en la Fig. 5; en donde además hemos denotado

con "a" y "b" los puntos de contacto entre cuerpos. Por conveniencia, admitimos que cada punto, a ó b, pertenece a ambos cuerpos contactantes.

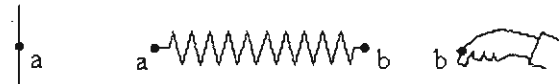


Fig. 5

- En los puntos de contacto se trazan las fuerzas acción-reacción que se ejercen allí los dos cuerpos en contacto.

Veamos cómo la tercera ley de Newton nos permite entender las relaciones entre las direcciones de las diversas fuerzas y sus efectos sobre los respectivos cuerpos pacientes.

En la Fig. 6 vemos que:

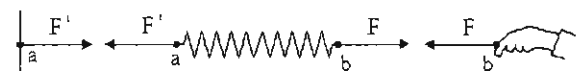


Fig. 6

- La mano es jalada por el resorte con cierta fuerza hacia la izquierda, cuya magnitud denotaremos con "F". Esta es la fuerza que tiende a deformar la mano.
- El resorte es jalado opuestamente por la mano en su extremo derecho y por la pared en su extremo izquierdo. La fuerza debida a la mano vale F, por la tercera ley de Newton. En cuanto a la fuerza debida a la pared, denotaremos su magnitud con "F' ". El efecto de las fuerzas sobre el resorte es ponerlo tirante y producirle una elongación.
- Por la tercera ley, la pared es jalada hacia la derecha por el resorte con fuerza F'. Esta fuerza tiende a deformar la pared.

Debido a la reciprocidad de acciones dictada por la tercera ley, a las fuerzas se les llama también *interacciones*. Decimos que la mano y el resorte (o viceversa) *interaccionan* con una fuerza de magnitud F; por otra parte, el resorte y la pared *interaccionan* con una fuerza de magnitud F'. La pareja de fuerzas encontradas que actúan en el punto "b", una sobre la mano y la otra sobre el resorte, forman una pareja acción-reacción (Fig. 7a). Lo mismo podemos decir del par de fuerzas que actúan en el punto "a" sobre la pared y el resorte (Fig. 7b).

Las fuerzas  $F'$  y  $F$  sobre el resorte, sin embargo, no forman una pareja acción-reacción, sea por la sencilla razón de que tales parejas nunca pueden estar actuando sobre el mismo cuerpo.

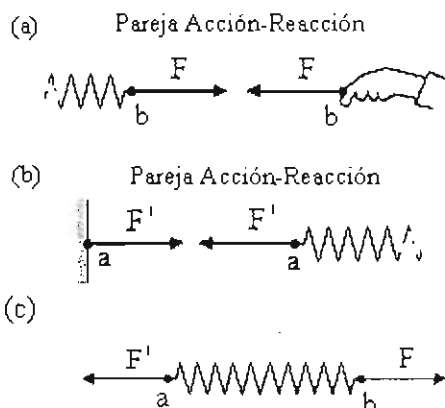


Fig. 7

Nuestra intuición dicta que las fuerzas  $F$  y  $F'$  que solicitan al resorte (Fig. 7c) son iguales. Esta es una consecuencia de la *primera* ley de Newton. A reserva de dar el enunciado original y completo un poco más adelante, la primera ley establece la condición necesaria para que un cuerpo esté en equilibrio estático:

(2) *Ley del equilibrio estático.*

Si un cuerpo está en equilibrio estático (o brevemente: "en equilibrio"), entonces la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

Aplicando esta ley al resorte deducimos que las fuerzas en sus extremos tienen la misma magnitud, como se muestra en la Fig. 8. Repitamos la Fig. 6 incluyendo esta información (Fig. 9).



Fig. 8

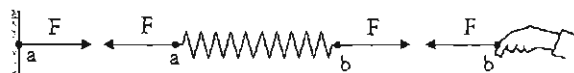


Fig. 9

Si se incrementa la fuerza  $F$  de la mano sobre el resorte, automáticamente se incrementa en la misma cuantía la fuerza del resorte sobre la pared. En este sentido podemos decir que "la fuerza ejercida por la

mano sobre el resorte se transmite a la pared (con el mismo valor)".

En una situación de equilibrio estático, fuerzas que actúan sobre cuerpos conectados en serie horizontal por cuerdas y/o resortes en tensión se transmiten de cuerpo a cuerpo. Para reconocer esta transmisión de fuerzas podemos hacer el experimento indicado en la Fig. 10: al jalar el resorte derecho observamos que el resorte izquierdo (que escogemos idéntico al anterior) se deforma lo mismo que el derecho una vez que el bloque se mantiene en reposo. La fuerza de la mano aplicada sobre el resorte derecho se transmite al bloque, y de este cuerpo al resorte izquierdo y finalmente a la pared.

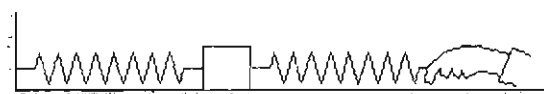


Fig. 10

Vamos a poner en un cuadro lo que hemos aprendido en los párrafos anteriores, y a introducir unos términos que nos serán muy útiles.

(3) Supongamos que dos cuerpos A y B están en contacto mutuo, y sea "P" el punto de contacto, el cual marcamos en ambos cuerpos. Por la frase *abrir el contacto* entre los cuerpos A y B entenderemos el hecho de separar conceptualmente ambos cuerpos, con objeto de exponer la fuerza de interacción  $A \leftrightarrow B$ .

Al abrir un punto de contacto entre dos cuerpos A y B, "brota" en dicho punto una pareja de fuerzas acción-reacción, que son las fuerzas  $F_{AB}$  y  $F_{BA}$  con que interaccionan los cuerpos en contacto.  $F_{AB}$  actúa sobre el cuerpo B, y  $F_{BA}$  actúa sobre el cuerpo A.

La tarea de "abrir el contacto" entre dos cuerpos la estaremos haciendo frecuentemente en lo sucesivo. Demos un ejemplo.

En la Fig. 11 hemos "abierto el contacto" entre el bloque y el resorte derecho de la Fig. 10, y hemos denotado con la misma letra "P" el punto de contacto sobre ambos cuerpos, y con "F" la fuerza de interacción Bloque  $\leftrightarrow$  Resorte Derecho.

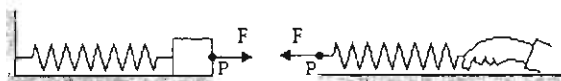


Fig. 11

Notemos que en dicho punto P surge una pareja de fuerzas acción-reacción: una de ellas actúa sobre el resorte, la otra sobre el bloque. Podemos decir que "la acción y la reacción actúan en un mismo punto pero sobre distintos cuerpos".

<Nota. Decimos que un cuerpo tiene un *estado de tensión simple* cuando sufre dos fuerzas iguales y colineales que tienden a elongarlo. Este concepto se aplica generalmente a cuerpos largos y delgados (cuerpos filamentosos o filiformes) como resortes, cuerdas, barras delgadas, etc. El resorte y la cuerda de la Fig. 12 están sometidos a tensión simple.

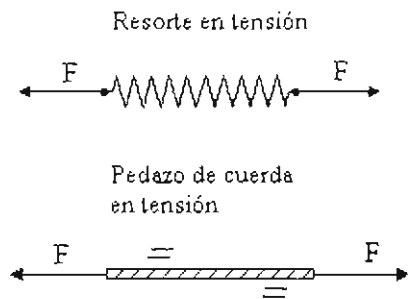


Fig. 12

Para poner un pedazo de cuerda en tensión hay que tirarlo de sus extremos con sendas fuerzas  $F$ , como se muestra en la Fig. 12.

La fuerza  $F$  se denomina en ambos casos la *tensión* del resorte o cable.

Considere la situación mostrada en la Fig. 13a: una cuerda fija a un techo sostiene una caja. Al abrir los **contactos** Cuerda-Techo y Cuerda-Caja (en los puntos "a" y "b", respectivamente) brotan las 4 fuerzas mostradas en la figura 13b, todas ellas iguales a la tensión "T" de la cuerda.

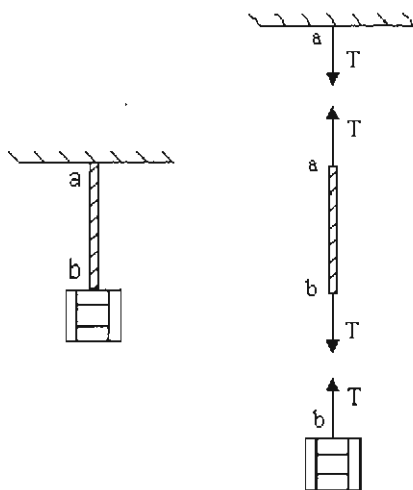


Fig. 13 >

En los párrafos anteriores hablamos acerca del efecto deformativo de las fuerzas. Existe también un efecto acelerador, que podemos reconocer mediante la siguiente experiencia.

Coloquemos un bloque sobre una mesa horizontal bien lubricada<sup>1</sup> y sujetémoslo a un resorte muy ligero, como se indica en la Fig. 14.

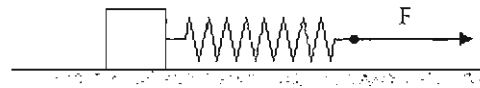


Fig. 14

Jalemos el bloque aplicando una fuerza sobre el resorte, controlando que en todo momento la deformación del resorte sea la misma, es decir, que la fuerza  $F$  aplicada sea constante. Observamos que para mantener la deformación constante debemos ir jalando el bloque cada vez más rápidamente. El bloque ejecuta de hecho un movimiento con *aceleración constante* (su velocidad va aumentando a la misma tasa en el transcurso del tiempo, y la distancia recorrida por el bloque es proporcional al cuadrado del tiempo). Este es el efecto acelerador de la fuerza.

Cualquiera de los dos efectos, el deformativo o el acelerador, puede usarse para dar una medida cuantitativa de las fuerzas. Pero para ello conviene echar mano de la primera y segunda leyes de Newton.

### 1.2. La primera ley de Newton

He aquí el enunciado original de la primera ley de Newton:

(4) *Primera ley de Newton*  
(*Ley de inercia*)

Todo cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea obligado a cambiar este estado por la aplicación de una fuerza externa no balanceada.

Cabe mencionar que las leyes de Newton son aplicables a *partículas*, es decir, a cuerpos tan diminutos, en comparación con el ámbito en el que se desarrolla su movimiento (real o potencial), que su posición en el espacio se puede establecer mediante un punto. Las partículas no tienen estructura, ni partes "internas"; son "cuerpos" que no pueden rotar,

<sup>1</sup> En el laboratorio se usan "mesas de aire" para esta experiencia. El bloque se desliza sobre un colchón de aire prácticamente sin experimentar rozamiento.

sólo pueden trasladarse. Un cuerpo se modela como "partícula" cuando en el análisis mecánico no interesa conocer la ubicación exacta de los puntos de aplicación de las fuerzas que sufre. Más adelante hablaremos más sobre esto. En la teoría física se generalizan luego las leyes de Newton a cuerpos extendidos, más complejos.

Empecemos la discusión de la primera ley hablando de "fuerza externa no balanceada".

Consideremos un resorte en tensión. Cada espira del resorte ejerce fuerzas sobre las espiras vecinas. Sin embargo, estas fuerzas, denominadas *fuerzas internas*, no se toman en consideración en el análisis del equilibrio del resorte como un todo. En cambio, las fuerzas en los extremos del resorte, debidas a *cuerpos ajenos* al mismo, denominadas *fuerzas externas*, son las que determinan el equilibrio del resorte. En general:

(5) Las *fuerzas internas de un cuerpo* son las fuerzas que se ejercen entre sí las partes o elementos que forman el propio cuerpo.

Las *fuerzas externas sobre un cuerpo* son las fuerzas que experimenta el cuerpo debidas a los demás cuerpos en los alrededores.

Un cuerpo considerado como "partícula" no tiene partes y por ello todas las fuerzas que lo solicitan son necesariamente externas.

Consideremos un cuerpo-partícula sometido a varias fuerzas  $F_1, F_2, F_3, \dots$  etc. (Fig. 15). Es un hecho experimental que el efecto estático o dinámico de cualquier subconjunto de tales fuerzas, actuando simultáneamente, es el mismo que el que produciría una sólo fuerza cuyo valor fuera la suma vectorial de todas las fuerzas del subconjunto.

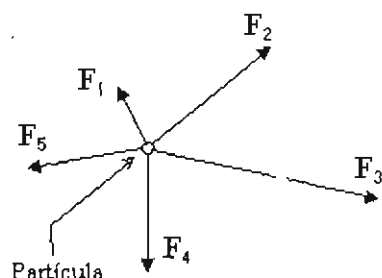


Fig. 15

Así por ejemplo, supongamos que la partícula de la Fig. 15 estuviera en equilibrio bajo la acción de las 5 fuerzas mostradas; si sustituyéramos digamos las

fuerzas  $F_1, F_2$  y  $F_5$  por una sólo fuerza igual a la suma vectorial  $F_1 + F_2 + F_5$ , entonces la partícula seguiría estando en equilibrio. Tomaremos esto como un postulado (consistente con las observaciones experimentales), que recibe el nombre de *principio de superposición*:

(6) *Principio de superposición de las fuerzas.*

La acción de dos o más fuerzas que actúan conjuntamente sobre una partícula, es la misma que la que produciría una sólo fuerza igual a la suma vectorial de las fuerzas conjuntas.

(7) Llamaremos *fuerza total* o *fuerza neta* sobre un cuerpo a la suma vectorial de *todas* las fuerzas que lo solicitan.

<Nota. Por el momento evitaremos llamarle "resultante" a la fuerza neta, pues el concepto de resultante implica otras cosas, como veremos.>

Decimos que las fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$  sobre un cuerpo están *balanceadas* si su suma vectorial es nula, es decir, si la fuerza total sobre el cuerpo es igual a cero. Si este es el caso tendremos, de acuerdo con la primera ley, que el cuerpo está ya sea en movimiento uniforme o bien en reposo. Vemos pues que la ley de equilibrio estático (Cuadro (2)-p5) es una consecuencia directa de la primera ley de Newton. Reformulemos la ley de equilibrio en estos términos:

(8) *Ley del equilibrio estático*

Si una partícula está en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$ , entonces debe ser

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

Esta se denomina *ecuación de equilibrio* de la partícula.

De acuerdo con la primera ley, los cuerpos oponen una resistencia a cambiar su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta (o sea a ser acelerados), en el sentido de que es necesaria una influencia *externa* (una fuerza no balanceada) para sacarlos de dicho estado. Esta propiedad de

“resistencia a la aceleración” de los cuerpos se denomina *inercia*. Se dice que el estado “natural” de los cuerpos es el estado de reposo o de movimiento uniforme, por lo que se entiende que los cuerpos mantendrían tal estado indefinidamente si no hubiera ninguna causa externa que lo alterara.

La primera ley de Newton proporciona un criterio para reconocer *cualitativamente* la presencia de una fuerza no balanceada, a saber:

Si se observa que, en un momento dado, una partícula que se venía moviendo en línea recta con velocidad constante experimenta una variación en su rapidez o una desviación de la línea recta, entonces se puede concluir que en dicho momento entró en operación una fuerza no balanceada sobre la partícula. La fuerza no balanceada es pues la “causa” del cambio de magnitud y/o dirección de la velocidad, o sea de la aceleración que experimenta la partícula.

La primera ley de Newton expresa asimismo que *toda aceleración es debida a una fuerza*. Uno puede acelerar un cuerpo jalándolo o empujándolo mediante otro cuerpo (por ejemplo el resorte usado en la experiencia de la Fig. 14-p6). Pero hay otras maneras, que no requieren contacto entre cuerpos: por ejemplo, simplemente dejamos caer el objeto libremente cerca de la superficie terrestre. Observamos que el objeto cae con una aceleración de  $9.8 \text{ m/s}^2$  (aproximadamente). Esta “aceleración de la gravedad”, que nos es muy familiar, debe ser motivada por una fuerza, y esta fuerza debe provenir de otro cuerpo ajeno al objeto.

Efectivamente, la Tierra es la responsable, y la fuerza ejercida por la Tierra sobre el objeto se denomina *fuerza gravitatoria*, o *peso* del objeto.

### 1.3. La segunda ley de Newton

Todos tenemos una noción intuitiva de lo que es la “masa” de un cuerpo. En nuestras primeras experiencias con las propiedades de aquello que entendemos por “masa” quizás no reparamos en el hecho de que existen dos percepciones distintas del concepto: una piedra muy ligera que descansa en el piso es muy fácil de *levantar*, y a la vez es muy fácil de *lanzar* como proyectil.

Con la acción de levantar la piedra estamos venciendo la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre aquella. Podríamos decir que:

*La masa de un cuerpo es la medida de la fuerza de atracción gravitatoria que otro cuerpo ejerce sobre él. Esta es la “masa gravitatoria” del cuerpo.*

Con la acción de lanzar la piedra estamos

venciendo la resistencia que ésta opone contra cualquier cambio de su velocidad. Ahora podríamos decir que:

*La masa de un cuerpo es la medida de su inercia, esto es, de la capacidad del cuerpo para resistir cambios de su velocidad. Esta es la “masa inercial” del cuerpo.*

Ahora bien, es un hecho sorprendente que ambas medidas (“pesantez” e “inercia”) coinciden. Esto ha sido verificado experimentalmente con una precisión extraordinaria:

$$\text{Masa gravitatoria} = \text{Masa inercial}$$

Semejante igualdad no es accidental; tiene un significado muy profundo, pero no nos corresponde en este curso introductorio ir más allá de lo que hemos expuesto.

No habrá necesidad, pues, de distinguir entre masa inercial y masa gravitatoria; ambos conceptos los fundimos en uno sólo: la masa del objeto, a secas.

La segunda ley de Newton relaciona la masa con la fuerza. Hé aquí su enunciado original:

#### (9) Segunda ley de Newton

La fuerza externa neta que actúa sobre un cuerpo material es directamente proporcional a la aceleración del cuerpo, y está en la misma dirección que ésta.

Matemáticamente,

$$F_{\text{neta}} \propto a$$

donde  $F_{\text{neta}}$  es la fuerza no balanceada y  $a$  es la aceleración. Evidentemente, el factor de proporcionalidad debe ser constante, y una propiedad exclusivamente del cuerpo considerado. Se le llama a este factor la *masa inercial* del cuerpo (o simplemente la “masa”, por lo explicado arriba), y se denota con “ $m$ ”. La relación entre  $F_{\text{neta}}$  y  $a$  se escribe entonces:

#### (10) Expresión matemática de la 2a. ley

$$F_{\text{neta}} = m a$$

La masa inercial “ $m$ ” de un cuerpo es una medida cuantitativa de su inercia puesto que, por (10), si consideramos dos cuerpos A y B, el segundo con el doble de masa inercial que el primero, entonces para producir una misma aceleración a ambos cuerpos es

necesario aplicar el doble de fuerza al cuerpo con la doble masa. Este último cuerpo "tiene más inercia" que el primero, se resiste más a ser acelerado.

La segunda ley introduce dos conceptos nuevos: el de fuerza y el de masa. Para poder obtener una medida cuantitativa de cualquiera de estas cantidades es menester contar previamente con un método para determinar la otra. Lo que se hace es lo siguiente:

Se escoge un cuerpo especial, único, como el *estándar universal de masa*. A este cuerpo, denominado el *kilogramo patrón*, se le asigna así una masa unitaria cuyo valor se define como un kilogramo (1 kg). El kilogramo patrón es un cilindro compuesto de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio, que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, un suburbio de París<sup>2</sup>.

Ya con esta referencia podemos medir fuerzas. El procedimiento consistiría en aplicar la fuerza desconocida al kilogramo patrón, medir la aceleración que éste adquiere, y calcular la fuerza mediante la ecuación (10). Un modo de hacerlo es valiéndonos del dispositivo de la Fig. 14 de la pág. 6.

Colocamos el kilogramo patrón sobre una superficie horizontal *lisa* (esto es, fricción insignificante). Sujetamos este cuerpo a un resorte muy ligero, y jalamos el cuerpo horizontalmente, como vemos en la Fig. 16. En este escenario la única fuerza no balanceada es la fuerza del resorte (ya que si damos un impulso al cuerpo estando solo, se moverá con velocidad constante a lo largo de la mesa lisa).

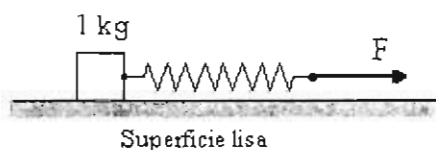


Fig. 16

Si el jalón se controla de modo que la configuración del resorte se mantenga invariable, entonces la fuerza es constante, y la aceleración es por lo tanto también constante. La medida de la aceleración nos da la medida de la fuerza. Por ejemplo, si se observa que el cuerpo adquiere una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$ , entonces la fuerza del resorte es

$$F = m a = 1 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \text{ N}$$

donde hemos definido la unidad de fuerza

<sup>2</sup> El patrón de masa moderno se define de otro modo.

$$1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N} = 1 \text{ newton}$$

Haciendo réplicas del kilogramo-patrón podemos de esta manera calibrar un resorte para medir fuerzas en algún rango de valores, construyendo así un *dinamómetro*.

El dinamómetro nos permite luego medir masas. Para ello aplicamos una fuerza conocida, medimos la aceleración resultante, y aplicamos la relación " $m = F / a$ ". De esta manera la segunda ley de Newton y la elección arbitraria del estándar de masa determinan la unidad de fuerza, y nos facilitan asimismo un método operacional<sup>3</sup> para medir masas.

Hay otro método mucho más simple para medir masas: coloquemos un kilogramo-patrón suspendido de un dinamómetro, el cual hemos calibrado previamente como ya explicamos (Fig. 17). El peso del kilogramo-patrón es compensado por la fuerza ascendente del dinamómetro, de tal manera que la lectura del dinamómetro nos da el valor del peso, en newtons. Sea "W" este peso.

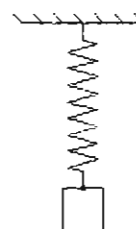


Fig. 17

Ahora dividimos la fuerza W, detectada por el dinamómetro, por el valor de la aceleración de la gravedad "g" en el lugar donde se realiza la experiencia. Obtenemos así la masa

$$m = \frac{W}{g}$$

Ambos métodos dan el mismo valor de la masa gracias a la igualdad de masa gravitatoria y masa inercial. Tomemos en consideración que en el "método dinámico" esquematizado en la Fig. 16 el cuerpo es acelerado por la fuerza del resorte, y la propiedad material determinante es aquí la *masa inercial* del cuerpo. Aquí no entra para nada la fuerza

<sup>3</sup> Un método operacional para determinar una cantidad es una serie de instrucciones que deben realizarse en el laboratorio para obtener la medida cuantitativa.



de atracción gravitatoria Tierra-Cuerpo. De hecho el experimento podría realizarse en un lugar del espacio exterior donde las fuerzas gravitatorias fuesen prácticamente inexistentes. Por otra parte, en el "método estático" de la Fig. 17 interviene otra propiedad de los cuerpos materiales, denominada *masa gravitatoria*, que es la que determina la intensidad de la fuerza gravitatoria (o sea el peso del cuerpo). Aquí la propiedad de inercia no interviene: el cuerpo no está siendo acelerado.

1.4. Fuerza gravitatoria o peso

(11) *Ley de gravitación universal de Newton.*

Esta ley establece que entre todo par de partículas, de masas  $m_1$  y  $m_2$  y separadas una distancia "d", existe una fuerza gravitatoria de atracción mutua cuya magnitud es

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

y cuya línea de acción es la recta determinada por ambas partículas (Fig. 18).

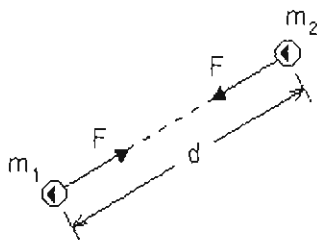


Fig. 18

Esta fuerza se denomina también *peso*.

G es la "constante de gravitación universal", una de las constantes fundamentales de la naturaleza. Su valor experimental es aproximadamente

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Por métodos del cálculo integral se puede demostrar que la expresión (11) se aplica tal cual al caso en que una de las dos partículas es una esfera homogénea (como en la Fig. 19a). "d" es aquí la distancia desde el centro de la esfera hasta la partícula.

A partir de este resultado se induce que (11) también da la fuerza de atracción entre dos esferas

homogéneas, con "d = distancia de centro a centro" (Fig. 19b).

En virtud del valor tan pequeño de G, se requiere de métodos muy refinados para lograr medir la fuerza de atracción cuando las masas implicadas son del orden de la escala humana.

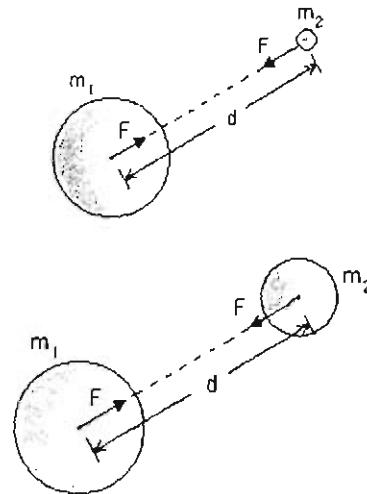


Fig. 19

Por ejemplo, si ambas masas valen 1 kg y están separadas 1 m, se atraen con una fuerza

$$F = 6.672 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{(1 \text{ m})^2} = 0.000 \ 000 \ 000 \ 066 \ 720 \text{ N}$$

bastante fuera del alcance de nuestro "sentido del peso". Sin embargo, la fuerza gravitatoria es perceptible cuando al menos uno de los dos cuerpos es muy masivo. Este es el caso de la fuerza gravitatoria entre la Tierra y los objetos situados en su superficie (Fig. 20).

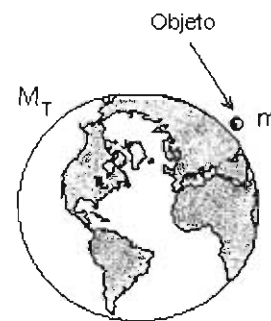


Fig. 20

El *peso* del objeto es una fuerza dirigida hacia el centro de la Tierra (verticalmente hacia abajo en la localidad terrestre presente).

Pongamos en la fórmula (11) los siguientes valores:

$$m_1 = M_T = \text{Masa terrestre} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$m_2 = m = \text{masa del objeto (valor paramétrico)}$$

$$d \approx R = \text{Radio terrestre} = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

Denotando el peso con "W", la ecuación (11) se convierte en

$$W = \frac{GM_T m}{R^2} = \left( \frac{GM_T}{R^2} \right) \cdot m$$

(12) El *peso* de un cuerpo de masa "m" cerca de la superficie terrestre es

$$W = m g$$

donde "g" es la *aceleración de la gravedad* o *aceleración de caída libre*. Su valor está en términos de la masa y el radio del planeta Tierra:

$$g = \frac{GM_T}{R^2} = \frac{6.672 \times 10^{-11} \cdot 5.97 \times 10^{24} \text{ m}}{(6.37 \times 10^6)^2 \text{ s}^2}$$

$$\approx 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

<Nota. El peso es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto al centro de la Tierra. Si el objeto está a altura "h" sobre la superficie terrestre, o sea a distancia "R + h" del centro, su peso ya no es "W = mg" sino

$$W = \frac{GM_T m}{(R + h)^2} = mg \left( \frac{R}{R + h} \right)^2 = \frac{mg}{\left( 1 + \frac{h}{R} \right)^2}$$

Simplifiquemos esta expresión, aproximándola para cuando el objeto está muy cerca de la superficie terrestre, o sea  $h \ll R$  o bien  $h/R \ll 1$ . Usando el desarrollo binomial (válido para  $x \ll 1$ )

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots \approx 1 + nx$$

en el que despreciamos potencias cuadráticas y superiores de "x", tenemos

$$W = mg \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^{-2} = mg \left( 1 - \frac{2h}{R} + \dots \right)$$

A la altura de 32 km (correspondiente a  $h \approx 0.005 R$ ), el peso del objeto ha disminuído en una fracción  $2h/R \approx 0.01 \approx 1\%$ .

En la tabla que sigue damos los valores de la aceleración de la gravedad para algunos cuerpos del sistema solar. Todos los valores son relativos a los terrestres.

Cuerpo	Masa	Radio	g
Luna terrestre	0.0123	0.25	0.19
Mercurio	0.05	0.38	0.35
Júpiter	317.9	11.23	2.58
Sol	332,831.3	109.2	27.9

En la Tierra, el peso de un cuerpo cuya masa es 1 kg es

$$W = mg = 1 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.8 \text{ N}$$

En Júpiter, un cuerpo de masa 1 kg tendría un peso 2.58 veces mayor que en la Tierra, o sea 25.28 N.

Es conveniente definir una unidad de fuerza que sea precisamente igual al peso del kilogramo-patrón. Se le llama el "kilogramo-fuerza" y se abrevia "kgf". Por definición,

$$1 \text{ kgf} \equiv 9.8 \text{ N}$$

Esta unidad es muy cómodamente reproducible en el laboratorio. Allí radica su eminente uso práctico en la técnica y la ingeniería.

Favor de no confundir el kilogramo (unidad de masa), con el kilogramo-fuerza (unidad de fuerza)<sup>4</sup>. La masa de un cuerpo es la misma en todo lugar del sistema solar y más allá. En cambio, 1 kgf ya no vale 9.8 N digamos en la Luna, porque la aceleración de la gravedad lunar es distinta de la terrestre.

<sup>4</sup> Es correcto decir que un cuerpo "pesa" equis kilogramos o que "pesa" equis newtons. En el primer caso estamos refiriéndonos a la masa, en el segundo al peso.

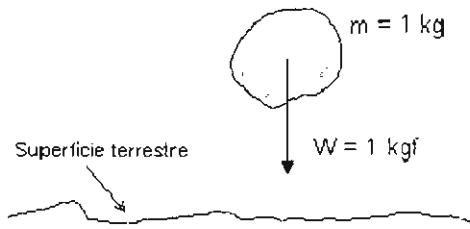


Fig. 21

**1.5. La ley de Hooke**

Cuando una varilla, que supondremos recta y homogénea, se somete a tensión, experimenta una elongación. Si se somete a compresión, experimenta un acortamiento.

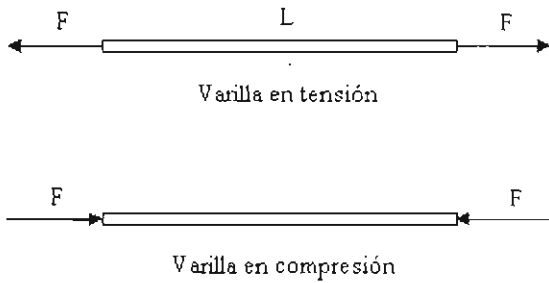


Fig. 22

Decimos que la varilla se comporta *elásticamente* si recupera sus dimensiones originales al ser retirada la fuerza F.

(13) *Ley de Hooke*  
 En el rango de comportamiento elástico la elongación "δ" es proporcional a la fuerza "F" según la relación

$$F = \frac{AE}{L} \cdot \delta$$

donde:  
 L = longitud de la varilla  
 A = área de la sección transversal de la varilla  
 E = módulo de elasticidad de la varilla.

El módulo de elasticidad "E" (o "módulo de Young") es una propiedad que depende de la composición química de la varilla. En la siguiente tabla se dan algunos valores típicos de "E". Sus unidades en el sistema internacional son las mismas que las de presión:

$$\frac{N}{m^2} = Pa = \text{pascal}$$

El "gigapascal", abreviado "GPa", es  $10^9$  Pa.

Material	Módulo de elasticidad
Acero	200 GPa
Aluminio	70 GPa
Bronce	100 GPa
Madera	11 GPa

**Ejemplo 1.** Calculemos la elongación de una varilla de acero de 1 m de longitud, bajo una carga igual al peso de una tonelada. El área transversal de la varilla es de  $500 \text{ mm}^2$ .

La masa de una tonelada (1000 kg) equivale en newtons a

$$W = m g = 1000 \text{ kg} \times 9.8 \frac{m}{s^2} = 9800 \text{ N}$$

Poniendo en la fórmula (13) los valores

$$L = 1 \text{ m}$$

$$A = 500 \text{ mm}^2 = 500 (10^{-3} \text{ m})^2 = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{L}{AE} \cdot F \\ &= \frac{1 \text{ m}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}} \cdot 9800 \text{ N} \\ &= 0.000 098 \text{ m} \approx 0.1 \text{ mm} \end{aligned}$$

(14) Se suele escribir (13) en la forma

$$F = k \delta$$

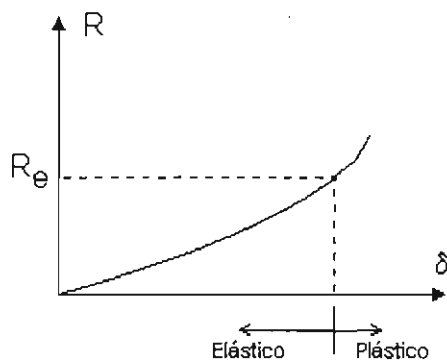
donde se define el *coeficiente de rigidez* de la varilla como

$$k = \frac{AE}{L}$$

El acortamiento " $\delta$ " de una varilla bajo compresión obedece la misma expresión (13) o (14).

### 1.6. Resortes lineales

Un resorte *elástico* es aquel que después de ser deformado recupera su forma y dimensiones originales al suprimirse la fuerza deformativa. Los resortes se comportan elásticamente siempre que su tensión  $R$  no exceda de cierto valor  $R_e$  denominado el *límite elástico*. Si la tensión sobrepasa este límite, el resorte queda con cierta deformación permanente al liberar la carga. Esta clase de deformación irrecuperable se denomina "*plástica*".



Graficando la tensión  $R$  contra la elongación  $\delta$  en un espacio cartesiano abstracto de ejes  $\delta$ ,  $R$  obtenemos la *curva característica* del resorte (Fig. 23).

#### (15) Ley de Hooke para resortes

Un *resorte lineal* es uno elástico cuya "curva" característica es una recta, esto es, la tensión (o compresión)  $R$  es proporcional a la elongación (o compresión)  $\delta$ :

$$R = k \delta$$

La constante de proporcionalidad  $k$  es la *constante elástica* o *rigidez* del resorte. El resorte lineal es un modelo de los resortes reales; muy bueno para pequeñas deformaciones.

Como vemos, la expresión (15) tiene la misma forma que la (14) considerada en la sección precedente. Una varilla se puede visualizar como si fuera un resorte muy rígido.

La constante elástica " $k$ " de un resorte helicoidal depende de varios parámetros (Fig. 24):

- el material de fabricación.
- el número de espiras.
- la longitud de paso " $p$ " entre espiras.
- el radio de la espira.
- el radio del alambre.

Si la longitud de paso es pequeña en comparación con el radio, el resorte se comporta linealmente con muy buena aproximación, dentro de su rango elástico.

En este módulo trabajaremos exclusivamente con resortes lineales, cuya constante elástica se proporcionará o podrá calcularse a partir de la tensión y la elongación.



Fig. 24

### 1.7. Problemas

1. Se le ordena a un caballo jalar una caja, bastante pesada por cierto.



El caballo no había dormido bien, pues había tenido un sueño muy "reparador", así que intenta zafarse de su cometido esgrimiendo el siguiente argumento:

"No tiene caso que me ponga a jalar esta caja, porque si reparamos en la tercera ley de Newton, la fuerza que yo ejerza sobre la caja será contrarrestada por una fuerza igual y opuesta que la susodicha ejercerá sobre mí mero. Y mientras yo jalo para el este la caja jala pal' oeste y aquí nos quedamos".

A lo cual respondió el mal amo:

“Palo este que te daremos sin no jalas esa caja, so pena que necesites reparar tu cara”.

Fin de la historia.

El problema es resolver esta falacia equina.

2. Calcular la aceleración de la gravedad en el planeta Marte, que tiene un radio de 3,395 km y una masa de 0.107 veces la masa terrestre.

3. La masa de Plutón es  $\frac{1}{500}$  de la masa de la Tierra, y su radio es la fracción 0.23 del radio de la Tierra. Calcular la aceleración de la gravedad plutoniana.  
Resp.  $g_P = 0.02 g$

4. Un hombre salta verticalmente hacia arriba desde el suelo con cierta velocidad  $v_0$ , y alcanza a subir 0.6 m. ¿Cuánto subiría en Saturno si saltara con la misma velocidad? La masa de Saturno es de 95.1 veces la masa terrestre, y su radio es de 60,000 km. (Sugerencia. La distancia “d” de subida es inversamente proporcional a la aceleración de la gravedad.)

5. Exprese la aceleración de la gravedad  $g = GM/R^2$  en términos del radio R y la densidad de masa  $\rho$  del planeta. La relación de densidades de masa entre la Tierra y Júpiter es  $\rho_T/\rho_J = 4.231$ , y la relación entre sus radios es  $R_T/R_J = 0.089$ . Calcular la aceleración de la gravedad de Júpiter relativa a la terrestre.  
Resp.  $g_J = 2.58g$

6. ¿Cuál sería la elongación de una varilla de aluminio de longitud 0.5 m, cuya sección transversal es un cuadrado de 10 mm de lado, si se le aplicara una fuerza de tensión equivalente al peso de 1000 kg?

## CAPÍTULO 2

## CONCEPTOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA

## 2.1. Equilibrio. Sistema físico (I)

El estado de inmovilidad o *reposo* de los objetos materiales se conoce técnicamente con el nombre de *estado de equilibrio [estático]*. Constituye el tema medular de la estática, una de las grandes divisiones de la mecánica.

Muchos de los conceptos principales de la estática figuran ya en los problemas más simples de equilibrio. Los introduciremos e ilustraremos valiéndonos del conjunto en equilibrio mostrado en la Fig. 25. Está formado por un amigo que jala una cuerda atada a un bloque. El bloque descansa sobre una tabla, que a su vez presiona un resorte, comprimiéndolo contra el piso.

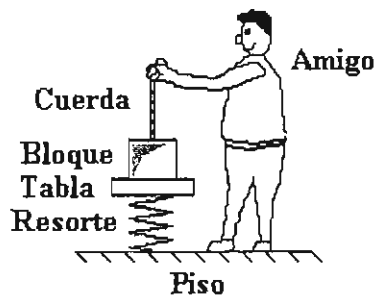


Fig. 25

El equilibrio de los cuerpos físicos se rige por unas "leyes de equilibrio estático", derivables de las leyes de Newton de la mecánica.

He aquí un enunciado bastante obvio acerca del equilibrio:

*Si un conjunto de cuerpos está en equilibrio, entonces cada cuerpo o subconjunto de cuerpos del conjunto dado está en equilibrio separadamente.*

De esta manera, sea que consideremos el conjunto completo de la Fig. 25, o solamente uno de sus cuerpos, o cualquier combinación de ellos, las leyes del equilibrio se aplicarán por igual a cada una de tales construcciones. En este contexto aplicativo, el cuerpo o agregado de cuerpos a considerar se denomina el "sistema físico", conforme a la siguiente definición general (usada también en otras ramas de la mecánica):

(16) El *sistema [físico]* es aquel *cuerpo o conjunto de cuerpos* estipulado expresamente para aplicarle las leyes de la mecánica. (En particular, las leyes del equilibrio.)

Cuando los cuerpos a analizar son fácilmente distinguibles y delimitables, como sucede con los de la Fig. 25, podemos definir el sistema por el método de *enumeración*, esto es, haciendo una *lista* de los cuerpos que lo constituirán<sup>5</sup>.

Entenderemos por *sistema global* el formado por la totalidad de los cuerpos de interés. Para el conjunto de la Fig. 25 lo escribiremos así:

Sistema global =  
{Amigo, Cuerda, Bloque, Tabla, Resorte}

Hemos dejado el Piso fuera del sistema global. Este cuerpo es un *apoyo fijo* del sistema, es decir, un cuerpo masivo unido firmemente a Tierra (como también lo sería una *Pared*, un *Techo*, una *Mesa fija*, etc.). Los apoyos fijos regularmente no se incluyen en el sistema; pertenecen a los *alrededores* del mismo.

Podemos construir otros sistemas tomando cada cuerpo separadamente, o en combinaciones de dos a dos, tres a tres, etc. En la Fig. 2 se muestran 2 posibles sistemas más.

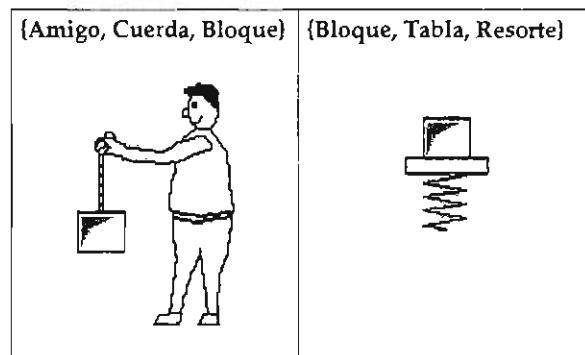


Fig. 26

<Nota. De N cuerpos podemos construir un total de  $2^{N-1}$  sistemas distintos. Serían 16 para el sistema global citado, compuesto de 5 cuerpos.>

<sup>5</sup> El sistema físico puede incluir también *fragmentos* de cuerpos. Este caso se discute en la sección 3.6.

Tales combinaciones de cuerpos se denominan, para efectos puramente de visualización, *subsistemas* del sistema global. Sin embargo, no habrá distinción física esencial entre sistema y subsistema en cuanto a sus propiedades de equilibrio y leyes aplicables.

(17) En todo problema de estática el primer paso consiste en *definir un sistema físico* (o varios, según convenga). Este es un requisito indispensable previo al análisis de fuerzas y planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.

Según la estática y nuestra experiencia cotidiana, el equilibrio de los cuerpos es un estado condicionado por las *fuerzas* que actúan sobre ellos. En el sistema global entran en juego diversas fuerzas que mantienen en equilibrio a cada cuerpo del sistema y por ende al sistema entero o cualquiera de sus subsistemas. Las más de las veces, el análisis del equilibrio de un sistema comprende el análisis del equilibrio de algunas de sus partes.

Nuestra primera tarea consistirá precisamente en identificar todas las fuerzas relevantes en el sistema global, como etapa previa para determinar numéricamente su estado de equilibrio, así como el de sus elementos. Para facilitar en el caso general este cometido se clasifica a las fuerzas en dos categorías: fuerzas de acción por campo y fuerzas de acción por contacto.

## 2.2. Fuerzas de acción por campo

Estas fuerzas se manifiestan sin necesidad de cercanía ni contacto físico entre los cuerpos. También se llaman *fuerzas de acción a distancia*. En ingeniería las fuerzas más comunes de esta categoría son la fuerza gravitatoria, la eléctrica y la magnética. Menos familiares son la fuerza nuclear y la fuerza débil<sup>6</sup>.

Como sabemos, todo objeto material terrestre experimenta la fuerza de atracción gravitatoria debida al planeta Tierra. Esta fuerza, denominada el *peso* del objeto, es el producto de la masa del objeto y la aceleración de caída libre (o aceleración de la gravedad), cuyo valor es  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , con una variación de máximo  $\pm 0.3\%$  sobre toda la superficie terrestre.

Para denotar los pesos usaremos convencionalmente la literal básica "W". En la Fig. 27 hemos denotado con  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  los pesos de la Tabla, el Bloque y el Amigo, respectivamente. Supondremos que la Cuerda y el Resorte son muy ligeros

("ingrávidos") y despreciaremos sus pesos.

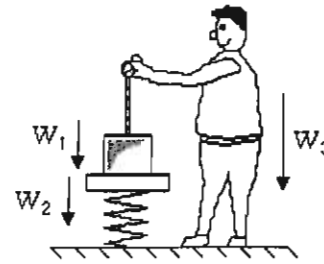


Fig. 27. Fuerzas de acción por campo.

En este módulo no trataremos con fuerzas eléctricas ni magnéticas. Nuestra fuerza de acción por campo por excelencia será el peso.

En la estática invariablemente se excluye a la Tierra de los sistemas físicos. No así en dinámica, donde es frecuente tomarla como parte del sistema en los análisis de energía.

Pasemos a la otra categoría de fuerzas.

## 2.3. Fuerzas de contacto

Las *fuerzas de contacto* (también conocidas como *fuerzas mecánicas o macroscópicas*), como su nombre lo indica, son fuerzas que surgen en los puntos o regiones de contacto o unión entre cuerpos "distintos". Ejemplos de esta categoría son las fuerzas ejercidas por cables y resortes, por presión mutua de dos cuerpos, por apoyos fijos, por fricción, etc. *Toda fuerza que no es de acción por campo es de contacto.*

A nivel atómico no tiene sentido la distinción entre fuerzas de acción por campo y de contacto. De hecho las fuerzas de contacto se explican, en la escala atómica, con base en las fuerzas intermoleculares entre los cuerpos contactantes, las cuales son predominantemente eléctricas.

Para descubrir las fuerzas de contacto primeramente hay que detectar todos los puntos de contacto entre los diversos cuerpos integrantes del sistema. Hallamos los 6 que se resaltan en la Fig. 28 con circulillos negros (por simplicidad, los pies del Amigo contarán como un sólo contacto). Rotulemos los contactos con las letras a, b, c, d, e y f.

<sup>6</sup> Hasta la fecha se distinguen 3 fuerzas fundamentales: la gravitacional, la electrodébil y la fuerza de color.

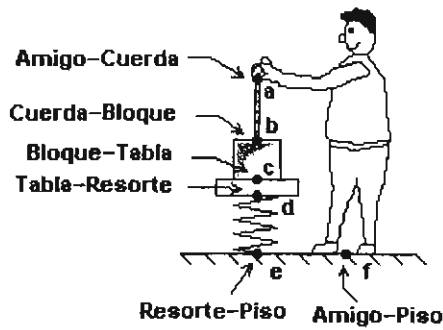


Fig. 28. Contactos.

Es en estos contactos que se generan las demás fuerzas de interés (controlables) que determinan el equilibrio del sistema y sus elementos.

También los contactos tienen su clasificación (Fig. 29):

El contacto en "a" es un *contacto con cuerda*, lo mismo que el contacto en "b".

Los contactos en "c" y "f" son *contactos entre superficies* o *contactos simples*.

Los contactos en "d" y "e" son *contactos con resorte*.

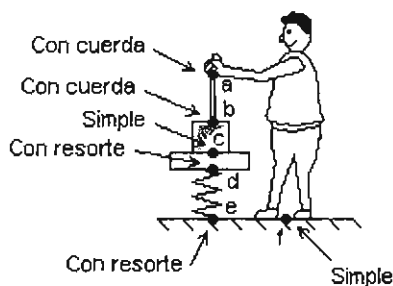


Fig. 29

En el contacto simple los cuerpos solamente se "tocan". No están unidos físicamente por pegamento, soldadura, pernos, etc. Dos cuerpos en contacto simple están presionados uno contra el otro; oponen resistencia a compenetrarse, pero no a ser separados el uno del otro.

Un poco más adelante hablaremos también de contactos *internos* y *externos*.

Veamos ahora cómo son las fuerzas que surgen en cada tipo de contacto.

#### 2.4. Abrir los contactos con cuerda

Nuestro plan ahora es abrir los 6 contactos identificados arriba, conforme a lo explicado en el cuadro (3)-p5 del capítulo 1.

Quando un sistema físico se desmembra (conceptualmente) en sus elementos, con objeto de analizar su estado de equilibrio, la tercera ley de

Newton juega un papel importantísimo. Nos permite entender cómo las partes del sistema se enlazan entre sí, y cómo se "transmiten" las fuerzas a través de los elementos del sistema.

La cuerda de nuestro sistema global está en tensión simple. Los cuerpos responsables del estado de tensión de una cuerda son siempre aquellos que están sujetos a sus extremos, que son los cuerpos que tiran *directamente* de ella. En nuestro sistema son el Amigo y el Bloque los que ponen a la Cuerda en tensión.

La Fig. 30 muestra lo que obtenemos al abrir los contactos con la cuerda en los puntos "a" y "b". La tensión de la cuerda se ha denotado con "T". Compare la Fig. 30 con la Fig. 13b de la página 6.

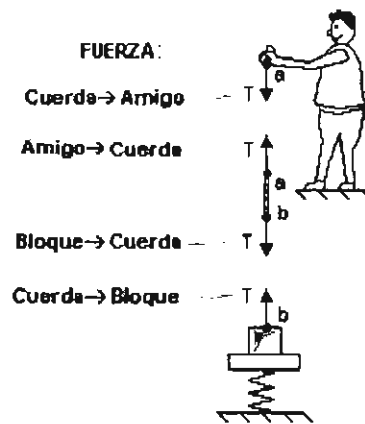


Fig. 30

Recuerde que las fuerzas acción-reacción de contacto puntual actúan *en un mismo punto*. Así, en el mismo punto "a" (que se considera perteneciente tanto a la Cuerda como al Amigo) brotan las fuerzas *Cuerda → Amigo* y *Amigo → Cuerda*, que son de acción-reacción. Lo análogo ocurre en "b".

La descripción de los efectos de las fuerzas de tensión depende drásticamente del cuerpo o sistema considerado, pero por lo demás es bastante intuitiva. Por una parte, la *Cuerda* sufre dos fuerzas que la tensan, imputables al Amigo y al Bloque. Por la otra, el Amigo y el Bloque son *jalados* por la *Cuerda*, el primero hacia abajo y el segundo hacia arriba.

#### 2.5. Abrir los contactos con resorte

Los resortes son capaces de soportar estados de tensión simple, como las cuerdas, pero también estados de compresión simple. La Fig. 31 muestra cómo debemos aplicar las fuerzas para poner a un resorte en tensión o en compresión. Designaremos la tensión de resortes con la literal "R" y la compresión con "C".



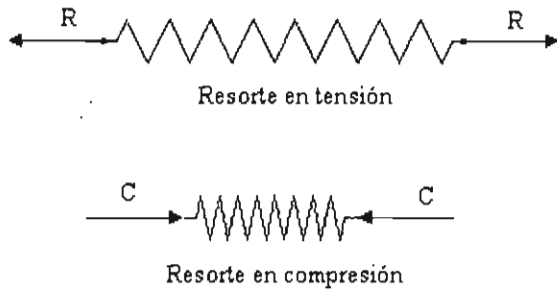


Fig. 31. (Resortes ingrávidos.)

En lo que respecta a las fuerzas que un resorte estirado ejerce sobre los cuerpos unidos a él, claramente se comporta del mismo modo que una cuerda tirante. El resorte elongado tiende a encogerse hacia su estado natural indeformado, y con ello a jalar hacia sí los cuerpos en sus extremos<sup>7</sup>.

En el estado de compresión se "invierten" las propiedades: el resorte sufre dos fuerzas *encontradas* que lo comprimen. Por su tendencia natural a descomprimirse, el resorte *empuja* lejos de sí a los cuerpos pacientes (los "repele", por así decirlo). Mire la mancuerna de la Fig. 32, imaginando que es parte de un conjunto más amplio en equilibrio. En la parte inferior de la figura se muestran abiertos los contactos con el resorte comprimido, y las parejas acción-reacción que brotan en ellos.

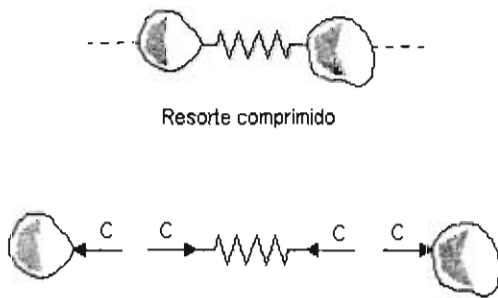


Fig. 32

El resorte perteneciente a nuestro sistema global obviamente se halla en compresión. Al abrir los contactos Resorte-Tabla en "d" y Resorte-Piso en "e" brotan las 4 fuerzas de compresión "C" mostradas en la Fig. 33.

<sup>7</sup> Una cuerda en tensión tiene cierta elongación y se comporta de forma parecida a un resorte. Usualmente la elongación de una cuerda es pequeña y se puede despreciar.

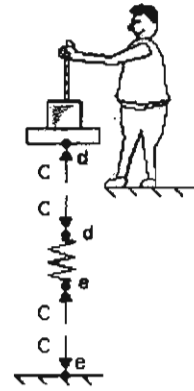


Fig. 33

Para completar el análisis de las fuerzas nos falta solamente un tipo de fuerzas por considerar: las que se generan en los contactos de tipo simple.

### 2.6. Fuerzas en el contacto simple

Del contacto de tipo simple tenemos dos casos en nuestro sistema: Bloque-Tabla y Amigo-Piso.

El razonamiento es análogo al empleado con la Cuerda y el Resorte: al abrir el contacto Bloque-Tabla en "c", brota una pareja de fuerzas de magnitud denotada con " $N_1$ ", que son de acción-reacción (Fig. 34a). Es un tipo de fuerza que se denomina *normal* (en su acepción de "perpendicular"). Se suele denotar genéricamente con la literal "N", aunque ocasionalmente usaremos otras letras como S y P.

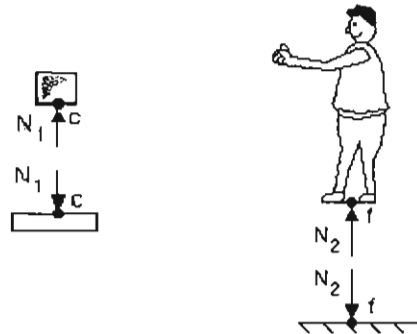


Fig. 34

En el contacto simple "f" entre el Amigo y el Piso tiene lugar otra interacción normal, denotada con  $N_2$  (Fig. 34b).

En general, en el contacto simple se genera además de la fuerza "normal" otra fuerza denominada "fricción" o "rozamiento". Postergaremos el estudio de la fricción hasta el capítulo 6. Mientras tanto, cuando digamos que alguna superficie es *lisa* querremos significar que allí se genera puramente

fuerza normal, como en el ejemplo presente.

En cuanto a los efectos de las fuerzas normales, compruebe que concuerdan con nuestra idea intuitiva: la Tabla y el Bloque se oponen a su mutua penetración, *oprimiéndose* (repeliéndose) mutuamente con la misma fuerza  $N_1$ . El Amigo *presiona* al Piso con fuerza  $N_2$ , y el Piso *sostiene* al Amigo con la misma fuerza.

### 2.7. Descomposición del sistema global

Las fuerzas reunidas en la Fig. 35b son ya todas las existentes en el sistema global.

Esta figura presenta la *descomposición* del sistema global en sus elementos. Con ello hemos cumplido nuestro primer objetivo, el de identificar completamente las fuerzas que mantienen el sistema global y sus cuerpos en equilibrio. Observe en la Fig. 35b como todos los cuerpos de nuestro sistema global coexisten en equilibrio.

A continuación atenderemos el asunto de las ecuaciones de equilibrio, pero antes introduciremos unas definiciones clave.

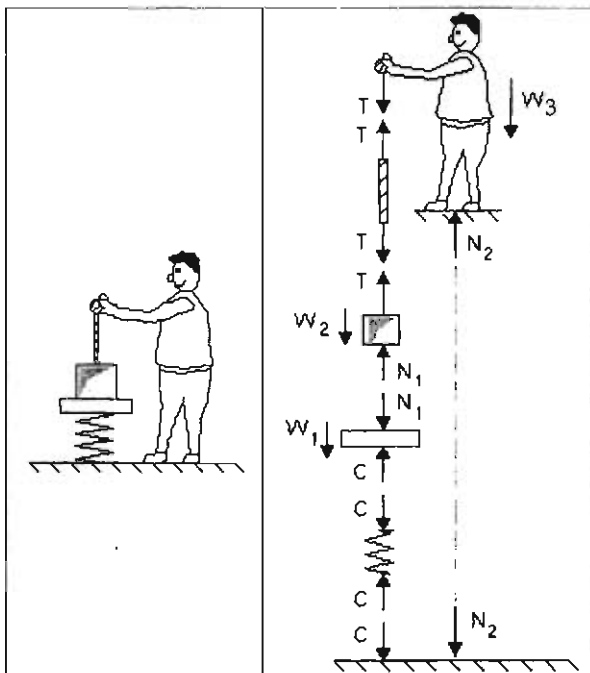


Fig. 35

### 2.8. Diagramas de cuerpo libre

Estudie la Fig. 36. Cada cuerpo del sistema se muestra *aislado* de los restantes. Además, para cada cuerpo se indican *todas las fuerzas* que lo solicitan. Cada uno de los cuadros mostrados se llama el *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo respectivo.

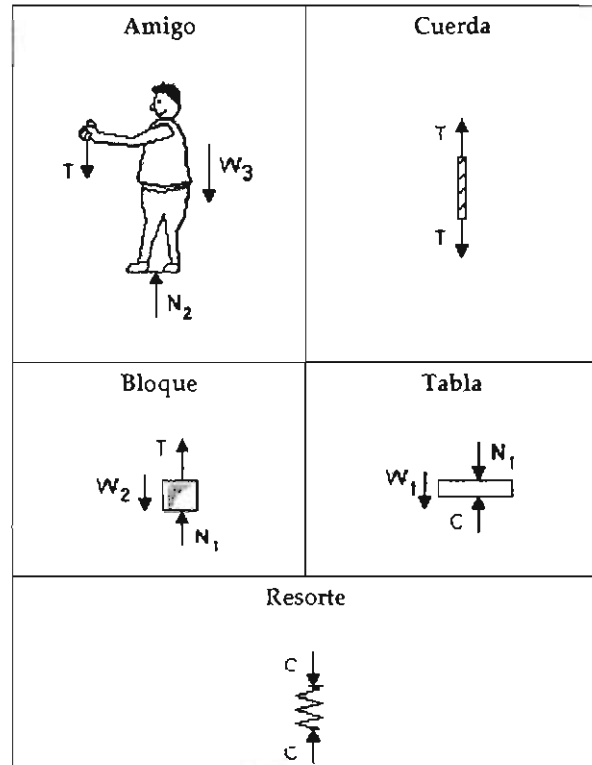


Fig. 36. Diagramas de cuerpo libre.

(18) El **diagrama de cuerpo libre** (abreviado DCL) de un cuerpo es un gráfico compuesto de un bosquejo del cuerpo, **abstraído** de los demás cuerpos a su alrededor, junto con la **totalidad** de las fuerzas que actúan sobre él.

El DCL de un cuerpo constituye una ayuda visual enorme para plantear sus ecuaciones de equilibrio.

### 2.9. Ecuaciones de equilibrio

La expresión matemática de la ley de equilibrio es la siguiente, derivable de las leyes de Newton:

(19) Es condición necesaria para que un cuerpo (o en general, sistema físico) esté en equilibrio que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúen sobre él sea igual a cero:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

donde  $F_1, F_2, \dots, F_N$  son las fuerzas existentes sobre el cuerpo (sistema) considerado. La condición no es suficiente, pues también sería aplicable al caso en que

el cuerpo se moviera con velocidad constante.

<Nota. Esta condición de equilibrio es válida para cuerpos-partículas. Para cuerpos extendidos habría que agregar otra condición, acerca de los "momentos" de las fuerzas, como veremos en el Módulo III.>

Ahora bien, en vista de que las fuerzas sobre el sistema global y sus subsistemas son todas *verticales*, podemos simplificar la ecuación de equilibrio a

$$\sum F_i = 0$$

que se entiende como sigue:

*La suma de las componentes verticales de todas las fuerzas es igual a cero.*

Aplicando esta condición a la Cuerda y el Resorte obtenemos las relaciones  $T - T = 0$  y  $C - C = 0$ , grandes verdades, pero inservibles. Por esta razón, en lo sucesivo *no plantearé las ecuaciones para cuerpos en tensión o compresión simples, como cuerdas, resortes, varillas, etc.*

En cuanto a los demás cuerpos tenemos, suponiendo un eje hacia arriba:

Amigo: $N_2 - T - W_3 = 0$	
Bloque: $N_1 + T - W_2 = 0$	
Tabla: $C - N_1 - W_1 = 0$	

En estas 3 ecuaciones aparecen 7 cantidades que son  $N_2$ ,  $T$ ,  $W_3$ ,  $N_1$ ,  $W_2$ ,  $C$  y  $W_1$ . Como el número de incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones disponibles más el número de datos, se necesitan  $7 - 3 = 4$  datos consistentes para poder conocer todas las fuerzas.

En problemas no tan complejos como el presente es fácil discernir físicamente si es que se tienen datos suficientes para determinar la solución.

Analicemos intuitivamente el problema, empezando de la situación mostrada en la Fig. 37, en que el Amigo todavía no usa la Cuerda. Los datos más naturales que se antoja dar son los pesos de la Tabla, el Bloque y el Amigo, digamos 40, 100 y 700,

respectivamente (en newtons). Quedan como incógnitas  $C$ ,  $N_1$  y  $N_2$ .

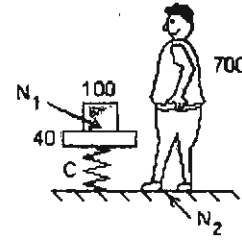


Fig. 37

Viendo que el Resorte sostiene por sí sólo al conjunto "Tabla + Bloque", se deduce que su compresión es igual al peso de este conjunto, o sea  $C = 40 + 100 = 140$ .

Por otra parte, la Tabla sostiene al Bloque, por lo que la normal  $N_1$  es igual al peso del Bloque, o sea  $N_1 = 100$ . Finalmente, el Piso soporta el peso del Amigo mediante la fuerza normal  $N_2$ , por lo que  $N_2 = 700$ . Estos valores puede obtenerlos también directamente de las ecuaciones anteriores poniendo  $T = 0$ , entrada equivalente a eliminar la Cuerda.

Como ve, esta situación se pudo resolver con los 3 datos propuestos. Se sospecha que cuando el Amigo ata y jala la Cuerda será necesario **otro dato más** para precisar el problema. El dato adicional puede ser la fuerza con que se tira de la Cuerda (esto es, la tensión  $T$ ) o bien la compresión  $C$  del Resorte, o bien la fuerza normal  $N_1$ .

Volviendo a la situación original y basándonos en el razonamiento anterior, propongamos cuatro datos como sigue:

$$W_1 = 40, \quad W_2 = 100, \quad W_3 = 700$$

junto con  $T = 30$

Usando las ecuaciones de equilibrio calculamos

Amigo:  $N_2 - T - W_3 = 0$

$$\Rightarrow N_2 = 30 + 700 = 730$$

Bloque:  $N_1 + T - W_2 = 0$

$$\Rightarrow N_1 = -30 + 100 = 70$$

Tabla:  $C - N_1 - W_1 = 0$

$$\Rightarrow C = 70 + 40 = 110$$

Compare estos valores con los correspondientes a la Fig. 37, o sean  $C = 140$ ,  $N_1 = 100$  y  $N_2 = 700$ . Al jalar el Amigo la Cuerda con una fuerza de 30, la carga del Resorte (su compresión  $C$ ) se aligera desde 140 hasta 110; también disminuye la fuerza de contacto  $N_1$  entre la Tabla y el Bloque, pasando de 100 a 70. En cambio, la acción de jalar la Cuerda produce mayor presión del Amigo sobre el Piso: el valor de  $N_2$  pasa de 700 a 730. Es instructivo que compare ambas situaciones, sin cuerda y con ella, y que intuya físicamente como se diferencian los valores de las fuerzas en una y otra.

Si el Amigo jala con la fuerza justamente suficiente para levantar el Bloque, o sea si aplica  $T = 100$  (igual al peso del Bloque), se anula la fuerza Bloque-Tabla ( $N_1 = 0$ ); por otra parte la compresión del resorte se iguala con el peso de la Tabla ( $C = 40$ ) y la presión del Amigo sobre el Piso se vuelve la máxima,  $N_2 = 800$  (Esta es recíprocamente la fuerza que siente el Amigo en sus pies).

Hemos analizado así completamente el equilibrio del sistema global propuesto. Hemos presentado un buen número de conceptos e ideas importantes. La mayoría de estas nociones figuran sin modificaciones esenciales en problemas de equilibrio más complejos, concernientes a cuerpos "extendidos", cuyas dimensiones geométricas deben tomarse en consideración (en la "estática de cuerpos rígidos").

Cabe hacer una recomendación.

Una parte importante de su educación en el tema de la estática consiste en conseguirse cierta "intuición estática", esto es, una percepción natural de lo que es el equilibrio y las fuerzas detrás del mismo, la cual no exija demasiados razonamientos. *Igualmente importante es desterrar ideas preconcebidas falsas.*

Ahora aprovecharemos el problema de estática que hemos venido estudiando para introducir otros conceptos básicos, encaminados a facilitar aun más el análisis del equilibrio.

