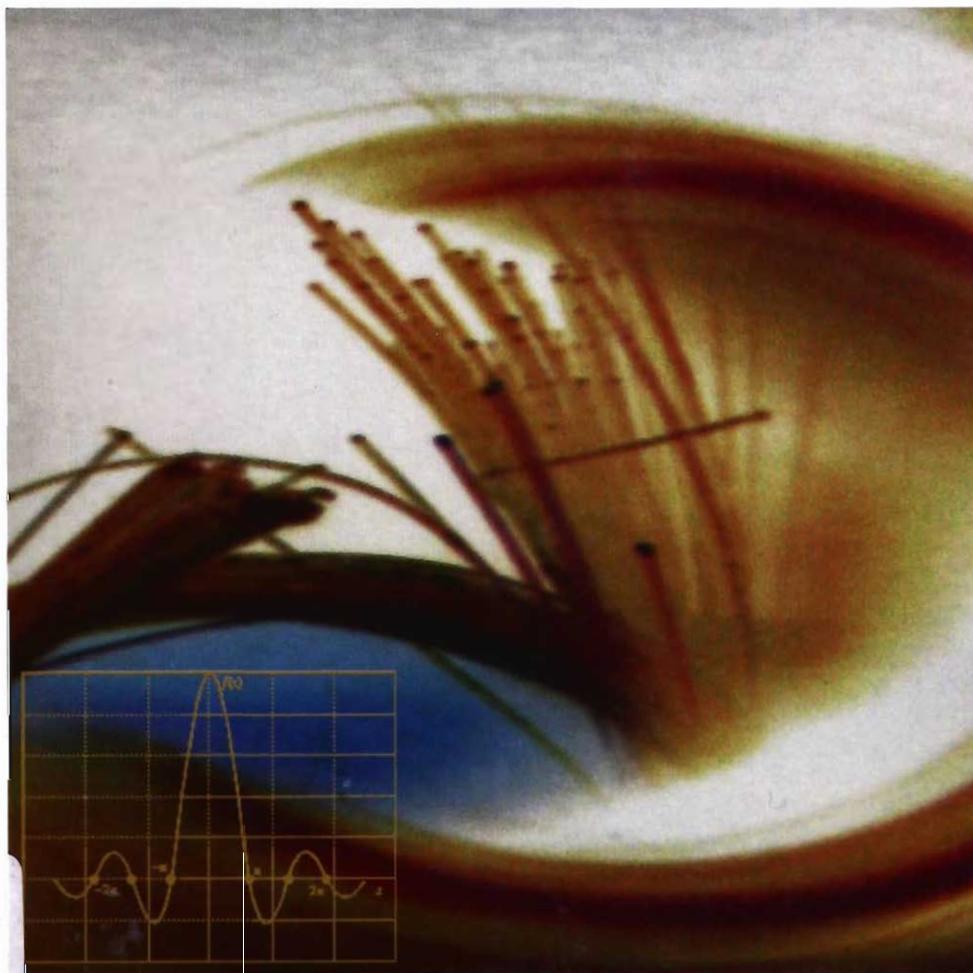


1570

Análisis de señales

Carlos Avilés Cruz
Ezequiel Rodríguez Rodríguez



AM
K5102.9
7.55



CARLOS AVILÉS CRUZ estudió ingeniería electrónica, con la especialidad en sistemas digitales, en la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Universidad Autónoma Metropolitana. Es maestro, con especialidad en procesamiento digital de señales, imágenes y voz por el Instituto Politécnico Nacional de Grenoble, Francia, donde obtuvo también el grado de doctor. Es profesor-investigador titular C en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, y autor o coautor de más de 25 artículos publicados en revistas especializadas. Ha participado en congresos nacionales e internacionales, y es coautor de dos libros. Sus campos de interés son la visión por computadora, el procesamiento digital de imágenes, el procesamiento digital de señales y la estadística de orden superior.

ANÁLISIS DE SEÑALES

COLECCIÓN
Libros de Texto

Análisis de señales

Carlos Avilés Cruz
Ezequiel M. Rodríguez Rodríguez



2893588

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Rector General

Dr. Luis Mier y Terán Casanueva

Secretario General

Dr. Ricardo Solís Rosales

UNIDAD AZCAPOTZALCO

Rector

Mtro. Víctor Manuel Sosa Godínez

Secretario

Mtro. Cristian Eduardo Leriche Guzmán

Coordinadora General de Desarrollo Académico

Mtra. María Aguirre Tamez

Coordinadora de Extensión Universitaria

DCC Teresa Olalde Ramos

Jefa de la Sección de Producción y Distribución Editoriales

Mtra. Silvia Guzmán Bofill

Portada: Virginia Flores

Composición tipográfica, diseño, producción y cuidado editorial
Sans Serif Editores, tel. 5611 37 30, telfax 5611 37 37
serifed@prodigy.net.mx

Primera edición 2003

ISBN: 970-654-967-6

© Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, col. Reynosa Tamaulipas
México, 02200, D.F.

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Prólogo

DESDE QUE SE LLEVÓ a cabo la última revisión-actualización del plan de estudios y de los programas sinópticos de la licenciatura en ingeniería electrónica en la Universidad Autónoma Metropolitana, se tienen pocos libros de texto que apoyen eficazmente a los estudiantes en el tronco profesional. En muchas unidades de enseñanza-aprendizaje (UEA) no existe material de apoyo. Con este propósito se originó el presente trabajo; por años se ha impartido la materia Análisis de señales sin contar con un documento en español y apegado al programa sinóptico. A modo de marco referencial, la materia se imparte en noveno trimestre, se encuentra seriada hacia sexto trimestre con Probabilidad y estadística, y hacia noveno trimestre con Comunicaciones III. El curso da por hecho que el alumno posee una formación sólida en matemáticas (Cálculo diferencial, Cálculo integral y Probabilidad y estadística principalmente). Como la materia está ubicada en noveno trimestre y el alumno dejó de tener materias de matemáticas tres trimestres antes, trae consigo problemas importantes. Los estudiantes no recuerdan con facilidad integrar y derivar, lo que convierte al curso en un embudo para la carrera; un alto porcentaje de estudiantes reprobaban o desertan (renuncian en la quinta semana) porque no entienden demostraciones o aspectos básicos del cálculo vectorial-matricial. Dicho lo anterior, resultó un doble reto escribir el presente libro de texto: *a)* por un lado, que contuviera todos y cada uno de los temas indicados en el plan de estudios, con la profundidad y claridad debidas, y *b)* que contuviera suficientes antecedentes matemáticos para que el estudiante comprenda fácilmente los conceptos expuestos. Con toda seguridad el texto será útil en otras escuelas e institutos en los que se incluya el tema como parte del plan de estudios de carreras similares.

Los objetivos del libro no son únicamente exponer la teoría, plantear ejercicios y dejar problemas a resolver por parte del alumno, no: buscamos

Prólogo

una formación más completa adicionando simulación en Matlab; es importante que los estudiantes puedan apreciar los fenómenos de manera gráfica, que puedan explorar variando parámetros y ver el resultado inmediatamente. Así, nos hemos preocupado por añadirle un capítulo de introducción y manejo de Matlab en un nivel de programación.

Cabe aclarar que, adicionalmente al libro de texto, se cuenta con la versión electrónica completa del documento en el servidor thor.uam.mx del área de comunicaciones. El objetivo es incursionar en el sistema de educación a distancia, con todas las ventajas que representa trabajar en la web.

LOS AUTORES

Introducción

EN LA FORMACIÓN DE UN PROFESIONAL en electrónica, en la actualidad las comunicaciones se han vuelto básicas, tanto las comunicaciones satelitales, de computadoras o por radio frecuencia, como las comunicaciones hombre-máquina. Toda comunicación está compuesta por un emisor, un mensaje y un receptor; el mensaje es una "señal" que porta algún tipo de información. El mensaje debe ser bien recibido, analizado e interpretado de acuerdo con lo que el emisor desea comunicar; si falla alguno de los puntos anteriores (recibir, analizar e interpretar), se crean severos problemas de comunicación.

En el presente libro se encuentran los fundamentos del campo "Análisis de señales" organizados y presentados de acuerdo con el plan de estudios de la carrera de ingeniería electrónica. La UEA se cursa en el noveno trimestre de la carrera, y es requisito haber cursado Probabilidad y estadística, materia que se imparte en sexto trimestre. Adicionalmente, Análisis de señales sirve como base para Comunicaciones III, que se imparte en décimo trimestre. El libro está constituido por seis capítulos; el primero es la presente introducción, el segundo corresponde a "Ortogonalidad y series de Fourier", el tercero trata de "Transformada de Fourier", el cuarto versa sobre "Teoría de muestreo", el capítulo quinto, de "Variables y procesos aleatorios", y finalmente el capítulo sexto se dedica a un minicurso sobre Matlab (paquete de simulación). A continuación se presenta un breve resumen de lo que se abordará en cada uno de los capítulos siguientes:

II. *Ortogonalidad y series de Fourier.* En este capítulo se proporcionan conceptos básicos de qué es una señal, sus características, y algunas de sus múltiples taxonomías. Se presentan los diferentes campos de aplicación de Análisis de señales. Posteriormente se pasa a las definiciones de periodicidad y ortogonalidad de funciones. Puesto que es importante la ortogonalidad de

funciones para poder descomponer cualquier función en funciones base ortogonales, se presentan las características y propiedades que deben satisfacer dos funciones para poder considerarlas ortogonales. En particular se trabaja con funciones del tipo seno y coseno, así como con la función exponencial compleja. Definidos los conceptos de ortogonalidad se pasa al desarrollo de señales en series de Fourier, y se demuestra cómo obtener los coeficientes a_0 , a_n y b_n para determinar la aproximación de $f(t)$ a k -elementos de la serie. Se citan también las propiedades que debe tener una señal para poderla desarrollar en series de Fourier. Se presentan diferentes ejemplos de desarrollo en series de Fourier, y en la parte final del capítulo se desarrolla la serie exponencial compleja de Fourier; con dicha serie se analiza el contenido de información en el dominio de la frecuencia.

III. *Transformada de Fourier.* Como una continuidad del capítulo II se presenta el capítulo III referente a la transformada de Fourier; en él se expone su definición, se demuestran sus propiedades y se dan ejemplos en sistemas de comunicación: propiedad de linealidad, desplazamiento en el tiempo, desplazamiento en la frecuencia, escalonamiento en el tiempo, escalonamiento en la frecuencia, simetría, la propiedad de convolución en el tiempo y la propiedad de convolución en la frecuencia. En todas las propiedades se analizan las respuestas tanto en tiempo como en frecuencia, en frecuencia la respuesta en magnitud y en fase. Finalmente, se plantea el problema de truncamiento temporal y los diferentes efectos producidos, con el fin de aminorar el problema de inducir altas frecuencias cuando se usan ventanas cuadradas (se ven los efectos de utilizar ventanas: Hanning, Hamming, Bartlett y Blackman). Se plantean ejercicios en Matlab que ejemplifican todos y cada uno de los conceptos expuestos.

IV. *Teoría de muestreo.* Se presentan los fundamentos que hacen posible la conversión de una señal continua del tiempo a su equivalente en muestras digitales. Se exponen conceptos como el muestreo ideal (con deltas de Dirac), el muestreo real, el teorema de muestreo, la periodización de espectro y los efectos de recubrimiento de espectros. También se analiza el proceso inverso, es decir, la conversión de la señal digital a señal analógica.

V. *Variables y procesos aleatorios.* En el capítulo V se cubren temas como procesos estocásticos, variables aleatorias, procesos ergódicos. Se plantean diferentes herramientas para caracterizar variables aleatorias; unas de estas herramientas son las funciones de densidad de probabilidad y las funciones de distribución de probabilidad. Otra herramienta es la esperanza matemática o valor esperado a sus diferentes órdenes; a primer orden se caracterizan por el valor promedio, a segundo orden por el valor cuadrático medio, la varianza, la desviación estándar y la correlación; a tercer orden se exponen conceptos como el "sesgo" (grado de simetría respecto al valor

medio), y a cuarto orden se plantea el concepto de “kurtosis”, el cual indica el grado de similitud de una función de densidad cualquiera respecto a una función de densidad gaussiana. Finalmente veremos conceptos de funciones de densidad y distribución conjunta (únicamente para dos variables aleatorias), funciones de correlación, independencia estadística, autocorrelación, energía y potencia.

VI. *Curso Matlab*. En este último capítulo se pretende que el estudiante tome los elementos mínimos que le permitan programar en Matlab.

Matlab es un programa de simulación que trabaja con base en interpretar líneas de comandos. La finalidad de este capítulo es facilitar las operaciones de vectores y matrices, por un lado, y, por otro, facilitar el despliegue gráfico de la información.

Recomendamos ampliamente al usuario que primero pase al capítulo VI y realice todos y cada uno de los ejercicios, para que pueda interpretar mejor los ejercicios expuestos en los diferentes capítulos.

Para finalizar se presentan las conclusiones.

Ortogonalidad y series de Fourier

INTRODUCCIÓN

EL OBJETIVO DE ESTUDIAR análisis de señales es aprender a caracterizar una señal, es decir, conocer los parámetros que la definen. Una señal es todo aquello que porta información y puede viajar por algún medio, ya sea material o el vacío. En las comunicaciones, por ejemplo, existen varias formas de enviar información; antiguamente la información se enviaba a través de sonidos que viajaban en el aire, tales como los sonidos emitidos por tambores, gritos, etc. Con el avance de la tecnología los medios de comunicación han sufrido grandes cambios, pues ahora la comunicación se realiza por medio de señales eléctricas u ópticas que viajan por cables, fibras ópticas o el medio ambiente.

En este curso se consideran solamente señales eléctricas, por lo general señales de voltaje o corriente que bajo cierto comportamiento se pueden describir, algunas veces, por una relación matemática explícita. Además tienen la característica de que son funciones univaluadas del tiempo.

Entre los muchos campos en donde hay una importante aplicación del análisis de señales se pueden citar los siguientes:

Seguridad

- Control no-invasivo de estructuras (nuclear)
- Pruebas de control de calidad

Sismología

- Análisis de señales sísmicas (potencia del sismo, forma, origen, etcétera).

Geofísica

- Investigación de zonas petroleras

Ingeniería biomédica

- Análisis de señales cardíacas, fetales, etcétera
- Procesamiento digital de imágenes

Telecomunicaciones

- Codificación
- Transmisión
- Análisis

Comunicación hombre-máquina

- Síntesis de voz, reconocimiento de voz

Público en general

- Computadoras o sistemas que hablan (carros, juegos, etcétera)
- Aprendizaje de lenguas extranjeras asistido por computadora
- TV digital
- Internet (codificación-decodificación de información)

Militar

- Radar
- Pilotaje automático (misiles, aviones)

CLASIFICACIÓN DE SEÑALES

Existen diferentes clasificaciones de señales, entre las que destacan las siguientes categorías:

- Señales de energía
- Señales de potencia
- Señales continuas o analógicas
- Señales digitales
- Señales periódicas
- Señales no periódicas
- Señales determinísticas
- Señales aleatorias

A continuación se exponen las características de cada categoría, así como ejemplos de ellas.

Señales de energía

Una señal de energía es una señal en forma de pulso que normalmente existe sólo durante un intervalo finito de tiempo. Si está presente en un lapso infinito, tiene, al menos, la mayor parte de la energía concentrada en un intervalo finito de tiempo.

Ejemplo de señales de energía:

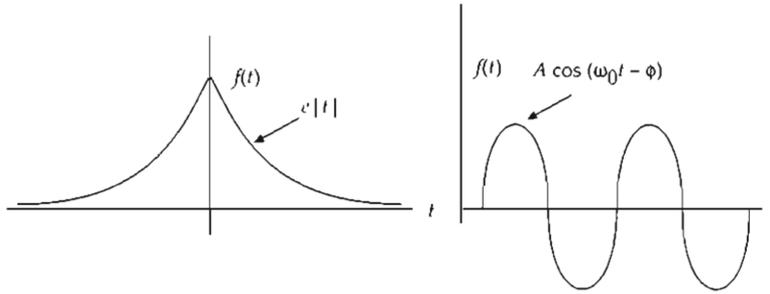


FIGURA II.1. Señales de energía

La energía de una señal se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (\text{II.1})$$

Si esta integral es finita, entonces $f(t)$ es una señal de energía.

Señales de potencia

A las señales en las que la ecuación (II.1) es infinita se les conoce como señales de potencia porque en este caso sólo se puede calcular su potencia.

Si se tiene una señal $f(t)$, su potencia media en el intervalo (t_1, t_2) está dada por la expresión:

$$\bar{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \quad (\text{II.2})$$

En el siguiente ejemplo veremos cómo realizar el cálculo de la potencia de una señal en la que la integral (II.1) es infinita.

Ejemplo: Calcule la potencia de la señal $v(t) = A \cos(\omega t)$

con A y ω constantes

Primero calculamos la potencia instantánea, que es:

$$P(t) = \frac{|V(t)|^2}{R} = \frac{|A \cos(\omega t)|^2}{R} = \left\{ \frac{A^2}{R} [\cos^2(\omega t)] \right\} = \frac{A^2}{R} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right]$$

entonces la potencia promedio en un periodo T es:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{A^2}{2R} + \frac{A^2 \cos(2\omega t)}{2R} \right) dt = \frac{A^2}{2RT} \left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right] = \frac{A^2}{2RT} \left[t + \frac{1}{2\omega} \text{sen}(2\omega t) \right]_0^T$$

$$\bar{P} = \frac{A^2}{2R} [\text{watts}]$$

En la figura II.2 se muestra un ejemplo de señal de potencia.

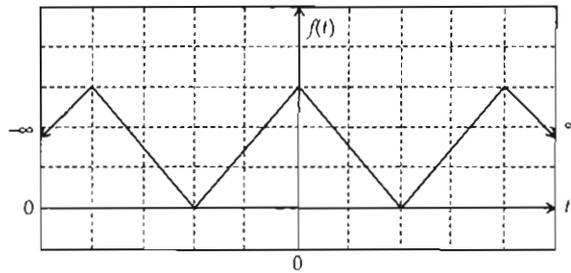


FIGURA II.2. Señal de potencia

Señales continuas o analógicas

Son las que están definidas para todos los valores de tiempo; pueden tomar valores en un intervalo continuo (a, b) .

Estas señales se pueden escribir utilizando alguna función, por ejemplo:

$$x(t) = \cos(\pi t)$$

$$y(t) = e^{-|t|}$$

La gráfica de estas señales se muestra en la figura II.3.

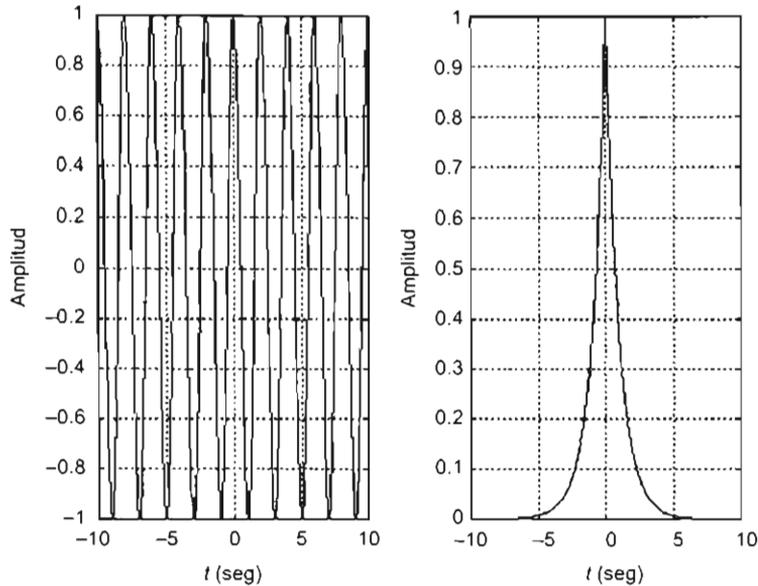


FIGURA II.3. Señales analógicas

Señales digitales (también conocidas como secuencias)

Las señales digitales o discretas sólo están definidas para ciertos valores del tiempo. Por lo común se denota la variable independiente con la letra n indicando el número de muestras. Una señal en tiempo discreto se puede representar como una secuencia de números reales o complejos.

Ejemplo:

$$x(n) = [1, 4, 2, 8, 9, 3, 0, 1]$$

$$h(n) = 5 \exp(-j2n)$$

Una gráfica característica se muestra en la figura II.4

Señales periódicas y no periódicas

Una señal periódica es aquella que se repite exactamente a sí misma en un lapso fijo. Suele escribirse como $f(t + T) = f(t)$, donde T es el periodo de la señal. Una señal periódica es una señal de potencia si su energía por ciclo es finita, y entonces la potencia media sólo necesita calcularse en un ciclo completo (figura II.5).

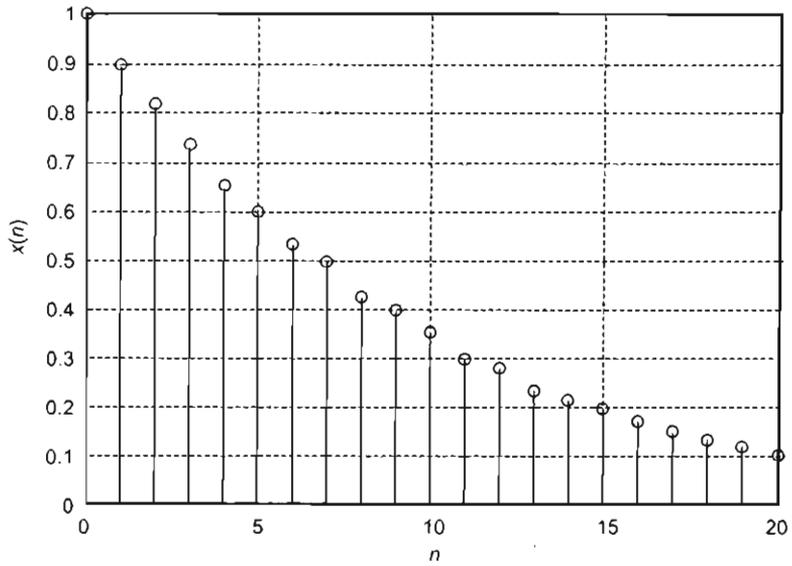


FIGURA II.4. Señal discreta del tipo exponencial negativo

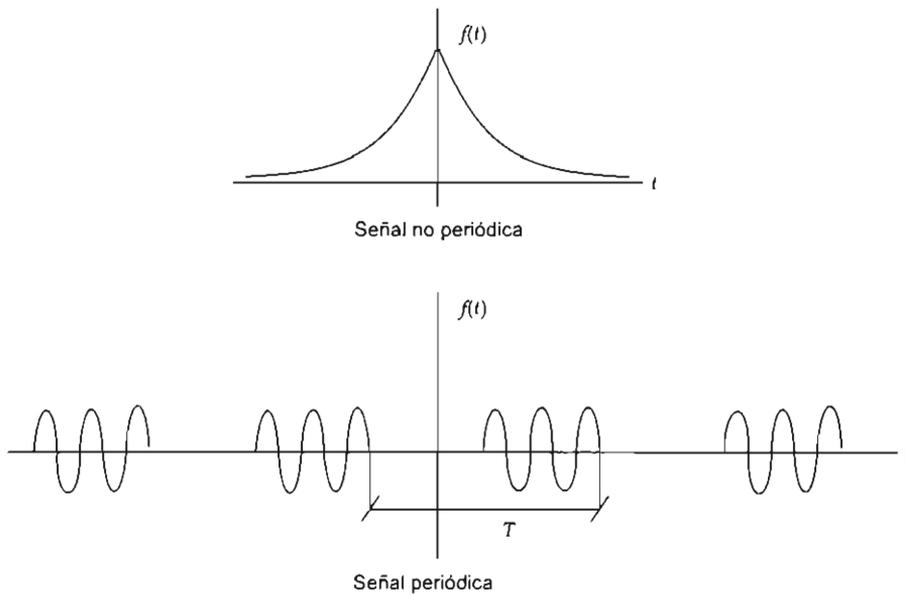


FIGURA II.5. Señales periódicas y no periódicas

Señales determinísticas

Una señal determinística es aquella para la cual podemos conocer todos sus valores para cualquier valor del tiempo o el espacio; se puede representar con una expresión matemática.

Un ejemplo de este tipo de señales se ofrece en la figura II.6, donde se muestra la gráfica $f(t) = 2 \text{ sen}(40t)e^{-t} u(t)$.

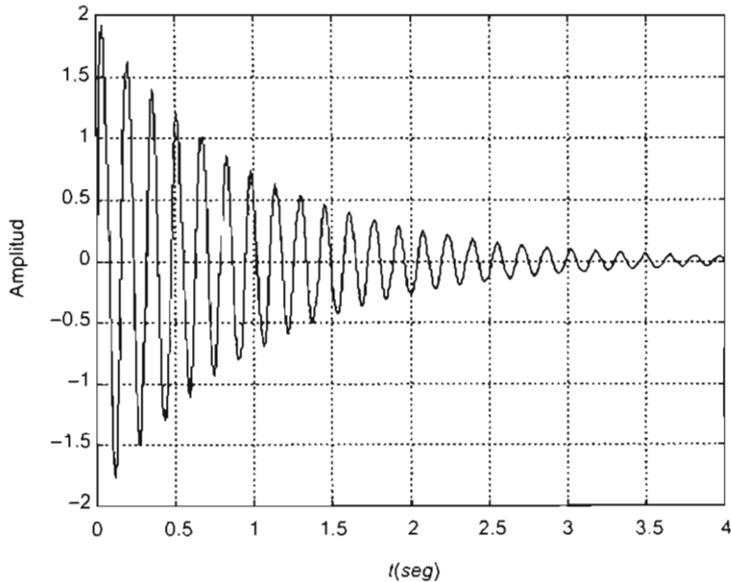


FIGURA II.6. Señal determinística

Señales aleatorias

Una señal aleatoria es aquella en la que hay algún grado de incertidumbre en sus valores. Se puede representar con una expresión matemática como $f(t) = A \text{ sen}(\omega_0 t + \phi)$, sólo que ahora los parámetros como la amplitud A , la frecuencia ω y la fase ϕ tienen asociada una función de densidad probabilística. Un ejemplo de señal de amplitud aleatoria se muestra en la figura II.7.

ORTOGONALIDAD Y SERIES DE FOURIER

Para el análisis de señales es útil poder representar una señal en términos de funciones base, tales como las funciones trigonométricas, las funciones

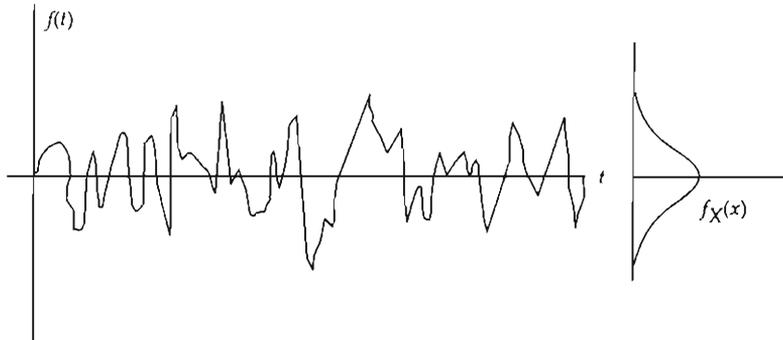


FIGURA II.7. Señal aleatoria y su función de densidad de probabilidad asociada

exponenciales, entre otras. Para poder representar una función como una combinación lineal de otras funciones base, éstas deben cumplir con la condición de ortogonalidad, la cual se explica a continuación.

Si se tiene un conjunto de funciones $\phi_k(t)$ que cumplen con la siguiente condición:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t) \phi_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^*(t) \phi_2(t) dt = 0$$

donde $\phi_1^*(t)$ y $\phi_2^*(t)$ representan el complejo conjugado de $\phi_1(t)$ y de $\phi_2(t)$ respectivamente.

En general, si tenemos $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$, dos funciones con valor complejo de un conjunto de funciones complejas $\phi_k(t)$, entonces las funciones $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ serán mutuamente ortogonales si cumplen con lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ k_n & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

El conjunto de funciones $\phi_n(t)$ está normalizado si

$$k_n = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2 dt = 1$$

Si el conjunto de funciones es a la vez ortogonal y normalizado, se le llama "conjunto ortonormal".

Para comprender mejor el concepto de ortogonalidad, se puede hacer una analogía utilizando vectores. Si $\phi_n(t)$ y $\phi_m(t)$ son vectores, entonces si $n = m$ los vectores $\phi_n(t)$ y $\phi_m(t)$ son colineales y por lo tanto su producto

punto es diferente de cero; por el contrario, si $m \neq n$, los vectores son ortogonales y su producto punto es cero.

Se pueden hacer representaciones de funciones utilizando conjuntos de funciones ortogonales tales como:

- Funciones seno y coseno
- Polinomios de Legendre
- Funciones exponenciales
- Funciones de Bessel
- Funciones de Walsh
- Funciones Wavelets
- Etcétera.

En este curso se utilizarán únicamente los conjuntos de funciones senoidales y exponenciales para representar señales. Iniciaremos con las funciones trigonométricas; primero se probará si las funciones seno y coseno cumplen con la condición de ortogonalidad. Si las funciones seno y coseno forman un conjunto de funciones ortogonales, entonces se debe cumplir lo siguiente:

$$\int_0^T \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.4})$$

con $\omega_0 = 2\pi/T$

La demostración de esta expresión se hace a continuación. Si tenemos la identidad trigonométrica $\text{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)]$ y la sustituimos en la expresión II.4 para hacer la integral, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_0^T \frac{1}{2} [\text{sen}[(m+n)\omega_0 t] + \text{sen}[(m-n)\omega_0 t]] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(m+n)\omega_0 t}{(m+n)\omega_0} - \frac{\cos(m-n)\omega_0 t}{(m-n)\omega_0} \right]_0^T \end{aligned}$$

evaluando los límites y sustituyendo $\omega_0 = 2\pi/T$

$$= -\frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{m+n} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{m-n} - \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} \right] = 0, \text{ si } n, m = 0, 1, 2, \dots$$

lo cual demuestra que el conjunto de funciones $\text{sen}(m\omega_0 t)$ y $\text{cos}(n\omega_0 t)$ forman un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[0, T]$.

Es posible demostrar también los siguientes resultados, que, como veremos más adelante, son útiles para el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier:

$$\int_0^T \text{cos}(m\omega_0 t) \text{cos}(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$\int_0^T \text{sen}(m\omega_0 t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Las demostraciones de las expresiones II.5 y II.6 se dejan como ejercicio para el lector.

Las relaciones anteriores muestran que las funciones: $\{1, \text{cos}(\omega_0 t), \text{cos}(2\omega_0 t), \text{cos}(3\omega_0 t), \dots, \text{sen}(\omega_0 t), \text{sen}(2\omega_0 t), \text{sen}(3\omega_0 t), \dots\}$ forman un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $0 < t < T$ y por lo tanto se pueden utilizar para representar funciones en términos de éstas.

SERIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA

Estas series fueron utilizadas inicialmente por Joseph Fourier para la solución de problemas relacionados con la transferencia de calor.

Según el teorema de Fourier, una función $f(t)$ se puede representar como una combinación lineal de funciones ortogonales, en particular como una combinación lineal de funciones seno y coseno, de la siguiente manera:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{cos}(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{II.7})$$

donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, los cuales se obtienen a partir de $f(t)$; ω_0 es la frecuencia fundamental y $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ se conocen como los componentes armónicos de la señal.

Obtención de los coeficientes a_0 , a_n y b_n

La relación entre la señal $f(t)$ y las funciones trigonométricas está en la relación entre el periodo de la señal T y la frecuencia ω_0 ; esta relación es $\omega_0 = 2\pi/T$, además de los coeficientes, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y b_1, b_2, \dots, b_n , los cuales nos dicen cuánto de los componentes armónicos se le debe agregar a la serie para representar adecuadamente una función.

A continuación se aplica la propiedad de ortogonalidad para su obtención.

Obtención del coeficiente a_0

Si se integra la ecuación (II.7) en el intervalo $[0, T]$ se tiene

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)\} \right] dt$$

Distribuyendo la integral e intercambiando el orden de la sumatoria e integral se tiene

$$= \int_0^T a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T a_n \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T b_n \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Las integrales de las funciones trigonométricas $\text{sen}(n\omega_0 t)$ y $\cos(n\omega_0 t)$ tienen las siguientes características:

$$\int_0^T \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^T \text{sen}(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Aplicando lo anterior, se tiene:

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 \int_0^T dt = a_0 T$$

despejando a_0 se obtiene:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \tag{II.8}$$

A este coeficiente se le conoce como valor promedio o componente de DC de la señal.

Obtención del coeficiente a_n

Multiplicando ahora ambos lados de la ecuación (II.7) por $\cos(m\omega_0 t)$ e integrando en el intervalo $[0, T]$, se tiene:

$$\int_0^T f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_0^T a_0 \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \int_0^T b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \right]$$

aplicando las propiedades de ortogonalidad (II.4) y la expresión (II.5), la parte inferior de la expresión anterior se reduce a:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases} \quad \text{condición de ortogonalidad}$$

$$\int_0^T f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = a_m \frac{T}{2} \quad \text{sustituyendo } m \text{ por } n \text{ y despejando a } a_n, \text{ se obtiene:}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{II.9})$$

Obtención del coeficiente b_n

Multiplicando ahora la ecuación (II.7) por $\sin(m\omega_0 t)$ e integrando en el intervalo $[0, T]$, se tiene:

$$\int_0^T f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^T a_0 \sin(m\omega_0 t) dt +$$

$$\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t)] dt$$

Aplicando la condición de ortogonalidad (II.4) y la expresión (II.6), la expresión anterior se reduce a:

$$\int_0^T f(t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t) dt = b_m \frac{T}{2}$$

Reemplazando m por n y despejando b_n , se tiene:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (\text{II.10})$$

A la gráfica de los coeficientes de Fourier a_n y b_n se le conoce como espectro de líneas y nos indica en qué valores de la frecuencia se acumula la mayor parte de la energía de la señal.

Condiciones de Dirichlet

Una función $f(t)$ puede ser representada como una combinación lineal de funciones ortogonales, en particular en términos de funciones trigonométricas, si cumple con las siguientes condiciones:

- La función $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
- La función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
- La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un periodo es finita, es decir

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty \quad (\text{II.11})$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de representaciones de funciones en series de Fourier trigonométricas.

Ejemplo: Encuentre la representación en serie trigonométrica de Fourier de la función que se muestra en la figura (II.8); grafique el espectro de línea. La amplitud es V y el periodo es T .

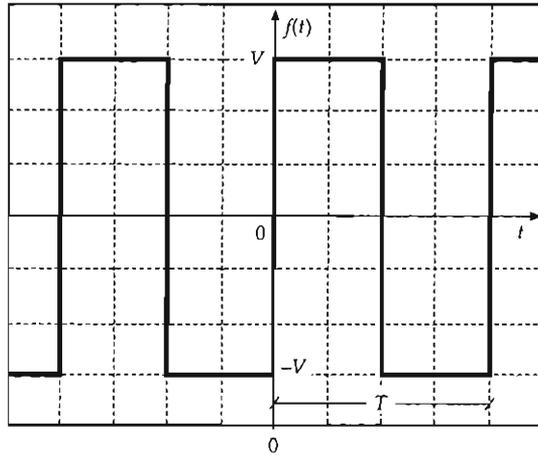


FIGURA II.8. Señal cuadrada

Primero definimos analíticamente la función $f(t)$ en un periodo:

$$f(t) = \begin{cases} -V & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ V & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Cálculo de a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-V) dt + \int_0^{T/2} V dt \right] = 0$$

$$a_0 = 0$$

Este resultado es lógico ya que la componente de DC de la señal vale cero.

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -V \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} V \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\frac{-V \operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_{-T/2}^0 + \frac{V \operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\frac{-V \operatorname{sen}(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0} + \frac{V \operatorname{sen}(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0} \right] = \frac{2}{T} [0]$$

$$a_n = 0$$

Como se desprende de la gráfica, para los componentes de la señal este resultado es el esperado, pues si se incluyera este coeficiente la gráfica de los componentes cosenoidales introduciría un error muy grande en la aproximación de la señal.

Cálculo de b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -V \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} V \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[\frac{V \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_{-T/2}^0 - \frac{V \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$= \frac{2}{n\omega_0 T} \left[V - V \cos\left(n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) - V \cos\left(n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) + V \right]$$

$$= \frac{2V}{n2\pi} [2 - 2 \cos(n\pi)] = \frac{2V}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

como $\cos(n\pi) = (-1)^n$, entonces:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ 4V/n\pi & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Finalmente, la representación de la señal $f(t)$ en serie de Fourier trigonométrica es:

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}[(2n-1)\omega_0 t] = \frac{4V}{\pi} \left[\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

Las gráficas de los primeros cuatro componentes de la onda cuadrada se muestran en la figura II.9 cuando $V = 1$ y $T = 2$ seg:

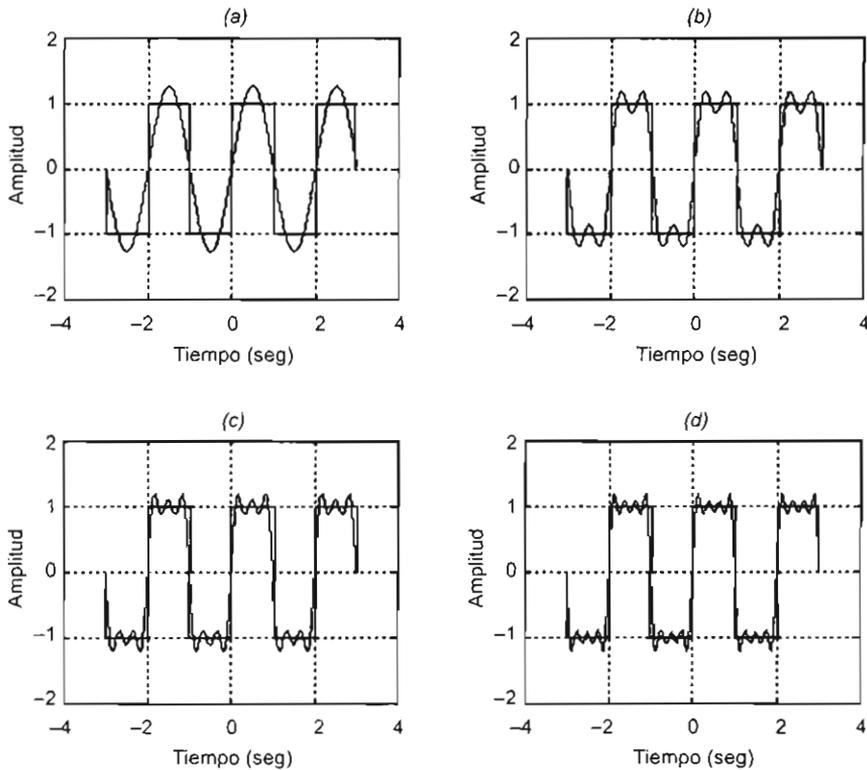


FIGURA II.9. Aproximación a una onda cuadrada utilizando series de Fourier, con: a) $n = 1$, b) $n = 3$, c) $n = 5$ y d) $n = 7$

De la figura (II.9) observamos que al ir adicionando más y más componentes a la serie, la gráfica de la suma de dichos componentes se va aproximando a la señal cuadrada. Sin embargo, notamos que en las esquinas de la señal cuadrada siempre habrá pequeñas oscilaciones conocidas como fenómeno de Gibbs.