## 2.10. Diagramas de cuerpo libre de sistemas compuestos.

Todo sistema físico, por complejo que sea, posee su diagrama de cuerpo libre. En la sección precedente hemos resuelto el problema utilizando los DCL's de cada cuerpo individual del sistema global. Pero también podríamos haberlo resuelto empleando DCL's correspondientes a parejas o ternas de cuerpos. En esta sección explicaremos cómo obtener esta clase de DCL's, ilustrando el método para el sistema

—{Amigo, Cuerda, Bloque}, uno de los subsistemas del

sistema global.

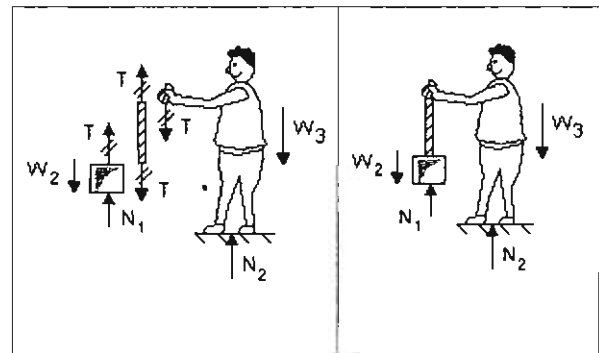


Fig. 38

El DCL de un sistema compuesto se puede visualizar como la "superposición vectorial" de los DCL's de sus cuerpos constituyentes. Integremos en una sola figura los DCL's de los tres cuerpos que forman nuestro subsistema (mire la Fig. 38a), incluyendo las tres fuerzas existentes sobre el Bloque, las dos sobre la Cuerda, y las tres sobre el Amigo.

Al sumar vectorialmente las ocho fuerzas que aparecen en la Fig. 38a, habrá unas cancelaciones triviales: las fuerzas de acción-reacción en los contactos Amigo-Cuerda y Bloque-Cuerda (fuerzas tachadas con signos "///" en esa figura) se cancelan. Por consiguiente, desde el principio no es necesario tomarlas en cuenta. El DCL del subsistema se simplifica al de la Fig. 38b.

Llegamos así a una regla sumamente importante:

(20) Al hacer el diagrama de cuerpo libre de un sistema compuesto por varios cuerpos, **excluya** las parejas de fuerzas acción-reacción que surgen en los contactos entre cuerpos **pertenecientes al sistema**.

A manera de comprobación, la ecuación de equilibrio del subsistema es, del DCL de la Fig. 38b,

$$N_1 + N_2 - W_2 - W_3 = 0$$

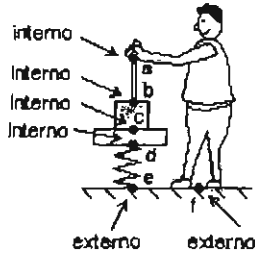
o sea

$$70 + 730 - 100 - 700 = 0 \quad \checkmark$$

Hay una manera alternativa de expresar la idea principal de esta sección. La explicaremos seguidamente, con ayuda de unos cuantos términos técnicos más.

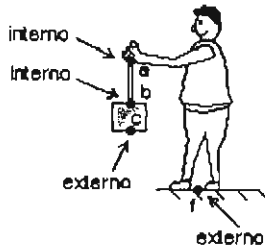
### 2.11. Fuerzas internas y externas

Para cualquier sistema o subsistema llamaremos los *contactos internos* del sistema a aquellos que tienen lugar entre los *propios* cuerpos que lo componen. Los *contactos externos* serán los que los cuerpos constituyentes del sistema hacen con los cuerpos *ajenos* al mismo. Ejemplos: en las Figs. 39 y 40 están marcados los contactos internos y externos del sistema global {Amigo, Cuerda, Bloque, Tabla, Resorte} y del subsistema {Amigo, Cuerda, Bloque}.



Sistema global

Fig. 39



Subsistema {Amigo, Cuerda, Bloque}

Fig. 40

Para el sistema global los contactos externos ocurren con el Piso, único cuerpo fuera del sistema. Para el subsistema, el contacto Bloque-Tabla es externo, puesto que la Tabla quedó, por construcción, fuera del subsistema.

Las fuerzas acción-reacción que surgen en los contactos internos de un sistema son las *fuerzas internas* del sistema. Por otra parte, las *fuerzas externas* sobre el sistema son las que experimentan sus cuerpos integrantes, como consecuencia de los cuerpos ajenos (o *externos*) al sistema.

En todo sistema existen dos clases de fuerzas externas: los pesos, debidos a la Tierra (supuestamente excluida del sistema), y las *fuerzas de contacto* que aparecen en los contactos *externos* del sistema.

En el sistema global las fuerzas internas son por lo tanto las interacciones

Resorte ↔ Tabla      Tabla ↔ Bloque

Bloque ↔ Cuerda      Cuerda ↔ Amigo

y las fuerzas externas son las fuerzas debidas a la Tierra y al Piso:

Tierra → Tabla      Tierra → Bloque

Tierra → Amigo      Piso → Resorte

Piso → Amigo

Hemos dicho con anterioridad que las fuerzas internas surgen siempre por parejas acción-reacción, cuya suma vectorial es nula, por lo que no se incluyen en el DCL de un sistema. Esta regla, dada en el cuadro (20) en la página anterior, puede enunciarse alternativamente así:

(21) El DCL de un sistema contiene exclusivamente las fuerzas **externas** sobre el sistema.

El concepto de fuerzas internas es aplicable a sistemas que consten de *dos o más* cuerpos. En el caso de un elemento *individual* no cabe usar el concepto de fuerzas internas<sup>8</sup> -todas las fuerzas sobre él son externas.

*Notemos además que el carácter interno o externo de una fuerza es relativo al sistema considerado. Una misma fuerza puede ser interna de un sistema y externa de otro.*

<sup>8</sup> Podríamos ver las fuerzas intermoleculares de un cuerpo como "fuerzas internas". Sin embargo, en la acepción usada aquí, las fuerzas internas son las que existen entre los cuerpos macroscópicos, identificables y delimitables que forman un sistema compuesto.

**Ejemplo 2.** Para calcular la compresión del resorte, C, consideremos el sistema {Tabla, Bloque} y usemos los mismos datos que antes:  $W_1 = 40$ ,  $W_2 = 100$ ,  $W_3 = 700$  y  $T = 30$ .

Para hacer el DCL de este sistema primeramente identificamos sus contactos *externos*. Son los que vemos en la Fig. 41a. Olvidémonos del contacto *interno* Tabla-Bloque; allí no debemos trazar fuerzas en el DCL.

Las fuerzas externas son los pesos  $W_1 = 40$  y  $W_2 = 100$ , y las que ejercen la cuerda y el resorte sobre el bloque y la tabla, respectivamente, que son la tensión  $T = 30$  y la compresión C a determinar. El DCL queda como en la Fig. 41b.

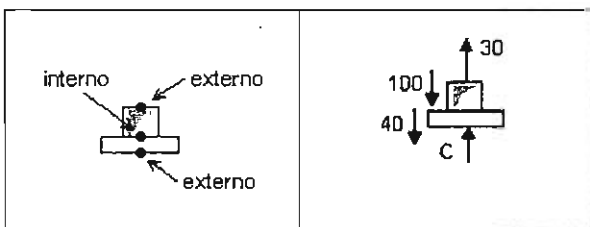


Fig. 41

De la ecuación de equilibrio,

$$C + 30 - 100 - 40 = 0$$

obtenemos  $C = 110$ , como antes.

**Ejemplo 3.** En la Fig. 42a está el DCL del sistema global. Los cuerpos externos del sistema global son la Tierra y el Piso. De hecho podemos considerar a estos dos últimos cuerpos como si fuesen uno sólo, cuyas interacciones con el sistema global serían las que vemos en la Fig. 42b.

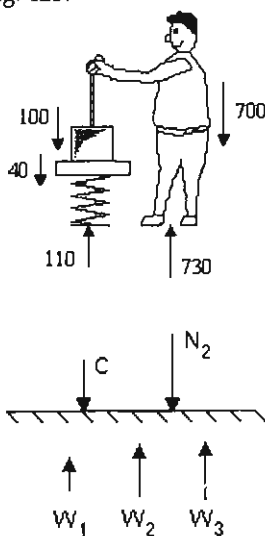


Fig. 42

He aquí la procedencia de cada fuerza de la Fig. 42b:

C es la fuerza Resorte → Piso

$N_2$  es la fuerza Amigo → Piso

$W_1, W_2, W_3$  son las fuerzas con que la Tabla, el Bloque y el Amigo atraen a la Tierra (o sean las reacciones de sus respectivos pesos).

Se verifica también la cancelación de fuerzas, como se muestra a continuación:

$$W_1 + W_2 + W_3 - C - N_2 =$$

$$\Rightarrow 40 + 100 + 700 - 110 - 730 = 0$$

**Ejemplo 4.** En la Fig. 43 se muestra el DCL del sistema {Cuerda, Bloque, Tabla, Resorte}.

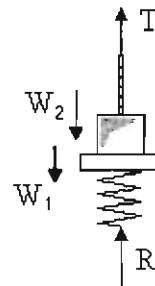


Fig. 43

Este sistema tiene solamente dos contactos externos, arriba con el Amigo y abajo con el Piso. La ecuación de equilibrio es

$$C + T - W_1 - W_2 = 0$$

En números,

$$110 + 30 - 40 - 100 = 0 \quad \checkmark$$

## 2.12. Problemas

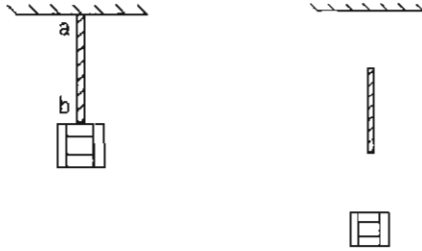
1. Defina los siguientes términos:

- Sistema físico.
- Diagrama de cuerpo libre.
- Contactos internos y externos.
- Fuerzas internas y externas.

2. Mencione las clases de fuerzas de acción por campo y de contacto que conozca.

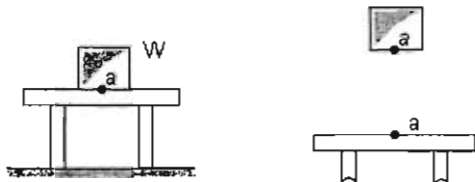
3. ¿Qué es "abrir un contacto" entre dos cuerpos y qué "ocurre" al hacerlo?

4. Una caja pende de una sog a como se muestra en la figura a la izquierda. A la derecha se ha descompuesto el conjunto en sus tres elementos: Techo, Soga y Caja. Trace allí las 4 fuerzas de valor T que aparecen entre los mismos. ¿Cuáles son los cuerpos que ponen en tensión la sog a? ¿Cuáles parejas de fuerzas son acción-reacción?



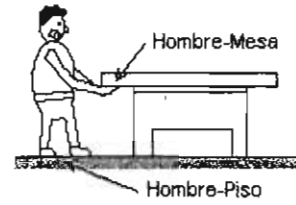
5. Una varilla recta y rígida es capaz de soportar estados de tensión y de compresión. Haga sendas figuras que muestren la varilla en cada estado. Llámeme V a la tensión y K a la compresión.

6. Un bloque de peso  $W$  descansa sobre una mesa. Abrir el contacto Bloque-Mesa en "a" y trazar la fuerza de contacto sobre cada cuerpo. ¿Cómo se llama este tipo de fuerza?  
Completar el DCL del bloque y aplicarle la ecuación de equilibrio.



7. Un niño quiere izar un veliz que pesa 200 newton. Si le aplica una fuerza de 50 newton, ¿cuánto vale la fuerza normal que el niño siente en sus pies? (Haga el DCL del niño.)

8. El hombre, que pesa 600 newton, trata de levantar (infructuosamente) una mesa fija al piso, con el fin de aliviar una comezón en el pie. La fuerza que aplica a la mesa vale 120 newton. ¿Cuánto vale la fuerza normal hombre ↔ piso antes de aplicar dicha fuerza y después de aplicarla? Explique con ayuda del DCL del hombre y de las ecuaciones de equilibrio. Haga el experimento.

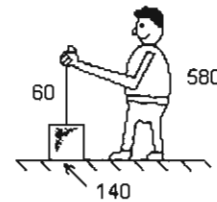


Ahora el hombre presiona sobre la mesa hacia abajo con sus manos, con una fuerza de 80 newton, con el fin de aliviar el dolor en un callo. Analizar este caso.



Resp. 600 N, 720 N; 520 N.

9. Descomponer el sistema en sus elementos mostrando todas las interacciones, a la manera de la Fig. 35 de la página II-19. Las fuerzas conocidas son, en newtons: el peso del muchacho, 580, la tensión de la cuerda, 60, y la fuerza normal bloque ↔ piso, 140. Calcular la fuerza normal muchacho ↔ piso y el peso del bloque.



Resp. 640 N; 200 N.

10. Malú Mora sube a la báscula con un bastón de peso despreciable. Digamos que Malú atrae a la Tierra con 800 newtons, y que el plato de la báscula no pesa nada. ¿Cuál es la lectura de la báscula si Malú presiona el bastón contra el plato con una fuerza de 50 newtons?

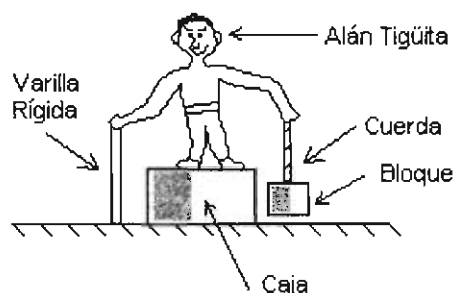
Sugerencia. Haga el DCL de los sistemas {Malú} y {Plato, Resorte}.

Resp. 800 N.

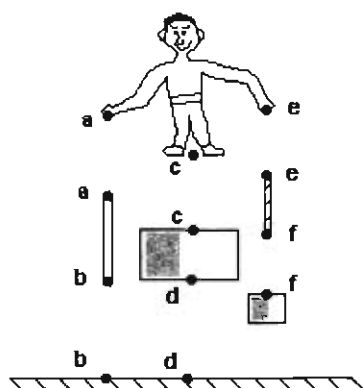


11. En la figura se muestra un sistema en reposo, compuesto por los 5 elementos denominados.

- (a) Defina el sistema global.
- (b) ¿Cuántos contactos de tipo simple hay y cuáles son? Considere los contactos con la varilla como de tipo simple, y cuente ambos pies de Alán como un sólo contacto.
- (c) Defina 4 subsistemas del sistema global.



(d) El sistema se ha descompuesto en elementos individuales y se han marcado todos los contactos con a, b, ... , f. Trace las fuerzas que aparecen en cada uno de ellos, asignándoles símbolos matemáticos apropiados. Suponga que la varilla y la cuerda son de masa insignificante.



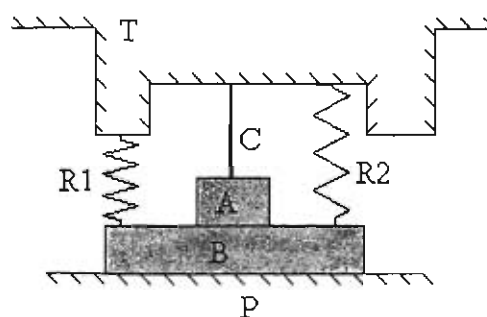
- (e) ¿Cuántas símbolos de fuerzas distintos intervienen en total? Déle valores a un número suficiente de fuerzas y calcule las restantes de las ecuaciones de equilibrio de los sistemas {Alán}, {Caja} y {Bloque}.
- (f) Considere los dos subsistemas mostrados a continuación.



-----{Varilla, Alán, Caja} -----{Caja, Cuerda, Bloque}

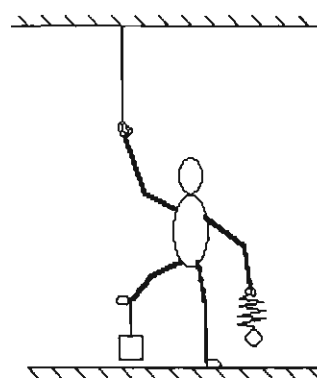
Para cada sistema señale los puntos donde hay contacto interno o contacto externo. Trace el DCL de cada subsistema.

12. En el conjunto en equilibrio mostrado en la figura abajo se distinguen dos bloques, A y B, dos resortes, R1 y R2, y una cuerda, C, apoyados en el techo T y el piso P.



El resorte R1 está comprimido y el R2 estirado. Descomponer el sistema global {A, B, C, R1, R2} en sus elementos y trazar todas las fuerzas existentes. (La tensión de la cuerda C es menor que el peso del bloque A).

13. Manuel Patiño jala una cuerda atada al techo. En su mano izquierda sostiene un resorte en cuyo extremo pende una bola. Con su pierna derecha, Manuel sostiene un bloque por medio de una cuerda.



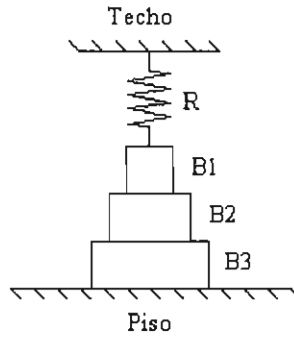
Haga el diagrama de cuerpo libre de los sistemas

- {Manuel, Cuerda inferior, Bloque}
- {Manuel, Resorte, Bola}
- {Manuel}

Para cada sistema marque los contactos internos y externos. ¿Está determinadas todas las fuerzas si se proporcionan los pesos de Manuel, el bloque y la bola?



14. En la figura se muestra un sistema compuesto por un resorte comprimido "R" y tres bloques "B1", "B2" y "B3" puestos uno encima del otro. Haga la descomposición del sistema global. ¿Cuántas fuerzas intervienen? Proporcione un número suficiente de datos y calcule las fuerzas desconocidas. Suponga que el resorte está elongado.

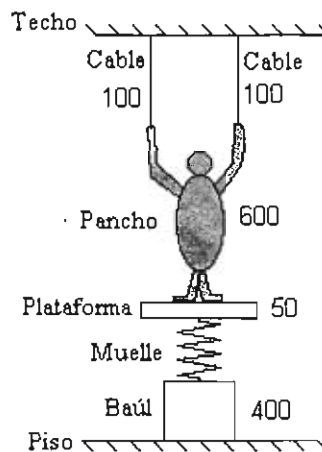


¿Cuánto debe valer la tensión del resorte para que se anule la fuerza de contacto entre los bloques B1 y B2?

15. Pancho se sostiene de dos cables jalándolos con sendas fuerzas de 100 newtons. Está parado sobre una plataforma de 50 newtons de peso, la cual descansa sobre un muelle sujeto a un baúl de 400 newtons de peso. El peso de Pancho es de 600 newtons.

Intente deducir mentalmente los valores de las siguientes fuerzas:

- La fuerza de contacto entre Pancho y la Plataforma.
- La compresión del resorte.
- La fuerza de contacto Baúl - Piso.



Resp. 400; 450; 850.

## CAPÍTULO 3

## MODELOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA. SISTEMAS DE POLEAS

### 3.1. Modelos básicos

El modelo primario de la estática consiste en despreciar el efecto deformativo de las fuerzas. Los cuerpos se suponen rígidos, sean cuales sean las fuerzas que soporten (salvo por unos colados obvios que son las cuerdas flexibles, los resortes, los fluidos, etc.).

En el diseño de un sistema estático, el análisis del equilibrio debe complementarse con el de las deformaciones y esfuerzos en los materiales usados. Pero el tema de las deformaciones pertenece a otras disciplinas como la mecánica de sólidos, la resistencia de materiales, las teorías de elasticidad y plasticidad, etc.

Otro modelo muy útil es el de *fuerza localizada*. Esta es aquella fuerza cuya acción recae en un "punto" (una región muy pequeña) denominado el *punto de aplicación* de la fuerza. Una fuerza localizada se representa matemáticamente por un vector con las siguientes propiedades:

- Magnitud
- Dirección
- Punto de aplicación

La fuerza se representa analíticamente ya sea por magnitud y dirección " $\mathbf{F} = (F \angle \theta)$ ", o bien por componentes " $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ ". Para el punto de aplicación "P" se dan sus coordenadas " $P(x_P, y_P)$ " o equivalentemente su vector de posición  $\mathbf{r}_P = (x_P, y_P)$ .

El punto de aplicación y la dirección determinan una recta denominada la *línea de acción* de la fuerza (Fig. 44).

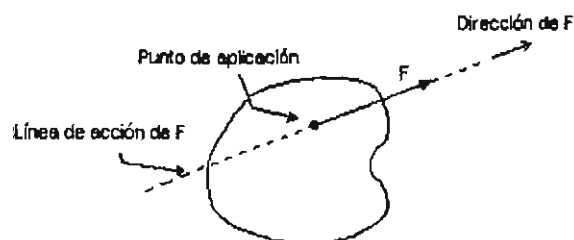


Fig. 44. Fuerza localizada "F"

Ejemplos típicos de fuerzas localizadas son:

- Las debidas a cuerdas y resortes, siempre que sus áreas de sujeción o atadura (área de su sección transversal) sean pequeñas.

- Las fuerzas de reacción que se generan en apoyos modelados como de punto, como p. ej. la reacción en un apoyo de articulación o rodillo, o en un contacto simple muy reducido.

Las fuerzas localizadas se emplean a menudo también para representar otro tipo de fuerzas llamadas distribuciones continuas de fuerza, a través del concepto de fuerza equivalente (o resultante), como explicaremos en los párrafos siguientes.

### 3.2. Distribuciones continuas de fuerza

Es evidente que algunas de las fuerzas que hemos manejado anteriormente *no son* fuerzas localizadas. Pensemos en la fuerza gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo.

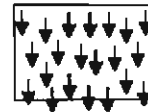


Fig. 45

Esta fuerza ejerce su acción en todos los puntos del cuerpo, cada una de cuyas moléculas experimenta su respectivo peso. En la Fig. 45 se esquematiza el conjunto de los pesos de las moléculas de un bloque.

El peso es una *distribución volúmica* continua de fuerzas. No posee un "punto" de aplicación, sino una *región de aplicación* tridimensional, que es la región espacial ocupada por el cuerpo. Hay otros dos tipos de distribuciones continuas de fuerza, que se denominan *distribución lineal*, o *superficial*, según que su región de aplicación se represente matemáticamente por una curva o una superficie.

La *distribución lineal* se aplica sobre todo a los cuerpos filiformes como cuerdas, hilos, alambres, cadenas, barras delgadas, etc. Es una fuerza que actúa continuamente a lo largo del cuerpo-filamento. Ejemplos de este tipo son:

- La fuerza magnética que experimenta un hilo conductor de corriente eléctrica en el seno de un campo magnético.
- La fuerza de una pila de sacos de arena sobre una viga delgada (Fig. 46a).
- La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre un cable colgante (Fig. 46b).

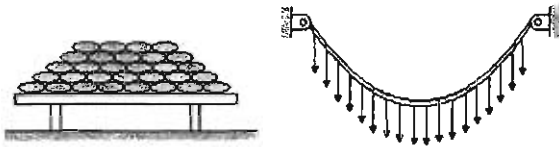


Fig. 46

La *distribución superficial* de fuerzas actúa, como se adivina, a través de una región superficial del cuerpo (generalmente la superficie exterior). Típicamente se trata de fuerzas de presión, como en los dos ejemplos siguientes.

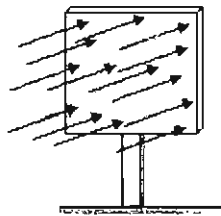


Fig. 47. Fuerza de presión del viento contra un anuncio rectangular.

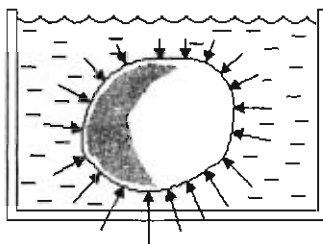


Fig. 48. Fuerza de presión hidrostática sobre un cuerpo sumergido en un líquido.

Una especie de distribución superficial muy común es la que surge en el contacto simple extendido, como por ejemplo el de un bloque que descansa sobre una mesa o piso (Véase la Fig. 49). Es la fuerza que ya conocemos con el nombre de "normal". La base entera del bloque está sometida a esta fuerza.

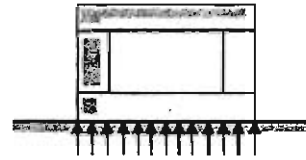


Fig. 49. Fuerza normal de contacto N.

La distribución de fuerza normal en este caso es muy simple: cada milímetro cuadrado (digamos) del bloque capta la misma fuerza de soporte, es decir, la distribución es *uniforme*. Las distribuciones superficiales se describen matemáticamente por una *densidad de fuerza* que tiene unidades de fuerza entre área. Para el bloque presente, supongamos que pese 100 newton y que su base sea un cuadrado de 100 mm de lado (área 10,000 mm<sup>2</sup>). Entonces la densidad de fuerza normal, expresada en newtons por milímetro cuadrado, sería

$$\frac{100 \text{ N}}{10000 \text{ mm}^2} = 0.01 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Podemos imaginar esta distribución continua como un conjunto de 10,000 fuerzillas o "fuerzas elementales", cada una de 0.01 newton, repartidas uniformemente sobre la base.

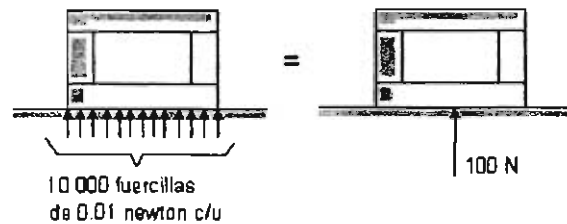


Fig. 50

En este módulo manejaremos las distribuciones de fuerza a través del concepto de *resultante* o *equivalente*. La idea de equivalente es simple: se sustituye el conjunto numeroso de fuerzas elementales por una única fuerza *localizada*, denominada la *resultante* o *equivalente* de la distribución, cuyo efecto es el mismo que el que produce la distribución dada.

En el caso del bloque de la Fig. 50, se intuye que la distribución de fuerzas normales elementales tiene por resultante o equivalente una fuerza de 100 N, que actúa en el centro de la base. De hecho es la equivalente la que hemos venido manejando en los DCL's de cuerpos en contacto simple. En la sección siguiente daremos una definición formal de esta importante y útil noción.

### 3.3. Fuerza resultante o equivalente

Toda distribución continua de fuerza, sea lineal, superficial o volúmica, se puede sustituir por una sólo fuerza localizada<sup>9</sup>, denominada la *fuerza resultante* o *equivalente* de la distribución dada, sin que se perturbe el estado de equilibrio.

El valor de la *fuerza equivalente* o *resultante* de una distribución (discreta o continua) de fuerzas es igual a la **fuerza total** de la distribución, es decir, a la suma vectorial de las fuerzas elementales que componen la distribución. La equivalente posee un **punto de aplicación** bien definido, cuya ubicación puede calcularse imponiendo la condición de que la fuerza equivalente "produzca el mismo efecto estático" (no altere las ecuaciones de equilibrio) que la distribución de fuerzas dada. No daremos en este módulo el método para calcular el punto de aplicación de la equivalente.

Un caso muy frecuente de aplicación de este concepto consiste en trazar el peso de un objeto como una fuerza *localizada* en el "centro de gravedad" del objeto. El peso es una distribución continua de fuerzas cuya equivalente hemos denotado antes con la letra básica "W" (Fig. 51).

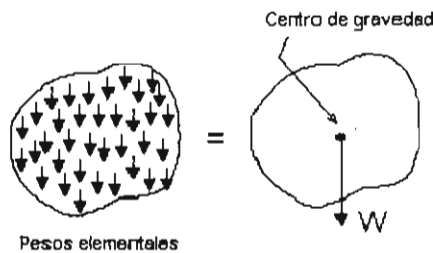


Fig. 51

### 3.4. Principio de Arquímedes

Usaremos este familiar principio para ilustrar la gran simplicidad que nos ofrece el concepto de equivalente en relación con el trazado de los DCL's.

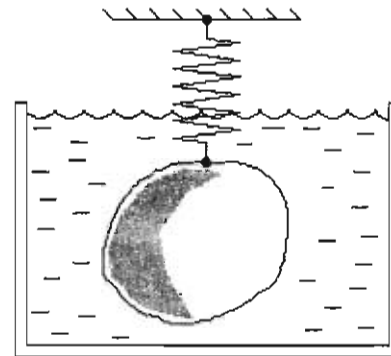
El principio de Arquímedes establece que:

*Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido experimenta una fuerza ascensional llamada empuje, cuyo valor es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo.*

Este principio se refiere de hecho a una fuerza equivalente. Lo explicaremos resolviendo el problema ilustrado en la Fig. 52. Se trata de un "papoide" homogéneo de masa 3 kg y volumen  $10^{-3} \text{ m}^3$  (igual al

volumen de un cubo de 100 mm de lado o sea un litro), sumergido enteramente en agua y suspendido de un resorte (en funciones de "dinamómetro" o medidor de fuerzas).

Se desea calcular el "peso aparente" del cuerpo, esto es, la fuerza que marca el dinamómetro (misma cosa que la tensión del resorte).



(Cuerpo sumergido)	
Tierra	W
Resorte	R
Líquido	E

Fig. 52

Observe el recuadro junto a la Fig. 52. En la parte superior está el nombre del sistema considerado, esto es, el "cuerpo sumergido". Debajo se relacionan los cuerpos que ejercen fuerzas sobre el sistema, junto con los símbolos adoptados para dichas fuerzas. Vemos allí que el cuerpo sumergido sufre fuerzas debidas a la Tierra (el peso W) y a los cuerpos que están en contacto con él, que son el Resorte (tensión R) y el Líquido (empuje E). El símbolo E denota la fuerza *equivalente* de la distribución superficial de fuerzas debida al Líquido, que no es otra cosa que la presión hidrostática que oprime al cuerpo por todos lados. La presión aumenta con la profundidad y es en todas partes localmente perpendicular a la superficie del cuerpo, como se indica en la Fig. 53.

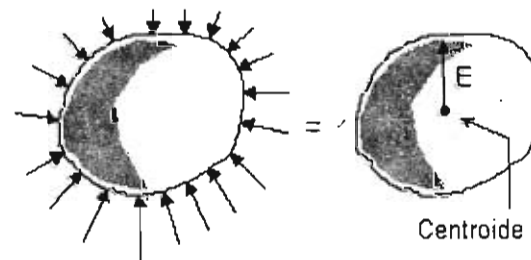


Fig. 53

<sup>9</sup> En general junto con un "par", como se ve en la estática del cuerpo rígido.

Las componentes horizontales de las fuerzas de presión elementales se anulan, y las verticales dan como resultado una fuerza  $E$  hacia arriba, que actúa en el "céntrouide" del cuerpo (centro de gravedad de un cuerpo homogéneo en un campo gravitatorio uniforme). Ahora podemos hacer un DCL muy simple del cuerpo sumergido: es el que vemos en la Fig. 54.

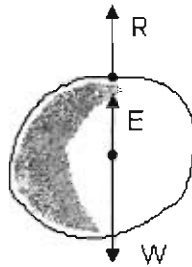


Fig. 54

La ecuación de equilibrio es

$$R + E - W = 0$$

de donde

$$R = W - E$$

Como vemos, la fuerza  $R$  que marca el resorte es menor que el peso  $W$ . Calculemos el valor numérico.

El peso del cuerpo es

$$W = 3 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 29.4 \text{ N}$$

Por otra parte, la densidad del agua es

$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , por lo que el peso del líquido desalojado es

$$W_d = m g = \rho V g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.8 \text{ N} = E$$

(Se usó aquí la relación  $m = \rho V$ ).

Por lo tanto,

$$R = W - E = 29.4 \text{ N} - 9.8 \text{ N} = 19.6 \text{ N}$$

### 3.5. El modelo de "partícula"

En la dinámica se entiende por *partícula* un cuerpo cuyas dimensiones geométricas son tan pequeñas, en comparación con la región espacial en

que se desarrolla su movimiento, que la posición espacial del cuerpo-partícula corresponde prácticamente a tan sólo un punto del espacio. Así por ejemplo, un barco puede considerarse una partícula cuando el objetivo es describir su curso de navegación en alta mar. Obviamente no cabría hacerlo así cuando lo que se desea es describir sus maniobras cerca de un muelle.

En la estática, en cambio, decimos que tratamos a un cuerpo como *partícula* cuando reunimos en un sólo punto todas las fuerzas que lo solicitan. Al hacerlo así estamos renunciando a obtener cualquier información relacionada con los puntos de aplicación de las fuerzas implicadas, para lo cual de todas formas sería menester aplicar los principios más generales de la estática del cuerpo rígido. Típicamente el cuerpo-partícula es diminuto, de suerte que el hecho de manejar las fuerzas como si concudiesen en un punto no afecta apreciablemente sus valores.

Sin embargo, dado que la mayoría de las veces es preciso conocer dichos puntos de aplicación para poder calcular las fuerzas desconocidas y, de mayor importancia, para comprender cabalmente el comportamiento físico del sistema, la estática de partículas aborda unos tipos de problemas de equilibrio muy particulares y restringidos, de los cuales el presente módulo proporciona una muestra representativa.

En el DCL de un cuerpo tomado como partícula, el cuerpo puede representarse por un punto, lo cual ayuda a simplificar el DCL y a calcular las componentes de las fuerzas. Ejemplo de ello es el collarín en equilibrio dibujado en la Fig. 55, cuyo DCL es la Fig. 56.

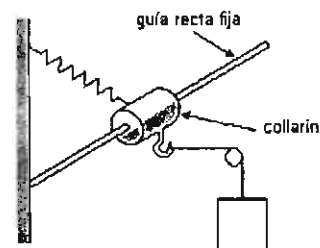
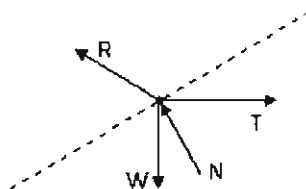


Fig. 55



(Collarín)	
Tierra	W
Cuerda	T
Resorte	R
Guía recta	N

Fig. 56

En todos los diagramas de cuerpo libre de bloques que hemos presentado podríamos haber representado a los bloques por puntos, como se ilustra en la Fig. 57.

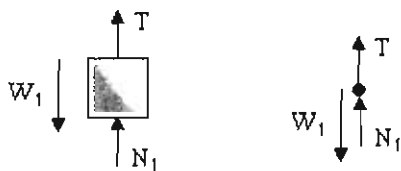


Fig. 57

En todos ellos hemos podido tratarlos como partículas puesto que sus dimensiones geométricas no entran en el cálculo de las fuerzas.

En muchos casos la ubicación de los puntos de aplicación es un factor determinante. Estos casos se tratan en la estática del cuerpo rígido. No obstante, convendrá dar aquí un ejemplo de los problemas implicados. Eche un vistazo a la Fig. 58a.

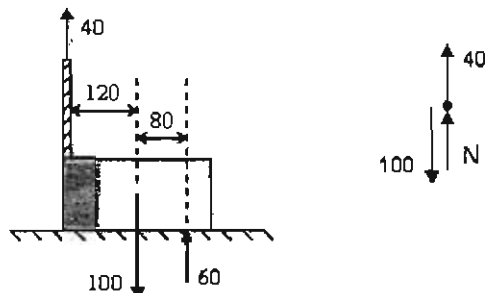


Fig. 58

Un bloque que pesa 100 newton se jala por una orilla hacia arriba mediante una cuerda a la que se aplica una tensión de 40 newton. En el DCL de la Fig. 58a usamos dos fuerzas equivalentes: una es el peso de

100 newton, aplicado en el centroide del bloque; la otra es la fuerza normal de 60 newton, cuyo punto de aplicación ya no es el centro de la base, sino que está desplazado hacia la derecha como se ve. Suponiendo que el lado horizontal frontal del bloque mide 240 mm, resulta que la normal actúa a 80 mm de la línea central vertical (se verifica la relación  $40 \times 120 = 60 \times 80$ ). Si la tensión se aumenta a 50, la normal se concentra en la orilla derecha. Si se sigue aumentando la tensión, el bloque empieza a deslizarse o rotar sobre esta orilla. Este análisis corresponde a la estática del cuerpo rígido.

Con los métodos de la estática de partículas, haríamos un diagrama como el de la Fig. 58b, en que las tres fuerzas concurren en un punto. Dado el peso de 100 y la tensión de 40, calcularíamos trivialmente que  $N = 60$ . Evidentemente, aquí el modelo de partícula no da una idea cabal del fenómeno, pues no se logra captar el fenómeno de deslizamiento o rotación del bloque sobre su esquina derecha.

### 3.6. Fuerzas de tensión en cables

Existe un modo de definir un sistema físico, alternativo o complementario al modo de enumeración o "lista de cuerpos" introducido en el capítulo 2. He aquí cómo: se especifica una superficie matemática fija y cerrada, y simplemente se estipula que el sistema es toda la materia que queda encerrada en dicha superficie. La Fig. 59a lo muestra esquemáticamente. El sistema comprende el cuerpo entero A y las partes estilizadas de los cuerpos B y C. La superficie que delimita al sistema se denomina la *frontera sistémica*.

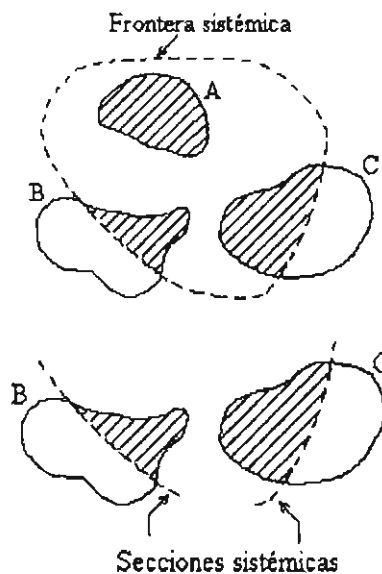
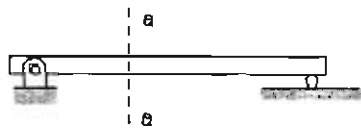


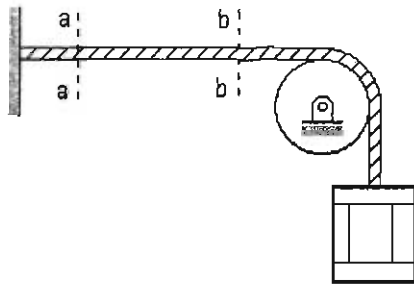
Fig. 59

Los segmentos de la frontera sistémica que intersecan a los cuerpos se llaman "secciones imaginarias (o sistémicas)" (Fig. 59b). Como vemos, este modo de definición es útil cuando deseamos que el sistema comprenda parte de un cuerpo.

Muchas veces no es necesario especificar por completo la frontera del sistema. Es válido limitar el sistema mediante una o más secciones sistémicas, sin que por ello se pierda precisión sobre la constitución del sistema. Por ejemplo, observe cómo se han definido los sistemas de las Figs. 60a,b.



Sistema = {porción de la barra a la izquierda de la sección a-a}



Sistema = {segmento de cuerda comprendido entre las secciones a-a y b-b}

Fig. 60

Las secciones sistémicas son de gran utilidad para estudiar las fuerzas existentes en el seno de un material.

### 3.7. Tensión simple, más en detalle

Ya conocemos el DCL de una cuerda o cable sometido a tensión simple, reproducido en la Fig. 61.

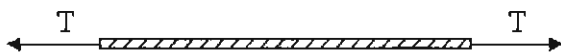
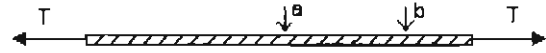


Fig. 61

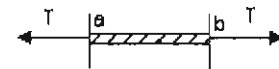
Con el fin de familiarizarnos con el uso de las secciones sistémicas y los sistemas físicos definidos por ellas, demostraremos el siguiente teorema:

Si un cable se halla bajo tensión  $T$ , entonces cualquier segmento del mismo se halla también bajo la misma tensión  $T$ .

En términos gráficos, el teorema dice que el DCL de un segmento arbitrario a-b del cable es similar al del cable completo (Fig. 62):



DCL del cable completo



DCL del segmento a-b

Fig. 62

El segmento a-b se obtuvo haciendo secciones sistémicas del cable en los puntos "a" y "b".

Veamos primeramente qué sucede al efectuar una sola sección a través del punto "a". Esta sección divide al cable en dos tramos o subsistemas que designaremos  $\{e_1-a\}$  y  $\{a-e_2\}$ , donde  $e_1$  y  $e_2$  son los extremos izquierdo y derecho, respectivamente. Diremos con esto que estamos "abriendo" el cable en el punto "a" (Fig. 63).

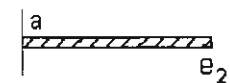
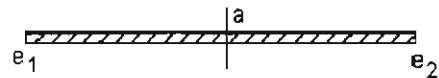
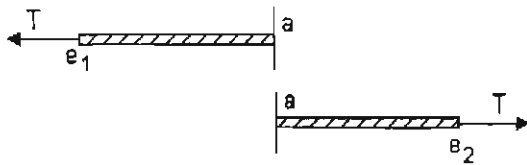


Fig. 63

Vayamos añadiendo las fuerzas sobre ambos segmentos, tomando en consideración dos cosas:

1. El cable está sometido a tensión  $T$ .

Ello implica que en los extremos  $e_1$  y  $e_2$  existen fuerzas tensoras de valor  $T$  (Fig. 64). Estas fuerzas son debidas a agentes externos (cuerpos) no mostrados en la figura.

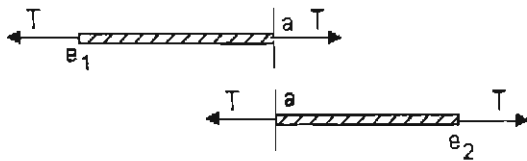


(No son DCL's)

Fig. 64

2. Cada segmento se halla separadamente en equilibrio.

Por consiguiente, en el extremo "a" de cada segmento debe haber una fuerza que produzca el equilibrio del segmento, o sea una fuerza de valor T. Llegamos así a los DCL's completos de la Fig. 65.



(Sí son DCL's)

Fig. 65

Para terminar la demostración del teorema habría que repetir el procedimiento para el segmento {a, e<sub>2</sub>}, partiéndolo en los subsegmentos {a, b} y {b, e<sub>2</sub>}. Se llegaría a la Fig. 66.

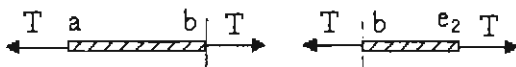


Fig. 66. DCL del segmento a-b

Se deduce de la Fig. 66 que el segmento a-b está bajo tensión T, QED.

Lea las siguientes líneas y compare con lo que discutimos en el capítulo 1:

Al abrir el cable en el punto "a" aparece allí una pareja de fuerzas acción-reacción:

- En el extremo "a" del segmento izquierdo {e<sub>1</sub>-a} actúa una fuerza T *debida al segmento derecho* {a-e<sub>2</sub>} (Véase la Fig. 65).

- En el extremo "a" del segmento derecho {a-e<sub>2</sub>} actúa una fuerza T *debida al segmento izquierdo* {e<sub>1</sub>-a} (Fig. 65).

Lo análogo podemos decir con respecto al punto "b" o cualquier otro punto del cable.

Con un significado obvio, se deduce entonces que

(22) Al practicar a un cable una sección imaginaria en uno cualquiera de sus puntos, brota allí la fuerza de tensión sobre cada uno de los dos segmentos de cable producidos.

### 3.8. Tensión como función de punto

Cuando un cable soporta cargas concentradas en algunos de sus puntos, o bien distribuidas continuamente a todo lo largo del mismo, ya no podemos decir que su estado de tensión es *simple*. En estos casos es útil definir la tensión como función de la posición a lo largo del cable.

Nos limitaremos al caso de fuerzas concentradas. Estudiaremos el cable cargado tal como vemos en la Fig. 67 (fuerzas en unidades arbitrarias).

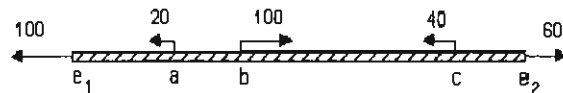


Fig. 67

En los puntos a, b y c existen fuerzas aplicadas longitudinalmente al cable.

Para empezar observemos que el cable está en equilibrio, ya que la fuerza total hacia la izquierda, 160, es la misma que hacia la derecha. Hagamos ahora una sección sistémica a través de algún punto P situado entre el extremo e<sub>1</sub> y el punto "a". Resultan dos subsistemas {e<sub>1</sub>-P} y {P-e<sub>2</sub>} cuyos DCL's se muestran en la Fig. 68.

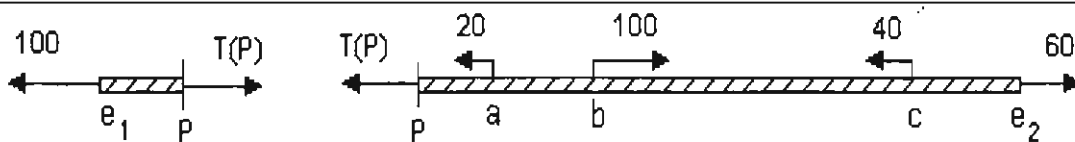


Fig. 68



La interacción que brota en el punto P entre ambos subsistemas es lo que definimos como la **tensión en el punto P**, denotada con  $T(P)$ . Su valor se encuentra imponiendo la condición de equilibrio a *cualquiera* de ambos segmentos.

Está claro que  $T(P) = 100$ , y que este valor es el mismo para todo punto P situado justamente después de  $e_1$  y antes de "a".

Procediendo similarmente hallamos la tensión en los puntos interiores de los intervalos abiertos (a, b), (b, c) y (c,  $e_2$ ). En la Fig. 69 está el caso en que  $P \in (b, c)$ .

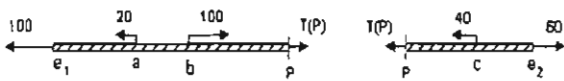


Fig. 69

Se encuentra que  $T(P) = 20$  si  $P \in (b, c)$ . Puede calcular fácilmente el valor de la tensión en los demás intervalos.

La tensión no está definida en los puntos de aplicación de las fuerzas, o sean a, b y c. En estos puntos sufre discontinuidades. Adicionalmente,

(23) La tensión en el extremo de una cuerda se define igual a la fuerza (necesariamente externa) aplicada allí.

De aquí tenemos que  $T(e_1) = 100$  y  $T(e_2) = 60$ . La lista completa de valores es:

$T(P) = 100$	para	$P \in [e_1, a)$
$T(P) = 120$	para	$P \in (a, b)$
$T(P) = 20$	para	$P \in (b, c)$
$T(P) = 60$	para	$P \in (c, e_2]$

La Fig. 70 es el gráfico de la variación de la tensión a lo largo del cable.

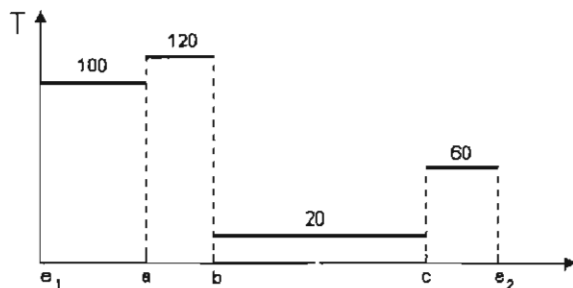


Fig. 70

Un poco más adelante usaremos este resultado:

(24) La tensión de un cable aumenta o disminuye al pasar por puntos donde existan fuerzas aplicadas **paralelamente** al cable.

### 3.9. Un ejemplo de variación continua de la tensión.

Considere un cable cuyo peso no se desprecia, fijo en su extremo superior E (mire la Fig. 71a). Por (23), la tensión en ese extremo debe ser igual al peso total del cable, como se deduce examinando el DCL del cable completo en la Fig. 71b.

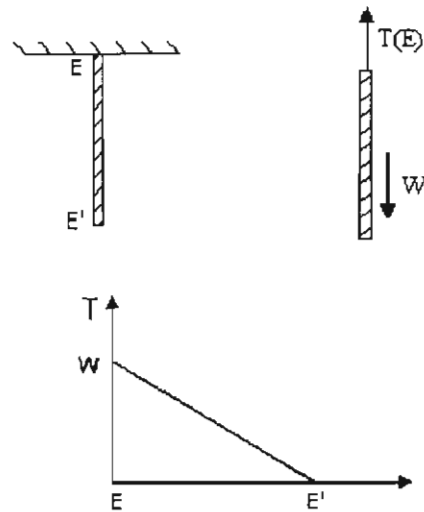


Fig. 71

Por otra parte, también por (23), la tensión en el extremo libre  $E'$  vale cero, puesto que no hay fuerza externa aplicada allí. Finalmente, si el cable es homogéneo, la tensión varía *linealmente* entre ambos extremos E y  $E'$ , desde su valor  $T(E) = W$  en el punto E hasta el valor  $T(E') = 0$  en el punto  $E'$  (Fig. 71c). En este ejemplo el cable experimenta fuerzas aplicadas continua y paralelamente en toda su longitud.

### 3.10\*. Acción de superficie lisa sobre cuerda, y viceversa.

Este tema nos permitirá resolver los dispositivos a base de poleas. Si está escaso de tiempo puede pasar por alto la discusión que presentaremos en esta sección. Pero lea los cuadros (25), (26) y (27).

Consideremos la situación representada en la Fig. 72: se tiende una cuerda sobre una superficie lisa y fija; luego se jala de los extremos  $e_1$  y  $e_2$  de la cuerda, de suerte que se genere sobre la superficie una presión a lo largo del arco de contacto a-b.

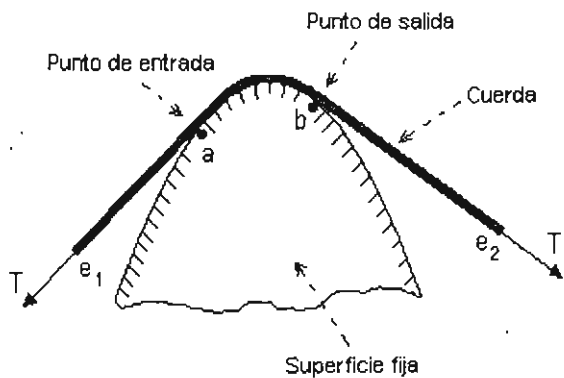
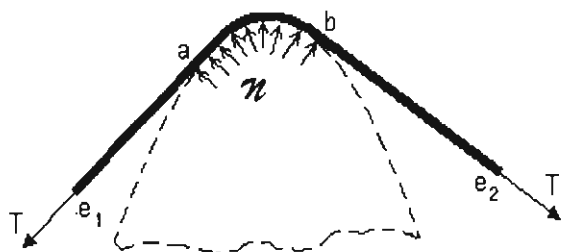


Fig. 72

Favor de aceptar sin demostración este teorema, base de toda la discusión:

Si la superficie es lisa (es decir, no hay fricción) entonces la cuerda se mantiene en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas iguales (de valor T) en sus extremos, junto con la fuerza de apoyo proporcionada por la superficie.

Examinemos el diagrama de cuerpo libre de la cuerda. Suponiendo que la cuerda no tiene peso, solamente hay que identificar sus contactos. Son los que se muestran en el recuadro de la Fig. 73.



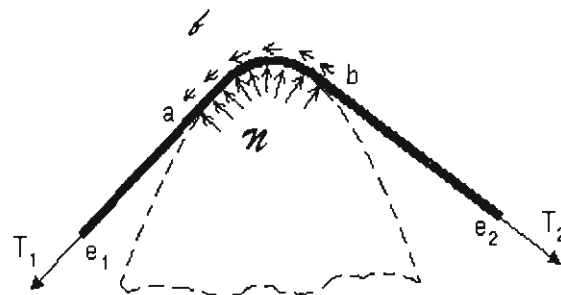
{Cuerda e <sub>1</sub> -e <sub>2</sub> }	
Agente externo en e <sub>1</sub>	T
Agente externo en e <sub>2</sub>	T
Superficie lisa en a-b	N

Fig. 73. DCL de la cuerda.

La fuerza sobre la cuerda, debida a la superficie, es una distribución lineal continua de fuerzas normales, simbolizada por N. Las fuerzas elementales de esta distribución son perpendiculares a la cuerda en todos los puntos del arco a-b.

Ahora bien, ¿cómo se modificaría el DCL si existiera fricción entre la cuerda y la superficie (es

decir, si la superficie fuera áspera)? Pues habría que añadir otra distribución lineal de fuerzas de fricción "f" a lo largo del arco a-b, tal como vemos en la Fig. 74.



{Cuerda e <sub>1</sub> -e <sub>2</sub> }	
Agente externo en e <sub>1</sub>	T <sub>1</sub>
Agente externo en e <sub>2</sub>	T <sub>2</sub>
Superficie áspera en a-b	N, f

Fig. 74

Hemos trazado las fuerzas elementales de fricción hacia la izquierda, bajo el supuesto que la cuerda tiende a moverse hacia la derecha.

Note esta diferencia entre el recuadro anterior y el actual: las tensiones en los extremos ya no son iguales. La justificación está en un resultado anterior (Cuadro (24), pág. 34), que reescribiremos aquí en estos términos:

(25) La tensión a lo largo de una cuerda varía si en puntos interiores de la cuerda existen fuerzas aplicadas paralelamente a la misma.

Precisamente las fuerzas de fricción aparecen paralelamente a la cuerda, y producen por tanto una variación (continua) de la tensión, desde el valor T<sub>1</sub> en el punto de entrada "a", hasta el valor T<sub>2</sub> en el punto de salida "b".

Hasta aquí lo referente a las fuerzas sobre la cuerda debidas a la superficie fija sobre la que se apoya. Para uso futuro, guardemos este resultado:

(26) Al pasar una cuerda por superficies, poleas, anillos, pernos, etc. lisos, la tensión de la cuerda no se altera.

ACCIÓN DE CUERDA SOBRE POLEA.

En esta sección vamos a cambiar el punto de vista: ahora nos interesa examinar las fuerzas que la *cuerda* ejerce sobre la *superficie* en que está apoyada. Como "superficie lisa" tomaremos una polea fija y lisa, con el fin de aplicar los resultados a los sistemas de poleas. Es importante que tenga muy en claro los diversos sistemas que iremos definiendo.

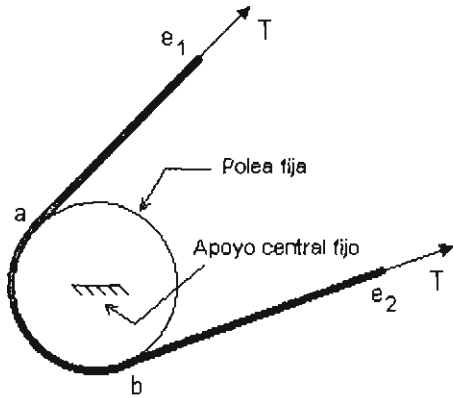


Fig. 75. (No es DCL)

Mire la Fig. 75. Suponga que la polea está fija en su centro a un apoyo fijo masivo (p. ej. una pared). Se pasa por su periferia acanalada una cuerda que se pone en tensión T como se muestra.

El sistema (Polea, Cable completo  $e_1-e_2$ ) está en equilibrio bajo la pareja de fuerzas T en  $e_1$  y  $e_2$ , el peso de la polea, y otra fuerza debida al apoyo central fijo.

Enfoquemos inicialmente la interacción Cuerda ↔ Polea. Ya conocemos cómo es la acción Polea → Cuerda (Fig. 76). De la tercera ley de Newton se sigue que la reacción Cuerda → Polea es exactamente la misma distribución de fuerzas normales, pero con las direcciones invertidas, como vemos en la Fig. 77.

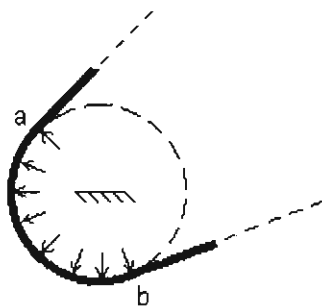


Fig. 76. Fuerzas Polea → Cuerda

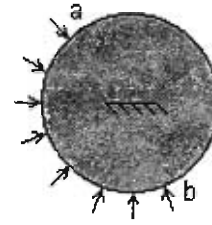
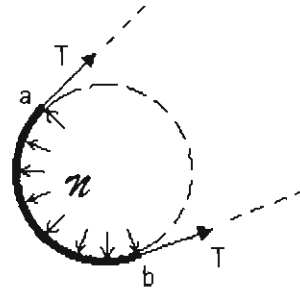


Fig. 77. Fuerzas Cuerda → Polea

Ahora bien, al trazar el DCL de la Polea sería muy engorroso tener que dibujar la distribución de fuerzas indicada en la Fig. 77. Para simplificarla echamos mano del concepto de fuerza resultante. La cuestión es: ¿no habría manera de trazar, en lugar de la distribución mencionada, alguna fuerza localizada que produjera el mismo efecto estático que toda la distribución? Sí hay manera, pero habrá que usar *dos* fuerzas localizadas.

Nuestro plan será obtener primero la fuerza equivalente de la distribución de la Fig. 76. Luego la invertiremos y tendremos la que nos interesa, la que corresponde a la distribución de la Fig. 77.

Consideremos el sistema {Segmento de cuerda a-b}, o sea el pedazo de cuerda que está en contacto con la polea. Lo obtenemos practicando sendas secciones sistémicas de la cuerda en los puntos "a" y "b". Recordemos que al abrir la cuerda en los puntos "a" y "b" debe figurar allí la fuerza de tensión de la cuerda; de ahí el DCL mostrado en la Fig. 78.



[Segmento de cuerda a-b]	
Segmento a-e <sub>1</sub>	T
Segmento b-e <sub>2</sub>	T
Polea	N

Fig. 78. DCL del sistema {Segmento de cuerda a-b}

En vista de que el sistema {Segmento de cuerda a-b} está en equilibrio, la distribución *N* debe compensar (cancelar) las fuerzas T en "a" y "b", es decir, *N* debe ser equivalente a estas dos fuerzas T, pero invertidas (Fig. 79).

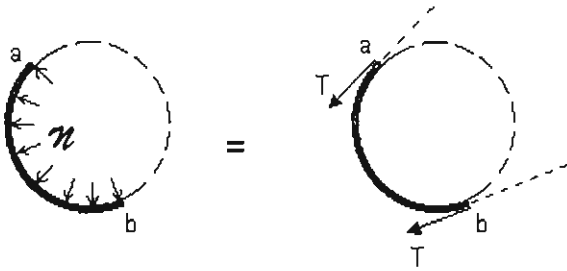


Fig. 79. Acción Polea → Cuerda.

Compruébelo poniendo en la Fig. 78 en lugar de la distribución *n* las dos fuerzas T tal como están en la Fig. 79. Obtendrá un DCL en el que el equilibrio del sistema es evidente.

Según el plan, simplemente invertimos las fuerzas de la Fig. 79 para obtener lo que deseamos:

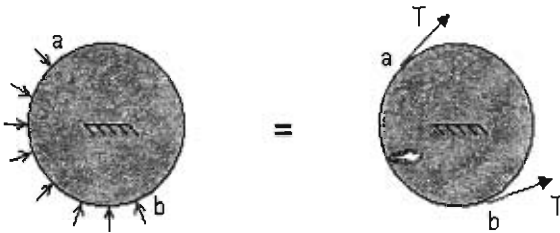


Fig. 80. Acción Cuerda → Polea.

En conclusión,

(27) Una cuerda bajo tensión T, que pasa por el canal periférico de una polea lisa, produce sobre ésta una acción equivalente a dos fuerzas de magnitudes iguales a T, aplicadas tangencialmente a la polea en los puntos donde la cuerda deja de hacer contacto con aquella.

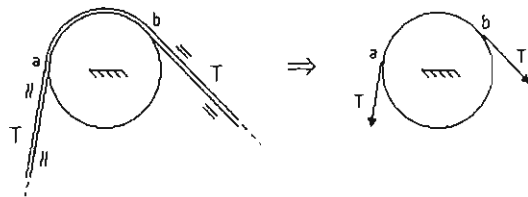


Fig. 81

### 3.11. Sistemas de poleas. Ejemplos

**Ejemplo 5.** Suponer que todas las poleas son lisas y de masa despreciable. Calcular el peso W que equilibra al sistema.

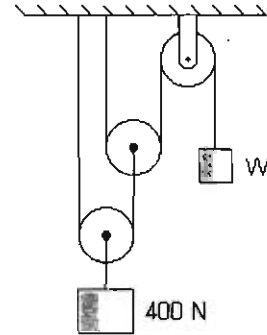


Fig. 82

He aquí dos buenos tips:

- Dé nombre a cada cuerpo relevante del sistema.
- Cunte las cuerdas existentes en el sistema. Numérelas según 1, 2, 3, ..., etc. y designe las tensiones respectivas con  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , etc.

En la Fig. 82 tenemos tres cuerdas (1, 2 y 3), dos poleas móviles (A y B) y una polea fija (C). Conviene marcar los tramos de cuerda a ambos lados de cada polea, como se hace en la Fig. 83.

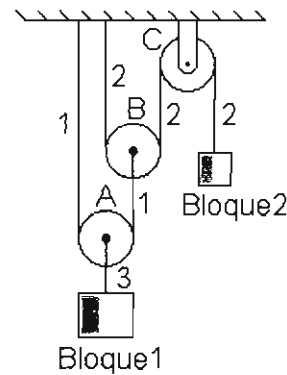


Fig. 83

En general no es necesario hacer los DCL's de las poleas fijas, a menos que se desee calcular las reacciones en sus soportes centrales, así que excluirémos de consideración la polea C.

Los DCL's de los bloques son inmediatos. En

cuanto a las poleas móviles, observe en la Fig. 84 cómo actúan las cuerdas que las bordean, de acuerdo con el resultado del cuadro (27) de la página precedente.

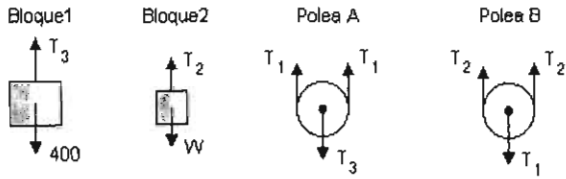


Fig. 84

Las ecuaciones de equilibrio son

$$T_3 = 400 \quad T_2 = W$$

$$2T_1 = T_3 \quad 2T_2 = T_1$$

de donde obtenemos que  $W = \frac{1}{4}(400) = 100$ .

**Ejemplo 6.** ¿Qué valor del peso  $W$  equilibra el sistema mostrado en la Fig. 85? Suponer que todas las poleas son lisas y de peso 50 N.

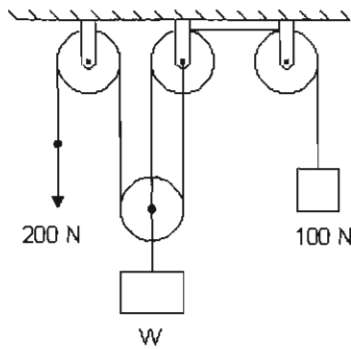


Fig. 85

Empecemos por asignar nombres y marcar los diversos tramos de cuerdas, como vemos en la Fig. 86:

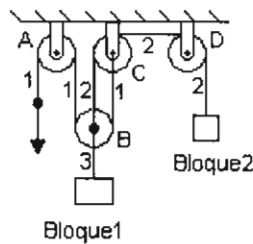


Fig. 86

(Aclaración: en el centro de la polea B se anudan las

cuerdas 2 y 3).

Excluyendo las poleas fijas, tenemos los siguientes DCL's:

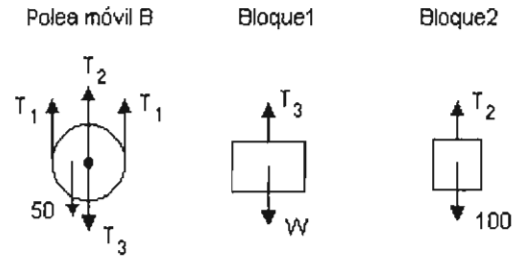


Fig. 87

La fuerza de 50 N en el primero de estos DCL's es el peso de la polea. A propósito, aunque las fuerzas de 50 y  $T_3$  sobre la polea son colineales, por claridad conviene trazarlas con cierta separación entre ellas.

Las ecuaciones de equilibrio son

$$T_2 + 2T_1 - 50 - T_3 = 0$$

$$T_3 = W$$

$$T_2 = 100$$

Notando que la tensión de la cuerda 1 es igual a la fuerza de 200 N aplicada en su extremo, hallamos

$$W = 450 \text{ N (en newtons)}$$

**Ejemplo 7.** Determinar la fuerza con que debe jalar la cuerda el obrero para sostenerse a sí mismo. El obrero pesa 700 N y el andamio 100 N. Suponer poleas ideales (lisas, masa nula).

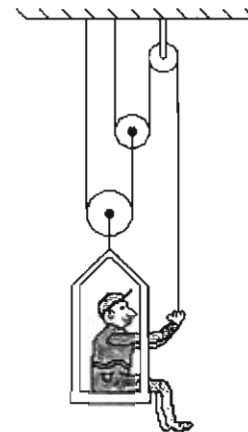


Fig. 88

Nombres de cuerdas y poleas en la Fig. 89. Haremos los DCL's de los sistemas {Polea A}, {Polea B} y {Obrero, Andamio}. Los dos primeros son inmediatos (Fig. 90). Con respecto al tercero mire el recuadro correspondiente junto a la Fig. 91.

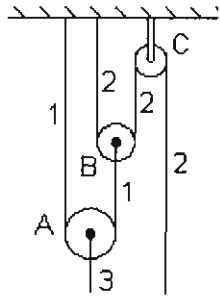


Fig. 89

Advierta que el contacto Obrero-Andamio es interno al sistema, por lo que la interacción Obrero ↔ Andamio allí (fuerza de tipo normal) no aparece en el DCL.

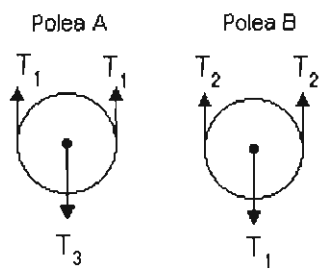
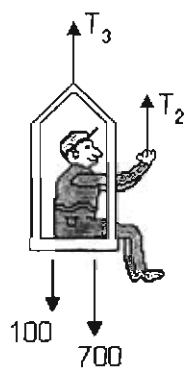


Fig. 90



{Obrero, Andamio}	
Tierra	100, 700
Cuerda 2	T <sub>2</sub>
Cuerda 3	T <sub>3</sub>

Fig. 91

Ecuaciones de equilibrio:

$$2T_1 = T_3$$

$$2T_2 = T_1$$

$$T_2 + T_3 = 100 + 700$$

La fuerza con que se soporta el Obrero, o sea T<sub>2</sub>, resulta igual a

$$T_2 = \frac{1}{5}(100 + 700) = 160$$

$$\Rightarrow T_1 = 320 \quad T_3 = 640$$

Aprovechemos este problema para introducir una regla útil:

(28) Para poder calcular una fuerza debemos definir un sistema en el que esta fuerza sea **externa**, de modo que aparezca en su DCL.

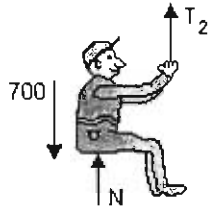
Para ilustrar esta regla, supongamos que deseamos calcular la interacción Obrero-Andamio. No podemos valer del sistema {Obrero, Andamio} ya que la fuerza a calcular es *interna* a ese sistema (Mire en la Fig. 92 los tres contactos existentes).

Podemos usar cualquiera de los dos sistemas simples {Obrero} o {Andamio}, cuyos DCL's son las Figs. 93 y 94, respectivamente.



Fig. 92

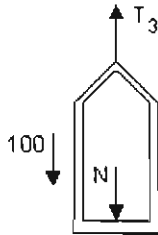
El sistema {Obrero} tiene contacto solamente con la Cuerda 2 y con el Andamio.



{Obrero}	
Tierra	700
Cuerda 2	$T_2$
Andamio	$N$

Fig. 93

Por otra parte, el sistema {Andamio} tiene contacto solamente con la Cuerda 3 y con el Obrero.



{Andamio}	
Tierra	100
Cuerda 3	$T_3$
Obrero	$N$

Fig. 94

Las ecuaciones de equilibrio de {Obrero} y {Andamio} son respectivamente

$$T_2 + N = 700$$

$$T_3 = N + 100$$

$$\Rightarrow N = 700 - 160 = 540$$

$$T_3 = 540 + 100 = 640$$

mismo resultado que antes.

**Ejemplo 8.** ¿Cuál es la mínima fuerza  $P$  necesaria para izar la pesa usando el dispositivo mostrado en la Fig. 95a? Suponer por simplicidad que las poleas son lisas y sin masa, y que todas las cuerdas son verticales.

Hay dos cuerdas en el sistema. La cuerda 1 bordea las tres poleas, y la cuerda 2 está atada a la pesa. La tensión de la cuerda 1 es la fuerza  $P$  aplicada en su extremo libre. Definiremos un sistema conveniente mediante una sección sistémica del dispositivo, que corte la cuerda 1 en tres puntos, como vemos en la Fig. 95b.

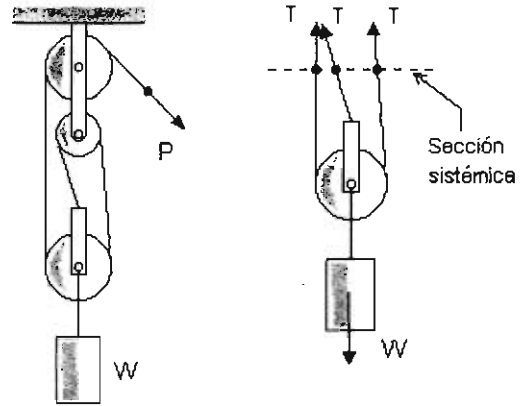


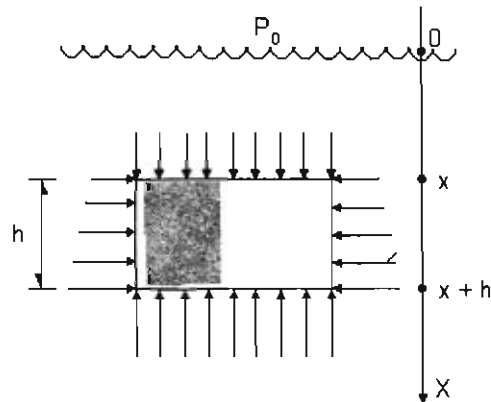
Fig. 95

Esta sección define el sistema que se encuentra por debajo de ella y que comprende la polea inferior, el bloque de peso  $W$ , la cuerda que une a éste con la polea inferior y los tres tramos de cuerda seccionados. Note que en los puntos donde seccionamos las cuerdas brota la tensión respectiva. El DCL de este sistema es la Fig. 95b, de donde

$$T = \frac{1}{3} W$$

### 3.12. Problemas

1. Demostrar el principio de Arquímedes para el caso particular de un bloque con forma de prisma rectangular de altura  $h$  y área de la cara superior  $A$ .



Usar lo siguiente:

- La presión hidrostática  $P$  a profundidad " $x$ " viene dada por

$$P = P_0 + \rho g x$$

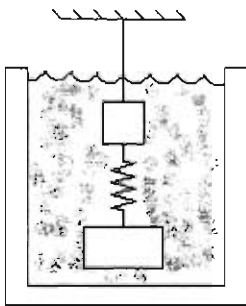
donde  $P_0$  es la presión en la superficie del líquido (digamos la presión atmosférica),  $\rho_L$  es la densidad del líquido y " $g$ " es la aceleración de la gravedad.

- La fuerza sobre las caras superior e inferior del prisma se calcula como el producto de la presión al nivel de la cara por el área de la misma.

- Las fuerzas horizontales se cancelan. Plantee solamente la ecuación de equilibrio en la dirección vertical. La masa del bloque es  $M$  y su densidad es  $\rho_B$ .

Resp. Empuje =  $\rho_L A h g$ , hacia arriba.

2. En el sistema mostrado, los bloques superior e inferior tienen volúmenes de 10 y 20 litros, respectivamente.



Dados:

- La tensión de la cuerda, 200 N,
  - El peso del bloque superior, 200 N,
  - La tensión del resorte, 78.4 N,
- calcular la densidad del líquido y el peso del bloque inferior.

Resp.  $\rho_L = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;  $W_2 = 216 \text{ N}$

3. Graficar la variación de la tensión a lo largo de la cuerda mostrada.

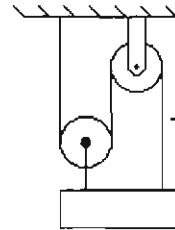


Resp. 800; 540; 340; 420

5. En una competencia de estira y afloja, dos equipos tiran de una cuerda con las fuerzas que se indican. Calcular la tensión de la cuerda en cada uno de sus tramos.

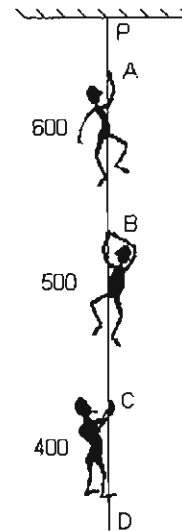


4. Una carga de 300 N es sostenida por cuerdas y poleas como se muestra. Determinar las tensiones de las cuerdas. Sugerencia: escoja un sistema y una sección sistemica apropiados que le permitan hallar fácilmente  $T$ .



Resp. 100; 200

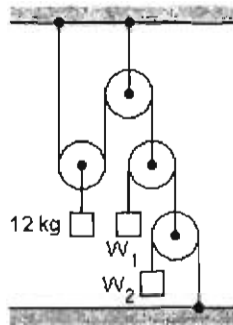
5. Tres personas con los pesos indicados en la figura (en newtons) cuelgan de una cuerda vertical. Encuentre el valor de la tensión en el punto más alto  $P$ , y en un punto arbitrario de los intervalos  $A-B$ ,  $B-C$  y  $C-D$ . Suponga que la cuerda es de peso insignificante.



Resp. 1500; 900; 400; 0

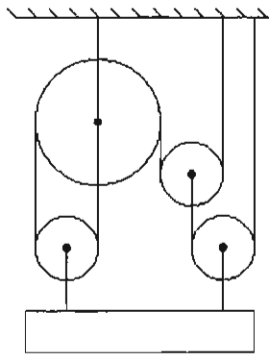
6. ¿Cuánto valen los pesos  $W_1$  y  $W_2$  para los cuales el sistema está en equilibrio? Resuelva mentalmente, calculando primero la tensión en la cuerda a la extrema izquierda y prosiguiendo hacia la derecha con las tensiones de las demás cuerdas.





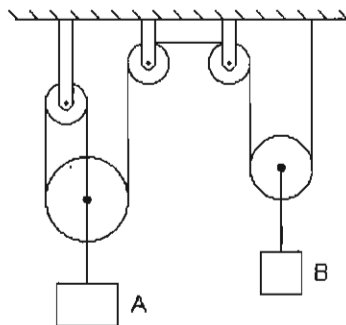
Resp. 3 kg; 1.5 kg

7. Determinar la tensión en todas las cuerdas del colgadijo mostrado en la figura. El peso del bloque es de 600 N. La polea grande pesa 100 N, y las pequeñas pesan 40 N cada una.



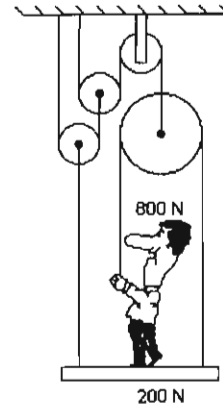
Resp. 480, 126.6, 213.3, 213.3, 386.6

8. El bloque A tiene una masa de 15 kg. Determinar la masa del bloque B para que haya equilibrio. Suponer poleas lisas y de peso insignificante.



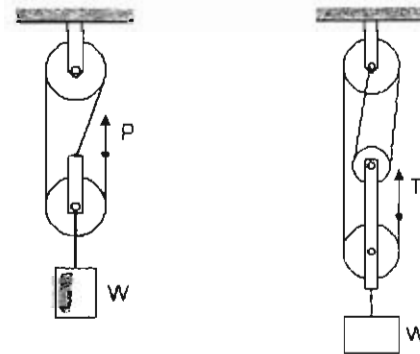
Resp. 10 kg.

9. Calcular la fuerza que debe aplicar Elmer Homero para sostenerse a sí mismo. Elmer pesa 800 N y el andamio 200 N. Calcular también la fuerza con que pisa el andamio.



Resp. 100; 700

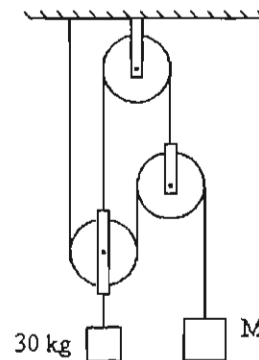
10. Calcular la fuerza necesaria para sostener el bloque de peso  $W$  mediante los dispositivos mostrados en la figura. Para el primer dispositivo desprecie las masas de las poleas. Para el segundo dispositivo suponga que el peso del conjunto inferior de poleas y soporte es de  $0.2 W$ . Considere que las cuerdas son verticales.



Sugerencia. Haga una sección sistémica conveniente, a la manera del Ejemplo 8 de la página 40.

Resp.  $(1/3)W$ ,  $0.3 W$ .

11. Calcule la masa  $M$  que equilibra al sistema. Considere poleas lisas y sin peso.



Resp. 7.5 kg.

## CAPÍTULO 4

### DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

#### 4.1. Problema y método generales de la estática de partículas.

El problema general de la estática de partículas se enuncia así:

Calcular las fuerzas desconocidas presentes en el sistema en **equilibrio** considerado.

Como se vislumbra de lo tratado en los capítulos precedentes, el método general para resolver este problema comprende tres pasos principales que son:

- Definir el **sistema [físico]**.
- Hacer el DCL del sistema.
- Aplicar al sistema las **ecuaciones de equilibrio**.

El equilibrio de un sistema global complejo se analiza dividiendo el sistema en partes o subsistemas. Luego se aplican repetidamente los pasos segundo y tercero del método, al sistema global y a cada uno de los subsistemas, escogidos a modo de obtener tantas ecuaciones independientes como incógnitas haya en el problema.

Los dos primeros pasos del método llevan implícito el aspecto esencial de *modelación* del sistema (es decir, la idealización o simplificación del mismo). Ya hemos hablado en el capítulo 3 sobre los modelos básicos de la estática.

El método descrito es aplicable a una gran variedad de problemas de mecánica. Bastaría sustituir el tercer paso por "Aplicar al sistema las **ecuaciones de movimiento**" y tendríamos el método general propio de la dinámica.

Resalta en importancia el segundo paso, referente a los DCL's. Muchas de las ecuaciones de la mecánica ora contienen directamente las fuerzas, ora se refieren a unas cantidades o condiciones de validez relacionadas con la clase de fuerzas existentes.

Hacer el DCL del sistema es el paso previo para:

- Analizar el estado de *equilibrio* del sistema (partículas, edificios, puentes, armaduras, marcos, palancas, sistemas a base de cables o fricción, fluidos, mecanismos, máquinas, castillos

de naipes, esqueletos, etc.).

- Analizar el estado de *movimiento* del sistema (proyectiles, sistemas oscilatorios, planetas y satélites, trompos, vehículos, mecanismos, bolas de billar, canicas, paramercios, etc).
- Decidir sobre la aplicabilidad de las *leyes de conservación* de momento lineal, momento angular y energía mecánica.
- Hacer cálculos de trabajo, potencia, etc.
- Analizar el estado de deformaciones y esfuerzos en un cuerpo deformable.

Etc.

Saber hacer correctamente los DCL's le allanará el camino en muchas asignaturas de su carrera. Es recomendable estudiar con cuidado los ejemplos dados y resolver todos los problemas de este capítulo.

Para resolver problemas de estática no es necesario desmembrar el sistema global en todos sus elementos, como lo hicimos en el capítulo 2 con el sistema {Amigo, Cuerda, Bloque, Tabla, Resorte}. En especial, no habrá necesidad de considerar los siguientes cuerpos, "irrelevantes" por cuanto no proporcionan ecuaciones útiles:

- Cuerdas.
- Resortes (y Varillas).
- Apoyos fijos masivos.

Es nuestro propósito en este capítulo reunir unas reglas para agilizar el trazado de los DCL's de los cuerpos *relevantes* de un sistema global. Servirá también como repaso de conceptos ya presentados.

Las reglas, convenios, notaciones, modos de expresión y sugerencias (de uso convencional general) que propondremos en relación con los DCL's van encaminadas no solamente hacia la confección correcta de los mismos sino también, igualmente importante, hacia la *comunicación* clara de su análisis de fuerzas a otras personas.

#### 4.2. Reglas básicas

Con respecto a la etapa de definición del sistema podemos dar dos reglas ahora. La primera regla es particularmente útil cuando el sistema consta de muchos cuerpos:

**Regla 1.**

Dé nombre o asigne un símbolo a cada cuerpo del sistema considerado.

La asignación de nombres facilita el definir el sistema. Éste puede constar de un sólo cuerpo o de varios cuerpos. *En este último caso conviene incluir cualesquiera cuerdas o resortes que enlacen los cuerpos.*

La segunda regla es:

**Regla 2.**

Asegúrese de haber estipulado con precisión el sistema físico cuyo DCL va a trazar.

¿Exactamente cuáles cuerpos incluye?

¿Está bien clara la naturaleza de los contactos del sistema con los cuerpos a su alrededor?

Una vez definido un sistema podemos pasar a la etapa de hacer su DCL. A este respecto, dos cuestiones son las que más importan:

- ¿Cómo podemos estar seguros de que **no faltan ni sobran** fuerzas en el DCL?
- ¿Están trazadas **correctamente** todas las fuerzas existentes?

En relación con la primera cuestión, tenga presente que *toda fuerza sobre algún cuerpo tiene su origen en algún otro cuerpo vecino*. Las fuerzas sobre un sistema provienen de los **cuerpos** fuera del sistema (cuerpos "externos"). Entre los cuerpos que influyen al sistema tenemos por supuesto la Tierra, que produce una fuerza de acción por campo. Adicionalmente tenemos aquellos que estén en contacto con cuerpos del sistema.

*Para identificar estos contactos no se necesita ir más allá de la **vecindad inmediata** del cuerpo considerado.*

Para comprender mejor esta afirmación, consideremos el engendro mostrado en la Fig. 96. Tiene garantía de no aparecer nunca en las aplicaciones, pero será muy útil para nuestros propósitos. Para los diversos cuerpos hemos escogido los peculiares nombres de Bloque1, Bloque2, ..., Bloque6, Resorte1, Resorte2, Cuerda1, Cuerda2, Soporte y Piso, abreviados de manera obvia como vemos en la figura. Supondremos que los resortes R1 y R2 están en compresión.

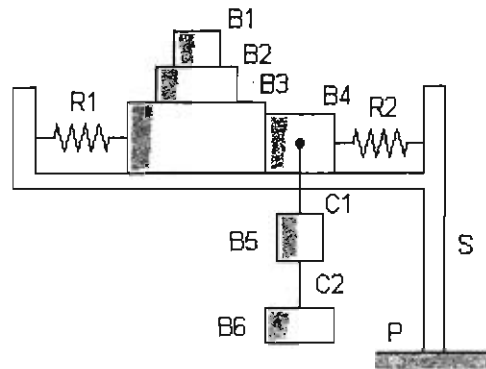


Fig. 96

Digamos que queremos hacer el DCL del Bloque3. Imaginemos una superficie que circunde al Bloque3, mucho muy ceñida a la frontera de este bloque (el rectángulo dibujado a rayas en la Fig. 97). Solamente los cuerpos externos que quedan confinados dentro de esta superficie son los que producen fuerza de contacto sobre el Bloque3. Los nombres de estos cuerpos se dan en la Fig. 98.

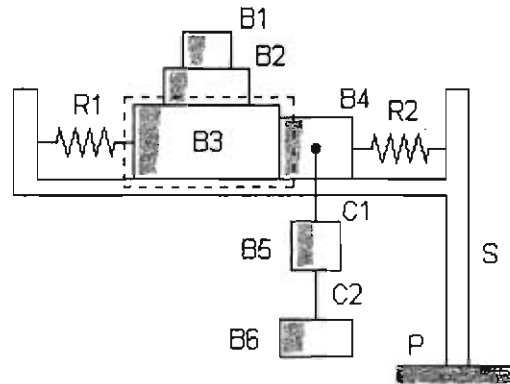


Fig. 97

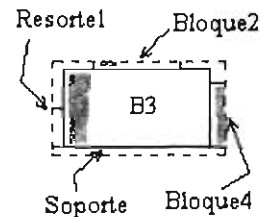


Fig. 98

Por consiguiente, sabremos con certeza que en el DCL del Bloque3 no hemos omitido fuerzas, ni añadido fuerzas superfluas, si hemos tomado en cuenta **única y exclusivamente** las fuerzas debidas a

los siguientes cuerpos: Tierra, Resorte1, Bloque2, Bloque4 y Soporte.

<Nota: Como lo hemos venido haciendo, anexaremos a algunos DCL's un recuadro explicativo con el formato de la Fig. 99b. En la parte superior escribimos el nombre del sistema que estemos considerando. En la columna izquierda relacionamos todos los cuerpos que actúen sobre el sistema, empezando por la Tierra y continuando con los cuerpos externos en contacto con el sistema. En la columna derecha escribimos el símbolo asignado a la fuerza causada por cada cuerpo de la columna izquierda. Así por ejemplo, el recuadro correspondiente al DCL del Bloque3 es el que vemos en la Fig. 99b:

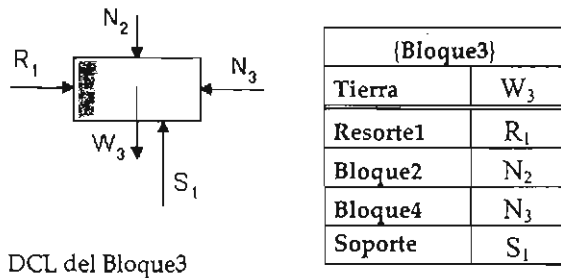


Fig. 99

En los recuadros apartaremos el peso, fuerza de acción por campo, de las demás fuerzas, que son de contacto. En caso de existir fuerzas eléctricas o magnéticas, las asentaríamos después del peso.>

Los símbolos y características de las fuerzas indicadas en el DCL en la Fig. 99b se explicarán más adelante. Expresaremos la idea anterior en esta forma:

**Regla 3.**  
 Para trazar el DCL de un sistema:  
 - Trace primeramente el peso del sistema, debido a la **Tierra**.  
 - Recorra visualmente el sistema por todo su interior y su contorno, haciendo una lista (mentalmente o por escrito) de todos sus contactos con **cuerpos externos** al mismo. En cada contacto existe fuerza que se debe incluir en el DCL del sistema.

Volvamos al conjunto de la Fig. 96, repetido en la Fig. 100.

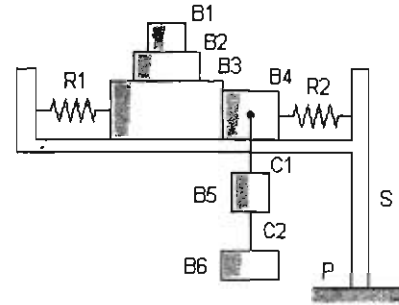


Fig. 100

Breve sección de preguntas y respuestas:

1. ¿Qué cuerpos producen fuerzas sobre el Bloque4?  
B3, R2, C1, S, Tierra.
2. ¿Sobre el Bloque5?  
C1, C2, Tierra.
3. ¿Produce el Resorte1 fuerza sobre el Bloque4?  
No.
4. ¿Ejerce fuerza el Bloque6 sobre el Bloque4?  
No.
5. ¿Sobre qué cuerpos ejerce fuerzas el Bloque2?  
B1, B3, Tierra.

Con respecto a la cuestión sobre si las fuerzas incluídas en un DCL están trazadas correctamente, la respuesta proviene de nuestro conocimiento acerca de las propiedades de las fuerzas o, en algunos casos, de las ecuaciones de equilibrio. Debemos conocer bien las propiedades de las fuerzas con objeto de trazar DCL's correctos.

En las siguientes secciones explicaremos cómo trazar correctamente las fuerzas más comunes que figuran en las aplicaciones. Asimismo veremos cómo es que las ecuaciones de equilibrio pueden revelar si alguna fuerza está trazada erróneamente.

### 4.3. Cómo trazar las fuerzas de tensión en cables

Observe el conjunto en equilibrio mostrado en la Fig. 101. La Bola está atada a los tres cables y el Bloque está atado solamente al Cable-3.

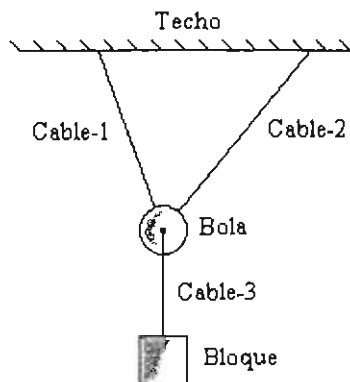


Fig. 101

Para hacer el DCL de la Bola la "extraemos" del conjunto, esto es, definimos el sistema {Bola} y hacemos una figura de la Bola por separado. A esta figura conviene añadir parte de los cables, como vemos en la Fig. 102a.

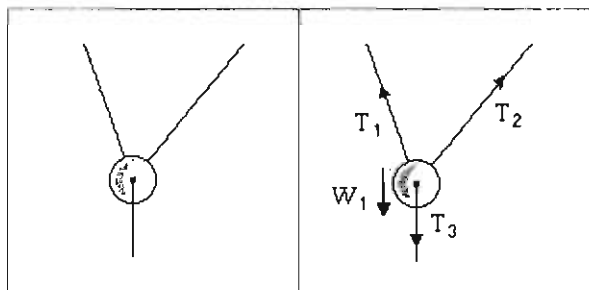


Fig. 102

En primer lugar trazamos el peso " $W_1$ " de la Bola. Para trazar las tensiones de las cuerdas tomamos en cuenta que son vectores que van a lo largo de las cuerdas, así que simplemente añadimos a los pedazos de cable sendas puntas de flecha que apunten a lo largo de cada cable y cuyos sentidos *tiendan a alejarse* del punto de atadura a la Bola, como en la Fig. 102b.

En la misma forma, el DCL del sistema {Bloque} se obtiene conforme vemos en la Fig. 103.

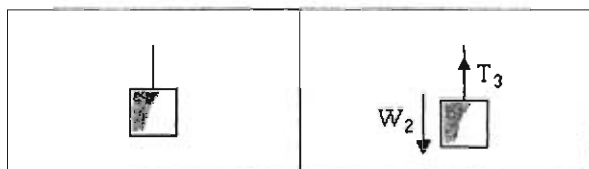


Fig. 103

En algunos textos se usa la figura del problema para trazar allí los DCL's, resultando lo que vemos en la Fig. 104. No lo haga Ud. Mejor haga figuras por separado para cada sistema definido.

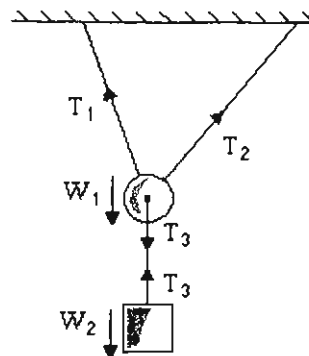


Fig. 104. (¡No!)

Aprovechemos este ejemplo para reiterar que las fuerzas " $T_3$ " que actúan sobre la Bola y el Bloque no son acción-reacción. Dos fuerzas que actúan en puntos distintos no pueden formar una pareja tal. (Una de las fuerzas  $T_3$  actúa en el centro de la Bola, la otra en la orilla del bloque).

La siguiente regla resume cómo debe trazarse la fuerza de tensión:

**Regla 4.**

La fuerza de tensión producida por una cuerda es un vector que emana del punto de atadura de la cuerda y corre a lo largo de la cuerda, apuntando hacia lo lejos de dicho punto, independientemente de cuál sea la orientación de la cuerda.

<Nota. La misma regla es aplicable a la fuerza de tensión producida por un resorte elongado o por una varilla en tensión.>

En un problema figurarán tantas fuerzas de tensión como cables haya en el sistema global. Así por ejemplo, en la Fig. 101 existen tres cables y por tanto tres tensiones distintas.

**4.4. Cómo trazar las fuerzas de compresión en resortes**

Las fuerzas de compresión debidas a resortes o varillas rígidas tienen propiedades "contrarias" a las de las fuerzas de tensión:

- Sabemos que los vectores que representan fuerzas de tensión emanan del cuerpo paciente y apuntan hacia lo lejos del cuerpo.

- Contrariamente, los vectores que representan fuerzas de compresión debidas a resortes (o varillas) se trazarán viniendo desde el resorte (o varilla) e *incidiendo* en el cuerpo, es decir, con su punta precisamente en el punto de sujeción del resorte (o varilla).

Por ejemplo, observe la piedra de la Fig. 105a, la cual está soportada por dos resortes en compresión y por un resorte en tensión.

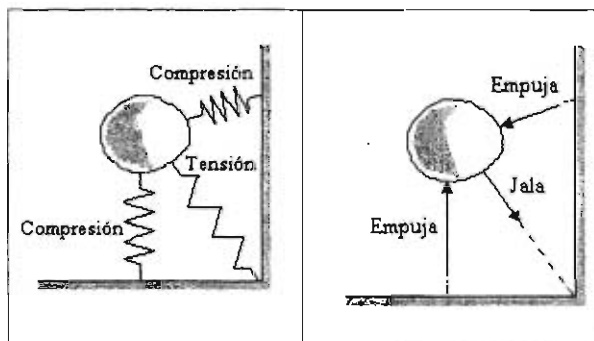


Fig. 105

Los resortes en compresión empujan a la piedra y el resorte en tensión la jala. Note que los vectores que representan las fuerzas de compresión de los resortes los hemos trazado *hacia* el cuerpo. Las puntas de estos vectores las ponemos en los puntos donde se fijan los resortes a la piedra (Fig. 105b).

**Regla 5.**

La fuerza de compresión que ejerce un resorte comprimido es un vector que, viniendo desde y con la dirección del resorte, incide en el punto de contacto con el cuerpo paciente, independientemente de la orientación del resorte.

<Nota. Las fuerzas que emanan son fuerzas que asociamos con la acción de "jalar"; las fuerzas que inciden, con las acciones de "empujar", "comprimir", "oprimir", "presionar" o "sostener". Entre las fuerzas que jalan tenemos las fuerzas de tensión (cables, resortes, varillas); entre las que empujan (o comprimen, etc.) tenemos las fuerzas de compresión (resortes, varillas) y las fuerzas normales que surgen en el contacto simple.

Demos un ejemplo. La Fig. 106a muestra un bloque sometido a 5 fuerzas, entre las cuales está el peso  $W$  del bloque. El peso lo podemos trazar en cualquier lugar, ya sea dentro o bien fuera pero cerca del bloque. En cuanto a las demás fuerzas, estamos

suponiendo que actúan en puntos  $a, b, c, d$ .

Ahora bien, las fuerzas  $F_1$  y  $F_3$  *emanan* de los puntos  $a$  y  $c$ , respectivamente, y las fuerzas  $F_2$  y  $F_4$  *inciden* en los puntos  $b$  y  $d$ , respectivamente.

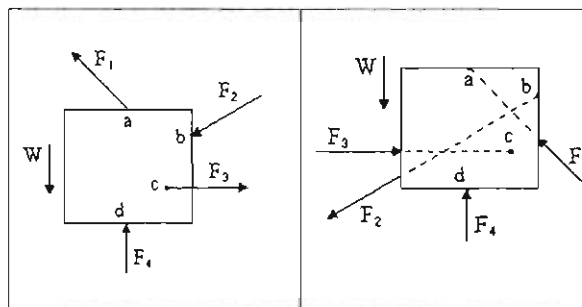


Fig. 106

Cabe señalar que este uso es convencional, dado que existe un principio en estática denominado "*principio de transmisibilidad de las fuerzas*", según el cual toda fuerza se puede trasladar a lo largo de la recta que la contiene sin que se alteren las ecuaciones de equilibrio. De esta manera, las fuerzas existentes sobre el bloque de la Fig. 106a podrían haberse trazado también como se muestra en la Fig. 106b:

Compare estas figuras. En ambos casos las fuerzas son las mismas, y las ecuaciones de equilibrio serán las mismas. En la Fig. 106a, según nuestra convención adoptada, las fuerzas  $F_1$  y  $F_3$  jalan, y la fuerza  $F_2$  empuja. En la Fig. 106b, en la que estas tres fuerzas se han trasladado a otros puntos, las fuerzas  $F_1$  y  $F_3$  ahora empujan, y la fuerza  $F_2$  ahora jala.

Estrictamente, los DCL's de dichas figuras son uno mismo, son igualmente válidos. Sin embargo, por razones de claridad, nosotros observaremos la convención ya propuesta. No será incorrecto, no obstante, desplazar alguna fuerza si eso ayuda a visualizar mejor un DCL.

**Ejemplo 9.** En la Fig. 107 se muestra un conjunto de bolas unidas por 4 cuerdas, dos resortes y una varilla ligera y rígida. Hemos asignado los nombres B1, B2, B3 y B4 para las bolas, C1, C2, C3 y C4 para las cuerdas, R1 y R2 para los resortes y V para la varilla. Suponemos que el resorte R1 está en tensión y el R2 en compresión, y que la varilla V está en compresión.

En la Fig. 108 se muestran los DCL's de cada una de las 4 bolas.

De acuerdo con nuestra convención, es fácil distinguir en cada DCL cuáles son las fuerzas que jalan (tensiones) o empujan (compresiones). A cada una de las 4 cuerdas se le asocia una tensión distinta ( $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$ ), al resorte R1 una tensión  $R_1$ , al resorte R2 una compresión  $C_2$ , y a la varilla una compresión  $K$ .

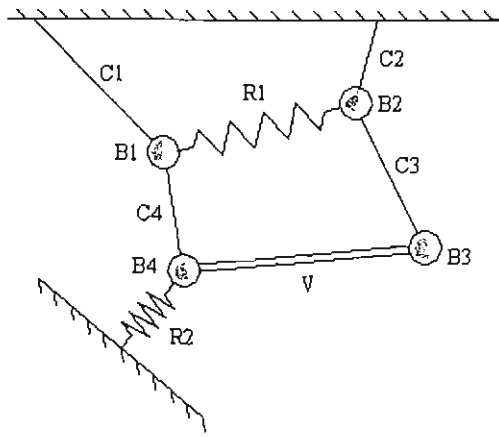


Fig. 107

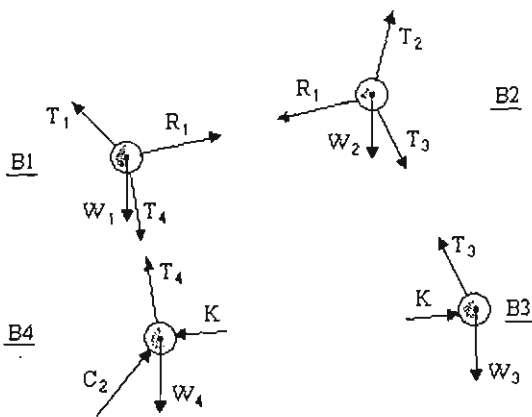


Fig. 108

### 4.5. Cómo trazar la fuerza normal en el contacto simple.

Cuando un bloque descansa libremente sobre una superficie horizontal, como en la Fig. 109a, la fuerza normal sobre el bloque, debida a la superficie, tiene un valor igual al peso del bloque:  $N = W$ . Sin embargo, esto no significa que la fuerza normal siempre sea igual al peso. La igualdad  $N = W$ , válida en la situación de la Fig. 109a, viene de la ecuación de equilibrio del bloque, que se saca del DCL mostrado en la Fig. 109b.

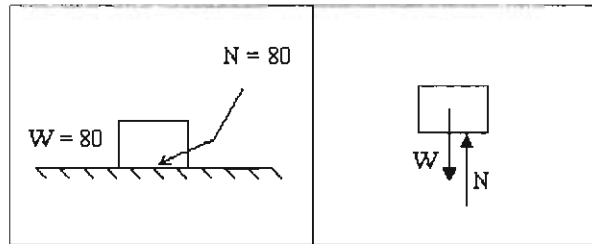


Fig. 109

Considere ahora la situación de la Fig. 110a, en la que se jala el bloque hacia arriba por medio de una cuerda, cuya tensión es 30 newton. En este caso el bloque ya no descansa "libremente" sobre la superficie. La fuerza normal  $N$  disminuye de 80 a 50 newtons, como se deduce del DCL mostrado en la Fig. 110b. Esto es, al jalar la cuerda se alivia un poco la presión del bloque sobre la superficie.

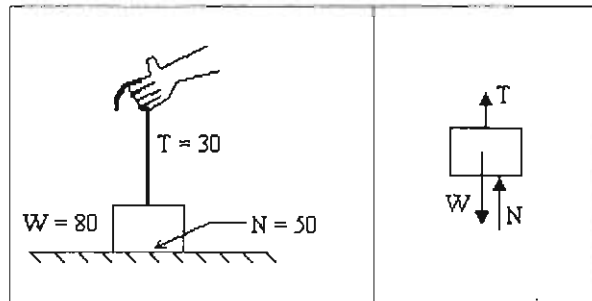


Fig. 110

Está claro que la normal se volvería nula si la cuerda se jalara justamente con una fuerza de 80 N, igual al peso del bloque.

En lugar de la cuerda, coloquemos ahora otro bloque de peso 60 N sobre el bloque de 80 N, como en la Fig. 111a. Entonces la normal ejercida por la superficie sobre el bloque de 80 N vale 140 N. Este valor lo calculamos con ayuda del DCL del conjunto {Bloque de 60 N, Bloque de 80 N} en la Fig. 111b. Notemos que ahora hay más presión sobre la superficie.

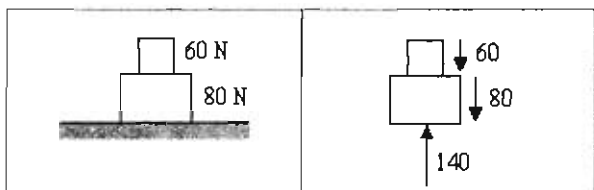


Fig. 111

De hecho intervienen aquí dos fuerzas normales. Si hacemos los DCL's de los bloques tomados individualmente obtenemos las Figs. 112a,b.

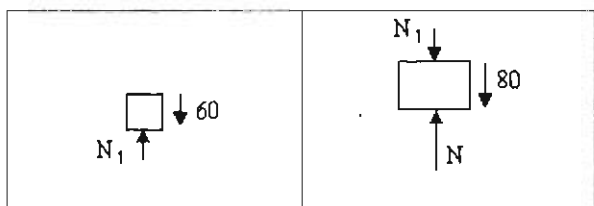


Fig. 112

La fuerza normal  $N_1$  es la interacción en el contacto (simple) bloque-bloque. La normal  $N$  es la interacción del bloque inferior y la superficie. De los DCL's se saca que  $N_1 = 60$  y que  $N = N_1 + 80 = 140$ .

Las fuerzas normales que surgen en los contactos de tipo simple son fuerzas que siempre *oprimen* a los cuerpos interactivos. Por esta razón nosotros siempre trazaremos estas fuerzas de modo que *incidan* en el cuerpo paciente.

En relación con las Figs. 112a y 112b advierta que la fuerza  $N_1$  de la Fig. 112a y la fuerza  $N_1$  de la Fig. 112b son una pareja acción-reacción. La primera es la fuerza del bloque inferior sobre el superior, la segunda es la del bloque superior sobre el inferior. Observe que ambas fuerzas  $N_1$  actúan *en el mismo punto* (la cara de contacto de ambos bloques), pero sobre distintos cuerpos.

Hé aquí una regla relativa a la aplicación de la 3a. ley de Newton en los DCL's:

**Regla 6.**  
Al hacer los DCL's separados de dos cuerpos A y B en interacción, se incluye en el DCL del cuerpo A una fuerza debida al cuerpo B, a cuya magnitud se asigna un símbolo conveniente. Luego, al hacer el DCL del cuerpo B debemos aplicar la 3a. ley de Newton, denotando la fuerza de A sobre B con el mismo símbolo introducido antes (puesto que tienen la misma magnitud). Las direcciones de estas fuerzas  $B \rightarrow A$  y  $A \rightarrow B$  son contrarias.

Observe los recuadros mostrados en la Fig. 113. En el primer recuadro, el bloque superior es el cuerpo *paciente* de la fuerza  $N_1$  debida al bloque inferior. Los papeles se invierten en el segundo recuadro, en el que el bloque superior es ahora el cuerpo *agente* y el bloque inferior el paciente. Fijese que en ambos recuadros aparece la misma fuerza  $N_1$ , como dicta la tercera ley de Newton.

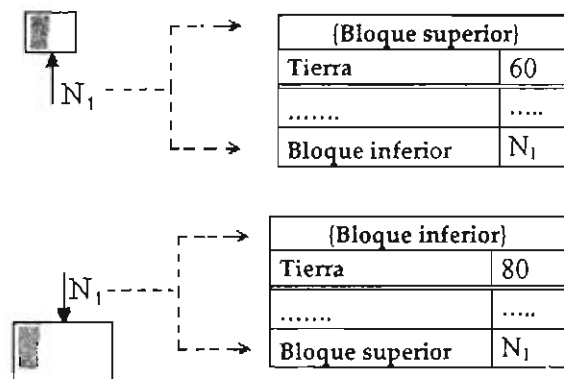


Fig. 113

Enunciemos ahora la regla para trazar una fuerza normal:

**Regla 7.**  
La fuerza "normal"  $N$  sobre un cuerpo, debida a alguna superficie sobre la que se apoya o descansa, o que lo empuja, presiona u oprime a través de contacto simple (mesa, techo, pared, piso, otro cuerpo del sistema, etc.), es un vector **perpendicular al plano tangente común** a ambas superficies en contacto simple. Esta fuerza la trazaremos viniendo desde el cuerpo agente e incidiendo en el cuerpo paciente en el punto o región de contacto.

Cuando un bloque se apoya en uno de sus vértices (aristas) sobre una superficie (Fig. 114a), no podemos trazar una perpendicular al "pico" o vértice, pero sí a la superficie. En este caso la normal es perpendicular a la superficie (Fig. 114b).



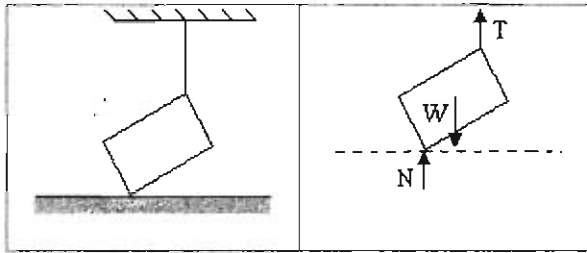


Fig. 114

La Fig. 115 muestra otro ejemplo de fuerza normal. Es la que existe en el contacto simple entre una bola y un hemisferio. En este caso la fuerza normal sobre la bola es perpendicular al plano tangente común a ambos cuerpos en el punto de contacto. El plano tangente es perpendicular a la dirección radial que va desde el centro del hemisferio hasta el centro de la bola, de tal modo que si la dirección de  $N$  se prolonga, pasa por los centros de estos cuerpos.

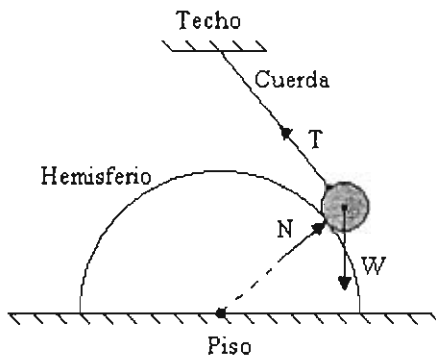


Fig. 115 (DCL de la bola)

Para dar otro ejemplo, volvamos al conjunto de cuerpos introducido inicialmente, repetido en la Fig. 116a. Consideremos el sistema formado por los bloques B1, B2, B3 y B4. Las fuerzas externas sobre este sistema se deben a los resortes R1 y R2, a la cuerda C1 y al soporte S. Notemos que entre los bloques y el soporte hay 5 contactos simples (B1 ↔ B2, B2 ↔ B3, B3 ↔ B4, B3 ↔ S y B4 ↔ S). Observe ahora en la Fig. 116b las cinco interacciones de tipo normal encerradas en estos contactos, que aflorarían al hacer los DCL's individuales de los bloques.

Recuerde: cuando "abre un contacto" entre dos bloques, surge allí la fuerza normal sobre uno y otro bloque.

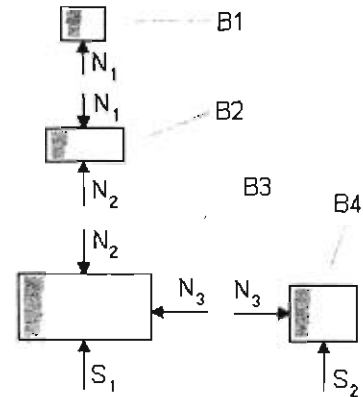
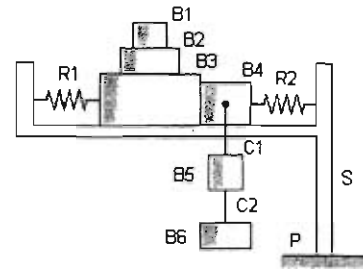


Fig. 116. (No son DCL's)

**Regla 8.**

Los símbolos que se ponen junto a los vectores-fuerza en los DCL's representan las *magnitudes* de las fuerzas. No les ponga la flechita de vector a estos símbolos.

Por otra parte, el símbolo que denota una fuerza debe indicar qué clase de fuerza es. Para indicar un peso use la letra "W"; para una fuerza de tensión use la letra "T"; para una fuerza normal use "N"; para tensión o compresión de resortes use "R" o "C", respectivamente, etc. De ser necesario use subíndices o primas para distinguir dos fuerzas de la misma clase.

**4.6. Asuntos de lenguaje**

En esta sección discutiremos unos modos de expresión que son muy comunes pero que tienen sus bemoles.

Consideremos un sistema de tres bloques puestos uno sobre otro, como vemos en la Fig. 117a. Sean  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  los pesos de los bloques.

Hagamos el DCL de cada bloque. Llegamos a las Figs. 117b,c,d.

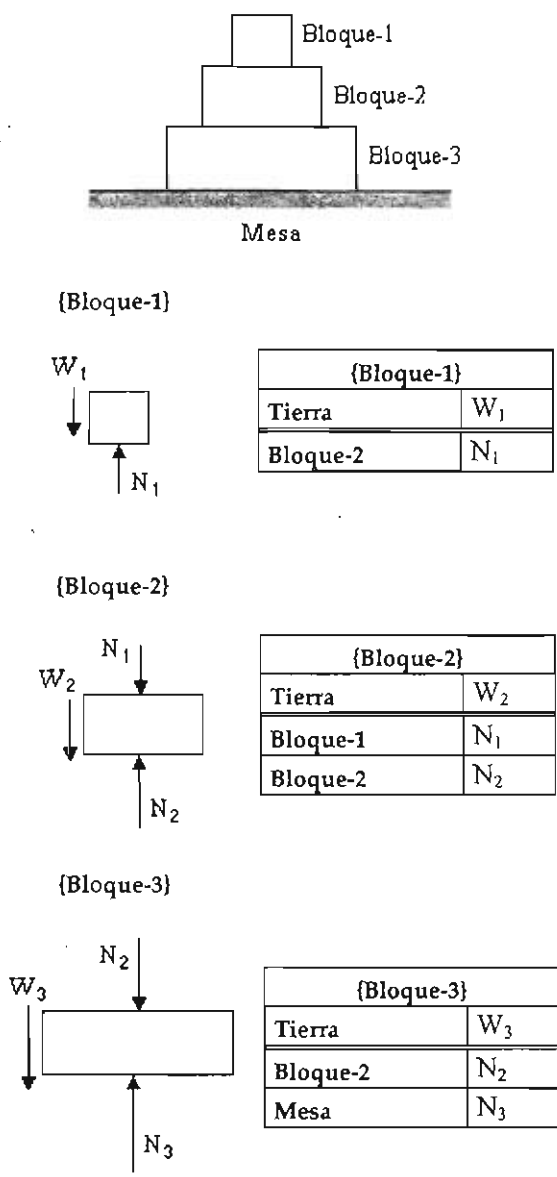


Fig. 117

Cada recuadro muestra cuáles son los cuerpos responsables de las fuerzas que figuran en el DCL del bloque a la izquierda.

Por ejemplo, el recuadro del Bloque-3 señala que este cuerpo sufre fuerzas debidas a la Tierra, al Bloque-2 y a la Mesa. En este recuadro no figura fuerza alguna debida al Bloque-1. Ahora bien, en virtud de que el Bloque-1 no ejerce fuerza sobre el Bloque-3, se justificaría decir entonces que el Bloque-1 **no actúa** sobre el Bloque-3 (!). No obstante, este asunto choca con nuestros modos usuales de expresión. Dado que el Bloque-1 está "encima" de los Bloques 2 y 3, ¿cómo podemos afirmar que no "actúa" sobre el Bloque-3?

El asunto se podría resolver al decir que el

Bloque-1 *actúa "indirectamente"* sobre el Bloque-3, *por intermedio del Bloque-2*. Alternativamente: que el Bloque-2 *transmite* al Bloque-3 la fuerza que sobre aquél ejerce el Bloque-1. Sin embargo, nosotros no hablaremos de "acciones indirectas", porque esta clase de acciones no figuran en los DCL's de los cuerpos que las padecen.

En otros términos, nosotros reservaremos el uso del verbo "actuar" en un sentido directo: diremos que un cuerpo A *actúa* sobre un cuerpo B si y sólo si en el DCL del cuerpo B existe una fuerza debida al cuerpo A. Por consiguiente, con respecto a los bloques de la Fig. 117a, es válido decir que el Bloque-1 no actúa sobre el Bloque-3. *En los DCL's figuran solamente fuerzas de acción directa. No hay intermediarios.*

Pasemos a otro uso de términos, menos sutil. Consideremos el mismo sistema de bloques de la Fig. 117a (Véase la Fig. 118).

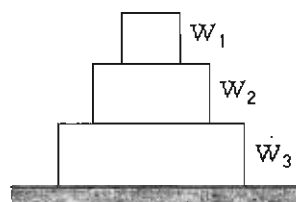


Fig. 118

¿Podríamos decir que el Bloque-1 "ejerce su peso"  $W_1$  sobre el Bloque-2? ¡No! Porque no son los bloques los que están ejerciendo los pesos  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$ , sino la Tierra. Lo correcto es decir que el Bloque-1 ejerce sobre el Bloque-2 una *fuerza normal*  $N_1$ . El hecho de que el valor de la normal  $N_1$  sea en este caso igual al peso  $W_1$  es otro asunto que no tiene que ver con el trazado de los DCL's. Es algo que se deduce de la ecuación de equilibrio del Bloque-1.

Debemos separar bien la etapa del trazado de DCL's de la etapa de plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio. En los DCL's no se vale usar resultados o cálculos sacados de las ecuaciones de equilibrio.

El punto se reconoce más claramente al hacemos esta otra pregunta: ¿ejerce el Bloque-2 su peso  $W_2$  sobre el Bloque-3? Obviamente no. El Bloque-2 ejerce sobre el 3 una *fuerza normal*  $N_2$  (cuyo valor, sacado de las ecuaciones de equilibrio de los bloques 1 y 2, es la suma de los pesos de los bloques 1 y 2).

Pasemos a otro asunto, en relación con el conjunto de la Fig. 119a. El bloque B6 cuelga libremente de la cuerda C2. La cuerda C2 sostiene al bloque B6 y su tensión  $T_2$ , por equilibrio, resultará ser igual al peso  $W_6$ . Digamos que esto lo advierte al estar trazando los DCL's y "de una vez" hace el DCL del bloque B5 como se muestra bajo la carita triste en la figura 119b, designando la tensión de la cuerda C2 con el símbolo " $W_6$ " (con ello está "transmitiendo" la acción de la Tierra sobre el bloque B6 directamente hasta el bloque B5).

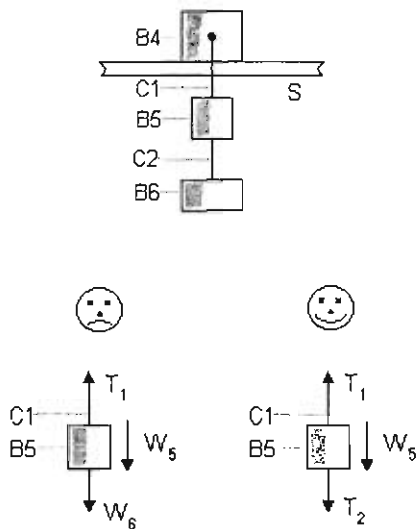


Fig. 119

Es una práctica que debe evitar. Viendo el DCL de la Fig. 119b izquierda ¡parecería que el bloque B5 tiene dos pesos:  $W_5$  y  $W_6$ ! Además, estas transmisiones de fuerzas no son válidas en los DCL's de partículas que no están en equilibrio (usados en dinámica). Mejor hágalo como se muestra bajo la carita feliz.

**Regla 9.**

Use el símbolo base "W" exclusivamente para denotar pesos. No lo ponga junto a un vector que no represente un peso, como serían una tensión, compresión, fuerza normal, etc., aunque esta última fuerza sea (circunstanialmente) igual en magnitud a algún peso.

En otras palabras, no incorpore cálculos (resultados de las ecuaciones de equilibrio) en los DCL's. Tampoco haga hipótesis innecesarias sobre los valores de las fuerzas, por ciertas que sean o parezcan. Separe bien las etapas de los DCL's y ecuaciones.

**4.7. Sistemas compuestos**

Esta regla es un repaso de algo que ya conocemos:

**Regla 10.**

Para hacer el DCL de un sistema que consta de dos o más cuerpos,

- Trace el peso de cada elemento del sistema.
- Identifique los contactos externos del sistema, es decir, los puntos o superficies donde los cuerpos del sistema se acoplan a cuerpos ajenos al sistema.
- Trace la fuerza asociada a cada uno de estos contactos externos (No trace fuerzas en los contactos internos del sistema).

En las Figs. 120 y 121 tenemos dos ejemplos de DCL's de sistemas compuestos, extraídos del sistema de la Fig. 96 de la página 44.

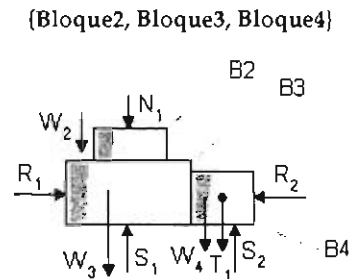


Fig. 120

(Bloque2, Bloque3, Bloque4)

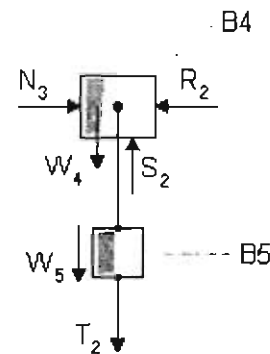


Fig. 121

En este curso introductorio tendremos pocas ocasiones de considerar sistemas compuestos. Generalmente habrá que hacer los DCL's de todos los cuerpos del sistema global, tomados uno por uno, excluyendo cuerdas, resortes y varillas.

#### 4.8. Fuerzas de dirección a determinar

Introduciremos una regla más, en el contexto de unos problemas concretos de equilibrio. Resolveremos primeramente el problema representado en la Fig. 122.

He aquí los datos del problema:

- La tensión de la cuerda vale 40 newton.
- El peso del Bloque1 es de 60 newton.
- La fuerza del Resorte no se conoce ni en magnitud ni en dirección (no se sabe si está en tensión o en compresión).
- El peso del Bloque2,  $W_2$ , es otra incógnita.
- La normal Bloque2-Bloque3,  $N_1$ , también es incógnita.
- La normal Bloque3-Piso vale 200 newton.
- El peso del Bloque3 vale 80 newton.

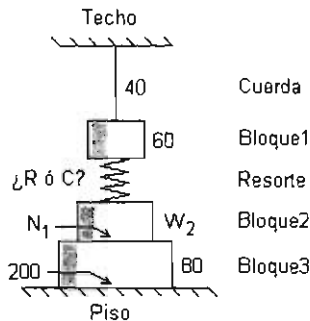


Fig. 122

Las cantidades a determinar son tres: la fuerza del resorte,  $N_1$  y  $W_2$ .

¿Qué hacer en un problema como éste en que interviene un resorte cuyo estado (tensión o compresión) no se conoce de antemano? He aquí la regla al respecto:

##### Regla 11.

Si no conoce a priori el estado de un resorte:

- Haga una hipótesis de trabajo: trace la fuerza del resorte hacia alguna dirección *supuesta*. Designela con "R" o "C", según la haya supuesto de tensión o compresión.
- Resuelva el problema bajo semejante hipótesis. Si obtiene un valor positivo de R ó C, acertó a la dirección correcta. Si obtiene un valor negativo (absurdo) de R ó C, entonces la hipótesis queda invalidada y la dirección de R ó C es en realidad la contraria de la supuesta al comienzo (la tensión era realmente compresión, o viceversa, así que hay que modificar el DCL).

Supongamos que el Resorte esté en tensión. Tendríamos los DCL's de la Fig. 123.

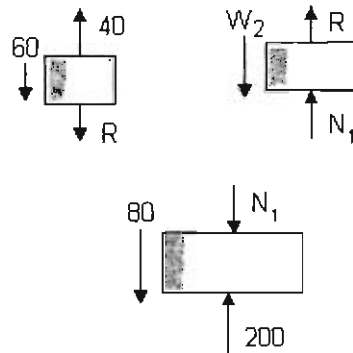


Fig. 123

Las ecuaciones de equilibrio son inmediatas:

$$40 - 60 - R = 0$$

$$N_1 + R - W_2 = 0$$

$$200 - N_1 - 80 = 0$$

Su solución es

$$R = -20$$

$$N_1 = 200 - 80 = 120$$

$$W_2 = N_1 + R = 120 + (-20) = 100.$$

El valor negativo absurdo de R significa que el resorte realmente está en compresión, cuyo valor es  $C = |R| = 20$ .

La regla 11 es de utilidad no solamente con resortes. Existen otros tipos de fuerzas (fricción, fuerzas en una varilla, fuerza normal, etc.) cuyas direcciones no siempre son conocidas de partida, para las que también habrá que hacer una hipótesis acerca de su dirección.

Resolvamos ahora un caso en que aparece una fuerza normal de dirección desconocida a priori.

En la Fig. 124a tenemos un collarín (cilindro acanalado) que encaja dentro de una guía cilíndrica recta. El peso del collarín es de 50 newtons, la tensión de la cuerda se ha prefijado al valor de 100 newtons, y el resorte tiene una tensión de 300 newtons. Se trata de calcular la fuerza normal en el contacto collarín-guía.

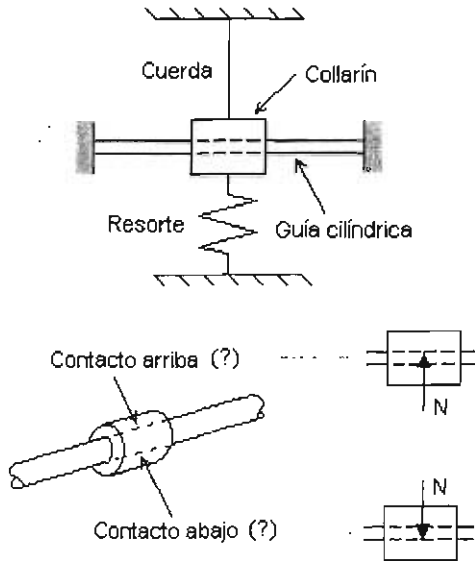


Fig. 124

En la Fig. 124b puede ver el contacto con más detalle. Imagine que el collarín no ajusta perfectamente en la guía, sino que hay cierta holgura o juego en el canal. Si el contacto canal-collarín tiene lugar en la parte de arriba del collarín, la normal  $N$  apuntaría hacia arriba (la normal incide en el punto de contacto con el cuerpo considerado -el collarín-, viniendo desde el cuerpo externo o actuante -la guía-). La dirección de  $N$  se invierte si el contacto es en la superficie inferior del collarín.

Hagamos el DCL del collarín, bajo la hipótesis de que  $N$  apunta hacia arriba (Fig. 125).

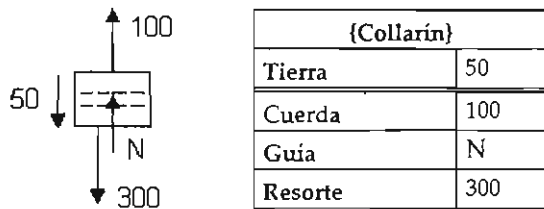


Fig. 125

De la ecuación de equilibrio,

$$N + 100 - 50 - 300 = 0$$

obtenemos  $N = 250$ . El hecho de que  $N$  haya salido positiva indica que efectivamente apunta hacia arriba, es decir, que el contacto collarín-guía tiene lugar en la parte superior del canal.

Si el resorte estuviera en compresión, la fuerza de 300 en el DCL estaría dirigida hacia arriba. El valor resultante para  $N$  sería  $N = -350$ , que correspondería a un contacto en la parte inferior del canal del collarín.

### 4.9. Fuerzas negativas

De las fuerzas que hemos introducido las siguientes tienen dirección conocida de antemano:

- El peso  $W$  (vector siempre vertical hacia abajo)
- La tensión de cables, resortes o varillas,  $T$  ó  $R$  ó  $V$  (vector que siempre "emana" del cuerpo)
- La compresión de resortes o varillas,  $C$  ó  $K$  (vector que siempre "incide" en el cuerpo).

Entre ellas se contaría la normal  $N$  a condición de que se conozca el punto de contacto, en cuyo caso incide en el cuerpo pasivo en este punto, viniendo desde el cuerpo activo.

Ahora bien, una fuerza cuya dirección ya es conocida antes de resolver el problema siempre debe resultar positiva. Un resultado negativo significa que existe un error en la resolución, o que los datos usados no son consistentes con la situación física.

Ilustremos con un ejemplo muy simple.

En el conjunto en equilibrio de la Fig. 126a, el resorte superior tiene tensión de 120 y el inferior tiene compresión de 80. La fuerza normal entre el Bloque2 y el Piso vale 380. Queremos calcular los pesos de los bloques. Digamos que hiciéramos los DCL's como vemos en la Fig. 126b, donde la fuerza de tensión del resorte superior no está trazada correctamente.

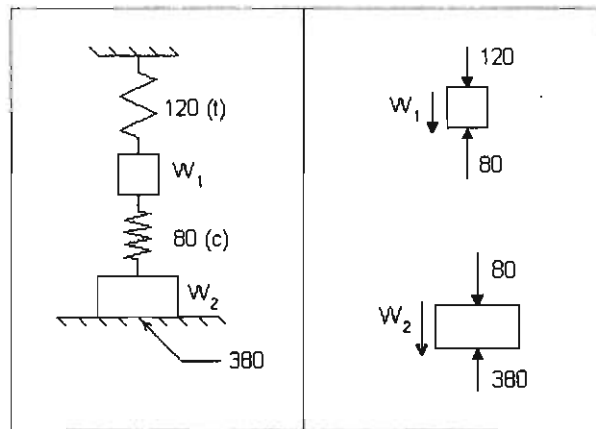


Fig. 126

Las ecuaciones serían

$$80 - 120 - W_1 = 0$$

$$380 - W_2 - 80 = 0$$

de donde obtendríamos

$$W_1 = -40 \quad W_2 = 300$$

El signo negativo de  $W_1$  señala un error en el problema, pues indicaría que ¡el peso del Bloque1 actúa verticalmente hacia arriba! Corrigiendo la fuerza de 120 del resorte superior en el DCL del Bloque1 (trazándola hacia arriba) y volviendo a plantear las ecuaciones y a hacer los cálculos obtenemos los valores correctos

$$W_1 = 200 \quad W_2 = 300.$$

### 4.10. Problemas

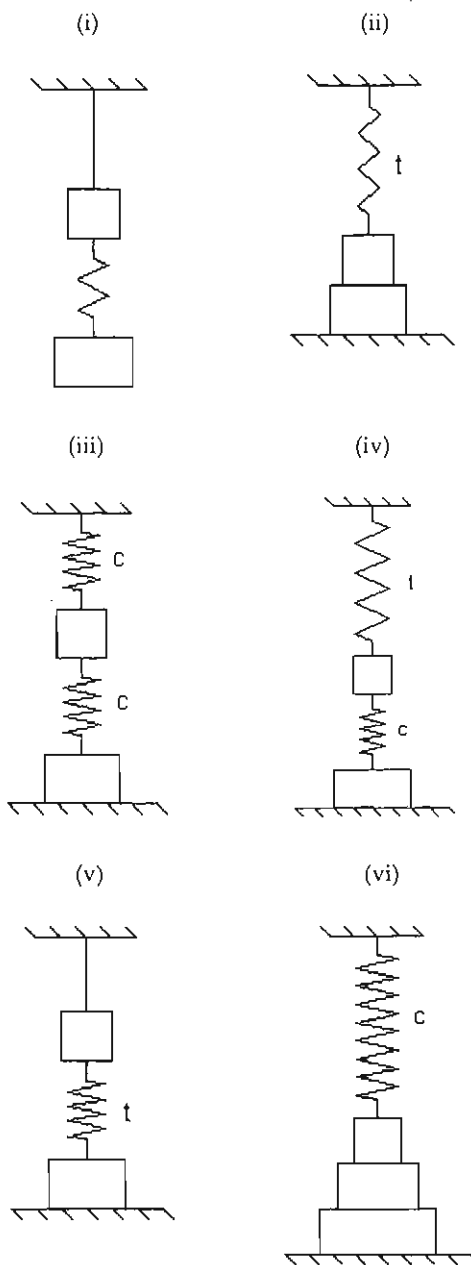
1. Para los dos resortes del sistema mostrado, considere las cuatro combinaciones de estados relacionadas en la tabla (T indica tensión, C compresión)



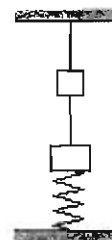
Resorte1:	T	T	C	C
Resorte2:	T	C	T	C

¿Cuál de los cuatro estados no es compatible con el equilibrio? Justifique algebraicamente.