La gráfica del espectro de líneas para esta señal es la siguiente:
Los valores de b_n , cuando $V = 1$ son:

Ortogonalidad y series de Fourier

$$b_1 = 4V/\pi = 1.27$$

$$b_3 = 4V/3\pi = 0.4$$

$$b_5 = 4V/5\pi = 0.25$$

$$b_7 = 4V/7\pi = 0.18$$

$$b_9 = 4V/9\pi = 0.11$$

La gráfica del espectro de líneas se muestra a continuación:

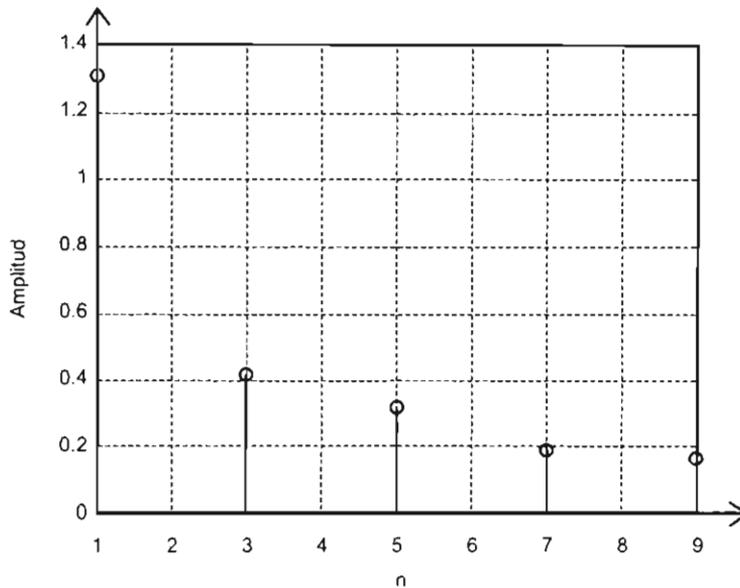


FIGURA II.10. Gráfica del espectro de líneas

En el espectro de líneas la disminución rápida de la magnitud de los coeficientes indica una convergencia rápida de la serie a la función $f(t)$.

Ejemplo: Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de la señal que se muestra en la figura (II.11); grafique su espectro de líneas suponiendo una frecuencia de 1 kHz.

Definimos analíticamente la función en un periodo T ,

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)$$

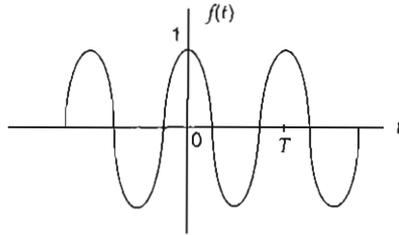


FIGURA II.11. Función coseno

Cálculo de a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{\text{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{Tn\omega_0} \left[\text{sen} \left[(n) \left(\frac{2\pi}{T} \right) \left(\frac{T}{2} \right) \right] + \text{sen} \left[(n) \left(\frac{2\pi}{T} \right) \left(\frac{T}{2} \right) \right] \right] = 0$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ T/2 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

por la condición de ortogonalidad, el único coeficiente diferente de cero se obtiene cuando $n = 1$; entonces

$$a_1 = \left(\frac{2}{T} \right) \left(\frac{T}{2} \right) = 1$$

y todos los demás a_n son iguales a cero.

Cálculo de b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots$$

Entonces la serie de Fourier sólo tiene un componente:

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)$$

El espectro de líneas se muestra en la figura II.12. La gráfica nos indica que toda la energía de la señal está concentrada en la frecuencia $f = 1$ kHz.

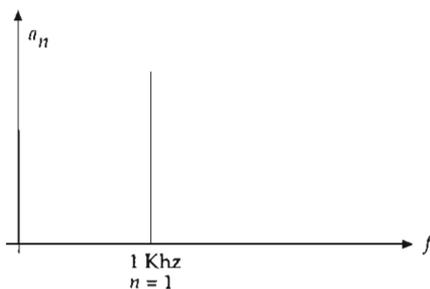


FIGURA II.12. Espectro de línea

FUNCIONES PARES E IMPARES

Para simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier se puede aprovechar la simetría de las funciones; esto se muestra a continuación.

Se dice que una función $f(t)$ es par si $f(-t) = f(t)$; entonces es fácil probar

$$\text{que } \int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

Si una función es impar entonces $f(-t) = -f(t)$, y en consecuencia

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

Aplicando lo anterior al cálculo de a_0 , a_n y b_n , si $f(t)$ es par, entonces:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)dt$$

para a_n se tiene:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{II.12})$$

y $b_n = 0$

Si por el contrario $f(t)$ es impar, entonces $a_n = a_0 = 0$, y entonces

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (\text{II.13})$$

En resumen: Si $f(t)$ es par, entonces tenemos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

con $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$ y $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$

Si $f(t)$ es impar, entonces

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$$

con $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$

Ejemplo: Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de la función que se muestra en la figura II.13.

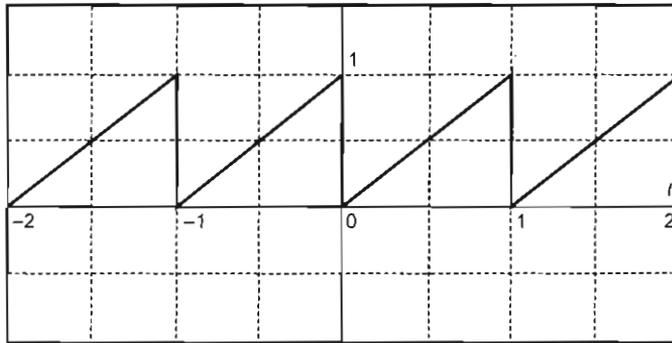


FIGURA II.13. Señal diente de sierra

Solución: Definimos la función en un periodo: $f(t) = t$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1$

Por otro lado, se aprecia que el periodo T es de valor uno; la frecuencia fundamental ω_0 es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Si a la señal anterior se le resta el valor medio, entonces $f(t)$ es una función impar, y por lo tanto $a_n = 0$ entonces sólo se tiene que calcular b_n , para hacer la representación en serie de Fourier trigonométrica. Para ello vamos a calcular el valor de los coeficientes.

Para a_0 se tiene

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T t dt = \left(\frac{1}{T} \right) \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^T = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

y para b_n ,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^1 t \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Integrando por partes se tiene

$$b_n = \frac{2}{T} \left[-t \frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} dt \right]$$

y evaluando los límites

$$b_n = \frac{2}{2\pi n} \left[-\cos(n2\pi) + \frac{\operatorname{sen}(n2\pi)}{n} \right] = \frac{-1}{\pi n}$$

La representación de $f(t)$ en serie de Fourier está dada por la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{\pi n}$$

Obtención de la serie de Fourier trigonométrica por diferenciación

Del cálculo sabemos que al derivar una función, el orden de ésta va disminuyendo; esto puede aprovecharse para simplificar los cálculos de los coeficientes de Fourier, y se muestra a continuación:

De la serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)]$$

Si se deriva respecto del tiempo en ambos lados, se tiene:

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum [-n\omega_0 a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + n\omega_0 b_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (\text{II.14})$$

puesto que $f(t)$ es periódica de periodo T , $df(t)/dt$ también debe ser periódica. Por tanto, proponemos la siguiente ecuación:

$$f'(t) = a'_0 + \sum a'_n \cos(n\omega_0 t) + b'_n \text{sen}(n\omega_0 t) \quad (\text{II.15})$$

Al comparar la ecuación (II.14) con la ecuación (II.15) se tiene

$$a'_0 = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} a'_n &= n\omega_0 b_n \\ b'_n &= -n\omega_0 a_n \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

a'_n y b'_n se deben calcular ahora como:

$$a'_n = \frac{2}{T} \int_0^T f'(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b'_n = \frac{2}{T} \int_0^T f'(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Para ilustrar este concepto se obtendrá nuevamente la representación en serie de Fourier de la señal diente de sierra.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cálculo de a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T t dt = \frac{1}{T} \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^T = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

Al derivar la señal se obtiene la que se muestra a continuación:

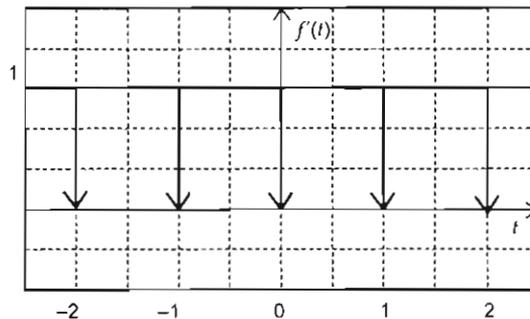


FIGURA II.14. Derivada de la señal diente de sierra

Cálculo de a'_n

$$a'_n = \frac{2}{T} \int_0^T f'(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 - \delta(t)] \cos(n\omega_0 t) dt$$

La función $\delta(t)$ tiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t) \Big|_{t=t_0} = f(t_0)$$

Al aplicar esta propiedad, la expresión para a'_n es:

$$\begin{aligned} &= 2 \left[\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt - \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= -2 \cos(n2\pi t) \Big|_{t=0} = -2 \end{aligned}$$

de la ecuación II.16 se tiene:

$$n\omega_0 b_n = -2; \text{ entonces } b_n = -\frac{2}{2\pi n} = -\frac{1}{n\pi}$$

Cálculo de b'_n

$$\begin{aligned} b'_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = 2 \int_{-T/2}^{T/2} [1 - \delta(t)] \text{sen}(n\omega_0 t) dt \\ &= 2 \left[\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) dt - \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= 2 \text{sen}(2n\pi t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -n\omega_0 a_n = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$a_n = 0$$

La representación en serie de Fourier trigonométrica de la señal diente de sierra queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \text{sen}(n2\pi t)$$

que es idéntica a la obtenida, sólo que con menor dificultad.

En el caso en el que no se obtienen funciones delta en la primera derivación, es posible obtener los coeficientes de Fourier derivando varias veces la señal hasta simplificar el cálculo de dichos coeficientes. A continuación se muestra un ejemplo de esto.

Ejemplo: Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de la señal triangular que se muestra en la figura (II.15).

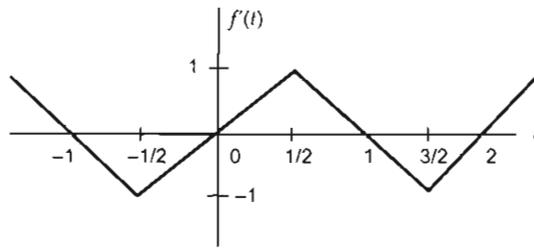


FIGURA II.15. Señal triangular

Derivando la función se tiene la señal que se muestra en la figura II.16.

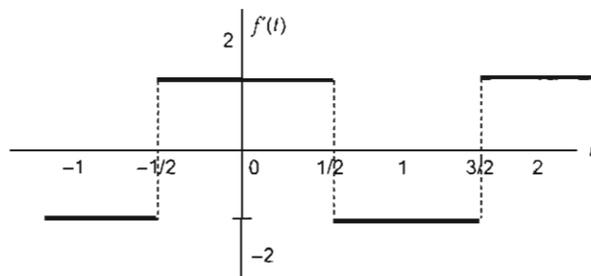


FIGURA II.16. Señal triangular derivada

Al derivar una vez más la función se obtiene el tren de impulsos que se muestra en la figura II.17

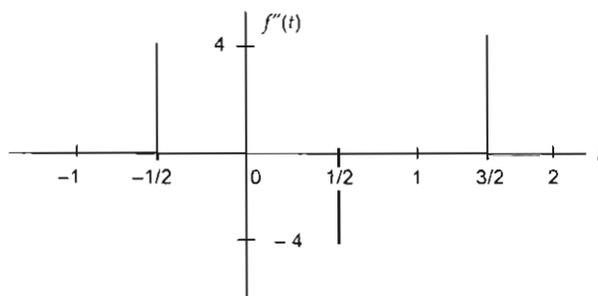


FIGURA II.17. Segunda derivada de una señal triangular

Al derivar dos veces la expresión II.14 se tiene:

$$f''(t) = \sum -(n\omega_0)^2 a_n \cos(n\omega_0 t) - (n\omega_0)^2 b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad (\text{II.18})$$

Ahora proponemos la serie de Fourier para una señal $f(t)$ derivada dos veces

$$f''(t) = a_0'' + \sum a_n'' \cos(n\omega_0 t) + b_n'' \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad (\text{II.19})$$

Al comparar las ecuaciones (II.18) y (II.19) se tiene

$$a_0'' = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$a_n'' = -a_n (n\omega_0)^2$$

$$b_n'' = -b_n (n\omega_0)^2 \quad (\text{II.21})$$

Si volvemos a la solución del ejemplo, observamos que el valor medio es cero, así que $a_0 = 0$, y como $f(t)$ es una función impar, entonces $a_n = 0$

Para b_n'' se tiene:

$$b_n'' = \frac{4}{2} \int_0^1 -4\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = -8 \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_{t=1/2} = -8 \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

de la expresión (II.21) se obtiene:

$$b_n = \frac{-b_n''}{(n\omega_0)^2} = \frac{8 \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2}$$

entonces la serie trigonométrica de Fourier de la señal triangular es:

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left((2n-1) \frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}[(2n-1)\pi t]$$

Los componentes armónicos de la señal triangular se muestran en la figura II.18.

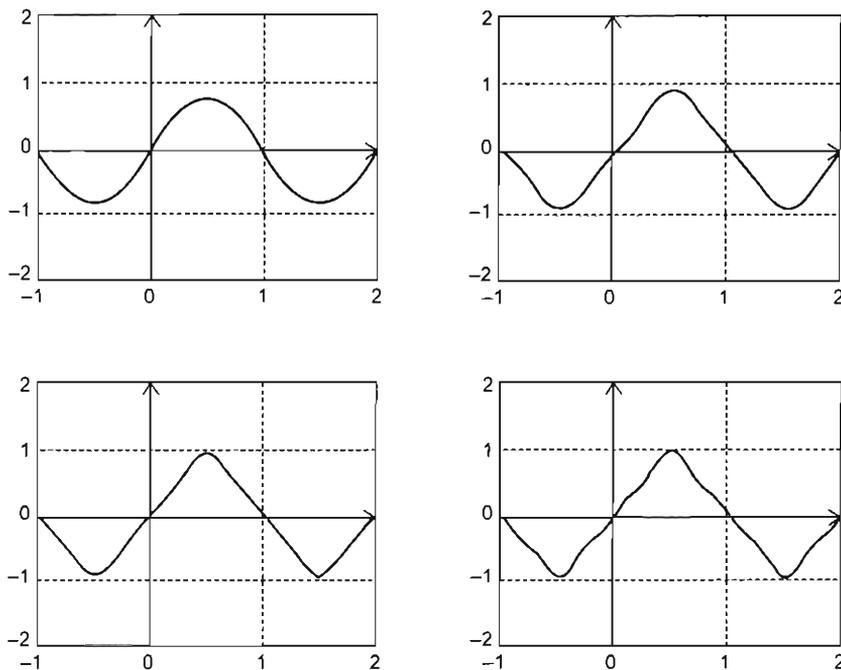


FIGURA II.18. Primeros cuatro componentes armónicos de una señal triangular utilizando serie de Fourier trigonométrica

SERIE DE FOURIER EXPONENCIAL

Además de las funciones trigonométricas, otro conjunto de funciones que también cumple con la condición de ortogonalidad es el de las funciones exponenciales complejas. Esto significa que también es posible escribir una función $f(t)$ como una combinación lineal de funciones exponenciales, es decir, $f(t)$ se puede escribir como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{II.22})$$

donde F_n , al igual que para la serie de Fourier trigonométrica, depende de la señal en cuestión.

Comprobaremos inicialmente si el conjunto de funciones $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ forman un conjunto ortogonal.

Aplicando la condición de ortogonalidad tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} \left[e^{j(n-m)\omega_0 t_2} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \right], \quad \text{con } n \neq m, \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left[e^{j(n-m)\omega_0(t_2-t_1)} - 1 \right] \end{aligned}$$

Únicamente en el caso trivial en que $t_2 = t_1$ el término entre corchetes es cero, en otro caso el resultado es $t_2 - t_1$; en resumen:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{para } n = m \\ 0 & \text{para } n \neq m \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto de funciones $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ forman un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[t_2, t_1]$.

Análogamente a la serie de Fourier trigonométrica, para poder expresar una función en términos de funciones exponenciales debemos encontrar el valor del coeficiente F_n .

Si multiplicamos la expresión (II.22) por $e^{-jm\omega_0 t}$ e integramos en el intervalo $[t_1, t_2]$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

por la propiedad de las funciones ortogonales, tenemos

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n (t_2 - t_1)$$

Haciendo $n = m$ el coeficiente F_n lo podemos escribir como:

$$F_n = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Es posible establecer una relación entre la serie de Fourier trigonométrica y la serie de Fourier exponencial compleja. Partiendo de la serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

Las funciones seno y coseno se pueden escribir en términos de funciones exponenciales como:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

Si sustituimos éstas en la expresión para la serie de Fourier trigonométrica $f(t)$ se tiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \right]$$

Agrupando y factorizando en términos de exponenciales positivos y negativos

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

haciendo $F_0 = a_0$, $F_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j}$ y $F_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j}$ se tiene

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

arreglando términos y reemplazando en el tercer término n por $-n$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

finalmente se llega a la expresión (II.22)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

En términos de los coeficientes a_n y b_n el espectro de Fourier tiene la siguiente forma:

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)} \quad (\text{II.23})$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie trigonométrica. El ángulo de fase está dado por la expresión:

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (\text{II.24})$$

Ejemplo: Encuentre la representación en serie de Fourier exponencial compleja de la señal $f(t) = e^t$, en el intervalo $[0, 2\pi]$ con $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Cálculo del coeficiente de Fourier F_n , como $T = 2\pi$ entonces $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} e^t e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{e^{(1-jn\omega_0)t}}{2\pi(1-jn\omega_0)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{(1-jn)2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)}$$

como:

$$e^{-jn2\pi} = \cos(2n\pi) - j \sin(2n\pi) = 1$$

entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)} e^{jn\omega_0 t}$$

Para obtener el espectro de líneas se escribe el número complejo F_n en forma rectangular. Haciendo $A = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$, se tiene

$$F_n = \frac{A}{1-jn} \cdot \frac{1+jn}{1+jn} = \frac{A+jAn}{1+n^2} = \frac{A}{1+n^2} + j \frac{An}{1+n^2}$$

entonces la magnitud del coeficiente F_n es:

$$|F_n| = \sqrt{\left[\left(\frac{A}{1+n^2} \right)^2 + \left(\frac{An}{1+n^2} \right)^2 \right]}$$

Su gráfica se muestra en la figura II.19.

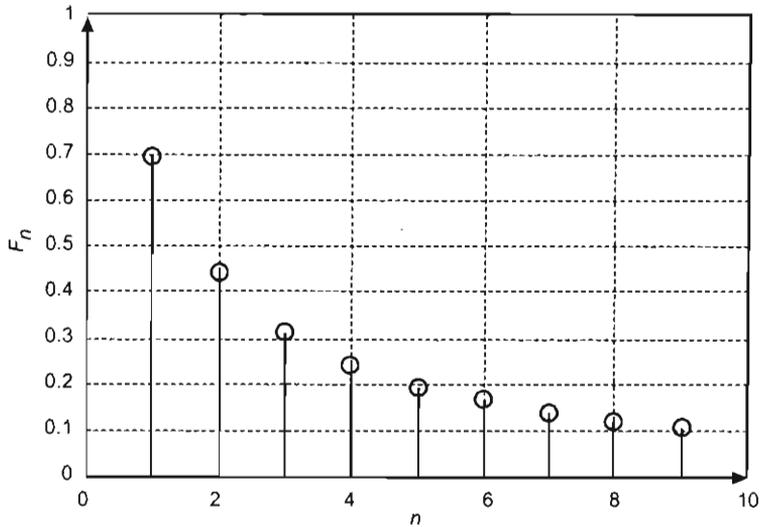


FIGURA II.19. Espectro de líneas

Interpretación del coeficiente F_n respecto al periodo T y la duración del pulso τ

Para observar el efecto que tiene sobre la gráfica del espectro de una señal un cambio en su periodo o en la duración del pulso se obtendrá el espectro de una señal definida en un periodo como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t \leq -\tau/2 \\ A & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \tau/2 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

La gráfica de $f(t)$ se muestra en la figura II.20.

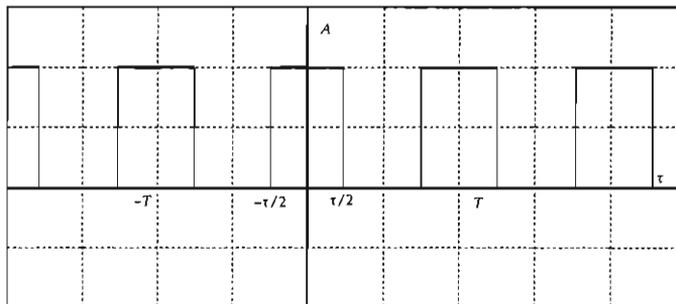


FIGURA II.20. Tren de pulsos cuadrados de duración τ y periodo T

Cálculo de F_n

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt = -\frac{A}{Tjn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{-A}{Tjn\omega_0} \left[e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right]$$

$$= \frac{A}{Tn\omega_0} \left[2 \operatorname{sen} \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) \right] = \frac{A\tau}{\frac{\tau}{2} T n\omega_0} \operatorname{sen} \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\tau A \operatorname{sen} \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)}{T \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)}$$

La función $\operatorname{sen} c(x)$ es una función de gran aplicación en procesamiento digital de señales y se le conoce como función de muestreo o función "sampling"; su gráfica es la que se muestra a continuación:

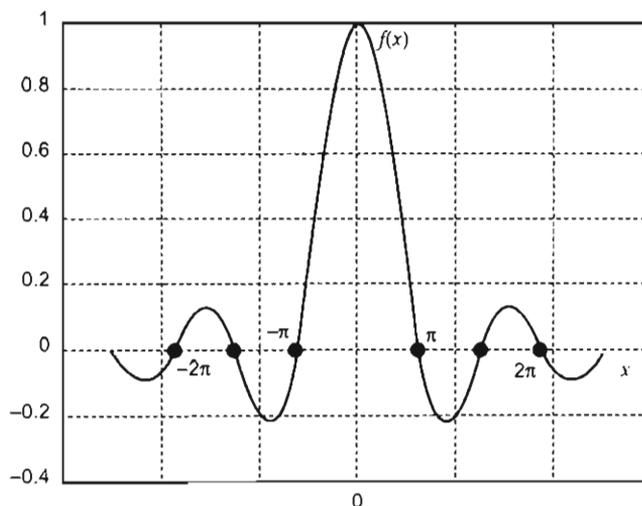


FIGURA II.21. Función de muestreo $\operatorname{sen}(x)/x$

Entonces, la representación del tren de pulsos $f(t)$ en serie de Fourier exponencial compleja es:

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} c \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) e^{jn\omega_0 t}$$

Para observar su comportamiento se graficará el coeficiente F_n para varios valores de T y τ , los valores elegidos se muestran en la siguiente tabla.

τ (seg)	T (seg)	ω_0	Amplitud
1/4	1	2π	A/4
1/4	2	π	A/8
1/4	3	$2\pi/3$	A/12

La gráfica con estos valores se muestra a continuación:

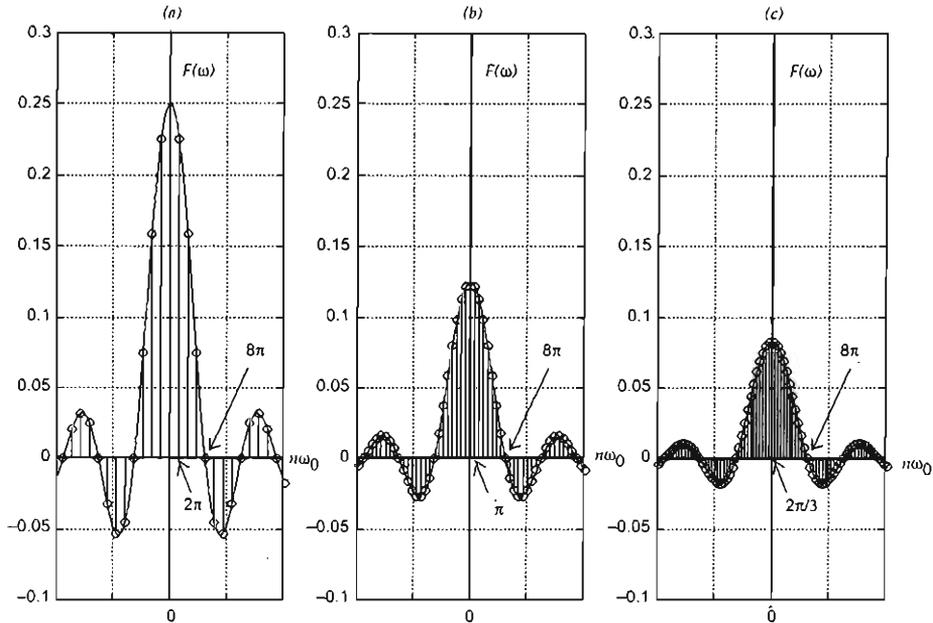


FIGURA II.22. Espectro de líneas cuando: a) $\tau = 1/4$ y $T = 1$; b) $\tau = 1/4$ y $T = 2$, y c) $\tau = 1/4$ y $T = 3$

Como se puede observar de las figuras anteriores, al incrementar el periodo, manteniendo la duración del pulso, la amplitud disminuye y aumenta la densidad de líneas. En el infinito, es decir cuando $T \rightarrow \infty$, el espectro tiende a ser continuo y el espectro representa la energía de una función no periódica en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

Si ahora fijamos T y variamos τ de acuerdo con los valores que se muestran en la siguiente tabla:

τ (seg)	T (seg)	ω_0	Amplitud
1/4	1	2π	A/4
1/8	1	2π	A/8
1/16	1	2π	A/16

La gráfica del espectro de líneas se muestra en la figura II.23.

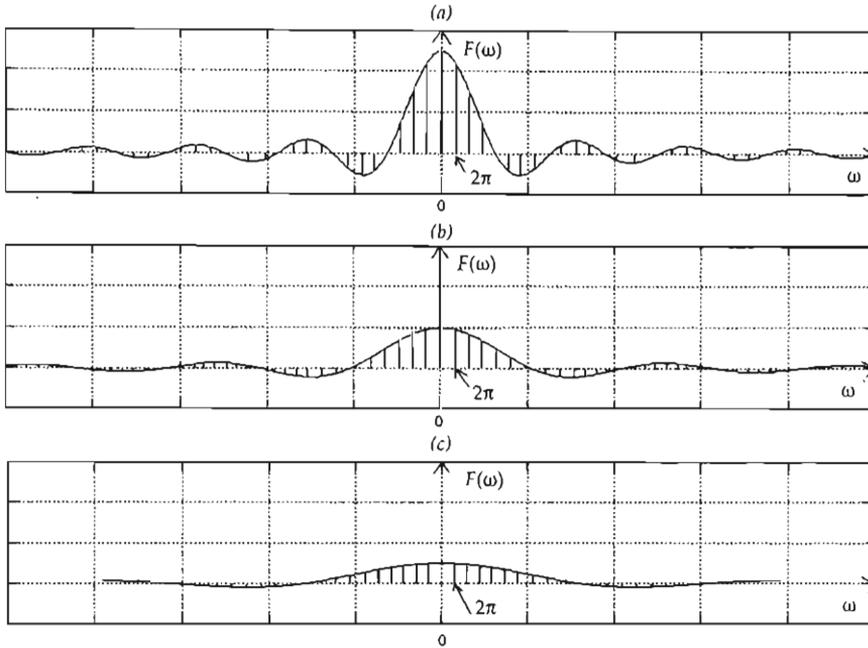


FIGURA II.23. Espectro de líneas cuando: a) $\tau = 1/4$ y $T = 1$;
b) $\tau = 1/8$ y $T = 1$, y c) $\tau = 1/16$ y $T = 1$ seg

De la figura II.23 se observa que cuando mantenemos fijo el periodo y variamos la duración del pulso, el espectro sufre también una disminución de la amplitud, y además ahora la distancia entre líneas permanece constante.

Volviendo al coeficiente de Fourier F_n se puede observar que el ángulo de fase es $\phi_n = 0$

Una pregunta interesante es: ¿qué le sucede al espectro F_n si el pulso se desplaza $\tau/2$ segundos? Esto se muestra en la figura II.24.

Calculemos nuevamente el coeficiente de la serie de Fourier exponencial F_n

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{-A}{Tjn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{\tau} = \frac{-A}{Tjn\omega_0} (e^{-jn\omega_0 \tau} - 1) \\
 &= -\frac{A}{Tnj\omega_0} \left(e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} = \frac{2A}{Tn\omega_0} e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \left[\frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{2j} \right]
 \end{aligned}$$

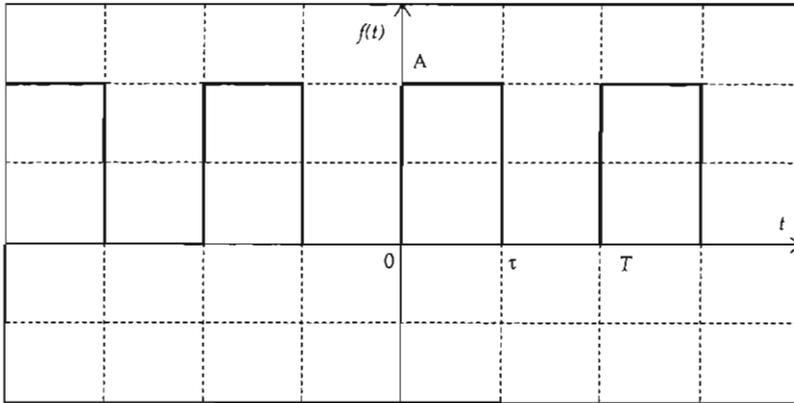


FIGURA II.24. Tren de pulsos desplazado

$$= \frac{2A}{Tn\omega_0} \text{sen}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}$$

A diferencia del calculo anterior del coeficiente F_n , ahora éste tiene una fase dada por

$$\phi_n = -n\omega_0 \frac{\tau}{2}$$

La gráfica de la fase ϕ_n se muestra en la figura II.25.

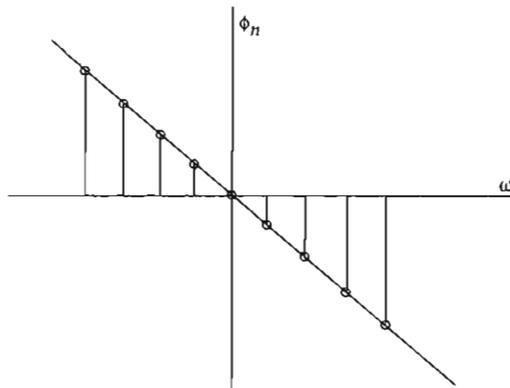


FIGURA II.25. Fase de la onda desplazada

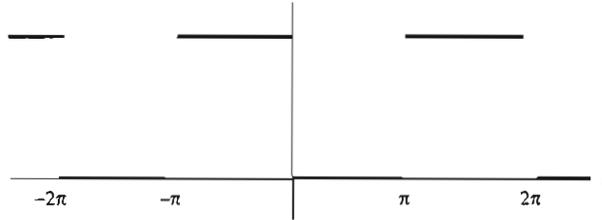
La gráfica del espectro F_n no sufre ningún cambio, salvo al variar el período o la duración del pulso, como se mostró en las figuras II.22 y II.23.

Como veremos en el capítulo siguiente, al hacer tender el periodo T al infinito se llega al concepto de la transformada de Fourier de tiempo continuo para señales no periódicas. Esta herramienta es de gran importancia en el tratamiento de señales, pues nos permite observar de manera continua el espectro de dicha señal.

◆ EJERCICIOS DEL CAPÍTULO II

- 1) Encuentre la serie de Fourier trigonométrica para la función $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{para } 0 < t < \pi \end{cases} \quad \text{si } f(t + 2\pi) = f(t)$$

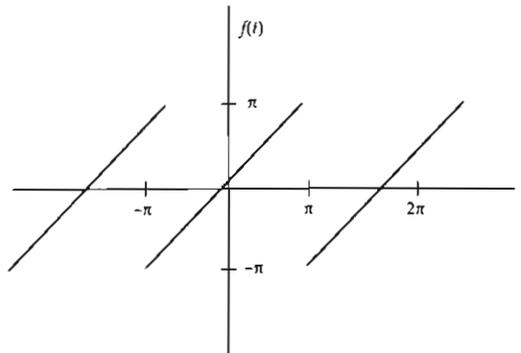


Utilizando Matlab, grafique el espectro de líneas, la función $f(t)$, así como los componentes armónicos de la señal. (Véase la función square.)

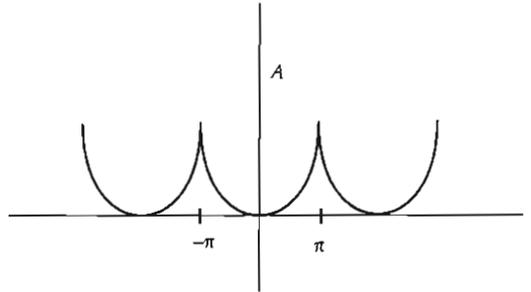
- 2) ¿Qué le ocurre a la serie si la señal se desplaza $\pi/2$?, ¿y si se genera otra señal $g(t)$ tal que $g(t) = f(t) - 1/2$?

Nuevamente grafique el espectro de líneas y comente los resultados de las gráficas.

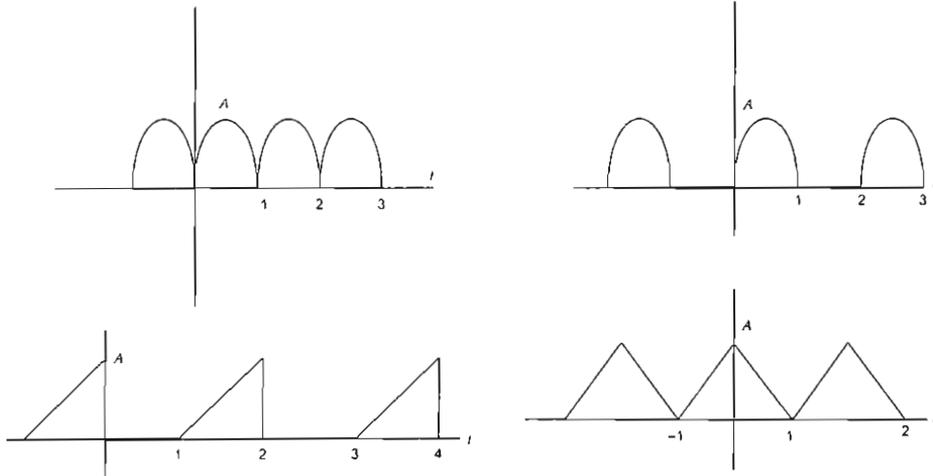
- 3) Halle la serie de Fourier trigonométrica de la función definida por $f(t) = t$, en el intervalo $(-\pi, \pi)$ con $f(t + 2\pi) = f(t)$; utilizando Matlab grafique los componentes así como el espectro de líneas (véase la función sawtooth).



- 4) Encuentre la serie de Fourier de la función $f(t)$ definida por $f(t) = t^2$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ con $f(t + 2\pi) = f(t)$



- 5) Obtenga la serie de Fourier exponencial para las formas de onda mostradas en las figuras. Convierta los coeficientes obtenidos a los de la serie trigonométrica y grafique el espectro de líneas (utilice Matlab).



- 6) La serie exponencial compleja de Fourier de una señal $f(t)$ en un intervalo $(0, T)$ está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{5n^2}{8 + (n\pi)^2} e^{jn3\pi t}$$

- ¿Cuánto vale el periodo T ?
- ¿Cuál es el valor medio de $f(t)$ en el intervalo dado?
- La componente de $f(t)$ en cierta frecuencia puede expresarse como $k\cos(3\pi t)$. Determine el valor numérico de la constante k .

Transformada de Fourier

INTRODUCCIÓN

UNA DE LAS APLICACIONES más comunes de la transformada de Fourier es que nos ayuda a conocer las frecuencias componentes de las señales presentes y, además, a distinguir las señales del ruido. Veamos un ejemplo sencillo: supongamos que tenemos dos señales senoidales, una de 50 Hz y otra de 120 Hz, inmersas en ruido; si vemos la figura III.1 de la señal en el tiempo, notaremos que es imposible distinguir las señales del ruido.

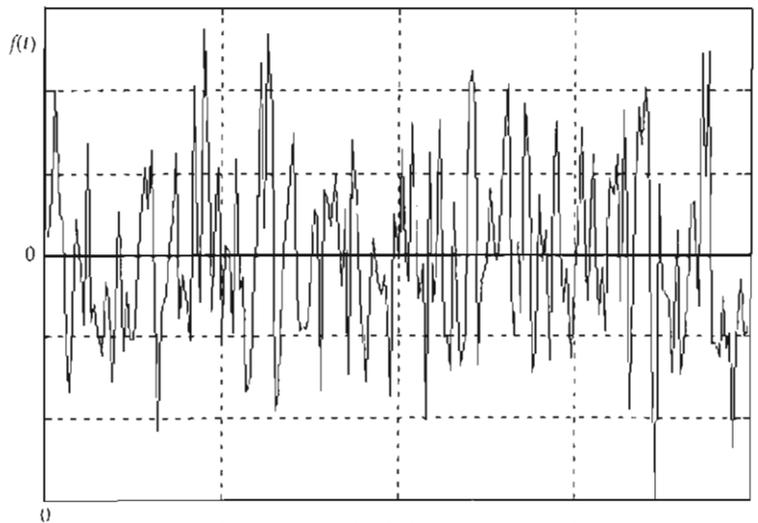


FIGURA III.1. Señal inmersa en ruido



2893588

Si obtenemos la densidad espectral de la señal utilizando la transformada de Fourier y la graficamos en función de la frecuencia, tendremos una gráfica como la que se muestra en la figura III.2.

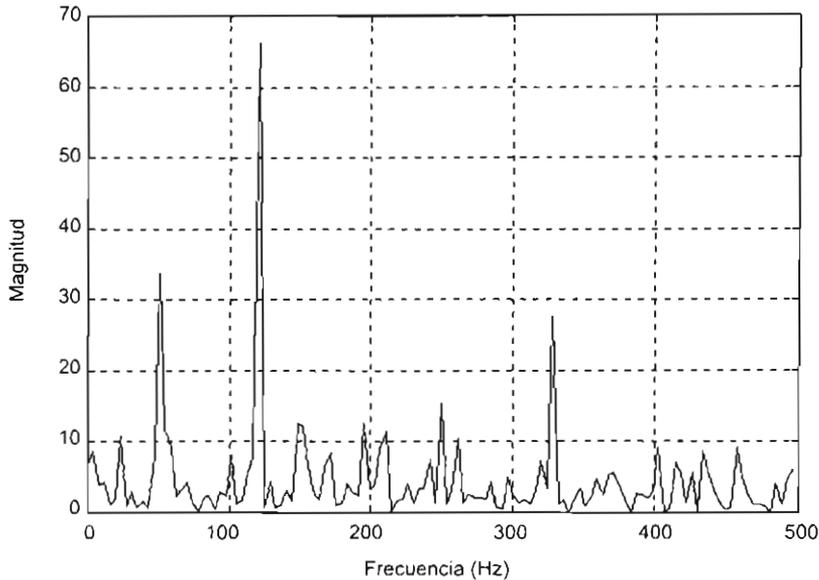


FIGURA III.2. Espectro de la señal con ruido

Como se puede observar en la figura III.2, ahora sí es posible distinguir las frecuencias de las señales componentes y el ruido; éstas se pueden identificar como los picos que se encuentran en 50 y 120 Hz, los demás picos corresponden al ruido. Podemos decir que la transformada de Fourier nos permite observar, en el espacio de frecuencias, la concentración de la energía correspondiente a cierta señal.

El instrumento gracias al cual podemos observar este tipo de parámetros es el analizador de espectros. Existen también dispositivos como los DSP que permiten obtener la transformada de Fourier de la señal en tiempo real.

Otra forma de caracterizar una señal es observar sus características en el dominio de la frecuencia. Dentro de las características que podemos detectar se encuentran el ruido inmerso en una señal y el contenido frecuencial; pero sobre todo, en sistemas de comunicación interesa poder determinar su ancho de banda. Aunque sabemos que existen diferentes definiciones aquí presentaremos sólo una.

A continuación haremos un breve análisis acerca de la obtención analítica de la transformada de Fourier de tiempo continuo (TFTC).

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO
DE UNA FUNCIÓN NO PERIÓDICA (TFTC)

Iniciaremos con la obtención de la transformada de Fourier de una función no periódica a partir de la serie de Fourier exponencial, y posteriormente extenderemos el estudio a señales periódicas.

Dada una función periódica en el tiempo $f(t)$, como se muestra en la figura III.3.