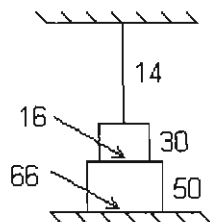
2. Para cada uno de los conjuntos en equilibrio mostrados en las Figs. (i) - (vi), dé nombre a cada cuerpo y haga el DCL de cada bloque ("t" indica tensión en el resorte; "c" compresión; ninguna letra junto al resorte indica que su estado es obvio o bien indeterminado a priori).



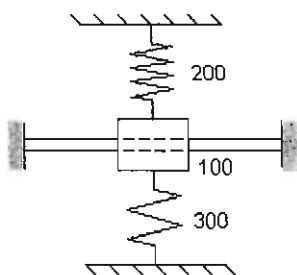
3. ¿Es posible el equilibrio del sistema si el resorte está comprimido? Justifique numéricamente, asignando valores a las fuerzas.



4. El sistema está sometido a las fuerzas indicadas. Sin usar lápiz y papel, compruebe que está en equilibrio.



5. Calcule la fuerza normal guía-collarín. El resorte superior está en compresión (200 N), el inferior en tensión (300 N). El peso del collarín es 100 N.

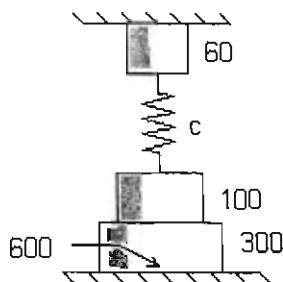


Resp. 600 N

6. Resuelva los sistemas (i) y (ii) (encuentre todas las fuerzas desconocidas). Haga una figura donde se muestren todos los cuerpos separadamente, incluyendo cuerdas y resortes, junto con todas las fuerzas en el sistema.

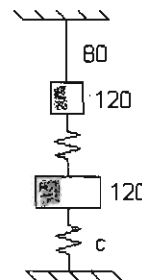
**Nota.** El dato numérico a la derecha de cada bloque es su peso. El dato junto a una cuerda es su tensión, y el señalado por una flecha quebrada es la interacción normal en ese contacto.

(i)



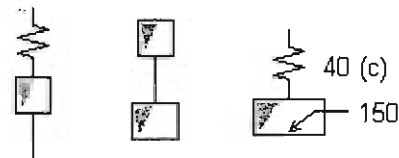
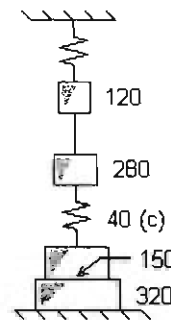
Resp. 140; 200; 300

(ii)



Resp. 40; 160

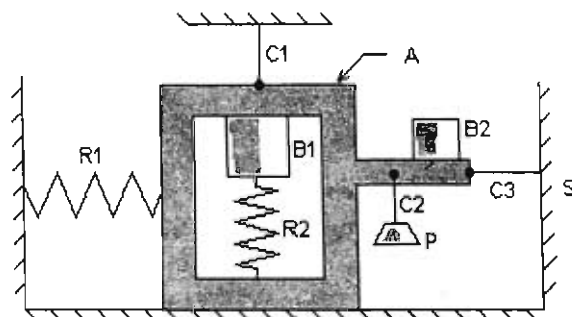
7. Resuelva el sistema global mostrado, usando los DCL's de los subsistemas propuestos bajo la figura principal. El dato 40 (c) significa que el resorte tiene una compresión de 40.



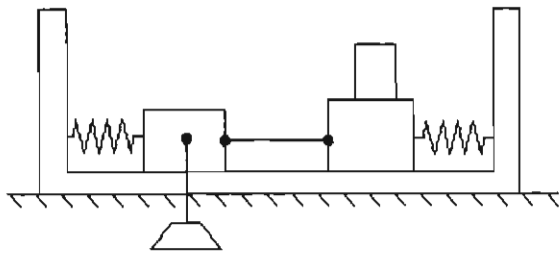
(Antes de emprender estos diagramas marque con "•" los contactos *externos* de cada subsistema, con objeto de no incurrir en el error de trazar fuerzas en los contactos internos).

Resp. 360; 240; 110; 470

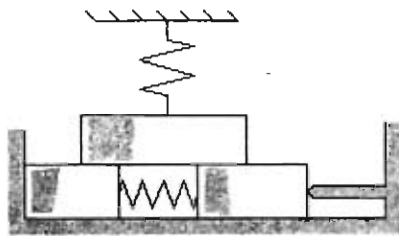
8. Hay en total 9 fuerzas sobre el cuerpo A mostrado abajo. ¿Cuáles son?



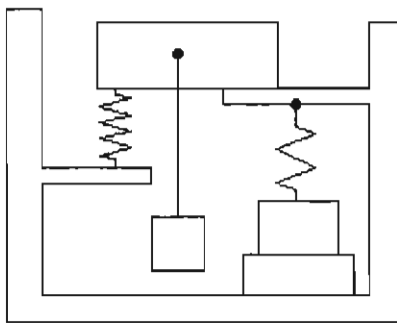
9. Haga el DCL de cada bloque de los conjuntos mostrados.



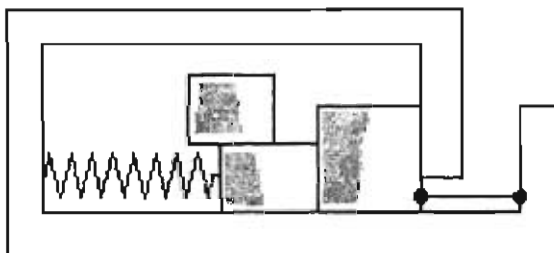
(Resortes en tensión.)



(Resorte superior en tensión, inferior en compresión)



(Resorte izquierdo en compresión, derecho en tensión)



(Resorte en compresión, cuerda en tensión.)



CAPÍTULO 5

SISTEMAS EN EQUILIBRIO. FUERZAS COPLANARIAS

5.1. Fuerzas inclinadas

Consideremos una partícula en equilibrio, sujeta a "N" fuerzas coplanarias  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_N$ . Representemos la partícula por un punto situado en el origen de un sistema cartesiano de ejes X y Y. En la Fig. 127 tenemos el caso de cinco fuerzas ( $N = 5$ ).

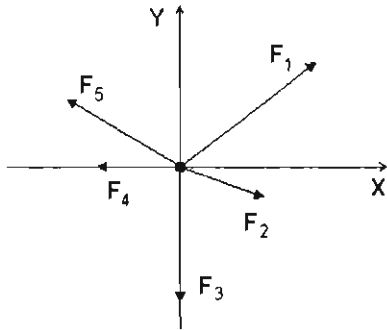


Fig. 127

Sabemos que la suma de las 5 fuerzas es igual a cero. Por tanto, colocando estas fuerzas una después de la otra formaremos un polígono, el mostrado en la Fig. 128. Allí vemos las componentes de las cinco fuerzas a lo largo de cierto eje arbitrario designado "Eje U". La suma algebraica de las cinco componentes es igual a cero, sea cual sea la dirección del Eje U.

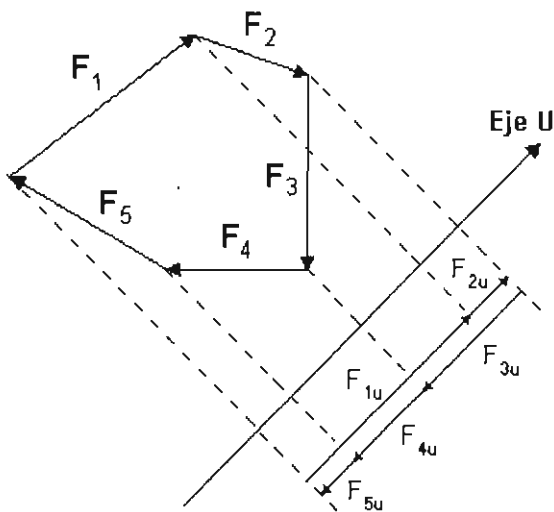


Fig. 128

Es decir, se cumple la ecuación

$$F_{1u} + F_{2u} + F_{3u} + F_{4u} + F_{5u} = \sum_{i=1}^5 F_{iu} = 0$$

Como el Eje U es arbitrario, existe una infinidad de ecuaciones como la anterior. Sin embargo, solamente dos de tales ecuaciones son independientes (suponiendo que los ejes subyacentes no sean paralelos). Habitualmente se expresan las ecuaciones de equilibrio en términos de las componentes de las fuerzas según los ejes X y Y de un sistema cartesiano XY, quedando en la forma

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

Se sobreentendiendo que la suma abarca todas las fuerzas presentes sobre la partícula considerada.

Ocasionalmente conviene usar dos ejes no ortogonales, por ejemplo uno de los ejes coordenados X, Y, y algún otro "eje U" distinto, es decir, aplicar unas ecuaciones de la forma

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_u = 0$$

o bien

$$\sum F_y = 0, \quad \sum F_u = 0$$

En un problema en que figuren varias partículas, no necesariamente habrá que definir el mismo sistema de ejes X y Y para todas ellas. Tenemos la libertad de adoptar un sistema de ejes distinto para cada partícula, según convenga. Generalmente se procura que el mayor número de fuerzas queden alineadas con uno de los ejes coordenados.

La práctica de usar ejes X y Y siempre horizontal y vertical, a costa de girar las fuerzas, no es eficiente y no se recomienda.

5.2. Equilibrio bajo tres fuerzas

El caso de un cuerpo en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas, digamos  $F_1, F_2$  y  $F_3$ , se presenta frecuentemente. Existe un método trigonométrico

directo para resolver este caso.

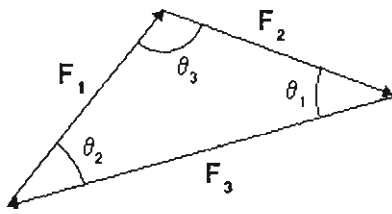


Fig. 129

Dado que la suma vectorial de las tres fuerzas debe ser igual a cero, estas fuerzas forman un triángulo (Fig. 129). Entonces, por la ley de los senos,

$$\frac{F_1}{\text{sen } \theta_1} = \frac{F_2}{\text{sen } \theta_2} = \frac{F_3}{\text{sen } \theta_3}$$

Ni siquiera hay necesidad de trazar este triángulo si los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  pueden obtenerse fácilmente del DCL. *Notemos que cada fuerza se divide por el seno del ángulo que forman las líneas de acción de las otras dos.* Dicho ángulo se toma siempre menor que  $180^\circ$ .

Por ejemplo, en la Fig. 130 tenemos una fuerza vertical de 500 y dos fuerzas F y P a calcular.

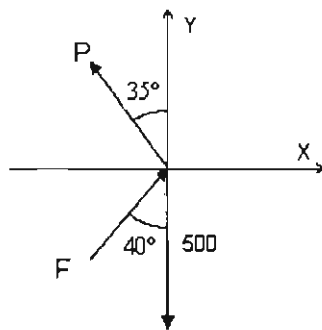


Fig. 130

He aquí los ángulos requeridos:

Entre F y 500:  $40^\circ$

Entre 500 y P:  $145^\circ$

Entre F y P:  $105^\circ$

<Nota. Son útiles en estos cálculos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen } (180^\circ - \theta) = \text{sen } \theta \quad \text{sen } (90^\circ + \theta) = \text{cos } \theta$$

Si el ángulo está cercano a  $180^\circ$ , podemos tomar su suplemento; por ejemplo,

$$\text{sen } 145^\circ = \text{sen } (180^\circ - 145^\circ) = \text{sen } 35^\circ$$

Por otra parte, si excede poco de  $90^\circ$ , podemos tomar el coseno del excedente; por ejemplo,

$$\text{sen } 110^\circ = \text{cos } (110^\circ - 90^\circ) = \text{cos } 20^\circ >$$

Obtenemos así las ecuaciones

$$\frac{F}{\text{sen } 145^\circ} = \frac{500}{\text{sen } 105^\circ} = \frac{P}{\text{sen } 40^\circ}$$

o bien

$$\frac{F}{\text{sen } 35^\circ} = \frac{500}{\text{cos } 15^\circ} = \frac{P}{\text{sen } 40^\circ}$$

Evaluando

$$\frac{500}{\text{cos } 15^\circ} = 517.64$$

obtenemos

$$F = 517.64 \text{ sen } 35^\circ = 296.9$$

$$P = 517.64 \text{ sen } 40^\circ = 332.7$$

### 5.3. Ejemplos varios

**Ejemplo 10.** Calcular las tensiones en las cuerdas que soportan la esfera de masa 15 kg mostrada en la Fig. 131.

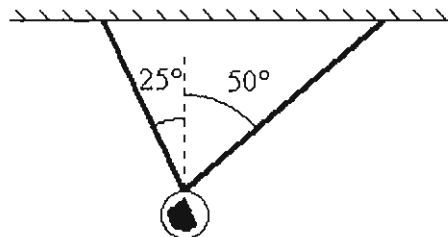
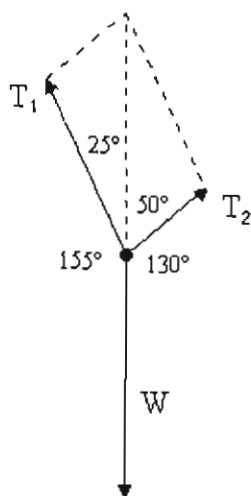


Fig. 131

El peso de la esfera es

$$W = 15 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 147 \text{ N}$$



Observe el DCL en la Fig. 132, particularmente los ángulos que forman las fuerzas.

$\angle(T_1, T_2) = \text{ángulo entre } T_1 \text{ y } T_2 = 75^\circ$

$\angle(T_1, W) = \text{ángulo entre } T_1 \text{ y } W = 155^\circ$

$\angle(T_2, W) = \text{ángulo entre } T_2 \text{ y } W = 130^\circ$

Fig. 132

Las ecuaciones de equilibrio toman la forma

$$\frac{T_1}{\text{sen } \angle(T_2, W)} = \frac{T_2}{\text{sen } \angle(T_1, W)} = \frac{W}{\text{sen } \angle(T_1, T_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\text{sen } 130^\circ} = \frac{T_2}{\text{sen } 155^\circ} = \frac{147}{\text{sen } 75^\circ}$$

de donde

$$T_1 = \frac{147}{\text{sen } 75^\circ} \cdot \text{sen } 130^\circ = 116.58$$

$$T_2 = \frac{147}{\text{sen } 75^\circ} \cdot \text{sen } 155^\circ = 64.312$$

**Ejemplo 11.** Dos bloques unidos por cuerdas descansan sobre un plano inclinado. Dados el ángulo  $\theta$  y las masas  $m_1$  y  $m_2$ , calcular las normales y las tensiones de las cuerdas.

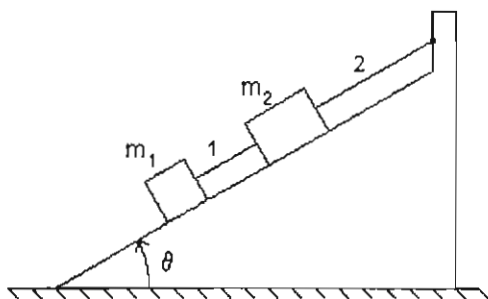


Fig. 133

Tenemos dos cuerdas que hemos numerado 1 y 2; sus tensiones se denotarán correspondientemente con  $T_1$  y  $T_2$ . Los pesos de los bloques son  $m_1g$  y  $m_2g$ . Para resolver plantearemos las ecuaciones de equilibrio de cada bloque. En los DCL's conviene representar los bloques por puntos, para facilitar el cálculo de las componentes de las diversas fuerzas. Los DCL's están en las Figs. 134a y 134b.

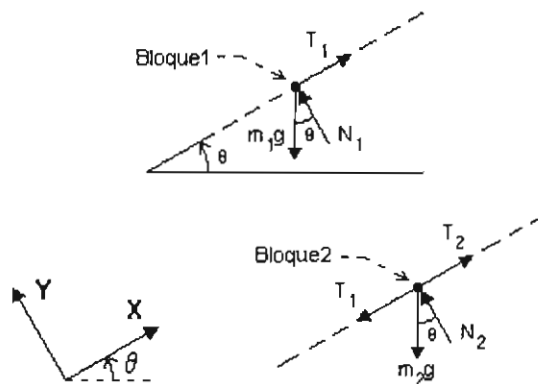


Fig. 134

Note que el ángulo entre la normal  $N_1$  y el peso  $m_1g$  es igual al ángulo de inclinación del plano. Lo mismo ocurre con  $N_2$  y  $m_2g$ . Usaremos esta igualdad a menudo en problemas donde figuren bloques sobre planos inclinados.

Definiremos los ejes X y Y tal como se muestra en la Fig. 112. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_x = 0:$$

Bloque1:  $T_1 - m_1g \text{ sen } \theta = 0$

Bloque2:  $T_2 - T_1 - m_2g \text{ sen } \theta = 0$

$$\sum F_y = 0:$$

Bloque1:  $N_1 - m_1g \text{ cos } \theta = 0$

Bloque2:  $N_2 - m_2g \text{ cos } \theta = 0$

Aparecen en ellas las 4 incógnitas  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $N_1$  y  $N_2$ . La solución es inmediata:

$$T_1 = m_1g \text{ sen } \theta \quad T_2 = (m_1 + m_2)g \text{ sen } \theta$$

$$N_1 = m_1g \text{ cos } \theta \quad N_2 = m_2g \text{ cos } \theta$$

Se entiende que debía resultar  $T_2 > T_1$ . ¿Podría dar la solución para el caso que tuviésemos tres bloques en vez de dos, sin necesidad de hacer cálculos?

Si  $\theta$  vale  $90^\circ$  (Fig. 135) las soluciones se reducen a

$$T_1 = m_1 g$$

$$T_2 = (m_1 + m_2) g$$

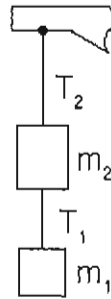


Fig. 135

**Ejemplo 12.** Dos esferas, la mayor de masa 8 kg y la menor de 4 kg, descansan sobre una esquina como en la Fig. 136. Hallar las fuerzas de contacto entre todas las superficies.

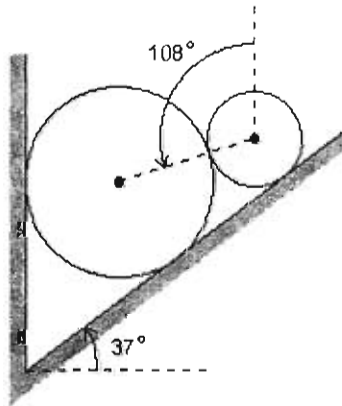


Fig. 136

Observe los DCL's individuales de las esferas en la Fig. 137. Los pesos valen

$$\text{Esfera mayor: } 8 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 78.4 \text{ N}$$

$$\text{Esfera menor: } 4 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 39.2 \text{ N}$$

Existen en total 4 fuerzas normales entre todas las superficies. La interacción entre las esferas es la fuerza normal  $N_3$ .

Conviene trabajar con los ángulos agudos mostrados.

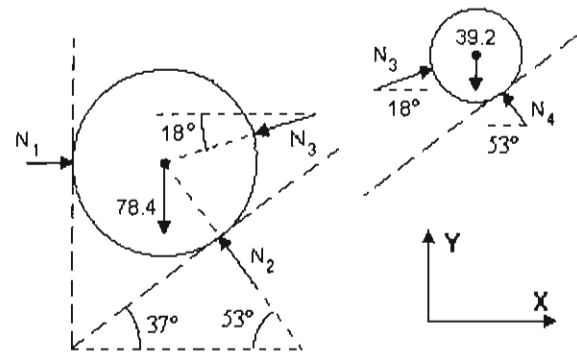


Fig. 137

Usando los ejes mostrados, las ecuaciones de equilibrio de la esfera mayor son:

$$\sum F_x = 0:$$

$$N_1 - N_2 \cos 53^\circ - N_3 \cos 18^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-78.4 + N_2 \sin 53^\circ - N_3 \sin 18^\circ = 0$$

Para las ecuaciones de la esfera menor, apliquemos el método del triángulo dado anteriormente. Los ángulos entre las fuerzas se ven en la Fig. 138.

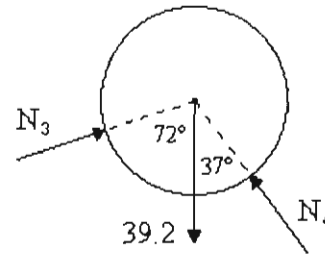


Fig. 138. Esfera menor

$$\frac{N_3}{\sin 37^\circ} = \frac{N_4}{\sin 72^\circ} = \frac{39.2}{\sin 109^\circ}$$

de donde (en newtons)

$$N_3 = 24.95 \quad \text{y} \quad N_4 = 39.43$$

Sustituyendo  $N_3$  en las ecuaciones de la esfera mayor hallamos

$$N_2 = 107.82 \quad \text{y} \quad N_1 = 88.62$$

**Ejemplo 13.** Las constantes de los resortes lineales son  $k_1 = 1000 \text{ N/m}$  y  $k_2 = 500 \text{ N/m}$ . Determinar sus longitudes naturales.

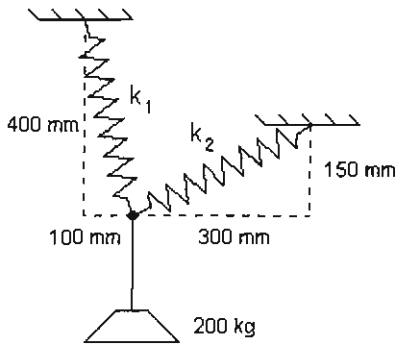


Fig. 139

Primeramente calcularemos con las ecuaciones de equilibrio las fuerzas de tensión de los resortes. Después usaremos la ley de Hooke  $R = k\delta$  para calcular sus elongaciones y de allí sus longitudes naturales.

Definamos estos dos sistemas:

- el nudo donde se unen los dos resortes y la cuerda.

- la pesa colgante.

Denotemos los ángulos de inclinación de los resortes con  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Tenemos los DCL's mostrados en la Fig. 140.

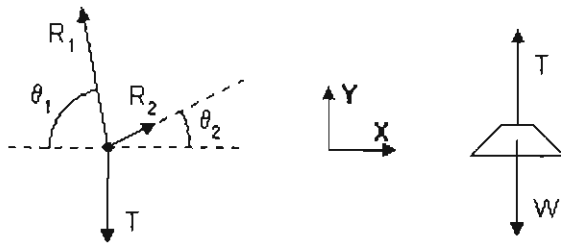


Fig. 140

Ecuaciones del nudo:

$$-R_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$R_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin \theta_2 - T = 0$$

Ecuación de la pesa:

$$T - W = 0$$

Reescribamos las ecuaciones del nudo como un

sistema de ecuaciones simultáneas para las incógnitas  $R_1$  y  $R_2$ :

$$-R_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$R_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin \theta_2 = W$$

Resolviendo por el método de determinantes tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$= -\sin (\theta_1 + \theta_2)$$

(Se usó la identidad trigonométrica

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad )$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos \theta_2 \\ W & \sin \theta_2 \end{vmatrix} = -W \cos \theta_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\cos \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & W \end{vmatrix} = -W \cos \theta_1$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cos \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} W$$

$$R_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} W$$

Estos resultados podrían haberse encontrado prácticamente por inspección de la Fig. 140, si hubiésemos usado el método del triángulo.

Calculemos los valores numéricos de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $R_1$  y  $R_2$ :

$$\theta_1 = \arctan (4) = 76^\circ$$

$$\theta_2 = \arctan (0.5) = 26.6^\circ$$

$$R_1 = \frac{\cos 26.6^\circ}{\sin 102.6^\circ} \cdot 196 = 179.6$$

$$R_2 = \frac{\cos 76^\circ}{\sin 102.6^\circ} \cdot 196 = 48.6$$

Ya podemos calcular las elongaciones de los resortes:

$$\delta_1 = \frac{R_1}{k_1} = 0.18 \text{ m} \quad \delta_2 = \frac{R_2}{k_2} = 0.10 \text{ m}$$

Las longitudes naturales de los resortes están relacionadas con las longitudes "deformadas" y las elongaciones por

$$\delta_1 = L_1 - L_{10} \quad \delta_2 = L_2 - L_{20}$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son las longitudes en la configuración deformada y  $L_{10}$  y  $L_{20}$  son las longitudes naturales.

De la Fig. 139 obtenemos

$$L_1 = \sqrt{100^2 + 400^2} = 412.31 \text{ mm} = 0.41 \text{ m}$$

$$L_2 = \sqrt{150^2 + 300^2} = 335.41 \text{ mm} = 0.33 \text{ m}$$

Por lo tanto, finalmente,

$$L_{10} = L_1 - \delta_1 = 0.41 - 0.18 = 0.23 \text{ m}$$

$$L_{20} = L_2 - \delta_2 = 0.33 - 0.10 = 0.23 \text{ m}$$

En general, los problemas de equilibrio con resortes de elongación o compresión desconocida se resuelven considerando tres etapas:

- La etapa del equilibrio, en que se relacionan las fuerzas mediante las ecuaciones de equilibrio.

- El uso de la "relación constitutiva" del resorte, o sea  $R = k \delta$ .

- La etapa geométrica en que se relacionan las longitudes naturales y las deformadas con la elongación, mediante la relación  $L = L_0 + \delta$ . (donde  $L$  es la longitud actual,  $L_0$  la longitud natural, y  $\delta$  la elongación del resorte).

**Ejemplo 14.** Dos esferillas de masa  $M = 0.5 \text{ kg}$  están unidas por un resorte de masa despreciable y constante  $k = 50 \text{ N/m}$ . Se ponen sobre una superficie cilíndrica lisa de radio  $r = 0.3 \text{ m}$ , como se ilustra. Obtener la ecuación que satisface el ángulo  $\theta$  en la situación de equilibrio. Supongar que la longitud natural del resorte coincide con el radio  $r$  y despreciar

las dimensiones de las esferillas.

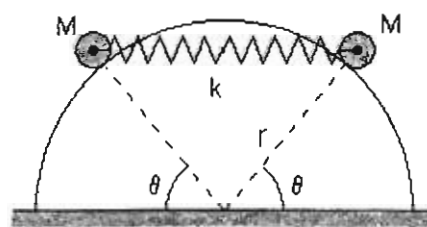
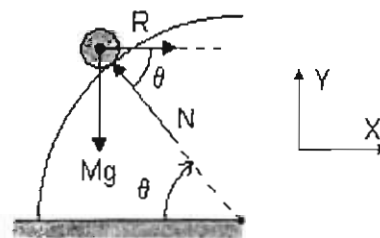


Fig. 141



(Esferilla)	
Tierra	Mg
Resorte	R
Cilindro	N

Fig. 142

Dada la simetría de la configuración, los DCL's de las esferillas son muy similares. En la Fig. 142 se muestra el de la esferilla izquierda.

Las ecuaciones de equilibrio son:

- (i)  $R - N \cos \theta = 0$
- (ii)  $N \sin \theta - Mg = 0$

Por otra parte, la fuerza del resorte es  $R = k \delta$ , donde  $\delta$  es la elongación. La longitud natural del resorte es  $L_0 = r$  y la deformada la sacamos de la Fig. 143:  $L = 2r \cos \theta$ . Entonces

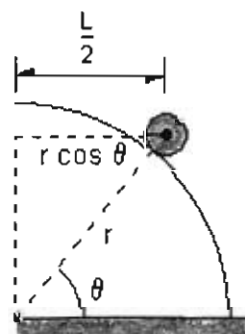


Fig. 143

$$(iii) \quad R = k(L - L_0) = k(2r \cos \theta) - kr =$$

$$= kr(2 \cos \theta - 1)$$

Despejando N de (ii), poniéndola en (i) y usando (iii) tenemos

$$kr(2 \cos \theta - 1) = \frac{Mg}{\sin \theta} \cos \theta$$

Poniendo valores numéricos de k, r y M,

$$\cot \theta - 3.06(2 \cos \theta - 1) = 0$$

Esta es la ecuación (trascendente) que satisface  $\theta$ . Sustituyendo varios valores de  $\theta$  vemos que hay dos soluciones:  $\theta = 20.52^\circ$  y  $\theta = 50.65^\circ$ . Examínelas.

**Ejemplo 15.** Plantear las ecuaciones de equilibrio del "tendedero" mostrado en la Fig. 144 y discutir su resolución según diversos conjuntos de datos.

Tenemos en total 5 cuerdas numeradas del 1 al 5 como se muestra, y dos nudos designados "a" y "b".

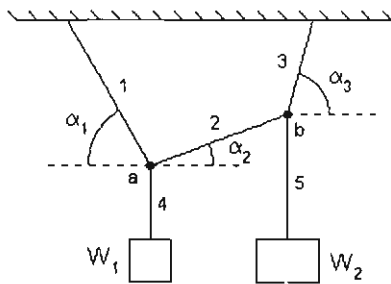


Fig. 144

Los DCL's de los nudos (o nudos) "a" y "b" están en la Fig. 145. De los diagramas de las pesas, que no trazaremos, obtenemos que  $T_4 = W_1$  y  $T_5 = W_2$ , lo cual traspasaremos ya a las ecuaciones de equilibrio de los nudos.

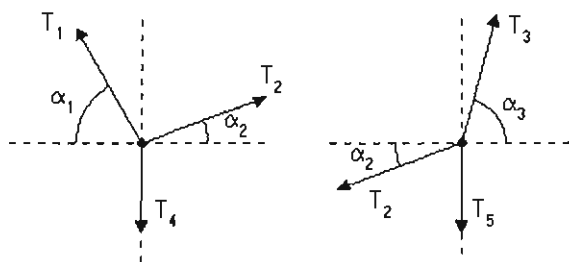


Fig. 145

Es instructivo hacer notar que podríamos haber definido unos sistemas circundando los nudos "a" y "b" con sendas superficies sistémicas cerradas, como se muestra para el nudo "a" en la Fig. 146a. La superficie que encierra al nudo "a" contiene también unos pedazos de las cuerdas 1, 2 y 4. Como sabemos, al seccionar las cuerdas brotan en los puntos de corte sus respectivas tensiones, de tal modo que el DCL del sistema así definido es el mostrado en la Fig. 146b. Viene siendo esencialmente igual al DCL del nudo "a" de la Fig. 145a.

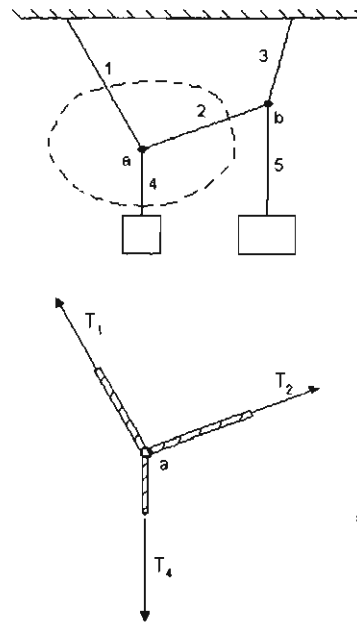


Fig. 146

He aquí las ecuaciones de equilibrio de los nudos:

Nodo "a"

- (i)  $-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$
- (ii)  $T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 - W_1 = 0$

Nodo "b"

- (iii)  $-T_2 \cos \alpha_2 + T_3 \cos \alpha_3 = 0$
- (iv)  $-T_2 \sin \alpha_2 + T_3 \sin \alpha_3 - W_2 = 0$

En ellas figuran en total 8 cantidades:  $T_1, T_2, T_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, W_1$  y  $W_2$ . Como tenemos 4 ecuaciones, necesitamos proporcionar  $8 - 4 = 4$  datos para resolver el problema.

Los datos más simples serían  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $W_1$ , quedando por calcular las tensiones  $T_1, T_2, T_3$  y el peso  $W_2$ . Este caso no encierra nada nuevo y se deja como ejercicio.

Si damos  $\alpha_1, \alpha_2, W_1$  y  $W_2$ , podemos obtener  $T_1$  y  $T_2$  de las ecuaciones (i) y (ii) y luego resolver (iii) y (iv) para  $\alpha_3$  y  $T_3$ . Procedamos con semejante conjunto de datos, suponiendo que  $\alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 20^\circ, W_1 = 300$  y  $W_2 = 200$  (en newtons). Las ecuaciones del nodo "a" se vuelven

$$-T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 20^\circ = 0$$

$$T_1 \sin 60^\circ + T_2 \sin 20^\circ = 300$$

cuya solución es

$$T_1 = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot 300 = 286.2$$

$$T_2 = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot 300 = 152.3$$

Sustituyendo en las ecuaciones (iii) y (iv) tenemos

$$-152.3 \cos 20^\circ + T_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$-152.3 \sin 20^\circ + T_3 \sin \alpha_3 - 200 = 0$$

de donde

$$(v) \quad T_3 \sin \alpha_3 = 252.1$$

$$(vi) \quad T_3 \cos \alpha_3 = 143.1$$

Dividiendo miembro a miembro se cancela  $T_3$  y obtenemos

$$\tan \alpha_3 = \frac{252.1}{143.1} = 1.76$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 60.4^\circ$$

Finalmente, de la ecuación (v),

$$T_3 = \frac{252.1}{\sin 60.4^\circ} = 290$$

**Ejemplo 16.** Para el sistema en equilibrio mostrado en la Fig. 147a, expresar la altura  $h$  en términos de la masa  $M$ . Suponer poleas ideales sin masa.

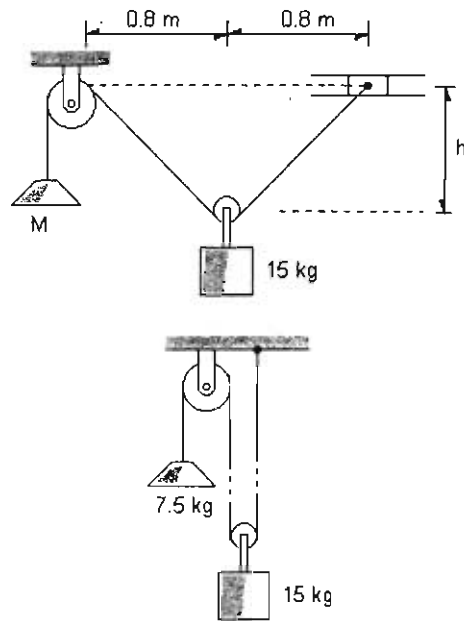


Fig. 147

Está claro que cuanto mayor sea  $M$  menor será la altura  $h$ . Cuando  $M$  tiende a infinito,  $h$  debe tender a cero. Si  $M = 7.5$  kg, debemos obtener la configuración de la Fig. 147b. Notemos que existe una sola tensión  $T$  a lo largo de la única cuerda presente. Los DCL's son:

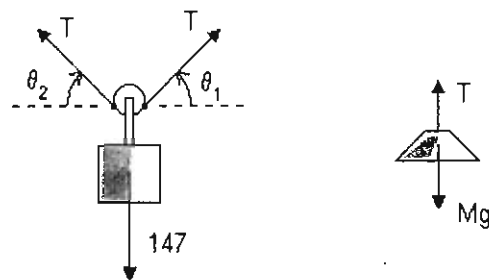


Fig. 148

Ecuaciones:

$$T \cos \theta_1 - T \cos \theta_2 = 0$$

$$T = Mg$$

$$T \sin \theta_1 + T \sin \theta_2 - 147 = 0$$



Se reducen a

$$\theta_1 = \theta_2 \equiv \theta$$

$$2T \sin \theta = 147 \quad T = 9.8 M$$

Entonces

$$\sin \theta = \frac{147}{19.6M} = \frac{7.5}{M} = \frac{h}{\sqrt{0.64 + h^2}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{36}{\sqrt{M^2 - 56.25}}$$

Existe solución para  $M > \sqrt{56.25} = 7.5 \text{ kg}$ , valor que corresponde al caso de la figura 147b.

**Ejemplo 17.** Calcular el radio  $r$  del disco en equilibrio, dados  $F = 120 \text{ N}$ ,  $k = 3000 \text{ N/m}$ ,  $L_0 = 450 \text{ mm}$ ,  $h = 400 \text{ mm}$ ,  $d = 400 \text{ mm}$ .

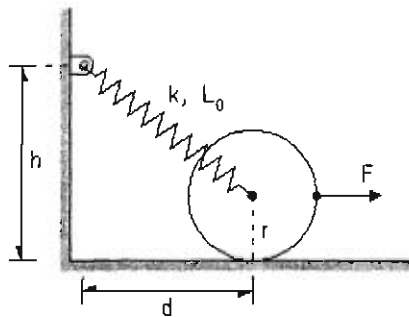
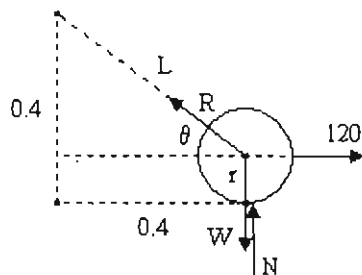


Fig. 149

La Fig. 150 es el DCL de la esfera.



{Esfera}	
Tierra	W
Resorte	R
Agente externo	120
Superficie	N

Fig. 150

Hemos puesto las longitudes en metros, y hemos introducido estas cantidades:

$L$  = longitud actual del resorte.

$\theta$  = ángulo que forma la fuerza del resorte con la horizontal.

Las ecuaciones de equilibrio son

(i)  $120 - R \cos \theta = 0$

(ii)  $R \sin \theta + N - W = 0$

A estas hay que agregar la relación  $R = k \delta$ , que se convierte en

(iii)  $R = 3000 (L - 0.45)$

En las ecuaciones (i), (ii) y (iii) aparecen las incógnitas  $R$ ,  $\theta$ ,  $N$ ,  $W$  y  $L$ . Sin embargo, tenemos esta otra relación:

(iv)  $\cos \theta = \frac{0.4}{L}$

Como  $R$  y  $\cos \theta$  vienen expresadas, por (iii) y (iv), en términos de  $L$ , la ecuación (i) contiene solamente la incógnita  $L$ . Procedamos a resolverla, poniéndola en la forma  $R \cos \theta = 120$  y sustituyendo  $R$  y  $\cos \theta$  por lo que nos dan (iii) y (iv):

$$3000(L - 0.45) \cdot \frac{0.4}{L} = 120$$

Se obtiene de aquí

$$L = 0.5 \text{ m}$$

de donde se obtiene luego el radio de la esfera:

$$r = 0.1 \text{ m} = 100 \text{ mm}$$

En vista de que no conocemos el peso  $W$ , no podemos calcular la normal  $N$ .

Note que la clave para resolver este problema consistió en trabajar con la longitud actual  $L$ . Se hubiera complicado innecesariamente si hubiésemos escogido trabajar con el radio " $r$ " directamente.

**Ejemplo 18.** Dos collarines están insertados en varillas lisas, una vertical y la otra horizontal, como se muestra en la Fig. 151. Los pesos de los collarines son 110 N y 80 N, y la tensión de la cuerda vale 110 N. Calcular las fuerzas normales que ejercen las varillas sobre los collarines, y la tensión del resorte.

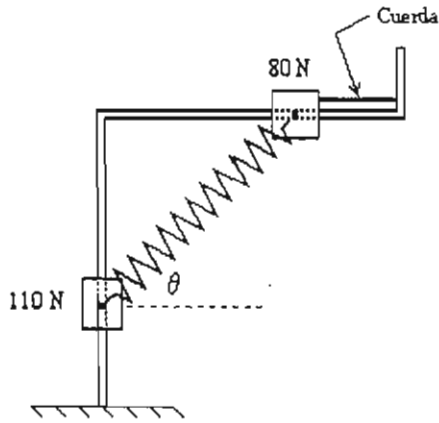
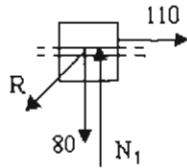


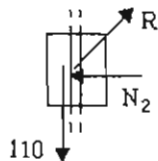
Fig. 151

Las Figs. 152 y 153 son los DCL's de los collarines.



[Collarín de 80 N]	
Tierra	80
Cuerda	110
Guía horizontal	$N_1$
Resorte	R

Fig. 152



[Collarín de 110 N]	
Tierra	110
Guía vertical	$N_2$
Resorte	R

Fig. 153

Ecuaciones de equilibrio para el collarín de 80 N:

- (i)  $110 - R \cos \theta = 0$
- (ii)  $N_1 - 80 - R \sin \theta = 0$

Ecuaciones de equilibrio para el collarín de 110 N:

- (iii)  $R \cos \theta - N_2 = 0$
- (iv)  $R \sin \theta - 110 = 0$

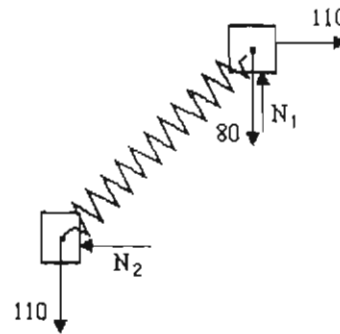
Sumando miembro a miembro (ii) y (iv) se cancela el término " $R \sin \theta$ " y se obtiene

$$N_1 = 190$$

De aquí es fácil obtener las restantes:

$$N_2 = 110 \text{ N}, \quad R = 155.56 \text{ N}, \quad \theta = 45^\circ$$

Un modo más sencillo de resolver el problema hubiera sido a partir del DCL del sistema formado por los 2 collarines y el resorte. Este DCL se muestra en la Fig. 154.



[Collarín de 80 N, Collarín de 110 N, Resorte]	
Tierra	80 y 110
Cuerda	110
Guía horizontal	$N_1$
Guía vertical	$N_2$

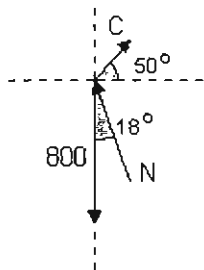
Fig. 154

Se obtendría inmediatamente  $N_2 = 110 \text{ N}$  y  $N_1 = 190 \text{ N}$ . Luego calcularíamos  $R = 110\sqrt{2} \text{ N} = 155.56 \text{ N}$ .

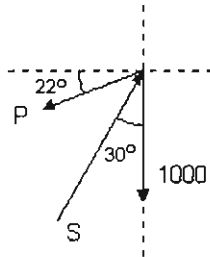
**5.4. Problemas**

Nota. Todas las superficies son lisas.

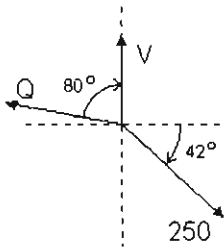
1. En cada uno de los casos (i) – (iii) se supone que la suma vectorial de las tres fuerzas es cero. Calcule las magnitudes de las fuerzas desconocidas mediante el método del triángulo (ley de los senos).



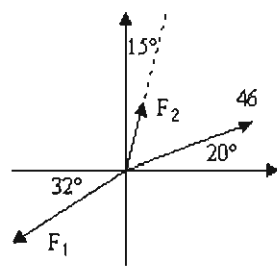
Resp.  $N = 606.4$ ;  
 $C = 291.5$



Resp.  $P = 812$ ;  
 $S = 1506$



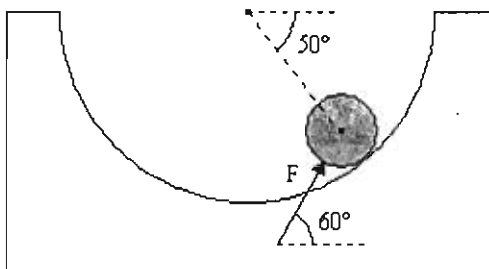
Resp.  $Q = 188.6$ ;  
 $V = 134.5$



Resp.  $F_1 = 55.25$   
 $F_2 = 14.02$

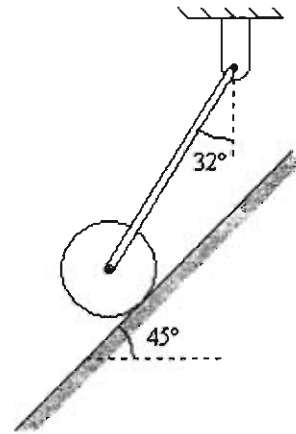
Use el método del triángulo para resolver los problemas 2, 3 y 4.

2. ¿Qué fuerza F es necesaria para mantener a la esferita de masa 6 kg en equilibrio? La esferita descansa sobre una superficie cilíndrica lisa.



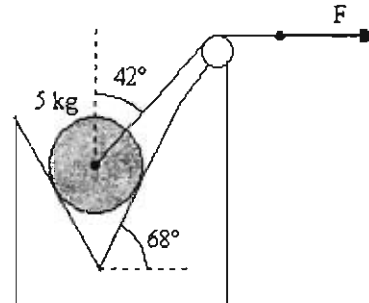
Resp. 40.22 N.

3. La esfera de peso 46 N pende de una varilla rígida ligera y recta, y descansa sobre una superficie lisa. Calcular la tensión de la varilla, "K".



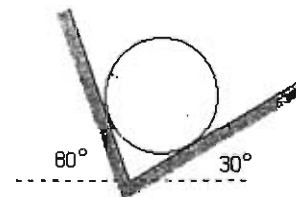
Resp.  $K = 33.38$  N.

4. ¿Qué fuerza F es necesaria para que la esfera de masa 5 kg pierda el contacto con la superficie inclinada a su izquierda?



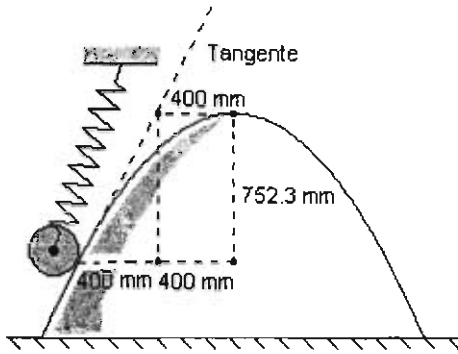
Resp. 48.35 N.

5. Calcular las fuerzas normales sobre el cilindro de peso 600 newton.



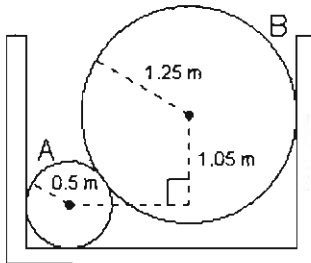
Resp. 319.2; 628.8.

6. La esferilla de peso 50 N se apoya sobre la superficie parabólica. El resorte forma un ángulo de 20° con la vertical. Calcular su tensión, así como la normal sobre la esfera.



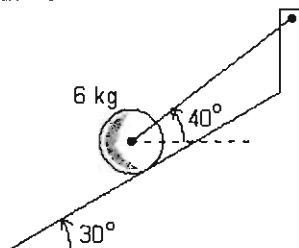
Resp.  $R = 44.6$ ;  $N = 17.3$ .

7. Calcular las fuerzas normales entre todas las superficies. Pesos: esfera menor, 200 N; esfera mayor, 500 N.



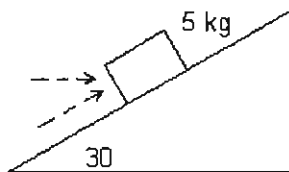
Resp. 666.66; 700; 833.33; 666.66.

8. Calcular la tensión del cable y la fuerza normal con el plano inclinado.



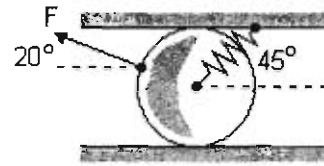
Resp. 29.8; 45.7.

9. ¿Qué fuerza aplicada (a) horizontalmente, (b) a lo largo del plano, es necesaria para mantener al bloque en equilibrio? Suponer superficies lisas.



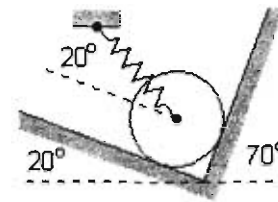
Resp. 28.29 N; 24.5 N.

10. El peso de la esfera es 300 N, la tensión del resorte es 500 N. Calcular la normal y la fuerza F.



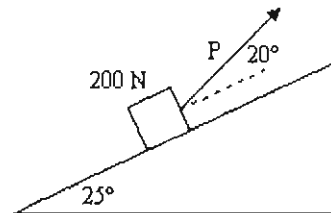
Resp. 182; 376.

11. Calcular las fuerzas normales sobre la esfera de peso 100 N. El resorte tiene una compresión de 50 N.



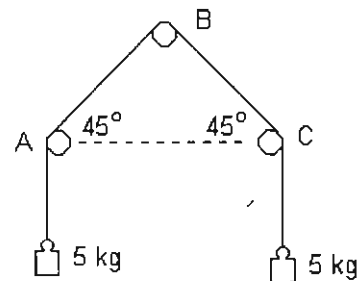
Resp. 81.2 N, 111.1 N.

12. Un bloque de 200 N se mantiene en equilibrio sobre un plano inclinado liso mediante la fuerza P. Calcular P y la reacción normal del plano.



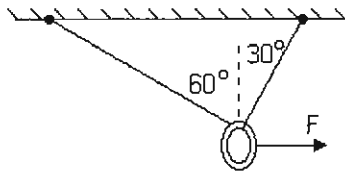
Resp.  $P = 89.9$  N,  $N = 150.5$  N.

13. Sobre tres pasadores lisos, fijos a una pared, pasa una cuerda que sostiene en sus extremos libres dos pesas idénticas, de masa 5 kg. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza sobre cada pasador.



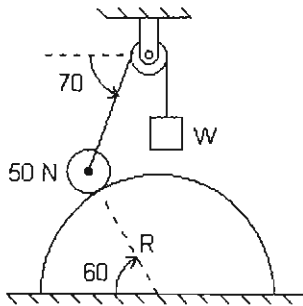
Resp. (37.5 N  $\angle -22.5^\circ$ ); (69.3 N  $\angle -90^\circ$ ); (37.5 N  $\angle -157.5^\circ$ ).

14. Se pasa una cuerda por un anillo liso de peso  $W$ . Se aplica al anillo una fuerza horizontal  $F$  de modo que esté en equilibrio en la configuración mostrada. Calcular la tensión de la cuerda y el valor de la fuerza  $F$  en términos del peso  $W$ .



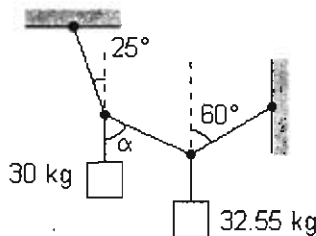
Resp.  $T = 0.732W$ ;  $F = 0.268W$ .

15. Calcular el peso  $W$  que produce el equilibrio en el sistema mostrado. Todas las superficies son lisas. Calcular la reacción en el apoyo de articulación de la polea, supuesta de masa despreciable.



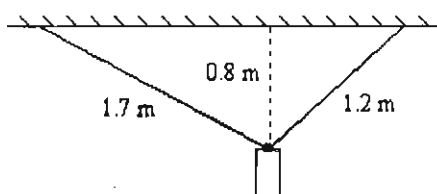
Resp. 32.6 N; 64.2 a 80°.

16. Calcular las tensiones en las cuerdas y el ángulo  $\alpha$ .



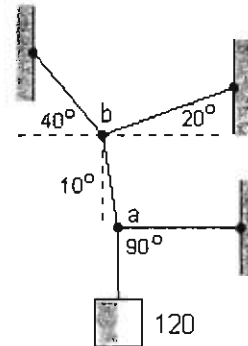
Resp. 532.9; 294; 260; 50°.

17. Un peso de 485 N cuelga de dos cuerdas de 1.7 m y 1.2 m de largo, como se muestra. Calcular las tensiones en las cuerdas.



Resp.  $T_1 = 456 \text{ N}$ ,  $T_2 = 385 \text{ N}$ .

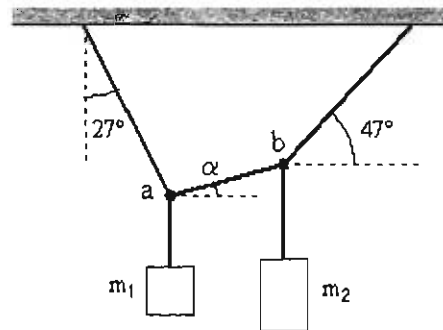
18. Calcular las tensiones en todas las cuerdas. El peso del bloque es 120 newton.



Resp. 121.8; 21.1; 138.5; 90.4; 120.

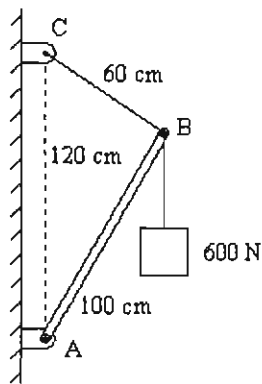
19. Dados  $m_1 = 4 \text{ kg}$  y  $m_2 = 6 \text{ kg}$ , calcular las tensiones en las cuerdas del sistema mostrado, así como el ángulo  $\alpha$ , de la siguiente manera:

Considere el DCL del segmento de cuerda comprendido entre el nodo "a" y el nodo "b", y calcule a partir de él las tensiones en las cuerdas inclinadas laterales. Luego haga el DCL del nodo "a" para calcular la tensión en la cuerda a ángulo  $\alpha$ .



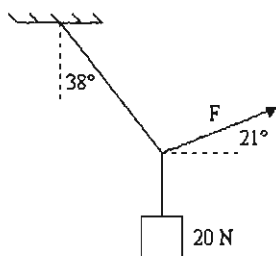
Resp. 71.13 N, 47.35 N, 40.33 N, -36.8°.

20. Un aparato para levantar pesos consiste de una barra ligera rígida AB de 100 cm de largo, que está atada al punto C por un cable BC de 60 cm de largo. Un peso de 600 N está suspendido por otro cable en B. Calcular las fuerzas en la cuerda BC y la barra AB.



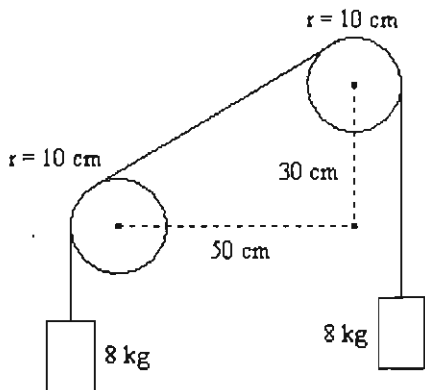
Resp. 500 N, 300 N.

21. Se aplica una fuerza  $F$  en un punto de una cuerda que sostiene un bloque de 20 N de peso. Calcular la fuerza  $F$  que equilibra al bloque, y la tensión en la parte superior de la cuerda.



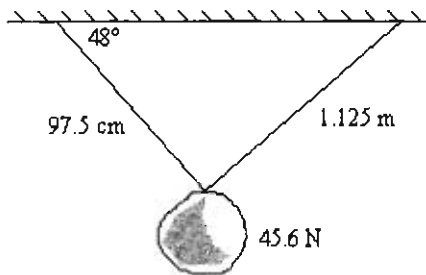
Resp.  $F = 18 \text{ N}$ ,  $T = 27.3 \text{ N}$ .

22. El sistema está compuesto de dos poleas fijas lisas de radio 10 cm. Calcular la fuerza total sobre cada polea.



Resp.  $(77.25 \text{ N} \angle -29.52^\circ)$ ,  $(136.45 \text{ N} \angle -119.52^\circ)$

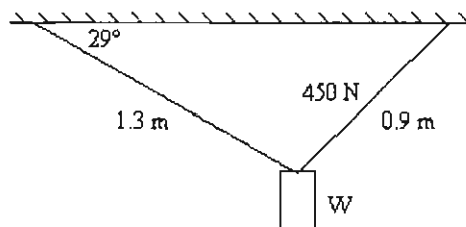
23. Un peso de 45.6 N cuelga de dos cuerdas. Calcular la tensión en la cuerda más corta.



Resp. 34.9 N

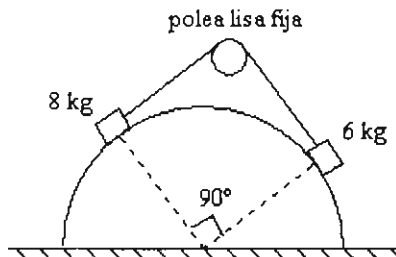
24. Dos fuerzas forman un ángulo de  $60^\circ$  una con otra, y su suma tiene magnitud 14 N. Una de las fuerzas es 4 N mayor que la otra. Calcular las magnitudes de las dos fuerzas y el ángulo que su suma hace con la fuerza mayor.

25. Un peso  $W$  cuelga de dos cuerdas como se muestra. Dada la tensión en la cuerda derecha, 450 N, calcular el peso  $W$ .



Resp.  $W = 493 \text{ N}$ .

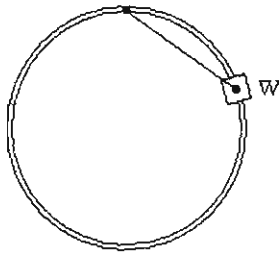
26. Dos cuerpos de masas 6 kg y 8 kg están en equilibrio sobre un cilindro liso, conectados por una cuerda que pasa por una polea fija. Los segmentos de la cuerda son tangentes al cilindro en los puntos donde están los cuerpos. Calcular la tensión en la cuerda y la fuerza normal sobre cada cuerpo.



Resp. 4.8 kgf, 3.6 kgf, 6.4 kgf.

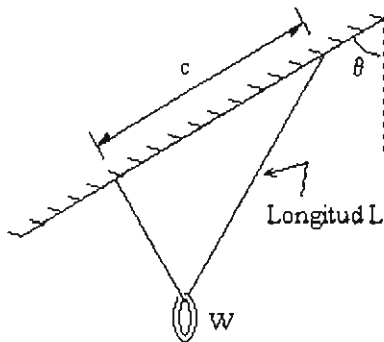
27. Un pequeño collarín de peso  $W$ , que puede deslizarse a lo largo de un anillo vertical liso, se mantiene fijo mediante una cuerda atada al punto más

alto del anillo. Calcular la reacción del anillo sobre el collarín.



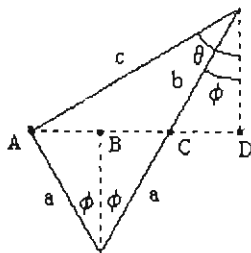
Resp.  $W$ .

28. Una cuerda de longitud  $L$  tiene sus extremos atados a dos puntos separados una distancia " $c$ ", que se hallan sobre una superficie inclinada a  $\theta$  grados con la vertical. La cuerda pasa por un anillo liso de peso  $W$ . Calcular la tensión de la cuerda.



Resp.  $\frac{WL}{2\sqrt{L^2 - c^2 \sin^2 \theta}}$

Sugerencia. Introduzca los segmentos " $a$ " y " $b$ " mostrados abajo (de tal modo que  $L = 2a + b$ ).



Use las relaciones

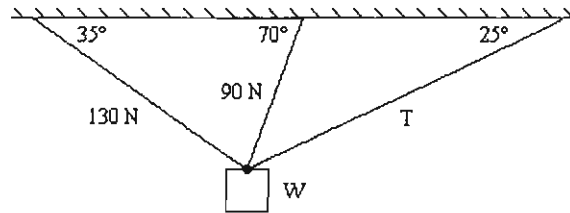
$$2a + b = L$$

$$AC = 2a \sin \phi$$

$$AC = AD - CD = c \sin \theta - b \sin \phi$$

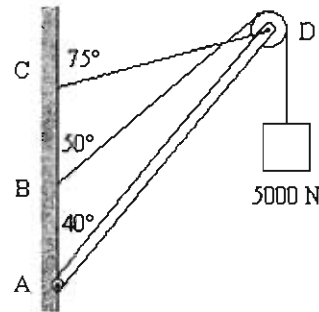
De la condición de equilibrio del anillo obtenga " $\sin \phi$ ".

29. Tres cuerdas, con las inclinaciones mostradas en la figura, soportan un bloque de peso  $W$ . Las tensiones en las dos primeras cuerdas valen 130 N y 90 N. Calcular la tensión en la tercera y el peso  $W$  del bloque.



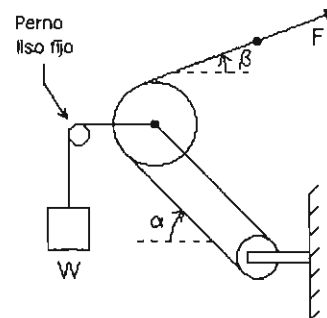
Resp. 194.4 N, 83.5 N.

30. La barra rígida AD soporta un bloque de 5000 N mediante una polea lisa en D y un cable fijo en C y D. Calcular la fuerza en la barra y en el cable CD.

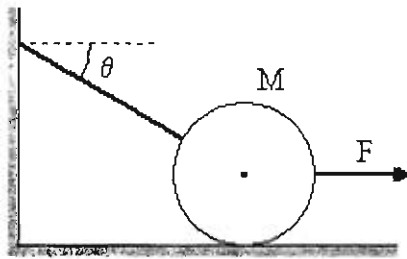


Resp.  $T = 4090$  N,  $C = 12100$  N.

31. En el sistema de la figura, suponer que las poleas son lisas y sin masa. Demostrar que para que exista equilibrio debe cumplirse que  $\alpha \leq 30^\circ$ .

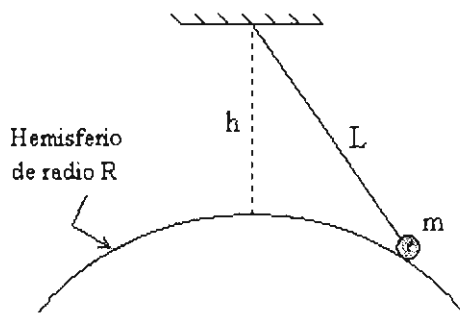


32. La esfera de masa  $M$  está sujeta a una cuerda inclinada a  $\theta$  grados y fija a una pared. ¿Para qué valor de la fuerza  $F$  se perderá el contacto entre la esfera y la superficie horizontal?



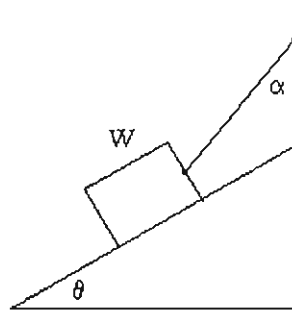
Resp.  $F = Mg \cot \theta$ .

33. Una esferilla de masa  $m$  está atada a una cuerda de longitud  $L$  como se muestra. La esferilla descansa sobre una superficie semiesférica de radio  $R$ . Expresar la tensión  $T$  de la cuerda en función de  $m$ ,  $L$ ,  $h$  y  $R$ .



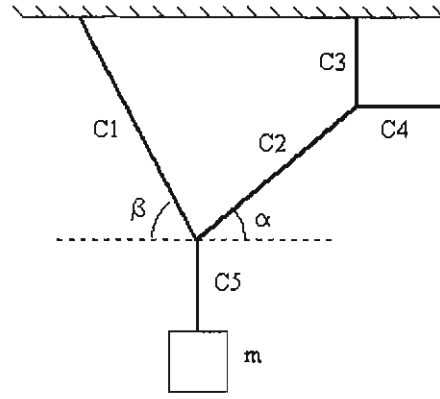
Resp.  $T = mgL/(R + h)$

34. Dados  $\theta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 40^\circ$  y  $W = 500$  N, calcular la tensión en la cuerda y la normal en el plano.



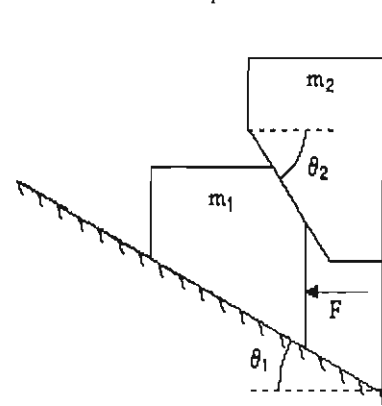
Resp.  $T = 266$  N,  $N = 342$  N.

35. Un bloque de masa  $m = 28$  kg está suspendido de un sistema de cuerdas como se muestra. Las cuerdas C3 y C4 están vertical y horizontal, respectivamente. Dados  $\alpha = 39^\circ$  y  $\beta = 28^\circ$ , calcular las tensiones en todas las cuerdas.



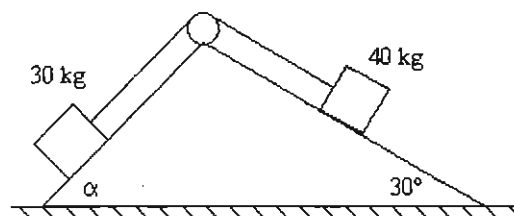
Resp.  $T_1 = 263.2$  N,  $T_2 = 231.7$  N.

36. Con los datos  $m_1 = 28$  kg,  $m_2 = 22$  kg,  $\theta_1 = 30^\circ$  y  $\theta_2 = 32^\circ$ , calcular la fuerza  $F$  necesaria para mantener el equilibrio de los dos cuerpos.



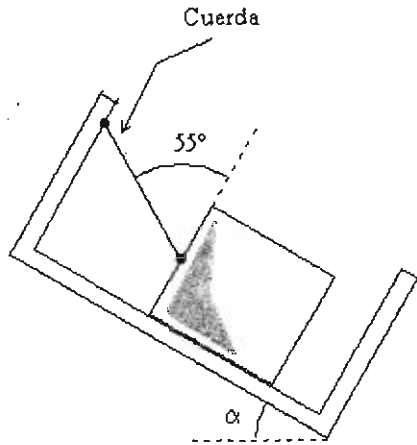
Resp.  $F = 148.2$  N.

37. Para el sistema de dos bloques en equilibrio, calcular la tensión en la cuerda y el ángulo  $\alpha$ .



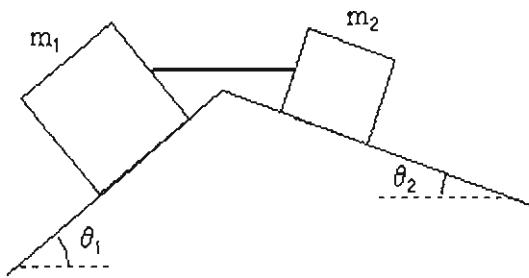
38. La cuerda, inclinada a  $55^\circ$ , puede soportar una tensión máxima de 40 kN. La caja sobre la que descansa el bloque de masa  $5$  Mg es lisa. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener el ángulo  $\alpha$  sin que la cuerda se rompa?



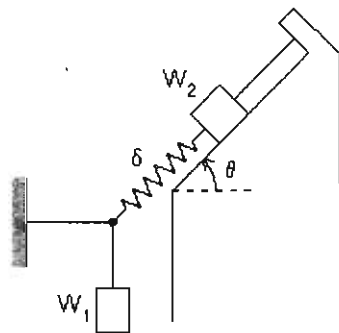


Resp.  $\alpha = 48^\circ$ .

39. La cuerda que une a los dos bloques es horizontal. Con los datos  $\theta_1 = 40^\circ$ ,  $\theta_2 = 20^\circ$  y  $m_2 = 80$  kg, calcular la masa  $m_1$ .

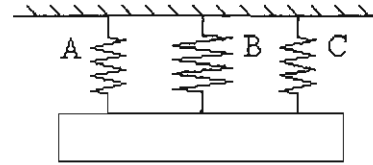


40. Para el sistema en equilibrio ilustrado, calcular la constante del resorte,  $k$ , la tensión en la cuerda superior,  $T_3$ , y el peso del bloque 2,  $W_2$ . Se conocen la fuerza normal entre el bloque 2 y el plano,  $N = 120$  N, el ángulo  $\theta = 53.13^\circ$ , el peso del bloque 1,  $W_1 = 200$  newton, y la elongación del resorte,  $\delta = 125$  mm.

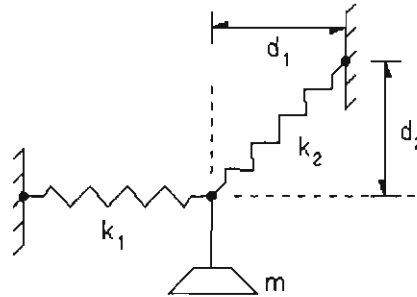


Resp. 2000 N/m; 410 N; 200 N.

41. Un cuerpo de masa 400 N está sostenido por tres resortes de iguales longitudes naturales. Los resortes A y C son idénticos, de constante  $k_A = k_C = 800$  N/cm, y el resorte B es de constante  $k_B = 600$  N/cm. Calcular las tensiones en los tres resortes.

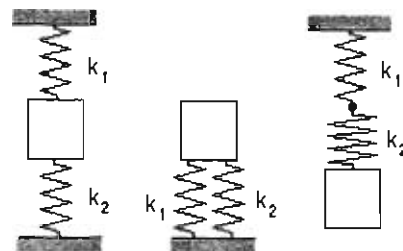


42. En el sistema en equilibrio mostrado calcular  $d_1$  sabiendo que,  $k_1 = 800$  N/m,  $k_2 = 1500$  N/m,  $\delta_1 = \delta_2 = 120$  mm,  $m = 8$  kg y  $d_2 = 600$  mm.

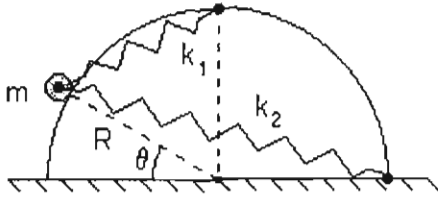


Resp. 735 mm.

43. Un bloque de masa  $m$  se sostiene en equilibrio mediante dos resortes de los tres modos mostrados. Los resortes son de iguales longitudes naturales,  $L$ , y de constantes elásticas distintas,  $k_1$  y  $k_2$ . Para cada caso, (a) haga una figura de la situación en que los resortes no están deformados; (b) junto a la figura anterior, haga otra de la situación deformada; (c) haga los DCL's de los sistemas {Resorte1}, {Resorte2} y {Bloque}; (d) calcule en cada caso el desplazamiento vertical  $D$  del bloque, medido desde la configuración no deformada del sistema.

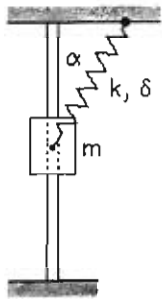


44. Dados:  $R = 1 \text{ m}$ ;  $\theta = 30^\circ$ ;  $L_{01} = 0.75 \text{ m}$ ;  $L_{02} = 1.9 \text{ m}$ ;  $k_1 = 400 \text{ N/m}$ ;  $k_2 = 500 \text{ N/m}$ , calcular el peso de la esferilla y la fuerza normal.



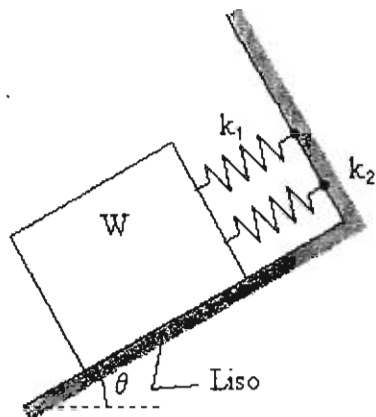
Resp. 14.8; 27.8.

45. El collarín de peso 20 N es guiado por una barra circular vertical. El resorte tiene constante elástica  $k = 1000 \text{ N/m}$  y su elongación es  $\delta = 22 \text{ mm}$ . Calcular el ángulo  $\alpha$  que forma el resorte con la vertical.



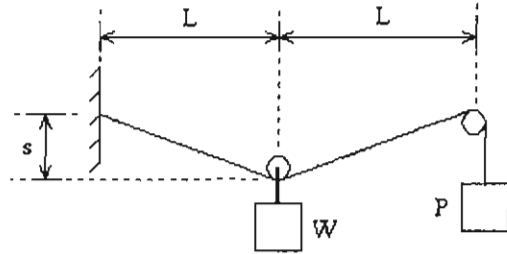
Resp.  $25^\circ$ .

46. Un bloque se mantiene en equilibrio sobre un plano liso de inclinación  $\theta$  mediante dos resortes de longitudes naturales iguales,  $L_0$ , y constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , como se muestra en la figura. Calcular las tensiones de los resortes en términos de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $W$  y  $\theta$ .



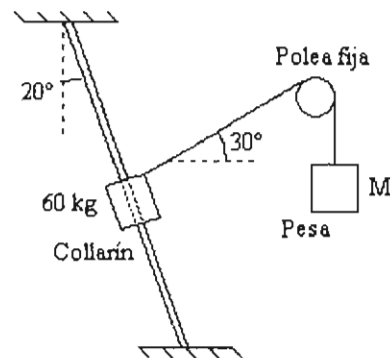
Resp.  $F_1 = (k_1/(k_1 + k_2))W \text{ sen } \theta$ .

47. Un peso  $W$  está suspendido en un cable como se muestra en la figura. ¿Qué peso  $P$  es necesario para mantener el equilibrio en la situación dada? Expresarlo en términos de  $s$ ,  $L$  y  $W$ .



Resp.  $P = \frac{1}{2} W \sqrt{1 + \left(\frac{L}{s}\right)^2}$

48. Calcular el valor de la masa  $M$  para que exista equilibrio en el sistema mostrado.



Resp.  $M = 324.7 \text{ kg}$ .

CAPÍTULO 6

FUERZA DE FRICCIÓN O ROZAMIENTO

6.1. Una experiencia

En general, la interacción entre dos superficies en contacto simple es más complicada de lo que hemos descrito hasta ahora. En realidad consta no solamente de la conocida fuerza normal "N" –que como sabemos actúa perpendicularmente a las superficies contactantes–, sino adicionalmente de una componente que es tangencial a dichas superficies: la llamada *fuerza de fricción o rozamiento*.

Las propiedades principales de la fuerza de fricción pueden deducirse a partir de una experiencia muy simple. Coloquemos una caja pesada sobre una superficie horizontal (Mire la Fig. 155) y tratemos de ponerla en movimiento aplicándole cierta fuerza horizontal F. Por ahora apartemos de la discusión las fuerzas verticales del peso y la normal, que se cancelan.

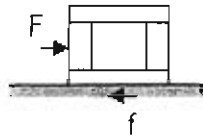


Fig. 155

Sabemos por experiencia que si F es muy pequeña la caja no se moverá. De la condición de equilibrio se deduce entonces que, al mismo tiempo que se aplica F, se genera otra fuerza igual y opuesta, "f", que contrarresta su efecto. Esta es la *fuerza de fricción*.

Incrementemos poco a poco la fuerza aplicada F (mire la Fig. 156), *todavía sin que la caja se mueva*. Debe ocurrir que la fricción f se incremente en la misma proporción que F, a modo de mantener la igualdad  $f = F$  que garantiza el equilibrio observado.

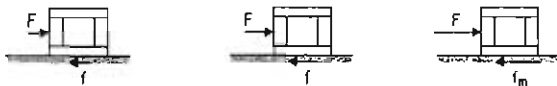


Fig. 156. La fricción aumenta con F hasta llegar a su valor máximo  $f_m$ .

Sin embargo, sabemos que sí es posible mover la caja empujándola con una fuerza F suficientemente

grande. Esto significa que se llega a una situación en que la fricción ya no puede compensar la fuerza aplicada F, de tal manera que el equilibrio se rompe.

La fricción es la resistencia que oponen las superficies al deslizamiento relativo mutuo. Pero las superficies no pueden desarrollar esta oposición más allá de cierto valor máximo  $f_m$ . En tanto F es menor que  $f_m$ , hay equilibrio. Si F es justamente igual a  $f_m$ , la caja está *a punto de moverse* (su movimiento es *inminente*), esto es, cualquier cosa que aumente F por encima de  $f_m$  motivará que la caja se mueva ("se deslice" o "resbale"), por leve que sea su movimiento. Si F sobrepasa el valor  $f_m$  la caja se moverá aceleradamente.

Relacionemos lo anterior con el DCL completo de la caja, supuesta en equilibrio.

El contacto de la caja con la superficie horizontal genera sobre aquella una fuerza inclinada S (Fig. 157a). La componente vertical de S es la familiar fuerza normal N que equilibra al peso; la componente horizontal es la fuerza de fricción f que equilibra a la fuerza aplicada F (Fig. 157c). Es práctico trazar en los DCL's la fuerza S ya descompuesta en sus dos componentes N y f, como vemos en las Figs. 157b,c.

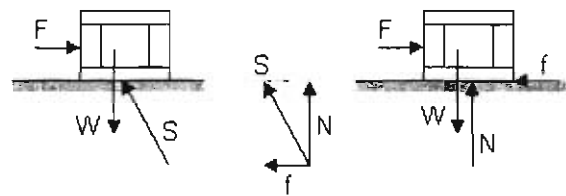


Fig. 157

En general,

(29) El contacto simple entre superficies da lugar a una interacción S con dos componentes que son la normal N y la fricción f.

Recordemos entonces que toda normal N viene acompañada en general de una fuerza de fricción f.

### 6.2. Propiedades de la fricción máxima

De nuevo hay que recurrir al experimento a fin de obtener las características de la fricción *máxima*  $f_m$ . Esta vez investigamos cómo depende el *estado de movimiento inminente* con la normal  $N$ , las dimensiones y los materiales de fabricación de la caja. He aquí las observaciones experimentales:

- $f_m$  es proporcional a su normal asociada  $N$ :

$$f_m = \mu N$$

El factor de proporcionalidad  $\mu$  se denomina el *coeficiente de fricción*. Es un número puro (sin dimensiones físicas) que depende de la naturaleza de las superficies en contacto y del estado de dichas superficies (pulcritud, lubricación, pulimento, corrosión, oxidación, humedad, etc.).

- $f_m$  no depende del área de contacto.

El contacto simple puede ser de punto, como en los casos representados en las Figs. 158a y 158b. La fricción máxima que se desarrolla en estos contactos también obedece la relación  $f_m = \mu N$ .

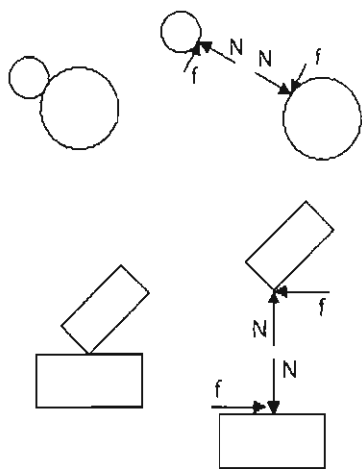


Fig. 158

La fricción es una fuerza muy compleja. Los modelos atómicos de la fricción no explican ciento por ciento las observaciones macroscópicas. Incluso la fricción macroscópica puede depender de la "historia" del contacto, es decir, del modo como ambos cuerpos hayan llegado al equilibrio.

En la tabla que sigue se muestran valores típicos del coeficiente de fricción.

Materiales	Condiciones de superficies	Coefficiente de fricción
Metal sobre Metal	Limpias	0.4 - 1.0
	Bien lubricadas	0.2 - 0.4
No-metal sobre No-metal	No lubricadas	0.4 - 0.9
	Bien lubricadas	0.1 - 0.2
Metal sobre No-metal	No lubricadas	0.4 - 0.6
	Bien lubricadas	0.05 - 0.12

Las tablas de valores de coeficientes de fricción no son muy confiables. Los óxidos e impurezas presentes en las superficies afectan apreciablemente el valor de  $\mu$ . Es mejor determinar este coeficiente experimentalmente en cada escenario, para lo cual el procedimiento más simple es el dado en el Ejemplo 20 en la página siguiente.

Una superficie *lisa* es aquella cuyo coeficiente de fricción relativo a cualquiera otra superficie vale cero. Se trata obviamente de un caso ideal (muy utilizado en la práctica).

En la situación de movimiento inminente, la fuerza de fricción sobre el cuerpo es la máxima, dada por  $f_m = \mu N$ . Apenas el cuerpo empieza a moverse, la fricción disminuye abruptamente desde su valor máximo  $f_m$  hasta otro valor  $f_k$  denominado la *fricción cinética* (Fig. 159). Ésta obedece *siempre* la relación  $f_k = \mu_k N$ , donde  $\mu_k$  es el *coeficiente de fricción cinética*. Grosso modo tenemos que  $\mu_k \approx 0.75 \mu$ .

En los problemas donde intervienen fuerzas de fricción debe tomar en consideración que la fricción posee un *rango de valores*, desde 0 hasta su valor máximo  $\mu N$ . *Solamente en la situación de movimiento inminente puede usarse la relación  $f = f_m = \mu N$* ; en cualquiera otra situación *no existe* relación empírica alguna entre la fuerza de fricción  $f$  y la normal  $N$ .

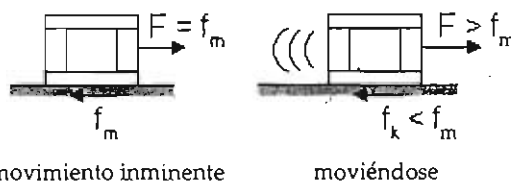


Fig. 159

6.3. Ejemplos

**Ejemplo 19.** Se presiona un bloque de 50 N de peso contra una pared (Fig. 160a). El coeficiente de fricción pared - bloque vale  $\mu = 0.4$ . (a) ¿Con qué fuerza mínima  $F$  debe presionarse para que el bloque no se mueva? (b) Si se presiona con el doble de la fuerza anterior, ¿cuánto vale la fuerza de fricción?

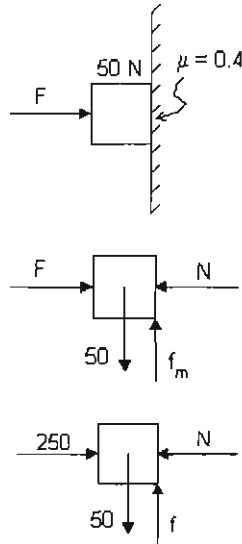


Fig. 160

La Fig. 160b muestra el DCL del bloque correspondiente al inciso (a). Si deseamos que el bloque no se mueva, la fricción debe soportar el peso de 50 newton. Supongamos que aplicáramos una fuerza  $F$  bastante grande; entonces la fricción se ajustaría fácilmente al valor requerido de 50. Vayamos disminuyendo esa fuerza. Lo podemos hacer hasta la situación de movimiento inminente del bloque, es decir, la *mínima* fuerza  $F$  requerida corresponderá al valor *máximo* de  $f$ , o sea  $f_m = \mu N$ .

Tenemos así que

$$N \approx \frac{f_m}{\mu} = \frac{50}{0.4} = 125 = F$$

En el inciso (b), si  $F = 250$  la fricción máxima sería  $f_m = \mu N = 0.4 \times 250 = 100$ . Esta fricción sería suficiente para mantener un bloque de 100 newton. En este caso la fricción no alcanza a llegar a su valor máximo, sino que toma el valor necesario para sostener el bloque de 50 N, es decir,  $f = 50$  newton (Fig. 160c).

**Ejemplo 20.** Un procedimiento muy simple para determinar el coeficiente de fricción entre dos superficies 1 y 2 consiste en utilizar un bloque del material 1 y una barra giratoria del material 2. Luego se colocan como se muestra en la Fig. 161a y se va aumentando el ángulo  $\theta$  hasta que se observe un leve movimiento del bloque. Esto corresponderá aproximadamente a la situación de movimiento inminente o sea de fricción máxima.

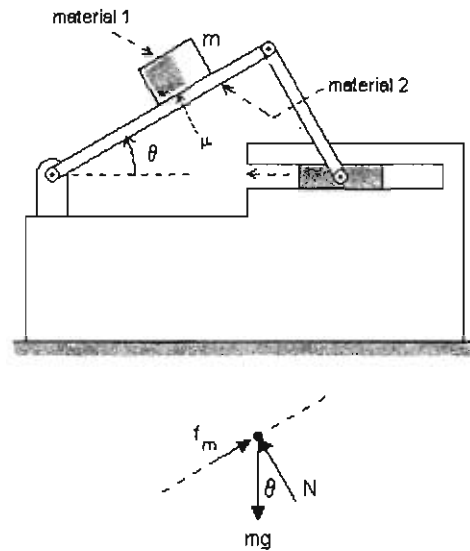


Fig. 161

De las ecuaciones de equilibrio del bloque,

$$f_m = mg \text{ sen } \theta$$

$$N = mg \text{ cos } \theta$$

junto con

$$f_m = \mu N$$

se deduce que

$$\mu = \text{tan } \theta$$

Midiendo  $\theta$  obtenemos  $\mu$ .

**Ejemplo 21.** El sistema de tres bloques y dos cuerdas de la Fig. 162a se halla en equilibrio para los siguientes valores de los pesos:  $W_1 = 90 \text{ N}$ ,  $W_2 = 140 \text{ N}$  y  $W_3 = 500 \text{ N}$ .

- (a) Calcular la fuerza de fricción sobre el bloque  $W$ .
- (b) Se observa que al aumentar en  $60 \text{ N}$  el peso del bloque  $W_2$ , el movimiento del sistema es inminente; calcular el coeficiente de fricción.

(a) De los DCL's de los bloques colgantes, dados en la Fig. 162b, sacamos que las tensiones de las cuerdas valen  $T_1 = W_1 = 90$  y  $T_2 = W_2 = 140$ . Traspasemos estos valores al DCL del bloque central, como se muestra en la Fig. 162c.

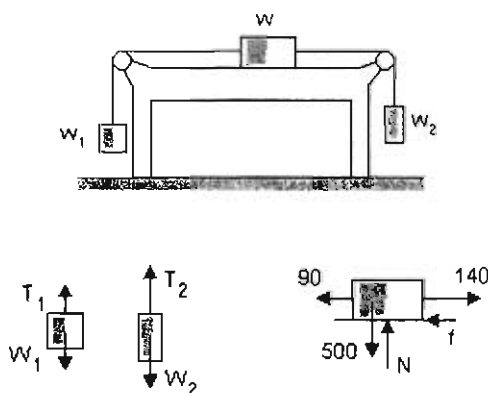


Fig. 162

Imponiendo la condición de equilibrio en la dirección horizontal obtenemos que la fricción debe valer  $f = 50$ . ¿Por qué no se aplicó aquí la relación  $f_m = \mu N$ ?

(b) En esta otra situación, el peso que cuelga a la derecha vale  $140 + 60 = 200$  y el sistema está **a punto de moverse**. El DCL del bloque  $W$  es similar al de la Fig. 162c, con dos modificaciones:

- La fuerza de  $140$  hacia la derecha debe reemplazarse por una de  $200$ .
- La fricción esta vez es la máxima, así que la indicamos con  $f_m$  en lugar de  $f$ .

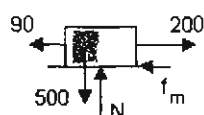


Fig. 163

Queda el DCL que vemos en la Fig. 163. De aquí obtenemos

$$N = 500 \quad \text{y} \quad f_m = 110.$$

Usando la relación  $f_m = \mu N$  resulta

$$\mu = \frac{f_m}{N} = \frac{110}{500} = 0.22$$

**Ejemplo 22.** El pony puede jalar a lo más con fuerza de  $2000 \text{ N}$ . El peso de la caja es  $5000 \text{ N}$  y su coeficiente de fricción con el suelo es  $\mu = 0.5$ .

- (a) ¿Qué fuerza vertical mínima debe ejercer el hombre en la situación de la Fig. 164 para que la caja esté a punto de deslizarse?
- (b) ¿Cuánto valdría esta fuerza si se aplicara horizontalmente?

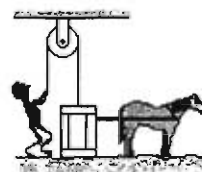


Fig. 164

(a) Para poder mover la caja, el pony debe vencer la máxima fuerza de fricción caja-suelo. Si el hombre no jalara la cuerda, la normal sobre la caja sería igual al peso de la misma, o sea  $N = 5000$ , y la fricción máxima sería

$$f_m = \mu N = 0.5 \times 5000 = 2500$$

Como el pony puede aplicar a lo más  $2000 \text{ newton}$ , no logra mover la caja en esta situación.

El hombre coopera jalando la caja hacia arriba, de modo que disminuya la normal y con ello también la fricción máxima. Deseamos que la fricción máxima sea de  $2000$ , valor al que corresponde una normal de  $N = f_m/\mu = 2000/0.5 = 4000$ . Para que la normal se reduzca a este valor el hombre debe jalar con una fuerza de  $1000$ .

(b) Hacer las cosas como en la Fig. 164 no es eficiente. Es mejor que el hombre empuje horizontalmente la caja con una fuerza de  $500$ . Entonces entre el pony y el hombre producirán una fuerza de  $2000 + 500 = 2500$ , que iguala la fricción máxima a vencer.

A continuación están los DCL's correspondientes a (a) y (b) junto con la resolución matemática detallada del problema.

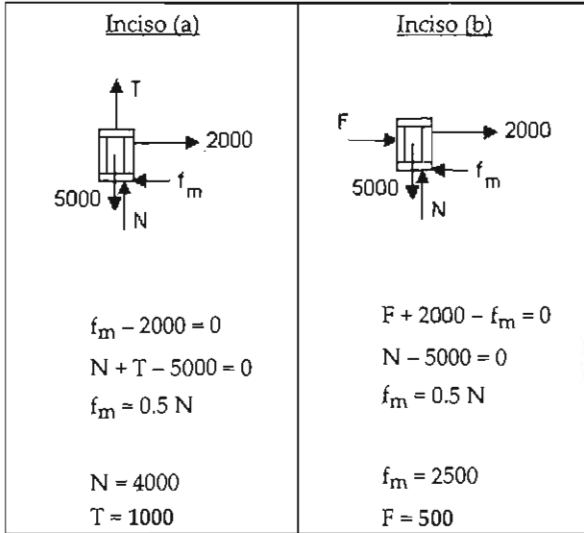


Fig. 165

**Ejemplo 23.** Dados  $W_1 = 40 \text{ N}$  y  $W_2 = 160 \text{ N}$ , calcular el valor de  $W_3$  para el cual el sistema estará en movimiento inminente. El coeficiente de fricción Bloque1 ↔ Bloque2 es  $\mu = 0.3$ , y el coeficiente Bloque2 ↔ Mesa es  $\mu' = 0.4$ . Suponer que las poleas son lisas.

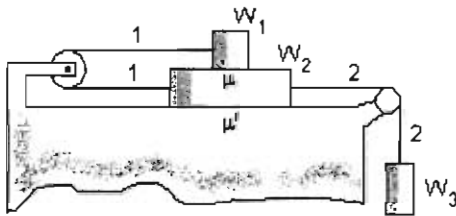
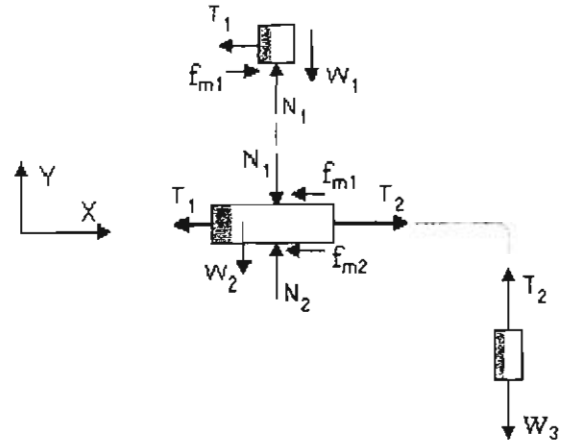


Fig. 166

Numeremos las dos cuerdas como se muestra en la Fig. 166. Dado que el Bloque1 tiende a moverse hacia la izquierda, la fricción sobre él estará hacia la derecha. La reacción de esta fricción, que actúa sobre el Bloque2 en su cara superior, estará hacia la izquierda. Observe estas dos fuerzas en los DCL's mostrados abajo.

El recuadro correspondiente al Bloque3 es evidente y lo hemos suprimido. Observe en los dos recuadros cómo están las fuerzas normales y de fricción Bloque1 ↔ Bloque2.

El bloque inferior tiende a moverse hacia la derecha, y tanto el bloque superior como la mesa se oponen a este movimiento mediante fuerzas de fricción dirigidas hacia la izquierda.



(Bloque1)	
Tierra	$W_1$
Cuerda1	$T_1$
Bloque2	$N_1, f_{m1}$

(Bloque2)	
Tierra	$W_2$
Cuerda1	$T_1$
Cuerda2	$T_2$
Bloque1	$N_1, f_{m1}$
Mesa	$N_2, f_{m2}$

Fig. 167

Escogiendo el mismo sistema de ejes X y Y para los tres cuerpos, tenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-T_1 + f_{m1} = 0, \quad N_1 - W_1 = 0$$

$$-T_1 + T_2 - f_{m1} - f_{m2} = 0, \quad -N_1 + N_2 - W_2 = 0$$

$$T_2 - W_3 = 0$$

Estas ecuaciones se complementan con las que expresan la condición de movimiento inminente, que son

$$f_{m1} = \mu N_1 \quad f_{m2} = \mu' N_2$$

Resolviendo,

$$W_3 = (2\mu + \mu') W_1 + \mu' W_2$$

$$W_3 = (2 \times 0.3 + 0.4) 40 + 0.4 \times 160 = 104$$

**Ejemplo 24.** Se desea aplicar a una caja de masa "m" la mínima fuerza F que logre empezar a moverla (Fig. 168). ¿Cuánto vale F y a qué ángulo  $\theta$  debe aplicarse?

La mínima fuerza F será aquella que motive que la caja esté a punto de deslizarse. Sea  $\theta$  el ángulo que forma F con la horizontal (Fig. 168a). El DCL de la caja en la situación que nos interesa es la Fig. 168b.

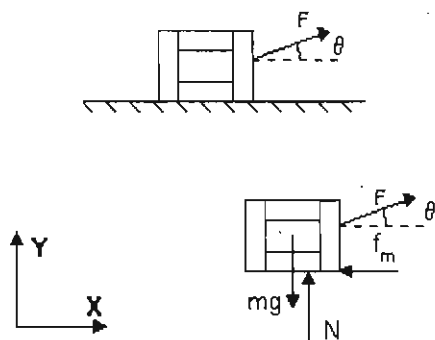


Fig. 168

Las ecuaciones de equilibrio son

$$(r1) \quad F \cos \theta - f_m = 0$$

$$(r2) \quad F \sin \theta + N - mg = 0$$

junto con la condición de movimiento inminente

$$(r3) \quad f_m = \mu N$$

Combinando las tres ecuaciones obtenemos F como función de  $\theta$  en la forma

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

Para hallar el valor de  $\theta$  que corresponde al valor mínimo de F, derivamos F( $\theta$ ) con respecto a  $\theta$  e igualamos a cero:

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{\mu mg (-\sin \theta + \mu \cos \theta)}{(\cos \theta + \mu \sin \theta)^2} = 0$$

de donde obtenemos que el ángulo  $\theta$  buscado satisface la relación

$$\tan \theta = \mu$$

El valor correspondiente de F lo obtenemos

sustituyendo este valor de  $\theta$  en la expresión de la fuerza F. Usando

$$\sin \theta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

encontramos

$$F = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} mg$$

Para  $\mu = 1$  tenemos un ángulo de  $45^\circ$  y una fuerza necesaria  $F = 0.7 mg$ .

Note que si la fuerza se aplicara horizontalmente el valor mínimo sería  $F = \mu mg$ . Para  $\mu = 1$  sería  $F = mg$ .

**Ejemplo 25.** El coeficiente de fricción entre el bloque de peso W y el plano inclinado es  $\mu = 0.5$ . Este bloque está unido a otro de peso 120 N mediante cuerdas que pasan por poleas fijas. Calcular el intervalo de valores de W dentro del cual existe equilibrio.

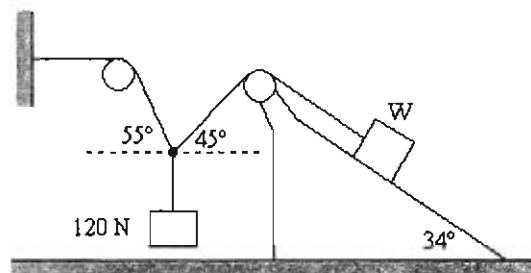


Fig. 169

Dividiremos el problema en dos partes: primeramente calcularemos la tensión en la cuerda que corre a lo largo del plano inclinado. Esto lo haremos con las ecuaciones de equilibrio del bloque colgante. Luego analizaremos el equilibrio del bloque W. Este bloque puede deslizarse hacia abajo o hacia arriba del plano, y estas situaciones límites nos darán el intervalo de valores permisible de W.

El DCL del bloque colgante se muestra en la Fig. 170.

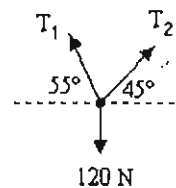


Fig. 170



Aplicando el método del triángulo obtenemos

$$\frac{T_1}{\text{sen } 135^\circ} = \frac{T_2}{\text{sen } 145^\circ} = \frac{120}{\text{sen } 80^\circ}$$

de donde

$$T_1 = 86.16 \quad \text{y} \quad T_2 = 69.89$$

Para el bloque W debemos hacer dos DCL's, correspondientes a las situaciones en que está a punto de resbalar hacia abajo o hacia arriba. La única diferencia entre ambos DCL's (Véase la Fig. 171) es la dirección de la fricción máxima  $f_m$ .

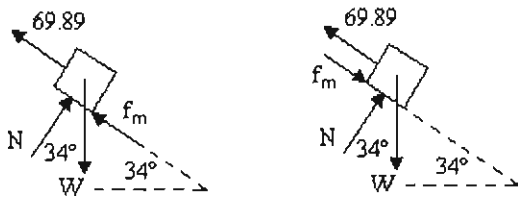


Fig. 171

Tomando el Eje X a lo largo del plano inclinado, hacia arriba, tenemos las siguientes ecuaciones para el deslizamiento inminente hacia abajo:

(i)  $69.89 + f_m - W \text{ sen } 34^\circ = 0$

(ii)  $N - W \text{ cos } 34^\circ = 0$

(iii)  $f_m = 0.5 N$

Poniendo (ii) en (iii) tenemos

$$f_m = 0.5 W \text{ cos } 34^\circ = 0.4145 W$$

Poniendo esto en (i),

$$69.89 + 0.4145 W - W \text{ sen } 34^\circ = 0$$

de donde

$$W = \frac{69.89}{\text{sen } 34^\circ - 0.4145} = 483.02$$

Las ecuaciones para el caso de deslizamiento hacia abajo son similares a (i), (ii) y (iii); lo único que hay que hacer es cambiar el término " $f_m$ " en (i) por " $-f_m$ ". Se llega a la solución

$$W = \frac{69.89}{\text{sen } 34^\circ + 0.4145} = 71.79$$

El intervalo de valores es entonces

$$71.79 \text{ N} \leq W \leq 483.02 \text{ N}$$

Hay situaciones en que la existencia del equilibrio depende de que exista fuerza de fricción suficiente para evitar el deslizamiento del sistema sobre alguna superficie que lo constriñe. En este caso debemos calcular la fricción necesaria para garantizar el equilibrio,  $f$ , y compararla con el valor máximo disponible  $\mu N$ . Existirá equilibrio o no según que  $f \leq \mu N$  ó  $f > \mu N$ , respectivamente. Ilustraremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 26.** Un bloque chico de masa "m" se presiona contra un bloque grande de masa "M" que puede deslizarse a lo largo de un plano horizontal. Se aplica al bloque chico la mínima fuerza horizontal F que lo mantiene en reposo relativamente al bloque grande. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción  $\mu_2$  que garantiza que el sistema esté en equilibrio en esta situación?

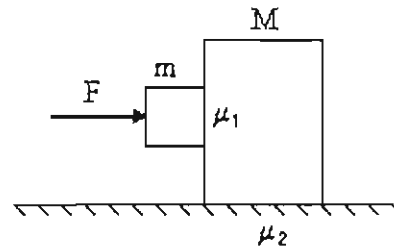


Fig. 172

Puede suceder que se requiera una fuerza F tan grande que provoque que todo el sistema se deslice, si  $\mu_2$  no es lo suficientemente grande. Primeramente calcularemos tal fuerza; luego examinaremos el equilibrio del bloque grande.

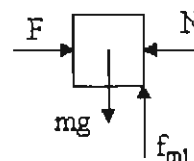


Fig. 173

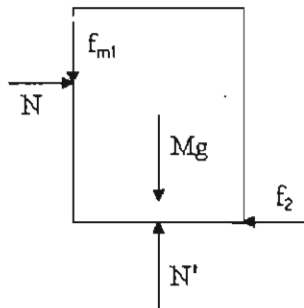
Del DCL del bloque chico, mostrado en la Fig. 173, obtenemos

$$F = N, \quad f_{m1} = mg$$

junto con  $f_{m1} = \mu_1 N$ . De aquí obtenemos F y N:

$$F = N = \frac{mg}{\mu_1}$$

Pasemos a analizar el bloque grande. Su DCL está en la Fig. 174.



(Bloque grande)	
Tierra	Mg
Bloque chico	N, $f_{m1}$
Superficie	N', $f_2$

Fig. 174

Note que hemos denotado la fricción sobre el bloque grande, debida a la superficie, por " $f_2$ ". Estamos suponiendo, pues, que no es la máxima posible.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$N = f_2$$

$$N' - Mg - f_{m1} = 0$$

de donde obtenemos

$$f_2 = \frac{mg}{\mu_1}$$

$$N' = Mg + \frac{mg}{\mu_1}$$

La fricción " $f_2$ " debe ser suficiente para evitar que el sistema se deslice. Si el valor requerido,  $mg/\mu_1$ , es mayor que el máximo  $f_{m2}$ , habrá deslizamiento:

Condición de no deslizamiento:

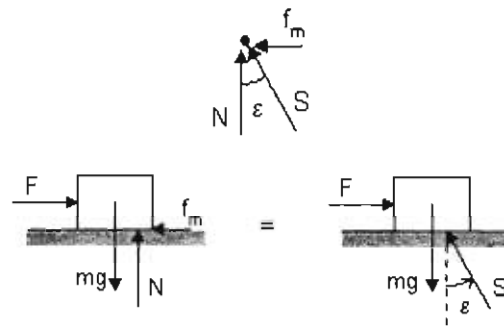
$$\frac{mg}{\mu_1} < f_{m2} = \mu_2 N'$$

Esta condición se traduce en

$$\mu_2 > \frac{m}{\mu_1 M + m}$$

### 6.4\*. Ángulo de fricción

Cuando las condiciones de un problema establecen que algún cuerpo está a punto de deslizarse sobre una superficie sabemos que se verifica la relación  $f_m = \mu N$ . Por otra parte, las fuerzas  $f_m$  y N son las componentes de la fuerza S entre las superficies en contacto, tal como vemos en la Fig. 172. Como  $\mu = \frac{f_m}{N}$ , en tal condición de deslizamiento inminente la fuerza S formará un ángulo constante " $\epsilon$ " dado por la relación  $\tan \epsilon = \mu$ . Este ángulo se denomina *el ángulo de fricción* correspondiente a ambas superficies en contacto.



(¡Si el cuerpo está a punto de resbalar!)

Fig. 175

Muchas veces la resolución y el análisis físico del problema se facilitan si en lugar de trabajar con las dos *componentes*  $f_m$  y N lo hacemos con la *magnitud y dirección* S y  $\epsilon$ , sobre todo si se conoce el coeficiente  $\mu$ .

Resolvamos de nueva cuenta el ejemplo 24, utilizando ahora el concepto de ángulo de fricción.

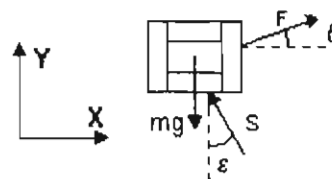


Fig. 176

En la Fig. 176 tenemos el DCL de la caja, correspondiente a la situación en que está a punto de deslizarse, para la cual la fuerza  $S$  forma un ángulo  $\epsilon = \tan^{-1} \mu$  con la dirección normal.

Ecuaciones de equilibrio:

$$F \cos \theta - S \sin \epsilon = 0$$

$$F \sin \theta - S \cos \epsilon - mg = 0$$

Eliminando  $S$ ,

$$F = \frac{mg \sin \epsilon}{\cos(\theta - \epsilon)}$$

Derivando  $F$  con respecto a  $\theta$  e igualando a cero,

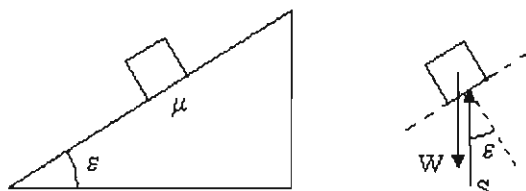
$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{mg \sin \epsilon \cdot \sin(\theta - \epsilon)}{\cos^2(\theta - \epsilon)} = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\theta - \epsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \epsilon$$

Es decir, la mínima fuerza  $F$  requerida se da cuando se aplica a un ángulo  $\theta$  igual al ángulo de fricción caja-piso. El valor de  $F$  es  $mg \sin \epsilon$ , que se reduce al obtenido antes.

El ángulo de fricción aparece también en situaciones donde un bloque descansa sobre un plano inclinado. Ya vimos en el Ejemplo 17 de la pág. 75 que, puesto un bloque de masa arbitraria sobre un plano de inclinación  $\epsilon$ , con el que existe fricción de coeficiente  $\mu$ , habrá deslizamiento inminente si se cumple que  $\tan \epsilon = \mu$  (Véase la Fig. 174a).



A punto de resbalar:  $\tan \mu = \epsilon$

Fig. 177

En este caso el peso del bloque es compensado por la reacción  $S$  debida al plano, cuyas componentes son la normal  $N$  y la fricción  $f_m$  (Fig. 174b).

**Ejemplo 27.** ¿Cuál es el intervalo de valores permitido para la fuerza  $F$  aplicada a lo largo del plano inclinado como vemos en la Fig. 174, de tal manera que el bloque no se mueva? Usar los valores  $\theta = 60^\circ$ ,  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $\mu = 1$ .

Los valores mínimo o máximo de  $F$  corresponden a los casos en que el bloque está a punto de deslizarse hacia abajo o hacia arriba, respectivamente. Debemos hacer los DCL's y resolver para  $F$  en cada uno de los dos casos.

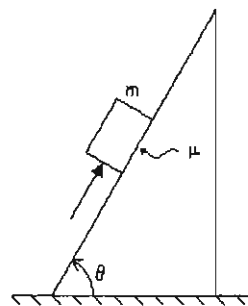
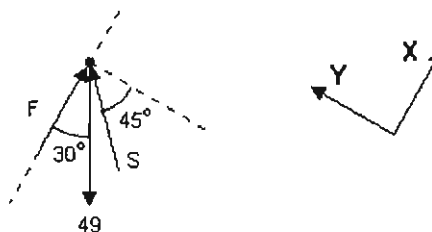


Fig. 178

El peso del bloque es  $5 \times 9.8 = 49$  y el ángulo de fricción es  $\epsilon = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$ .

Los DCL's están en la Fig. 175a,b. Es importante recordar que el ángulo  $\epsilon$  se mide a partir de la dirección normal al plano.

Inminente hacia abajo



Inminente hacia arriba

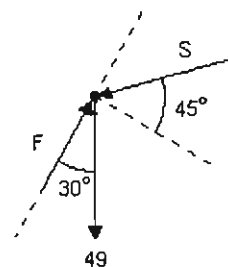


Fig. 179

Las ecuaciones de equilibrio son

Para el caso de movimiento inminente hacia abajo:

$$\frac{F}{\sin 15^\circ} = \frac{S}{\sin 30^\circ} = \frac{49}{\sin 45^\circ}$$

Obtenemos

$$S = 34.65, \quad F = 18$$

Para el caso de movimiento inminente hacia arriba:

$$\frac{F}{\cos 15^\circ} = \frac{S}{\sin 30^\circ} = \frac{49}{\sin 45^\circ}$$

Obtenemos

$$S = 34.65, \quad F = 67$$

⇒ El bloque está en equilibrio para  $18 < F < 67$ .

**Ejemplo 28.** El conjunto de la Fig. 180 consta de un bloque grande de masa  $M$  que reposa sobre un plano inclinado a  $\theta$  grados, con el que existe fricción de coeficiente  $\mu$ . Mediante una polea el bloque  $M$  se acopla a otro bloque pequeño de masa  $m$ , con el que no existe fricción. Suponiendo que hay deslizamiento inminente hacia abajo, calcular la masa del bloque grande con los datos  $\theta$ ,  $\mu$ , y  $m$ .

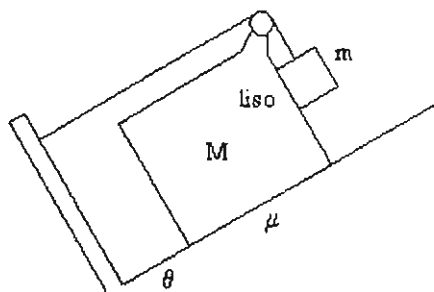


Fig. 180

Supondremos que el ángulo de fricción del bloque  $M$  con respecto al plano es mayor que  $\theta$ , pues de otra forma el bloque  $M$  tendería a deslizarse de por sí, sin "ayuda" del bloque pequeño y la cuerda, que tienden a empujarlo hacia abajo.

En la Fig. 178 tenemos los diagramas de cuerpo libre de los sistemas {Bloque  $M$  y Polea} y {Bloque  $m$ }. Se muestra el recuadro correspondiente al primero.

Tomando el Eje  $X$  a lo largo del plano hacia arriba tenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

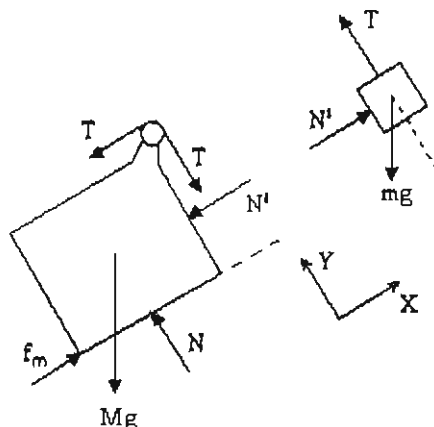
$$(i) \quad -T - N' + f_m - Mg \sin \theta = 0$$

$$(ii) \quad -T + N - Mg \cos \theta = 0$$

$$(iii) \quad N' - mg \sin \theta = 0$$

$$(iv) \quad T - mg \cos \theta = 0$$

junto con (v)  $f_m = \mu N$ .



[Bloque M y Polea]	
Tierra	$Mg$
Cuerda	$T \swarrow, T \searrow$
Bloque pequeño	$N'$
Plano inclinado	$N, f_m$

Fig. 181

Resolviendo el sistema para "M" en términos de "m" llegamos a

$$(vi) \quad M = \frac{(1 - \mu) \cos \theta + \sin \theta}{\mu \cos \theta - \sin \theta} \cdot m$$

la cual es válida para  $\tan \theta < \mu$ .

Ejemplo numérico: pongamos

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \mu = 0.8, \quad \theta = 36.87^\circ$$

Obtenemos

$$M = \frac{(1 - 0.8)0.8 + 0.6}{0.8 \cdot 0.8 - 0.6} \cdot 1 = \frac{0.76}{0.04} = 19 \text{ (kg)}$$

Si  $\mu > 1$  es posible que el numerador de (vi) se vuelva negativo. Examine este caso.

**Ejemplo 29.** Tony Ficante se pregunta cuál es la caja más pesada que puede jalar mediante el cable a 37°? El coeficiente de fricción caja-piso es  $\mu_1 = 0.3$ , y el correspondiente Tony-piso es  $\mu_2 = 0.6$ . La masa de Tony es de 80 kg.

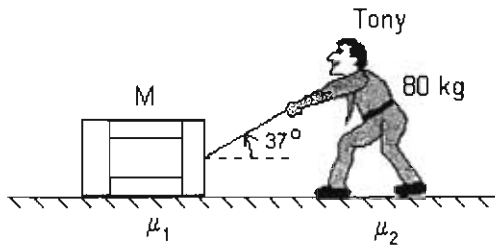


Fig. 182

La máxima fuerza que Tony puede ejercer sobre la caja corresponde al estado de deslizamiento inminente de Tony. Podemos calcular tal fuerza, esto es, la tensión T de la cuerda, analizando el equilibrio del sistema {Tony} en este estado.

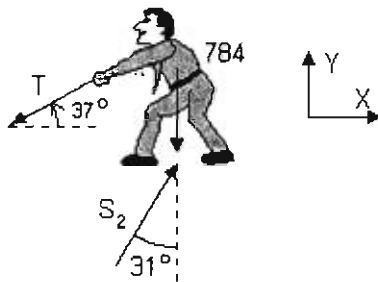


Fig. 183

Su peso vale, en newtons,

$$mg = 80 \times 9.8 = 784$$

y su ángulo de fricción  $\epsilon_2$  es

$$\epsilon_2 = \tan^{-1} \mu_2 = \tan^{-1} (0.6) = 31^\circ$$

Resulta el DCL de la Fig. 175.

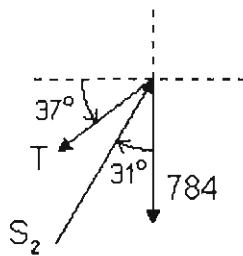


Fig. 184

Las ecuaciones de equilibrio son, por el método del triángulo,

$$\frac{T}{\sin 31^\circ} = \frac{S_2}{\sin 53^\circ} = \frac{784}{\sin 22^\circ}$$

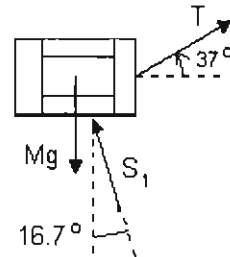
de donde

$$T = 1078 \quad S_2 = 1671$$

Tenemos así que Tony puede ejercer una fuerza a lo más de 1078 newtons sin resbalar. La masa M de la caja estará determinada por la condición de que al aplicar esta fuerza de 1078 newtons a la caja, ésta llegará al estado de movimiento inminente.

El ángulo de fricción de la caja es

$$\epsilon_1 = \tan^{-1} \mu_1 = \tan^{-1} (0.3) = 16.7^\circ$$



(Caja)	
Tierra	Mg
Cuerda	T
Piso	S <sub>1</sub>

Fig. 185

Obtenemos el DCL de la Fig. 176, con las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{Mg}{\cos 20.3^\circ} = \frac{S_1}{\cos 37^\circ} = \frac{T}{\sin 16.7^\circ}$$

Poniendo  $T = 1078$  obtenemos

$$S_1 = 2996 \quad M = 359$$

En términos de cantidades simbólicas, la solución sería

$$T = \frac{Mg \sin \epsilon_1}{\cos(\theta - \epsilon_1)} = \frac{mg \sin \epsilon_2}{\cos(\theta + \epsilon_2)}$$

$$S_1 = \frac{Mg \cos \theta}{\cos(\theta - \epsilon_1)} = \frac{mg \sin \theta}{\cos(\theta + \epsilon_2)}$$

$$M = \frac{\sin \epsilon_2 \cos(\theta - \epsilon_1)}{\sin \epsilon_1 \cos(\theta + \epsilon_2)} m$$

donde  $\theta$  es el ángulo de la cuerda y "m" es la masa de Tony.

En la expresión de M vemos que  $M \rightarrow \infty$  cuando  $\theta + \epsilon_2 \rightarrow 90^\circ$ . Junto con M tienden a infinito también  $S_1, S_2$  y T. ¿Cuál es la interpretación física?

Supongamos que  $\theta + \epsilon_2$  se mantiene menor que  $90^\circ$ . Entonces M puede aumentar tanto como se quiera, siempre que Tony aumente la fuerza T que aplica a la cuerda. Aquí no hay nada raro, pues estamos suponiendo que Tony puede ejercer una fuerza T arbitrariamente grande sin resbalar. Si especificamos alguna cota superior para T, M se acotará consiguientemente.

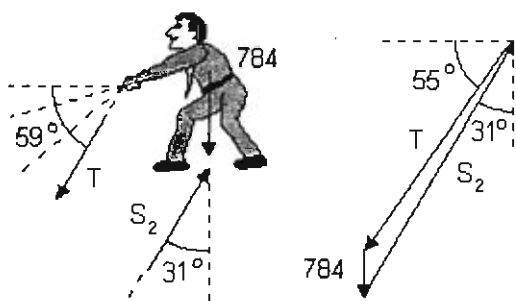
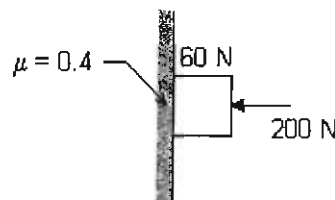


Fig. 186

Observe la Fig. 177. Cerca del valor límite  $\theta = 90^\circ - \epsilon_2 = 59^\circ$ , T y  $S_2$  estarán casi antiparalelas, y para poder cancelar el peso de 784 tanto T como  $S_2$  deberán aumentar desmedidamente. Antes ocurre que la caja se balancea sobre su esquina izquierda, y su deslizamiento sería sobre esta esquina.

### 6.5. Problemas

1. Se presiona un bloque de 60 N de peso contra una pared vertical con una fuerza de 200 N. El coeficiente de fricción bloque-pared es 0.4. (a) ¿Cuánto vale la fuerza de fricción? ¿Qué tanto puede disminuirse la fuerza de 200 N sin que el bloque resbale?

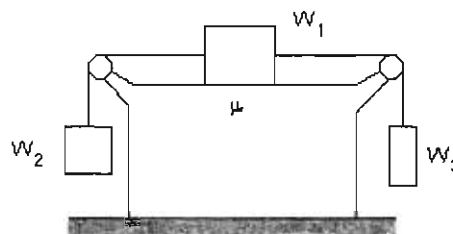


Resp. 60 N; 50 N

2. Para el sistema mostrado en la figura, supongamos los siguientes valores:

$$W_1 = 100 \text{ N}, W_2 = 20 \text{ N}, W_3 = 10 \text{ N}, \mu = 0.3$$

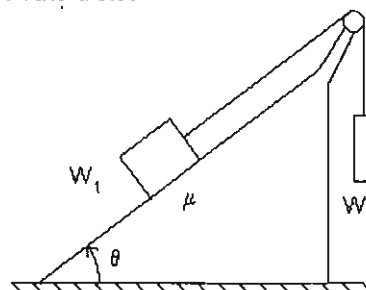
- (a) ¿Está el sistema en equilibrio?
- (b) Manteniéndose  $W_3$  en el valor de 10 N, ¿cuánto puede aumentarse  $W_2$  sin que se pierda el equilibrio?
- (c) Manteniéndose  $W_2$  en el valor máximo obtenido en (b), ¿cuánto puede aumentarse  $W_1$  sin que se pierda el equilibrio?



Resp. (b) 20 N; (c) 60 N

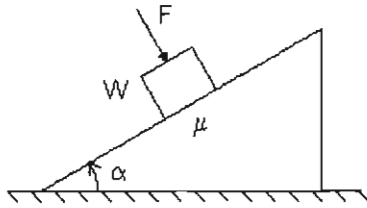
3. Existe fricción de coeficiente  $\mu$  entre el bloque de peso  $W_1 = 100 \text{ N}$  y el plano inclinado de ángulo  $\theta = 37^\circ$ .

- (a) Hallar la magnitud y dirección de la fuerza de fricción en los casos  $W_2 = 20 \text{ N}$  y  $W_2 = 120 \text{ N}$ , suponiendo que en ambos casos el sistema permanece estático.
- (b) ¿Existe algún valor de  $W_2$  para el cual la fuerza de fricción se vuelva cero?



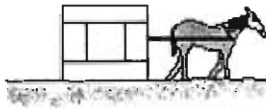
Resp. (a) 40 N; 60 N; (b) 60 N

4. La fuerza  $F$  es perpendicular al plano inclinado,  $W = 300 \text{ N}$ ,  $\alpha = 45^\circ$  y  $\mu = 0.2$ . ¿Cuál es el mínimo valor de  $F$  que mantiene al sistema en equilibrio?



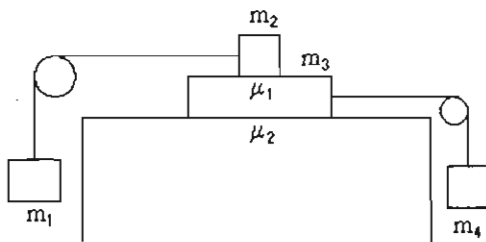
Resp.  $F = 848.5$

5. Rozagante puede ejercer a lo más 1500 N. La caja pesa 200 N y contiene 100 cajitas de 40 N de peso cada una. El coeficiente de fricción caja-suelo es 0.4. ¿Cuántas cajitas hay que sacar para que pueda mover la caja?



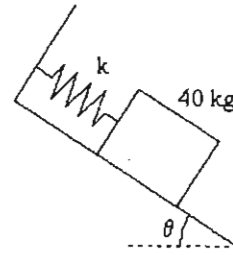
Resp. 12 cajitas.

6. Encuentre la fuerza de fricción sobre el bloque superior, bajo la hipótesis de que el bloque inferior está a punto de deslizarse.



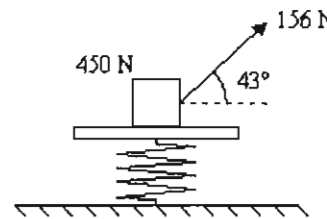
Resp.

7. El ángulo del plano es  $\theta = 32^\circ$ . La longitud natural del resorte es  $L_0 = 200 \text{ mm}$ , su longitud actual es  $L = 180 \text{ mm}$ , y su constante elástica es  $k = 25000 \text{ N/m}$ . Calcular la fuerza de fricción sobre el bloque.



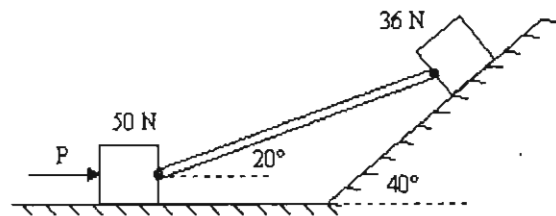
Resp. 292.3 N.

8. Una caja de peso 450 N descansa sobre la plataforma (ligera) de una balanza de resorte y está siendo jalada por una fuerza de 156 N a  $43^\circ$  con la horizontal. El coeficiente de fricción caja-plataforma es 0.36. (a) ¿Cuánto registra la balanza? (b) ¿Permanecerá la caja sobre la plataforma o empezará a deslizarse?



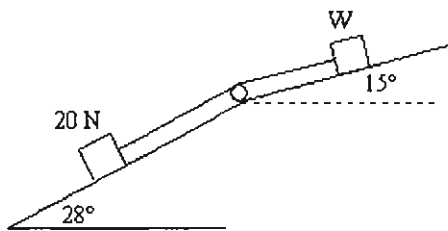
Resp. 344 N; Permanece.

9. Una barra rígida y ligera se acopla mediante pasadores lisos a dos bloques de pesos 50 N y 36 N como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción entre los bloques y la superficie es 0.325. Calcular la fuerza  $P$  que motivará que el sistema esté a punto de resbalar hacia la derecha.



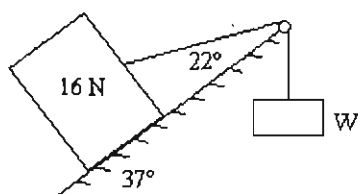
Resp. 57 N.

10. El coeficiente de fricción entre los bloques y sus respectivas superficies es de 0.325. Calcular el menor valor del peso  $W$  que preservará el equilibrio, y la correspondiente tensión en la cuerda.



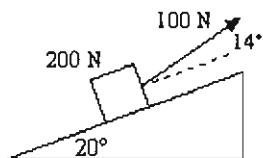
Resp. 66.4 N, 3.65 N.

11. Calcular los valores máximo y mínimo de W para los cuales el bloque de 16 N estará a punto de resbalar. El coeficiente de fricción de este bloque con el plano es de 0.28. La pequeña polea es lisa.



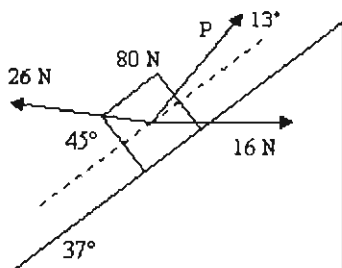
Resp. 16.07 N, 5.86 N.

12. Un bloque que pesa 200 N descansa sobre un plano inclinado a 20°, y está sujeto a una fuerza de 100 N dirigida a 14° con el plano. (a) Calcular la fuerza de fricción; (b) Suponiendo que el bloque está a punto de moverse, calcular el coeficiente de fricción.



Resp. (a) 28.6 hacia abajo del plano; (b) 0.175.

13. Un bloque de 80 N de peso está a punto de moverse hacia arriba de un plano inclinado con el que existe fricción de coeficiente  $\mu = 0.32$ . Calcular la fuerza P y la fuerza normal sobre el bloque.

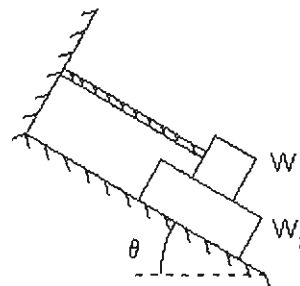


Resp.  $P = 68.2 \text{ N}$ ;  $N = 39.8 \text{ N}$ .

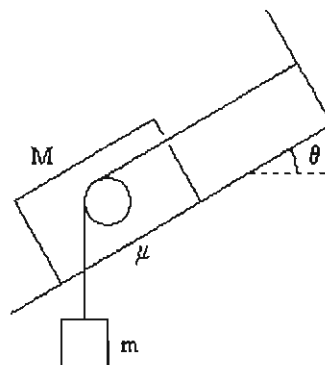
14. Los coeficientes de fricción bloque1-bloque2 y bloque2-plano son  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente. Demostrar que habrá deslizamiento si

$$\theta > \arctan\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 (W_1 + W_2)}{W_2}\right)$$

(Trabaje con las componentes f y N).



15. El bloque de masa M tiene soldada una polea lisa en su cara anterior, por la que pasa la cuerda. Este bloque está a punto de resbalar hacia arriba del plano.



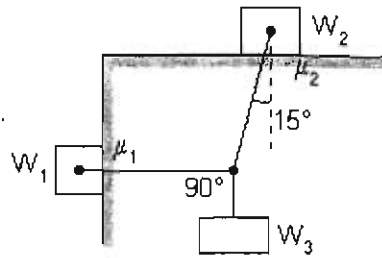
Demostrar que

$$W = \frac{1 - \text{sen } \theta - \mu \text{ cos } \theta}{\text{sen } \theta + \mu \text{ cos } \theta} \cdot mg$$

16. Suponiendo que el sistema está en equilibrio, calcular las fuerzas de fricción sobre los bloques 1 y 2. Se conocen los valores  $W_1 = 20 \text{ N}$ ,  $W_2 = 40 \text{ N}$ .

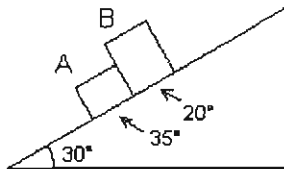
¿Cuáles son los mínimos coeficientes de fricción permisibles para que el sistema se mantenga en equilibrio?