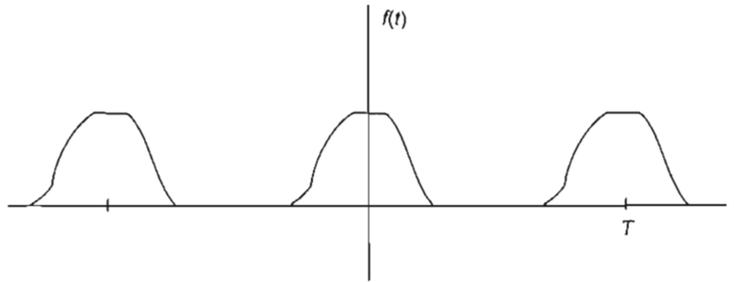


FIGURA III.3. Señal periódica

En el capítulo anterior aprendimos que podemos representar una señal $f(t)$ como una combinación lineal de funciones exponenciales; entonces, si tenemos la representación de esta señal en serie de Fourier compleja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{III.1})$$

donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{III.2})$$

Como se vio en el capítulo anterior, si hacemos que el periodo T aumente y graficamos el espectro de líneas, éste no cambia en su forma, únicamente en su amplitud. Al incrementar el periodo T , aumenta la densidad del espectro de líneas, y cuando $T \rightarrow \infty$ la gráfica de F_n se hace continua.

Si sustituimos la expresión (III.2) en (III.1), tenemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}$$

cambiando $n\omega_0$ por ω , y si $\omega = \frac{2\pi}{T}$, entonces $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Cuando $T \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow d\omega$ y la sumatoria se convierte en integral:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a las integrales

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{III.3})$$

y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{III.4})$$

Se le llama integral de Fourier o transformada de Fourier directa e inversa respectivamente de una función no periódica e indica la distribución de la energía de la señal en el espacio de frecuencias.

Simbólicamente la transformada directa e inversa la representamos como:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\} \text{ transformada directa}$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} \text{ transformada inversa}$$

Una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de la transformada de Fourier es que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ sea finita, aunque existen funciones especiales para las cuales no se cumple la condición anterior y sin embargo existe su transformada de Fourier (función escalón unitario o una constante).

A la gráfica de $F(\omega)$ se le conoce como espectro de energía de $f(t)$. A continuación se obtendrán las transformadas para algunas funciones útiles en el análisis de señales.

Ejemplo: Encuentre la TFTC del pulso $f(t) = e^{-at}u(t)$ cuya gráfica se muestra a continuación:

Transformada de Fourier

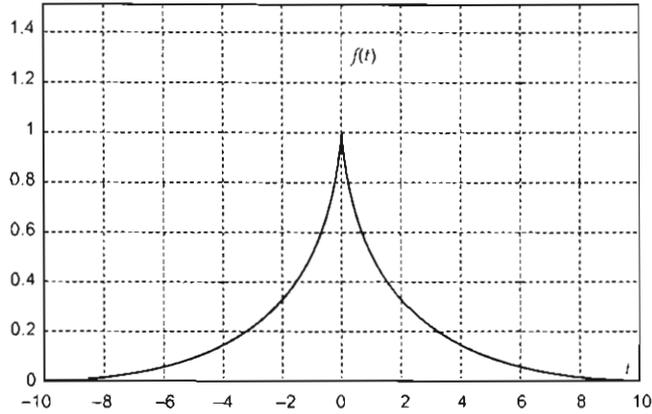


FIGURA III.4. Función simétrica a energía finita del tipo valor absoluto de la exponencial

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \\
 &= \frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{(\alpha-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\alpha-j\omega)} + \frac{1}{(\alpha+j\omega)} = \frac{\alpha+j\omega + \alpha-j\omega}{(\alpha-j\omega)(\alpha+j\omega)} \\
 &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

La gráfica del espectro se muestra en la figura III.5.

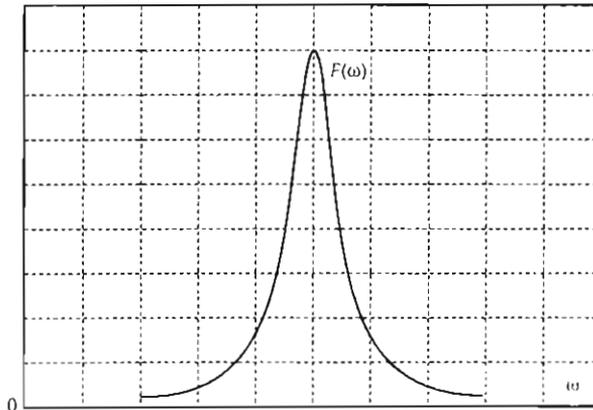


FIGURA III.5. Transformada de Fourier de la función definida en la figura III.4

Note que el ángulo de fase $\phi(\omega)$ en este caso es cero (parte imaginaria es cero).

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal $f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$

La gráfica de esta señal se muestra a continuación:

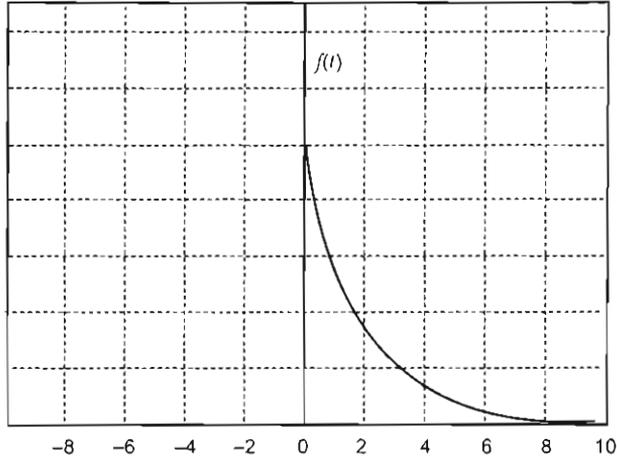


FIGURA III.6. Señal en el tiempo del tipo exponencial positiva

Su TFTC es

$$F(\omega) = \mathfrak{S}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{-Ae^{-(\alpha + j\omega)t}}{\alpha + j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j\omega} [1 - 0]$$

$$= \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Para llevar a $F(\omega)$ a la forma rectangular, multiplicamos y dividimos por el complejo conjugado

$$F(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} \left(\frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} \right) = \frac{A(\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{A\omega j}{\alpha^2 + \omega^2}$$

En forma de magnitud y fase:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{(A\alpha)^2 + (A\omega)^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} e^{-j\omega \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$$

Las gráficas de magnitud y fase se aprecian en la figura III.7.

Transformada de Fourier

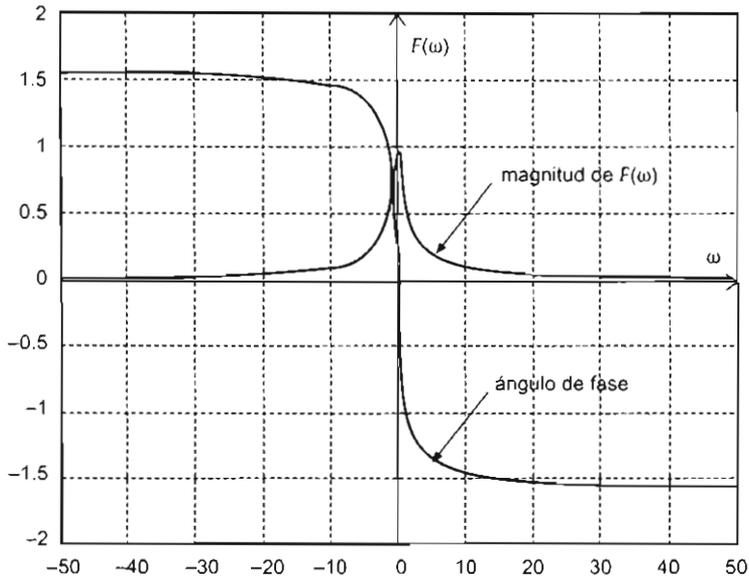


FIGURA III.7. Espectro de Fourier y ángulo de fase

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal $f(t) = \begin{cases} A & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ cuya gráfica se muestra a continuación:

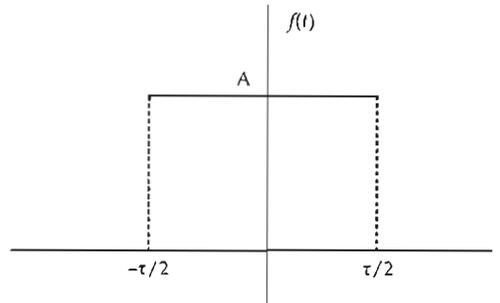


FIGURA III.8. Pulso rectangular de duración τ y amplitud A

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{-A e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2})$$

Empleando las identidades de Euler para el seno, tenemos:

$$F(\omega) = \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \frac{\operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

La gráfica del espectro se muestra a continuación:

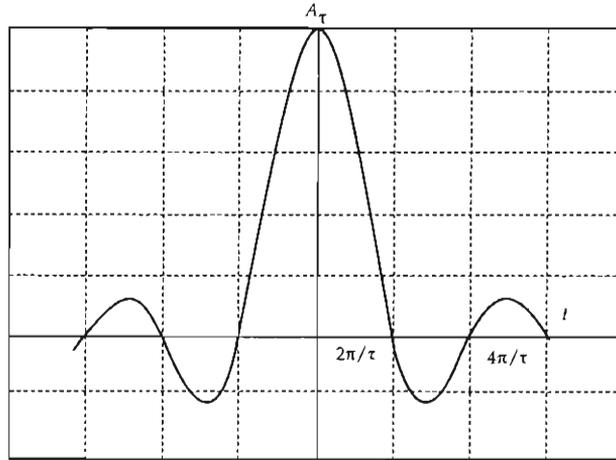


FIGURA III.9. Transformada de Fourier del pulso rectangular

Una función muy importante en análisis de señales es la función delta de Dirac. Esta función está definida como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra a continuación

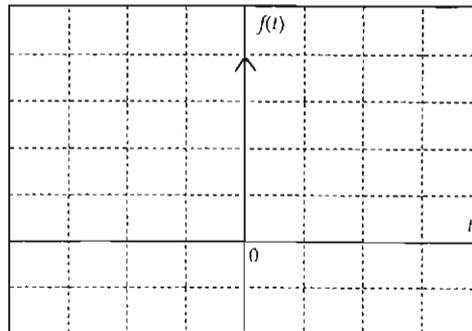


FIGURA III.10. Función delta de Dirac

Una propiedad de la función delta es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \varphi(t) dt = \varphi(t) \Big|_{t=t_0} = \varphi(t_0)$$

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal $f(t) = \delta(t)$.

Aplicando la propiedad de la función delta, tenemos:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

$$|F(\omega)| = 1$$

El espectro se muestra en la figura III.11, y es conocido en análisis de señales como ruido blanco.

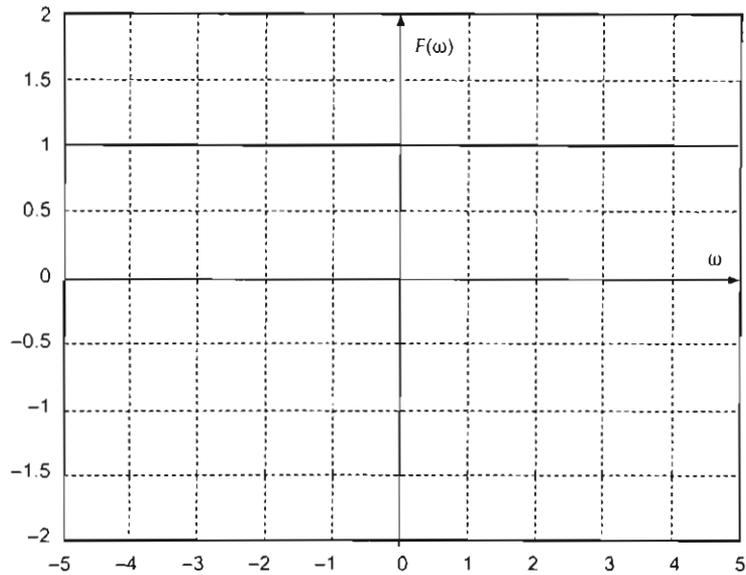


FIGURA III.11. Espectro del ruido blanco

Veamos ahora qué le ocurre al espectro cuando desplazamos la función $\delta(t)$, t_0 segundos.

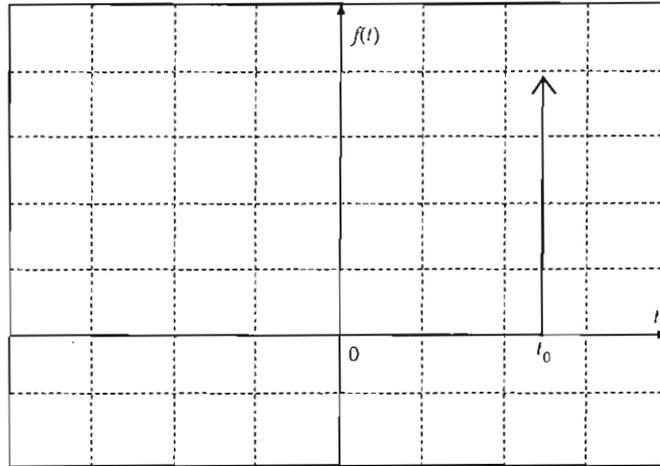


FIGURA III.12. Función delta desplazada t_0 segundos

Nuevamente aplicamos la propiedad de la función delta, y tenemos.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0} = e^{-j\omega t_0}$$

con $|F(\omega)| = 1$ y $\phi(\omega) = -\omega t_0$, la gráfica se muestra en la figura III.13.

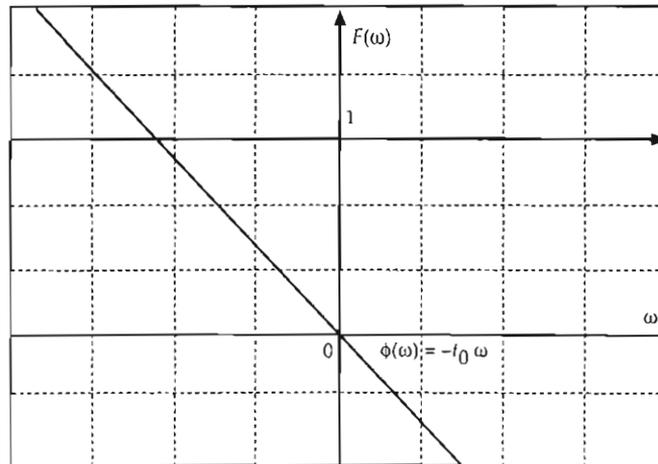


FIGURA III.13. Espectro de la función delta de Dirac desplazada

Observamos que la amplitud y la forma del espectro no cambian, sólo sufre un cambio la fase.

En el capítulo anterior, el hecho de tener funciones delta simplificaba el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier. De igual manera, a continuación vamos a utilizar la función delta para calcular la transformada de la función exponencial $e^{j\omega_0 t}$; para ello procederemos de la siguiente manera:

Si tenemos en el espacio de frecuencias la función $F(\omega) = \delta(\omega \pm \omega_0)$ cuya gráfica se muestra a continuación:

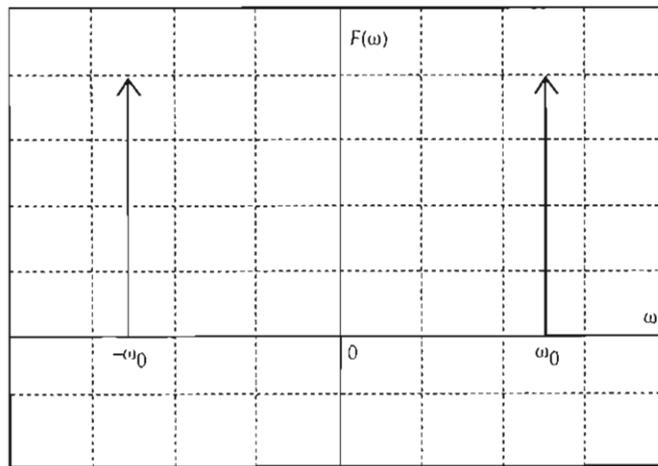


FIGURA III.14. Funciones delta en la frecuencia

La transformada inversa de Fourier del impulso de la izquierda $\delta(\omega + \omega_0)$ es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (-\omega_0)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t}$$

y la transformada inversa de Fourier del impulso de la derecha $\delta(\omega - \omega_0)$ es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\omega - \omega_0] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

Entonces podemos escribir que las transformadas de la función exponencial compleja son:

Análisis de señales

$$\mathfrak{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (\text{III.5})$$

$$\mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{III.6})$$

Observamos que cuando $\omega_0 = 0$

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}(1) = \delta(\omega)$$

$$\mathfrak{F}(1) = 2\pi\delta(\omega)$$

que son resultados que ya conocíamos. Con los resultados obtenidos y la fórmula de Euler podemos encontrar fácilmente la TFCT de las funciones trigonométricas $\sin(\omega_0 t)$, $\cos(\omega_0 t)$; con ω_0 constante, veamos cómo se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \right] = \frac{1}{2} [\mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathfrak{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}] \\ &= \frac{1}{2} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

La gráfica de esta función es similar a la figura III.15, sólo que con amplitud π . Para la función seno tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\sin(\omega_0 t)] &= \mathfrak{F}\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) = \frac{1}{2j} [\mathfrak{F}(e^{j\omega_0 t}) - \mathfrak{F}(e^{-j\omega_0 t})] \\ &= \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] = -\pi j\delta(\omega - \omega_0) + \pi j\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier

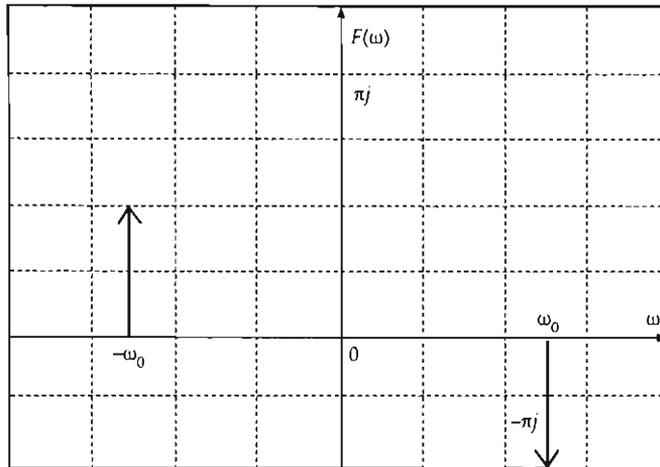


FIGURA III.15. Transformada de Fourier de $\text{sen}(\omega_0 t)$

$$\mathfrak{F}[\text{sen}(\omega_0 t)] = -\pi j \delta(\omega - \omega_0) + \pi j \delta(\omega + \omega_0) \quad (\text{III.8})$$

La gráfica se muestra en la figura III.15.

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la función signum; su gráfica se muestra a continuación:

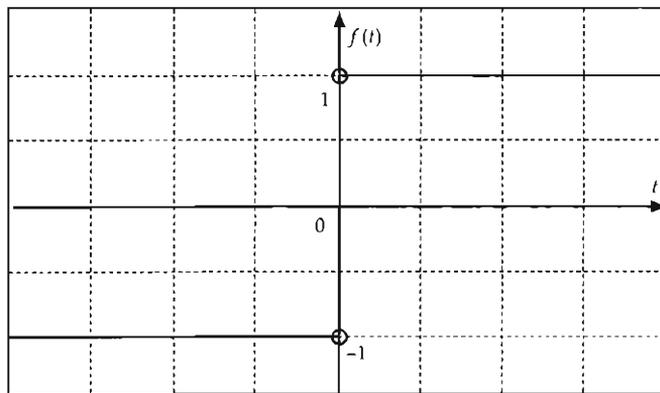


FIGURA III.16. Función signum

Podemos escribir la función signum como:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Para encontrar la transformada hacemos el siguiente artificio matemático:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{\text{sgn}(t)\} &= \mathfrak{F}\left\{\lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t)\right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 -e^{-(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-e^{-(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} = \frac{-2}{\omega} j \end{aligned}$$

$$\mathfrak{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{-2j}{\omega} \quad (\text{III.9})$$

La gráfica del espectro se muestra en la figura III.17; se observa que hay una asíntota en $\omega = 0$.

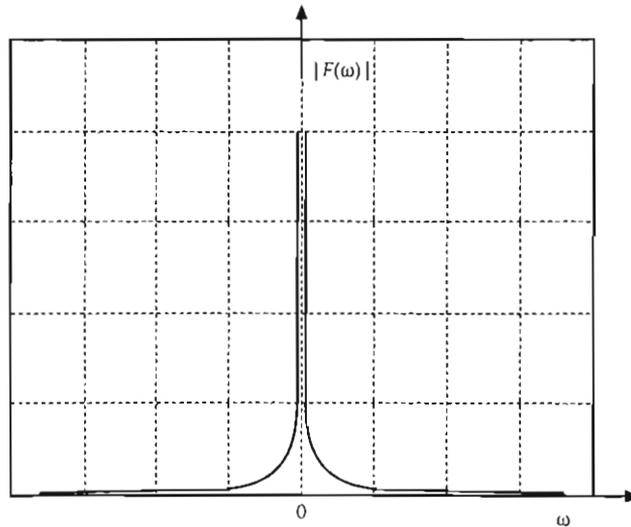


FIGURA III.17. Espectro de la función signo

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la función escalón unitario, $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$
 Su gráfica se muestra a continuación:

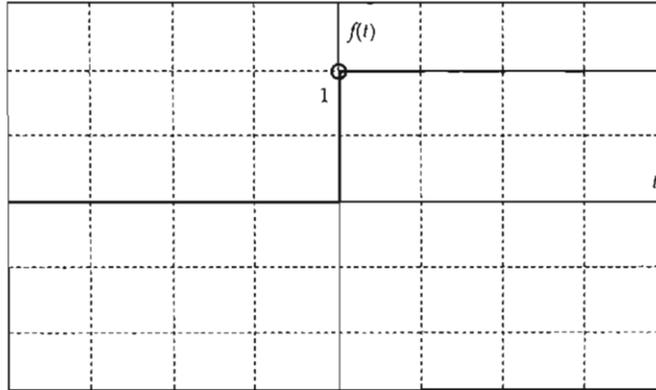


FIGURA III.18. Función escalón unitario

Vemos que podemos escribir la función escalón unitario como:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

y como conocemos las transformadas de una función constante y la función signum, entonces:

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\} = \mathfrak{S}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathfrak{S}\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\} = \frac{2\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) - \frac{j}{\omega}$$

finalmente:

$$\mathfrak{S}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) - \frac{j}{\omega} \quad (\text{III.10})$$

La gráfica del espectro se muestra en la figura III.19. Note que ahora en $\omega = 0$ hay una delta.

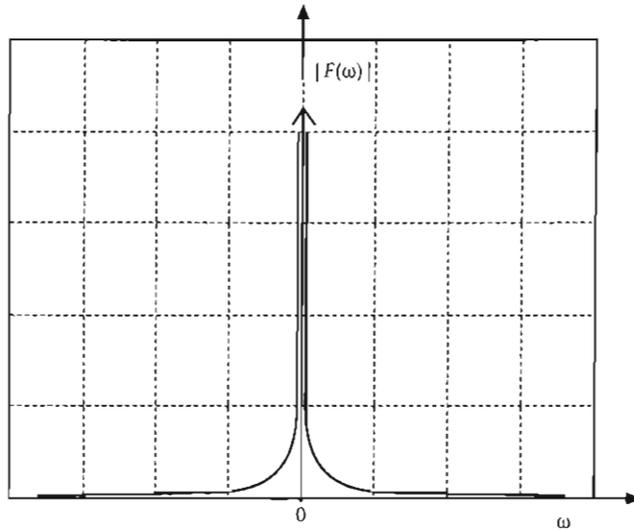


FIGURA III.19. Espectro de la función escalón unitario

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO DE UNA SEÑAL PERIÓDICA

Hasta el momento hemos estado trabajando con señales no periódicas, pero ahora nos preguntamos: ¿qué ocurre cuando tenemos una señal periódica? ¿Existe su transformada de Fourier? A continuación se muestra cómo obtener la TFTC de una señal periódica.

Podemos escribir una función periódica usando su serie de Fourier como:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

Si obtenemos la transformada de Fourier de $f_T(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f_T(t)\} &= \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathfrak{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

entonces la TFTC de una función periódica es:

$$\mathfrak{F}\{f_T(t)\} = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{III.11})$$

Note que ahora la TFTC es una función discreta compuesta por funciones impulso moduladas por el coeficiente de la serie de Fourier compleja.

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal periódica que se muestra.

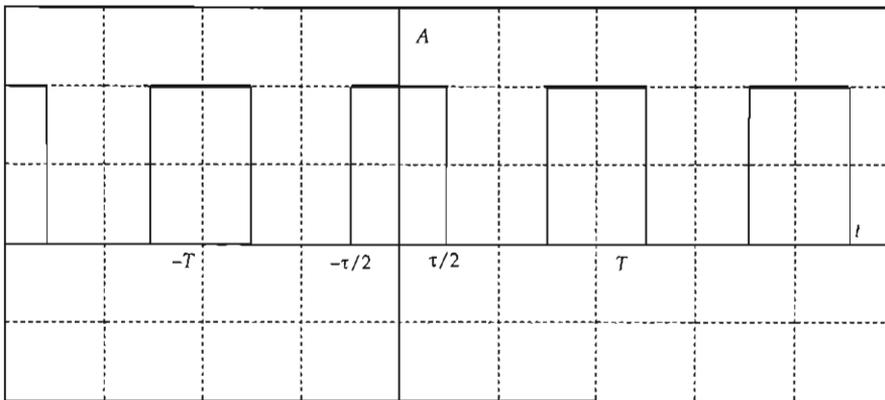


FIGURA III.20. Tren de pulsos

Si hacemos que $T = 2$ seg, entonces $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Del capítulo anterior sabemos que el coeficiente de la serie de Fourier exponencial es

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{(n\omega_0\tau/2)}$$

entonces la TFTC es:

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\tau}{2} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \delta(\omega - n\omega_0) = \pi A\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \delta(\omega - n\pi)$$

La gráfica de $F(\omega)$ se muestra en la figura III.21.

Ejemplo: Encuentre la TFTC del tren de pulsos que se muestra en la figura III.22.

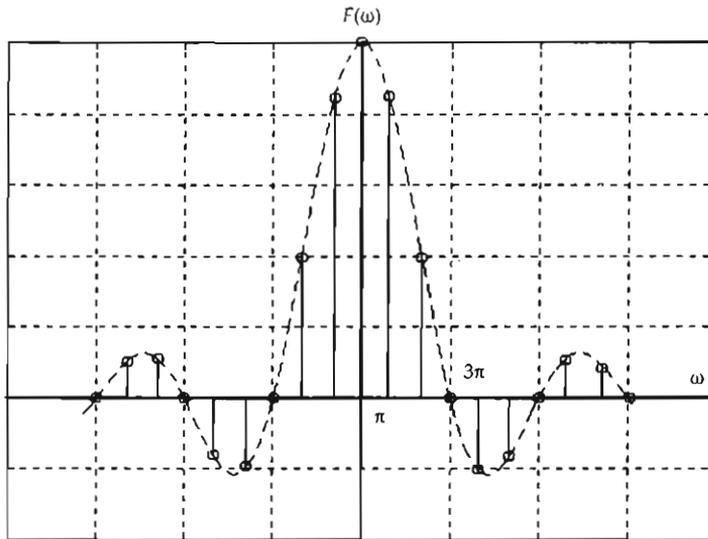


FIGURA III.21. Transformada de Fourier de una función periódica

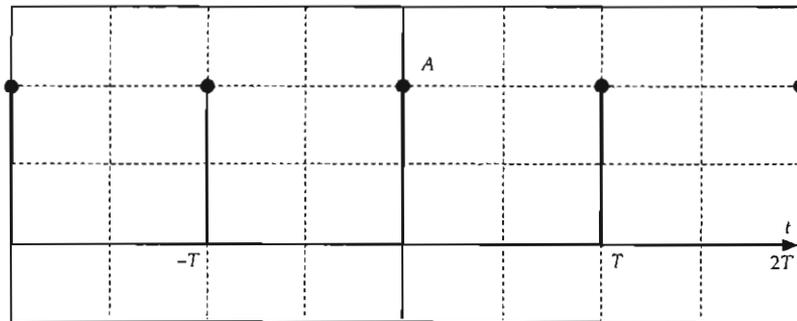


FIGURA III.22. Tren de deltas de Dirac

Esta función la podemos escribir como:

$$f_T(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Primero encontramos el coeficiente F_n .
Aplicando la propiedad de la función delta de Dirac, tenemos

Transformada de Fourier

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-j\omega_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f_T(t)\} &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

La gráfica de esta función se muestra a continuación. Observe que la FTFC de un tren de pulsos de Dirac es también un tren de pulsos de Dirac.

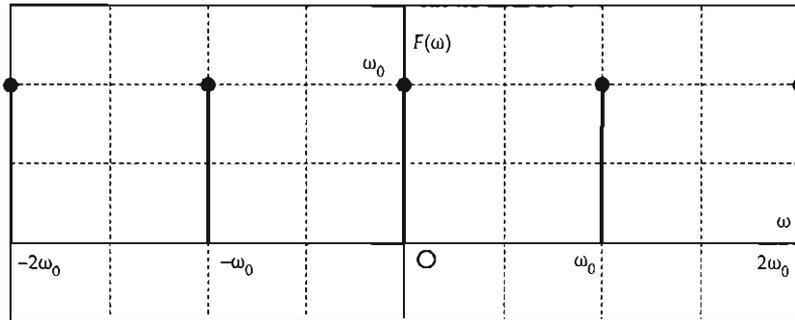


FIGURA III.23. Transformada de Fourier de un tren de deltas de Dirac

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Como veremos a continuación, la transformada de Fourier posee propiedades que nos ayudan en el cálculo de éstas. Las propiedades parten de que conocemos la función en el dominio del tiempo, así como su respectiva transformada de Fourier; ahora la pregunta es: ¿qué pasa si modificamos la señal en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia?, ¿cómo repercute dicha modificación en el otro dominio? Pues bien, las propiedades de linealidad, simetría, escalamiento en el tiempo, escalamiento en la frecuencia, corrimiento en frecuencia y modulación, nos auxilian en esto y además nos permiten entender rápidamente otro tipo de señal.

Propiedad de linealidad

Esta propiedad nos dice que la transformada de una suma de funciones es igual a la suma de las transformadas de cada una de las funciones involucradas.

$$\begin{aligned} \text{Si } x(t) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} X(\omega) \\ y(t) &\xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} Y(\omega) \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathfrak{F}\{x(t) + y(t)\} = X(\omega) + Y(\omega)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}\{x(t) + y(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)]e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = X(\omega) + Y(\omega) \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea la siguiente función $f(t)$, compuesta de un valor constante k más una función periódica cosenoidal.

$f(t) = k + \cos\omega_0 t$; encuentre su transformada de Fourier.

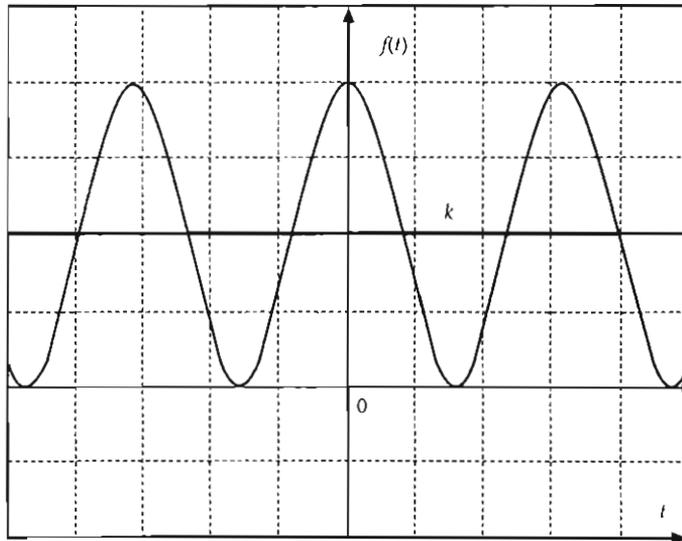


FIGURA III.24. Señal coseno más una constante

Si aplicamos las transformadas que ya habíamos calculado:

$$\mathfrak{F}\{k + \cos\omega_0 t\} = \mathfrak{F}\{k\} + \mathfrak{F}\{\cos\omega_0 t\} = 2\pi k\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

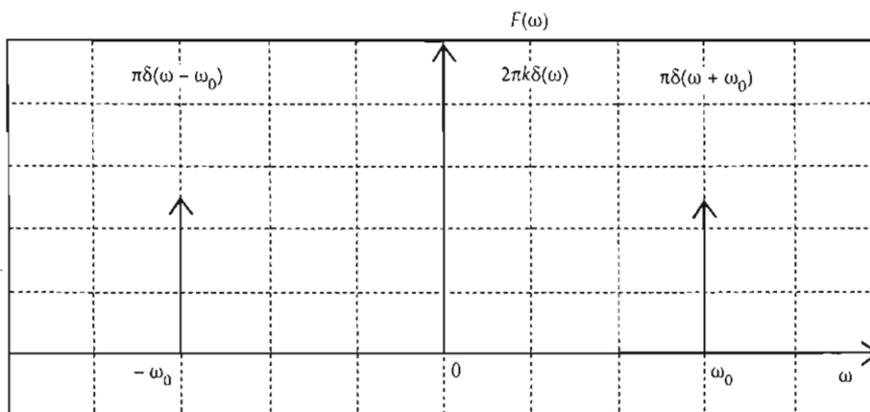


FIGURA III.25. Transformada de Fourier de la señal coseno (a la frecuencia ω_0) más una constante (nivel de d.c.)

Observación: k es una componente de d.c., por lo que su representación en frecuencia la obtenemos a la frecuencia $\omega = 0$.

Propiedad de simetría

Si $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$, entonces $\mathfrak{F}\{F(t)\} \equiv 2\pi f(-\omega)$.

Demostración: Sabemos que la transformada inversa de Fourier tiene la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

despejando tenemos

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

sustituyendo t por $-t$ en la expresión anterior, tenemos

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

ahora intercambiando t por ω , obtenemos:

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

lo que se conoce como propiedad de simetría de la TFTC.

Ejemplo: Supongamos que tenemos un pulso de duración τ cuya transformada de Fourier es la que se muestra:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{A\tau \operatorname{senc}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Supongamos que ahora la función sampling está en el tiempo y deseamos encontrar su transformada de Fourier de tiempo continuo, o sea que ahora tendríamos:

$$\mathfrak{S}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

$\mathfrak{S}\left[\frac{A\tau \operatorname{senc}(t\tau/2)}{t\tau/2}\right] = 2\pi f(-\omega) = 2\pi f(\omega)$ por ser una función par. Aquí $f(\omega)$ es:

$$f(\omega) = \begin{cases} A\pi & \text{para } -\frac{\tau}{2} \leq \omega \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Gráficamente tendríamos lo siguiente:

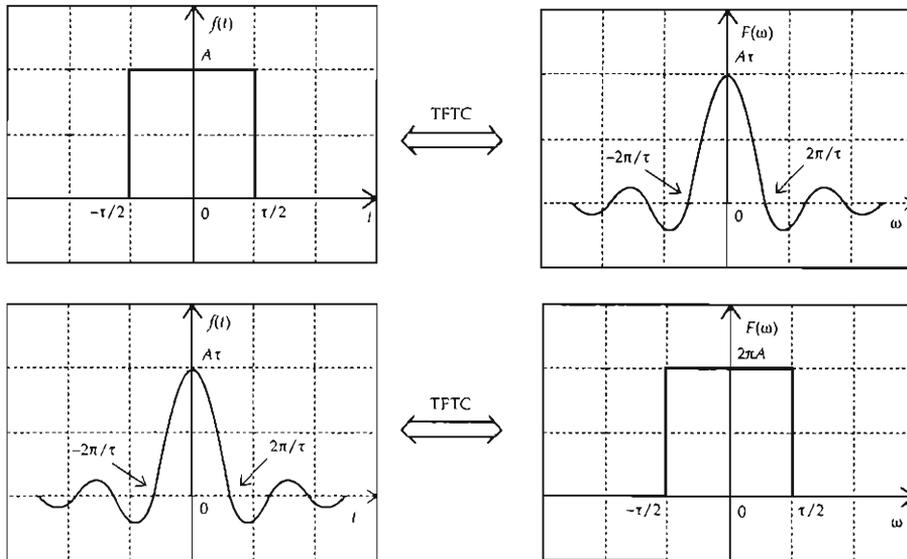


FIGURA III.26. Ejemplo de la propiedad de simetría de la transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Propiedad de escalamiento en el tiempo

Si $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$, la propiedad de escalamiento en el tiempo nos indica que

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (\text{III.12})$$

Esto significa que una expansión en el tiempo equivale a una contracción en la frecuencia, la demostración es la siguiente:

Tenemos dos casos, uno cuando $a > 0$ y otro cuando $a < 0$.

Cuando $a > 0$ $\mathfrak{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt$ si $x = at \Rightarrow \frac{x}{a} = t \Rightarrow \frac{dx}{a} = dt$ en este caso los límites de integración son: cuando $t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$ y cuando $t \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty$

Entonces la transformada queda de la siguiente forma:

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Cuando $a < 0$ $\mathfrak{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt$ si $x = at \Rightarrow \frac{x}{a} = t \Rightarrow \frac{dx}{a} = dt$, cuando a es negativa los límites de integración cambian de la siguiente manera: si $t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty$ y entonces $t \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$.

Entonces la transformada de Fourier es

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)x} dx = -\frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)x} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

La gráfica de la figura III.27 muestra este efecto.

Propiedad de escalamiento en la frecuencia

Si la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ es $f(t)$, la transformada inversa de Fourier de $F(a\omega)$ es $\frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right)$ con $a = \text{constante}$, es decir, tenemos el par de transformadas siguientes:

$$\frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) \Leftrightarrow F(a\omega) \quad (\text{III.13})$$

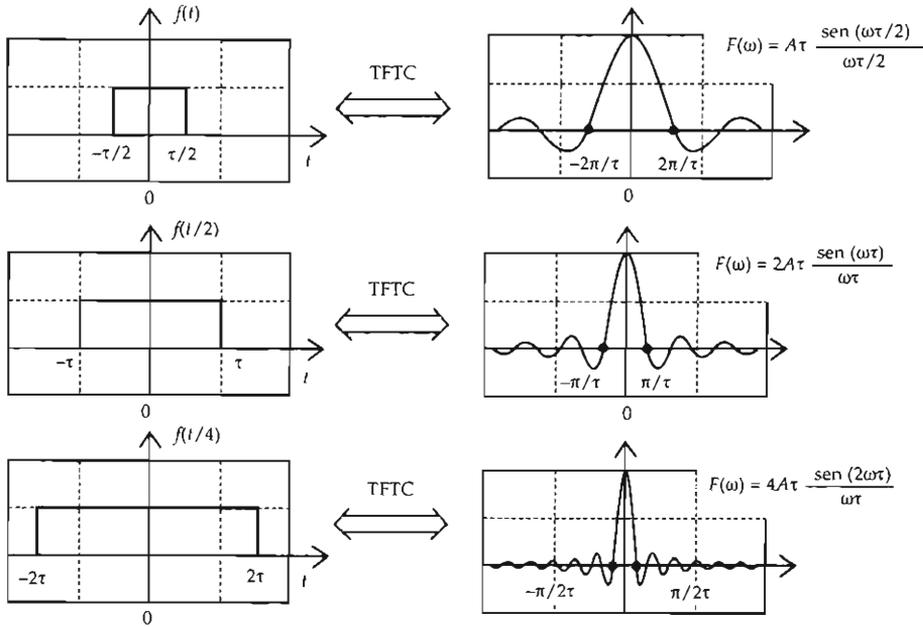


FIGURA III.27. Ejemplo de la propiedad de escalamiento en tiempo para la señal del tipo ventana cuadrada. En el tiempo se expande y en la frecuencia se contrae

Esto indica que una contracción en el tiempo equivale a una expansión en la frecuencia; la demostración es similar a la de la propiedad anterior.

Propiedad de corrimiento en el tiempo

Si la función $f(t)$ es desplazada por una constante t_0 , entonces tenemos que:

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Demostración: si hacemos

$$x = t - t_0 \Rightarrow t = x + t_0 \Rightarrow dt = dx$$

sustituyendo

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx$$

volviendo a la variable; si $x = t$, entonces,

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \Rightarrow \mathfrak{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Transformada de Fourier

Ejemplo: Encuentre la transformada de Fourier de la función ventana de duración τ y amplitud A .

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

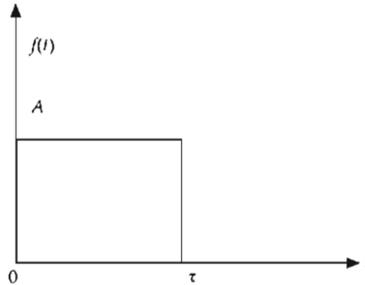


FIGURA III.28. Función ventana rectangular de duración τ y amplitud A

Encontramos primero la transformada de Fourier de una ventana como la anterior, pero adelantada $\tau/2$ seg; en este caso su TFTC es la que se muestra en la figura siguiente.