Resp. 20 N; 53.6 N; 0.37, 0.17

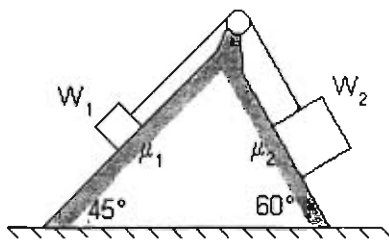
17. Se colocan juntos dos bloques A y B como se muestra en la figura. Los ángulos de fricción  $\epsilon_1 = 35^\circ$  y  $\epsilon_2 = 20^\circ$  son tales que, separados A y B y soltados, B deslizaría y A no. Supongamos que  $W_A = 200$  N; ¿cuál es el mínimo peso de B que provocará el deslizamiento del conjunto?



Resp. 115.1 N

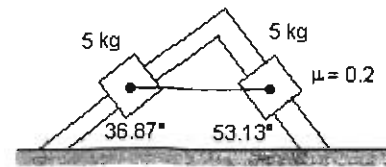
18. ¿Cuánto debe valer la relación  $W_1/W_2$  para que el sistema esté a punto de deslizar (a) hacia la izquierda? (b) hacia la derecha?

Especializar para  $\mu_1 = 0.2$ ,  $\mu_2 = 0.8$  y  $\mu_1 = 0.8$ ,  $\mu_2 = 0.2$ .



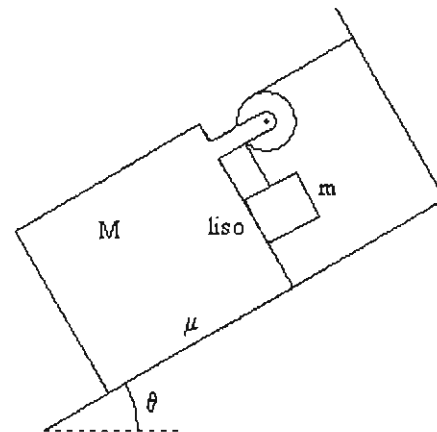
Resp. 2.238; 0.549

19. Dos collarines de la misma masa 5 kg están unidos por una cuerda horizontal como se muestra. Calcular el valor mínimo del coeficiente de fricción entre el collarín izquierdo y la guía, para que pueda haber equilibrio. No hay fricción con el collarín derecho.



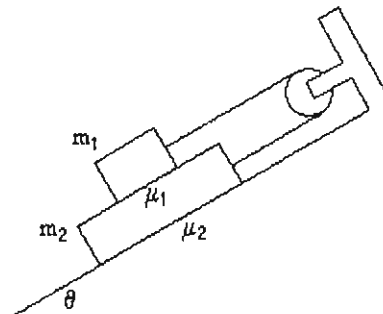
Resp.  $\approx 0.09$

20. Para el sistema mostrado, suponer conocidas las cantidades M, m, y q. ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción m si el bloque grande está a punto de resbalar (a) hacia abajo; (b) hacia arriba?



$$M = \frac{(1 - \mu) \cos \theta - \sin \theta}{\mu \cos \theta + \sin \theta} \cdot m$$

21. Estudiar el sistema mostrado en la figura, en cuanto a condiciones de deslizamiento inminente.



## MÓDULO III

# ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO EN EL PLANO

## CONTENIDO

<b>CAPÍTULO 1. MOMENTOS DE UNA FUERZA. SISTEMAS DE FUERZAS</b>	<b>CAPÍTULO 3. REACCIONES EN APOYOS. PROBLEMAS SOBRE EQUILIBRIO</b>
1.1. La estática del cuerpo rígido ..... III-3	3.1. Apoyos ..... III-26
1.2 Momentos de una fuerza ..... III-3	3.2. Reacción en los apoyos de bisagra, de rodillo y simple ..... III-26
1.3 Otros modos de calcular el momento ..... III-5	3.3. Ejemplos de equilibrio ..... III-29
1.4 Sistemas de fuerza ..... III-9	3.4. Apoyo fijo o de empotramiento ..... III-34
1.5 Un teorema sobre momentos ..... III-9	3.5. Sistemas compuestos de dos cuerpos rígidos ..... III-37
1.6 Pares ..... III-10	3.6. Cuerpo sometido a fuerzas en sólo dos puntos ..... III-41
1.7 Problemas ..... III-12	3.7. Problemas ..... III-44
<b>CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO. RESULTANTE LOCALIZADA</b>	<b>APÉNDICE. CÁLCULO DE RESULTANTES</b>
2.1. Ecuaciones de equilibrio del cuerpo rígido ..... III-16	A.1. Sistemas equivalentes de fuerzas ..... III-48
2.2. Sustituciones o movimientos de fuerza ..... III-18	A.2. Resultante de un sistema arbitrario de fuerzas coplanarias ..... III-50
2.3. ¿Cuándo se puede tratar a un cuerpo rígido como si fuese una partícula? ..... III-20	A.3. Resultante de un sistema de fuerza total nula ..... III-51
2.4. Traslación de una fuerza fuera de su línea de acción ..... III-21	A.4. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas ..... III-52
2.5. Resultante localizada ..... III-23	A.5. Resultante de una distribución lineal de fuerzas ..... III-53
2.6. Problemas ..... III-25	



## CAPÍTULO 1

MOMENTO DE UNA FUERZA.  
SISTEMAS DE FUERZAS

## 1.1. La estática del cuerpo rígido

En la estática se estudian las condiciones bajo las cuales un cuerpo material, no importa qué tan complejo sea, pueda permanecer en un *estado de equilibrio*. Es una ciencia que, con fundamentos teóricos muy simples, goza de una amplia gama de aplicaciones.

Los protagonistas principales de la estática son:

- Las fuerzas.
- Las dimensiones geométricas de los cuerpos.

Esto lo podemos constatar ya en la palanca mostrada en la Fig. 1, en la que un peso  $W$  es equilibrado por una fuerza  $F$  que es la fracción "a/b" de la fuerza  $W$ .

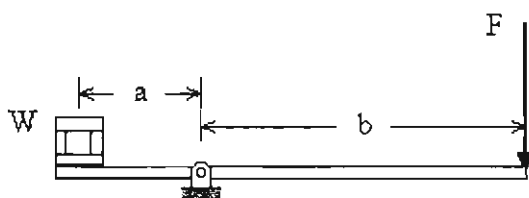


Fig. 1

Un conjunto de cuerpos en equilibrio, que cumplen una función práctica como un todo, es un *sistema estático*. Ejemplos de tales sistemas son: palancas, aparejos, polipastos, bastidores, armaduras, mecanismos, máquinas, sistemas a base de fricción, sistemas de cables, edificios, puentes, etc.

Existen sistemas estáticos para manipular las fuerzas de muchas maneras: controlarlas, redirigirlas, desviarlas, graduarlas, amplificarlas, reducir las, transmitir las, concentrar las, distribuir las, atenuar las, eliminar las, compensar las, etc. La palanca de la Fig. 1 es un amplificador de fuerzas (o reductor, según el uso contemplado). Todo esto lo hace el ingeniero barajando los elementos de fuerza y dimensiones.

El modelo básico de la estática del cuerpo rígido es, como el nombre lo indica, el de *cuerpo rígido*, que es aquel cuerpo cuya forma y dimensiones no se alteran sean cuales sean las fuerzas (o "cargas") que soporte.

El análisis del equilibrio de un sistema estático con los métodos de la estática es un primer paso en su construcción y diseño. Debe complementarse con el análisis de los esfuerzos y deformaciones del sistema, lo cual está a cargo de otras disciplinas como la mecánica de sólidos, la teoría de la elasticidad y plasticidad, la resistencia de materiales, el análisis de estructuras, etc.

Nuestro estudio de la estática se limitará a cuerpos en equilibrio bajo fuerzas coplanarias.

## 1.2. Momento de una fuerza

En el concepto de "momento de una fuerza con respecto a un punto" entran de manera importante estas propiedades:

El *punto de aplicación* de la fuerza (punto A en la Fig. 2). La notación " $F(A)$ " significará que A es el punto de aplicación de la fuerza F.

La *línea de acción* de la fuerza, que es la recta que contiene al punto de aplicación A y tiene la misma pendiente que el vector F (Véase la Fig. 2). La línea de acción de F se indicará con " $L(F)$ ".

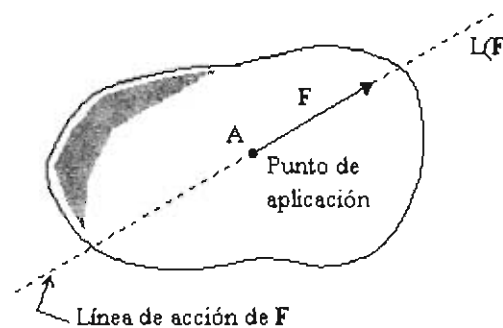


Fig. 2

El "momento de una fuerza con respecto a un punto P" dado es una medida del efecto de rotación que produciría la fuerza alrededor de un eje que pasara por el punto P considerado.

Por ejemplo, la fuerza F de la Fig. 1 produce un efecto de rotación de la palanca alrededor de la articulación fija. El momento de F con respecto a la articulación es el producto " $- F b$ ". En equilibrio, este momento debe ser cancelado por un momento positivo producido por la fuerza normal sobre la palanca debida al contacto con la caja de peso W.

Este último viene medido por el producto "W a", de tal modo que

$$- F b + W a = 0$$

de donde se obtiene que  $F = (a/b) W$ .

En la estática de las partículas el concepto de momento de las fuerzas no intervino. La razón es que para los cuerpos-partículas no se consideran las rotaciones. En cuanto tratamos con cuerpos rígidos o extensos, sin embargo, debemos tomar en consideración que el equilibrio exige dos cosas: que el centro de masa del cuerpo se conserve en reposo (*equilibrio traslacional*), y que el cuerpo no rote (*equilibrio rotacional*). Es en este segundo tipo de equilibrio que el concepto de momento entra de modo determinante.

Definición del momento de una fuerza.

Sea  $F$  una fuerza aplicada en el punto  $A$  de un cuerpo rígido, y sea  $P$  un punto fijo cualquiera del espacio, dentro o fuera del cuerpo (Fig. 3).

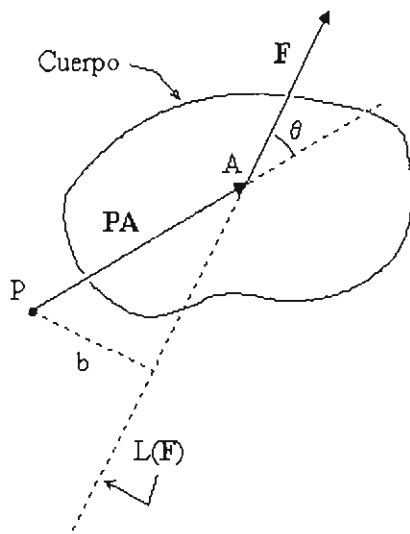


Fig. 3

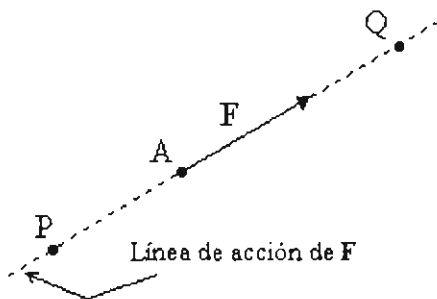


Fig. 4

(1) **Momento de una fuerza.**

Se define el momento  $M_P$  de la fuerza  $F$  con respecto al punto  $P$  como el producto externo del vector separación  $PA$  y el vector fuerza  $F$ , o sea

(a)  $M_P = PA \wedge F$

Para calcular el momento de la fuerza  $F = (F_x, F_y)$ , aplicada en el punto  $A(x_A, y_A)$ , con respecto al punto  $P(x_P, y_P)$ , primero se obtiene el vector separación  $PA$  en la forma

$$PA = (x_A - x_P, y_A - y_P)$$

y luego hacemos el producto externo

(b)  $M_P = PA \times F = \begin{vmatrix} x_A - x_P & y_A - y_P \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$

El punto  $P$ , con respecto al cual se calcula el momento de  $F$ , se denomina el *punto de referencia* de este momento.

Esto es algo que aplicaremos con frecuencia:

(2) El momento de una fuerza es igual a cero si la línea de acción de la fuerza  $F$  contiene al punto de referencia  $P$ . Por ejemplo, en la Fig. 4 el momento de  $F$  es cero con respecto a los puntos  $P$  y  $Q$ , y también con respecto a su propio punto de aplicación  $A$ .

Saber calcular momentos de fuerzas es una tarea básica en los problemas de equilibrio. Dado que el momento es un producto externo de vectores, se recomienda encarecidamente al lector revisar las propiedades de este producto en la sección 5.4 del Módulo I.

<Nota. En lo sucesivo usaremos el texto "c/r" como abreviatura de "con respecto".>

**Ejemplo 1.** Se tiene una fuerza  $F = (8 \text{ N}, -40 \text{ N})$  aplicada en el punto  $A(2 \text{ m}, 5 \text{ m})$ . Calcularemos el momento de  $F$  c/r a los puntos  $P, Q$  y  $R$  mostrados en la Fig. 5.

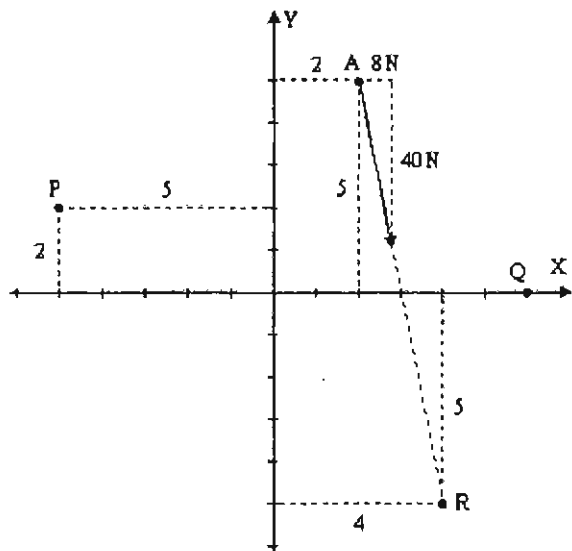


Fig. 5

Necesitamos los vectores separación que van desde los puntos de referencia  $P, Q$  y  $R$  al punto de aplicación  $A$ ; son los siguientes (en unidades de metros):

$$PA = (7, 3) \quad QA = (-4, 5)$$

$$RA = (-2, 10)$$

Entonces los momentos c/r a  $P, Q$  y  $R$  son:

$$M_P = PA \wedge F = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -40 \end{vmatrix} = -280 - 24 = -304$$

$$M_Q = QA \wedge F = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 8 & -40 \end{vmatrix} = 160 - 40 = 120$$

$$M_R = RA \wedge F = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 8 & -40 \end{vmatrix} = 80 - 80 = 0$$

Las unidades de estos momentos son

$$\text{newton} \cdot \text{metro} \quad \text{ó} \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

Note que como el momento con respecto a  $R$  es cero, entonces la línea de acción de  $F$  contiene a (o "pasa por") dicho punto.

### 1.3. Otros modos de calcular el momento

Usando la fórmula (1b) siempre podremos calcular el momento de una fuerza  $F$ , aplicada en cierto punto  $A$ , con respecto a cualquier punto de referencia  $P$  dado.

Sin embargo, existen otras fórmulas equivalentes para calcular momentos, las cuales aprovechan relaciones geométricas simples entre los vectores  $PA$  y  $F$ . Veamos.

#### Caso 1. $PA$ es perpendicular a $F$ .

Supongamos que el vector  $PA$  es perpendicular al vector  $F$ . Dado que el producto externo  $M_P = PA \wedge F$  es un invariante, podemos evaluarlo en el sistema cartesiano  $XY$  en el que el vector  $PA$  está a lo largo del eje  $X$ , como se muestra en la Fig. 6.

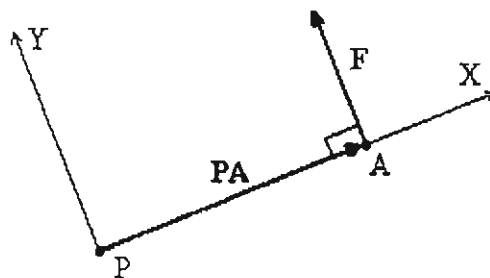


Fig. 6

Tendremos que

$$PA = (PA, 0) \quad \text{y} \quad F = (0, F)$$

con lo que

$$M_P = PA \wedge F = \begin{vmatrix} PA & 0 \\ 0 & F \end{vmatrix} = PA \cdot F$$

Si la fuerza  $F$  apuntara en la dirección  $-Y$ , entonces el momento tendría el valor  $M_P = -PA \cdot F$ .

(3) Si  $PA$  y  $F$  son perpendiculares, entonces el momento de  $F$  con respecto a  $P$  es el producto simple

$$M_P = \pm F \cdot PA$$

donde el signo "+" vale si la fuerza  $F$  tiende a producir rotación en sentido antihorario alrededor de  $P$ , y el signo negativo en caso contrario.

Veamos un ejemplo de aplicación de la fórmula (3).

**Ejemplo 2.** Calcular el momento total con respecto a P de las fuerzas sobre la barra horizontal indicadas en la Fig. 7. Todas estas fuerzas son verticales.

De acuerdo con (3), simplemente hay que multiplicar cada fuerza por la distancia de su punto de aplicación a P, y añadir el signo correcto de cada momento.

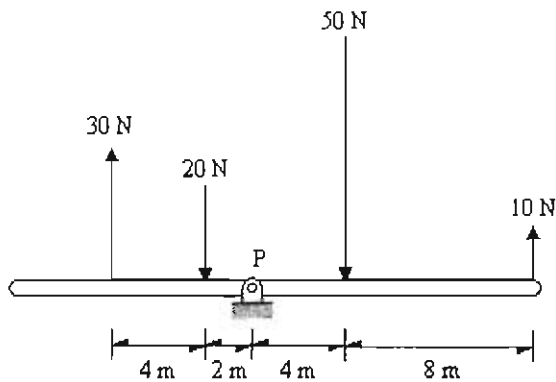


Fig. 7

Las fuerzas de 20 N y 10 N tienden a producir rotación antihoraria alrededor de P, de modo que sus momentos con respecto a P son positivos. Por otra parte, los momentos de las fuerzas de 30 N y 50 N son negativos. Entonces el momento total, que denotaremos con el símbolo " $\mathcal{M}_P$ ", es

$$\mathcal{M}_P = -30 \cdot 4 + 20 \cdot 2 - 50 \cdot 4 + 10 \cdot 12 = -220$$

Caso 2. Calcular el momento como el producto de la fuerza y su brazo de palanca.

Se define el *brazo de palanca* de la fuerza F con respecto al punto P como la distancia de P a la línea de acción de F (Fig. 8).

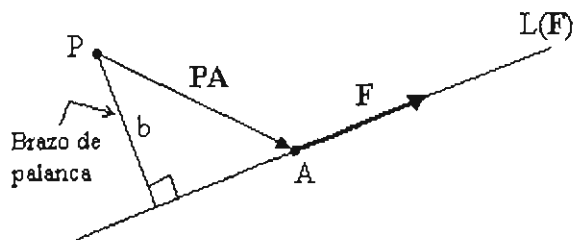


Fig. 8

Sabemos que el producto externo de PA y F es el "área" del paralelogramo definido por estos vectores. Esta área es la misma que la del rectángulo formado por el vector F y por el brazo de palanca "b". Tenemos entonces que:

(4) El momento de la fuerza F con respecto al punto P es el producto

$$M_P = \pm F b$$

(Fuerza por brazo de palanca). El signo "+" vale si la fuerza tiende a producir rotación antihoraria alrededor de P, y el signo negativo en caso contrario.

<Nota. De hecho el Caso 1 tratado anteriormente está incluido en la fórmula (4): en la Fig. 6, el segmento PA es directamente el brazo de palanca de F con respecto a P, de modo que el momento en este caso es  $M_P = \pm F \cdot PA$ >

Es importante dominar la regla de signos mencionada en las fórmulas (3) y (4). Daremos a continuación dos métodos para averiguar el signo del momento.

En la Fig. 9 imaginemos que vamos caminando en la dirección de la fuerza F, a lo largo de su línea de acción. Entonces los puntos T, N y V quedarían a nuestra izquierda; en este caso el momento de F con respecto a estos puntos es *positivo*. Por otra parte, el momento con respecto a los puntos situados a la derecha de la dirección del movimiento, o sean P, Q y R, es *negativo*. Con respecto a los puntos S y M, situados justamente en la línea de acción, el momento es cero.

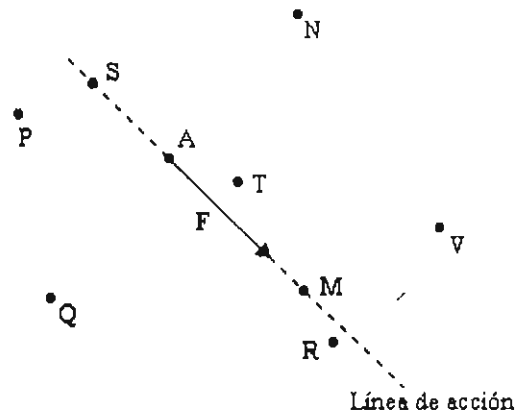


Fig. 9

Llamaremos a éste el "método I+" ("izquierda más").

El otro método es el siguiente. En la Fig. 10, para averiguar el signo del momento de F con respecto al punto V, imaginemos un cuerpo rígido ficticio que englobe tanto al punto de aplicación A como al punto de referencia V, y supongamos que dicho cuerpo estuviera articulado en V, como vemos en la Fig. 10.

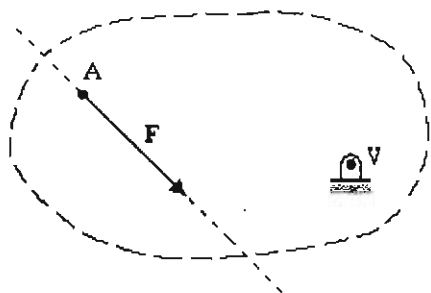


Fig. 10

Entonces el momento es *positivo* si la fuerza F tiende a producir una rotación *en sentido antihorario* alrededor del punto V. Es *negativo* si dicha rotación tiende a ser en sentido horario.

**Ejemplo 3.** Una fuerza de 15 N, inclinada a 30° con la vertical, actúa en el punto B donde se articulan dos barras AB y BC (Véase la Fig. 11). Calcular el momento de la fuerza con respecto a los puntos A, B y C, (i) usando el determinante (1b)-p4; (ii) usando la fórmula (4).

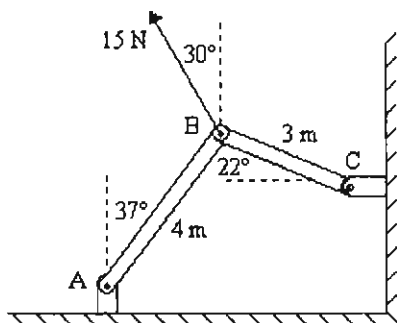


Fig. 11

(i) El momento de F con respecto a B es obviamente cero, porque la línea de acción de F contiene al punto B.

Por otra parte, con respecto a ejes estándar  $X \rightarrow Y \uparrow$ , con su origen en A, tenemos

$$F = (-15 \text{ sen } 30^\circ, 15 \text{ cos } 30^\circ) = (-7.5, 12.99)$$

$$AB = (4 \text{ sen } 37^\circ, 4 \text{ cos } 37^\circ) = (2.4, 3.2)$$

$$CB = (-3 \text{ cos } 22^\circ, 3 \text{ sen } 22^\circ) = (-2.78, 1.12)$$

Entonces

$$M_A = AB \wedge F = \begin{vmatrix} 2.4 & 3.2 \\ -7.5 & 12.99 \end{vmatrix} = 55.18$$

$$M_C = CB \wedge F = \begin{vmatrix} -2.78 & 1.12 \\ -7.5 & 12.99 \end{vmatrix} = -27.71$$

Las unidades de estos momentos son  $N \cdot m$ .

(ii) En la Fig. 12 se muestran los brazos de palanca "b<sub>A</sub>" y "b<sub>C</sub>" de la fuerza de 15 N con respecto a A y C, respectivamente. Son las distancias de estos puntos a la línea de acción de dicha fuerza.

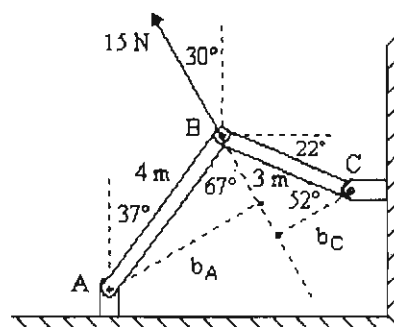


Fig. 12

Para calcular estos brazos de palanca debemos calcular previamente los ángulos de 67° y 52° mostrados en dicha figura. Luego,

$$b_A = 4 \text{ sen } 67^\circ = 3.682$$

$$b_C = 3 \text{ cos } 52^\circ = 1.847$$

de donde, notando que  $M_A > 0$  y que  $M_C < 0$ :

$$M_A = F b_A = 15 \cdot 3.682 = 55.23$$

$$M_C = -F b_C = -15 \cdot 1.847 = -27.70$$

Estos valores son los mismos (excepto por redondeo de decimales) que los encontrados en el inciso (i) con el método del producto externo.



Caso 3. Calcular el momento mediante el teorema de Varignon.

Todavía hay otra forma de calcular momentos, basada en el denominado Teorema de Varignon, que dice:

(5) **Teorema de Varignon**  
 El momento de una fuerza es igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes vectoriales.  
 O sea: escribiendo la fuerza F (aplicada en el punto A) en la forma  $F = F_x + F_y$ , donde  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes vectoriales de F (aplicadas también en A), tenemos

$$M_p = PA \wedge F = PA \wedge F_x + PA \wedge F_y$$

En términos más simples: para calcular el momento de una fuerza se calculan los momentos de sus componentes y se suman algebraicamente. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 4.** Una fuerza  $F = (28 \text{ N } \angle 40^\circ)$  está aplicada en el extremo de una barra recta (Fig. 13). Calcular por el teorema de Varignon el momento de esta fuerza con respecto a la articulación A.

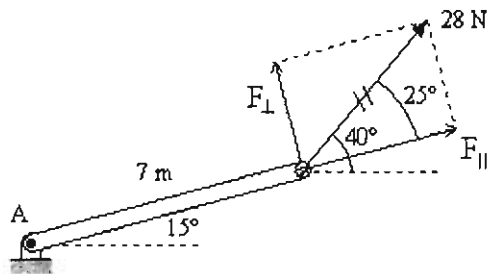


Fig. 13

Aquí nos conviene descomponer la fuerza dada F en una componente "F<sub>||</sub>" paralela a la barra y otra "F<sub>⊥</sub>" perpendicular a la misma. El momento de F será igual a la suma de los momentos de estas componentes.

<Nota. Cuando una fuerza se sustituye por sus dos componentes se suele tachar, como en la Fig. 13.>

Ahora bien, la componente F<sub>||</sub> no produce momento con respecto a A, ya que su línea de acción pasa por A. Entonces el momento de F será igual solamente al momento de su componente F<sub>⊥</sub>. Esta componente vale  $F_{\perp} = 28 \text{ sen } 25^\circ \text{ N} = 11.83 \text{ N}$ , y su

brazo de palanca con respecto a A es de 7 m. Por lo tanto, el momento pedido es, con el signo correcto,

$$M_A = 11.83 \text{ N} \cdot 7 \text{ m} = 82.81 \text{ N} \cdot \text{m}$$

También podríamos haber descompuesto F en sus componentes horizontal y vertical F<sub>x</sub> y F<sub>y</sub>, como en la Fig. 14. Sin embargo, esto requeriría efectuar los mismos pasos que si usáramos la fórmula del producto externo. Veamos.

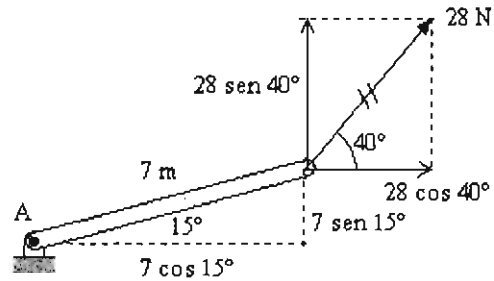


Fig. 14

La componente horizontal vale

$$F_x = 28 \text{ cos } 40^\circ = 21.45$$

y su brazo de palanca con respecto a A es

$$b_1 = 7 \text{ sen } 15^\circ = 1.81$$

de modo que el momento de F<sub>x</sub> c/r a A es

$$M_1 = - 21.45 \cdot 1.81 = - 38.82$$

Por otra parte, la componente vertical vale

$$F_y = 28 \text{ sen } 40^\circ = 18.00$$

y su brazo de palanca c/r a A es

$$b_2 = 7 \text{ cos } 15^\circ = 6.76$$

de modo que el momento de F<sub>y</sub> c/r a A es

$$M_2 = 18 \cdot 6.76 = 121.68$$

La suma de momentos de F<sub>x</sub> y F<sub>y</sub> es

$$M_A = M_1 + M_2 = - 38.82 + 121.68 = 82.86$$

Es el mismo resultado que habíamos obtenido (excepto por errores de redondeo de decimales).

<Nota. Al aplicar el teorema de Varignon se trabaja con los valores absolutos de las componentes. El signo del momento de cada componente se saca por inspección de la figura.>

Recuerde que con el método de Varignon las componentes vectoriales en que se descompone la fuerza  $F$  deben estar aplicadas en el mismo punto de aplicación de la fuerza  $F$ . Si esta fuerza se ha trazado incidiendo en su punto de aplicación, como en la Fig. 15, entonces las componentes también deben trazarse incidiendo allí.

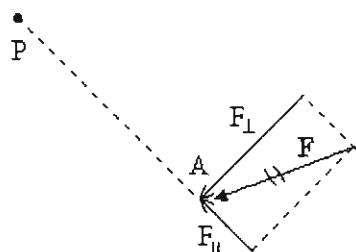


Fig. 15

### 1.4. Sistemas de fuerzas

Llamaremos *sistema de fuerzas* a un conjunto de fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$ , todas ellas aplicadas sobre un mismo cuerpo rígido. Lo escribiremos así:

$$\mathcal{S} = \{F_1(A_1), F_2(A_2), \dots, F_N(A_N)\}$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_N$  son los puntos de aplicación de las fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$ , respectivamente.

<Nota. El símbolo  $F(A)$  significa que la fuerza  $F$  está aplicada en el punto  $A$ .>

La *fuerza total* (o *fuerza neta*) del sistema de fuerzas  $\mathcal{S}$ , que denotaremos con  $\mathcal{R}$ , es la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N F_i$$

El *momento [total] del sistema* con respecto a un punto  $P$  es la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a  $P$ :

$$\mathcal{M}_P = \sum_{i=1}^N PA_i \wedge F_i$$

El momento total depende drásticamente del punto de referencia  $P$ , excepto para ciertos sistemas de fuerzas especiales, como veremos enseguida.

### 1.5. Un teorema sobre momentos

Consideremos un sistema  $\mathcal{S}$  de fuerzas, y dos puntos fijos del espacio,  $P$  y  $Q$  (Véase la Fig. 16).

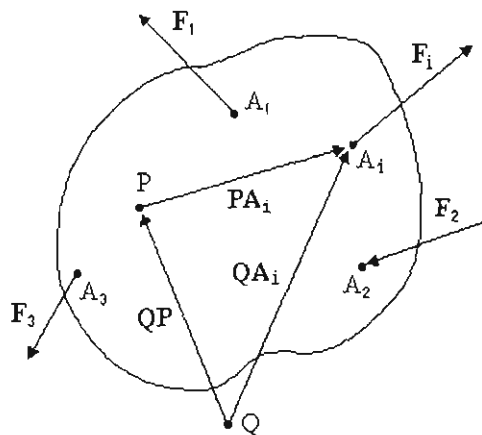


Fig. 16

¿Qué relación existe entre los momentos del sistema  $\mathcal{S}$  con respecto a los puntos  $P$  y  $Q$ ? Veamos.

El momento del sistema con respecto a  $P$  es

$$\mathcal{M}_P = \sum PA_i \wedge F_i$$

y con respecto a  $Q$  es

$$\mathcal{M}_Q = \sum QA_i \wedge F_i$$

Ahora bien, existe la relación, para toda "i":

$$QA_i = QP + PA_i$$

que, sustituida en la expresión de  $\mathcal{M}_Q$  nos da

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Q &= \sum QA_i \wedge F_i = \sum (QP + PA_i) \wedge F_i = \\ &= \sum QP \wedge F_i + \sum PA_i \wedge F_i \\ &= QP \wedge \left( \sum F_i \right) + \sum PA_i \wedge F_i \end{aligned}$$

Hemos sacado el factor  $QP$  de la primera suma, ya que no depende del índice "i".

Pero  $\sum F_i$  es la fuerza total del sistema,  $\mathcal{R}$ , y el segundo término es  $\mathcal{M}_P$ ; obtenemos así el siguiente teorema:

(6) **Teorema 1.**  
 Los momentos (totales) del sistema  $\mathcal{S}$  con respecto a dos puntos P y Q están relacionados por

$$\mathcal{M}_Q = \mathcal{M}_P + QP \wedge \mathcal{R}$$

donde  $\mathcal{R}$  es la fuerza total del sistema.

El teorema (6) tiene un corolario bastante útil, a saber:

(7) **Corolario**  
 Si la fuerza total de un sistema es igual a cero, entonces el momento total del sistema no depende del punto de referencia.  
 En símbolos,

$$\mathcal{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_P = \mathcal{M}_Q$$

donde P y Q son puntos arbitrarios.

A los sistemas de fuerzas cuya fuerza total es nula les daremos el peculiar nombre de *sistemas de fuerza total nula*.

Vamos a ilustrar el Corolario (7) usando un sistema de fuerzas muy simple.

**Ejemplo 5.** El sistema de fuerzas que actúa sobre la viga horizontal de la Fig. 17 es un sistema de fuerza total nula.

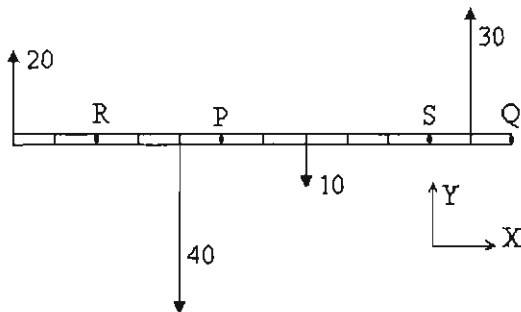


Fig. 17

Denotemos con " $\mathcal{R}$ " la componente Y de la fuerza total  $\mathcal{R}$ . Se cumple que

$$\mathcal{R} = 20 - 40 - 10 + 30 = 0$$

Según el corolario del teorema recién demostrado, el momento del sistema debe ser *absoluto*, es decir, el mismo con respecto a cualquier punto del espacio.

Calculémoslo primero con respecto a P:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_P &= -20 \cdot 5 + 40 \cdot 1 - 10 \cdot 2 + 30 \cdot 6 = \\ &= -100 + 40 - 20 + 180 = 100 \end{aligned}$$

Ahora calculémoslo con respecto a Q:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Q &= -20 \cdot 12 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 5 - 30 \cdot 1 = \\ &= -240 + 320 + 50 - 30 = 100 (!) \end{aligned}$$

Finalmente, con respecto a R:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_R &= -20 \cdot 2 - 40 \cdot 2 - 10 \cdot 5 + 30 \cdot 9 = \\ &= -40 - 80 - 50 + 270 = 100 (!! ) \end{aligned}$$

Dado que no depende del punto de referencia, el momento del sistema puede denotarse simplemente con un símbolo como " $\mathcal{M}$ ", sin subíndice. Este momento se califica *absoluto*.

### 1.6. Pares

Un *par* es un sistema de dos fuerzas  $F$  y  $-F$ . Denotando el par con el símbolo " $\mathcal{P}$ " escribimos este particular sistema de fuerzas en la forma

$$\mathcal{P} = \{F, -F\}$$

Sea " $d$ " la distancia entre las líneas de acción de las fuerzas del par (llamada también "el *brazo del par*"). Véase la Fig. 18.

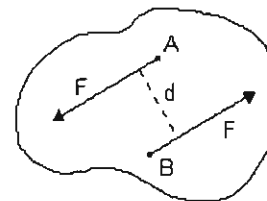


Fig. 18

Por ser un sistema de fuerza total nula, el momento de un par  $\mathcal{P}$  es absoluto. Evaluándolo con respecto al punto A encontramos que el momento del par es

$$m = \pm F d$$

El signo positivo se aplica si el par tiende a producir rotación antihoraria del cuerpo; el negativo en caso contrario.

La Fig. 19 presenta una situación en la que se aplica un *par* a un cuerpo. Una barra metálica fija en sus extremos porta un tornillo insertado fuertemente en un punto de su superficie exterior. El tornillo es de cabeza hexagonal, la cual sobresale de la barra. Por medio de una llave se trata de hacer rotar el tornillo en sentido antihorario. Supongamos por simplicidad que la medida de la llave no es exactamente igual a la del tornillo, de tal manera que existe cierta holgura como se muestra en la Fig. 20, la cual es una figura ampliada de la situación.

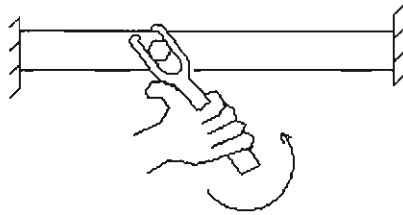


Fig. 19

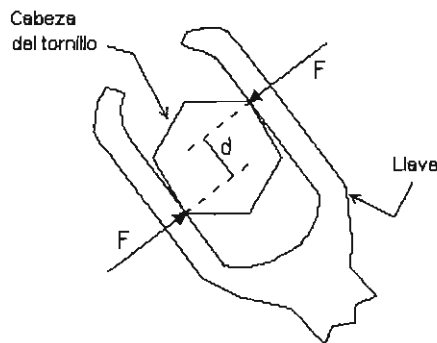


Fig. 20

Entonces las fuerzas sobre la cabeza del tornillo son dos fuerzas normales que aparecen en dos puntos y constituyen un *par* de momento  $m = Fd$ .

Volviendo a la Fig. 18, imagine que el brazo del par, "d", se va reduciendo, a la vez que la magnitud F va aumentando, de tal modo que el producto "F d" se mantenga constante. Cuando "d" es ya mucho muy pequeña, podemos hablar de un *par localizado*, esto es, un par aplicado (esencialmente) en un punto. Este es un concepto muy útil en la estática.

Un par localizado se representa gráficamente por uno de los símbolos mostrados en la Fig. 21.



Fig. 21

El de la izquierda representa un par cuyo momento es positivo, el de la derecha un par de momento negativo.

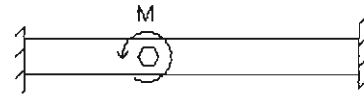


Fig. 22

Así por ejemplo, el par aplicado por la llave en la Fig. 19 se representaría como vemos en la Fig. 22.

El empleo de la frase "*aplicar un par*" se generaliza a situaciones en que se aplica un sistema de fuerzas cuya fuerza total es cero pero cuyo momento total es distinto de cero. Por ejemplo, si se trata de girar el tornillo con un llave de cruceta, estaríamos aplicando unas fuerzas como vemos en la Fig. 23. Este sería un sistema de fuerza total nula, pero momento total (absoluto) distinto de cero. En esta situación decimos también que estamos aplicando un par sobre el tornillo. Así pues, en general, se entiende por "*aplicar un par*" el aplicar un sistema de fuerzas cuya fuerza total es nula. (Puede ser propiamente un par  $\{F, -F\}$  o bien un conjunto de más de dos fuerzas que sumen cero.).

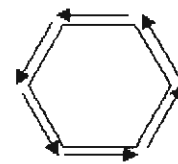


Fig. 23

En general, un sistema de fuerzas  $\mathcal{S}$  puede contener pares. En este caso escribiríamos el sistema en la forma

$$\mathcal{S} = \{F_1(A_1), F_2(A_2), \dots, F_N(A_N); m_1, m_2, \dots, m_k\}$$

donde  $F_i(A_i)$  es una fuerza localizada en  $A_i$ , y  $m_i$  es el momento (absoluto) del par número "i".

**Ejemplo 6.** Calcular la fuerza total y el momento total, con respecto a A, del sistema de fuerzas aplicadas perpendicularmente sobre la viga mostrada en la Fig. 24. Cada división longitudinal representa 1 m.

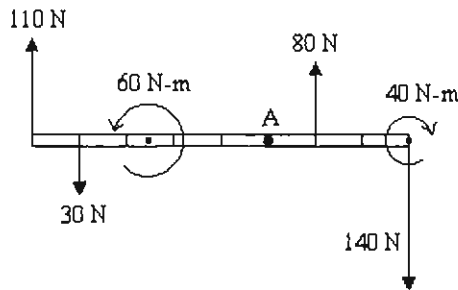


Fig. 24

Notemos que el sistema de fuerzas aplicadas incluye dos pares. En la suma de fuerzas podemos pasar por alto los pares (ya que por ser éstos sistemas de fuerza total nula no contribuyen a dicha suma). La (componente vertical de la) fuerza total es

$$R = 110 - 30 + 80 - 140 = 20 \quad (\text{N})$$

Los pares sí contribuyen al momento total. Sus momentos entran con el mismo valor independientemente del punto que se escoja como referencia de momentos.

El momento del sistema con respecto a A es

$$\begin{aligned} M_A &= -110(5) + 30(4) + 60 + 80(1) - 40 - 140(3) \\ &= -750 \quad (\text{N}\cdot\text{m}) \end{aligned}$$

Calculemos el momento total con respecto al extremo derecho de la viga:

$$M_{ed} = -110(8) + 30(7) + 60 - 80(2) - 40 = -810$$

Notemos que los pares contribuyen a la suma de momentos con respecto al punto A y al extremo derecho siempre con el mismo valor, a saber, 60 N·m y -40 N·m.

En la estática del cuerpo rígido los "pares localizados" pueden suponerse aplicados en cualquier punto del cuerpo. El moverlos no afecta ni la fuerza total del sistema ni el momento total.

Así por ejemplo, los dos pares sobre la viga del ejemplo anterior podrían haberse colocado como vemos en la Fig. 25.

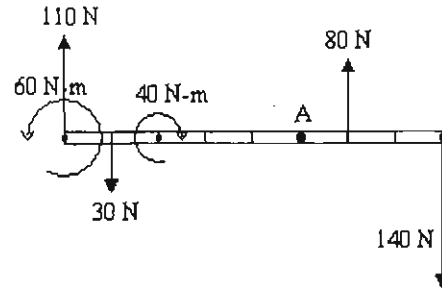


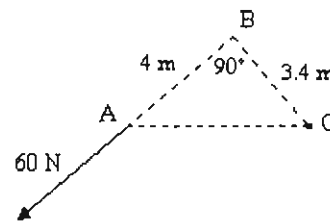
Fig. 25

También podríamos sumar los momentos de los pares y sustituir los dos pares de la Fig. 24 o 25 por un sólo par de momento +20 N·m, ubicado en cualquier lugar de la viga.

La localización de los pares sí es importante a la hora de estudiar las deformaciones de los cuerpos, tema que corresponde a la mecánica de sólidos.

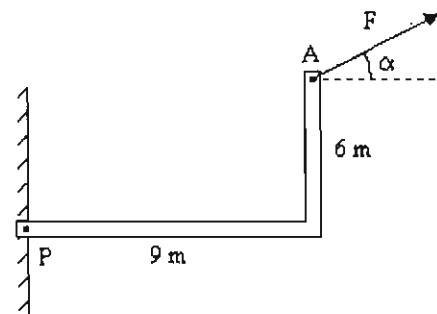
### 1.7. Problemas

1. Calcular el momento de la fuerza de 60 N con respecto a los puntos A, B y C.



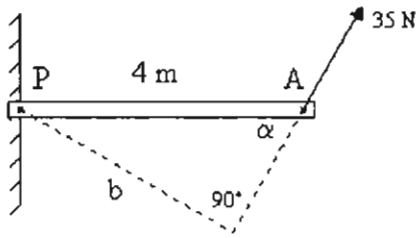
Resp. 0; 0; 204 N·m.

2. El momento de la fuerza aplicada en A, con respecto al punto P, es igual a cero. Calcular el ángulo  $\alpha$ .



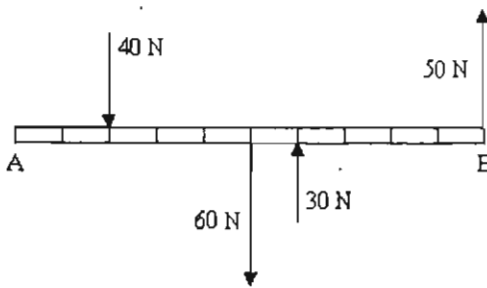
Resp. 33.69°.

3. Dado que el momento de la fuerza de 35 N con respecto a P vale  $M_P = 129.5 \text{ N}\cdot\text{m}$ , calcular el brazo de palanca de dicha fuerza c/r a P. Calcular también el ángulo  $\alpha$ .



Resp. 3.7 m; 67.67°.

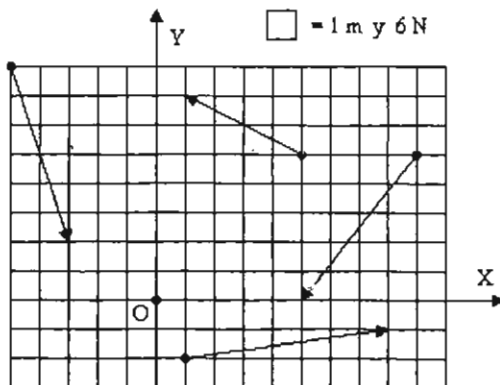
4. Sobre la viga AB se aplican 4 fuerzas como se muestra. Calcular el momento total de este sistema de fuerzas con respecto a los extremos A y B. Cada división de la viga representa 1 metro.



Si se añadiera una fuerza vertical hacia arriba de 20 N en la cuarta división de la viga, ¿cuánto valdría el momento total con respecto a A y a B?

Resp. 300; 500; 380; 380 (en newton-metro).

5. Calcular la fuerza total y el momento total con respecto al origen O, del sistema de 4 fuerzas mostradas. Cada división de la cuadrícula representa a la vez 1 metro y 6 newton.



Resp. (6, -48) N; 204 N-m.

6. Se tiene un sistema de 4 fuerzas,

$$F_1 = (12, -34), \quad F_2 = (25 \angle 48^\circ)$$

$$F_3 = (-9, 15), \quad F_4 = (11 \angle -130^\circ)$$

aplicadas respectivamente en los puntos

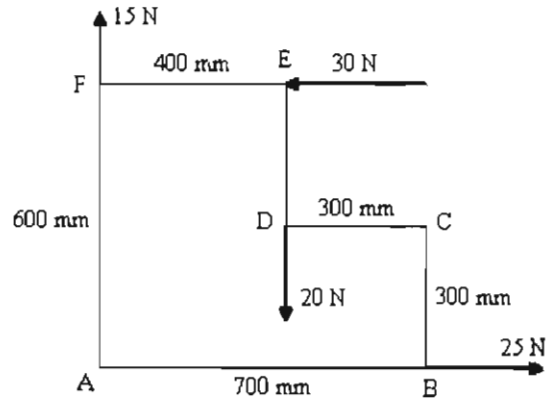
$$A_1(3, 6), \quad A_2(-5, 2)$$

$$A_3(0, 8), \quad A_4(10, -3)$$

(Fuerzas en newton y coordenadas en metro). Calcular el momento del sistema con respecto al punto P(2, 6).

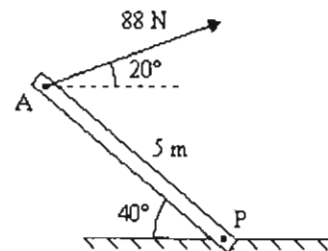
Resp. - 240.18 N-m.

7. Sobre la placa ABCDEF se aplican las fuerzas mostradas en los vértices B, D, E y F. Calcular el momento total de las 4 fuerzas con respecto a los puntos A y D.



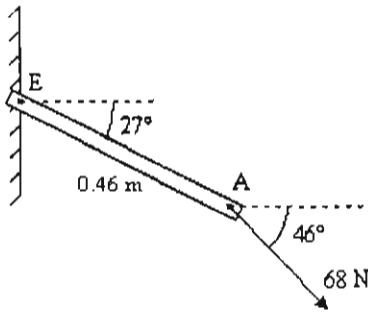
Resp.  $\Sigma M_A = 100 \text{ N-m}$ ;  $\Sigma M_D = 105 \text{ N-m}$ .

8. Sobre la viga empotrada, de longitud 5 m e inclinada a 40° con la horizontal, actúa la fuerza de 88 N en un extremo, como se muestra. Calcular el momento de dicha fuerza con respecto a P, usando  
(i) El método del producto externo.  
(ii) El método del brazo de palanca.  
(iii) El teorema de Varignon.



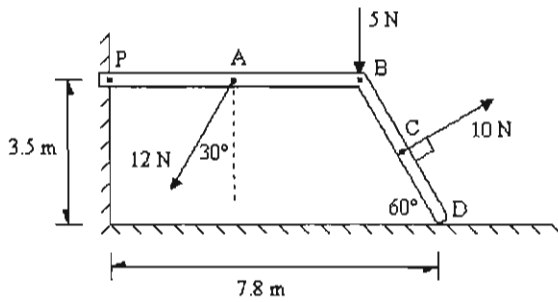
Resp. - 381.05 N-m.

9. Para la fuerza de 68 N aplicada en el extremo A de la viga empotrada, calcular el momento con respecto al extremo E, usando el teorema de Varignon.



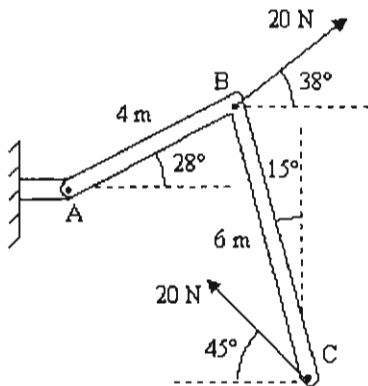
Resp. - 10.18 N-m.

10. Para el sistema de 3 fuerzas aplicadas sobre la viga angular calcular el momento total con respecto a los puntos P y B. El punto A es el punto medio del tramo PB de la viga, y el punto C es el punto medio del tramo BD. La fuerza de 10 N es perpendicular al tramo BD.



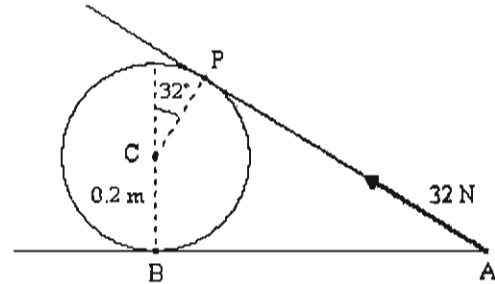
Resp.  $\Sigma M_P = -9.83 \text{ N-m}$ ;  $\Sigma M_B = 50.24 \text{ N-m}$ .

11. Calcular el momento de cada una de las dos fuerzas de 20 N mostradas, con respecto a los puntos A, B y C, usando el método que guste.



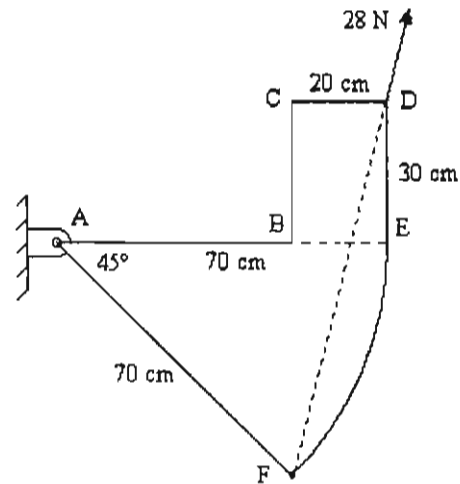
Resp. 13.9; 0; -110.5; -16.5; -60; 0.

12. Una fuerza de 32 N actúa en el punto A de la línea AP. La línea CP desde el centro C del círculo de 0.2 m de radio es perpendicular a la línea AP. CB es vertical y BA horizontal. Calcular el momento de la fuerza con respecto al punto B.



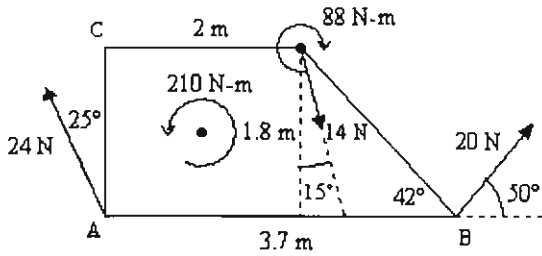
Resp.  $BA = PA = 0.698 \text{ m}$ ;  $M_C = 6.41 \text{ N-m}$ .

13. Sobre una placa con la forma indicada en la figura se aplica una fuerza de 28 N en el vértice D. La línea AB es perpendicular a BC, ésta es perpendicular a CD, y ésta lo es a DE. El segmento EF es un arco de círculo de radio  $AE = AF = 50 \text{ cm}$ . Calcular el momento de dicha fuerza con respecto a A.



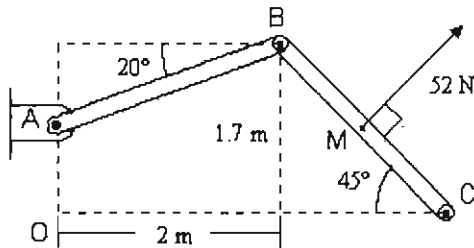
Resp. 16.88 N-m.

14. El sistema de fuerzas sobre el cuerpo trapezoidal incluye 3 fuerzas y 2 pares, con los valores y direcciones mostrados. Calcular la fuerza total y el momento total del sistema con respecto a los puntos A y B.



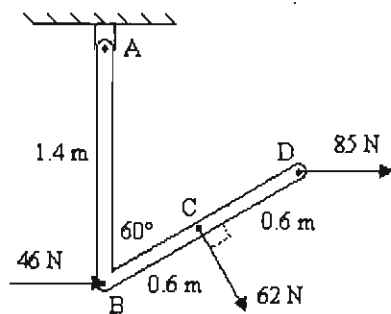
Resp. c/r a A: 145.12 N-m.

15. En la figura, las barras AB y BC tienen la misma longitud. La línea OA es vertical y la OC es horizontal. La proyección de AB sobre la dirección horizontal (Eje X) vale 2 metros. El punto M es el punto medio de la barra BC. La fuerza de 52 N es perpendicular a la barra BC. Calcular el momento de esta fuerza con respecto a los puntos A y C.



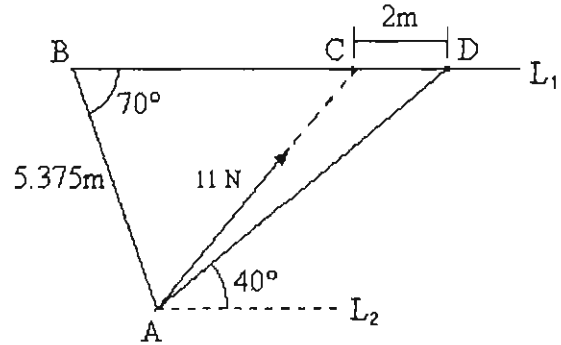
Resp. 102.1 N-m.

16. Usar el teorema de Varignon para calcular el momento de las tres fuerzas mostradas, con respecto a los puntos B, C y D.



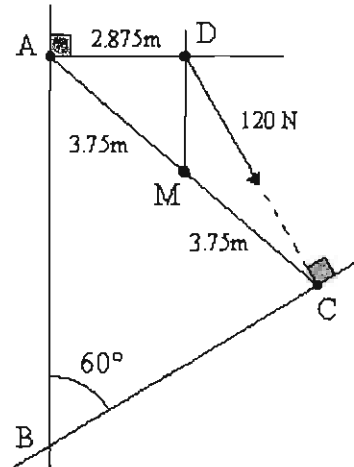
Resp. (46 N:) 0, -13.8, -27.6; (62 N:) -37.2, 0, 37.2 (85 N:) -88.3, -44.1, 0 (unidades N-m)

17. En la figura, las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas. Los segmentos CD y BA miden 2 m y 5.375 m, respectivamente. Calcular el momento de la fuerza de 11 N con respecto al punto B.



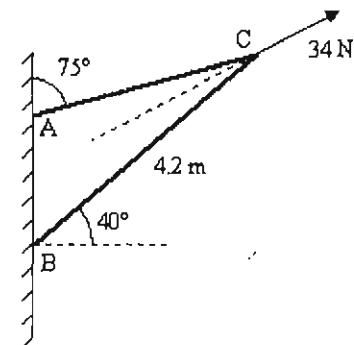
Resp. 50.4 N-m.

18. M es el punto medio del segmento AC, cuya longitud es 7.5 m. AB es vertical, AD horizontal y DM vertical. El segmento CD es perpendicular al segmento BC. Calcular el momento de la fuerza de 120 N con respecto al punto M.



Resp. -154.32 N-m.

19. La fuerza de 34 N bisecta el ángulo en C. Calcular el momento de esta fuerza con respecto al punto B.



Resp. -30.9 N-m.



## CAPÍTULO 2

## ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO. RESULTANTE LOCALIZADA

### 2.1. Ecuaciones de equilibrio del cuerpo rígido

Las leyes de Newton de la mecánica, generalizadas a cuerpos rígidos, conducen a las siguientes

(8) *Ecuaciones de equilibrio del cuerpo rígido.*

Si un cuerpo rígido está en equilibrio, entonces debe cumplirse que:

- La suma de las fuerzas que solicitan al cuerpo es igual a cero:

(a) 
$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0$$

- La suma de los momentos de todas las fuerzas sobre el cuerpo, con respecto a cualquier punto del espacio, es igual a cero:

(b) 
$$\sum_{i=1}^N (M_i)_{*} = 0$$

En (8b) el signo “\*” es un “comodín” que representa una cualquiera de las letras A, B, C, ..., P, Q ... etc. usadas para designar puntos del espacio. El símbolo  $(M_i)_{*}$  es el momento de la fuerza número “i” con respecto al punto arbitrario “\*”.

El corolario (7)-p10 nos permite entender por qué la suma de momentos se puede calcular con respecto a *cualquier* punto: dado que, por (8a), el sistema de fuerzas que solicitan al cuerpo en equilibrio es un *sistema de fuerza total nula*, tendremos que el momento total de este sistema es absoluto (es decir, no depende del punto de referencia); por lo tanto, si dicho momento total vale cero con respecto a determinado punto P, entonces valdrá cero con respecto a cualquier otro punto.

Las ecuaciones (8a) y (8b) se suelen escribir en la forma abreviada

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_{*} = 0$$

en las que se sobreentiende que la suma de fuerzas y momentos abarca todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo. La suma de fuerzas se descompone en las dos ecuaciones siguientes:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0$$

Tenemos pues las siguientes ecuaciones de equilibrio:

(9) *Forma estándar de las ecuaciones de equilibrio.*

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

El punto A es arbitrario.

Ahora bien, existen otras formas alternativas de las ecuaciones de equilibrio, a saber,

(10) *Forma alternativa “A” de las ecuaciones de equilibrio.*

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

Los puntos A y B son arbitrarios, excepto por que no deben estar sobre una línea paralela al Eje Y.

(11) *Forma alternativa “B” de las ecuaciones de equilibrio.*

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

Los puntos A y B son arbitrarios, excepto por que no deben estar sobre una línea paralela al Eje X.

Para los que viven y aman el cálculo de momentos existe esta otra forma:

(12) *Forma alternativa "C" de las ecuaciones de equilibrio.*

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

Los puntos A, B y C no deben ser colineales.

Vamos a justificar la forma "A" de estas ecuaciones.

Consideremos un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas cuya fuerza total es  $\mathcal{R}$ , con componentes  $(\sum F_x, \sum F_y)$ . ¿Qué podemos decir sobre  $\mathcal{R}$ , dado que satisface las condiciones de equilibrio (9)? Veamos.

La primera condición,  $\sum F_x = 0$ , exige que la fuerza total  $\mathcal{R}$  no tenga componente X, es decir, que esté vertical.

La segunda condición,  $\sum M_A = 0$ , exige que la línea de acción de  $\mathcal{R}$  pase por el punto A (Véase la Fig. 26).

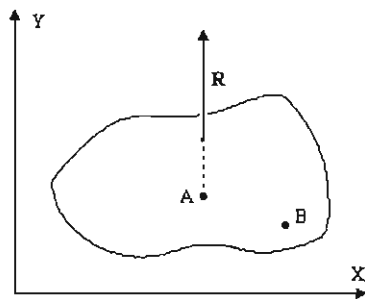


Fig. 26

Finalmente, si el punto B no está en la misma línea vertical que A, entonces la tercera ecuación de equilibrio,  $\sum M_B = 0$ , solamente puede cumplirse si  $\mathcal{R} = 0$ . Lo anterior significa que si se cumplen las condiciones el cuerpo está en equilibrio.

Análogamente se pueden justificar las otras formas de las ecuaciones de equilibrio.

**Ejemplo 7.** La viga horizontal mostrada en la Fig. 27 está en equilibrio bajo las fuerzas verticales indicadas. Calcular las fuerzas F y P. Unidades de fuerza y longitud arbitrarias.

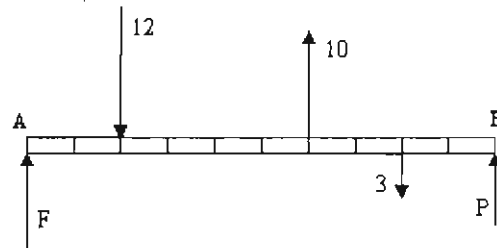


Fig. 27

Igualemos a cero el momento total, del sistema de fuerzas aplicadas, con respecto al extremo izquierdo A:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -12(2) + 10(6) - 3(8) + P(10) \\ &= 12 + 10P = 0 \end{aligned}$$

de donde  $P = -1.2$ . El signo negativo de P indica que esta fuerza va realmente hacia abajo.

Ahora igualemos a cero la fuerza total del sistema. La suma de componentes verticales nos da

$$\sum F_y = F - 12 + 10 - 3 + P = 0$$

de donde, sustituyendo el valor  $P = -1.2$  hallamos

$$F = 6.2$$

**Ejemplo 8.** Un motor que pesa 300 N está sometido a un par de momento 600 N-m, y a dos fuerzas de soporte  $R_1$  y  $R_2$  como se muestra. Calcular  $R_1$  y  $R_2$ .

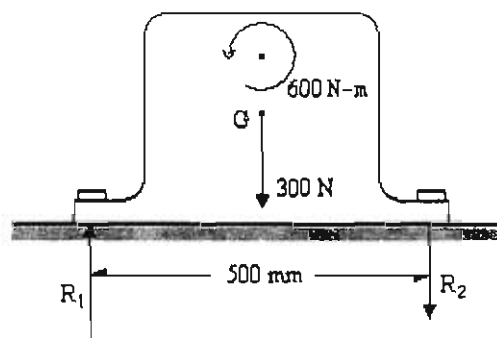


Fig. 28

El peso de 300 N lo trazamos en el centro de gravedad del motor, que se encuentra (por hipótesis) a 250 mm del punto de aplicación de  $R_1$ .

Planteemos el equilibrio en la dirección vertical Y:

$$\Sigma F_y = R_1 - R_2 - 300 = 0$$

(Note que el par no interviene en la suma de fuerzas).  
Tomemos momentos con respecto al punto de aplicación de  $R_1$ :

$$\Sigma M = -300(0.25) + 600 - R_2(0.50) = 0$$

de donde

$$R_2 = 1050 \text{ N}$$

y entonces

$$R_1 = 1350 \text{ N}$$

Si hubiéramos tomado momentos con respecto al centro de masa G, tendríamos

$$\Sigma M_G = -R_1(0.25) + 600 - R_2(0.25) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = 2400$$

Notemos que el momento del par interviene en esta ecuación con el mismo valor de 600 N-m que en la ecuación anterior.

**Ejemplo 9.** Una placa rectangular ABCD de largo 0.8 m y ancho 0.5 m sufre las 5 fuerzas mostradas en la figura. Suponiendo que la placa está en equilibrio, calcular las fuerzas  $A_x$ ,  $A_y$  y N.

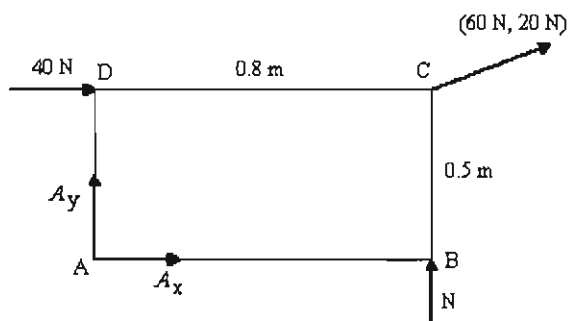


Fig. 29

Nos conviene calcular momentos con respecto al punto A, puesto que entonces las fuerzas  $A_x$  y  $A_y$  no entrarán en la ecuación de equilibrio de momentos. Usando unidades "m" y "N" tenemos

$$\Sigma M_A = -40(0.5) + \begin{vmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 60 & 20 \end{vmatrix} + N(0.8) = 0$$

de donde

$$N = 42.5 \text{ N}$$

Por otra parte,

$$\Sigma F_y = A_y + N + 20 = 0$$

de donde, sustituyendo el valor  $N = 42.5$  hallamos

$$A_y = -20 - N = -20 - 42.5 = -62.5 \text{ (N)}$$

Finalmente,

$$\Sigma F_x = 40 + 60 + A_x = 0$$

de donde

$$A_x = -100 \text{ (N)}$$

## 2.2. Sustituciones o movimientos de fuerzas

La hipótesis de rigidez de los cuerpos en la estática del cuerpo rígido nos permite sustituir (o "mover") las fuerzas de tal manera que no se perturbe el estado de equilibrio ni los valores de las fuerzas que mantienen este estado. Veamos.

En la Fig. 30 supongamos que el camión tiene aplicados los frenos. Apliquemos una fuerza F, no tan grande que rompiese el equilibrio del camión. Está claro que da lo mismo empujar el camión en el punto A con dicha fuerza F que jalarlo por el punto B con la misma fuerza.

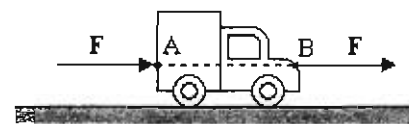


Fig. 30

Esto es permisible en la estática del cuerpo rígido, pero no es válido en la estática del cuerpo deformable, puesto que en el primer caso se deforma la caja del camión en A, en el segundo la trompa en B.

Otra cosa que podemos hacer en la estática del cuerpo rígido se ilustra en la Fig. 32. Se trata del motor en equilibrio considerado en el Ejemplo 8 de la página precedente: hemos añadido al sistema de fuerzas sobre el motor un par que consta de dos fuerzas de 900 N aplicadas en los puntos A y B.

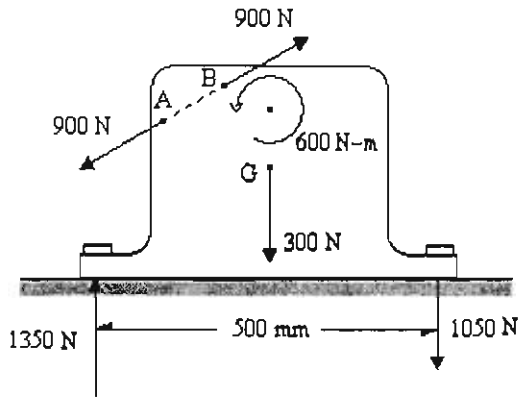


Fig. 31

Las fuerzas de este par son colineales, de tal manera que no solamente la fuerza total del par es cero, sino que el momento del par es igual a cero con respecto a cualquier punto del espacio. Así pues, el añadir este par no perturba el equilibrio del motor, ni altera los valores obtenidos en el Ejemplo 8 para las fuerzas de soporte de 1350 N y 1050 N. Tales pares, que constan de dos fuerzas colineales, los denominaremos *pares inocuos*.

Existe otro tipo de movimiento de fuerzas válido en estática. Lo veremos un poco más adelante. Por lo pronto formalizaremos las dos ideas anteriores.

(13) **Principio de transmisibilidad de las fuerzas**  
 Toda fuerza puede trasladarse a lo largo de su propia línea de acción sin que se alteren las ecuaciones de equilibrio.

Demostremoslo. Sea  $F$  una fuerza aplicada en el punto  $A$  de un cuerpo supuestamente en equilibrio (Fig. 32).

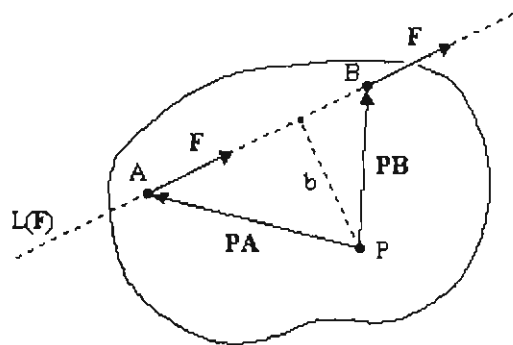


Fig. 32

El momento de  $F(A)$  con respecto a algún punto  $P$  escogido arbitrariamente viene dado por

$$M_P = PA \wedge F$$

Ahora movamos la fuerza  $F(A)$  a lo largo de su línea de acción " $L(F)$ ", reubicándola en algún otro punto  $B$ . Este movimiento es una *traslación*, es decir, durante el mismo no cambia la magnitud ni la dirección de la fuerza. El momento de  $F(B)$  con respecto a  $P$  es

$$M_P = PB \wedge F$$

Pero ambos momentos son iguales, porque el brazo de palanca " $b$ " de  $F(A)$  con respecto a  $P$  es el mismo que el de  $F(B)$ . Esto significa que la ecuación de equilibrio de momentos no se altera. Esta ecuación contenía antes del movimiento un término como

$$.... + PA \wedge F + .... = 0$$

el cual ahora se ha cambiado por un término del mismo valor:

$$... + PB \wedge F + ... = 0$$

Ni la fuerza ni su momento han cambiado en este movimiento, por lo que las ecuaciones de equilibrio permanecen inalteradas.

Decimos que la fuerza  $F$  aplicada en  $A$ , o sea  $F(A)$ , es *equivalente* a esa misma fuerza pero aplicada en  $B$ , o sea  $F(B)$ , donde  $A$  y  $B$  son puntos arbitrarios de la línea de acción de  $F$ , o sea  $L(F)$ . En forma compacta,

$$F(A) \text{ Equiv } F(B) \quad \text{donde } A, B \in L(F)$$

Insertemos aquí la siguiente definición:

(14) **Par inocuo**  
 Un par inocuo es un sistema de dos fuerzas  $\{ F, -F \}$  que tienen la misma línea de acción ("colineales").

Fig. 33

Tanto la fuerza total como el momento total de un par inocuo son ceros, así que siempre podemos añadir a un cuerpo rígido uno o más de tales pares sin que se alteren las ecuaciones de equilibrio.

El siguiente apartado es una aplicación inmediata del principio de transmisibilidad.

### 2.3. ¿Cuándo se puede tratar a un cuerpo rígido como si fuese una partícula?

Consideremos un conjunto de fuerzas sobre un cuerpo rígido, tales que sus líneas de acción se intersectan en un punto, como las fuerzas  $F_3, F_4, F_5$  y  $F_6$  de la Fig. 34.

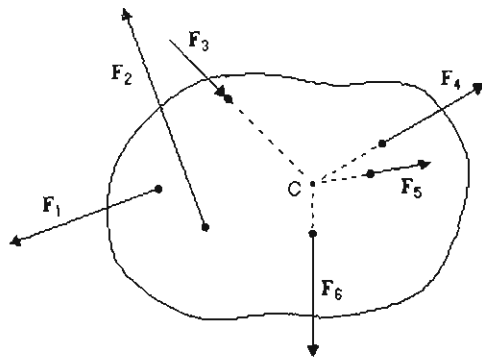


Fig. 34

Por el principio de transmisibilidad, podemos trasladar estas fuerzas a lo largo de sus respectivas líneas de acción, de tal manera que todas ellas queden actuando en el punto de intersección  $C$ , obteniéndose así la situación mostrada en la Fig. 35.

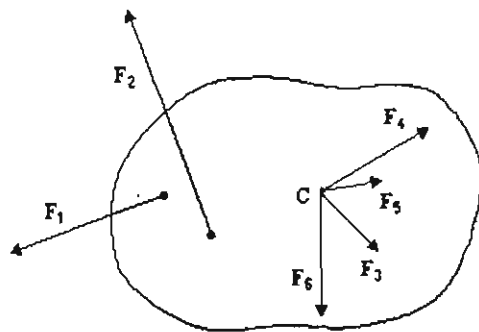


Fig. 35

El momento de estas fuerzas con respecto a algún punto  $P$  es

$$M_P = PC \wedge F_3 + PC \wedge F_4 + PC \wedge F_5 + PC \wedge F_6$$

$$= PC \wedge (F_3 + F_4 + F_5 + F_6)$$

el cual se puede escribir simplemente así:

$$M_P = PC \wedge F_{3456}$$

donde

$$F_{3456} = F_3 + F_4 + F_5 + F_6$$

Vemos pues que ni la fuerza total ni el momento total del sistema de fuerzas sobre el cuerpo se alteran si sustituimos las cuatro fuerzas consideradas por la única fuerza  $F_{3456}$ , aplicada en el punto de concurrencia  $C$ . Llegamos a la situación representada en la Fig. 36:

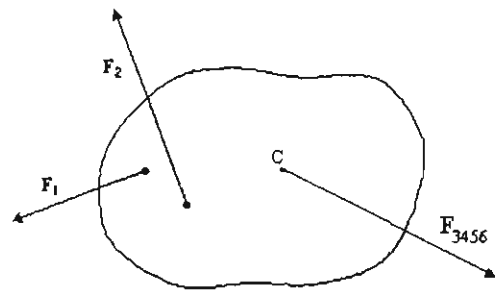


Fig. 36

(15) Un conjunto de fuerzas concurrentes se puede sustituir por una sola fuerza cuyo valor es la suma vectorial de las fuerzas del conjunto, y cuyo punto de aplicación es el punto donde concurren las líneas de acción de las fuerzas.

Decimos que el sistema de fuerzas concurrentes es *equivalente* a una sola fuerza, igual a la suma de las fuerzas del conjunto, aplicada en el punto de concurrencia.

Un ejemplo de este teorema lo tenemos en la Fig. 37. Se tienen dos esferas lisas que se tocan mutuamente y que están apoyadas sobre superficies lisas. La figura muestra el diagrama de cuerpo libre de la "esfera mayor". Las fuerzas sobre esta esfera son:

- El peso  $W$  de la misma.
- Las fuerzas normales  $N_1$  y  $N_2$  debidas a la superficie angular sobre la que se apoya.
- La fuerza normal  $N_3$  debida a la esfera menor.

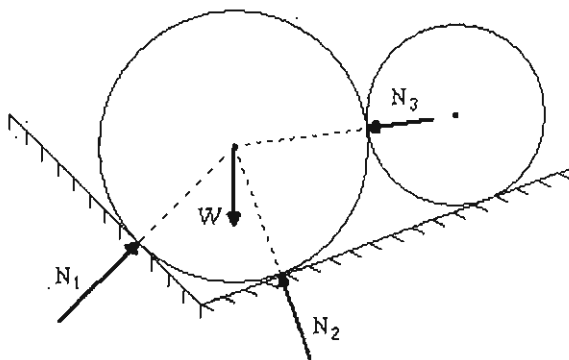


Fig. 37

Todas estas fuerzas concurren en el centro de la esfera mayor. Reuniendo las fuerzas allí, el diagrama de cuerpo libre de esta esfera podría haberse trazado como en la Fig. 38.

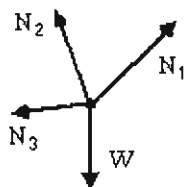


Fig. 38

Este diagrama es similar al de una *partícula* sometida a las 4 fuerzas indicadas.

(16) Si las líneas de acción de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido se intersecan en un mismo punto C (o sea que tenemos un *sistema de fuerzas concurrentes*), entonces el cuerpo se puede tratar como si fuese una *partícula*, en el sentido de que su ecuación de equilibrio sería únicamente

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

La ecuación de momentos no es independiente de la anterior, por lo que no se aplicaría.

### 2.4. Traslación de una fuerza fuera de su línea de acción.

Sabemos que toda fuerza se puede trasladar a lo largo de su línea de acción sin que se altere el equilibrio. Ahora bien, ¿qué sucede si intentamos trasladar una fuerza hasta otro punto *fuera* de su línea

de acción?

Veámoslo en un ejemplo simple, el de la viga en equilibrio mostrada en la Fig. 39.

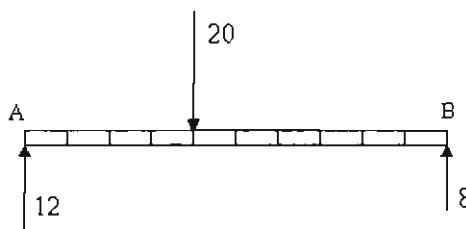


Fig. 39

Se comprueba que la viga está en equilibrio, ya que

$$\Sigma F = 12 - 20 + 8 = 0$$

$$\Sigma M_A = -20(4) + 8(10) = 0$$

Traslademos la fuerza de 20 en dos unidades hacia la derecha, ubicándola ahora en la 6a. división de la viga (Fig. 40):

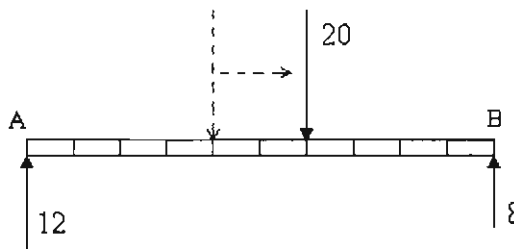


Fig. 40

¡No debimos hacerlo, pues hemos trastornado el equilibrio de la viga!

No hay motivo de preocupación, empero. Podemos enmendar este entuerto razonando como sigue: antes de mover la fuerza de 20 su momento con respecto al extremo A era de -80 unidades. Después de moverla su momento c/r a A pasó a -120 unidades, o sea que el momento total del sistema *disminuyó* en 40 unidades. Para arreglar el asunto basta con añadir un par cuyo momento sea de 40 unidades *positivas*, mismo que contrarrestará el cambio de "-40" debido al movimiento (Véase la Fig. 41).

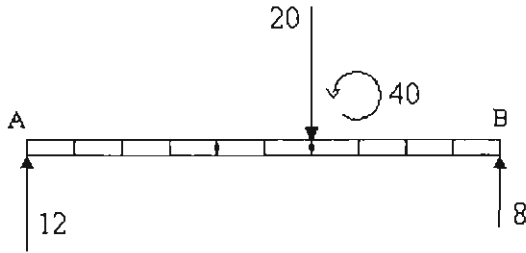


Fig. 41

<Nota. El par no tiene punto de aplicación; lo podemos trazar "flotando" en cualquier lugar de la viga.>

El equilibrio de la viga se conserva al hacer esta enmienda. La regla es pues la siguiente:

(17) *Traslación de una fuerza fuera de su línea de acción.*  
 Toda fuerza se puede trasladar de un punto de aplicación a otro, a condición de añadir un par cuyo momento sea el momento de la fuerza original con respecto al punto de destino.

Efectivamente, la fuerza original estaba en la 4a. división de la viga, de modo que su momento con respecto a su punto de destino, o sea la 6a. división, era de  $20(2) = 40$  unidades, valor del momento del par que debemos añadir.

Aunque hemos ilustrado este resultado usando una viga recta y fuerzas perpendiculares a ella, su validez es general. Demostremoslo.

Consideremos una fuerza  $F(A)$  sobre un cuerpo (Fig. 42). Supongamos que deseamos trasladar esta fuerza hasta el punto B.

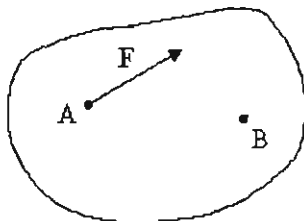


Fig. 42

En el punto B añadamos un par inocuo  $\{F(B), -F(B)\}$  como se muestra en la Fig. 43. Ahora combinemos la fuerza original  $F(A)$  con la fuerza  $-F(B)$  del par inocuo, para formar un par cuyo momento es igual al momento de  $-F(A)$  con respecto a B, el cual

denotaremos con  $M_B$ .

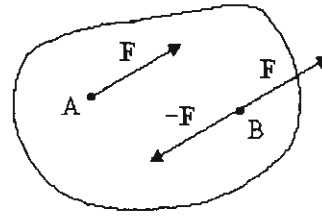


Fig. 43

Las fuerzas  $F(A)$  y  $-F(B)$  las reemplazamos por este par de momento  $M_B$ , quedando lo que vemos en la Fig. 44. Hemos demostrado así que la fuerza  $F(A)$  puede reubicarse en B, a condición de añadir el par de momento  $M_B$ .

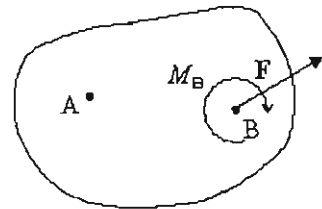


Fig. 44

Decimos que la fuerza aplicada en A es *equivalente* a la fuerza aplicada en B y a un par de momento  $M_B$ :

$$F(A) \text{ Equiv } \{F(B); M_B\}$$

donde  $M_B = BA \wedge F(A)$

Se tiene así que el sustituir la fuerza  $F(A)$  por el sistema  $\{F(B), M_B\}$  no altera la suma de fuerzas ni la de momentos.

**Ejemplo 10.** Trasladar la fuerza de 500 N de modo que actúe en el punto medio "C" del segmento horizontal de la barra.

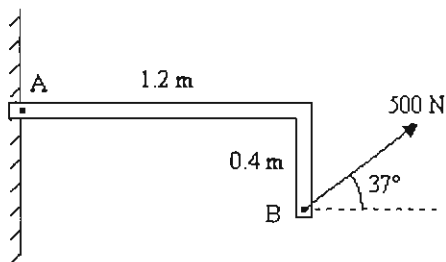


Fig. 45

La fuerza dada es  $F = (400 \text{ N}, 300 \text{ N})$ . De acuerdo con (17), para trasladarla al punto C debemos añadir un par cuyo momento sea el momento de dicha fuerza con respecto a C, o sea

$$M_C = \mathbf{CB} \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 400 & 300 \end{vmatrix} = 340 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Queda la situación mostrada en la Fig. 46.

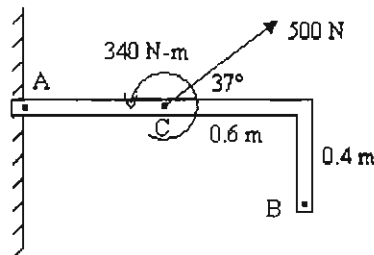


Fig. 46

La fuerza, originalmente aplicada en B, se "siente" en C (o "se transmite" hasta C) como una fuerza del mismo valor 500 N más un par de momento 340 N·m.

**2.5. Resultante localizada.**

Explicaremos el concepto de resultante localizada a través de un ejemplo simple. En la discusión emplearemos el movimiento de traslación de una fuerza fuera de su línea de acción, tratado en el apartado precedente.

Sea el sistema de fuerzas verticales sobre la viga horizontal mostrada en la Fig. 47.

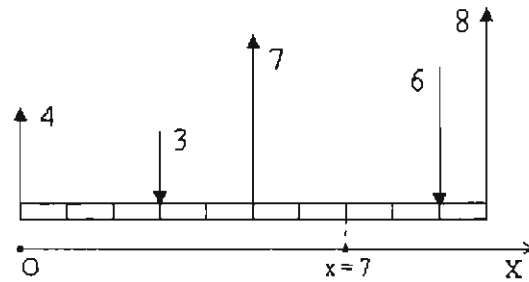


Fig. 47

Movamos todas las fuerzas del sistema a un mismo punto, digamos el punto  $x = 7$ . De acuerdo con el cuadro (17) tenemos que:

Para mover a $x = 7$ la fuerza de	Debemos añadir un par de momento
4	-28
-3	12
7	-14
-6	-12
8	24

Una vez reunidas todas las fuerzas en  $x = 7$ , las podemos sumar, obteniendo una fuerza total

$$R = 4 - 3 + 7 - 6 + 8 = 10$$

También podemos sumar todos los pares añadidos, que hacen un par de momento

$$m = -28 + 12 - 14 - 12 + 24 = -18$$

El sistema de la Fig. 47, pues, puede sustituirse por el de la Fig. 48, que consta solamente de la fuerza de 10 y el par de -18. Ante esta sustitución no se alteran las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo que estuviera solicitado por el sistema de fuerzas de la Fig. 47.

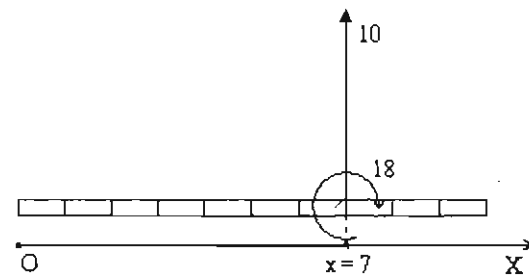


Fig. 48

La fuerza de 10, junto con el par de -18, se



denomina la "resultante localizada en  $x = 7$ " del sistema original.

El sistema de fuerzas de la Fig. 47 tiene una infinidad de resultantes localizadas, pues las fuerzas del sistema se pueden reunir en cualquier punto de la viga.

En general, para un sistema arbitrario de fuerzas tenemos:

(18) **Resultante localizada.**  
 La resultante localizada en el punto P de un sistema de fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$  está formada por una fuerza  $\mathcal{R}$  y un par  $\mathcal{P}$ .  
 La fuerza es la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema,

(a) 
$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N F_i$$

y su punto de aplicación es P.  
 El momento del par  $\mathcal{P}$  es el momento total del sistema con respecto al punto P donde se desea localizar la resultante,

(b) 
$$m = \sum_{i=1}^N PA_i \wedge F_i$$

donde  $A_i$  es el punto de aplicación de  $F_i$ .

Recordemos que la resultante localizada tiene la misma fuerza total y el mismo momento total (con respecto a cualquier punto del espacio) que el sistema de fuerzas dado. A manera de comprobación calculemos el momento del sistema de la Fig. 47 con respecto al punto  $x = 1$ :

$$-4(1) - 3(2) + 7(4) - 6(8) + 8(9) = 42$$

Por otra parte, el momento de la resultante localizada (Véase la Fig. 48) consta del momento de la fuerza de 10 con respecto a  $x = 1$ , que vale

$$10(6) = 60$$

más el momento del par de  $-18$ , o sea

$$60 - 18 = 42$$

como debía.

**Ejemplo 11.** Para el sistema de 4 fuerzas dado en la Fig. 49, calcular la resultante localizada en  $Q(4, 5)$ . Cada unidad de la cuadrícula representa a la vez un metro y 5 newtons.

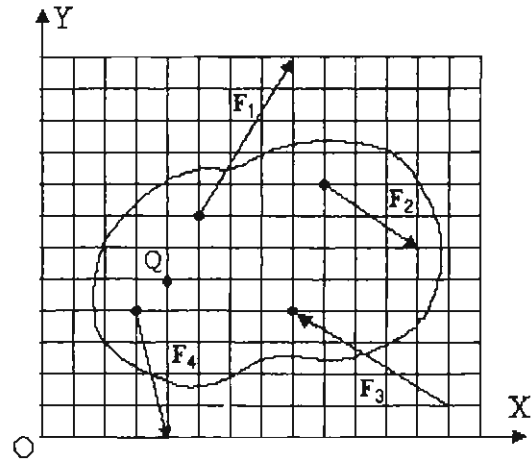


Fig. 49

Las fuerzas y sus puntos de aplicación son:

- $F_1 = (15, 25)$  en  $(5, 7)$
- $F_2 = (15, -10)$  en  $(9, 8)$
- $F_3 = (-25, 15)$  en  $(8, 4)$
- $F_4 = (5, -20)$  en  $(3, 4)$

La fuerza total del sistema es

$$\mathcal{R} = (10, 5)$$

Los vectores separación desde el punto Q hasta los puntos de aplicación de las fuerzas son:

- Para  $F_1$ :  $(1, 2)$
- Para  $F_2$ :  $(5, 3)$
- Para  $F_3$ :  $(4, -1)$
- Para  $F_4$ :  $(-1, -1)$

El momento del sistema con respecto a Q es

$$M_Q = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 15 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 15 & -10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -25 & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= -5 - 95 + 35 + 25 = -40$$

La resultante localizada en Q del sistema dado consta de la fuerza  $\mathcal{R} = (10, 5)$  junto con un par de momento  $-40$  (Véase la Fig. 50).

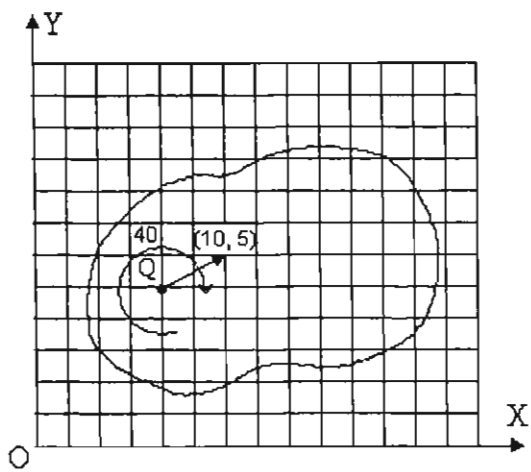


Fig. 50

2.6. Problemas

**CAPÍTULO 3**

**REACCIONES EN APOYOS. PROBLEMAS SOBRE EQUILIBRIO.**

**3.1. Apoyos**

Las fuerzas sobre un cuerpo rígido se suelen clasificar en tres categorías:

- Fuerzas de acción a distancia, como el peso del cuerpo y las fuerzas de tipo eléctrico o magnético.
- Fuerzas y pares de contacto, aplicados externamente.
- Fuerzas y pares de reacción en los apoyos del cuerpo.

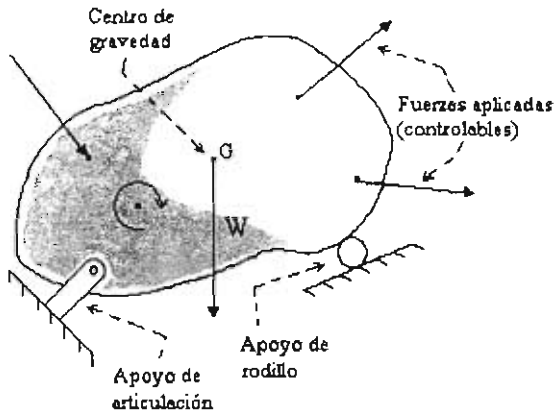


Fig. 51

El peso del cuerpo es una distribución continua de fuerzas que actúa por toda la región espacial ocupada por el cuerpo. En la estática del cuerpo rígido esta distribución de fuerza se puede sustituir por su resultante, que viene siendo una sola fuerza "W" localizada en un punto especial del cuerpo llamado *centro de gravedad*.

Las fuerzas y pares aplicados son fuerzas controlables o preestablecidas; son las fuerzas que el cuerpo ha sido diseñado para soportar o "procesar".

Los *apoyos* del cuerpo son acoplamientos o enlaces del cuerpo con otros objetos masivos fijos como cimientos, paredes, pisos, etc.

La Fig. 51 muestra un apoyo de articulación y un apoyo de rodillo.

Los apoyos se clasifican según el tipo de movimiento relativo apoyo ↔ cuerpo que permitan. Por ejemplo, el apoyo de articulación lisa mantiene

fijo uno de los puntos del cuerpo, pero permite libre rotación del cuerpo alrededor de este punto fijo. Se le llama también *bisagra*, *gozne*, *pasador* o *eje de rotación*.

El *apoyo de rodillo* (o *de rueda*), por otra parte, permite libre movimiento de traslación del cuerpo en la dirección de rodamiento del rodillo. Este apoyo presenta resistencia a la compenetración del cuerpo rígido con la superficie sobre la que se apoya el rodillo, pero permite libre separación del cuerpo con dicha superficie.

**3.2. Reacción en los apoyos de bisagra, de rodillo, y simple**

El apoyo de bisagra se simboliza gráficamente por alguno de los signos gráficos siguientes:



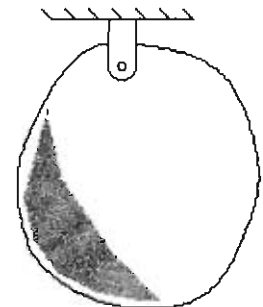
Fig. 52

Algunas veces se usa simplemente un pequeño círculo vacío o lleno (Fig. 53).



Fig. 53

Un cuerpo apoyado en un único apoyo de bisagra es un "péndulo físico", esto es, un cuerpo que puede efectuar oscilaciones alrededor de un eje a través de dicho apoyo, como se muestra en la Fig. 54.



Péndulo físico

Fig. 54

Para constreñir un péndulo físico apropiadamente, de modo que se mantenga en equilibrio bajo otras fuerzas aplicadas (adicionales al peso), podrían emplearse otros apoyos, como uno de contacto simple, o uno de rodillo, como muestra la Fig. 55.

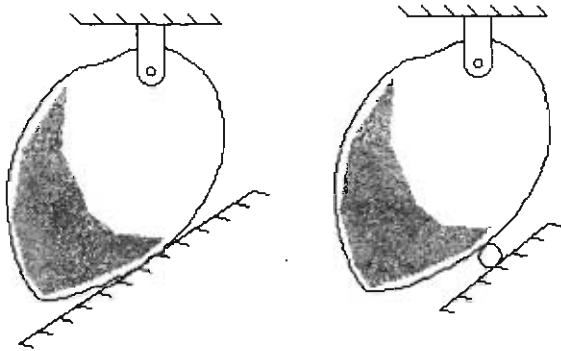


Fig. 55

En la estática los apoyos de bisagra o perno se consideran *de punto*, es decir, se desprecia el radio del perno o eje de rotación. Esta hipótesis tiene como consecuencia que las fuerzas de reacción en los apoyos de bisagra, en el caso de que sean ásperos, incluyan un par. Veamos.

En un apoyo de bisagra áspero se generan distribuciones continuas de fuerzas normales y de fricción en la superficie de contacto del perno con el cuerpo (esquematisadas en la Fig. 56). En el diagrama de cuerpo libre del cuerpo unido a la bisagra no interesan los detalles de la distribución, sino más bien su fuerza total y su momento total con respecto al centro del perno. El apoyo de bisagra se modela como si fuese un punto, y en este punto la reacción de la bisagra consiste de una fuerza y un par llamado *par de reacción*. Esta fuerza y par constituyen la *resultante localizada* (en el centro del perno) de la distribución de fuerzas normales y de fricción.

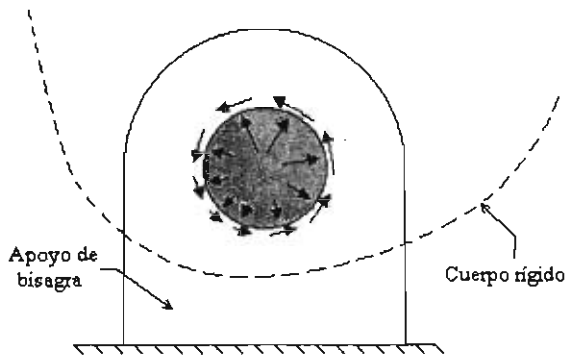


Fig. 56

En otras palabras: podemos imaginar que trasladamos cada una de las fuercillas de reacción de la distribución mostrada en la Fig. 56, colocándolas en el centro del perno. En cada traslación debemos añadir un par cuyo momento es igual al momento de la fuercilla trasladada con respecto al centro del perno. Una vez trasladadas todas las fuercillas a dicho centro, las sustituimos por una sola fuerza total  $F$  y un par total de momento  $M$ , como vemos en la Fig. 57.

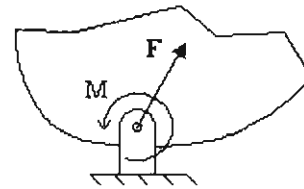


Fig. 57

Si la bisagra es lisa, como supondremos en lo sucesivo, el par de reacción  $M$  no existe, y la reacción en la bisagra consta solamente de una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.

Conviene asignar una letra como A, B, etc. al punto donde se encuentra la bisagra, y designar la fuerza de reacción allí con la misma letra, o sea "A", "B", etc., como vemos en la Fig. 58a. Esta fuerza se suele trazar ya descompuesta en sus componentes  $A_x$  y  $A_y$ , relativas a un sistema cartesiano XY, como vemos en la Fig. 58b.

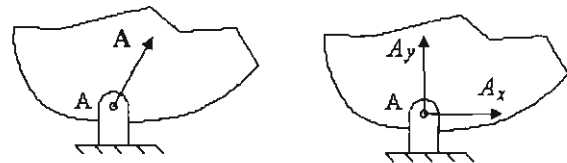


Fig. 58

El apoyo de rodillo se dibuja en el DCL usando alguno de los símbolos que vemos en la Fig. 59:



Fig. 59

Por ejemplo, la Fig. 60 muestra un cuerpo apoyado en una articulación y un rodillo.

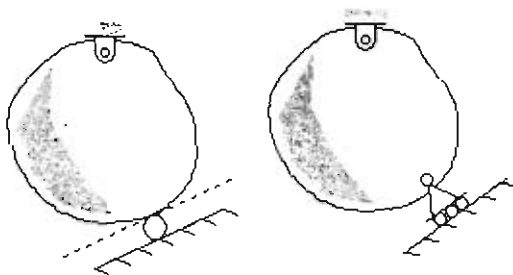


Fig. 60

Cuando se usa el primer signo de la Fig. 59 para indicar el rodillo, la tangente a éste debe ser la misma en ambos puntos de contacto con el rodillo, o sea tanto con el cuerpo (línea a rayas en la Fig. 60a) como con la superficie plana sobre la que rueda (línea estilizada en la Fig. 60a). Así, no está permitido usar el signo tal como se muestra en la Fig. 61, porque la pendiente del lado inferior del cuerpo rectangular es distinta de la pendiente de la superficie fija.

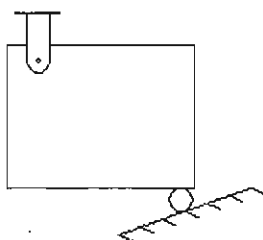


Fig. 61

(Esto viene del hecho de que el rodillo en sí, supuesto ingrávido, no podría estar en equilibrio en esta situación). La situación de la Fig. 61 se representa apropiadamente mediante el segundo signo del rodillo, como vemos en la Fig. 62.

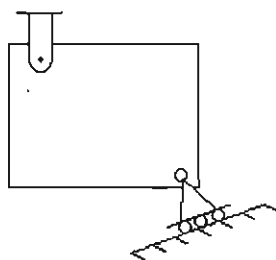


Fig. 62

Dado que el apoyo de rodillo permite libre movimiento de traslación en la dirección de rodamiento del mismo, así como libre rotación del cuerpo alrededor de un eje a través del punto donde se supone localizado el rodillo, tendremos que la

reacción en el rodillo consta solamente de una fuerza de magnitud desconocida y dirección perpendicular a la dirección de rodamiento, como se muestra en la Fig. 63. Esta reacción es similar a la que existiría en un contacto simple: su dirección es tal que tiende a evitar la compenetración del cuerpo con la superficie fija sobre la que se apoya el rodillo.

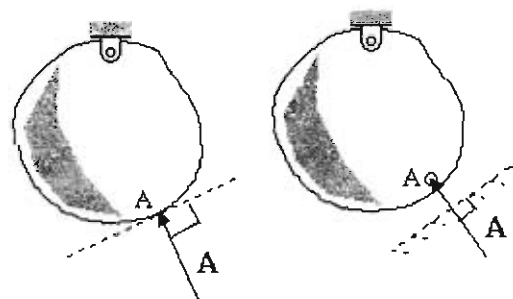


Fig. 63 (Reacción en el rodillo de la Fig. 60)

Si el punto donde se localiza el rodillo se nombra digamos "A", entonces la fuerza de reacción en el rodillo se indica con la misma letra: "A".

El apoyo simple puede ser de punto o extendido.

Si el apoyo simple es de punto, la reacción es una fuerza cuya dirección y punto de aplicación son conocidos, como vemos en la Fig. 64.

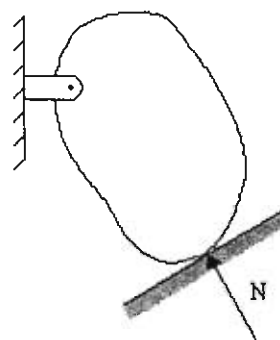


Fig. 64

Por otra parte, si es un apoyo simple extendido, como en la Fig. 65, tanto la magnitud de la fuerza de reacción como su punto de aplicación son desconocidos (existen las incógnitas  $N$  y  $x$  en la situación de la Fig. 65).

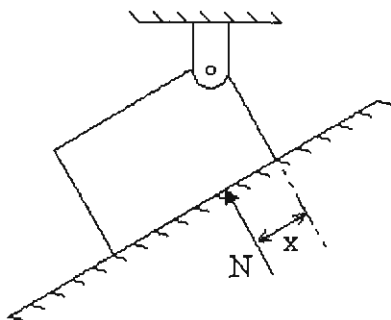


Fig. 65

De hecho la fuerza  $N$  mostrada en esta figura es la *resultante* de la distribución continua de fuerzas normales que actúa sobre el lado del cuerpo en contacto con la superficie fija.

<Nota. En el apéndice de este módulo se estudia el concepto de resultante y se dan métodos para calcularla.>

### 3.3. Ejemplos de equilibrio

En los ejemplos de equilibrio que consideraremos en esta sección el sistema físico constará de un sólo cuerpo rígido, apoyado en apoyos simples, de bisagra o de rodillo.

**Ejemplo 12.** Una viga horizontal de longitud 4 m y peso 3000 N está articulada en su extremo izquierdo y soportada adicionalmente por un cable de inclinación  $40^\circ$ , sujeto a un punto a 3 m de dicho extremo, como se ve en la Fig. 66. Calcular la reacción en la articulación y la tensión del cable.

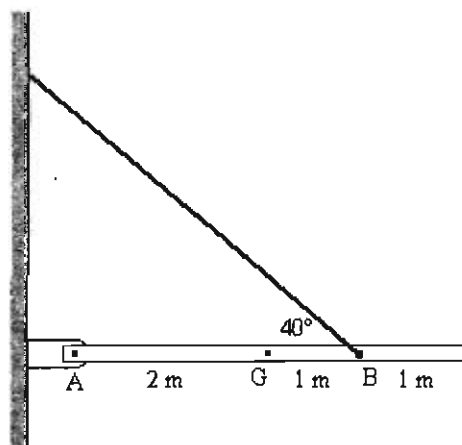


Fig. 66

La Fig. 67 es el DCL de la viga. La reacción en la articulación A es una fuerza que hemos descompuesto

ya en sus componentes  $A_x$  y  $A_y$  relativas a un sistema cartesiano  $XY$  colocado del modo estándar. Estas componentes son desconocidas y las podemos suponer hacia la dirección que deseemos. Generalmente se trazan en las direcciones positivas de los ejes coordenados.

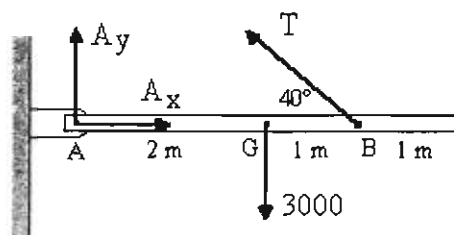


Fig. 67

Aplicando las ecuaciones de equilibrio en su forma estándar  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma M = 0$  tenemos

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$(r1) \quad A_x - T \cos 40^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$(r2) \quad A_y - 3000 + T \sin 40^\circ = 0$$

Conviene tomar momentos con respecto al punto B:

$$\Sigma M_B = 0:$$

$$(r3) \quad -A_y \cdot 3 + 3000 \cdot 1 = 0$$

De (r3) obtenemos inmediatamente

$$A_y = 1000$$

Sustituyendo este valor de  $A_y$  en (r2) obtenemos

$$T = \frac{3000 - 1000}{\sin 40^\circ} = 3111.45$$

y de (r1), finalmente,

$$A_x = 3111.45 \cos 40^\circ = 2383.51$$

<Nota. Un cuerpo rígido sometido a exactamente 3 fuerzas no paralelas (como la viga presente, que sufre fuerzas en A, G y B) cumple la propiedad de que las líneas de acción de las tres fuerzas deben intersectarse en un mismo punto. Véase la Fig. 68.>

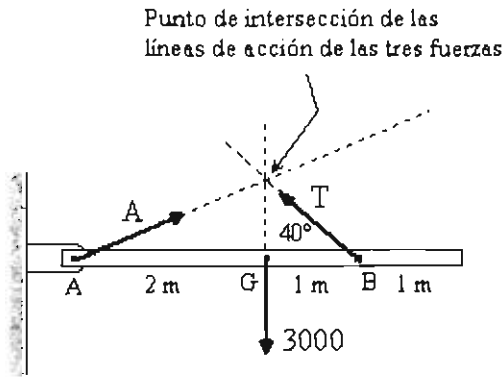


Fig. 68

Demostremos esta propiedad por el método de "reducción al absurdo". Consideremos un cuerpo rígido bajo la acción de 3 fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , como se muestra en la Fig. 69. Sea P el punto de intersección de las líneas de acción de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ .

- Hipótesis:  
 El cuerpo está en equilibrio.  
 La línea de acción de  $F_3$  no pasa por P.

Tomando momentos con respecto al punto P, tenemos que el momento de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  es nulo, no así el momento de  $F_3$ . Por lo tanto, el momento total del sistema de 3 fuerzas no sería nulo, lo cual es absurdo, en vista de la hipótesis de que el cuerpo está en equilibrio. Se deduce que la línea de acción de  $F_3$  también debe pasar por P.

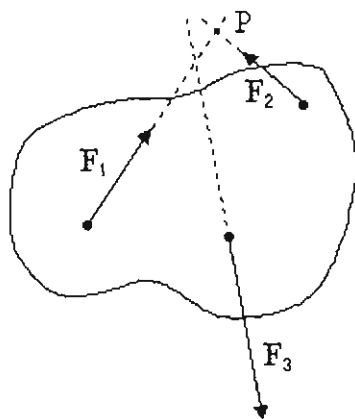


Fig. 69

La Fig. 70 muestra otro ejemplo de este teorema: una barra homogénea descansa dentro de una superficie cilíndrica. Existen tres fuerzas sobre la barra, dos de ellas las normales debidas al contacto

simple con la superficie, y la tercera el peso de la barra. Las líneas de acción de estas tres fuerzas se intersecan en un punto, C.

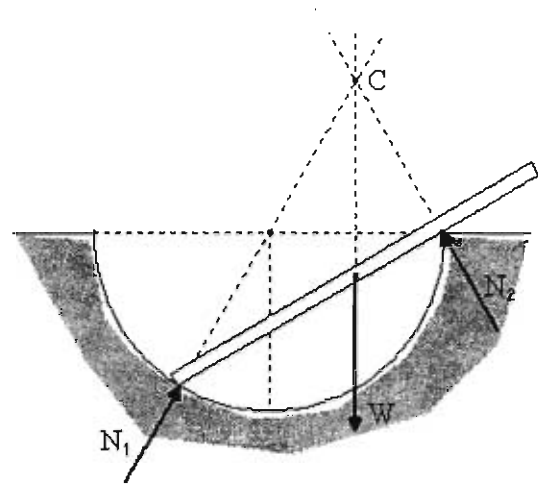


Fig. 70

**Ejemplo 13.** Una lámina homogénea de masa 16 kg con forma de triángulo rectángulo de catetos 0.72 m y 0.42 m se apoya en una articulación y un rodillo, ambos lisos. Existe además una fuerza de 240 N sobre la placa, aplicada a un ángulo de  $11^\circ$  con la horizontal. (Fig. 71). Calcular las reacciones en los apoyos.

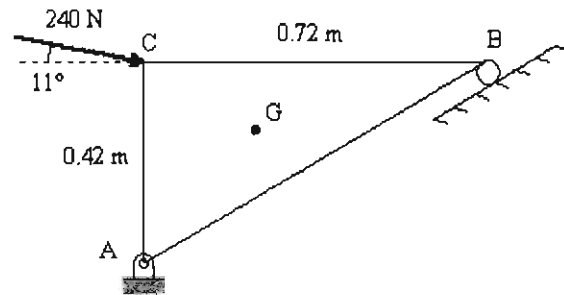


Fig. 71

La Fig. 72 es el DCL de la placa, el cual incluye las siguientes fuerzas:

El peso de la placa, igual a

$$16 \times 9.8 = 156.8 \text{ (N)}$$

(El peso está aplicado en el centro de gravedad G.)

La fuerza aplicada ( $240 \angle -11^\circ$ ),

La reacción en la articulación, ( $A_x, A_y$ ).

La reacción en el rodillo, una fuerza de magnitud "B", perpendicular a la superficie de apoyo o a la línea AB.

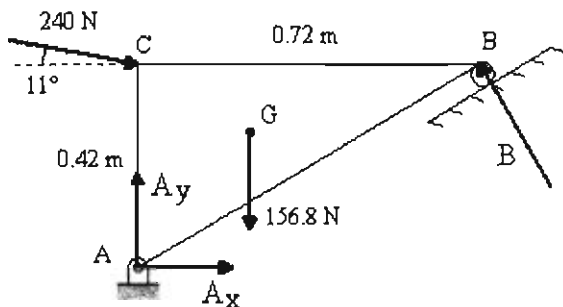


Fig. 72

Escogeremos unos ejes X y Y con su origen en A y del modo estándar, lo cual hemos sugerido ya en el DCL al descomponer la reacción en A en una componente horizontal y una vertical.

Para calcular las componentes X y Y de la reacción en B necesitamos calcular el ángulo que forma la fuerza B con la horizontal. Claramente este ángulo es el complemento del ángulo

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.42}{0.72}\right) = 30.26^\circ$$

o sea  $59.74^\circ$ .

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$A_x + 240 \cos 11^\circ - B \cos 59.74^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$A_y - 240 \sin 11^\circ + B \sin 59.74^\circ - 156.8 = 0$$

Tomaremos momentos con respecto al punto A.

Para la fuerza de 240 N, solamente su componente horizontal tiene momento con respecto a A. Como el brazo de palanca de dicha componente es  $AC = 0.42$ , el momento vale

$$-240 \cos(11^\circ) \cdot 0.42 = -98.95$$

Para el peso vertical, su brazo de palanca con respecto a A vale 0.24 (la tercera parte de 0.72), de tal manera que el momento del peso es

$$156.8 \cdot 0.24 = 37.632$$

En cuanto a la fuerza B, por ser perpendicular a la línea AB, su brazo de palanca con respecto a A es  $AB = \sqrt{(0.42)^2 + (0.72)^2} = 0.83355$ , por lo que su momento con respecto a A es

" $B \cdot 0.83355$ ".

La ecuación de momentos queda así:

$$\Sigma M_A = 0:$$

$$-98.95 - 37.63 + B \cdot 0.833 = 0$$

Esta última ecuación nos da B:

$$B = 163.85 \text{ N}$$

Sustituyendo en las dos primeras hallamos

$$A_x = -153.03 \text{ N}, \quad A_y = 61.06 \text{ N}$$

El signo negativo de  $A_x$  indica que dicha componente realmente actúa hacia la izquierda, contrariamente a lo supuesto en el DCL.

**Ejemplo 14.** La pieza de máquina de peso despreciable está soportada por un pasador en A y un rodillo en B. La línea AB es vertical, y el rodillo se apoya en una superficie también vertical. Se aplica un par de momento 2.4 kN-m en el punto E, situado a la mitad del segmento AC, y una fuerza vertical de 3 kN en el extremo D. Determinar las reacciones en estos apoyos (Fig. 73). Despreciar la fricción.

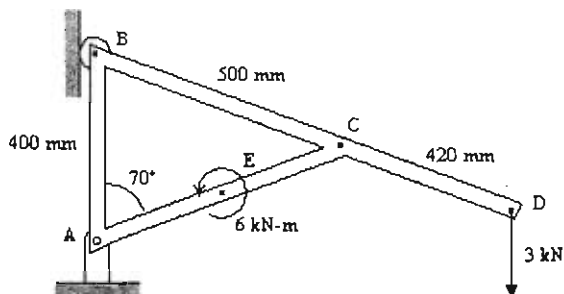


Fig. 73

El DCL de la pieza de máquina incluye (Véase la Fig. 74):

La fuerza aplicada de 3 kN en D,

El par aplicado de 6 kN-m en E,

La reacción en el rodillo, una fuerza "B" perpendicular a la línea AB,

La reacción en la bisagra A, descompuesta en sus componentes  $A_x$  y  $A_y$ , relativas a un sistema cartesiano estándar.



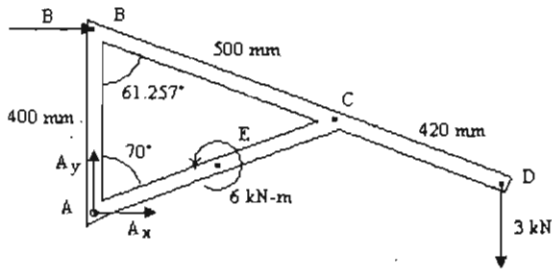


Fig. 74

Aplicaremos las ecuaciones de equilibrio en la forma estándar, tomando los momentos con respecto al punto A, o sea

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0 \text{ y } \Sigma M_A = 0$$

Usaremos unidades de metro y kilonewton. Las primeras dos ecuaciones de equilibrio dan

$$(r1) \quad A_x + B = 0$$

$$(r2) \quad A_y - 3 = 0$$

Con respecto a la ecuación de momentos c/r a A:

El momento de  $A_x$  y  $A_y$  es cero.

El momento de la fuerza B es

$$- B \cdot 0.4$$

El par contribuye con un momento de valor

$$6$$

Finalmente, el momento de la fuerza de 3 kN lo calculamos multiplicando esta fuerza por su brazo de palanca con respecto a A, el cual es la proyección horizontal del segmento BD. Resolviendo el triángulo ABC encontramos que el ángulo en el vértice B vale  $61.257^\circ$ , por lo que dicha proyección es

$$(0.5 + 0.42) \cdot \text{sen } 61.257^\circ = 0.80664$$

de modo que el momento buscado es

$$- 3 \cdot 0.80664 = - 2.42$$

La ecuación de momentos es entonces

$$(r3) \quad - 0.4 B + 6 - 2.42 = 0$$

de donde

$$B = 8.95 \text{ kN}$$

De (r1) obtenemos

$$A_x = - B = - 8.95 \text{ kN}$$

y de (r2),

$$A_y = 3 \text{ kN}$$

Note que en el cálculo no entra para nada el punto de aplicación del par de 6 kN-m, el cual podría estar aplicado en cualquier punto de la pieza.

**Ejemplo 15.** La barra de peso insignificante mostrada en la figura está articulada en su extremo A. El otro extremo, C, descansa sobre una superficie lisa inclinada a  $40^\circ$ . Se aplica a la barra la fuerza de 140 N mostrada. Calcular las reacciones en la articulación y el contacto simple.

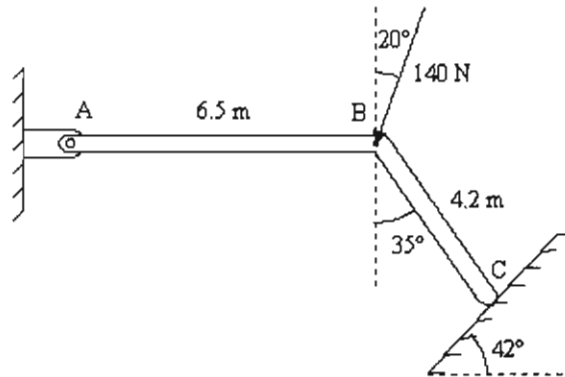


Fig. 75

La Fig. 76 es el DCL de la barra. La fuerza "N" es perpendicular a la superficie inclinada a  $42^\circ$ , por lo que N forma un ángulo de  $48^\circ$  con la horizontal.

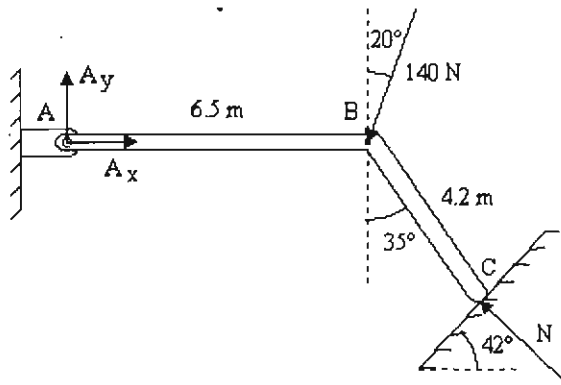


Fig. 76

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$(r1) \quad A_x - 140 \text{ sen } 20^\circ - N \text{ cos } 48^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$(r2) \quad A_y - 140 \text{ cos } 20^\circ + N \text{ sen } 48^\circ = 0$$

Para la ecuación de momentos escogeremos como punto de referencia el punto A. Aplicando el teorema de Varignon descomponemos la fuerza de 140 N en componentes paralela y perpendicular a AB; solamente esta última componente tiene momento con respecto a A, el cual vale " $-140 \text{ cos } 20^\circ (6.5)$ " o sea  $-855.120$ . En cuanto al momento de la fuerza "N", lo calcularemos con el producto externo " $AC \wedge N$ ". Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = (6.5, 0) + (4.2 \text{ sen } 35^\circ, -4.2 \text{ cos } 35^\circ) = \\ &= (8.909, -3.440) \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = (-N \text{ cos } 48^\circ, N \text{ sen } 48^\circ) = (-0.669 N, 0.743 N)$$

El momento de N es entonces

$$\begin{vmatrix} 8.909 & -3.440 \\ -0.669N & 0.743N \end{vmatrix} = 4.319 N$$

La ecuación de momentos queda en la forma

$$\Sigma M_A = 0$$

$$(r3) \quad -855.120 + 4.319 N = 0$$

De aquí obtenemos directamente "N":

$$N = 197.990 \text{ N}$$

De (r1) obtenemos luego

$$\begin{aligned} A_x &= 140 \text{ sen } 20^\circ + 197.990 \text{ cos } 48^\circ = \\ &= 180.36399 \end{aligned}$$

De (r2),

$$\begin{aligned} A_y &= 140 \text{ cos } 20^\circ - 197.990 \text{ sen } 48^\circ \\ &= -15.57828 \end{aligned}$$

**Ejemplo 16.** La barra homogénea AB de masa 50 kg y 6 m de longitud está soportada en un plano vertical por rodillos en A y C y por un cable en B, inclinado a un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Sabiendo que la tensión en el cable es de 384 N, calcular las reacciones en A y C, y el ángulo  $\theta$ .

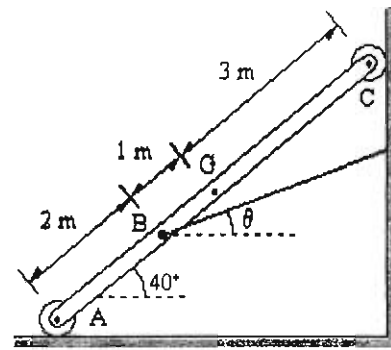


Fig. 77

La Fig. 78 es el DCL de la barra. Plantearemos las ecuaciones de equilibrio en la forma estándar.

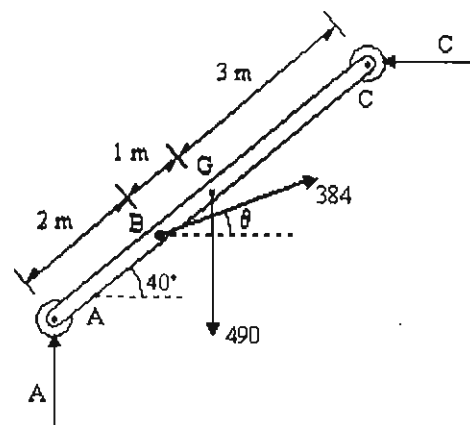


Fig. 78

$$\sum F_x = 0:$$

$$(r1) \quad 384 \cos \theta - C = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$(r2) \quad A - 490 + 384 \sin \theta = 0$$

Sacando momentos con respecto a B tenemos

$$\sum M_B = 0:$$

$$-A \cdot 2 \cos 40^\circ - 490 \cdot 1 \cos 40^\circ + C \cdot 4 \sin 40^\circ = 0$$

o bien

$$(r3) \quad -1.5321 A - 375.3618 + 2.5711 C = 0$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (r1), (r2) y (r3) vamos a eliminar las fuerzas A y C con el fin de obtener una ecuación para el ángulo  $\theta$ .

Despejando C y A de (r1) y (r2), respectivamente tenemos

$$C = 384 \cos \theta, \quad A = 490 - 384 \sin \theta$$

Sustituyendo éstas en (r3),

$$-1.5321 (490 - 384 \sin \theta) + 2.5711 (384 \cos \theta) - 375.3618 = 0$$

Simplificando llegamos a la ecuación

$$-1126.458 + 588.3264 \sin \theta + 987.3024 \cos \theta = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones que son:

$$\theta_1 = 42.23^\circ \quad \text{y} \quad \theta_2 = 19.35^\circ$$

(Ver la nota al final del ejemplo.)

La primera solución corresponde a

$$A = 490 - 384 \sin 19.35^\circ = 362.7$$

$$C = 384 \cos 19.35^\circ = 362.3$$

y la segunda a

$$A = 490 - 384 \sin 42.23^\circ = 231.9$$

$$C = 384 \cos 42.23^\circ = 284.3$$

<Nota. Una ecuación de la forma general

$$A \cos \theta + B \sin \theta + C = 0$$

se puede resolver así:

1. Se sustituye  $\sin \theta$  por  $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ .
2. Se despeja el radical.
3. Se eleva al cuadrado la ecuación con objeto de eliminar el radical.
4. Se obtiene así una ecuación cuadrática para la incógnita " $\cos \theta$ ".
5. Se resuelve la ecuación cuadrática. Sus dos raíces, " $\cos \theta_1$ " y " $\cos \theta_2$ " (tomados los ángulos dentro del intervalo permitido) nos dan las dos soluciones para  $\theta$ .

### 3.4. Apoyo fijo o de empotramiento.

El apoyo fijo o de empotramiento es el más restrictivo. Esta clase de apoyo, que se modela como si fuese de punto, no permite traslación hacia ninguna dirección, ni tampoco rotación.

En el apoyo de empotramiento la reacción consta en general de una fuerza y de un "par de reacción", los cuales constituyen la "resultante localizada" —en el punto donde se ubica el apoyo— de la distribución de fuerzas que surgen en el apoyo extendido. La idea es completamente análoga a la usada en relación con el apoyo de bisagra. Veamos.

Consideremos una viga con un apoyo fijo, como la de la Fig. 79. Al hacer una sección sistemática a través del apoyo fijo, la acción de la pared sobre la viga consiste en una distribución compleja de fuerzas, esquematizada en la Fig. 80.

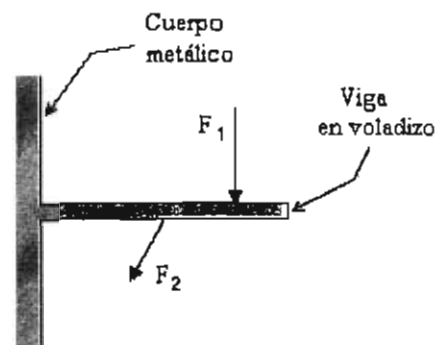


Fig. 79

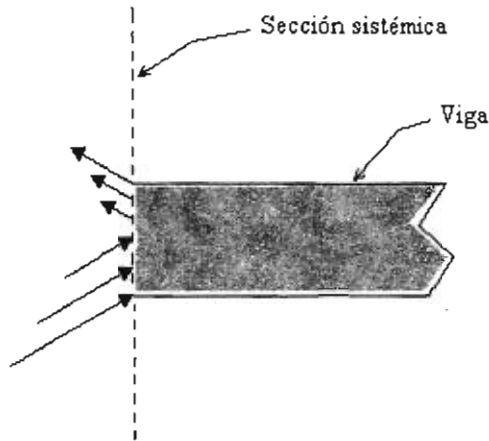


Fig. 80

En el diagrama de cuerpo libre de la viga, tal distribución se sustituye por su resultante localizada en el punto A (Fig. 55), que consta de la fuerza ( $A_x$ ,  $A_y$ ) y del par  $M$ . Claro está, con ello estamos renunciando a obtener detalles acerca de la distribución; en lugar de ello nos conformamos con obtener los valores de la fuerza y el momento del par que forman la resultante localizada.

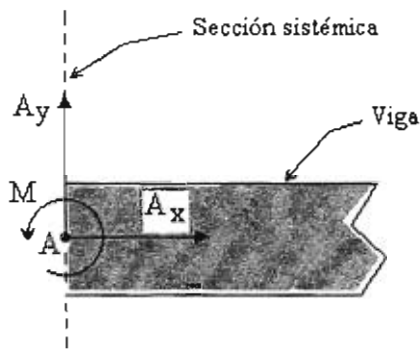


Fig. 81

**Ejemplo 17.** Un poste en escuadra, con las dimensiones dadas en la figura, está empotrado en el suelo. El poste sostiene en el extremo D una carga de 4000 N, y en el punto B está reforzado mediante un cable cuya tensión se ha prefijado a 3000 N. Calcular la reacción en el empotramiento A. El poste pesa 10,000 N y su centro de gravedad se halla a 1.2 m a la izquierda del punto B.

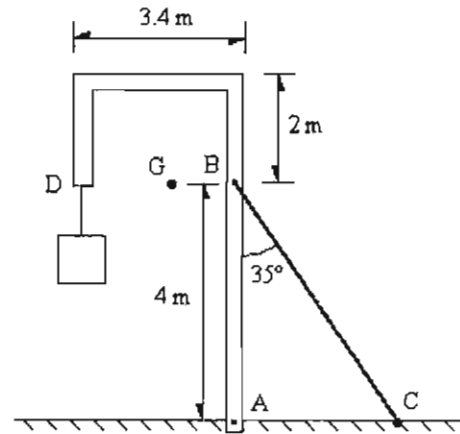


Fig. 82

La Fig. 83 es el DCL del poste. Advierta que en el apoyo de empotramiento la reacción consta de una fuerza, descompuesta en dos componentes cartesianas  $A_x$  y  $A_y$ , y un par de reacción, de momento  $M$ . Como los valores de estas reacciones son desconocidos, podemos trazarlos en cualquier dirección, digamos todos en el sentido positivo.

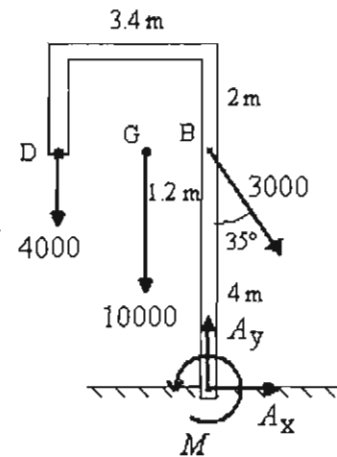


Fig. 83

Planteemos las ecuaciones de equilibrio del poste en la forma estándar:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$(r1) \quad A_x + 3000 \text{ sen } 35^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$(r2) \quad A_y - 4000 - 10000 - 3000 \text{ cos } 35^\circ = 0$$

Tomemos momentos con respecto a B:

$$\Sigma M_B = 0:$$

$$(r3) \quad 4000(3.4) + 10000(1.2) + A_x(4) + M = 0$$

De (r1) obtenemos

$$A_x = -1,720.73 \text{ N}$$

De (r2),

$$A_y = 16,457.46 \text{ N}$$

y de (r3), sustituyendo el valor de  $A_x$  hallado arriba,

$$M = -18,717.08 \text{ N-m}$$

Notemos que la fuerza  $A_x$  debe ir hacia la izquierda, y que el momento del par de reacción debe tener el sentido horario.

Notemos también que, por el principio de transmisibilidad de las fuerzas, el peso del poste puede trasladarse a lo largo de su línea de acción vertical y colocarse en cualquier nivel vertical.

**Ejemplo 18.** La lámpara, que pesa 52 N, tiene un apoyo fijo (empotramiento) en P, y sostiene una lámpara que pesa 28 N. Calcular la reacción en el apoyo. El centro de masa de la lámpara es G.