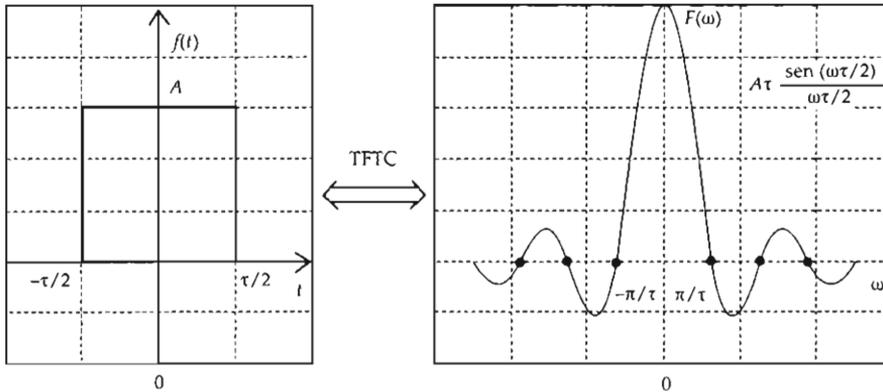


FIGURA III.29. Transformada de una ventana de duración τ

Volviendo al ejemplo vemos que ahora el pulso está desplazado a la derecha en el tiempo $\tau/2$ seg. Podemos calcular analíticamente la transformada o bien utilizar la propiedad de corrimiento en el tiempo: calculemos-la primero analíticamente:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} Ae^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} [e^{-j\omega t}]_0^{\tau}$$

$$= \frac{A}{-j\omega} [e^{-j\omega\tau} - 1] = \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega\tau/2} [e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}]$$

$$= \frac{2A}{\omega} e^{-j\omega\tau/2} \left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} \right) = \frac{2Ae^{-j\omega\tau/2}}{\omega} \text{sen}(\omega\tau/2) = e^{-j\omega\tau/2} A\tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$$

gráficamente tenemos:

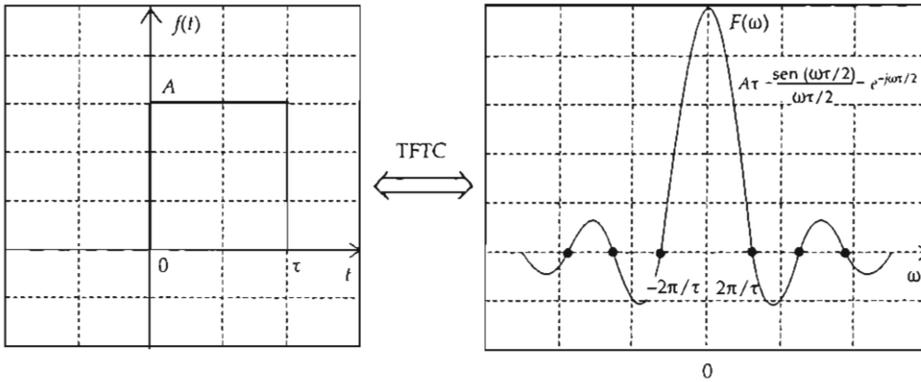


FIGURA III.30. Transformada de una ventana desplazada $\tau/2$ seg

Si ahora aplicamos la propiedad de corrimiento en el tiempo el resultado es la transformada de un pulso de duración τ pero con una fase dada por $-j\omega \tau/2$

*Propiedad de corrimiento en la frecuencia
(teorema de modulación)*

Si una función $f(t)$ la multiplicamos por la función compleja $e^{j\omega_0 t}$, entonces el espectro de la señal se desplazará ω_0 rad/seg. Esto es de gran utilidad en comunicaciones ya que podemos mover nuestra señal hacia regiones de frecuencia de trabajo deseadas. El interés por modular una señal para su transmisión vía aérea radica en utilizar antenas más pequeñas con una menor potencia de transmisión. La modulación permite hacer un uso óptimo del espectro radioeléctrico.

Una gráfica típica de una señal modulada se muestra en la figura III.31.

El siguiente ejemplo ilustra el efecto en la frecuencia cuando se modula una señal $f(t)$, si tenemos el espectro de una señal sin modular como se muestra en la figura III.32.

Transformada de Fourier

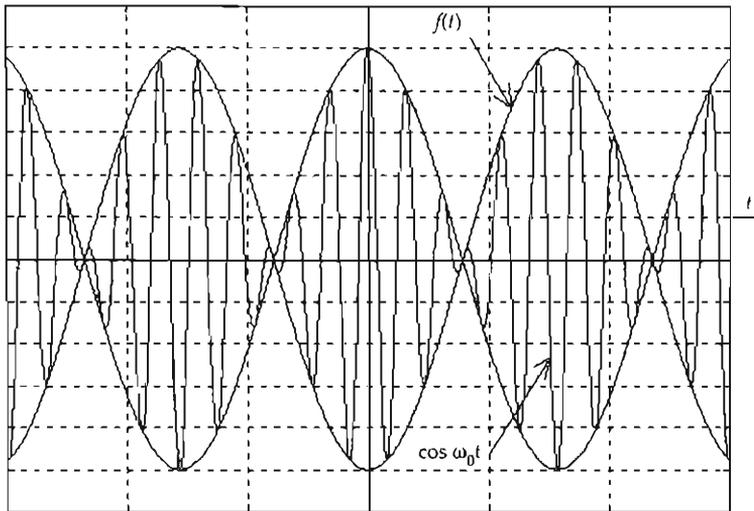


FIGURA III.31. Señal modulada en el dominio del tiempo

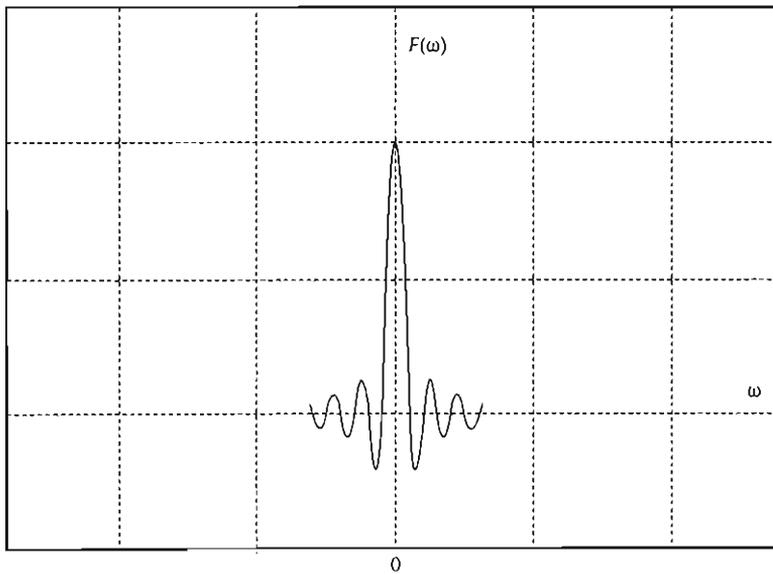


FIGURA III.32. Espectro de la señal sin modular

Transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\{f(t)e^{-j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt \\ &= F(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

e indica una réplica del espectro anterior.

Propiedad de convolución

Convolución en el tiempo continuo

La convolución es una de las herramientas más útiles y eficaces en el análisis de señales de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, ya que nos permite conocer la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia, con las siguientes características: una convolución en el dominio del tiempo equivale a una multiplicación en el dominio de la frecuencia; asimismo, una convolución en el dominio de la frecuencia equivale a una multiplicación en el dominio del tiempo.

A continuación obtendremos la expresión matemática de la integral de convolución a partir de la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Consideremos un sistema lineal como el que se muestra en la figura III.34.

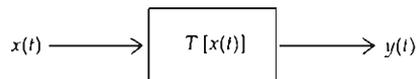


FIGURA III.34. Sistema lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$

donde $x(t)$ es la entrada al sistema y $y(t)$ es la salida dada por el operador $T[x(t)]$, es decir:

$$y(t) = T[x(t)] \quad (\text{III.15})$$

Si hacemos uso de las propiedades de la función delta, $x(t)$ la podemos escribir como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (\text{III.16})$$

Si sustituimos (III.16) en (III.15), tenemos:

$$y(t) = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right]$$

puesto que el operador T sólo afecta a señales en el tiempo, entonces podemos escribir $y(t)$ como

$$y(t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) T[\delta(t - \tau)] d\tau \right] \quad (\text{III.17})$$

Si $x(t) = \delta(t)$, una función impulso, tenemos:

$$y(t) = T[\delta(t)]$$

Si llamamos $h(t)$ a la salida del sistema, como $y(t)$ y $\delta(t)$ son señales invariantes al corrimiento, podemos escribir:

$$h(t - \tau) = T[\delta(t - \tau)] \quad (\text{III.18})$$

donde a $h(t - \tau)$ se le conoce como respuesta al impulso del sistema.

Si sustituimos (III.18) en (III.17) tenemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.19})$$

A esta expresión se le conoce como integral de convolución y nos permite conocer la salida del sistema con sólo conocer su respuesta al impulso y la señal de entrada.

La expresión (III.19) también se puede escribir como:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

La convolución descrita puede resumirse en el siguiente algoritmo:

- La señal de entrada a un sistema lineal e invariante al corrimiento se representa como una función continua de impulsos
- Se determina la respuesta del sistema para un solo impulso
- Se calcula la respuesta del sistema a cada uno de los impulsos que representan la señal de entrada
- La respuesta total del sistema se obtiene al superponer las respuestas individuales de todos los impulsos que representan la señal de entrada.

En general podemos definir la convolución como sigue:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.20})$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones cualesquiera y $y(t)$ es el resultado de la convolución; a τ se le conoce como la variable independiente, $f_2(-\tau)$ se obtiene al rotar $f_2(\tau)$ alrededor del eje vertical que pasa por el origen, y el término $f_2(t - \tau)$ representa la función $f_2(-\tau)$ desplazada t segundos a lo largo del eje τ .

El procedimiento que describe la ecuación (III.21) es el siguiente:

- Lleve a las funciones $f(t)$ al espacio τ
- Rote la función $f_2(\tau)$ alrededor del eje vertical que pasa por el origen para obtener la función $f_2(\tau)$
- Desplace una cantidad t_0 sobre el eje τ : $f_2(t_0 - \tau)$
- Multiplique la función $f_1(\tau)$ por $f_2(t_0 - \tau)$: $f_1(\tau) f_2(t_0 - \tau)$
- Calcule el área del producto, el resultado del valor $y(t)$ al momento $t = t_0$, $y(t_0)$
- Repita el procedimiento para diferentes valores de t_0 .

El algoritmo de convolución, además de requerir que una de las funciones se rote alrededor del eje vertical, requiere que esta función se desplace una cantidad t_0 , donde t_0 toma todos los valores de $-\infty$ a ∞ . Veamos el concepto de convolución con un ejemplo:

Un circuito RC como el de la figura III.35 tiene una respuesta al impulso dada por $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$.

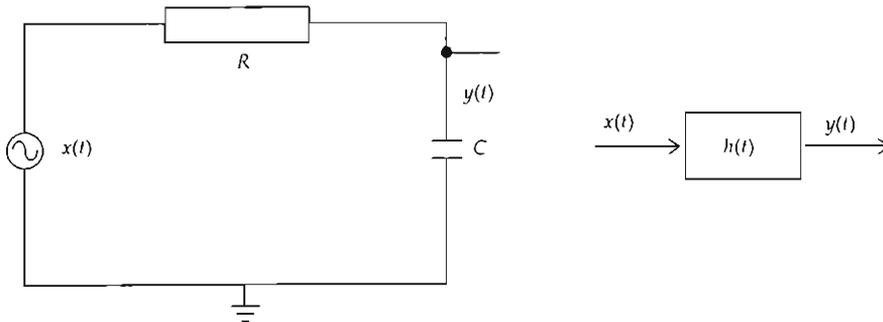


FIGURA III.35. Circuito RC visto como un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$

¿Cuál será la respuesta $y(t)$ si la entrada al sistema es la señal $x(t) = V[u(t) - u(t - T)]$, cuya gráfica se muestra en la figura III.36?

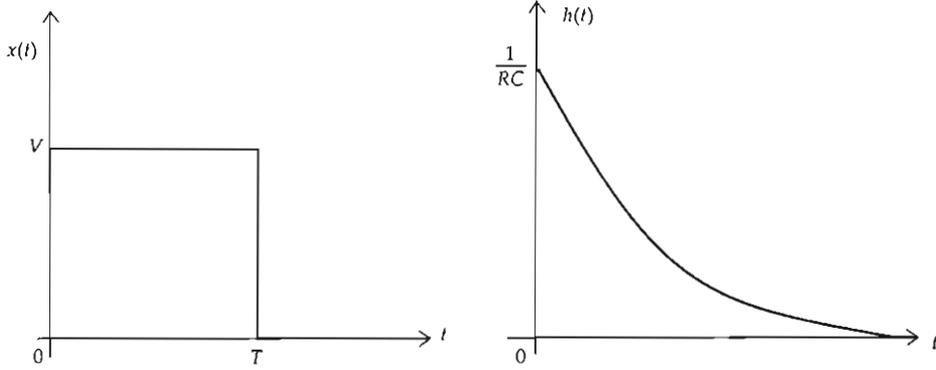


FIGURA III.36. Funciones de entrada y respuesta al impulso del circuito RC

La salida del circuito RC está dada por la expresión:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Si sustituimos las expresiones para $x(t)$ y $h(t)$ en la integral anterior, tenemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V[u(\tau) - u(\tau - T)] \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} u(t - \tau) d\tau$$

la cual se puede escribir como:

$$y(t) = \frac{V}{RC} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)/RC} u(\tau) u(t - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)/RC} u(\tau - T) u(t - \tau) d\tau \right\}$$

Simplificando tenemos:

$$y(t) = \frac{V}{RC} \left\{ e^{-t/RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau/RC} u(\tau) u(t - \tau) d\tau - e^{-t/RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau/RC} u(\tau - T) u(t - \tau) d\tau \right\} \quad (\text{III.21})$$

En la ecuación (III.21) observamos que tenemos la combinación de funciones escalón: $u(\tau) u(t - \tau)$ y $u(\tau - T) u(t - \tau)$; las gráficas se muestran en la figura III.37.

Transformada de Fourier

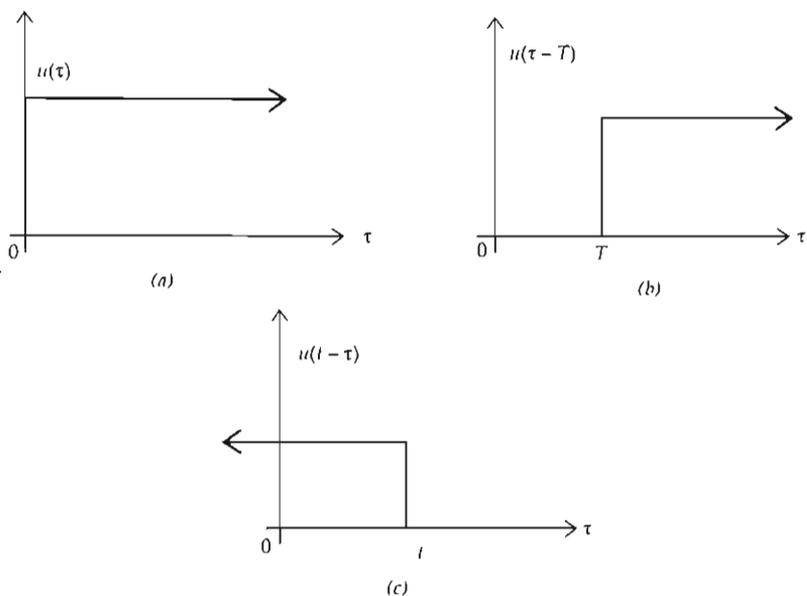


FIGURA III.37. Gráfica de las funciones impulso en el dominio τ , rotadas y desplazadas T seg

Analizando estas combinaciones, tenemos:

Para $t < 0$

$$u(\tau - T) u(t - \tau) = 0 \quad \text{para toda } \tau$$

$$u(\tau) u(t - \tau) = 0 \quad \text{para toda } \tau$$

Para $0 < t < T$

$$u(\tau - T) u(t - \tau) = 0 \quad \text{para toda } \tau$$

$$u(\tau) u(t - \tau) = 1 \quad \text{para } 0 < \tau < t$$

Para $t > T$

$$u(\tau - T) u(t - \tau) = 1 \quad \text{para } T < \tau < t$$

$$u(\tau) u(t - \tau) = 1 \quad \text{para } 0 < \tau < t$$

Volviendo a la ecuación III.21, cuando $t < 0$, tenemos:

$$y(t) = 0$$

Cuando $0 < t < T$, la ecuación III.21 es:

$$y(t) = \frac{V}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} d\tau$$

y si integramos tenemos: $y(t) = \frac{V}{RC} e^{-t/RC} RC e^{\tau/RC} \Big|_0^t = V e^{-t/RC} [e^{t/RC} - 1]$

$$y(t) = V [1 - e^{-t/RC}]$$

Cuando $t > T$, la ecuación III.21 es:

$$y(t) = \frac{V}{RC} \left\{ e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} d\tau - e^{-t/RC} \int_T^t e^{\tau/RC} d\tau \right\}$$

resolviendo tenemos

$$y(t) = \frac{V}{RC} \left\{ e^{-t/RC} RC e^{\tau/RC} \Big|_0^t - e^{-t/RC} RC e^{\tau/RC} \Big|_T^t \right\}$$

$$y(t) = V \left\{ e^{-t/RC} [e^{t/RC} - 1] - e^{-t/RC} [e^{t/RC} - e^{T/RC}] \right\}$$

$$y(t) = V \left\{ 1 - e^{-t/RC} - 1 + e^{-(t-T)/RC} \right\}$$

$$y(t) = V e^{-(t-T)/RC} [1 - e^{-T/RC}]$$

El resultado final de $y(t)$ es la superposición de los tres casos anteriores:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ V[1 - e^{-t/RC}] & \text{para } 0 < t < T \\ V e^{-(t-T)/RC} [1 - e^{-T/RC}] & \text{para } t > T \end{cases}$$

La gráfica de $y(t)$ se muestra en la figura III.38.

Transformada de Fourier

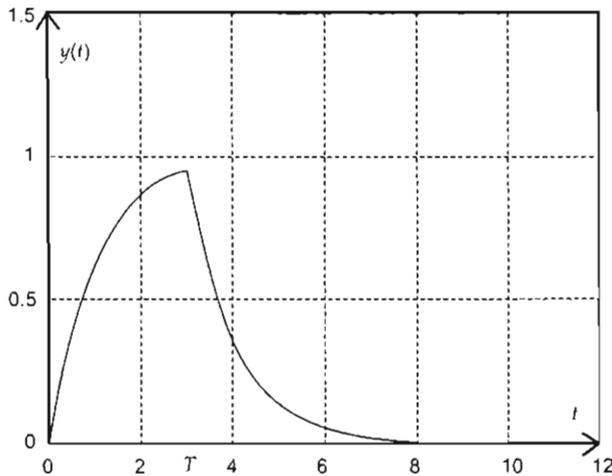


FIGURA III.38. Resultado de la convolución cuando $T = 3$ seg y $RC = 1$ seg

Propiedades de la convolución

Sean las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$; la convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en el dominio continuo está definida por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)f_2(x)dx \quad (\text{III.22})$$

la cual también podemos escribir simbólicamente como:

$$y(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (\text{III.23})$$

La convolución es una operación que cumple con la ley conmutativa, es decir: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

Demostración:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$$

Si sustituimos $k = t - x \Rightarrow x = t - k \Rightarrow dx = -dk$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-k)f_2(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(k)f_1(t-k)dk = f_2(t) * f_1(t)$$

La convolución también cumple con la ley asociativa, es decir:

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

Veamos el efecto de la función δ en convolución con una función $f(t)$. Si aplicamos la definición de convolución de $f(t)$ con $\delta(t)$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx = \delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(t-x)dx = f(t)$$

la integral es válida en un solo punto, es decir, cuando $x = 0$.

NOTA: La convolución de una función $f(t)$ con una función impulso unitario $\delta(t)$ conduce a la misma función $f(t)$.

En general, si δ está definida como $\delta(t - T)$, donde T es igual al desplazamiento en el tiempo, la convolución con una señal $f(t)$ será:

$$\delta(t - T) * f(t) = f(t - T)$$

El teorema de convolución en el tiempo afirma que si $\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ y $\mathfrak{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$, entonces:

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (\text{III.24})$$

Demostración:
Sabemos que

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$$

aplicando la transformada de Fourier a $f_1(t) * f_2(t)$, tenemos que

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx \right] e^{-j\omega t} dt$$

intercambiando el orden de integración:

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-j\omega t} dt \right] dx$$

aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier de $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-j\omega t} dt$, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega x} F_2(\omega)$$

Sustituyendo este resultado nos queda:

Transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-j\omega x} F_2(\omega) dx$$

sacando los términos constantes de la integral.

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_2(\omega)F_1(\omega)$$

El hecho de tener la relación III.24 facilita los cálculos de la convolución, ya que podemos cambiar una integración por una multiplicación.

Propiedad de diferenciación en el tiempo y en la frecuencia

Si tenemos una función $f(t)$ tal que $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, al derivar la función en el tiempo tenemos que la transformada de Fourier es ahora:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = j\omega F(\omega) \quad (\text{III.25})$$

Observamos que la TFTC de una función derivada en el tiempo equivale a multiplicar por ω en la frecuencia, esto nos sugiere que al derivar una señal en el tiempo incrementamos los valores de las frecuencias altas, lo cual actúa como un filtro pasa-altas.

Por el contrario, si obtenemos la TFTC de la integral de una función, las altas frecuencias decaen rápidamente, como observamos en la siguiente ecuación. Esto actúa como un filtro pasa-bajas.

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (\text{III.26})$$

A continuación veremos algunos ejemplos del uso de estas propiedades:

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal que se muestra en la figura III.39.

Del teorema de desplazamiento en el tiempo tenemos:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}[f(t+T) + f(t-T)]\right\} = F(\omega)\cos(\omega T) \quad (\text{III.27})$$

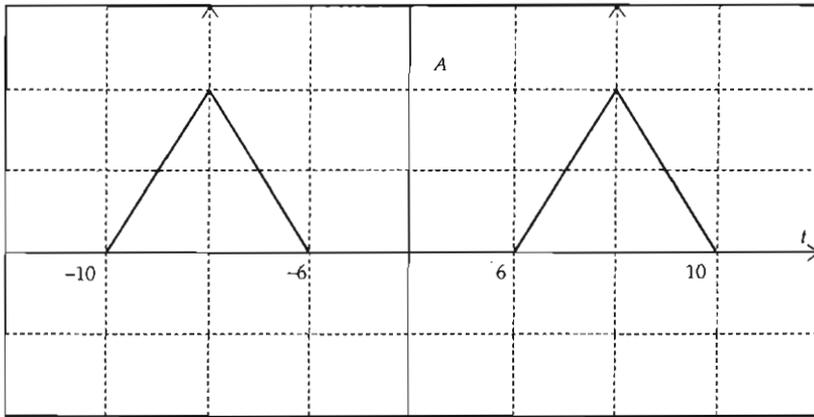


FIGURA III.39. Ejemplo de señal modulada en amplitud por una función cosenoidal

Demodulando la señal tenemos:

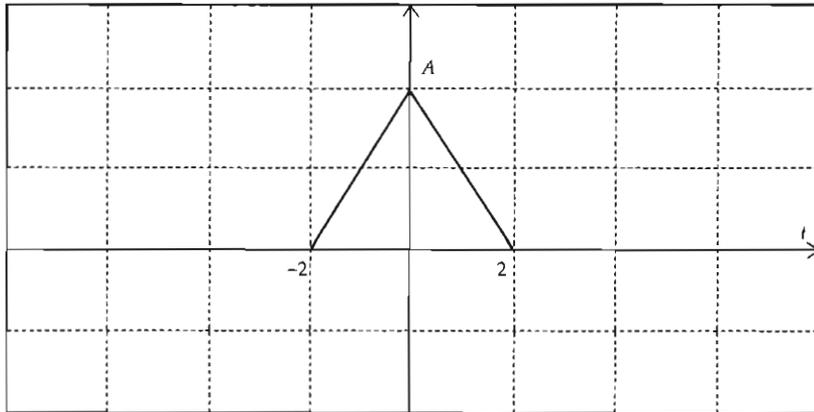


FIGURA III.40. Señal demodulada en amplitud (desplazada a la frecuencia cero)

La transformada de esta señal es

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = A2Sa^2(\omega)$$

Como $T = 8$ seg, entonces, aplicando la expresión III.27 tenemos:

$$\mathfrak{F}\{f(t+T) + f(t-T)\} = 4ASa^2(\omega)\cos(8\omega)$$

Ejemplo: Encuentre la TFIC de la señal (figura III.41).

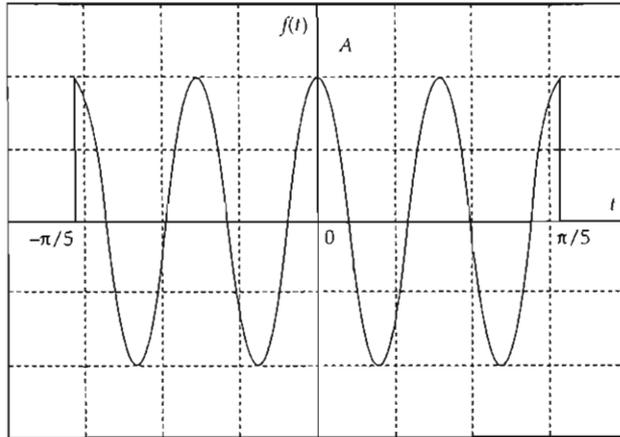


FIGURA III.41. Señal del tipo cosenoidal

En este caso aplicamos la propiedad de modulación.

La función modulada es $g(t) \cos(20t)$

Podemos obtener la transformada de la función $g(t)$ y posteriormente aplicar el teorema de modulación.

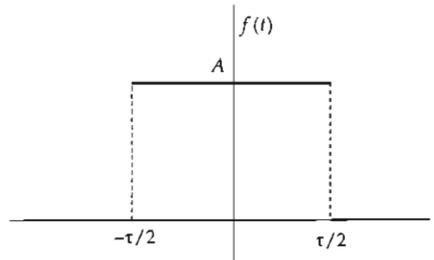


FIGURA III.42. Función ventana de duración τ y amplitud A

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = \frac{2\pi A}{5} \text{sinc}\left(\frac{\omega\pi}{5}\right)$$

Si aplicamos ahora el teorema de modulación, tenemos:

$$\mathfrak{F}\{g(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] = \left\{ \frac{A\pi}{5} \left[\text{Sa} \left[\frac{\pi}{5} (\omega + 20) \right] + \text{Sa} \left[\frac{\pi}{5} (\omega - 20) \right] \right] \right\}$$

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal (figura III.43).

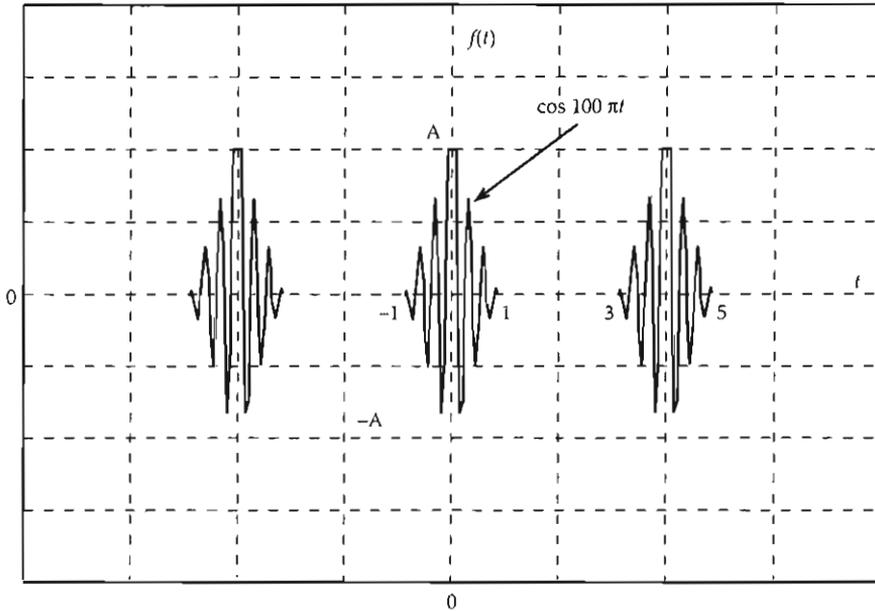


FIGURA III.43

Sabemos que para una señal periódica $f_T(t)$ su transformada es:

$$\mathfrak{F}\{f_T(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Los parámetros de la señal son: $T = 4$ seg y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$.

Observamos que el pulso es una señal triangular modulada, que podemos escribir como: $f(t) = g(t) \cos 100\pi t$ (figura III.44).

La transformada de Fourier de la señal triangular es:

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = A Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

La transformada del pulso $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= \mathfrak{F}\{g(t) \cos 100\pi t\} = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{A}{2} \left\{ Sa^2\left[\frac{1}{2}(\omega + 100\pi)\right] + Sa^2\left[\frac{1}{2}(\omega - 100\pi)\right] \right\} \end{aligned}$$

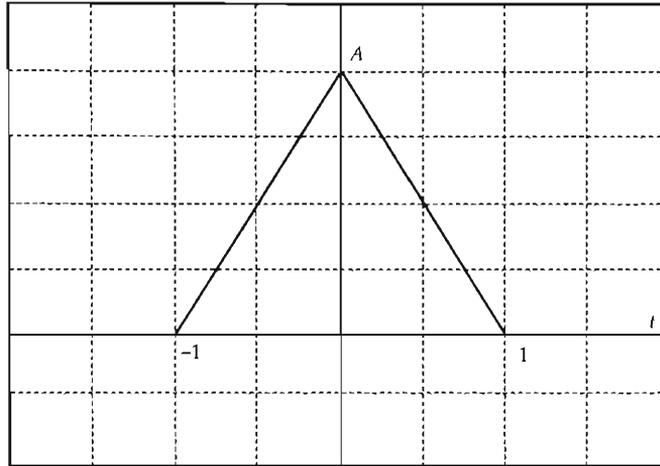


FIGURA III.44. Función triángulo de duración 2 y amplitud máxima A

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \frac{A}{2} \left\{ \text{Sa}^2 \left[\frac{1}{2}(\omega + 100\pi) \right] + \text{Sa}^2 \left[\frac{1}{2}(\omega - 100\pi) \right] \right\}$$

El coeficiente de la serie exponencial de Fourier lo podemos obtener a partir de la TFTC, si hacemos lo siguiente:

$$F_n = \frac{1}{T} F(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

$$F_n = \frac{A}{8} \left\{ \text{Sa}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{2} + 100\pi \right) \right] + \text{Sa}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{2} - 100\pi \right) \right] \right\}$$

Finalmente la transformada está dada por la expresión:

$$\mathfrak{F}\{f_T(t)\} = \frac{A\pi}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \text{Sa}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{2} + 100\pi \right) \right] + \text{Sa}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{2} - 100\pi \right) \right] \right\} \delta \left(\omega - \frac{n\pi}{2} \right)$$

(Como ejercicio, grafique la expresión anterior utilizando Matlab.)

Ejemplo: Encuentre la TFTC de la señal (figura III.45).

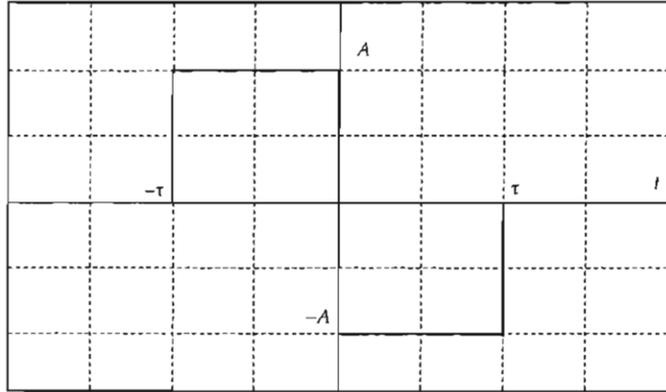


FIGURA III.45. Señal cuadrada con valor medio cero, duración 2τ y amplitud $2A$

Si integramos la señal obtenemos un pulso triangular $g(t)$, cuya transformada de Fourier es:

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = A\tau^2 Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

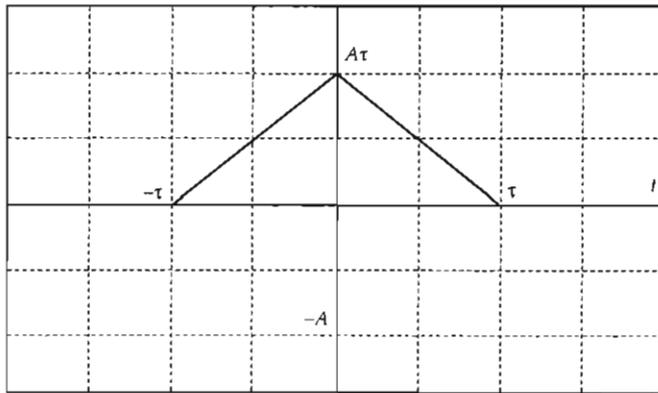


FIGURA III.46. Señal triangular de duración 2τ y valor máximo $A\tau$

como $f(t) = \frac{d(g(t))}{dt}$, entonces $\mathfrak{F}\{f(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = j\omega G(\omega)$

Si sustituimos valores, tenemos:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = j\omega A\tau^2 \frac{\text{sen}^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} = \frac{j4A}{\omega} \text{sen}^2(\omega\tau/2)$$

Otra forma de resolver este ejemplo es aplicando el teorema de desplazamiento en el tiempo; veamos cómo.

Del teorema de desplazamiento en el tiempo

$$\mathfrak{F}\{g(t - t_0)\} = G(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

como $t_0 = \tau/2$, entonces

$$\mathfrak{F}\{g(t - \tau/2)\} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau/2}$$

Para la señal tenemos

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \tau A \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{j\omega\tau/2} - \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau/2} \right]$$

simplificando tenemos

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} \right) 2j$$

finalmente la TFTC es:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \frac{j4A}{\omega} \text{sen}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO (TFTD)

Con el desarrollo de las computadoras fue posible tener señales discretas a partir de señales analógicas; para procesar este tipo de información se hizo necesario adecuar los conocimientos del análisis de señales a este nuevo tipo de señal; de allí nacieron los algoritmos para la transformada de Fourier de tiempo discreto y para la transformada de Fourier discreta. En esta parte vamos a ver cómo hacer estas operaciones, así como el uso que tienen en el análisis de señales.

El cuadro III.1 presenta un resumen de las características de las transformaciones de Fourier.

Los casos 1) y 2) ya se estudiaron en el capítulo II ("Ortogonalidad y series de Fourier") y en este capítulo ("Transformada de Fourier"). Los casos 3) y 4) se ilustran en la figura III.47 y serán objeto de explicación en lo que resta del presente capítulo.

CUADRO III.1. Tipo de transformación y dominios involucrados
(tiempo: continuo/discreto, y frecuencia: continua/discreta)

Tiempo	Transformación	Frecuencia
1) Funciones periódicas continuas	Serie de Fourier	Frecuencia discreta
2) Funciones no-periódicas continuas	Transformada de Fourier	Frecuencia continua
3) Funciones discretas	Transformada de Fourier de tiempo discreto	Frecuencia continua
4) Funciones discretas	Transformada de Fourier discreta	Frecuencia discreta

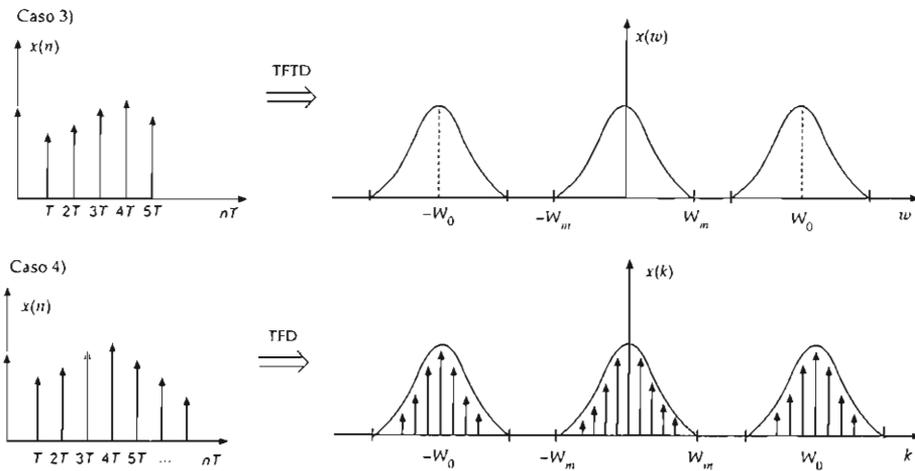


FIGURA III.47. En la parte superior de la figura vemos casos en los que el dominio del tiempo es discreto y la frecuencia continua (transformada de Fourier de tiempo discreto). La parte de abajo corresponde tanto a tiempo discreto como a frecuencia discreta (transformada de Fourier discreta)

En cuanto a los casos 3) y 4), nos limitaremos a dar sus definiciones. Primero se darán algunos ejemplos de señales discretas. Como ahora se trata de funciones discretas en el tiempo (secuencias de valores), cambiaremos la notación de paréntesis por corchetes.

SEÑALES DISCRETAS

A continuación se presentan las señales discretas comúnmente usadas en el análisis de señales:

Impulso unitario

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

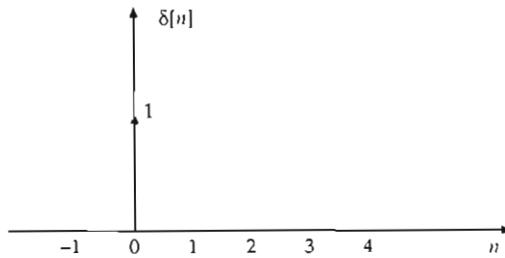


FIGURA III.48. Señal impulso unitario

Impulso unitario desplazado

$$\delta[n-i] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

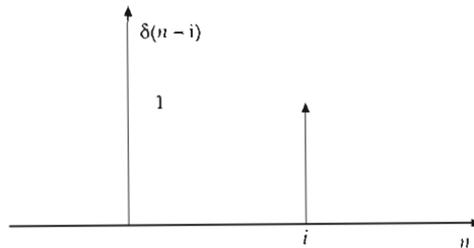


FIGURA III.49. Señal impulso unitario desplazado cierto valor i a la derecha

Análisis de señales

Escalón unitario

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

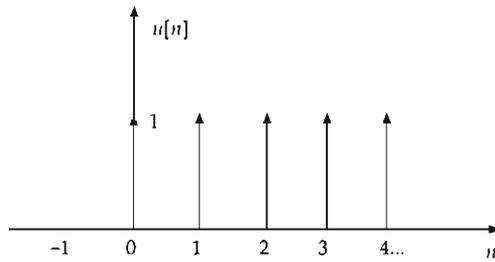


FIGURA III.50. Señal escalón unitario

Función seno

$$x[n] = A \sin(n\theta + \phi)$$

con A = amplitud
 θ = frecuencia
 ϕ = fase

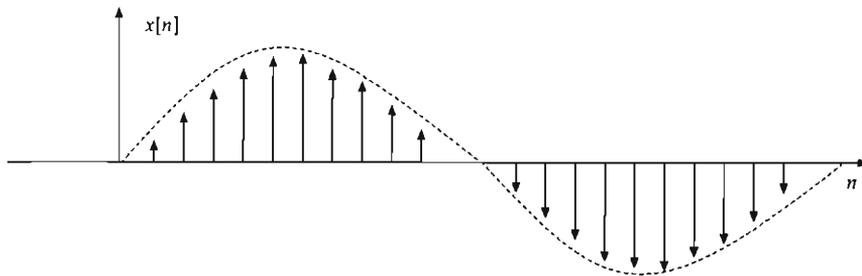


FIGURA III.51. Señal senoidal discreta

Función lineal de n

$$x_1[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 > n > 3 \\ n & \text{para } 0 \leq n \leq 3 \end{cases}$$

La gráfica se muestra a continuación:

Transformada de Fourier

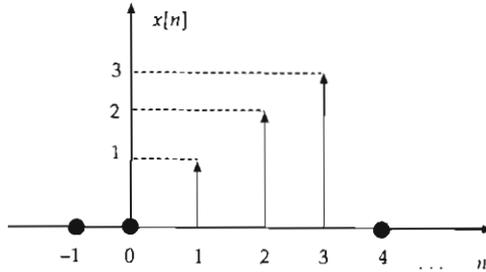


FIGURA III.52. Señal del tipo lineal

Función decreciente de n

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ (0.9)^n & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra a continuación:

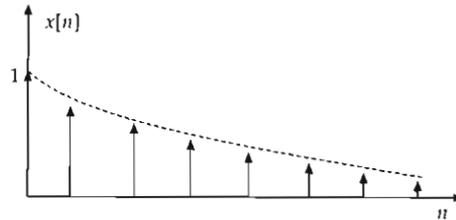


FIGURA III.53. Señal discreta decreciente

Como se dijo al principio, con la llegada de las computadoras fue posible convertir señales analógicas en discretas, lo que permitió tener muestras de las señales, y por lo tanto se hizo necesario tener la transformada de Fourier de una señal discreta.

A esta transformada se le conoce como transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD), y su expresión es la siguiente:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]e^{-j\omega nT} \quad (\text{III.28})$$

También suele escribirse como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT]e^{-j\omega nT}$$

La TTFD tiene las siguientes características:

- $X(e^{j\omega})$ es una función periódica de periodo 2π , así que solamente necesitamos graficar el intervalo $[0, 2\pi]$ para conocer la TTFD de $x[n]$.
- Note que $X(e^{j\omega})$ es una función continua a pesar de ser obtenida a partir de una función discreta.

A continuación se muestra una gráfica donde se ilustra lo anterior.

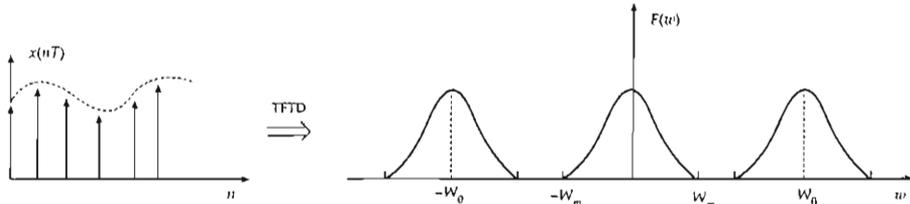


FIGURA III.54. Señal muestreada en el tiempo y su respectivo espectro empleando la transformada de tiempo discreto de Fourier

Asimismo la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto está dada por la siguiente expresión:

$$x[nT] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \quad (\text{III.29})$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

A semejanza de la TFTC, esta transformada tiene las siguientes propiedades:

Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - i] \leftrightarrow e^{-j\omega i} X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n] e^{j\omega_k n} \leftrightarrow X(\omega - \omega_k)$
Convolución	$x_1[n] \cdot x_2[n] \rightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
	$x_1[n] \cdot x_2[n] \rightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$

Ejemplo: Encuentre la TTFD de la señal $x[n] = (0.8)^n u[n]$; grafique utilizando Matlab.

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.8)^n e^{-j\omega n} u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.8)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.8e^{-j\omega})^n$$

de la expresión para serie geométrica tenemos:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - (0.8e^{-j\omega})}$$

El programa en Matlab para graficar $X(e^{j\omega})$ se muestra a continuación:

```
w = -3*pi:0.1:3*pi;
Fw = abs(1/(1 - (0.8*exp(j*w)))));
plot(w, Fw), grid, xlabel('w'), ylabel('Magnitud de F(w)')
```

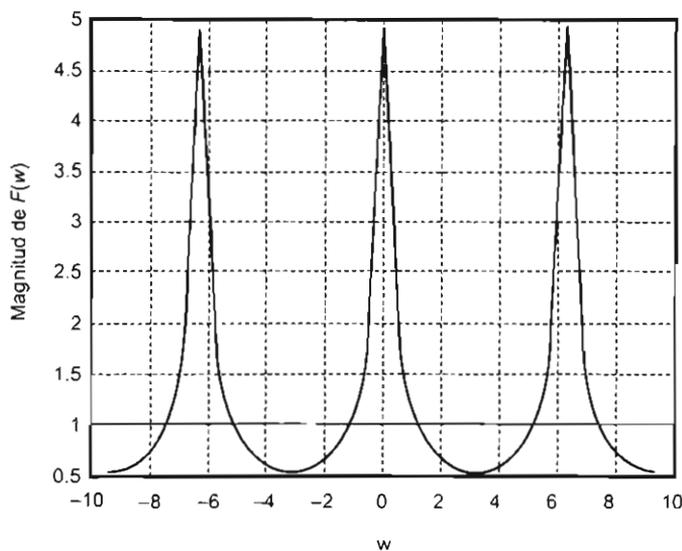


FIGURA III.55. Transformada de Fourier de tiempo discreto

Ejemplo: Encuentre y grafique la TTFD de la señal: $x[n] = 5(0.7)^{n-1} \{u(n) - u[n - 10]\}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5(0.7)^{n-1} u(n) - u(n-10)e^{-j\omega n} = 5(0.7)^{-1} \sum_{n=0}^9 (0.7^{-j\omega})^n$$

Utilizando la expresión: $\sum_{k=0}^{K-1} \alpha^k = \frac{1-\alpha^K}{1-\alpha} \quad \forall \alpha$

la TFTD es:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{5}{0.7} \left[\frac{1 - (0.7e^{-j\omega})^{10}}{1 - 0.7e^{-j\omega}} \right]$$

El programa y la gráfica se muestran a continuación:

```
w = -2*pi:0.01:2*pi;
A = 1 - (0.7*exp(j*w)).^10;
B = 1 - (0.7*exp(j*w));
Fw = 5*A./((0.7)*B);
plot(w, abs(Fw)), grid, xlabel('w'), ylabel('Magnitud de F(w)')
```

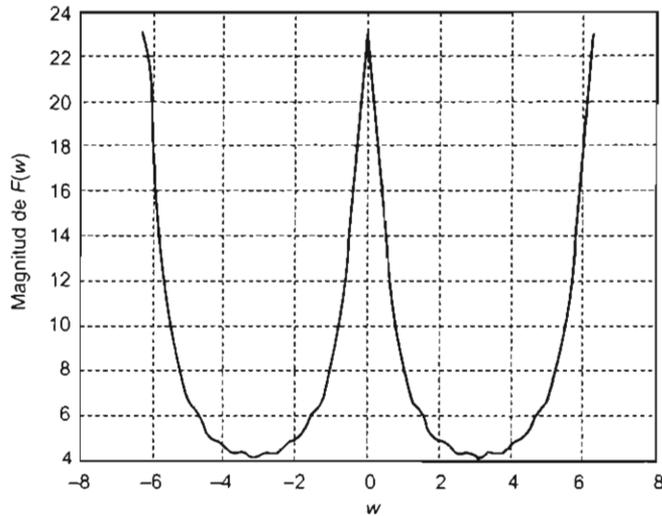


FIGURA III.56. Transformada de Fourier de tiempo discreto

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA (TFD)

La transformada de Fourier de tiempo discreto nos da información del espectro de una secuencia discreta, pero no nos permite manipular los datos del espectro utilizando una computadora. Para solucionar esto se creó la transformada de Fourier discreta (TFD).

Este tipo de transformada se utiliza cuando se tiene una señal de tiempo discreto y se quiere hacer una representación de la señal en frecuencia discreta.

Transformada de Fourier

Tiempo discreto	T. Fourier discreta	Frecuencia discreta
$[n]$	\Leftrightarrow	$[k]$

El par de transformadas del tiempo y frecuencia para una secuencia discreta periódica son las siguientes:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (\text{III.30})$$

donde N es el periodo de $x[n]$

La transformada inversa está dada por la siguiente expresión:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (\text{III.31})$$

La transformada de Fourier discreta satisface las mismas propiedades que la transformada de Fourier en tiempo continuo.

- Linealidad
- Simetría
- Desplazamiento en tiempo
- Desplazamiento en frecuencia
- Convolución (lineal o periódica), etcétera

La utilidad de la TDF radica en que nos permite una aproximación digital a la transformada de Fourier de una señal continua. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Encuentre la TTFD y la TFD de la secuencia: $x[n] = [2, 2, 2, 2]$, $n = [0, 1, 2, 3]$; grafique utilizando Matlab.

La TTFD de $x[n]$ es:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\omega n} = 2 \left(\frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \right)$$

Su gráfica se muestra en la figura III.57.

La transformada de Fourier discreta se calcula a continuación:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn}$$

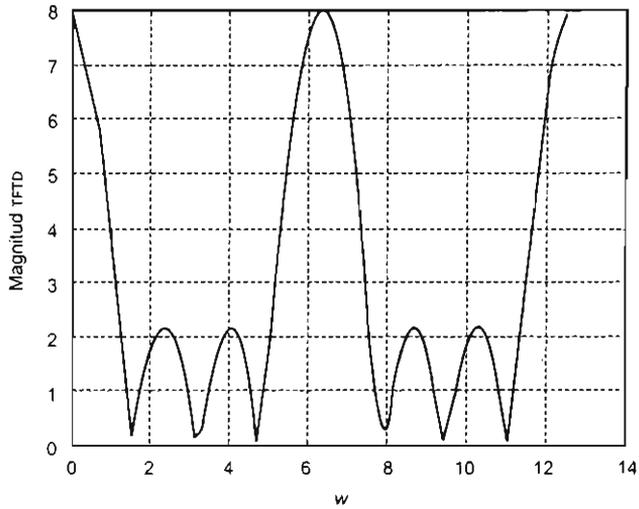


FIGURA III.57. Transformada de Fourier de tiempo discreto

donde W_N es el kernel de Fourier y en este caso vale $W_N = e^{-j2\pi/4} = -j$; entonces:

$$|X[k]| = [8.0, 0, 0, 0]$$

(verifique los valores utilizando el programa que viene en la sección de Matlab). La gráfica se muestra a continuación:

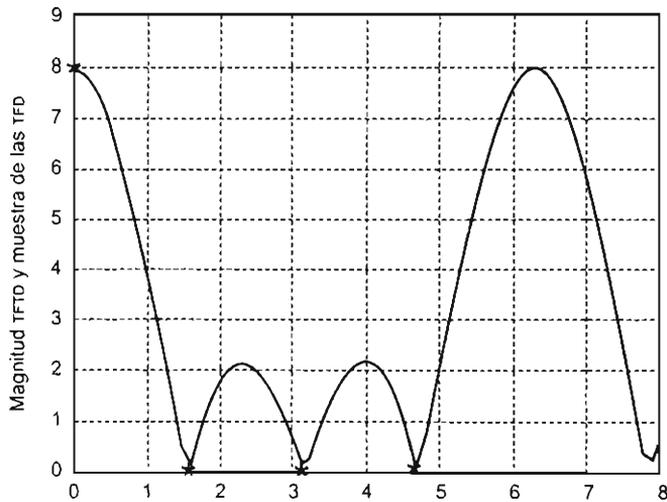


FIGURA III.58. Transformada de Fourier discreta y de tiempo discreto en asteriscos

Como puede verse en la gráfica anterior, la resolución del espectro es muy pobre; para aumentarla agregamos ceros a la secuencia. Es decir, ahora tenemos $x[n] = [2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, entonces ahora tendremos $W_N = e^{-j2\pi/12} = e^{-jn/6}$; la TFD tiene ahora los valores:

$$X(k) = [8, 4.7321 - 4.7321i, -3.4641i, 0i, 2.0000 + 0.0i, 1.2679 - 1.2679i, -0.0000i, 1.2679 + 1.2679i, 2.0000 + 0i, 0.0 - 0.0i, -0.0 + 3.4641i, 4.7321 + 4.7321i]$$

La gráfica se muestra a continuación:

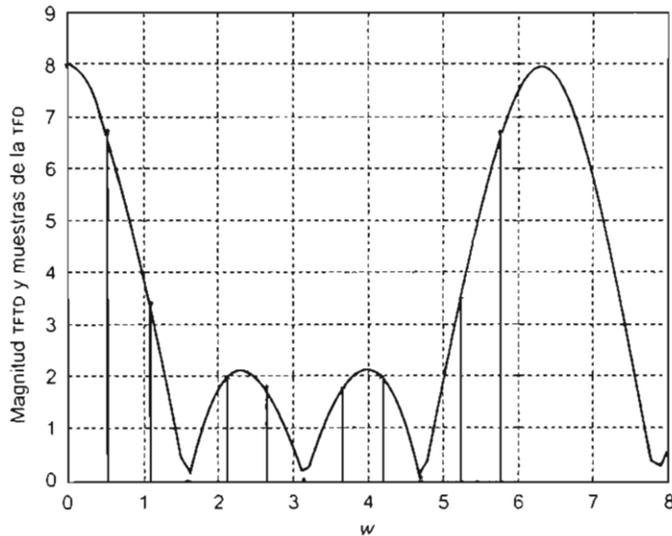


FIGURA III.59. Transformada de Fourier discreta y de tiempo discreto

Como se puede observar, al aumentar los ceros aumenta también la resolución del espectro. Actualmente se utiliza el algoritmo llamado transformada rápida de Fourier (FFT) para realizar estos cálculos ya que es más eficiente.

CÁLCULO DE LA TFD A PARTIR DE UNA SEÑAL CONTINUA

Para poder calcular la transformada de Fourier de una señal continua $x(t)$ se deben dar los siguientes pasos:

Muestreo => señal numérica $x[n]$

Cálculo de la TFD (para el cálculo de la TFD se requiere una señal de duración finita)

Truncamiento temporal
Cálculo de la TFD => muestreo espectral

Los efectos generados en las etapas anteriores son:

- A) Muestreo => periodización espectral
- B) Truncamiento temporal

Veamos qué significan estos efectos.

Truncamiento temporal

Principalmente veremos en qué consiste el truncamiento temporal.

Partiendo de la señal $x[n]$ de duración infinita, ésta $x[n]$ será transformada en una secuencia de longitud N , $X_N(n)$, es decir:

$$X_N(n) = x[n]\phi_N(n)$$

$$\text{con } \phi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pero el hecho de truncar o cortar una señal $x[n]$ en puntos diferentes de los cruces por cero induce un efecto de altas frecuencias. Ejemplo:

Si la función $\text{sen}(x)$ la ventaneamos o multiplicamos por una función $N(x)$ tal que

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 3/2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

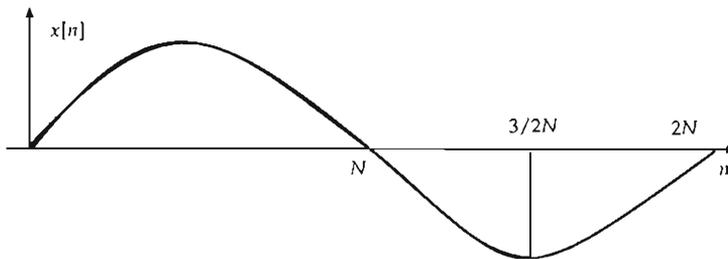


FIGURA III.60. Señal senoidal, tomada exactamente un periodo (no existe discontinuidad en la región considerada)

Discretizando la señal, tenemos:

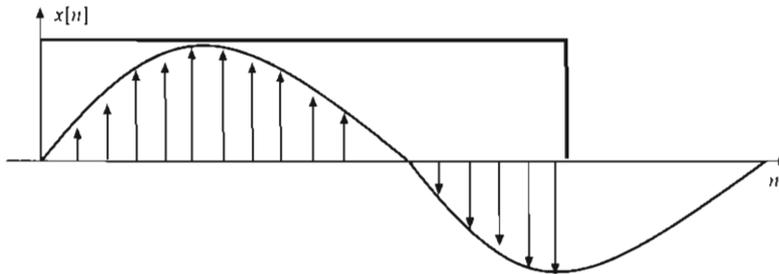


FIGURA III.61. Señal senoidal, tomando tres cuartas partes del periodo (existe discontinuidad en la región considerada)

Si la señal $f(x)$ está ya limitada en banda, al momento de hacer el truncamiento se generan componentes de alta frecuencia, los cuales causarán una distorsión en el dominio de las frecuencias.

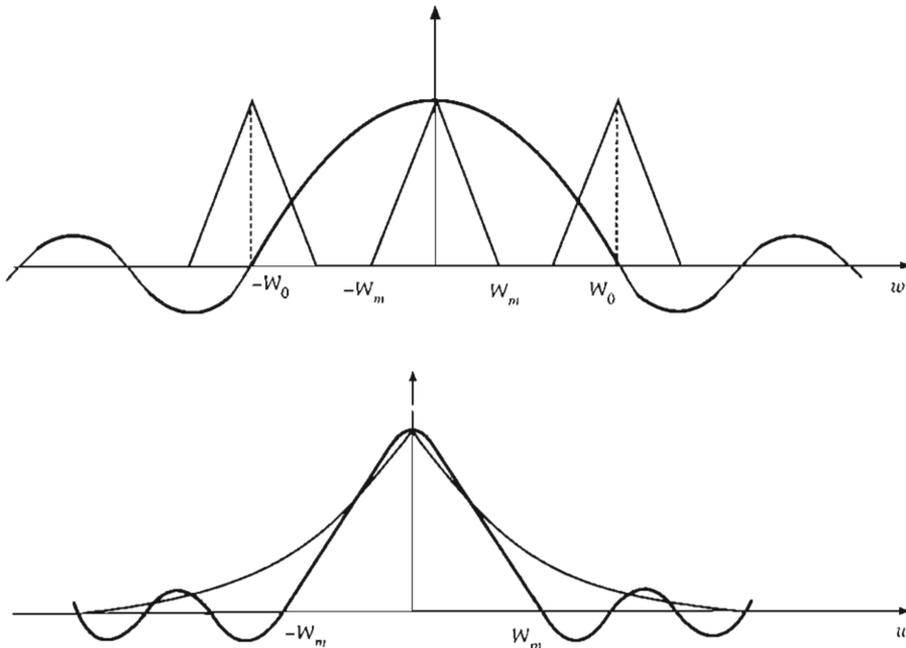


FIGURA III.62. Efecto en la frecuencia cuando se trunca una señal en el tiempo, tomando una ventana cuadrada (se inducen o generan componentes de alta frecuencia que no corresponden a la señal original)

Para minimizar el efecto de truncamiento, se utilizan otro tipo de ventanas diferentes a las cuadradas, como son:

Ventana rectangular

$$W_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ventana Bartlett

$$W_{BN}(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & \text{si } n \in [0, (N-1)/2] \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \text{si } n \in [(N-1)/2, N-1] \\ 0 & \text{si } n \notin [0, N-1] \end{cases}$$

Ventana Hamming

$$W_{hN}(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \text{ para } n \in [0, N-1]$$

Ventana Hamming

$$W_{HN}(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \text{ para } n \in [0, N-1]$$

Ventana Blackman

$$W_{bN}(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \text{ para } n \in [0, N-1]$$

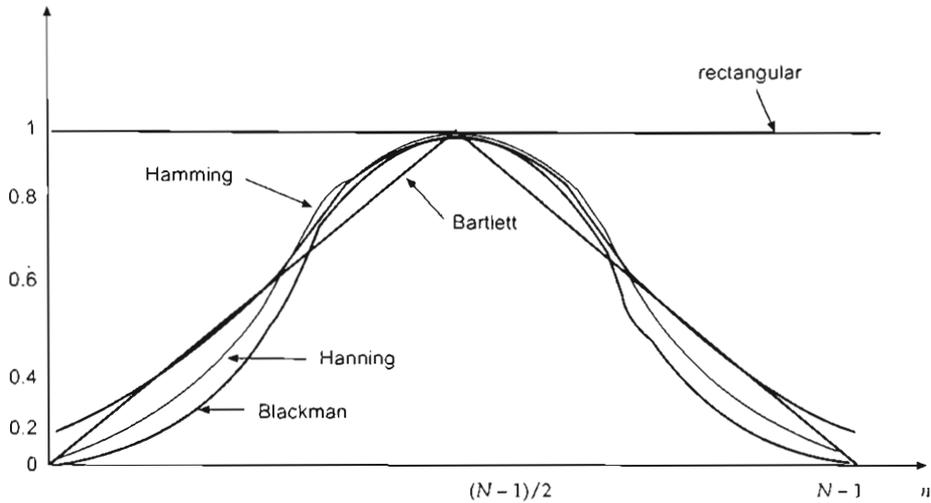


FIGURA III.63. Ejemplos de ventanas comúnmente usadas para llevar a cabo el truncamiento temporal

EJERCICIO EN MATLAB

Genere dos señales de la función seno con 128 muestras por señal:

$$y_1 = \text{sen}(0.5t)$$

$$y_2 = \text{sen}(0.55t)$$

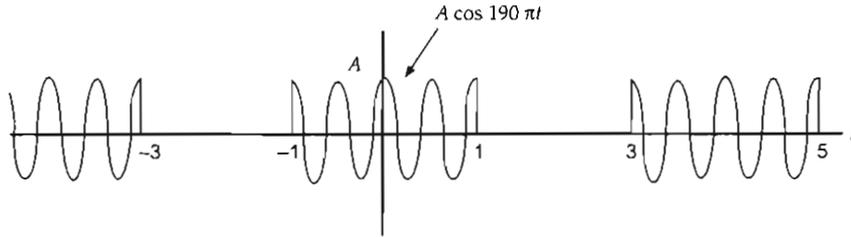
Multiplique cada una de las señales $[y_1, y_2]$ por cada una de las ventanas y obtenga sus TF respectivas. Analice qué efecto produce cada ventana.

Ejercicio de periodización del espectro

- Genere una función a muestrear (x muestras) ($\cos(t)$)
- Genere un tren de impulsos al doble de la frecuencia
- Multiplique ambas funciones y obtenga la TF. Observe el efecto de periodización en la frecuencia.

◆ EJERCICIOS DEL CAPÍTULO III

1) Encuentre la TFTC de la señal que se muestra:



Utilizando Matlab grafique el espectro.

2) Demuestre las siguientes expresiones:

$$\mathfrak{F}[\cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + j \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\mathfrak{F}[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} - j \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

- 3) Un voltaje tiene la forma $v(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)u(t)$. Encuentre la transformada de Fourier de $v(t)$. ¿Cuál es el ángulo de fase $\Phi(\omega)$?
- 4) Encuentre la siguiente integral de convolución:

$$u(t) * e^{-t} u(t)$$

- 5) Encuentre $f(t) = F^{-1} \left[\frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} \right]$, transformada de Fourier inversa.
- 6) Encuentre la transformada de Fourier de tiempo discreto de las siguientes secuencias:
- a) $x[n] = [1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 3 \ 1 \ 0 \ 2]$
 b) $x[n] = (0.7)^{n-1} u(n - 10)$
 c) $x[n] = \cos(n - \pi/4) u(n - 12)$

Grafique las señales y su correspondiente TFTD; utilice Matlab.

7) Escriba un programa para calcular la transformada de Fourier discreta.

- 8) Utilice el programa anterior para encontrar la TFD de las siguientes secuencias:

a) $x[n] = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$

b) $x[n] = (0.5)^n u(n - 15)$

Grafique las señales, así como su TFD.

- 9) Encuentre y grafique las TFD de las ventanas descritas al final de este capítulo. Haga las observaciones correspondientes.

Teoría de muestreo

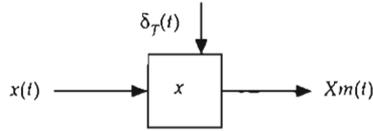
INTRODUCCIÓN

EL INTERÉS DE MUESTREAR una señal $x(t)$ en tiempo continuo, para tener una representación de ésta en el dominio discreto, se ha desarrollado en gran medida gracias a la facilidad, accesibilidad, bajo costo y facilidad de reproducir el procesamiento digitalmente. Si nos interesa tener una representación de la señal $x(t)$ (dominio continuo) en el dominio discreto $x(nT)$, o simplemente $X(n)$, esta representación tendrá ciertas restricciones, las cuales describiremos aquí (señal a banda limitada y frecuencia de muestreo). Finalmente, la señal muestreada $x(n)$ o $x(nT)$, una vez procesada, puede ser reconstruida en el dominio continuo $x(t)$ por diferentes métodos.

En el presente capítulo nos enfocaremos a definir las características que debe tener una señal que se desea convertir de analógica a digital; asimismo, se presentará la teoría de muestreo (real e ideal). Los análisis serán tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Una vez procesada la información, se explicará la teoría que permite reconstruir una señal analógica partiendo de valores digitales (interpolaciones lineales).

MUESTREO IDEAL

El proceso de muestrear idealmente consiste en multiplicar, en el dominio del tiempo, una señal continua $x(t)$ por una función de tren de impulsos unitarios, y así obtener valores instantáneos a la cadencia, determinada por el tren de impulsos, es decir:



Donde:

- $x(t)$ es una señal de tiempo continuo limitada en banda
- $\delta_T(t)$ es un tren de impulsos unitarios de periodo T
- $X_m(t)$ es la función $x(t)$ muestreada a periodos T

Gráficamente, se observa en las figuras IV.1, IV.2, y IV.3, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

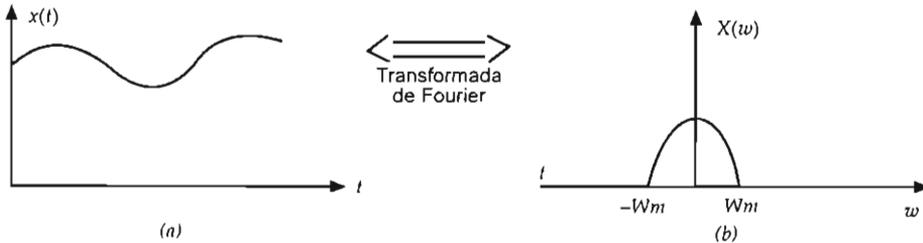


FIGURA IV.1. Ejemplo de señal analógica limitada en banda: a) en tiempo y b) en frecuencia

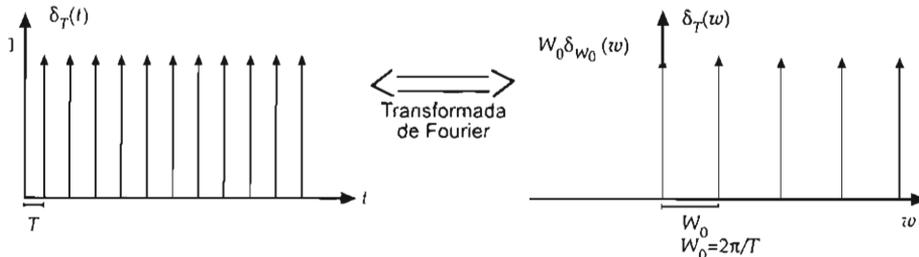


FIGURA IV.2. Tren de impulsos de Dirac: a) en tiempo y b) en frecuencia

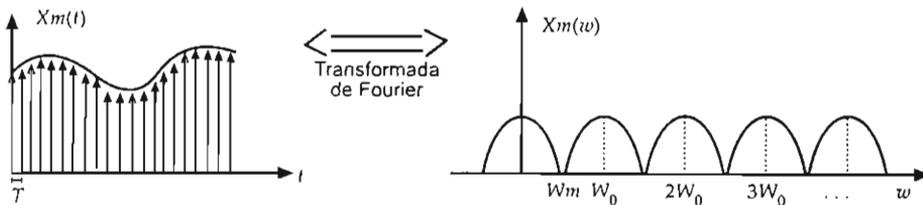


FIGURA IV.3. Efecto de muestreo en tiempo, produciendo el efecto de periodización de espectro en frecuencia

El desarrollo analítico se expresa a continuación. Cabe aclarar que $\delta_T(t)$ es un tren de impulsos de amplitud unitaria y espaciados cada periodo T . Adicionalmente, los valores de $X(t)$ son continuos.

La señal $X_m(t)$ será el resultado de multiplicar el tren de impulsos $\delta_T(t)$ por la señal $X(t)$, es decir, se escribe como: $X_m(t) = X(t) \delta_T(t)$

Si sustituimos la función $\delta_T(t)$ por su equivalente suma de impulsos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ espaciados cada T segundos, como resultado se tiene la ecuación IV.1:

$$X_m(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) \quad (IV.1)$$

Si se toman las muestras cada $t = nT$, se pasa de tiempo continuo a tiempo discreto para la señal $x(t)$.

En el dominio discreto, la ecuación IV.1 se puede escribir como la ecuación IV.2:

$$X_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad (IV.2)$$

Posteriormente se analizará la representación en frecuencia de la ecuación IV.2 tanto de manera analítica como gráfica.

IMPORTANCIA DE LA ELECCIÓN DEL PERIODO T EN LA FUNCIÓN TREN DE IMPULSOS $\delta_T(t)$

Desde el punto de vista gráfico en el dominio del tiempo, se puede apreciar en la figura IV.4 la importancia de tomar apropiadamente el intervalo T de la función $\delta_T(t)$.

Se debe tener cuidado, ya que varias señales continuas $X_1(t)$, $X_2(t)$ y $X_3(t)$ (por ejemplo) pueden ser muestreadas en los mismos puntos, en los cuales sus amplitudes coinciden. Sin embargo, se puede apreciar que la señal $X_3(t)$ varía más rápidamente que $X_2(t)$ y ésta a su vez más rápido que $X_1(t)$; si se utilizara la misma función $\delta_T(t)$ habría información que se perdería de $X_3(t)$ y probablemente también de $X_2(t)$. Si el objetivo que se persigue es no perder información de la señal analógica al pasarla a su correspondiente digital, se debe muestrear a una velocidad diferente, dependiendo de las variaciones de cada señal. (El teorema de muestreo, se explica en detalle más adelante.)

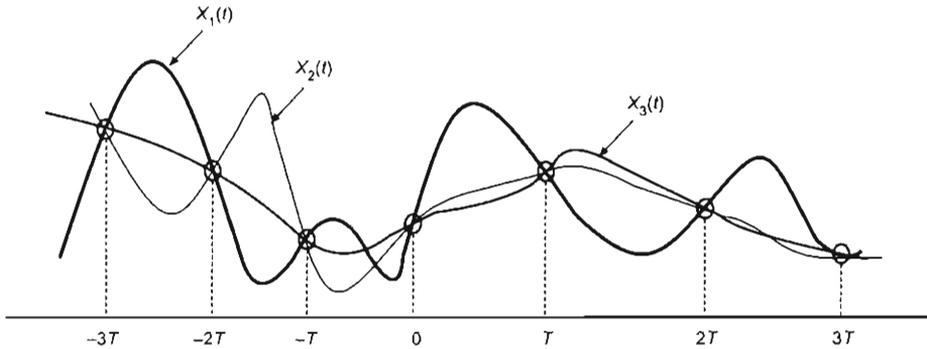


FIGURA IV.4. Tres señales en tiempo continuo con valores idénticos en múltiplos enteros de T , muestreadas a un mismo periodo de tiempo T

Para poder representar cada una de las señales en el dominio discreto, éstas se deben muestrear a la cadencia dada por los cambios de la señal, es decir en función directa de la frecuencia máxima de cada señal.

Pero veamos desde un punto de vista más formal qué condiciones se deben imponer a la señal y al tren de impulsos para tener una representación en el dominio discreto de la señal analógica, y posteriormente poder reconstruir la señal original partiendo de las muestras (sin pérdida de información).

Sabemos que la transformada de Fourier de la multiplicación de dos funciones en el dominio del tiempo es la convolución de las transformadas de Fourier de las dos funciones involucradas; es decir, la propiedad de convolución de la transformada de Fourier se expresa en la ecuación IV.3:

$$\mathfrak{S}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}[F_1(w) * F_2(w)] \quad (IV.3)$$

donde

$$\mathfrak{S}[f_1(t)] = F_1(w)$$

$$\mathfrak{S}[f_2(t)] = F_2(w)$$

el símbolo \mathfrak{S} representa la transformada de Fourier y el $*$ significa la operación de convolución.

Por otro lado, a la función $f(t)$ (la cual vamos a muestrear) le imponemos la siguiente condición en el dominio de la frecuencia:

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_m \quad (\text{IV.4})$$

donde ω_m es la frecuencia máxima de la señal analógica de $f(t)$; es decir, una función a banda limitada. La figura IV.5 muestra un ejemplo.

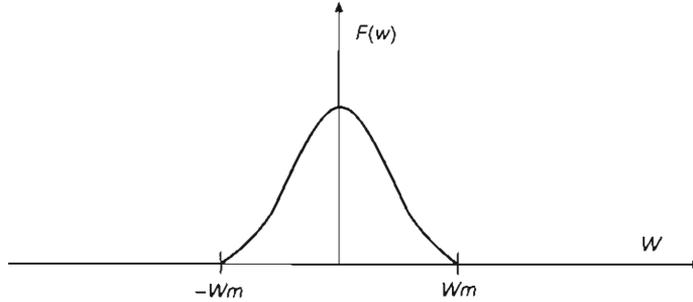


FIGURA IV.5. Señal a banda limitada

Por otro lado, el tren de impulsos $\delta_T(t)$ tiene como transformada otro tren de impulsos espaciados a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y de amplitud ω_0 , es decir:

$$\delta_T(t) = \dots + \delta(t+2T) + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots \quad (\text{IV.5})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (\text{IV.6})$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (\text{IV.7})$$

$$\mathfrak{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{IV.8})$$

La ecuación IV.8 indica que la transformada de Fourier de un tren de impulsos sigue siendo otro tren de impulsos, espaciados cada ω_0 y de amplitud ω_0 .

Empleando la propiedad de la transformada de Fourier para la convolución y las ecuaciones IV.4 y IV.8, se puede obtener la representación en frecuencia de la señal muestreada $f_m(t)$.

$$\mathfrak{F}[f_m(t)] = F_m(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)] = \frac{\omega_0}{2\pi} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] \quad (\text{IV.9})$$

si $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (denominada frecuencia de muestreo), entonces la transformada se puede reescribir como:

$$\mathfrak{S}[f_m(t)] = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{2\pi} \right) [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] \quad (\text{IV.10})$$

$$= \frac{1}{T} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] \quad (\text{IV.11})$$

Si sustituimos la ecuación IV.8 (tren de impulsos en la frecuencia), se tiene:

$$= \frac{1}{T} \left[F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 n) \right] \quad (\text{IV.12})$$

Ahora, se puede escribir la sumatoria sobre la variable n al inicio de la expresión, para quedar:

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{IV.13})$$

En la expresión IV.13 se puede apreciar que la convolución para cada valor de n , es válida en un solo punto, cuando el argumento de la delta, $\omega - n\omega_0 = 0$, hace válida la frecuencia igual a n -veces múltiplo de la frecuencia ω_0 ($\omega = n \omega_0$); quedando el resultado de la convolución para el valor ($n \omega_0$) como la función $F(\omega)$, evaluada en $(\omega - n\omega_0)$.

$$\mathfrak{S}[f_m(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \quad (\text{IV.14})$$

La expresión IV.14 nos indica una periodización de espectros cada $n\omega_0$; la amplitud de los espectros están afectados por un factor $1/T$, recordando que T es el periodo de muestreo.

Pero veamos, desde el punto de vista gráfico ¿qué nos indica la expresión IV.14? En la figura IV.6 se tienen las señales en el dominio de la frecuencia de la señal a banda limitada $F(\omega)$; IV.6(a), el tren de impulsos a la frecuencia $n\omega_0(\omega)$, IV.6(b), y el resultado de la convolución de IV.6(a) y IV.6(b) generando la periodización del espectro IV.6(c).

Teoría de muestreo

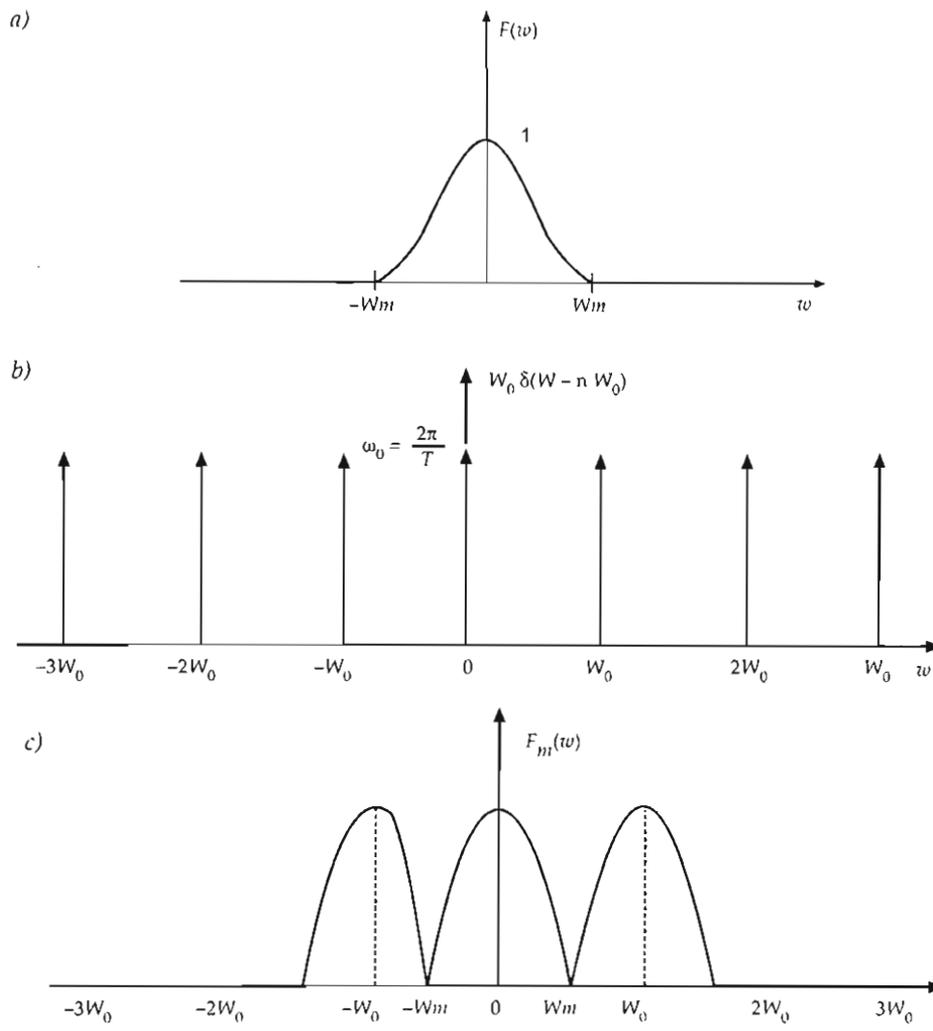


FIGURA IV.6. Efecto de periodización del espectro:
 a) señal a banda limitada, b) transformada de Fourier del tren de impulsos,
 y c) resultado de la convolución de las señales a) y b)

TEOREMA DE MUESTREO

En la figura IV.6, se pueden apreciar los siguientes puntos:

- 1) El espectro $F(w)$ se repite cada nw_0
- 2) La amplitud de $F(w)$ se ve afectada por $(1/T)$
- 3) Entre nw_0 y $(n + 1)w_0$ debe de poder contenerse dos veces w_m , siendo w_m la frecuencia máxima de la señal (señal a banda limitada).

Según los comentarios anteriores, se puede poner de manera explícita el teorema de muestreo, es decir:

Sea $f(t)$ una señal de banda limitada con $F(w) = 0$ para $|w_0| \geq 2w_m$. Entonces $f(t)$ está determinada unívocamente por sus muestras $f(nT)$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si

$$w_0 \geq 2w_m \quad (\text{IV.15})$$

donde $w_0 = \frac{2\pi}{T} =$ frecuencia de muestreo

$$f_0 \geq 2f_m \quad (\text{IV.16})$$

con

$$\begin{aligned} f_0 &= \text{frecuencia de muestreo} \\ f_m &= \text{frecuencia máxima de la señal} \end{aligned}$$

Definiremos W como la frecuencia angular y f como la frecuencia en ciclos por segundo.

Al teorema de muestreo también se le llama *frecuencia de Nyquist* o *teorema de Shannon*.

Si no se cumple la relación IV.15 o IV.16 se produce el efecto denominado "recubrimiento de espectro", como se puede apreciar en la figura IV.7. Una vez producido el recubrimiento de espectro, NO se podrá recuperar la señal analógica correspondiente.

RECONSTRUCCIÓN DE LA SEÑAL ANALÓGICA A PARTIR DE LAS MUESTRAS DIGITALES

Al proceso de reconstruir la señal analógica a partir de sus muestras digitales se le denomina "conversión digital-analógica". En la explicación siguiente, partimos de que la fase de muestreo (conversión analógica-digital) fue realizada por muestreo ideal, adicionalmente, partiremos de la representación en frecuencia, es decir, del espectro periodizado (figura IV.8). Hechas las

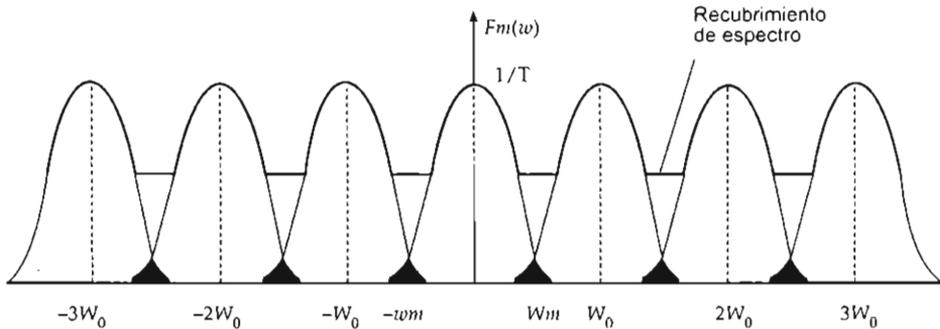


FIGURA IV.7. Efecto de recubrimiento de espectro cuando no se respeta el teorema de muestreo

aclaraciones anteriores se pueden plantear dos situaciones posibles: a) No se respeta el teorema de muestreo, y b) Sí se respeta el teorema.

a) No se respeta el teorema de muestreo, es decir, que $w_m > \frac{W_0}{2}$, entonces no se puede reconstruir la señal $f(t)$.

b) Si se respeta el teorema de muestreo implica que $w_m \leq \frac{W_0}{2}$; entonces, partiendo del espectro periodizado, el cual está afectado por una amplitud $1/T$, lo que se tiene que realizar es una multiplicación con un filtro de ganancia T . Cabe remarcar que se puede filtrar cualquiera de los espectros, pero el más sencillo es el que se encuentra alrededor de la frecuencia cero. Las frecuencias de corte del filtro ideal pueden tener dos puntos de corte: 1) desde $-w_m$ hasta w_m , y 2) desde $-\frac{W_0}{2}$ hasta $\frac{W_0}{2}$ (véase la figura IV.8). El efecto del filtro será eliminar todos los espectros restantes, de tal modo que calcular la transformada inversa de Fourier de la señal $F(w)$ dará como resultado $f(t)$.

DESARROLLO ANALÍTICO PARA EL CÁLCULO DE LA SEÑAL ORIGINAL ANALÓGICA A PARTIR DE MUESTRAS DIGITALES

En la sección anterior se empezó a esbozar gráficamente la reconstrucción de la señal analógica a partir de muestras digitales, ahora se llevará a cabo el desarrollo analítico. Dicho desarrollo parte de la definición de la transformada inversa de Fourier; a modo de recuerdo ponemos la definición en la ecuación IV.17.

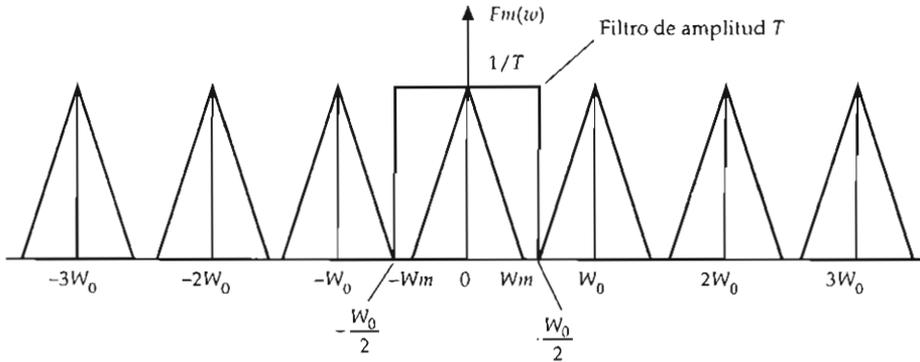


FIGURA IV.8. Filtro de amplitud T y de límites $-\frac{W_0}{2}$ a $\frac{W_0}{2}$, filtro ideal.

Filtrado de un espectro, con el fin de poder recuperar la señal original, primero a $F(w)$ y posteriormente a $f(t)$, a través de la transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jw t} dw \quad (IV.17)$$

donde sabemos que $F(w)$ es la función en el dominio de la frecuencia.

Partiendo de la ecuación IV.17 y sustituyendo la función periodizada $F_m(w)$, multiplicamos por un filtro ideal rectangular definido de $-\frac{W_0}{2}$ a $\frac{W_0}{2}$ y de amplitud T , dando la expresión de la ecuación IV.18.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W_0/2}^{W_0/2} T F_m(w) e^{jw t} dw \quad (IV.18)$$

Si sustituimos la expresión de $F_m(w)$ como la transformada directa de Fourier de muestras discretas:

$$F_m(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-jw n T} \quad (IV.19)$$

siendo $t = nT$, se tienen muestras de la señal cada nT .

Sustituyendo la ecuación IV.19 en IV.18, se genera el siguiente resultado:

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-W_0/2}^{W_0/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-jw n T} \right] e^{jw t} dw \quad (IV.20)$$

Intercambiando el orden de la integral y la sumatoria queda:

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \int_{-W_0/2}^{W_0/2} e^{-jnT} e^{j\omega t} d\omega \quad (IV.21)$$

Agrupando lo que está en términos de la variable w :

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \int_{-W_0/2}^{W_0/2} e^{j\omega(t-nT)} d\omega \quad (IV.22)$$

Integrando con respecto a w :

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \left[\frac{1}{(t-nT)j} e^{j(t-nT)\omega} \right]_{-W_0/2}^{W_0/2} \quad (IV.23)$$

Se evalúan los límites de la integral, quedando:

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \left\{ \frac{1}{j(t-nT)} \left[e^{j(t-nT)W_0/2} - e^{-j(t-nT)W_0/2} \right] \right\} \quad (IV.24)$$

Aplicando la propiedad de Euler del seno:

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \left\{ \frac{2}{(t-nT)} \frac{\left[e^{j(t-nT)W_0/2} - e^{-j(t-nT)W_0/2} \right]}{2j} \right\} \quad (IV.25)$$

Complementando la expresión de la forma $\frac{\text{seno}(x)}{x}$ (función de muestreo), queda:

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \left[\frac{2}{(t-nT)} \text{sen}[(t-nT)\omega_0/2] \right] \text{ si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (IV.26)$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\text{sen} \left[(t-nT) \left(\frac{2\pi}{T} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right]}{\pi(t-nT)} \quad (IV.27)$$

Finalmente tenemos la expresión IV.27, la cual es la convolución de dos señales, una de ellas es el tren de impulsos de amplitud dados por los

valores de la señal original a los intervalos nT ; la otra señal es una función de muestreo (sampling):

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\text{sen}\left[(t-nT)\frac{\pi}{T}\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (\text{IV.28})$$

Expresada en términos de la función sinc(x), queda:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \text{sinc}\left[(t-nT)\frac{\pi}{T}\right] \quad (\text{IV.29})$$

Gráficamente se puede apreciar la reconstrucción de la señal analógica $f(t)$ a partir de muestras digitales en la figura IV.9. Podemos apreciar cómo sobre cada delta se posiciona una función de muestreo

$$\frac{\text{sen}\left[(t-nT)\frac{\pi}{T}\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

Los valores que no existían entre nT y $(n+1)T$ han sido ahora interpolados por la suma de todas las funciones de muestreo a un tiempo dado (hay valores positivos y negativos).

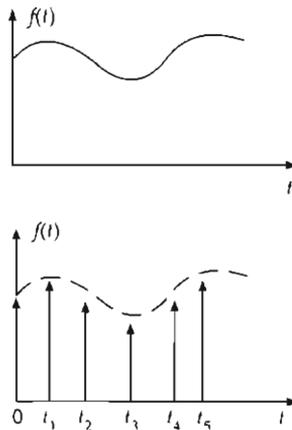


FIGURA IV.9. Reconstrucción de la señal analógica a partir de muestras digitales

MUESTREO REAL

Para el muestreo real, se considera que no existen deltas de Dirac, y lo único que contamos son funciones cuadradas (o ventanas).

a) Si deseamos muestrear una señal de tiempo continuo $x(t)$, lo que hace el muestreador "bloqueador" es sujetar el valor instantáneo de la señal al instante nT y decir que ése es el valor de la señal del intervalo (nT) al intervalo $(n + 1)T$, y así, pasa después a una fase de cuantización y representación de los valores. Un ejemplo gráfico se muestra en la siguiente figura:

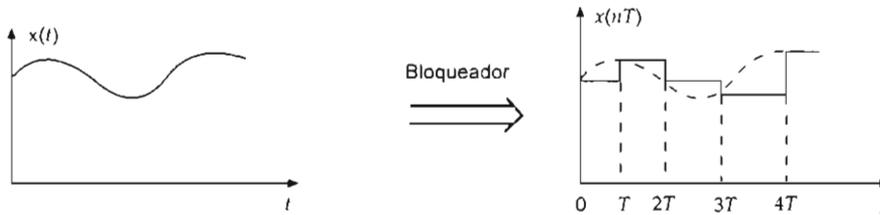


FIGURA IV.10. Proceso de muestreo real con la técnica de "bloqueo"

En el dominio del tiempo es convolucionar la función $x(nT)$ con la función $\Pi(t)$. En el dominio de la frecuencia resulta una multiplicación de espectros (propiedad de convolución de la transformada de Fourier).

La transformada de Fourier de la ventana de duración T y amplitud A es

$$\Pi(\omega) = \frac{A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

De forma gráfica, podemos ver el efecto de convolucionar las dos señales en la figura IV.11, donde se puede observar que se genera distorsión del espectro por la multiplicación de ambas señales.

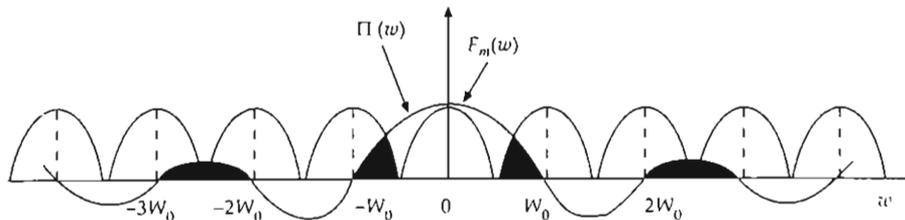


FIGURA IV.11. Resultado de convolucionar las muestras de $f(t)$ con una función ventana

Si ahora el filtro en el dominio de la frecuencia es una función *sampling* al cuadrado, veremos cómo afecta la función en el dominio del tiempo.

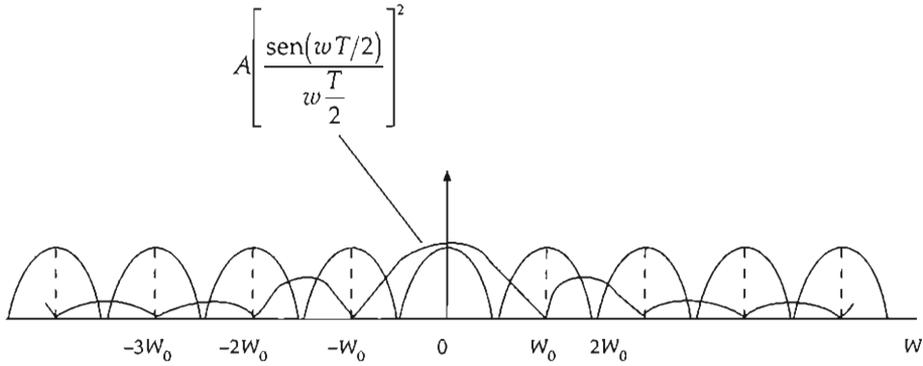


FIGURA IV.12. Efecto de multiplicar el espectro periodizado $F_m(w)$ con una función del tipo *sampling* al cuadrado

En el dominio del tiempo, la función resultante será la convolución de $f(t)$ con $F^{-1}[\text{sampling}^2]$.

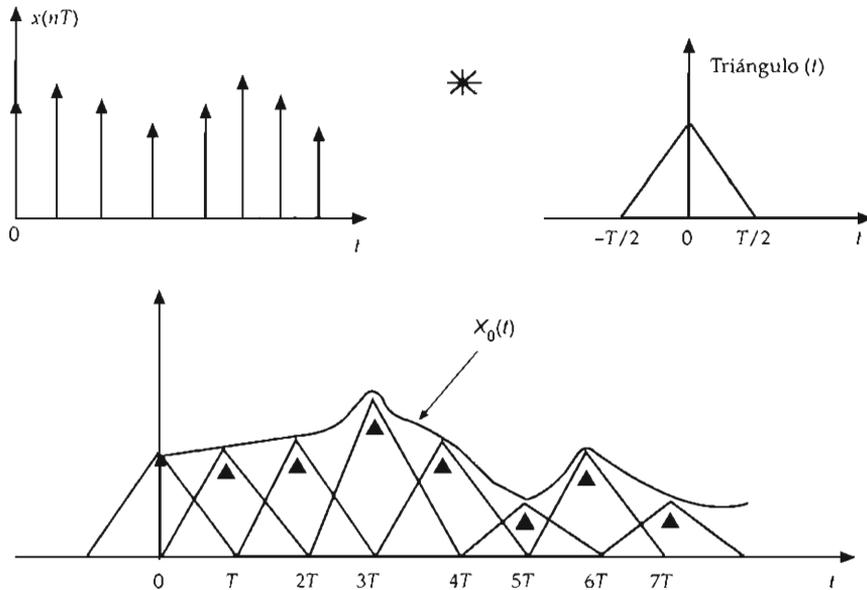


FIGURA IV.13. Reconstrucción de la señal analógica $f(t)$, como resultado de convolucionar los valores discretos de la señal, con una función triángulo del tiempo

Variables y procesos aleatorios

INTRODUCCIÓN

EN EL PRESENTE CAPÍTULO se cubren temas tales como procesos estocásticos, variables aleatorias y procesos ergódicos. Se plantean diferentes herramientas para caracterizar variables aleatorias, entre las cuales destacan las siguientes:

- Funciones de densidad de probabilidad
- Funciones de distribución de probabilidad
- Esperanza matemática o valor esperado a sus diferentes órdenes:
 - a primer orden se caracterizan por el valor promedio,
 - a segundo orden por el valor cuadrático medio, la varianza, la desviación estándar y la correlación,
 - a tercer orden se exponen conceptos como el “sesgo” (grado de simetría con respecto al valor medio), y
 - a cuarto orden se expone el concepto de “kurtosis”, la cual indica el grado de similitud entre una función de densidad cualquiera y una función de densidad gaussiana.

Finalmente se exponen conceptos de funciones de densidad y distribución conjunta (únicamente para dos variables aleatorias), funciones de correlación, funciones de autocorrelación, funciones de correlación cruzada, independencia estadística, energía, potencia, ergodicidad y estacionalidad.

TAXONOMÍA DE SEÑALES ALEATORIAS

Existen diferentes clasificaciones de señales aleatorias; de entre ellas, presentamos una que nos parece *hac doc* porque toma en cuenta propiedades estadísticas de la señal (véase la figura V.1). Si las propiedades estadísticas se conservan en el transcurso del tiempo se habla de *señales aleatorias estacionarias*, a diferente orden (a primer orden, en sentido amplio y en sentido estricto). Las señales *estacionarias* se pueden subdividir en *ergódicas* y *no ergódicas*. La ergodicidad está en función de promedios estadísticos, los obtenidos a partir del ensamble y los obtenidos a partir de una realización. Si los promedios estadísticos de ensamble son iguales a los promedios estadísticos de una realización, entonces se dice que el proceso es ergódico; en caso contrario es no ergódico.

En cuanto a la rama de la clasificación de señales *no estacionarias*, éstas cuentan con clasificaciones particulares que dependen del tipo de aplicación. A modo de ejemplo: la señal de voz es no estacionaria. La señal de voz ha sido objeto de múltiples clasificaciones: *a)* de hombre, *b)* de mujer, *c)* de niño, *d)* de adulto, etcétera.

Para el análisis de señales, y desde el punto de vista de la ingeniería, se asume que las señales en estudio cumplen las propiedades de *estacionariedad* y de *ergodicidad*.

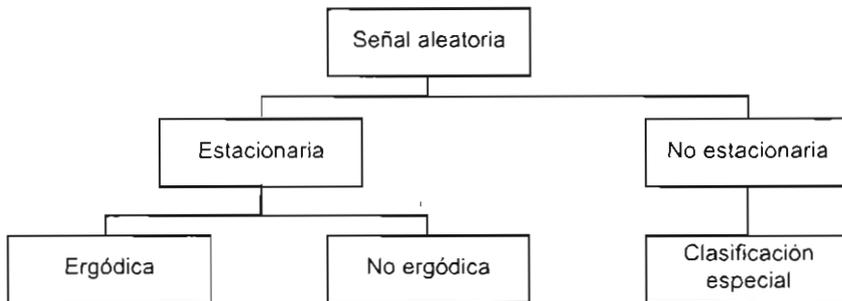


FIGURA V.1. Taxonomía de señales aleatorias en función de sus propiedades estadísticas

A continuación se citan las herramientas estadísticas comúnmente utilizadas para la caracterización de señales aleatorias: 1) valores promedio, 2) funciones de densidad y de distribución, 3) funciones de correlación, 4) funciones de densidad espectral, y 5) funciones de densidad espectral de potencia cruzada.

De manera más explícita, tenemos:

1. Valores promedio {
 - media
 - varianza
 - valor cuadrático medio
 - desviación estándar
 - valor eficaz
 - momentos de orden tres y cuatro (orden superior)

2. Funciones de distribución {
 - función de densidad de probabilidad
 - función de distribución acumulativa

3. Funciones de correlación {
 - función de correlación $R_{xx}(t, t + \tau)$
 - función de correlación cruzada $R_{xy}(t, t + \tau)$

4. Función de densidad espectral {
 - función de densidad espectral de potencia, $S_{xx}(\omega)$

5. Aleatoria conjunta {
 - función de densidad espectral de potencia cruzada.
 - $\delta_{xy}(\omega)$ respecto a otro proceso

Las cinco formas de caracterizar señales aleatorias serán descritas a lo largo del presente capítulo, pero antes de entrar en sus descripciones es necesario un pequeño repaso o recordatorio de algunos conceptos fundamentales de probabilidad.

DEFINICIÓN BÁSICA DE PROBABILIDAD

De entre todo el campo de la probabilidad, únicamente se presenta una definición de ésta, la cual es restringida a eventos mutuamente excluyentes. La probabilidad tiene dos enfoques: uno axiomático y el otro por frecuencias relativistas; el enfoque axiomático está fuera del alcance del presente libro.

La aproximación por frecuencia relativista define a la probabilidad como la relación:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \tag{V.1}$$

La validez de la expresión V.1 requiere que el número de veces que se repite el experimento sea muy grande ($N \rightarrow \infty$)

donde:

$P(A)$ = probabilidad de que ocurra el evento A

N = número total de veces que se repite el experimento

N_A = número de veces que ocurre el evento A

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad (V.2)$$

Si se tiene M eventos mutuamente excluyentes A, B, C, \dots, M , y cada evento tiene asociada una probabilidad $P(A), P(B), P(C), \dots, P(M)$, se pueden calcular sus respectivas probabilidades a través de frecuencias relativas, es decir, contabilizando el número de veces que ocurre un evento dado, con respecto al número total de veces que se realizan los experimentos. Esto es, el número de veces que ocurre el evento " A " lo designamos N_A ; N_B para el evento B , y así sucesivamente. El número total de realizaciones N será la suma total del número de eventos. Es decir:

$$N_A + N_B + N_C + \dots + N_M = N$$

La probabilidad de ocurrencia del evento A será $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$; para

el evento B será $P(B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_B}{N}$, y así sucesivamente.

La suma de todas las probabilidades de todos los eventos posibles será igual a uno: $P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(M) = 1$ (válido únicamente para eventos que son mutuamente excluyentes).

La probabilidad de un evento está acotada entre cero y uno:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (V.3)$$

Si la probabilidad de un evento es cero ($P(A) = 0$), entonces se denomina evento imposible; por otro lado, si la probabilidad de un evento es uno ($P(A) = 1$), se le denomina evento certero.

De los resultados anteriores se establecen los siguientes axiomas:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\delta) = 1$, con $\delta = \{A, B, C, \dots, M\}$ el número total de eventos.
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$, con A y B eventos mutuamente exclusivos.

δ = espacio muestra del experimento realizado (conjunto de todas las posibles salidas o conjunto universal)

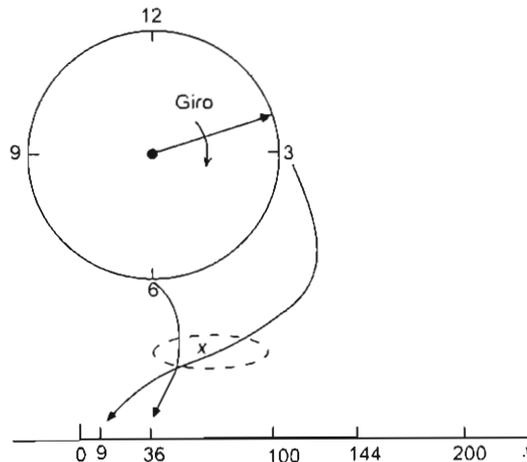
VARIABLE ALEATORIA

Desde el punto de vista de la ingeniería, una variable aleatoria (VA) es simplemente una descripción numérica del resultado de un experimento aleatorio.

Sea el espacio muestra $S = \{\alpha\}$ el conjunto de todas las posibles salidas del experimento. Cuando la salida es α , la variable aleatoria tiene un valor que se denota por $X(\alpha)$. Dependiendo del espacio muestra, las variables aleatorias se dividen en:

- Continuas: si su espacio muestra siempre es continuo
- Discretas: cuando su espacio muestra puede ser discreto, continuo o una mezcla de ambos

Ejemplo: La generación de una variable aleatoria la podemos ver como los números generados con un disco y una manecilla; el disco está dividido como un reloj (del uno al doce). Aplicando una fuerza a la manecilla, ésta girará, deteniéndose en un número; el valor de dicho número lo elevamos al cuadrado, así la variable aleatoria tomará un valor comprendido entre 1 y 144 (12 al cuadrado). La siguiente gráfica muestra nuestro ejemplo:



Para poder caracterizar variables aleatorias, se requiere conocer la función de distribución de probabilidad y la función de densidad de probabilidad, las cuales se estudiarán a continuación.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria y x cualquier valor permitido de variable aleatoria. Definimos la función de distribución por:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

La función de distribución de probabilidad posee ciertas propiedades, las cuales se citan en las ecuaciones (V.4)-(V.8):

1. $F_X(-\infty) = 0$ (V.4)

2. $F_X(\infty) = 1$ (V.5)

3. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ (V.6)

4. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ con $x_1 < x_2$ (V.7)

5. $P(x_1 < x \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ (V.8)

En la figura V.2 se muestran algunas funciones de distribución, tanto para variables discretas como para variables continuas.

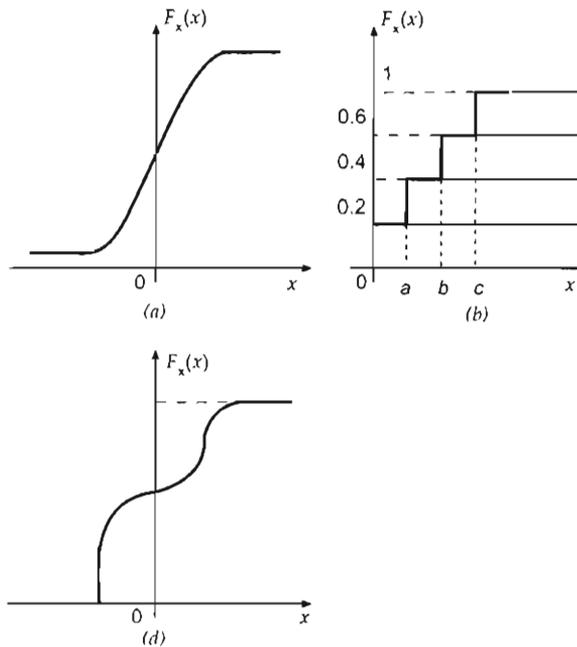


FIGURA V.2. Ejemplos de funciones de distribución de probabilidad: a) y c) continuas y b) discreta

Ejemplo 1. Sea la función de distribución de probabilidad definida en la figura V.3. Se desea calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual a -5 , mayor o igual a -5 , mayor o igual a 8 , entre -5 y 8 ; y finalmente, que sea mayor que cero.

De la gráfica podemos tomar los valores para cada rango de la variable aleatoria, es decir:

$$\begin{aligned} P(x \leq -5) &= F_x(-5) = 0.25 \\ P(x > -5) &= 1 - F_x(-5) = 0.75 \\ P(x > 8) &= 1 - F_x(8) = 0.1 \\ P(-5 < x \leq 8) &= F_x(8) - F_x(-5) = 0.65 \\ P(x > 0) &= 0.5 \end{aligned}$$

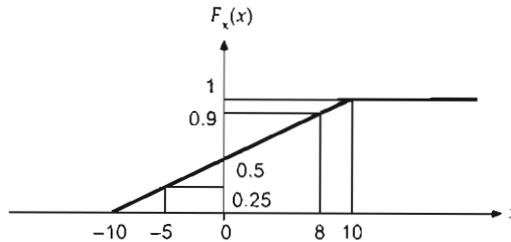


FIGURA V.3. Función de distribución de probabilidad continua $F_x(x)$

Ejemplo 2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad definida por la figura V.4. Encuentre la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual a 4 ; y también de que la variable aleatoria sea mayor a $3/4$.

Es decir, deseamos saber:

$$\begin{aligned} P(x \leq 4) \\ P(x > 3/4) \end{aligned}$$

$$P(x \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } -\infty < x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{cuando } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{cuando } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

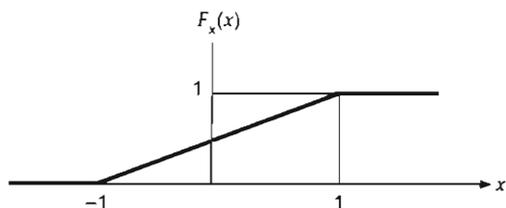


FIGURA V.4. Función de distribución de probabilidad continua $F_x(x)$ entre -1 y 1

$P(x \leq 4) = 1$, por definición de probabilidad

$$P\left(x < \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{16} \Rightarrow P\left(x > \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

Para una variable aleatoria X discreta, su función de distribución siempre involucra una sumatoria de escalones ponderada, esto es:

$$F_x(x) = \sum_{i=1}^N P(x_i)u(x - x_i) \quad (\text{V.9})$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

La función de densidad de probabilidad es la derivada de la función de distribución respecto a la variable aleatoria X (véase la ecuación V.10).

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \quad (\text{V.10})$$

Condición de existencia: Si la derivada de $F_x(x)$ existe, entonces $f_x(x)$ también existe. Sin embargo, hay casos en donde $F_x(x)$ no está definida, por lo cual es necesario utilizar el concepto definido de impulso unitario $\delta(x)$.

$$\text{Con } \delta(x) = \frac{d}{dx} u(x) \text{ o bien } u(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\zeta) d\zeta \quad (\text{V.11})$$

Utilizando la ecuación V.9 podemos escribir la función de densidad de probabilidad para variables aleatorias discretas como:

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^N P(x_i)\delta(x - x_i) \quad (\text{V.12})$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD
DE PROBABILIDAD

1. $f_X(x) \geq 0$ para toda x (V.13)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ (V.14)

3. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\zeta) d(\zeta)$ (V.15)

4. $P(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$ (V.16)

Funciones de densidad más comunes

A continuación presentamos las funciones de densidad más comunes, tales como la función normal o gaussiana, la función uniforme, la función exponencial y la función Rayleigh.

Función de densidad de probabilidad
normal o gaussiana

Una variable aleatoria se dice que es gaussiana o normal si su función de densidad tiene la siguiente forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (V.17)$$

donde:

σ_x es la desviación estándar

\bar{x} es el valor medio de x

σ_x^2 es la varianza de x

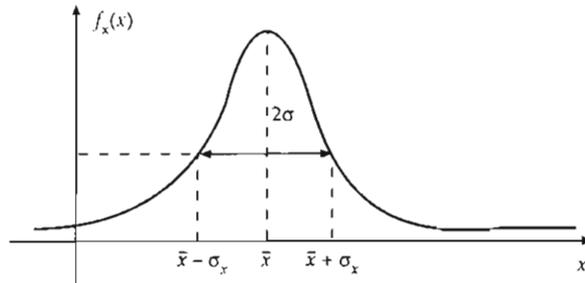


FIGURA V.5. Función de densidad de probabilidad del tipo gaussiana

La función de distribución correspondiente se genera integrando la función de densidad desde menos infinito hasta un cierto valor x , como se muestra en la ecuación V.18 y en la figura V.6.

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^x e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma_x^2} dx \quad (V.18)$$

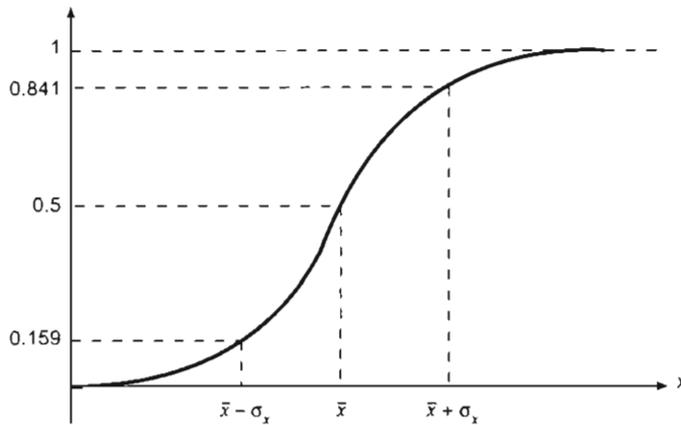


FIGURA V.6. Función de distribución de probabilidad para la función gaussiana

Se puede generar una tabla única normalizando $F_X(x)$, esto se lleva a cabo centrando y reduciendo la función, es decir:

$$\bar{x} = 0 \text{ y } \sigma_x = 1$$

entonces:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds \quad (V.19)$$

La expresión V.19 se utiliza solamente para $x \geq 0$ (valores positivos), para valores $x < 0$ (valores negativos) tenemos $F_x(-x) = 1 - F_x(x)$; haciendo cambio de variable, $u = (z - \bar{x}) / \sigma$, obtenemos:

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\bar{x})/\sigma_x} e^{-u^2/2} du \quad (V.20)$$

Los valores de la función de distribución normal o gaussiana centrada reducida se pueden encontrar en el anexo B.

Función de densidad de probabilidad uniforme

Una variable aleatoria es llamada uniforme entre a y b si su función de densidad es constante en el intervalo (a, b) y cero en otra parte (véase la figura V.7). Los valores de a y b son reales en el intervalo $[-\infty, \infty]$.

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (V.21)$$

La función de distribución de probabilidad uniforme se obtiene integrando la ecuación V.21; dicha función se muestra en la ecuación V.22.

$$F_x(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{para } x > b \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (V.22)$$

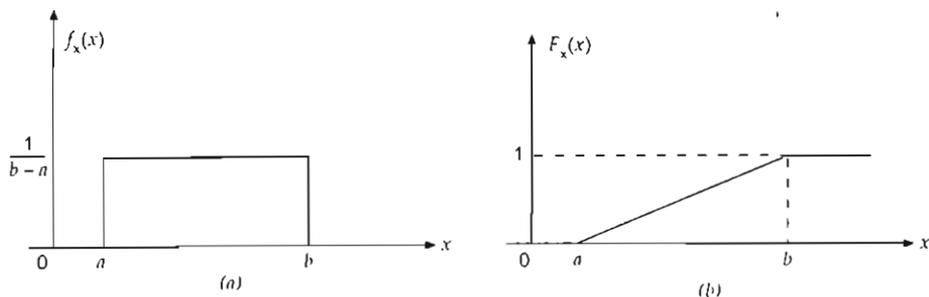


FIGURA V.7. a) Función de densidad de probabilidad uniforme.
b) función de distribución de probabilidad uniforme

La función de densidad uniforme tiene particular aplicación en la fase de cuantización en un convertidor analógico-digital; es decir, cuando un valor analógico dado tiene que corresponder a un nivel discreto, se tiene que redondear ya sea hacia el nivel superior o hacia el inferior.

Función de densidad de probabilidad exponencial

La función de densidad de probabilidad exponencial tiene la siguiente expresión:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-(x-a)/b} & \text{para } x > a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

La función de distribución de probabilidad exponencial se obtiene integrando la ecuación V.23; dicha función se muestra en la ecuación V.24

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-a)/b} & \text{para } x > a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

a y b son dos constantes reales; $b > 0$ y a pudiendo tomar cualquier valor en el intervalo $[-\infty, \infty]$. Las gráficas de la función de densidad y distribución se muestran en la figura V.8.

La función de densidad exponencial tiene aplicaciones en telecomunicaciones cuando se modelan las fluctuaciones de una señal recibida por un radar para cierto tipo de aeronaves.

Función de densidad de probabilidad Rayleigh

La función de densidad de probabilidad Rayleigh tiene la siguiente expresión:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{b} (x-a) e^{-(x-a)^2/b} & \text{para } x \geq a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

La función de distribución de probabilidad Rayleigh se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad (ecuación V.25), el resultado de la integración en los rangos válidos se muestra en la ecuación V.26:

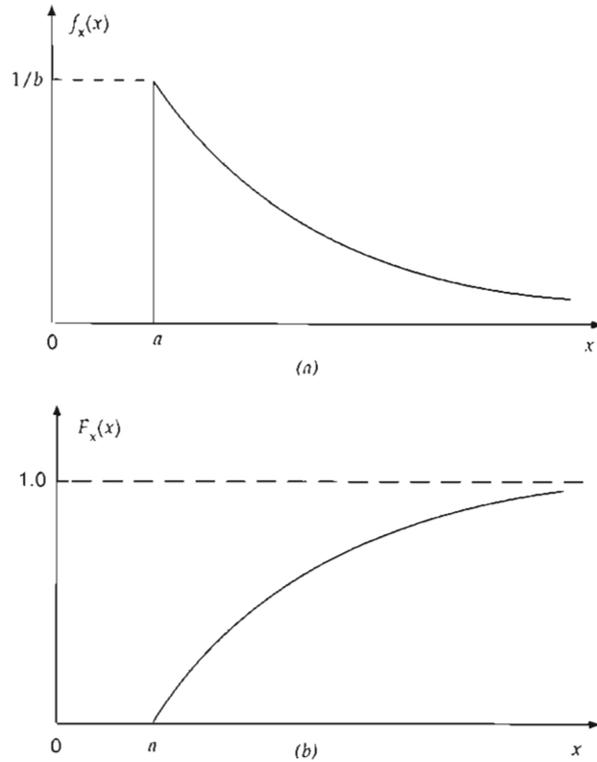


FIGURA V.8. a) Función de densidad de probabilidad exponencial, b) función de distribución de probabilidad exponencial

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-a)^2/b} & \text{para } x \geq a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

a y b son dos constantes reales; $b > 0$ y a puede tomar cualquier valor en el intervalo $[-\infty, \infty]$. Las gráficas se muestran en la figura V.9.

La función de densidad de probabilidad Rayleigh es utilizada para modelar la envolvente de un tipo de ruido que pasa por un filtro pasa bandas. También es usada para analizar los errores producidos por diferentes equipos de medición.

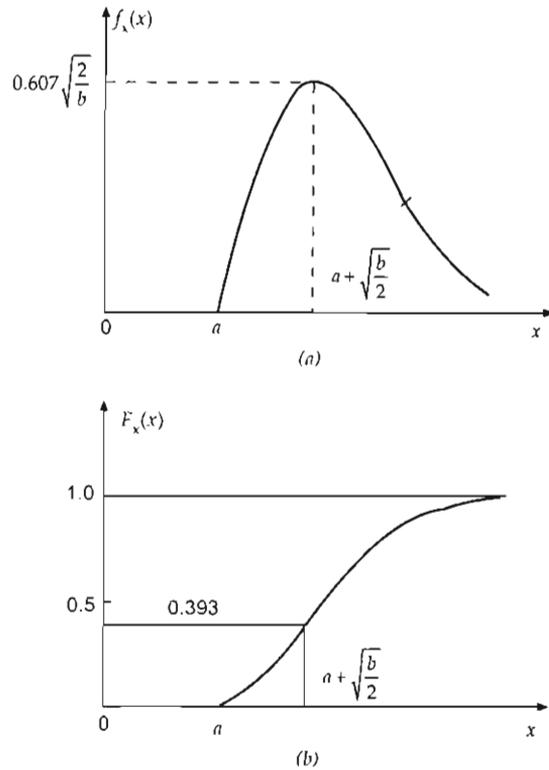


FIGURA V.9. a) Función de densidad de probabilidad Rayleigh. b) función de distribución de probabilidad Rayleigh

PROMEDIOS ESTADÍSTICOS

Esperanza matemática

La esperanza se define como un proceso de promediación cuando una variable aleatoria se involucra. Para una variable aleatoria X , usaremos la notación: $E[X]$, esperanza matemática de X , o bien, valor esperado de X o valor promedio de X ; simbólicamente se representa a través de la expresión V.27:

$$\bar{X} = E[X] \quad (V.27)$$

Analíticamente, el valor esperado de una variable aleatoria continua se obtiene por medio de la expresión V.28:

$$E[X] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx; \quad (V.28)$$

donde:

x = valor particular de la variable aleatoria
 $f_X(x)$ = función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X .

Un caso particular, si tomamos como función de densidad de probabilidad a una función normal o gaussiana, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$, se puede obtener la expresión para el cálculo del valor esperado de X , es decir:

$$E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} dx \quad (V.29)$$

Valor esperado de una función de una VA

El valor esperado de una función real $g(x)$ de una VA está definido por la ecuación V.30:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (V.30)$$

Momentos

Una aplicación inmediata del valor esperado de una función $g(x)$, de la variable aleatoria X , es la generación de momentos.

Dos tipos de momentos son definidos: por un lado, los momentos alrededor del origen, y por otro, los momentos alrededor de la media (momentos centrales). A continuación definimos los momentos alrededor del origen.

Momentos alrededor del origen

Sea la función

$$g(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (V.31)$$

Partiendo de la definición de valor esperado (ecuación V.30), el propósito es calcular ahora el valor esperado de la función $g(x)$; la ecuación V.32 muestra la expresión para el cálculo de dicho valor promedio.

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (\text{V.32})$$

La esperanza matemática definida en la ecuación V.32 genera momentos alrededor del origen de la variable aleatoria X . Si denotamos el momento n -ésimo por m_n , tenemos:

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (\text{V.33})$$

Por ejemplo para $n = 0$, entonces $m_0 = 1$;

$$\text{para } n = 1, \text{ entonces } m_1 = E[x] = \bar{x}$$

$$\text{para } n = 2, \text{ tenemos } m_2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \bar{x}^2$$

- El primer momento m_1 , se conoce como valor esperado de x
- El segundo momento m_2 , como valor cuadrático medio

Momentos centrales

Los momentos formados alrededor de la media reciben el nombre de momentos centrales, definidos como el valor esperado de la función. Ahora la función $g(x)$ queda definida como la variable aleatoria menos la media, es decir:

$$g(x) = (x - \bar{x})^n, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{V.34})$$

Si sustituimos en la ecuación V.30, resulta la ecuación V.35, la cual se conoce como función generadora de momentos centrales μ_n , de orden n (siendo n un entero positivo).

$$E[g(x)] = E[(x - \bar{x})^n] = \mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n f_X(x) dx \quad (\text{V.35})$$

Por ejemplo:

$$\text{Para } n = 0 \quad \mu_0 = 1$$

$$\text{Para } n = 1 \quad \mu_1 = E[(x - \bar{x})] = E[x] - E[\bar{x}] = \bar{x} - \bar{x} = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 2 \quad \mu_2 &= E[(x - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f_X(x) dx \\ &= E[x^2] - \bar{x}^2 = m_2 - m_1^2 = \sigma_x^2 \end{aligned}$$

Al momento central de orden 2 (μ_2) se le conoce como *varianza de la VAX*. Si el valor medio es cero: $\bar{x} = 0$, entonces la varianza es igual al valor cuadrático medio: $\sigma_1^2 = m_2$.

El análisis de los estimadores escapa de los objetivos del presente libro de texto; nos limitaremos a citar las expresiones para variables aleatorias discretas. Existen dos tipos de estimadores: con sesgo y sin sesgo. A continuación definiremos las ecuaciones para la estimación de momentos de orden 1 y 2, alrededor del origen y centrales, con sesgo y sin sesgo.

Estimador para momentos de orden 1 y 2 con sesgo:

$$m_1 = E[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{V.36})$$

$$m_2 = E[x^2] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (\text{V.37})$$

$$\mu_2 = E[(x - \bar{x})^2] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{V.38})$$

Siendo N el número total de valores de la variable aleatoria.

Estimador para momentos de orden 1 y 2 sin sesgo:

$$m_1 = E[x] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{V.39})$$

$$m_2 = E[x^2] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (\text{V.40})$$

$$\mu_2 = E[(x - \bar{x})^2] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{V.41})$$

Cuando el número de muestras es grande ($N \rightarrow \infty$).

Ejemplo. Determine el error cuadrático medio del error de cuantización que se introduce durante el proceso de modulación por pulsos codificados (PCM), asumiendo que dicho error se distribuye uniformemente en el intervalo de $-\frac{\Delta V}{2}$ y $\frac{\Delta V}{2}$, donde ΔV es la diferencia entre dos niveles cercanos.

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[\bar{x}]^2$$

Si el valor medio es cero, es decir $\bar{x} = 0$, entonces la varianza del error está definida por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{12} (\Delta x)^2, \text{ error cuadrático medio}$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx$$

La función de densidad analíticamente la podemos expresar como:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & \text{para } -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si sustituimos la función de densidad en el cálculo del valor cuadrático medio, obtenemos:

$$E[x^2] = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} x^2 \left(\frac{1}{\Delta x} \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}$$

$$= \frac{1}{3\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\Delta x}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3\Delta x} \left[\frac{(\Delta x)^3}{8} + \frac{(\Delta x)^3}{8} \right]$$

$$= \frac{\Delta x^2}{12}$$

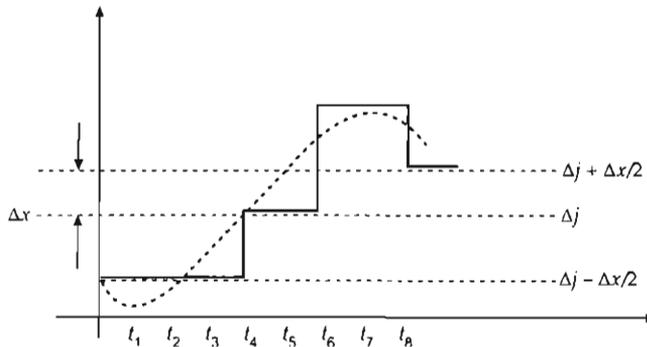


FIGURA V.10. Problema de cuantización, del nivel Δx al $\Delta x + \Delta x/2$

Momentos de orden superior (orden 3 y orden 4)

Los momentos de orden 3 y 4 portan información valiosa en la caracterización de variables aleatorias; el poco uso de ellos radica en la complejidad computacional para su cálculo. Los momentos centrales de orden 3 nos dan una idea del grado de simetría o asimetría de una función de densidad; los momentos de orden 4 nos indican qué tan cerca o lejos está una función de densidad con respecto a una función gaussiana. A continuación se presentan los momentos de orden 3, alrededor del origen y centrales.

Alrededor del origen:

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (\text{V.42})$$

$$\text{si } n = 3, \text{ entonces } m_3 = E[x^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx \quad (\text{V.43})$$

$$\text{estimador } m_3 = E[x^3] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^3 \quad (\text{V.44})$$

$$\text{si } n = 4, \text{ entonces } m_4 = E[x^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x) dx \quad (\text{V.45})$$

$$\text{estimador } m_4 = E[x^4] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^4 \quad (\text{V.46})$$

Centrales:

$$\mu_n = E[(x - \bar{x})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n f_X(x) dx \quad (\text{V.47})$$

$$\text{si } n = 3, \text{ entonces } \mu_3 = E[(x - \bar{x})^3] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^3 f_X(x) dx \quad (\text{V.48})$$

$$\text{estimador } \mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 \quad (\text{V.49})$$

$$\text{si } n = 4, \text{ entonces } \mu_4 = E[(x - \bar{x})^4] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^4 f_X(x) dx \quad (\text{V.50})$$

$$\text{estimador } \mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4 \quad (\text{V.51})$$

El momento central de orden 3 (μ_3), ecuación V.48, representa una medida de simetría de la función de densidad $f_x(x)$ alrededor de la media. Si se normaliza μ_3 con respecto a la desviación estándar al cubo, entonces se obtiene el denominado coeficiente de simetría, como se expresa en la ecuación V.52.

$$CS = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \quad (V.52)$$

El momento central de orden 4 (μ_4), ecuación V.50, representa una medida de similitud de la función de densidad $f_x(x)$ con respecto a una función de densidad gaussiana. Si se normaliza μ_4 con respecto a la desviación estándar a la cuarta, entonces se obtiene el denominado coeficiente de curtosis, como se expresa en la ecuación V.53.

$$\text{Curtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} \quad (V.53)$$

VARIABLES ALEATORIAS MÚLTIPLES

La salida de un experimento puede identificarse a partir de dos o más variables aleatorias, las cuales pueden ser o no independientes una de la otra.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

Sean las probabilidades de los eventos $A = \{X \leq x\}$ y $B = \{Y \leq y\}$, las cuales se definen como funciones de distribución de las variables aleatorias X e Y respectivamente.

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} \quad F_y(y) = P\{Y \leq y\} \quad (V.54)$$

Definamos ahora el concepto del evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$ a partir de una función de distribución conjunta:

$$F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \quad (V.55)$$

Considerando que

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P(A \cap B) \quad (V.56)$$

Para una variable aleatoria discreta

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) u(x - x_n) u(y - y_m) \quad (V.57)$$

Para N variables aleatorias x_n ; $n = 1, 2, \dots, N$

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N\} \quad (\text{V.58})$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

$$1. F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0 \quad (\text{V.59})$$

$$2. F_{XY}(-\infty, y) = 0 \quad (\text{V.60})$$

$$3. F_{XY}(x, -\infty) = 0 \quad (\text{V.61})$$

$$4. 0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1 \quad (\text{V.62})$$

$$5. F_{XY}(x, y) \text{ es una función no decreciente } X \text{ e } Y \quad (\text{V.63})$$

$$6. F_{XY}(x_2, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) \\ = P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\} \quad (\text{V.64})$$

$$7. F_{XY}(x, \infty) = F_X(x) \text{ y } F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y), \text{ funciones de distribución} \\ \text{marginal} \quad (\text{V.65})$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA

Para dos variables aleatorias X, Y la función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ es definida por la segunda derivada de la función de distribución conjunta, si ésta existe.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (\text{V.66})$$

Si x, y son variables aleatorias discretas, la función de densidad es

$$f_{XY}(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) \delta(x - x_n) \delta(y - y_m) \quad (\text{V.67})$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA

$$1. f_{XY}(x, y) \geq 0 \tag{V.68}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \tag{V.69}$$

$$3. F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_2 d\zeta_1 \tag{V.70}$$

$$4. F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_2 d\zeta_1 \quad y \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{V.71}$$

$$5. P\{x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2\} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dx dy \tag{V.72}$$

$$6. f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad y \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \tag{V.73}$$

Las propiedades definidas por la ecuación (V.73) establecen las funciones de densidad marginal para las variables aleatorias X e Y , respectivamente.

Ejemplo. Encuentre las funciones de densidad marginal para las variables aleatorias X e Y cuya densidad de probabilidad conjunta es:

$$F_{XY}(x, y) = xu(x)u(y)e^{-x(y+1)}$$

Por la propiedad 6, ecuación V.73, encontraremos las funciones de densidad marginales, tanto para X como para Y .

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} xu(x)e^{-x(y+1)} dy = u(x)e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} xu(y)e^{-x(y+1)} dx = u(y) \int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)} dx = \frac{u(y)}{(y+1)^2}$$

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Dos eventos, A y B , son estadísticamente independientes, si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \tag{V.74}$$

Para dos variables aleatorias tenemos:

$$A = \{X \leq x\} \text{ y } B = \{Y \leq y\} \quad (\text{V.75})$$

Entonces X e Y son estadísticamente independientes si:

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\} \quad (\text{V.76})$$

Entonces la función de distribución conjunta es:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (\text{V.77})$$

y la función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (\text{V.78})$$

Para el ejemplo anterior, demostrar si X e Y son variables estadísticamente independientes:

$$u(x)u(y)xe^{-x(y+1)} \neq u(x)e^{-x} \cdot \frac{u(y)}{(y+1)^2}$$

$\neq u(x)u(y) \frac{e^{-x}}{(y+1)^2}$, por lo tanto X e Y no son estadísticamente independientes.

Ejemplo. La densidad conjunta de las variables aleatorias X e Y es

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4} e^{-|x|-|y|} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \text{ y } -\infty < y < \infty$$

a) ¿Son X e Y estadísticamente independientes?

b) Calcule la probabilidad de que $x \leq 1, y \leq 0$

$$\left. \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \\ f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{debido a que } \frac{1}{2} e^{-|x|} \cdot \frac{1}{2} e^{-|y|} = \frac{1}{4} e^{-|x|-|y|}, \text{ por lo tanto } X \text{ e } Y \\ \text{son VA estadísticamente independientes} \end{array}$$

$$P\{X \leq 1, Y \leq 0\} = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx \int_{-\infty}^0 f_Y(y) dy$$

El valor esperado de una función de variables aleatorias múltiples se define por la ecuación V.79.

$$E[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (\text{V.79})$$

MOMENTOS CONJUNTOS SOBRE EL ORIGEN

Sea la función $g(x, y) = x^n y^k$, con $m_{nk} = E[x^n y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{XY}(x, y) dx dy$

m_{nk} = momentos en el origen de orden $n + k$

Observe que:

$$m_{n0} = E[x^n] \quad \text{momentos } m_n \text{ de la variable aleatoria } X$$

$$m_{0k} = E[y^k] \quad \text{momentos } m_k \text{ de la variable aleatoria } Y$$

Entonces m_{02} , m_{20} y m_{11} son los segundos momentos de X e Y

$$m_{10} = \bar{x} \tag{V.80}$$

$$m_{01} = \bar{y} \tag{V.81}$$

al segundo momento m_{11} se le conoce como la correlación entre X e Y

$$m_{11} = E[xy] = R_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \tag{V.82}$$

Si X e Y son estadísticamente independientes, entonces

$$R_{XY} = E[x] \cdot E[y] \quad \text{o bien} \quad R_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \tag{V.83}$$

Lo cual significa que X e Y son variables aleatorias no correlacionadas.

$R_{XY} = 0$ sólo se cumple si X e Y son funciones ortogonales, pero también podemos decir que no hay ninguna relación entre X e Y , es decir son variables aleatorias independientes.

MOMENTOS CENTRALES

Sea la función $g(x, y) = (x - \bar{x})^n (y - \bar{y})^k$; para dos variables aleatorias X e Y , tenemos:

$$\mu_{nk} = E[(x - \bar{x})^n (y - \bar{y})^k] \tag{V.84}$$

$$\mu_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n (y - \bar{y})^k f_{XY}(x, y) dx dy \tag{V.85}$$

$$\mu_{20} = E[(x - \bar{x})^2] = \sigma_x^2 \quad (\text{V.86})$$

$$\mu_{02} = E[(y - \bar{y})^2] = \sigma_y^2 \quad (\text{V.87})$$

El segundo momento central μ_{11} recibe el nombre de covarianza.

$$\mu_{11} = C_{XY} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (\text{V.88})$$

La integral anterior se puede reducir a:

$$C_{XY} = R_{XY} = E[x]E[y] = E[xy] \quad (\text{V.89})$$

- Si X e Y son variables aleatorias estadísticamente independientes (no correlacionadas), entonces la covarianza es cero ($C_{XY} = 0$), la covarianza es una medida del grado de correlación entre dos variables aleatorias.
- Si X e Y son ortogonales, entonces $C_{XY} = E[x] E[y]$.

ESTACIONALIDAD

Un proceso aleatorio (PA) se dice que es estacionario si todas sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo, en caso contrario es no estacionario.

Se tienen diferentes grados de estacionalidad, los cuales dependen de las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias del proceso.

Funciones de distribución y de densidad de un PA

Sea $t = t_1$; entonces, la función de distribución asociada a la variable aleatoria es:

$$X_1 = x(t_1) \text{ será } F_X(x, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (\text{V.90})$$

Para cualquier valor de x_1 .

En este caso, $F_X(x_1, t_1)$ recibe el nombre de función de distribución de primer orden.

Para dos variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$, tenemos:

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

para cualquier valor de x_1, x_2 .

A la función anterior se le llama función de distribución de segundo orden. Para n variables aleatorias.

$$F_X(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (V.91)$$

Función de distribución de orden n

Similarmente, para las funciones de densidad tenemos:

$$f_X(x_1, t_1) = \frac{\partial F(x_1, t_1)}{\partial x_1} \quad (V.92)$$

$$f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (V.93)$$

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ son estadísticamente independientes si las variables aleatorias del conjunto $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ son independientes del grupo $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)$, para cualquier tiempo $t_1, t_2, \dots, t_n; t_1, t_2, t_m, \dots$

$$F_{XY}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = F_X(x_1, \dots, x_n) \cdot F_Y(y_1, \dots, y_n) \quad (V.94)$$

Proceso aleatorio estacionario de primer orden

Un proceso aleatorio estacionario de primer orden está determinado por las características de su función de densidad. Si la función de densidad no varía con el tiempo, es decir, es una constante, se denomina proceso estacionario de primer orden. Debe cumplir con la siguiente relación:

$$f_X(x_1, t_1) = f(x_1, t_1 + \Delta), \text{ con } \Delta \text{ un incremento del tiempo.} \quad (V.95)$$

En consecuencia, $f_X(x_1, t_1)$ es independiente del tiempo, por lo cual el valor esperado de $x(t_1)$ es una constante:

$$E[x(t_1)] = \bar{x} = \text{cte} \quad (V.96)$$

Un ejemplo de un proceso aleatorio estacionario de primer orden es el siguiente:

$X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ con A y ω constantes; y ϕ una variable aleatoria con función de densidad uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Demostración: Si calculamos el valor esperado de $X(t)$, se tiene que:

$$E[X(t)] = E[A \cos(\omega t + \phi)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_x(x) dx = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega t + \phi) d\phi = 0 = \text{cte}$$

Proceso aleatorio en sentido amplio

Un proceso aleatorio es estacionario de segundo orden si su función de densidad de segundo orden satisface la siguiente relación:

$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \quad \forall \quad t_1 \text{ y } t_2 \quad (\text{V.97})$$

Si $\Delta = -t_1$, entonces

$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_x(x_1, x_2; 0, \tau) \quad (\text{V.98})$$

siendo $\tau = t_2 - t_1$

La ecuación V.98 representa la función de densidad de probabilidad estacionaria de orden 2. Podemos apreciar que dicha expresión está en función únicamente de la diferencia de tiempos $t_2 - t_1$. Partiendo de la expresión V.98, podemos extraer las siguientes observaciones:

- El valor esperado de $E[X(t_1) X(t_2)]$ estará únicamente en función de la diferencia de tiempos $t_2 - t_1$
- La función de autocorrelación definida por la ecuación V.99 está únicamente en términos de la diferencia de tiempos

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[(X(t_1)X(t_2))] = E[X_1 X_2] = R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau) \quad (\text{V.99})$$

Es decir, si $\tau = t_2 - t_1$, entonces $R_{xx}(X_1, X_2) = R_{xx}(\tau) \Rightarrow$ válido solo para PA estacionarios de segundo orden.

Puede observarse que

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = [x(t_1), x(t_1 + \tau)] = R_{xx}(\tau)$$

Si un proceso aleatorio cumple con las dos condiciones siguientes:

- $E[x(t)] = \text{cte}$
- $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$

entonces se dice que el proceso aleatorio $X(t)$ es estacionario en sentido amplio.

La estacionalidad en el sentido estricto se cumple cuando la función de densidad conjunta a cualquier instante de tiempo no cambia, es decir, es constante para todos los intervalos de tiempo.

Ejemplo. Muestre que el proceso aleatorio $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ es estacionario en sentido amplio. Considere que A y ω son constantes y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Demostración: Lo que se tiene que demostrar es que el proceso $X(t)$ cumple con las dos condiciones siguientes:

- $E[x(t)] = \text{cte}$
- $R_{xx}(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_1 + \tau)$

Primeramente definimos la función de densidad para la variable aleatoria θ , la cual es uniforme única y exclusivamente en el intervalo $[0, 2\pi]$. La función de densidad del proceso aleatorio $X(t)$ está determinada por la variable aleatoria; en nuestro caso es θ , es decir:

$$f_{\theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

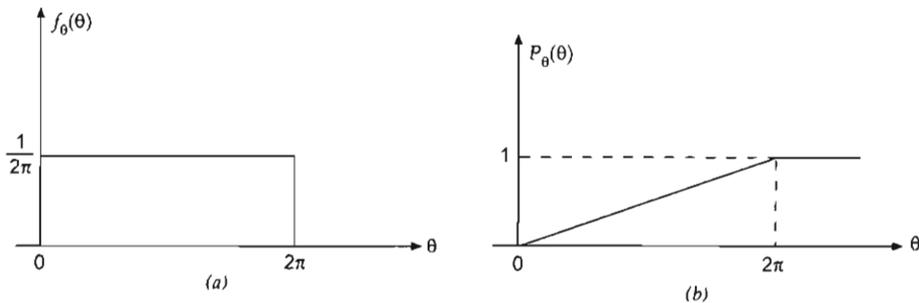


FIGURA V.11. Funciones de densidad y de distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$

a) Primeramente calculamos el valor esperado:

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_v(x) dx = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0$$

b) En segundo lugar, calculamos la función de autocorrelación:

$$\begin{aligned} R_{xx}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[A \cos(\omega_0 t + \theta)A \cos(\omega_0 [t + \tau] + \theta)] \\ &= A^2 E[\cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 [t + \tau] + \theta)] \end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

la función de autocorrelación queda:

$$\begin{aligned} R_{xx}(t, t + \tau) &= E[A \cos(\omega_0 t + \theta)A \cos(\omega_0 [t + \tau] + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(-\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau)] + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \end{aligned}$$

El segundo término es cero. Puesto que el valor promedio de una cosenoidal en un periodo completo es cero, no importa a qué fase inicie ni a qué frecuencia oscile. El primer término no depende de la variable aleatoria θ , así que su valor esperado es la constante misma. Finalmente tenemos la expresión para la función de autocorrelación siguiente:

$$R_{xx}(t, t + \tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

Como el proceso aleatorio $X(t)$ cumple con las dos condiciones anteriores, se puede concluir que es estacionario en sentido amplio.

Se deja como ejercicio para el lector el mismo proceso $X(t)$, pero ahora la variable aleatoria θ varía en el rango $[-\pi, \pi]$.

Propiedades de la función de autocorrelación

1. $R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0)$; la función de autocorrelación tiene un valor máximo en algún valor de τ
2. $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$; la función de autocorrelación es una función par
3. $R_{xx}(0) = E[x^2(t)]$
4. Si $x(t)$ es ergódico, con media cero y no tiene componentes periódicas, se cumple $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0$

5. Si $E[x(t)] = \bar{x} \neq 0$ entonces $R_{xx}(E)$ tendrá un valor constante
6. Si $x(t)$ tiene una componente periódica entonces $R_{xx}(t)$ también tendrá una componente periódica
7. La función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ no puede tener formas de onda estacionaria

Algunos autocorrelogramas típicos

a) Señal sin ruido

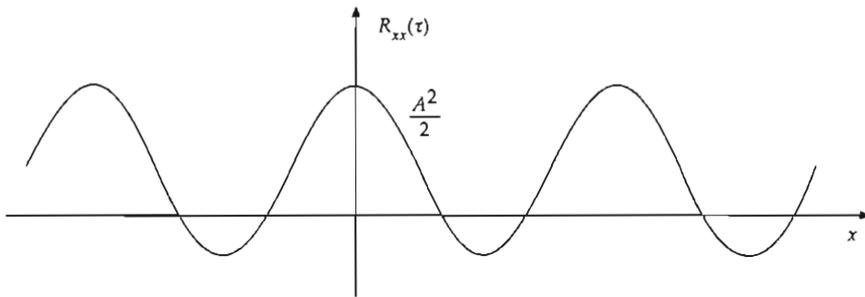


FIGURA V.12. Función de autocorrelación para una señal periódica sin ruido

b) Señal con ruido

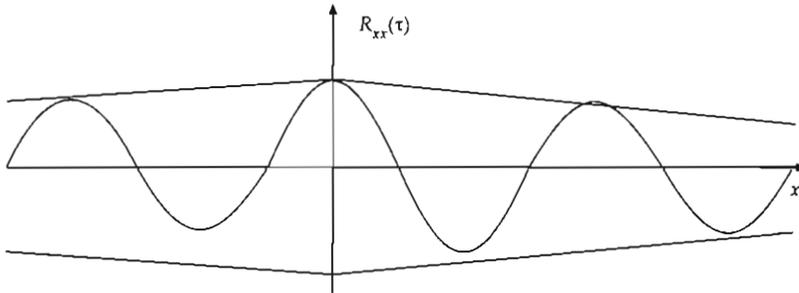


FIGURA V.13. Función de autocorrelación para una señal periódica con ruido

c) Señal de banda angosta

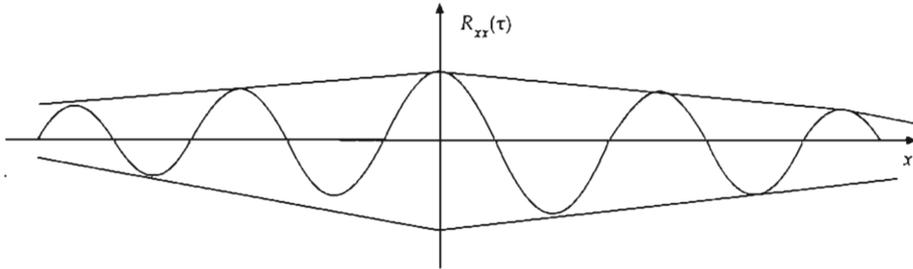


FIGURA V.14. Función de autocorrelación para una señal periódica de banda angosta

d) Señal con ruido de banda angosta

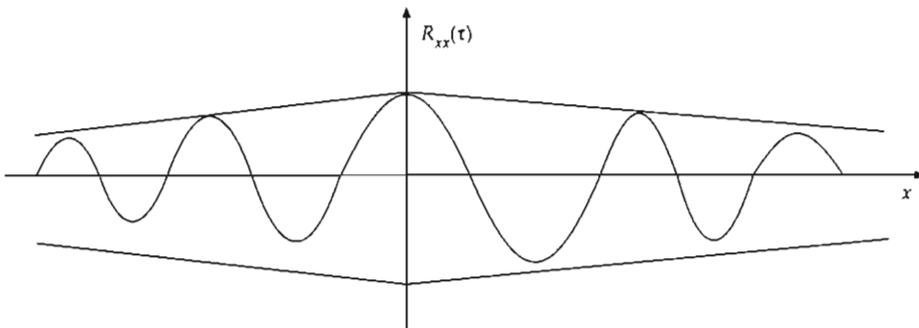


FIGURA V.15. Función de autocorrelación para una señal periódica de banda angosta con ruido

Ejemplo. Sea la función de autocorrelación definida por $R_{xx}(\tau) = 100e^{-10|\tau|} + 100\cos \tau + 100$. Encuentre $E[x(t)]$, y σ_x^2 :

$$E[x(t)] \neq 0 = \sqrt{100} = 10$$

$$\sigma_x^2 = x^{-2} - x^{-2}$$

$$x^{-2} = R_{xx}(0) \neq E[x^2(t)] = 300$$

$$\sigma_x^2 = 300 - 100 = 200 \quad \sigma_x^2 = 200$$

Ejemplo. $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, donde $\omega_0 = \text{cte}$ y A, B son VA no correlacionadas con media cero, con funciones de densidad diferentes pero con igual varianza. Demuestre que el PA es estacionario en sentido amplio:

$$E[A] = E[B] = 0$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = E[A^2] = E[B^2]$$

$$\sigma_x^2 = \sigma^2$$

$E[A, B] = 0$, por ser no correlacionadas.

Necesitamos demostrar $R_{xx}(t, t + \tau) = R_{xx}(\tau)$:

$$\begin{aligned} E[x(t)x(t + \tau)] &= E\{(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)[A \cos \omega_0(t + \tau) + B \sin \omega_0(t + \tau)]\} \\ &= E[A^2]E[\cos \omega_0 t \cos \omega_0(t + \tau) + \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t + \tau)] \end{aligned}$$

como $E[B^2] = E[A^2]$, la expresión final para la autocorrelación queda:

$$= \sigma^2 E(\cos \omega_0 \tau)$$

$\therefore R_{xx}(\tau) = \sigma_A^2 \cos \omega_0 \tau$, entonces $x(t)$ es estacionaria en el sentido amplio.

FUNCIONES DE CORRELACIÓN CRUZADA

Sean los procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ cuya función de correlación cruzada está determinada por:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (\text{V.100})$$

Si $X(t)$ e $Y(t)$ son procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio, se cumple que

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (\text{V.101})$$

Si $X(t)$ e $Y(t)$ son PA estadísticamente independientes

$$E[X(t)Y(t + \tau)] = E[X(t)]E[Y(t + \tau)] \quad (\text{V.102})$$

Si además de ser estadísticamente independientes son estacionarios en sentido amplio, se cumple:

$$R_{XY}(\tau) = E[X]E[Y] = \overline{XY} = \text{cte} \quad (\text{V.103})$$

Propiedades de la función de correlación cruzada

$$1. R_{XY}(0) = R_{YX}(0) \quad (V.104)$$

$$2. R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau) \quad (V.105)$$

$$3. |R_{XY}(\tau)| \leq |R_{XX}(0) + R_{YY}(0)|^{1/2} \quad (V.106)$$

$$4. |R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)] \quad (V.107)$$

La propiedad V.105 nos indica que la función de correlación cruzada es simétrica con respecto al eje vertical, es decir; es una función par.

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Definamos la potencia promedio como:

$$P_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[x^2(t)] dt \quad (V.108)$$

es decir:

$$P_{xx} = \langle E[x^2(t)] \rangle \quad (V.109)$$

Si aplicamos el teorema de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\omega)|^2 d\omega$, entonces podemos definir la densidad espectral de potencia como:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[x^2(\omega)]}{2T} \quad (V.110)$$

La función de autocorrelación R_{XX} se puede conocer a partir de la función de densidad espectral de potencia S_{XX} vía la transformada inversa de Fourier de la segunda, es decir

$$R_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (V.111)$$

También aplicando la transformada de Fourier a la función de autocorrelación R_{XX} , podemos conocer la función de densidad espectral de potencia S_{XX} , como se muestra en la siguiente ecuación:

$$S_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{V.112})$$

Propiedades de la función de densidad espectral de potencia

1. $S_{xx}(\omega) \geq 0$ (V.113)

2. $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ (V.114)

3. S_{xx} es una función real (V.115)

4. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \langle E[x^2(t)] \rangle$ (V.116)

5. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx} e^{j\omega\tau} d\omega = \langle R_{xx}(t, t + \tau) \rangle$ (V.117)

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t, t + \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{V.118})$$

El término $\langle \bullet \rangle$ define el valor promedio en el dominio del tiempo.

6. Para procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio, se cumple lo siguiente:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{V.119})$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (\text{V.120})$$

Curso Matlab

INTRODUCCIÓN

Matlab V4 (MATriz LABoratory)

MATLAB ES UN PROGRAMA que nos permite realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. También puede trabajar con escalares, tanto reales como imaginarios. Una de sus capacidades más atractivas es la de poder realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones.

En este curso de Análisis de señales utilizaremos el Matlab como una herramienta para visualizar señales en forma gráfica.

Las siguientes instrucciones de Matlab son ampliamente utilizadas en la generación y procesamiento digital de señales; esto permite observar ciertas características de la señal de manera rápida y fácil.

A continuación se muestran algunas instrucciones básicas. Se recomienda al alumno practicarlas antes de intentar escribir un programa.

COMANDOS DE PROPÓSITO GENERAL

Manejo de comandos y funciones

help	Documentación en línea. Nos permite ver lo que 'hace una función'
what	Listado de Directorio de archivos con extensión M-, MAT- y MEX
type	Lista de archivos M-file
lookfor	Búsqueda desde el teclado a través del comando HELP
which	Localizar funciones y archivos
demo	Corrida de demos

MANEJO DE VARIABLES Y WORKSPACE (ESPACIO DE TRABAJO)

who	Lista de variables actuales. Nos permite saber características de una variable tal como su tamaño, el tipo, o si es real o compleja
whos	Lista de variables actuales, forma larga
load	Cargar variables de disco
save	Salvar variables de <i>workspace</i> a disco
clear	limpiar variables y funciones de memoria
size	Tamaño de la matriz
length	Longitud del vector
disp	Desplegar una matriz o texto

SISTEMA OPERATIVO Y ARCHIVOS

cd	Cambiar directorio actual de trabajo
dir	Desplegar directorio
delete	Borrar archivo

Es conveniente abrir una hoja en el editor de Matlab para ir guardando lo que se va escribiendo. También es posible ir generando el programa directamente en el comando de Matlab, la desventaja es que no se pueden guardar las instrucciones escritas.

GENERACIÓN DE SEÑALES

Para generar una señal primero necesitamos generar un vector de tiempo. Éste se genera de la siguiente forma:

```
t = 0:0.1:10; % generación de un vector con incrementos de 0.1 segundos
```

En Matlab podemos implementar operaciones matriciales; por ejemplo: generemos una matriz A de $n \times m$.

Para poner comentarios se utiliza el carácter %

```
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]; % generación de matriz de 3x3 elementos  
B = [9 8 7; 6 5 4; 3 2 1];  
S = A + B % suma de elementos
```

Resultado, suma elemento a elemento de las matrices

```
S =  
10 10 10  
10 10 10  
10 10 10
```

```
S1 = A - B      % resta de matrices
```

```
resultado  
S1 =  
-8  -6  -4  
-2   0   2  
 4   6   8
```

```
Z = A * B      % multiplicación de matrices
```

```
Resultado  
Z =  
30  24  18  
84  69  54  
138 114  90
```

```
Z1 = A * B     % producto punto (multiplicación elemento a elemento)
```

```
resultado  
Z1 =  
 9  16  21  
24  25  24  
21  16   9
```

Podemos generar matrices de números aleatorios utilizando la instrucción `randn` y `rand`:

`A = rand (10, 10)` % matriz de números aleatorios con distribución uniforme de 10×10 ;

`B = randn (10, 10)` % matriz de números aleatorios con distribución normal de 10×10 .

Si previamente declaramos una matriz y queremos que la matriz de números aleatorios sea del mismo tamaño que la generada, podemos utilizar la instrucción `size`. Veamos cómo:

Análisis de señales

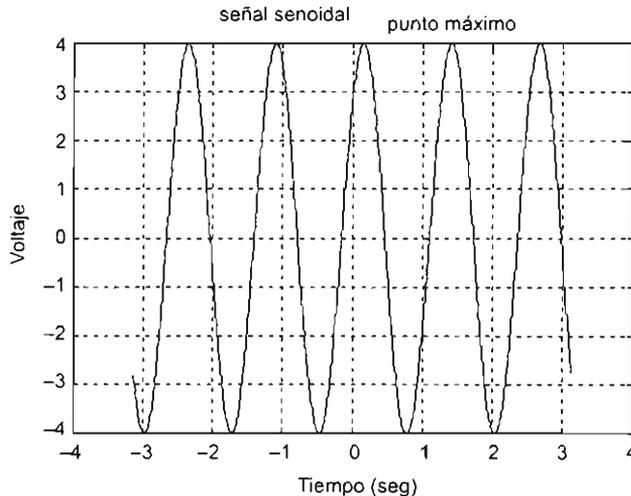
```
t = -100 : 2 : 100;      % matriz de 1x101
Y = randn (size(t));    % matriz de números aleatorios de 1 x 101
```

Las funciones matemáticas tales como coseno, seno y exponencial, ya vienen programadas en Matlab, así que solamente hay que llamarlas.

Generemos una señal senoidal $x(t) = A\text{sen}(\omega t + \phi)$, con los siguientes parámetros:

```
A = 4;                    % amplitud, la adición del carácter ( ; ) evita que
                          % se despliegue el número en pantalla
ω = 30;                  % frecuencia angular
φ = pi/4;                % ángulo de desfaseamiento
y = A*sen (ω*t + φ);
plot(t, y)               % gráfica en forma continua
grid                     % adiciona a la gráfica una malla
title('señal senoidal')
xlabel('tiempo(seg)')    % pone la etiqueta al eje X
ylabel('voltaje')        % pone etiqueta al eje Y
gtext('punto máximo')   % pone una leyenda que se puede colocar con el
                          % mouse
```

La gráfica obtenida se muestra a continuación:

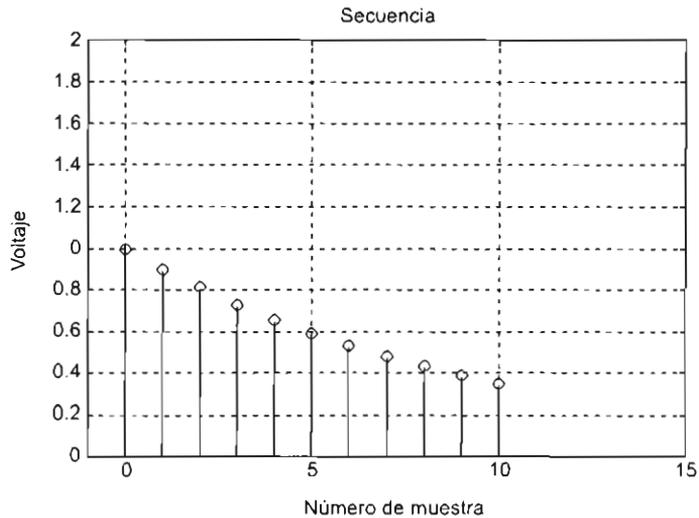


También se pueden obtener gráficas logarítmicas:

```
text(x0, y0, 'punto') % pone una leyenda dadas las coordenadas (x0, y0)
loglog ( ) % gráfica en escala logarítmica
semilog ( ) % gráfica en escala semilogarítmica
```

Grafiquemos ahora la secuencia $x(n) = 0.9^n$, $0 \leq n \leq 10$.

```
n = 0:10;
x = (0.9).^n; % aquí el símbolo ^ indica que n es un exponente
stem(n, x) % gráfica en forma discreta
grid
xlabel('número de muestra')
ylabel('voltaje')
title('secuencia')
```



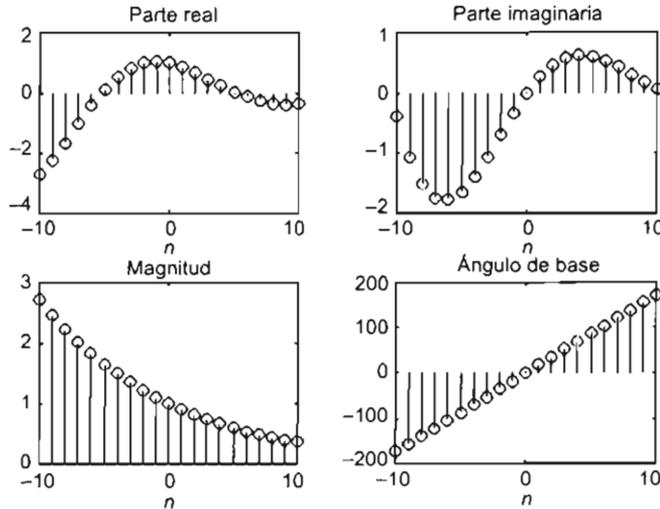
Si deseamos cambiar la división en la gráfica usamos las instrucciones:

```
set(gca, 'xtick',[0 1 2 3 4 5]);
set(gca, 'ytick',[0 .1 .2 .3]).
```

Generemos ahora la secuencia compleja $x(n) = e^{(-0.1 + 0.3j)n}$, $-10 \leq n \leq 10$. Graficar su magnitud, fase, parte real y parte imaginaria. En Matlab tendríamos lo siguiente:

```
n = -10:10; alfa = -0.1 + 0.3j
x = exp(alfa * n)
```

```
subplot(221), stem(n, real(x)); title('parte real'), xlabel('n')
subplot(222), stem(n, imag(x)); title('parte imaginaria'), xlabel('n')
subplot(223), stem(n, abs(x)); title('magnitud'), xlabel('n')
subplot(224), stem(n, (180/pi)*angle(x)); title('ángulo de fase'), xlabel('n')
```



Si utilizamos la instrucción hold on podemos graficar varias gráficas en una sola hoja. Para graficar se pueden utilizar los siguientes colores y caracteres:

Símbolo	Color	Carácter
y	amarillo	.
m	magenta	o
r	rojo	+
g	verde	-
b	azul	--
w	blanco	x
k	negro	

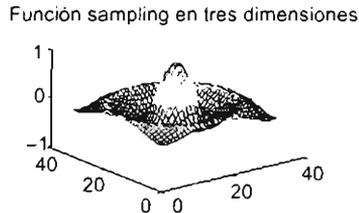
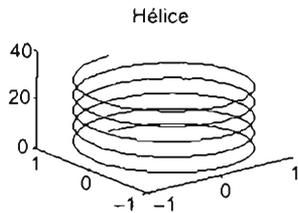
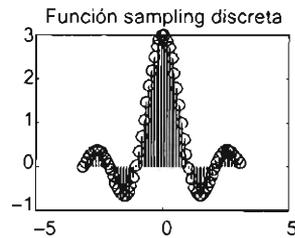
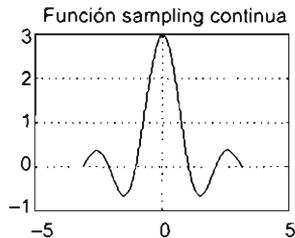
Matlab permite colocar varias gráficas en una hoja; veamos esto con un ejemplo:

```
subplot(221) % abre una hoja en donde se pueden colocar cuatro
             imágenes
t = -pi:0.01:pi % generación del vector de tiempo
```

```

y1 = sin(3*t)./t;
plot(t, y1); % gráfica en la posición (1, 1)
title('función sampling')
subplot(222) % se coloca en la figura (1, 2)
stem(t, y1);
subplot(223) % gráfica en la posición (2, 1)
t = 0:pi/50:10*pi; % gráfica en tres dimensiones
plot3(sin(t), cos(t), t);
title('hélice')
subplot(224); % gráfica en la posición (2, 2)
x = -8:0.5:8;
y = x;
[X, Y] = meshgrid(x, y); % convierte los vectores a matrices de n x m
R = sqrt(X.^2 + Y.^2);
z = sin(R)./R;
mesh(z); % gráfica en tres dimensiones
grid
title('función sampling en tres dimensiones')

```



Algunas veces es útil reescalar la figura para ver mejor la imagen. La instrucción `axis([xmín xmax ymín ymax])` nos permite hacer esto.

A continuación veremos algunos ejemplos de programas sencillos para análisis de señales.

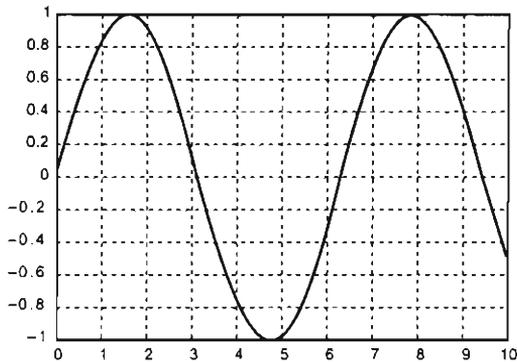
SERIES DE FOURIER

Sabemos que utilizando el análisis de Fourier podemos descomponer una señal en sus componentes armónicos; por ejemplo, si tenemos una señal cuadrada la cual podemos escribir como

$$f(t) = \frac{4v}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}n\omega_0 t = \frac{4v}{\pi} (\text{sen}\omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen}3\omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen}5\omega_0 t + \dots)$$

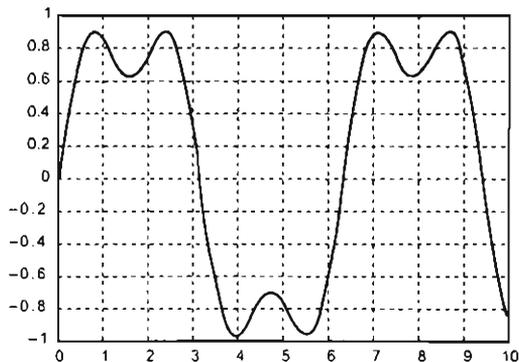
Vamos a graficar los armónicos de esta función generando uno por uno, y posteriormente haremos un programa para obtenerlos.

```
t = 0:.1:10;
y = sin(t);
plot(t, y),
```



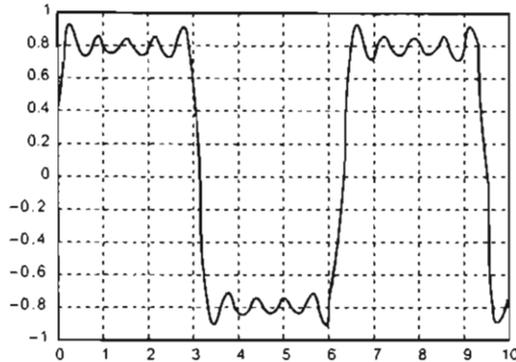
Primer armónico

```
y = sin(t) + sin(3* t)/3;
plot(t, y)
```



Adición de dos armónicos

```
y = sin(t) + sin(3* t)/3 + sin(5* t)/5 + sin(7* t)/7 + sin(9* t)/9;
plot(t, y)
```



Adición de tres armónicos

```
t = 0:.02:3.14;
y = zeros(10, max(size(t))); % abriendo espacio para almacenar los
                             valores de los armónicos
x = zeros(size(t));

% programa para generar los armónicos de una señal cuadrada
for k = 1:2:19
    x = x + sin(k* t)/k;
    y((k + 1)/2,:) = x;
end
```

ANÁLISIS ESPECTRAL

Como vimos en el capítulo III, una herramienta poderosa en el análisis de señales es la transformada de Fourier. A continuación vemos un ejemplo de la obtención de ésta utilizando el algoritmo FFT:

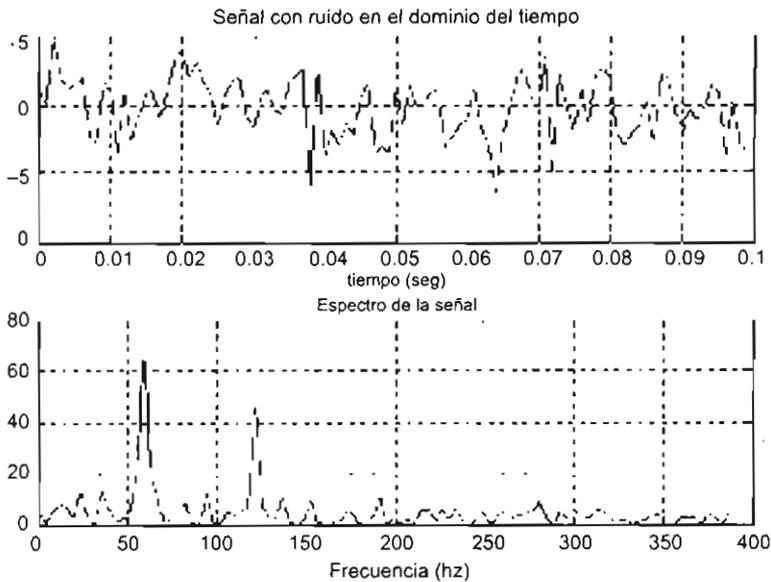
```
t = 0:1/1000:0.25; % vector con datos muestreados
                    a 1 khz
x = sin(2* pi* 60* t) + sin(2* pi* 120* t); % suma de señales de 60 y 120 hz
y1 = x + 2* randn(size(t)); % adicionando ruido con desviación
                             % estándar de 2

subplot(211)
plot(t(1:100), y1(1:100)), title('señal con ruido en el dominio del tiempo');
```

```

xlabel('tiempo (seg)')
grid
y = fft(y1, 256);           % obtención de la fft utilizando 256 puntos
yy = y.* conj(y)/256;      % obteniendo la norma
f = 1000/256*(0:127);      % generación del vector frecuencia
subplot(212)
plot(f(1:100), yy(1:100)); % graficando solamente 100 puntos
title('espectro de la señal');
grid
xlabel('frecuencia (hz)')

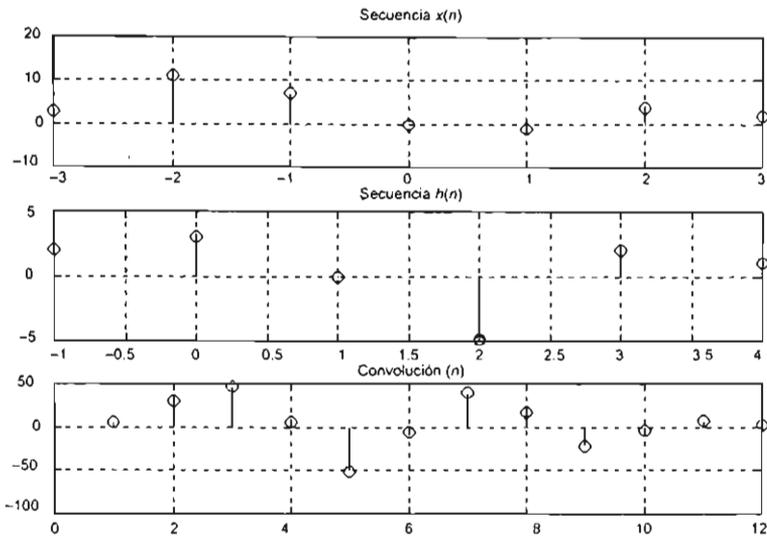
```



CONVOLUCIÓN

También es posible obtener la operación de convolución utilizando Matlab.
Ejemplo 1. Dadas las dos secuencias

$x(n) = [3, 11, 7, 0, -1, 4, 2], -3 \leq n \leq 3; h(n) = [2, 3, 0, -5, 2, 1], -1 \leq n \leq 4$
encuentre la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$



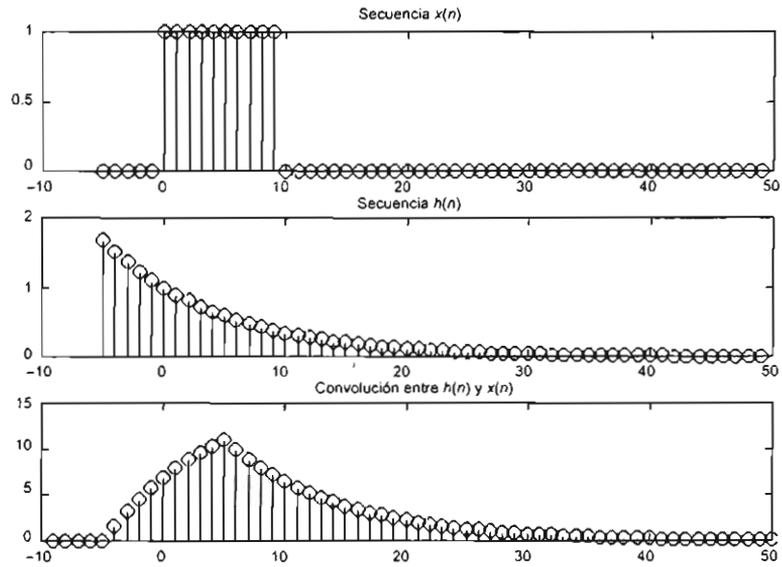
Ejemplo 2: Sea el pulso rectangular $x(n) = u(n) - u(n - 10)$ la entrada a un sistema cuya respuesta al impulso es $h(n) = (0.8)^n u(n)$. Encuentre la salida $y(n)$. Sabemos que la salida está dada por la convolución entre $x(n)$ y $h(n)$.

```

A1 = zeros(1, 5)
A2= ones(1, 10);
A3 = zeros(1, 40);
X = [A1 A2 A3];           % generando la secuencia x(n)
n = -5:49;
stem(n, x)
grid
title('secuencia x(n)')
xlabel('n')
h = (0.9).^n;             % generando la secuencia h(n)
subplot(311)
plot(n, x)
subplot(311)
stem(n, x)
title('secuencia x(n)')
subplot(312)
stem(n, h)
title('secuencia h(n)')
y = conv(x, h);           % convolución entre x(n) y h(n)
subplot(313)

```

```
stem(y)  
title('convolución entre  $h(n)$  y  $x(n)$ ')  
axis([0 60 0 15])
```



Bibliografía

- Bendat, Julius S. y Allan G. Pierce, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, EUA, John Wiley & Sons, 1999.
- Blanchet, Gérard y Jacques Prado, *Méthodes numériques pour le traitement du signal*, París, Masson, 1990.
- Brigham, E. Oran, *The Fast Fourier Transform*, EUA, Prentice-Hall, 1983.
- Hsu, Hwi P., *Análisis de Fourier*, México, Addison-Wesley Iberoamericana, 2000.
- Introduction to Random Signals and Applied Kalma Filtering*, 3a. ed., EUA, John Wiley & Sons, 2000.
- Manual de Matlab 5.0.*, EUA, Mathworks, 2000.
- Oppenheim, Alan V. y Ronald W. Schafer, *Digital Signal Processing*, EUA, Prentice-Hall, 1975.
- Oppenheim, Alan V., Alan S. Willsky y Ian Young T., *Señales y sistemas*, México, Prentice-Hall, 1998.
- Papoulis, Athanasios, *Signal Analysis*, EUA, McGraw-Hill, 1977.
- Peebles, Payton Z., *Probability Random Variables and Random Signal Principles*, McGraw-Hill, 1995.
- Rabiner, Lawrence R. y Bernard Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
- Stremler, Ferrel G., *Sistemas de comunicación*, 2a. ed., México, Alfaomega, 1998.

Fórmulas

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \quad (1)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \quad (2)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(x) \quad (3)$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x) \quad (4)$$

$$\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad (5)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad (6)$$

$$2\cos(x) = e^{jx} + e^{-jx} \quad (7)$$

$$2j\sin(x) = e^{jx} - e^{-jx} \quad (8)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y) \quad (9)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y) \quad (10)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y) \quad (11)$$

Análisis de señales

$$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \quad (12)$$

$$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \quad (13)$$

$$4 \cos^3(x) = 3 \cos(x) + \cos(3x) \quad (14)$$

$$4 \sin^3(x) = 3 \sin(x) - \sin(3x) \quad (15)$$

$$8 \cos^4(x) = 3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x) \quad (16)$$

$$8 \sin^4(x) = 3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x) \quad (17)$$

$$A \cos(x) - B \sin(x) = R \cos(x + \theta) \quad (18)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (19)$$

$$\theta = \tan^{-1}(B/A) \quad (20)$$

$$A = R \cos(\theta) \quad (21)$$

$$B = R \sin(\theta) \quad (22)$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} \quad 0 < n \quad (23)$$

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln |a + bx| \quad (24)$$

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^n} = \frac{-1}{(n-1)b(a + bx)^{n-1}} \quad 1 < n \quad (25)$$

Apéndice A

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{c+bx+ax^2} &= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) & b^2 < 4ac \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| & b^2 > 4ac \\ &= \frac{-2}{2ax+b} & b^2 = 4ac \end{aligned} \quad (26)$$

$$\int \frac{x dx}{c+bx+ax^2} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{c+bx+ax^2} \quad (27)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{-x}{6(a^2+x^2)^3} + \frac{x}{24a^2(a^2+x^2)^2} + \frac{x}{16a^4(a^2+x^2)} + \frac{1}{16a^5} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (29)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{x}{6a^2(a^2+x^2)^3} + \frac{5x}{24a^4(a^2+x^2)^2} + \frac{5x}{16a^6(a^2+x^2)} + \frac{5}{16a^7} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (30)$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{a^2x}{6(a^2+x^2)^3} - \frac{7x}{24(a^2+x^2)^2} + \frac{x}{16a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{16a^3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (31)$$

$$\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} \right) + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2} \right) \quad (32)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} \right) + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2} \right) \quad (33)$$

$$\int \frac{x dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2) \quad (34)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^2 + x^2} = x - a \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (35)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (36)$$

$$\int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{-1}{2(a^2 + x^2)} \quad (37)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{-x}{2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (38)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{4a^2(a^2 + x^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(a^2 + x^2)^3} + \frac{3}{8a^5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (39)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{-x}{4(a^2 + x^2)^2} + \frac{x}{8a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{8a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (40)$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{a^2 x}{4(a^2 + x^2)^2} - \frac{5x}{8(a^2 + x^2)} + \frac{3}{8a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (41)$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) \quad (42)$$

$$\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x) \quad (43)$$

$$\int x^2 \cos(x) dx = 2x \cos(x) + (x^2 - 2) \sin(x) \quad (44)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) \quad (45)$$

$$\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) \quad (46)$$

$$\int x^2 \sin(x) dx = 2x \sin(x) - (x^2 - 2) \cos(x) \quad (47)$$

FUNCIONES EXPONENCIALES

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad a \text{ real or complex} \quad (48)$$

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right] \quad a \text{ real or complex} \quad (49)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right] \quad a \text{ real or complex} \quad (50)$$

$$\int x^3 e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right] \quad a \text{ real or complex} \quad (51)$$

$$\int e^{ax} \sin(x) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} [a \sin(x) - \cos(x)] \quad (52)$$

$$\int e^{ax} \cos(x) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} [a \cos(x) + \sin(x)] \quad (53)$$

INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2 + bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/(4a^2)} \quad a > 0 \quad (54)$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4 \quad (55)$$

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (56)$$

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}^2(x) dx = \pi/2 \quad (57)$$

SERIES INFINITAS

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (58)$$

SERIES FINITAS

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \quad (59)$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad (60)$$

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)}{4} \quad (61)$$

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \quad (62)$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} x^n y^{N-n} = (x + y)^N \quad (63)$$

$$\sum_{n=0}^N e^{j(\theta+n\phi)} = \frac{\sin[(N+1)\phi/2]}{\sin(\phi/2)} e^{j[\theta+(N\phi/2)]} \quad (64)$$

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} = 2^N \quad (65)$$

APÉNDICE B

Tabla de función de distribución
gausiana o normal

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Índice analítico

- A
- aleatoria conjunta, 125
 - algoritmo FFT, 165
 - análisis espectral, 165
 - autocorrelogramas, 152
 - axiomas, 126
- B
- banda limitada, 109, 113-116
- C
- cálculo de la TFD a partir de una señal continua, 101
 - caracterización de señales aleatorias, 124
 - clasificación de señales, 124
 - coeficiente a_n , 23
 - coeficiente a_0 , 24
 - coeficiente b_n , 24
 - coeficientes a_n , a_n y b_n , 10, 23
 - comandos, 157
 - condición de existencia, 130
 - condiciones de Dirichlet, 25
 - convolución, 10, 77-79, 83-85, 96, 99, 106, 112-115, 119, 121, 122-168; de las transformadas de Fourier, 112; en el tiempo continuo, 77
 - curtosis, 142
- D
- definición básica de probabilidad, 125
 - densidad espectral de potencia, 124, 125, 155, 156
 - desarrollo analítico para el cálculo de la señal original analógica a partir de muestras digitales, 117
 - desplazamiento en frecuencia, 96, 99
 - desplazamiento en tiempo, 99
- E
- ejercicio en Matlab, 105
 - ergodicidad, 123, 124
 - ergódico, 10, 123, 124, 151
 - error cuadrático medio, 139, 140
 - escalón unitario, 52, 63, 64, 94
 - espectro periodizado, 116, 117, 122
 - esperanza matemática, 10, 123, 136, 138
 - estacionalidad, 147, 150; en el sentido estricto, 150
 - estadísticamente independientes, 144-148, 154

Índice analítico

F

fenómeno de Gibbs, 28
fórmulas, 171
frecuencia de muestreo, 109, 114, 116
frecuencia de Nyquist, 116
frecuencia relativista, 125
función de autocorrelación, 149,
151-155
función de autocorrelación $R_{xx}(t)$, 152
función de densidad conjunta, 143,
144, 145, 150
función de densidad de probabilidad,
20, 125, 127, 130-135, 137, 149, 150
función de densidad de probabilidad
normal o gaussiana, 11, 134, 135
función de densidad de probabilidad
Rayleigh, 134-136
función de densidad de probabilidad
uniforme, 133
función de densidad espectral, 125,
155, 156
función de distribución, 127-130, 132,
133, 143, 145, 147
función de distribución de orden n ,
148
Función de distribución
de probabilidad, 127, 128-130,
132-135
función de distribución de
probabilidad exponencial, 134, 135
función de distribución de
probabilidad Rayleigh, 134, 136
función de distribución
de probabilidad uniforme, 133
función de muestreo,
función decreciente de n , 95
función delta de Dirac,
función lineal de n ,
función sampling, 122
función sampling al cuadrado, 122
función seno, 60, 94, 105
función signum, 61, 62, 63
función sin $c(x)$, 120

funciones de correlación, 11, 123-125,
154
funciones de correlación cruzada, 123,
154
funciones de distribución, 123, 125,
128, 142, 143, 147
funciones exponenciales, 19, 21, 38, 39,
40, 51
funciones ortogonales, 21, 22, 25, 39,
146
funciones pares e impares, 31
funciones senoidales, 21
funciones trigonométricas, 19, 21, 23,
38, 60

G

gaussiana, 11, 123, 131-133, 137,
141, 142
generación de señales, 158
generar los armónicos de una señal
cuadrada, 165
gráfica en forma continua, 160
gráfica en tres dimensiones, 163

I

identidades trigonométricas, 21, 151
importancia de la elección del periodo
 T en la función tren de impulsos
 $\sum_{-T}(t)$, 21
impulso unitario, 84, 93, 130
impulso unitario desplazado
en tiempo, 93
independencia estadística, 11, 123,
144, 148
integral de convolución, 77, 78, 106
integrales definidas, 9, 13, 49, 109,
123, 157
integrales indefinidas, 172-174

L

ley asociativa, 83

Índice analítico

- ley conmutativa, 83
linealidad, 10, 67, 68, 96, 99
- M
- manejo de variables, 158
Matlab, 9-11, 47, 48, 89, 96, 97, 99, 100, 105, 106, 157, 158, 160-162, 166
momentos, 137; alrededor de la media, 137; alrededor del origen, 137, 238; centrales, 137, 138, 141, 146; conjuntos sobre el origen, 146; de orden 1 y 2, 139; de orden superior, 141
muestreador "bloqueador", 121
muestreo, 9, 10, 43, 101, 102, 109-111, 114, 116, 117, 119, 120; real, 10, 121; ideal, 10, 116
- O
- ortogonalidad y series de Fourier, 9, 13, 19
- P
- periodización de espectros, 114
periodización del espectro, 105, 114, 115
periodo de muestreo, 114
probabilidad, 9, 10, 20, 123, 125-134, 149
proceso aleatorio en sentido amplio, 149
proceso aleatorio estacionario de primer orden, 148
promedios estadísticos, 124, 136
propiedad de convolución, 10, 77, 112, 121
propiedad de corrimiento en el tiempo, 72, 73, 74
propiedad de corrimiento en la frecuencia, 74
propiedad de diferenciación en el tiempo y en la frecuencia, 85
propiedad de escalamiento en el tiempo, 71
propiedad de escalamiento en la frecuencia, 71
propiedad de la función delta, 57, 58, 66
propiedad de linealidad, 10, 68
propiedad de simetría, 69, 70
propiedad de Euler, 119
propiedades de la convolución, 83
propiedades de la función de autocorrelación, 151
propiedades de la función de correlación cruzada, 153
propiedades de la función de densidad conjunta, 144
propiedades de la función de densidad espectral de potencia, 156
propiedades de la función de distribución, 143
propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo, 143
propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto,
- R
- recubrimiento de espectro, 10, 116, 117
- S
- secuencia, 17, 92, 98, 99, 101, 102, 161, 167
señales aleatorias, 14, 19, 124, 125
señales continuas o analógicas, 14, 16
señales de energía, 14, 15
señales de potencia, 14, 15
señales determinísticas, 14, 19
señales digitales, 14, 17
señales discretas, 91-93
señales no estacionarias, 124

Índice analítico

- señales periódicas y no periódicas, 17, 18
 - serie de Fourier trigonométrica, 22, 27, 29, 32, 33, 36, 38, 39, 47
 - series de Fourier, 9, 10, 13, 19, 25, 28, 91, 92, 164
 - simetría, 10, 31, 67, 69, 70, 123, 141, 142
 - sistema operativo y archivos, 158
 - subplot, 162, 163, 165-167
- T
- taxonomía de señales aleatorias, 124
 - teorema de convolución, 84
 - teorema de muestreo, 10, 111, 116, 117
 - teorema de muestreo, 116
 - teorema de Parseval, 155
 - teorema de Shannon, 116
 - teoría de muestreo, 9, 10, 109
 - tiempo discreto, 17, 91, 92, 95-101, 106, 111
 - title, 160-163, 165, 166-168
 - transformada de Fourier, 47, 49-53, 56, 61, 64, 66-70, 73, 84, 85, 88, 90-92, 95-101, 106
 - transformada de Fourier de tiempo continuo de una función no periódica (TFTC), 51, 64
 - transformada de Fourier de tiempo discreto, 91, 92, 95, 97, 98, 100, 106
 - transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD), 95
 - transformada de Fourier de un tren de impulsos, 113
 - transformada de Fourier discreta, 91, 92, 98-101, 106
 - transformada de Fourier discreta (TFD), 98
 - transformada directa, 52, 118
 - transformada directa de Fourier, 118
 - transformada inversa, 52, 59, 69, 71, 96, 99, 117, 118, 155
 - tren de impulsos, 36, 105, 109-115
 - tren de pulsos de Dirac, 67
 - truncamiento temporal, 10, 102, 105
- V
- valor esperado, 10, 123, 136-138, 145, 148-151
 - valor esperado de una función, 137, 145
 - valores promedio, 124, 125
 - variable aleatoria, 127-131, 133, 136, 137-139, 142, 146, 147, 149-151
 - variables aleatorias, 10, 11, 123, 127, 130, 139, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148
 - variables y procesos aleatorios, 9, 10, 123

Índice de figuras

Figura II.1. Señales de energía	15
Figura II.2. Señal de potencia	16
Figura II.3. Señales analógicas	17
Figura II.4. Señal discreta del tipo exponencial negativo	18
Figura II.5. Señales periódicas y no periódicas	18
Figura II.6. Señal determinística	19
Figura II.7. Señal aleatoria y su función de densidad de probabilidad asociada	20
Figura II.8. Señal cuadrada	26
Figura II.9. Aproximación a una onda cuadrada utilizando series de Fourier, con: a) $n = 1$, b) $n = 3$, c) $n = 5$ y d) $n = 7$	28
Figura II.10. Gráfica del espectro de líneas	29
Figura II.11. Función coseno	30
Figura II.12. Espectro de línea	31
Figura II.13. Señal diente de sierra	32
Figura II.14. Derivada de la señal diente de sierra	34
Figura II.15. Señal triangular	36
Figura II.16. Señal triangular derivada	36
Figura II.17. Segunda derivada de una señal triangular	37
Figura II.18. Primeros cuatro componentes armónicos de una señal triangular utilizando serie de Fourier trigonométrica	38
Figura II.19. Espectro de líneas	42
Figura II.20. Tren de pulsos cuadrados de duración τ y periodo T	42
Figura II.21. Función de muestreo $\text{sen}(x)/x$	43
Figura II.22. Espectro de líneas cuando a) $\tau = 1/4$ y $T = 1$; b) $\tau = 1/4$ y $T = 2$, y c) $\tau = 1/4$ y $T = 3$	44
Figura II.23. Espectro de líneas cuando a) $\tau = 1/4$ y $T = 1$; b) $\tau = 1/8$ y $T = 1$, y c) $\tau = 1/16$ y $T = 1$ seg.	45
Figura II.24. Tren de pulsos desplazado	46

Índice de figuras

FIGURA II.25. Fase de la onda desplazada	46
Figura III.1. Señal inmersa en ruido	49
Figura III.2. Espectro de la señal con ruido	50
Figura III.3. Señal periódica	51
Figura III.4. Función simétrica a energía finita del tipo valor absoluto de la exponencial	53
Figura III.5. Transformada de Fourier de la función definida en la figura III.4	53
Figura III.6. Señal en el tiempo del tipo exponencial positiva	54
Figura III.7. Espectro de Fourier y ángulo de fase	55
Figura III.8. Pulso rectangular de duración τ y amplitud A	55
Figura III.9. Transformada de Fourier del pulso rectangular	56
Figura III.10. Función delta de Dirac	56
Figura III.11. Espectro del ruido blanco	57
Figura III.12. Función delta desplazada t_0 segundos	58
Figura III.13. Espectro de la función delta de Dirac desplazada	58
Figura III.14. Funciones delta en la frecuencia	59
Figura III.15. Transformada de Fourier de $\sin(\omega_0 t)$	61
Figura III.16. Función signum	61
Figura III.17. Espectro de la función signum	62
Figura III.18. Función escalón unitario	63
Figura III.19. Espectro de la función escalón unitario	64
Figura III.20. Tren de pulsos	65
Figura III.21. Transformada de Fourier de una función periódica	66
Figura III.22. Tren de deltas de Dirac	66
Figura III.23. Transformada de Fourier de un tren de deltas de Dirac	67
Figura III.24. Señal coseno más una constante	68
Figura III.25. Transformada de Fourier de la señal coseno (a la frecuencia ω_0) más una constante (nivel de d.c.)	69
Figura III.26. Ejemplo de la propiedad de simetría de la transformada de Fourier	70
Figura III.27. Ejemplo de la propiedad de escalamiento en tiempo para la señal del tipo ventana cuadrada. En el tiempo se expande y en la frecuencia se contrae	72
Figura III.28. Función ventana rectangular de duración τ y amplitud A	73
Figura III.29. Transformada de una ventana de duración τ	73
Figura III.30. Transformada de una ventana desplazada $\tau/2$ seg	74
Figura III.31. Señal modulada en el dominio del tiempo	75
Figura III.32. Espectro de la señal sin modular	75
Figura III.33. Espectro de la señal modulada	76
Figura III.34. Sistema lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$	77
Figura III.35. Circuito RC visto como un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$	79
Figura III.36. Funciones de entrada y respuesta al impulso del circuito RC	80

Índice de figuras

Figura III.37. Gráfica de las funciones impulso en el dominio τ , rotadas y desplazadas T seg	81
Figura III.38. Resultado de la convolución cuando $T = 3$ seg y $RC = 1$ seg	83
Figura III.39. Ejemplo de señal modulada en amplitud por una función cosenoidal	86
Figura III.40. Señal demodulada en amplitud (desplazada a la frecuencia cero)	86
Figura III.41. Señal del tipo cosenoidal	87
Figura III.42. Función ventana de duración τ y amplitud A	87
Figura III.43	88
Figura III.44. Función triángulo de duración 2 y amplitud máxima A	89
Figura III.45. Señal cuadrada con valor medio cero, duración 2τ y amplitud $2A$	90
Figura III.46. Señal triangular de duración 2τ y valor máximo $A\tau$	90
Figura III.47. En la parte superior de la figura vemos casos en los que el dominio del tiempo es discreto y la frecuencia continua (transformada de Fourier de tiempo discreto). La parte de abajo corresponde tanto a tiempo discreto como a frecuencia discreta (transformada de Fourier discreta)	92
Figura III.48. Señal impulso unitario	93
Figura III.49. Señal impulso unitario desplazado cierto valor i a la derecha ..	93
Figura III.50. Señal escalón unitario	94
Figura III.51. Señal senoidal discreta	94
Figura III.52. Señal del tipo lineal	95
Figura III.53. Señal discreta decreciente	95
Figura III.54. Señal muestreada en el tiempo y su respectivo espectro empleando la transformada de tiempo discreto de Fourier	96
Figura III.55. Transformada de Fourier de tiempo discreto	97
Figura III.56. Transformada de Fourier de tiempo discreto	98
Figura III.57. Transformada de Fourier de tiempo discreto	100
Figura III.58. Transformada de Fourier discreta y de tiempo discreto en asteriscos	100
Figura III.59. Transformada de Fourier discreta y de tiempo discreto	101
Figura III.60. Señal senoidal, tomada exactamente un periodo (no existe discontinuidad en la región considerada)	102
Figura III.61. Señal senoidal, tomando tres cuartas partes del periodo (existe discontinuidad en la región considerada)	103
Figura III.62. Efecto en la frecuencia cuando se trunca una señal en el tiempo, tomando una ventana cuadrada (se inducen o generan componentes de alta frecuencia que no corresponden a la señal original).....	103
Figura III.63. Ejemplos de ventanas comúnmente usadas para llevar a cabo el truncamiento temporal	105

Índice de figuras

Figura IV.1. Ejemplo de señal analógica limitada en banda: <i>a)</i> en tiempo y <i>b)</i> en frecuencia	110
Figura IV.2. Tren de impulsos de Dirac: <i>a)</i> en tiempo y <i>b)</i> en frecuencia	110
Figura IV.3. Efecto de muestreo en tiempo, produciendo el efecto de periodización de espectro en frecuencia	110
Figura IV.4. Tres señales en tiempo continuo con valores idénticos en múltiplos enteros de T , muestreadas a un mismo periodo de tiempo T	112
Figura IV.5. Señal a banda limitada	113
Figura IV.6. Efecto de periodización del espectro: <i>a)</i> señal a banda limitada, <i>b)</i> transformada de Fourier del tren de impulsos, y <i>c)</i> resultado de la convolución de las señales <i>a)</i> y <i>b)</i>	115
Figura IV.7. Efecto de recubrimiento de espectro cuando no se respeta el teorema de muestreo	117
Figura IV.8. Filtro de amplitud T y de límites $-\frac{W_0}{2}$ a $+\frac{W_0}{2}$, filtro ideal. Filtrado de un espectro, con el fin de poder recuperar la señal original, primero a $F(w)$ y posteriormente a $f(t)$, a través de la transformada inversa de Fourier.	118
Figura IV.9. Reconstrucción de la señal analógica a partir de muestras digitales	120
Figura IV.10. Proceso de muestreo real con la técnica de "bloqueo"	121
Figura IV.11. Resultado de convolucionar las muestras de $f(t)$ con una función ventana	121
Figura IV.12. Efecto de multiplicar el espectro periodizado $F_m(w)$ con una función del tipo sampling al cuadrado	122
Figura IV.13. Reconstrucción de la señal analógica $f(t)$, como resultado de convolucionar los valores discretos de la señal, con una función triángulo del tiempo.	122
Figura V.1. Taxonomía de señales aleatorias en función de sus propiedades estadísticas	124
Figura V.2. Ejemplos de funciones de distribución de probabilidad: <i>a)</i> y <i>c)</i> continuas y <i>b)</i> discreta	128
Figura V.3. Función de distribución de probabilidad continua $F_X(x)$	129
Figura V.4. Función de distribución de probabilidad continua $F_X(x)$ entre -1 y 1	130
Figura V.5. Función de densidad de probabilidad del tipo gaussiana	132
Figura V.6. Función de distribución de probabilidad para la función gaussiana	132
Figura V.7. <i>a)</i> Función de densidad de probabilidad uniforme, <i>b)</i> función de distribución de probabilidad uniforme	133
Figura V.8. <i>a)</i> Función de densidad de probabilidad exponencial, <i>b)</i> función de distribución de probabilidad exponencial	135
Figura V.9. <i>a)</i> Función de densidad de probabilidad Rayleigh, <i>b)</i> función de distribución de probabilidad Rayleigh.	136

Índice de figuras

Figura V.10. Problema de cuantización, del nivel Δx al $\Delta x + \Delta x/2$	140
Figura V.11. Funciones de densidad y de distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$	150
Figura V.12. Función de autocorrelación para una señal periódica sin ruido	152
Figura V.13. Función de autocorrelación para una señal periódica con ruido	152
Figura V.14. Función de autocorrelación para una señal periódica de banda angosta	153
Figura V.15. Función de autocorrelación para una señal periódica de banda angosta con ruido	153

Índice general

<i>Prólogo</i>	7
<i>Capítulo I. Introducción</i>	9
<i>Capítulo II. Ortogonalidad y series de Fourier</i>	13
Introducción	13
Clasificación de señales	14
Señales de energía	15
Señales de potencia	15
Señales continuas o analógicas	16
Señales digitales (también conocidas como secuencias)	17
Señales periódicas y no periódicas	17
Señales determinísticas	19
Señales aleatorias	19
Ortogonalidad y series de Fourier	19
Serie de Fourier trigonométrica	22
Obtención de los coeficientes a_0 , a_n y b_n	23
Obtención del coeficiente a_0	23
Obtención del coeficiente a_n	24
Obtención del coeficiente b_n	24
Condiciones de Dirichlet	25
Funciones pares e impares	31
Obtención de la serie de Fourier trigonométrica por diferenciación	33
Serie de Fourier exponencial	38
Interpretación del coeficiente F_n respecto al periodo T y la duración del pulso τ	42
Ejercicios del capítulo II	47

Índice general

<i>Capítulo III. Transformada de Fourier</i>	49
Introducción	49
Transformada de Fourier de tiempo continuo	
de una función no periódica (\mathcal{TFTC})	51
Transformada de Fourier de tiempo continuo de una señal periódica.	64
Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo	67
Propiedad de linealidad	68
Propiedad de simetría	69
Propiedad de escalamiento en el tiempo	71
Propiedad de escalamiento en la frecuencia	71
Propiedad de corrimiento en el tiempo	72
Propiedad de corrimiento en la frecuencia (teorema de modulación)	74
Propiedad de convolución	77
Propiedad de diferenciación en el tiempo y en la frecuencia	85
Transformada de Fourier de tiempo discreto (\mathcal{TFTD})	91
Señales discretas	93
Impulso unitario	93
Impulso unitario desplazado	93
Escalón unitario	94
Función seno	94
Función lineal de n	94
Función decreciente de n	95
Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto	96
Transformada de Fourier discreta (\mathcal{TFD})	98
Cálculo de la \mathcal{TFD} a partir de una señal continua.	101
Truncamiento temporal	102
Ejercicio en Matlab	105
Ejercicio de periodización del espectro	105
Ejercicios del capítulo III	106
<i>Capítulo IV. Teoría de muestreo</i>	109
Introducción	109
Muestreo ideal	109
Importancia de la elección del periodo T en la función	
tren de impulsos $\delta_T(t)$	111
Teorema de muestreo	116
Reconstrucción de la señal analógica a partir de las muestras digitales	116
Desarrollo analítico para el cálculo de la señal original analógica	
a partir de muestras digitales	117
Muestreo real	121
<i>Capítulo V. Variables y procesos aleatorios</i>	123
Introducción	123
Taxonomía de señales aleatorias	124

Índice general

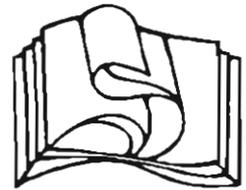
Definición básica de probabilidad	125
Variable aleatoria	125
Función de distribución de probabilidad	128
Función de densidad de probabilidad	130
Propiedades de la función de densidad de probabilidad	131
Funciones de densidad más comunes	131
Promedios estadísticos	136
Esperanza matemática	136
Momentos	137
Variables aleatorias múltiples	142
Función de distribución conjunta	142
Propiedades de la función de distribución conjunta	143
Función de densidad conjunta	143
Propiedades de la función de densidad conjunta	144
Independencia estadística	144
Momentos conjuntos sobre el origen	146
Momentos centrales	146
Estacionalidad	147
Funciones de distribución y de densidad de un <i>PA</i>	147
Función de distribución de orden <i>n</i>	148
Independencia estadística	148
Proceso aleatorio estacionario de primer orden	148
Proceso aleatorio en sentido amplio	149
Propiedades de la función de autocorrelación	151
Funciones de correlación cruzada	154
Propiedades de la función de correlación cruzada	155
Densidad espectral de potencia	155
Propiedades de la función de densidad espectral de potencia	156
<i>Capítulo VI. Curso Matlab</i>	157
Introducción	157
Comandos de propósito general	157
Manejo de variables y <i>workspace</i> (espacio de trabajo)	158
Sistema operativo y archivos	158
Generación de señales	158
Series de Fourier	164
Análisis espectral	165
Convolución	166
<i>Bibliografía</i>	169
<i>Apéndice A. Fórmulas</i>	171
<i>Apéndice B. Tabla de función de distribución gaussiana o normal</i>	177
<i>Índice analítico</i>	179
<i>Índice de figuras</i>	183

Análisis de señales

se terminó de imprimir en mayo de 2003
en los talleres de Sans Serif Editores, SA de CV,
Leonardo da Vinci 199, col. Mixcoac, 03910 México, D.F.,
tel. 5611 37 30, telfax 5611 37 37.

La edición consta de 1 000 ejemplares
más sobrantes para reposición.

La composición tipográfica, el diseño, la producción
y el cuidado editorial estuvieron a cargo
de Sans Serif Editores, SA de CV.



De los pliegues
de la escritura
a los pliegos
de la encuadernación.

UAM
TK5102.9
A7.55

2893588
Avilés Cruz, Carlos
Análisis de señales / Car
P

serifed@prodigy.net.mx



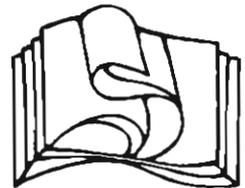
2893588

Análisis de señales

se terminó de imprimir en mayo de 2003
en los talleres de Sans Serif Editores, SA de CV,
Leonardo da Vinci 199, col. Mixcoac, 03910 México, D.F.,
tel. 5611 37 30, telfax 5611 37 37.

La edición consta de 1 000 ejemplares
más sobrantes para reposición.

La composición tipográfica, el diseño, la producción
y el cuidado editorial estuvieron a cargo
de Sans Serif Editores, SA de CV.



De los pliegues
de la escritura
a los pliegos
de la encuadernación.

UAM
TK5102.9
A7.55

2893588
Avilés Cruz, Carlos
Análisis de señales / Car
P

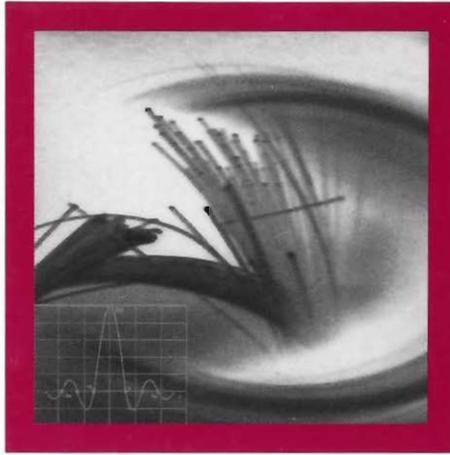
serifed@prodigy.net.mx



2893588



EZEQUIEL RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ estudió la licenciatura en ingeniería física en la Universidad Autónoma Metropolitana en la especialidad de instrumentación y equipo y la maestría en ingeniería biomédica en la unidad Iztapalapa de la misma universidad. Ha trabajado en la fabricación de dispositivos de interferencia cuántica superconductores para la obtención de magnetocardiogramas. Actualmente se desempeña como profesor del Departamento de Electrónica, en donde imparte asignaturas como Análisis de señales, Procesamiento digital de señales, así como Circuitos eléctricos. Entre sus campos de interés están el procesamiento de señales, el diseño y la construcción y caracterización de sistemas de alto vacío y el crecimiento de películas delgadas.



En la formación de todo ingeniero en electrónica no debe faltar un curso en el que se expongan, teórica y experimentalmente, conceptos que le ayuden a analizar y caracterizar señales. Los tipos abordados en esta obra son las señales determinísticas y las aleatorias. Se presentan las herramientas que nos ayudan a entender las primeras, como las series de Fourier, la transformada de Fourier, la teoría de muestreo, incluidos el muestreo ideal y el real. Respecto a las segundas, se abordan conceptos como variables y procesos aleatorios, procesos ergódicos, funciones de densidad y distribución, valores esperados desde primero hasta cuarto orden, funciones de densidad y distribución conjunta, funciones de correlación, etcétera.

En busca de la formación completa, a la teoría y los ejercicios se agrega la simulación en Matlab: es importante que los estudiantes puedan apreciar los fenómenos de manera gráfica, explorar variando parámetros y ver el resultado inmediatamente. Así pues, el libro comprende un capítulo de introducción y manejo de Matlab en el nivel de programación.

Con toda seguridad, *Análisis de señales* habrá de contribuir a la mejor comprensión de conceptos fundamentales que se hallan dispersos en varias obras, a más de que las malas traducciones que se hallan en el mercado no manejan los términos que emplean comúnmente los profesionales de este campo.



9 789706 549679