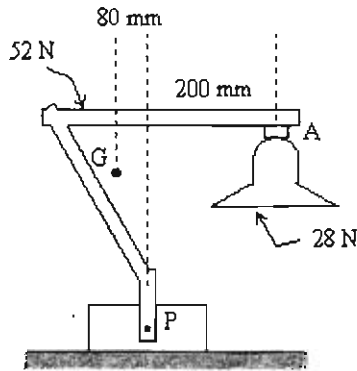


Fig. 84

Como sabemos, la reacción en el punto fijo o empotramiento consta en general de una fuerza de componentes  $P_x$ ,  $P_y$ , y de un par de momento  $M$ . El DCL de la lámpara es la Fig. 85.

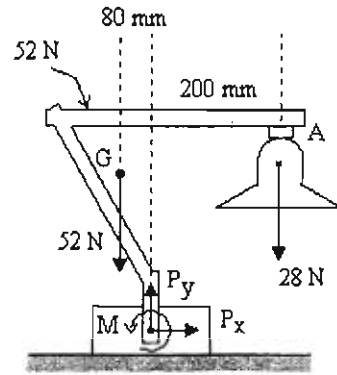


Fig. 85

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$P_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$P_y - 52 - 28 = 0$$

Tomaremos momentos con respecto al punto P, usando unidades de newton y mm:

$$\Sigma M_P = 0:$$

$$52(80) + M - 28(200) = 0$$

Se encuentran fácilmente

$$P_x = 0$$

$$P_y = 80 \text{ N}$$

$$M = 1440 \text{ N-mm} = 1.44 \text{ N-m}$$

### 3.5. Sistemas compuestos de dos cuerpos rígidos.

Si el sistema estático en estudio es complejo, es común que se requiera conocer tanto las fuerzas desconocidas en los apoyos del sistema (global) como las fuerzas en las uniones (enlaces o acoplamientos) entre los diversos cuerpos que integran el sistema global.

Es frecuente el caso en que dos de los cuerpos del sistema global están acoplados mediante "pasadores", es decir, elementos que se comportan como bisagras o articulaciones.

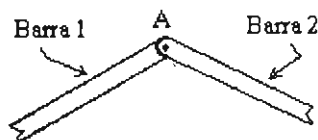


Fig. 86

Como ejemplo, la Fig. 86 muestra dos barras unidas por un pasador liso en un extremo A. En el punto A se unen tres cuerpos: la barra 1, el pasador y la barra 2. La Fig. 87 muestra un esquema del acoplamiento entre estos tres elementos.

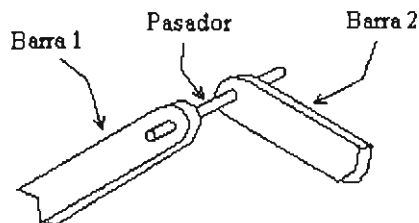


Fig. 87

Notemos que la barra 1 ejerce fuerza sobre el pasador, y éste ejerce fuerza sobre la barra 2. Estrictamente, pues, la barra 1 no ejerce fuerza sobre la barra 2. Sin embargo, es conveniente considerar que el pasador es parte de una de las dos barras, digamos la barra 1. Si así lo hacemos podemos decir que la barra 1 ejerce fuerza sobre la barra 2, y viceversa. La fuerza de interacción entre ambas barras se suele descomponer en sus componentes cartesianas, y al "abrir el contacto en el punto A" brotan fuerzas de acción-reacción como se muestra en la Fig. 88. La pareja  $(A_x, A_y)$  a la izquierda de la figura forman la fuerza sobre la barra 1 (más el pasador) debidas a la barra 2; por la tercera ley de Newton, la pareja  $(A_x, A_y)$  a la derecha de la figura son forman la reacción de la fuerza anterior, y son las que ejerce la barra 1 (más el pasador) sobre la barra 2.

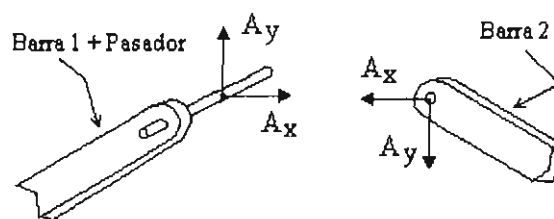


Fig. 88

Las fuerzas que aparecen son las mismas si consideramos que el pasador es parte de la barra 2 en lugar de la barra 1. Entonces, en los DCL's no es necesario mostrar el detalle del pasador sino que trazamos las fuerzas como vemos en la Fig. 89.

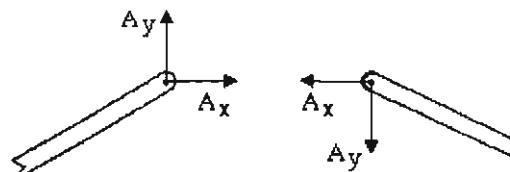


Fig. 89

Así pues, no es necesario hacer ya referencia al pasador; podemos hablar simplemente de la "fuerza de interacción A entre ambas barras".

Veamos un ejemplo de desmembramiento de un sistema por un punto de unión tipo pasador.

**Ejemplo 19.** Una barra horizontal de longitud 1.4 m y peso 420 N está empotrada por su extremo izquierdo A a una pared fija. En su extremo derecho B la barra está acoplada mediante un pasador (articulación) a otra barra de longitud 1 m y peso 350 N, que descansa sobre un piso liso en el extremo D, como se ve en la figura. Se aplican sobre esta última barra un par de 1200 N-m y una fuerza de 860 N, con los sentidos indicados. Calcular la reacción en el empotramiento A, la fuerza normal en D, y la fuerza en el pasador B.

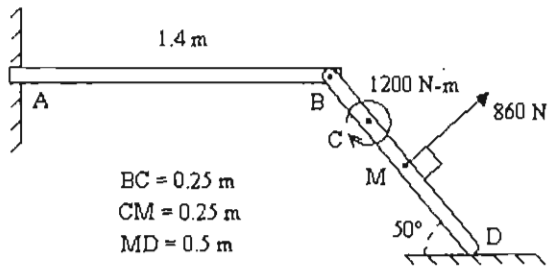


Fig. 90

Los apoyos del sistema global (que consta de ambas barras AB y BCMD), que son el empotramiento en A y el contacto simple en D, generan 4 incógnitas que son:

- La fuerza y par de reacción en el empotramiento A, que denotaremos con  $A_x$ ,  $A_y$  y  $M$ , respectivamente.
- La fuerza normal en el contacto simple D, que denotaremos con "N".

Como las ecuaciones de equilibrio del sistema global son 3, no podemos calcular las 4 incógnitas con este sólo sistema, y es menester definir un segundo sistema, que puede ser:

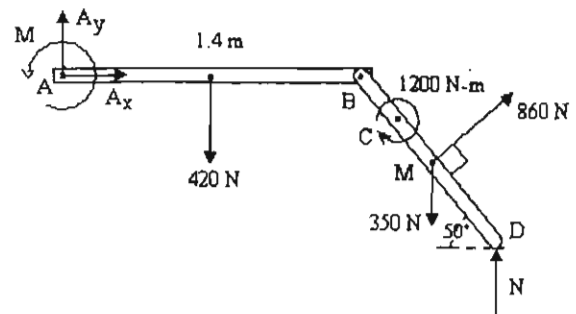
[Barra horizontal AB]

[Barra inclinada BCMD]

Al considerar un segundo sistema se introducen dos incógnitas más, que son las componentes  $B_x$  y  $B_y$  de la fuerza de interacción entre ambas barras (a través del pasador B, como ya explicamos anteriormente). Entonces el total de incógnitas se eleva a 6, pero por otra parte las ecuaciones de equilibrio de ambos sistemas son 6, de tal manera que el problema es determinado.

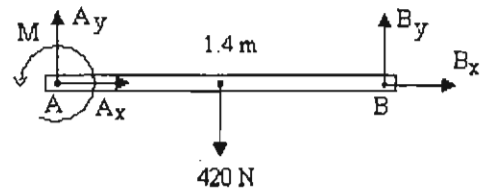
Como ilustración haremos los DCL's y planearemos las ecuaciones de equilibrio de los tres sistemas que es posible definir en este problema, aunque debemos tener presente que solamente 6 de las 9 ecuaciones de equilibrio son independientes.

Estudie bien los DCL's mostrados en las siguientes figuras. Junto a cada DCL se añade un recuadro que muestra el nombre del sistema físico considerado, y una lista de los cuerpos que ejercen fuerza sobre él, así como el símbolo o valor numérico correspondiente a cada una de tales fuerzas.



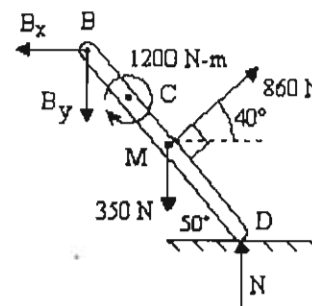
{Sistema global}	
Tierra	420, 350
Pared	$A_x, A_y, M$
Piso	N

Fig. 91. (DCL del sistema global).



{Barra AB}	
Tierra	420
Pared	$A_x, A_y, M$
Barra BCMD	$B_x, B_y$

Fig. 92. (DCL de la barra AB)



{Barra BCMD}	
Tierra	350
Barra AB	$B_x, B_y$
Piso	N

Fig. 93. (DCL de la barra BCMD).

Unas observaciones con respecto a los DCL's:

- En el DCL del sistema global no figura, por supuesto, ninguna fuerza en el punto B, puesto que este punto es un contacto *interno*. Los contactos externos del sistema ocurren en A y D.
- En el DCL de la barra AB, las componentes  $B_x$  y  $B_y$  forman la fuerza que sufre esta barra como consecuencia de su interacción con la barra BCMD. Estas fuerzas se pueden trazar hacia la dirección que se desee (digamos  $B_x \rightarrow$ ,  $B_y \uparrow$ ), pero luego, al hacer el DCL de la barra BCMD, las fuerzas en B deben trazarse en las direcciones opuestas ( $B_x \leftarrow$ ,  $B_y \downarrow$ )

Las ecuaciones de equilibrio son:

{Sistema global}

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$A_x + 860 \cos 40^\circ = 0$$

$$(r1) \quad A_x + 658.8 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$A_y - 420 + 860 \sin 40^\circ - 350 + N = 0$$

$$(r2) \quad A_y - 217.2 + N = 0$$

Colocando el origen del eje X en A, tenemos que el punto de aplicación M de las fuerzas de 350 N y 860 N tiene vector de posición

$$\begin{aligned} \mathbf{AM} &= \mathbf{AB} + \mathbf{BM} = \\ &= (1.4, 0) + (0.5 \cos 50^\circ, -0.5 \sin 50^\circ) \\ &= (1.7214, -0.3830) \end{aligned}$$

Por otra parte, la fuerza de 860 N en forma vectorial es

$$(860 \cos 40^\circ, 860 \sin 40^\circ)$$

Entonces el momento de la fuerza de 860 N c/r a A es, usando la fórmula del producto externo,

$$\begin{vmatrix} 1.7214 & -0.3830 \\ 860 \cos 40^\circ & 860 \sin 40^\circ \end{vmatrix} = 1203.905$$

y el momento de la fuerza de 350 N es

$$-350 (1.7214) = -602.49$$

Entonces la ecuación de momentos con respecto al punto A es

$$\Sigma M_A = 0:$$

$$\begin{aligned} M - 420 (0.7) - 1200 + 1203.9 - 602.5 + \dots \\ \dots + N (1.4 + 1 \cdot \cos 50^\circ) = 0 \end{aligned}$$

$$(r3) \quad M - 892.6 + 2.04 N = 0$$

{Barra AB}

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$(r4) \quad A_x + B_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$(r5) \quad A_y - 420 + B_y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0:$$

$$M - 420 (0.7) + B_y (1.4) = 0$$

$$(r6) \quad M - 294 + 1.4 B_y = 0$$

{Barra BCMD}

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$-B_x + 860 \cos 40^\circ = 0$$

$$(r7) \quad -B_x + 658.8 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$-B_y + 860 \sin 40^\circ - 350 + N = 0$$

$$(r8) \quad -B_y + 202.8 + N = 0$$

Saquesmos momentos con respecto al punto B, usando el teorema de Varignon para las fuerzas de 350 y N. Las componentes perpendiculares a la barra de estas fuerzas son "350 cos 50°" y "N cos 50°", y los brazos de palanca c/r a B de estas componentes son respectivamente "0.5" y "1". Entonces la ecuación de momentos con respecto a B es

$$\Sigma M_B = 0:$$



$$-1200 + 860(0.5) - 350 \cos 50^\circ (0.5) + N \cos 50^\circ (1) = 0$$

(r9)	$-882.49 + 0.64 N = 0$
------	------------------------

Repetimos que solamente 6 de las 9 ecuaciones (r1)-(r9) son independientes. Escojamos el sistema de ecuaciones (r4)-(r9), que se puede resolver "en cascada", empezando de la (r9). Encontramos los valores

$$A_x = -658.8$$

$$A_y = -1155.7$$

$$N = 1372.9$$

$$M = -1912$$

$$B_x = 658.8$$

$$B_y = 1575.7$$

**Ejemplo 20.** El sistema mostrado en la Fig. 94 consta de una barra AB empotrada en su extremo A, que porta una polea fija, y una barra BC articulada en su extremo C. Ambas barras están acopladas por un rodillo en B. Sobre la barra BC se aplica un par de momento 140 N-m. Calcular las reacciones en el empotramiento y en la articulación, suponiendo que las barras son de peso despreciable.

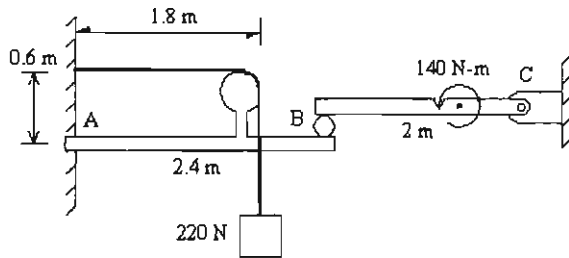


Fig. 94

En este problema intervienen 5 cantidades desconocidas: la reacción en A, que consta de una fuerza de componentes  $A_x$ ,  $A_y$ , y un par de reacción  $M$ , la reacción en la articulación,  $C_x$ ,  $C_y$ , y la fuerza transmitida por el rodillo, B.

Dado que son 3 las ecuaciones de equilibrio del sistema completo, es necesario desmembrar éste. Definiendo los sistemas {Barra AB + Polea fija} y {Barra BC}, tenemos los DCL's mostrados en las Figs. 95 y 96. En el primero ya hemos tomado en cuenta que la tensión de la cuerda vale 220 N.

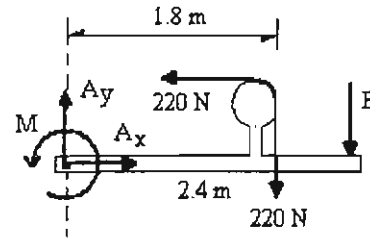


Fig. 95

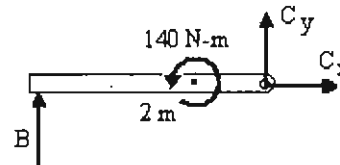


Fig. 96

Examinando el DCL de la barra BC es fácil deducir que la reacción en la articulación C debe ser una fuerza vertical hacia abajo (es decir,  $C_x = 0$  y  $C_y$  es negativa). Por otra parte, B y  $C_y$  forman un par que contrarresta el efecto del par de 140 N-m, de tal manera que  $B = |C_y| = 70$  N. Traspasando este valor de B al DCL de la barra AB, tenemos para ésta las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$A_x - 220 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$A_y - 220 - 140 = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M + 220(0.6) - 220(1.8) - 140(2) = 0$$

Obtenemos

$$A_x = 220 \text{ N}, \quad A_y = 360 \text{ N}, \quad M = 544 \text{ N-m}$$

En el siguiente ejemplo analizaremos una unión de pasador en la que confluyen tres cuerpos. Pero antes daremos un teorema muy útil que aplicaremos allí.

### 3.6. Cuerpo sometido a fuerzas en sólo dos puntos.

Consideremos una barra recta de peso insignificante, que sufre fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  en sus extremos (Fig. 97). Si la barra está en equilibrio, entonces las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  deben:

- Ser iguales y de sentidos contrarios
- Ser colineales con la barra

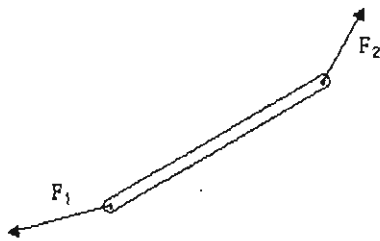


Fig. 97

O sea, poniendo  $F_1 = F_2 \equiv F$ , la barra debe estar cargada ya sea en tensión simple, como se muestra en la Fig. 98, o bien en compresión simple. Las dos fuerzas mostradas allí forman un "par inocuo".

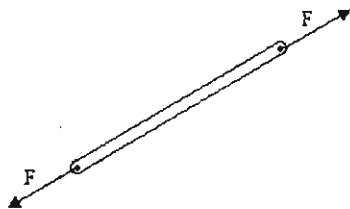


Fig. 98

Cosa análoga ocurre con un cuerpo rígido (de peso despreciable y en equilibrio), sometido a fuerzas en sólo dos de sus puntos, como el cuerpo mostrado en la Fig. 99. Las fuerzas que concurren en el punto A pueden sustituirse por una fuerza equivalente "F" que es la suma de ellas; y lo mismo podemos decir acerca de las fuerzas que concurren en B. Las equivalentes deben ser iguales (ambas a F) y sus líneas de acción deben coincidir con la línea que une A con B (Fig. 100).

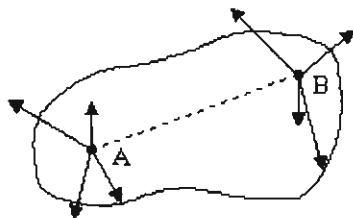


Fig. 99

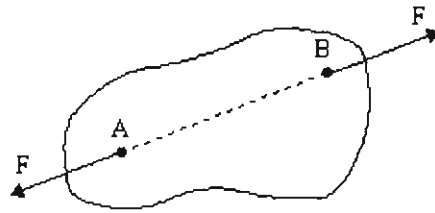


Fig. 100

Recalcamos que si el cuerpo tiene un peso no despreciable, entonces el teorema no se cumple.

**Ejemplo 21.** Dos barras de peso despreciable están acopladas mediante un pasador liso en B, como se muestra en la Fig. 101, y articuladas en los extremos A y C. En el pasador está sujeto un cable del que cuelga una pesa de 120 N. Calcular las reacciones en las articulaciones A y C.

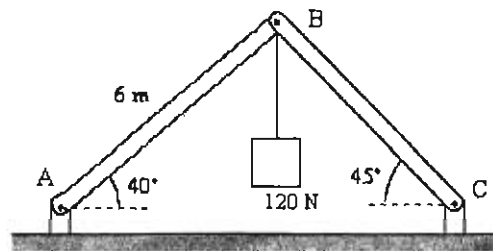


Fig. 101

Hagamos el DCL del sistema compuesto de las barras AB y BC, junto con el pasador que las une. Podemos simplificar este diagrama notando que las barras AB y BC están sujetas a fuerzas en sólo dos puntos. Por lo tanto, en las articulaciones surge una fuerza de reacción que está a lo largo de la barra respectiva. Denotando estas fuerzas con  $F_1$  y  $F_2$  tenemos el DCL de la Fig. 102.

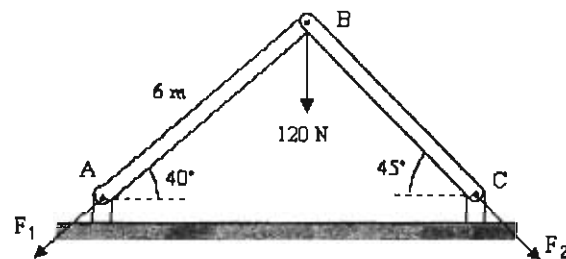


Fig. 102

En vista de que las tres fuerzas sobre el conjunto son concurrentes, basta con plantear las ecuaciones de

equilibrio de traslación, que son:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$-F_1 \cos 40^\circ + F_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$-F_1 \sin 40^\circ - 120 - F_2 \sin 45^\circ = 0$$

La solución de estas ecuaciones es

$$F_1 = -70.981 \text{ N}, \quad F_2 = -76.897 \text{ N}$$

Es instructivo examinar más en detalle la unión de las barras y el pasador en B, esquematizada en la Fig. 103.

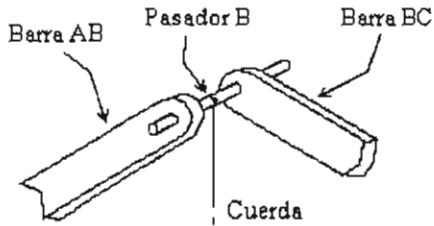
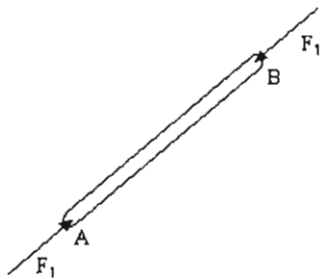


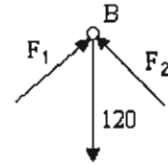
Fig. 103

Al desmembrar el conjunto en los subsistemas {Barra AB}, {Pasador} y {Barra BC} obtenemos los DCL's mostrados en las Figs. 104 a 106..



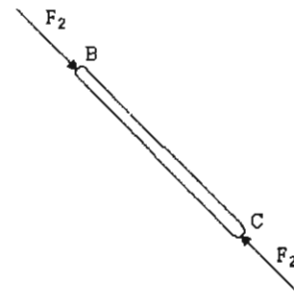
{Barra AB}	
Articulación en A	$F_1$ en A
Pasador	$F_1$ en B

Fig. 104



{Pasador}	
Barra AB	$F_1$
Cuerda	120
Barra BC	$F_2$

Fig. 105



{Barra BC}	
Pasador	350
Articulación en B	$B_x, B_y$

Fig. 106

**Ejemplo 22.** Las barras ABC y BDE están acopladas mediante una ranura lisa en B. Sus apoyos son sendas articulaciones en E y C, y un rodillo en A. Se aplica un par de 240 N-m a la barra BDE. Calcular las reacciones en los apoyos, así como la fuerza en B. Suponer que las barras no tienen peso.

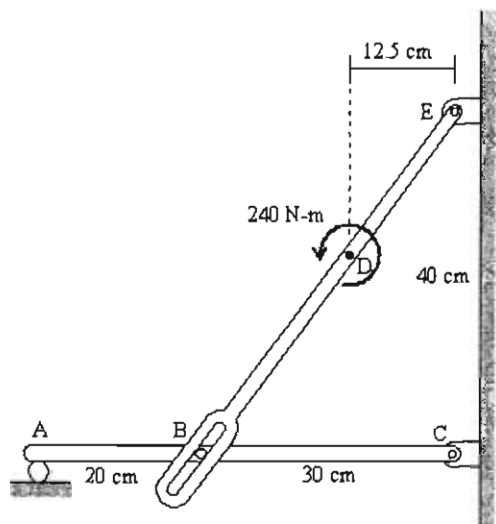


Fig. 107

El DCL de todo el conjunto es la Fig. 108.. Contiene las fuerzas desconocidas  $A$ ,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $E_x$  y  $E_y$ , en total 5. Como las ecuaciones de equilibrio son 3, es necesario desmembrar el sistema.

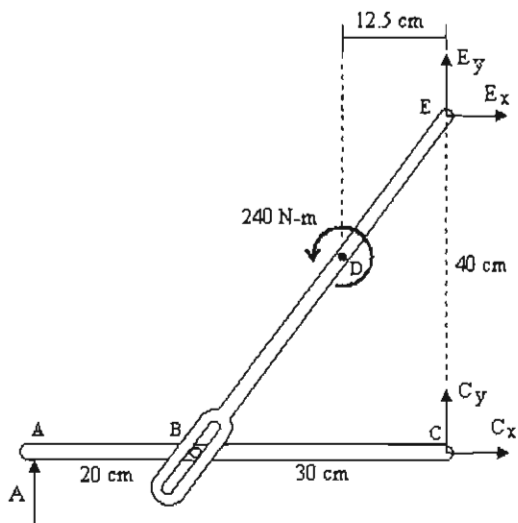


Fig. 108

Definamos los sistemas {Barra BDE} y {Barra ABC}, cuyos DCL's son las Figs. 109 y 110, respectivamente. Notemos que el primer DCL incluye solamente 3 incógnitas ( $B$ ,  $E_x$  y  $E_y$ ), por lo que podemos resolverlo ahora.

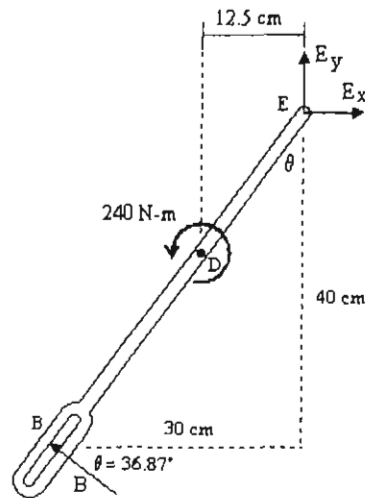


Fig. 109

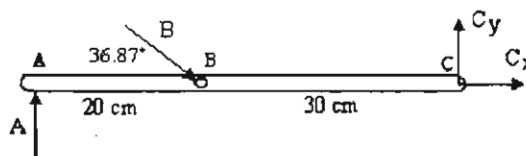


Fig. 110

Encontramos que

$$B = 480 \text{ N}, \quad E_x = 384 \text{ N}, \quad E_y = -288 \text{ N}$$

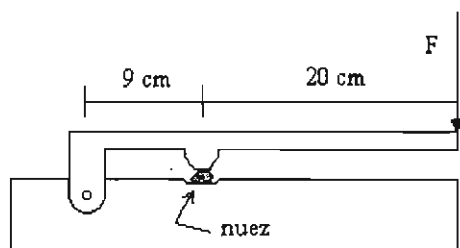
Advierta que  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 480 \text{ N}$ , y que las fuerzas en B y E forman un par que contrarresta el par de 240 N-m.

Seguidamente podemos resolver el equilibrio de la barra {ABC}, utilizando el valor encontrado de  $B = 480$  para la fuerza en B. Hallamos

$$C_x = -384 \text{ N}, \quad C_y = 115.2 \text{ N}, \quad A = 172.8 \text{ N}$$

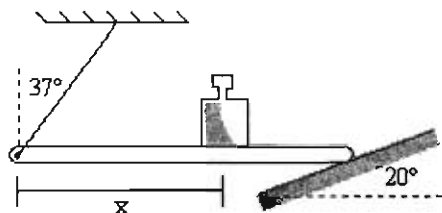
3.7. Problemas

7. Un cascanueces tiene las dimensiones indicadas en la figura. La nuez se rompió con una fuerza de compresión de 200 N; ¿qué fuerza  $F$  debe aplicarse en el extremo del cascanueces para lograr romper la nuez?

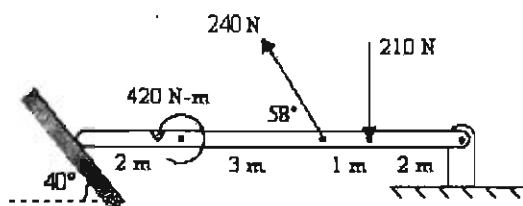


Resp.  $(9/29) \cdot 200 \text{ N} = 62 \text{ N}$ .

1. La pesa, de masa  $M$ , descansa sobre una barra horizontal ligera, apoyada en un cable a  $37^\circ$  y en una superficie lisa a  $20^\circ$ , como se muestra. ¿A qué distancia "x" debe colocarse la pesa para que la barra se mantenga en equilibrio en esa posición?

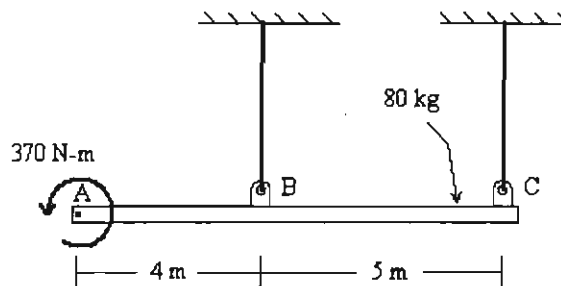


2. Una barra homogénea, de peso despreciable y longitud 8 m, está apoyada en contacto simple en su extremo izquierdo y en una articulación en su extremo derecho, como se ve en la figura. Se aplican dos fuerzas, de 240 N y 210 N, en las direcciones indicadas, y un par de 420 N-m. Calcular las reacciones en los apoyos.



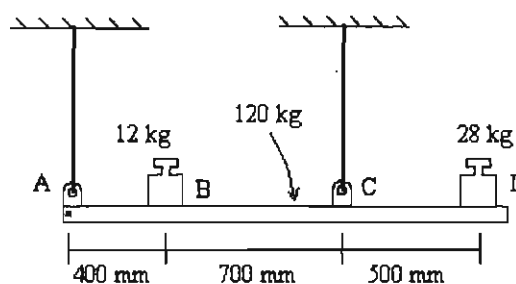
Resp. 37.43 N, (103.12, -22.21) N.

3. Una viga horizontal homogénea de masa 80 kg está suspendida de dos cables verticales. En un extremo se aplica un par de 370 N-m, como se muestra. Calcular las tensiones en los cables, en equilibrio.



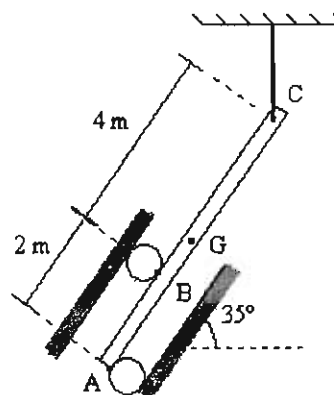
Resp.  $T_1 = 779.6 \text{ N}$ ,  $T_2 = 4.4 \text{ N}$ .

4. Una viga horizontal de masa 120 kg está suspendida de dos cables verticales, y porta dos pesas de 12 kg y 28 kg, situadas en los puntos indicados. Calcular las tensiones de los cables en equilibrio.



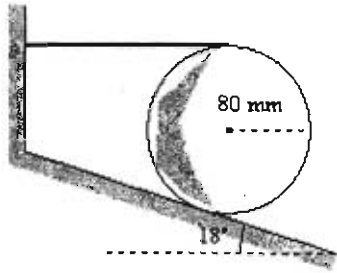
Resp. 27.64 N, 132.36 N.

5. Un tronco homogéneo de 240 N de peso está apoyado en un cable vertical y dos rodillos, como se muestra en la figura. Calcular la tensión del cable y las reacciones en los rodillos.



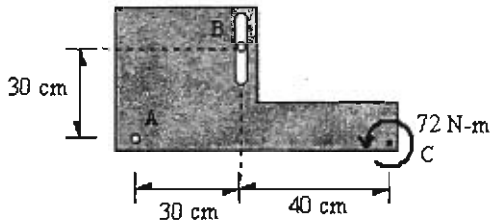
Resp.  $N_1 = N_2 = 206.49 \text{ N}$ ,  $T = 240 \text{ N}$ .

6. Existe fricción entre la superficie inclinada y la esfera homogénea. Calcular la tensión del cable, la normal y la fricción, suponiendo que la esfera pesa 200 N.



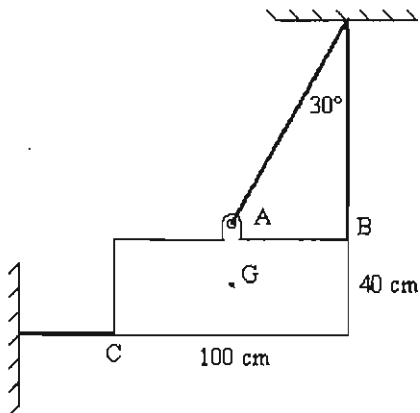
Resp. 31.68 N, 200 N, 31.68 N.

7. Una placa de peso despreciable está apoyada en una bisagra en A, en una ranura sobre perno fijo en B, y se le aplica en C un par de momento 72 N-m. Calcular las reacciones en A y B.



Resp. 240 N, 240 N

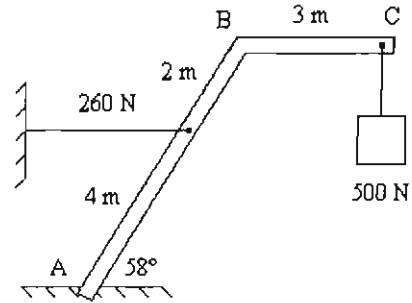
8. Una placa homogénea de peso 100 N está sostenida por tres cuerdas atadas en los puntos A, B y C, como se muestra. Calcular las tensiones en las cuerdas.



Resp. 79 N, 39.5 N, 31.6 N.

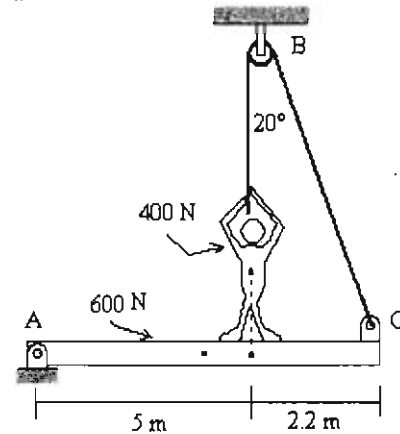
9. Encontrar la reacción en el empotramiento A del poste mostrado en la figura. La tensión del cable horizontal se ha prefijado a 260 N. Despreciar el peso

del poste en comparación con el peso de 500 N de la caja.



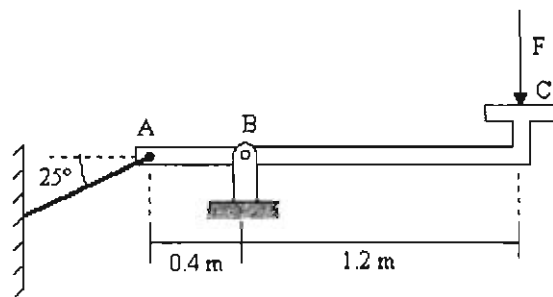
Resp. 260 N, 500 N, 2207.8 N-m.

10. El muchacho, al jalar la cuerda con fuerza T, se sostiene a sí mismo y mantiene la tabla horizontal. El peso del muchacho es 400 N y el de la tabla 600 N. Calcular la reacción en la articulación y la tensión de la cuerda.



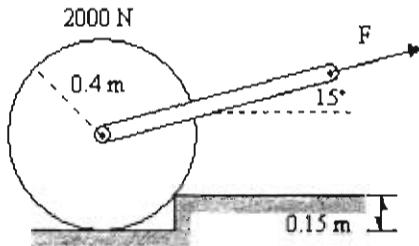
Resp. A = (120.9 N, 314.2 N), T = 353.6 N.

11. En la palanca ABC mostrada en la figura, la cuerda en A puede soportar una tensión de 420 N sin romperse. ¿Cuál es la máxima fuerza F que puede aplicarse en C sin que la cuerda se rompa? Despreciar el peso de la palanca.



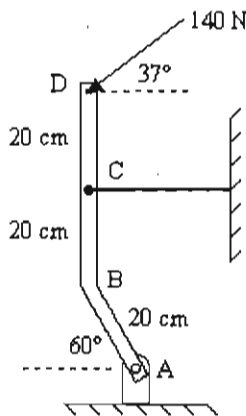
Resp. 59.2 N.

12. Se desea levantar un cilindro homogéneo de 0.4 m de radio y 2000 N de peso sobre un escalón de altura 0.15 m, por medio de una fuerza  $F$  inclinada a  $15^\circ$ , como se muestra en la figura. ¿Qué fuerza  $F$  mínima se requiere para lograrlo? Suponga que hay suficiente fricción en la esquina para evitar el deslizamiento.



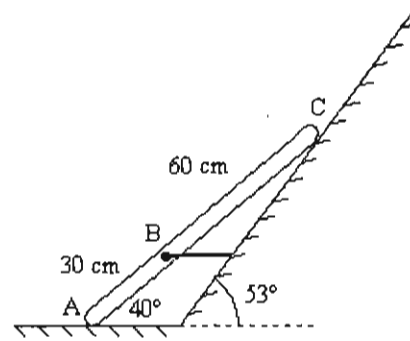
Resp.  $F = 2197 \text{ N}$

13. La barra ABCD consta de tres segmentos AB, BC y CD de igual longitud, 20 cm. El tramo BCD se mantiene vertical por medio de una cuerda horizontal atada en C. ¿Qué tensión aparece en esta cuerda al aplicar una fuerza de 140 N en el extremo D, como se muestra? Despreciar el peso de la barra.



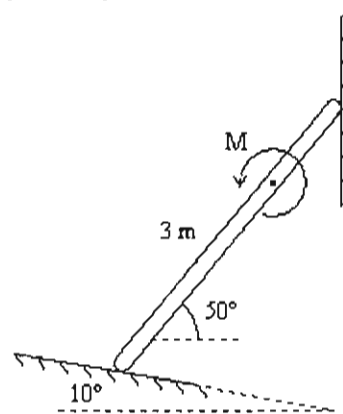
Resp. 194.3 N.

14. Una barra homogénea de masa 25 kg descansa sobre dos superficies lisas. La barra está sujeta a una cuerda que corre horizontalmente como se muestra. Calcular las fuerzas de reacción sobre la barra.



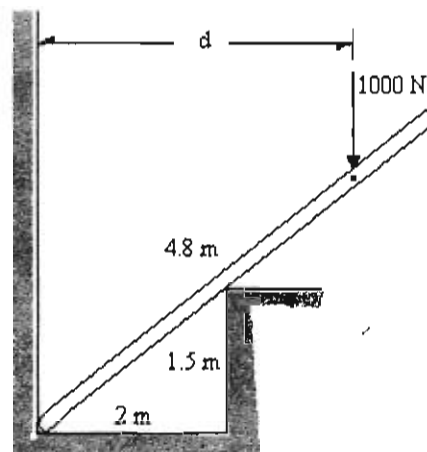
Resp. 219 N, 219 N, 245 N.

15. Una barra homogénea de 3 m de longitud y 50 kg de masa descansa sobre dos superficies lisas como se muestra en la figura. Calcular el momento  $M$  del par requerido para el equilibrio.

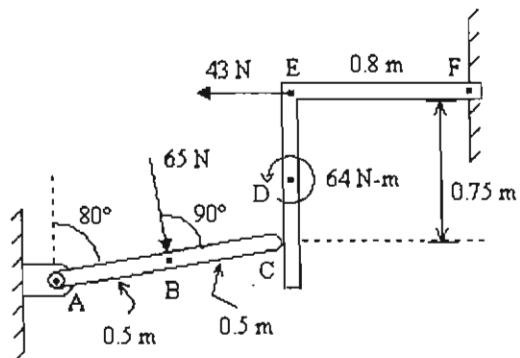


Resp. 273.9 N-m.

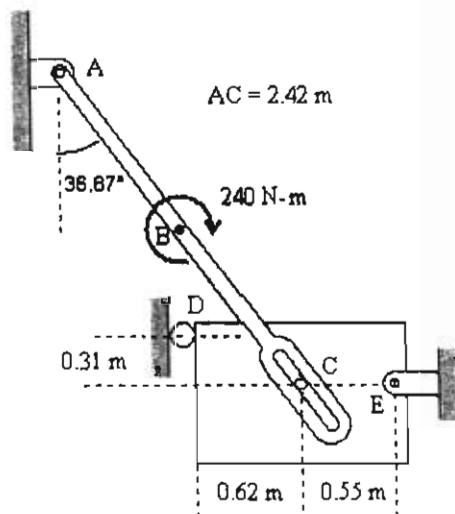
16. Una escalera homogénea de longitud 4.8 m y peso 300 N descansa en una cavidad rectangular como se muestra en la figura. Calcular la distancia "d" para la cual la escalera está a punto de caer. No existe fricción en ninguna parte.



1. Una barra ABC, inclinada a  $10^\circ$  con la horizontal, se apoya contra una barra en escuadra CDEF, como se muestra en la figura. Dadas las fuerzas y dimensiones mostradas, calcular las reacciones en la articulación A, el contacto simple C, y el empotramiento F.



2. Para el sistema mostrado en la figura, calcular la reacción en el perno de ranura C, en el rodillo D, y en las articulaciones A y E.





APÉNDICE

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS

**A1. Sistemas equivalentes de fuerzas**

El caso más general de sustituciones de fuerzas lo tenemos cuando deseamos sustituir un sistema dado de  $N$  fuerzas por otro sistema que conste de un número  $M$  distinto de fuerzas.

El problema lo podemos plantear así:

Dado un sistema de fuerzas

$$\mathcal{S} = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$$

¿qué condiciones deben cumplirse para que este sistema pueda ser sustituido por otro sistema

$$\mathcal{S}' = \{F'_1, F'_2, \dots, F'_M\} \quad ?$$

El significado de "sustituir" aquí es que al cambiar  $\mathcal{S}$  por  $\mathcal{S}'$  las ecuaciones de equilibrio permanezcan invariantes. Es decir,

- La fuerza total de  $\mathcal{S}$  debe ser igual a la de  $\mathcal{S}'$ .
- El momento total de  $\mathcal{S}$  con respecto a un punto arbitrario  $P$  debe ser igual al momento total de  $\mathcal{S}'$  con respecto a este punto.

Si se cumplen ambas condiciones decimos que los sistemas  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  son *equivalentes*. Examinemos un caso concreto. Consideremos los sistemas  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3$  mostrados en las Figs. A1, A2 y A3.

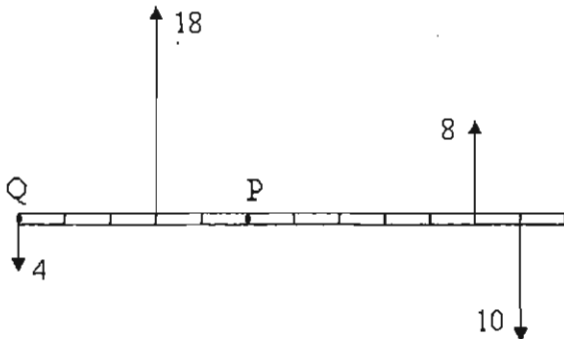


Fig. A1. Sistema  $\mathcal{S}_1$

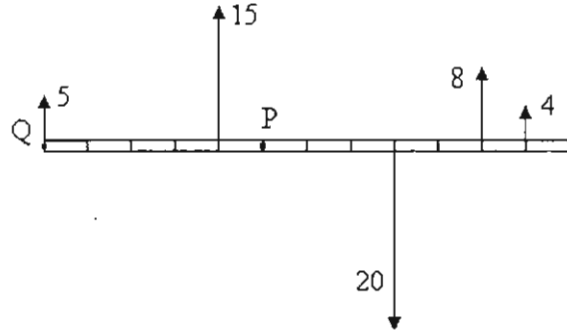


Fig. A2. Sistema  $\mathcal{S}_2$

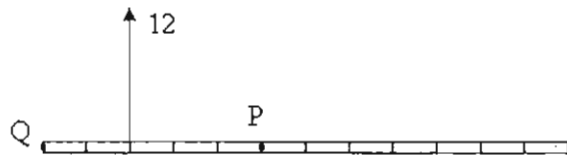


Fig. A3. Sistema  $\mathcal{S}_3$

(El sistema  $\mathcal{S}_3$  consta de una sólo fuerza.)

Calculemos la fuerza total y el momento de cada sistema con respecto a P:

Para el sistema  $\mathcal{S}_1$ :

$$\mathcal{R} = -4 + 18 + 8 - 10 = 12$$

$$\mathcal{M}_P = 4(5) - 18(2) + 8(5) - 10(6) = -36$$

Para el sistema  $\mathcal{S}_2$ :

$$\mathcal{R} = 5 + 15 - 20 + 8 + 4 = 12$$

$$\mathcal{M}_P = -5(5) - 15(1) - 20(3) + 8(5) + 4(6) = -36$$

Para el sistema  $\mathcal{S}_3$ :

$$\mathcal{R} = 12$$

$$\mathcal{M}_P = -12(3) = -36$$

Como se advierte, hemos diseñado estos sistemas de modo que posean la misma fuerza total y el mismo momento total con respecto al punto particular P. ¿Cómo se comparan ahora los momentos de estos sistemas con respecto a otros puntos?

Para verlo calculemos el momento total con respecto, digamos, al punto Q:

Para el sistema  $\mathcal{S}_1$ :

$$\mathcal{M}_Q = 18(3) + 8(10) - 10(11) = 24$$

Para el sistema  $\mathcal{S}_2$ :

$$\mathcal{M}_Q = 15(4) - 20(8) + 8(10) + 4(11) = 24 \quad (!)$$

Para el sistema  $\mathcal{S}_3$ :

$$\mathcal{M}_Q = 12(2) = 24 \quad (!!)$$

O sea: se sospecha que si los sistemas poseen la misma fuerza total y el mismo momento con respecto a *determinado* punto P, poseerán iguales momentos con respecto a *cualquier* otro punto distinto Q.

**(A1) Teorema .**

Hipótesis 1. Se tienen dos sistemas de fuerzas  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  con la misma fuerza total:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$$

Hipótesis 2. Los momentos totales de estos sistemas con respecto a un punto *específico* P tienen el mismo valor:

$$(\mathcal{M}_P)_1 = (\mathcal{M}_P)_2$$

Tesis. Entonces los sistemas tienen el mismo momento total con respecto a *cualquier* punto del espacio:

$$(\mathcal{M}_*)_1 = (\mathcal{M}_*)_2$$

Para demostrar este teorema construyamos un sistema de fuerzas compuesto por las fuerzas del sistema  $\mathcal{S}_1$  y por los negativos de las fuerzas del sistema  $\mathcal{S}_2$ . Tal sistema combinado es un sistema de fuerza total nula. Su momento es por lo tanto independiente del punto de referencia. Pero este momento es

$$\mathcal{M}_P + (-\mathcal{M}_P)$$

Por hipótesis  $\mathcal{M}_P = \mathcal{M}'_P$ . Entonces el momento del

sistema combinado vale cero con respecto a P,

$$\mathcal{M}_P + (-\mathcal{M}'_P) = 0$$

Por ser absoluto vale cero con respecto a cualquier otro punto Q, o sea

$$\mathcal{M}_Q + (-\mathcal{M}'_Q) = 0$$

de donde

$$\mathcal{M}_Q = \mathcal{M}'_Q$$

QED.

¿Qué tal si quisiéramos ahora calcular el momento del sistema  $\mathcal{S}_1$  con respecto al extremo derecho de la viga?

Está claro que los sistemas  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3$  son equivalentes, de tal manera que escogeríamos el sistema más simple, el  $\mathcal{S}_3$ , para hacer el cálculo. El momento de este sistema con respecto al extremo derecho,

$$-12(10) = -120$$

es el mismo que el de los otros dos sistemas.

El concepto de sistemas de fuerzas equivalentes nos permite introducir la siguiente definición:

**(A2)** La *resultante* o *equivalente* de un sistema de fuerzas dado es el sistema *más simple* que es equivalente al sistema dado.

Para un sistema de fuerzas arbitrarias en tres dimensiones, a resultante puede ser una sólo fuerza, o un sólo par, o una fuerza y un par.

Un sistema de fuerzas coplanarias tiene como resultante una sólo fuerza, o un sólo par.

De acuerdo con esta definición, el sistema  $\mathcal{S}_3$  es la resultante del sistema  $\mathcal{S}_1$  o del  $\mathcal{S}_2$ .

### A2. Resultante de un sistema arbitrario de fuerzas coplanarias

He aquí el problema:  
Se tiene un sistema de fuerzas

$$\mathcal{S} = \{F_1(A_1), F_2(A_2), \dots, F_N(A_N), m_1, \dots, m_k\}$$

compuesto por N fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_N$ , y "k" pares de momentos  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .

Se quiere obtener la resultante del sistema  $\mathcal{S}$ , es decir, el valor  $\mathcal{R}$  y ubicación P de una sólo fuerza que sea equivalente al sistema  $\mathcal{S}$  dado.

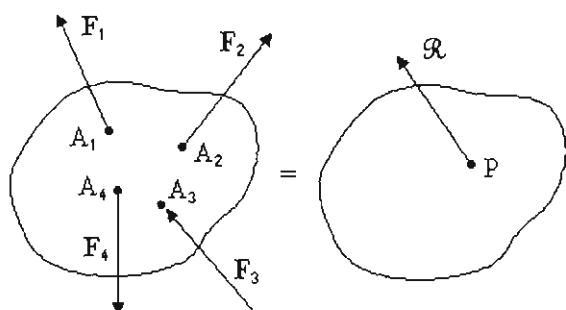


Fig. A4111

Como sabemos, dos sistemas equivalentes de fuerzas deben tener la misma fuerza total y el mismo momento total con respecto a cualquier punto del espacio. Por lo tanto, la resultante  $\mathcal{R}(P)$  debe cumplir estas condiciones:

(A3) *Resultante  $\mathcal{R}(P)$  de un sistema arbitrario de fuerzas coplanarias.*

- $\mathcal{R}$  es igual a la fuerza total del sistema  $\mathcal{S}$ .
- El momento de  $\mathcal{R}$  con respecto a cualquier punto del espacio es igual al momento total del sistema  $\mathcal{S}$  con respecto a este mismo punto.

Matemáticamente, estas dos condiciones se expresan así:

(a)  $\mathcal{R} = \sum F_i$

(b)  $OP \wedge \mathcal{R} = \sum OA_i \wedge F_i$

En la segunda condición hemos escogido, por conveniencia, igualar los momentos de  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$  con respecto al origen de coordenadas de un sistema cartesiano XY.

Por el principio de transmisibilidad, la resultante se puede trasladar a cualquier punto contenido en su propia línea de acción, de tal manera que el punto de aplicación P no es único. La condición (A3b) nos dará la ecuación de la línea de acción en el espacio cartesiano XY, en la forma

$$c_1 x_P + c_2 y_P = c_3$$

Una de las coordenadas ( $x_P, y_P$ ) puede asignarse arbitrariamente y la otra se calcula de esta ecuación.

**Ejemplo A1.** Calcular la resultante del sistema de 3 fuerzas mostrado en la Fig. A5. Unidades arbitrarias de longitud y fuerza.

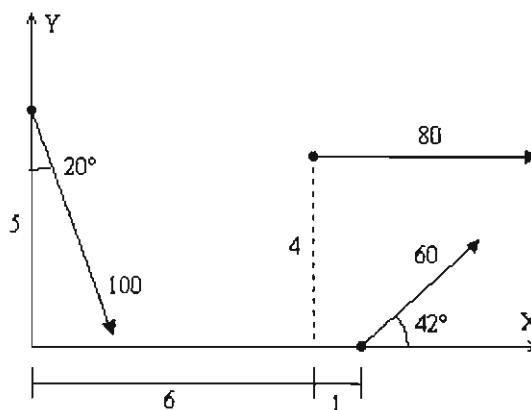


Fig. A5

Las fuerzas dadas son

$$(100 \text{ sen } 20^\circ, -100 \text{ cos } 20^\circ) = (34.20, -93.97).$$

$$(80, 0)$$

$$(60 \text{ cos } 42^\circ, 60 \text{ sen } 42^\circ) = (44.59, 40.15)$$

La resultante  $\mathcal{R}$  es la suma de estas fuerzas.

$$\mathcal{R} = (158.79, -53.82)$$

Lo que resta hacer es calcular la línea de acción de esta resultante.

Calculemos el momento total del sistema de tres fuerzas con respecto al origen, usando el teorema de Varignon. Para la fuerza de 100 solamente su

componente X tiene momento con respecto a O, y vale

$$-34.20 (5) = -171$$

El momento de la fuerza de 80 es

$$-80 (4) = -320$$

Para la fuerza de 60, solamente su componente Y tiene momento con respecto al origen, y vale

$$40.15 (7) = 281.75$$

El momento total es

$$-171 - 320 + 281.75 = -209.25$$

Denotemos con  $(x_p, y_p)$  las coordenadas del punto de aplicación de  $\mathcal{R}$ . La condición (A3b) se vuelve

$$(x_p, y_p) \wedge (158.79, -53.82) = -209.25$$

Desarrollando,

$$-53.82 x_p - 158.79 y_p = -209.25$$

Esta es la ecuación de la línea de acción de  $\mathcal{R}$ . Dándole a  $y_p$  arbitrariamente el valor  $y_p = 0$  obtenemos

$$x_p = \frac{209.25}{53.82} = 3.888$$

de modo que la resultante se puede localizar en  $P(3.888, 0)$ , como se muestra en la Fig. A6.

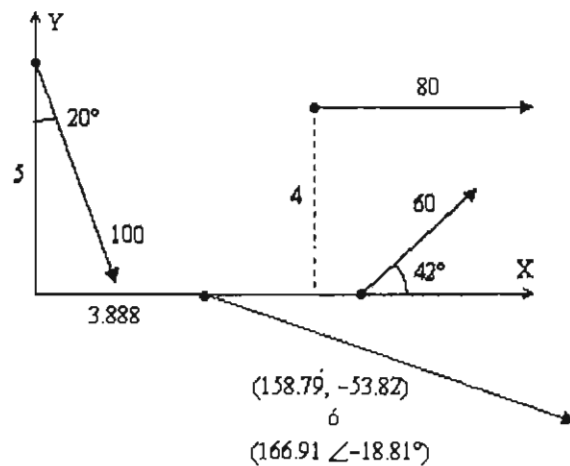


Fig. A6

### A3. Resultante de un sistema de fuerza total nula

Un sistema de fuerzas cuya fuerza total es nula tiene como resultante un par, ya que  $\mathcal{R} = 0$ .

**Ejemplo A2.** Calcular la resultante del sistema de fuerzas mostrado en la Fig. A7. Cada división de la cuadrícula representa a la vez una unidad de longitud y una unidad de fuerza.

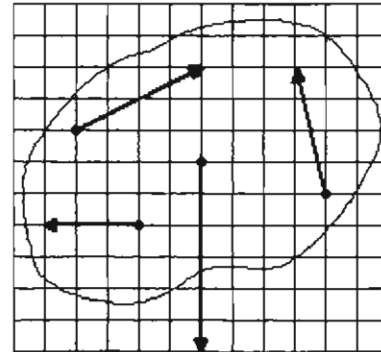


Fig. A7

Las fuerzas del sistema son

$$(4, 2), (-1, 4), (0, -6) \text{ y } (-3, 0)$$

La suma de estas fuerzas es cero:

$$\mathcal{R} = 0$$

Por otra parte, el momento (absoluto) del sistema con respecto, digamos, al vértice inferior izquierdo de la cuadrícula es

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 12 - 36 = -3$$

La resultante del sistema es un par de momento  $-3$ , como se muestra en la Fig. A8.

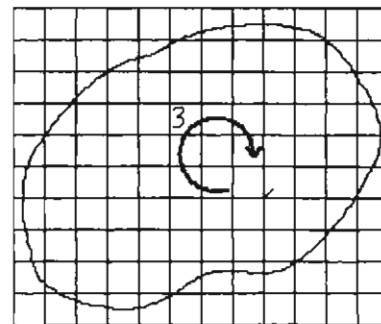


Fig. A8

### A4. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas

Consideremos un sistema de fuerzas, todas ellas paralelas a uno de los ejes, digamos el Eje Y. Por el principio de transmisibilidad, podemos suponer que las fuerzas están aplicadas en puntos sobre el eje X. Sea "F<sub>iy</sub>" la componente (única) de la fuerza número "i", y "x<sub>i</sub>" su punto de aplicación.

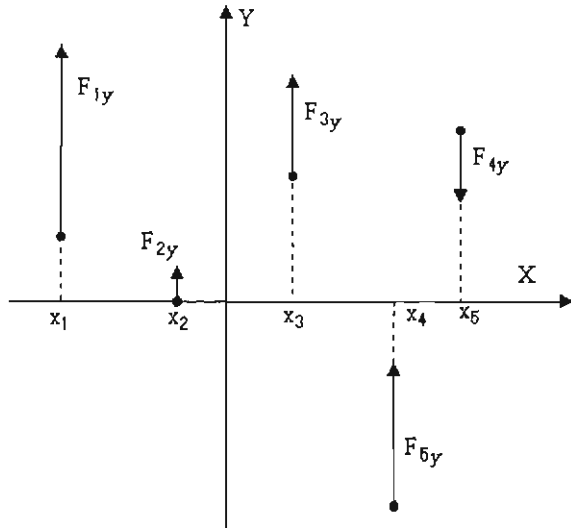


Fig. A9

(A4) *Resultante de un sistema de fuerzas paralelas al Eje Y.*

La fuerza resultante tiene solamente componente Y, la cual vale

$$(a) \quad \mathcal{R} = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ny}$$

Se localiza en el punto cuya abscisa es

$$(b) \quad x_p = \frac{\sum x_i F_{iy}}{\sum F_i}$$

La condición (A4b) se encuentra al igualar el momento de la fuerza resultante con respecto al origen, que vale  $x_p \mathcal{R}$ , al momento del sistema con respecto al origen, que vale  $\sum x_i F_{iy}$ .

Si el sistema de fuerzas se amplía por inclusión de uno o varios pares, la fuerza resultante sigue valiendo  $\mathcal{R} = \sum F_{iy}$ , pero al calcular  $x_p$  debe añadirse el momento neto de los pares al numerador de (A4b), como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo A3.** Calcular la resultante del sistema de fuerzas paralelas de la Fig. A10, el cual incluye dos pares.

La fuerza resultante vale

$$\mathcal{R} = 12 + 9 - 6 - 10 + 15 = 20$$

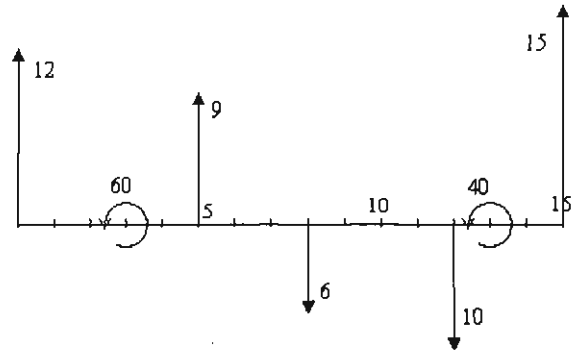


Fig. A10

El momento del sistema con respecto al origen vale

$$\begin{aligned} \sum x_i F_{iy} + 60 + 40 &= \\ = 12(0) + 9(5) - 6(8) - 10(12) + 15(15) + 100 &= \\ = 202 \end{aligned}$$

Este debe ser igual al momento de la fuerza resultante con respecto al origen, que vale " $x_p(20)$ ", o sea que

$$20 x_p = 202$$

de donde

$$x_p = 10.1$$

La resultante se muestra en la Fig. A11.

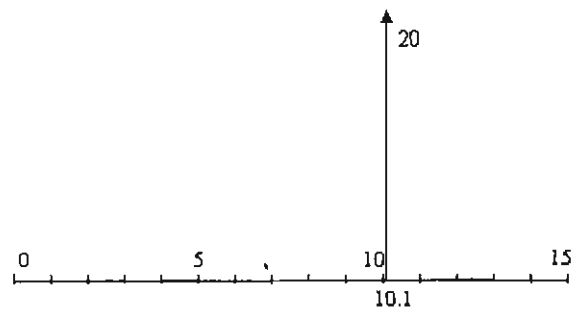


Fig. A11

### A5. Resultante de una distribución lineal de fuerzas

Las distribuciones continuas de fuerzas se describen mediante su *densidad de fuerza*  $q$ , la cual es una cantidad vectorial medida en newtons por metro o newtons por metro cuadrado o newtons por metro cúbico, según la distribución sea *lineal*, *superficial* o *volúmica*, respectivamente.

La densidad de fuerza se define de modo que la fuerza sobre un elemento diferencial de longitud  $ds$  o área  $dA$  o volumen  $dV$  se exprese en una de las formas

$$dF \equiv q \, ds$$

$$dF \equiv q \, dA$$

$$dF \equiv q \, dV$$

según que la distribución sea lineal, superficial o volúmica, respectivamente. Trataremos en esta sección solamente con las distribuciones lineales de fuerza.

Observe la Fig. A12, que muestra una pila de sacos de arena sobre una viga. Se trata de una *distribución triangular* de fuerzas. Poniendo el Eje X con su origen en el extremo izquierdo de la viga, la densidad lineal de fuerza,  $q$ , es proporcional a  $x$ ,

$$q(x) = k \, x$$

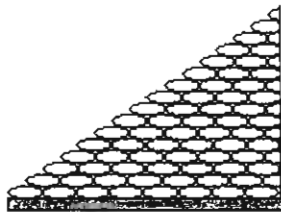


Fig. A12

Para evaluar la constante  $k$  supongamos que los sacos de arena pesan en total " $W$ " newtons. La fuerza sobre un segmento de viga de longitud  $dx$  viene dada por  $dF = q \, dx$ , y la fuerza total sobre la viga es entonces

$$F = \int_0^L p \, dx = \int_0^L kx \, dx = \frac{1}{2} kL^2 = W$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2W}{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{2W}{L^2} x$$

Para encontrar la resultante de la distribución triangular de fuerzas impondremos la condición de que el momento de la resultante con respecto al origen sea igual al momento de la distribución triangular con respecto al origen.

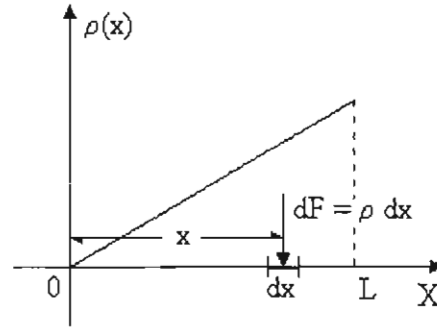


Fig. A13

El momento (con respecto al origen) de la fuerza  $dF$  sobre un elemento de longitud  $dx$  de la viga es  $dM = x \, dF$ , así que el momento total de la distribución triangular con respecto al origen es

$$M = \int_0^L x \, dF = \int_0^L x \cdot \rho \, dx = \int_0^L \frac{2W}{L^2} x^2 \, dx = \frac{2}{3} WL$$

Denotemos con  $x_R$  el punto de aplicación de la resultante. Entonces el momento de la misma con respecto al origen vale " $x_R W$ ".

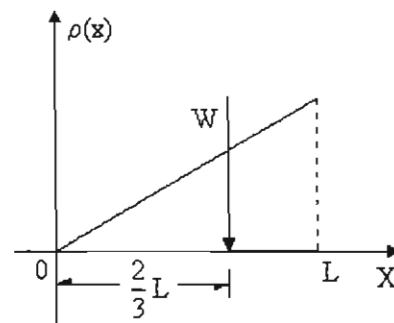


Fig. A14

Igualemos el momento de la resultante al momento de la distribución:

$$\frac{2}{3} WL = x_R W$$

III-54

Obtenemos finalmente

$$x_R = \frac{2}{3}L$$

Observe la resultante en la Fig. A14.

Generalicemos el problema, considerando ahora una distribución lineal arbitraria de fuerzas.

(A5) *Resultante de una distribución lineal arbitraria de fuerzas descrita por la densidad lineal de fuerza  $Q(x)$ .*

La magnitud de la resultante es

$$\mathcal{R} = \int_0^L \rho dx$$

donde la integral se extiende sobre el segmento  $[0, L]$  del eje  $X$  que abarca la distribución. El punto  $x_R$  donde hay que aplicar la resultante viene dado por

$$x_R = \frac{\int_0^L x \cdot \rho dx}{\int_0^L \rho dx}$$

*ELEMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL Y ESTÁTICA EN EL PLANO*

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN EL MES DE  
ABRIL DE 2009 EN LOS TALLERES DE LA SECCIÓN  
DE IMPRESIÓN Y REPRODUCCIÓN DE LA  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO

SE IMPRIMIERON 100 EJEMPLARES  
MÁS SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

LA EDICIÓN ESTUVO A CARGO DE LA  
SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES  
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO





ISBN: 970-31-0374-X



978-97031-03744

ELEMENTOS DE ALGEBRA VECTORIAL Y ESTATICA E  
BECERRIL HDEZ. \* SECCION DE IMPRESION

49425

R. 40



\$ 30.00

40-ANTOLOGIAS CBI \* 01-CBI

UNIVERSIDAD  
AUTONOMA  
METROPOLITANA  
Casa abierta al tiempo  Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Departamento de Ciencias Básicas  
Coordinación de Extensión Universitaria  
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias