418 非線形動的システムのサンプル値制御モデル

Sampled-Data Control Model of Nonlinear Dynamical Systems

○正　石飛　光章 (熊本大)　　　学　西　雅俊 (熊本大院)

Mitsuaki ISHITOBI and Masatoshi NISHI

Kumamoto University, 2-39-1 Kurokami, Kumamoto

Key Words: nonlinear systems, sampled-data models, Euler model

1. はじめに

連続時間システムに対して，サンプラとホールドを用いて得られるサンプル値システムを考える．定係数線形システムについては，厳密なサンプル値モデルが得られる．しかし，非線形システムについては，定係数線形システムのような厳密なサンプル値モデルを得ることはできない．そこで精度の高い近似モデルが望まれる．近似モデルとして最もよく知られているのはEulerモデルである．これに対して，最近，Yuz and Goodwin は，モデル出力と真のシステムの出力との誤差の大きさに関して，Euler モデルより近似精度が高いモデルを提案している [1]．このとき，連続時間非線形システムのゼロダイナミクスに対応するゼロダイナミクス（線形システムの場合の定義をここでも同じように使い，これを真性ゼロダイナミクス [2] と呼ぶ）のほかに，連続時間システムの相対次数より1少ない次数の新しいゼロダイナミクス（上と同様に，サンプリングダイナミクスと呼ぶ）が生じる．真性ゼロダイナミクスは連続時間システムのゼロダイナミクスが安定であれば，十分小さいサンプリング周期で安定である．ところが，連続時間システムの相対次数が3以上のときには，サンプリングゼロダイナミクスの少なくとも1つは，十分小さいサンプリング周期で不安定である．したがって，このときには連続時間システムのゼロダイナミクスが安定であっても，サンプル値システムのゼロダイナミクスは不安定となり，Yuz and Goodwin より高精度のモデルにしてもゼロダイナミクスは不安定である．しかし，連続時間システムの相対次数が2のときには，Yuz and Goodwin モデルのサンプリングゼロダイナミクスは1次で，単位円上，すなわち安定限界上にある．

本稿では，連続時間非線形システムの相対次数が2のときの，Yuz and Goodwin より高精度のサンプル値モデルを導出し，そのモデルではサンプリングゼロダイナミクスの安定性が連続時間システムの動特性に依存することを示し，そのゼロダイナミクスが十分小さいサンプリング周期で安定，または不安定となる条件を明らかにする．

2. 主要結果

相対次数2の n 次最小位相 affine 非線形連続時間システムを考える．このとき，そのシステムは次式の normal form で表される [2]．

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (b(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta}) + a(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta})u) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta}) \\ y = z_1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_3(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta}) \\ \vdots \\ c_n(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

ここで，$a(\mathbf{0},\mathbf{0}) \neq 0$, $b(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, $\boldsymbol{c}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となっているものとする．さらに，以下の仮定が成立しているものとする．

仮定1

$$\frac{\partial a(\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\eta})}{\partial z_2} = 0 \tag{3}$$

これは導出するサンプル値モデルも affine システムとなることを保証する．

このとき，サンプリング周期を T としてゼロ次ホールドを用いたサンプル値モデルは以下のように得られる．

$$u(t) = u(kT),\ \dot{u}(t) = 0,\ \ddot{u}(t) = 0,\ t \in [kT,\ (k+1)T] \tag{4}$$

に注意すると

$$\dot{y} = \dot{z}_1 = z_2 \tag{5}$$

$$\ddot{y} = \dot{z}_2 = b + au \tag{6}$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= \dot{b} + \dot{a}u \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial z_i}\dot{z}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial z_i}\dot{z}_i u \\ &= \frac{\partial b}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial b}{\partial z_2}(b + au) + \sum_{i=3}^{n} \frac{\partial b}{\partial z_i} c_i \\ &\quad + \left(\frac{\partial a}{\partial z_1} z_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{\partial a}{\partial z_i} c_i \right) u \\ &= \bar{b} + \bar{a}u \end{aligned} \tag{7}$$

となる．ここで

$$\bar{b} = \bar{b}(\zeta,\ \eta) \equiv \frac{\partial b}{\partial z_1}z_2 + \frac{\partial b}{\partial z_2}b + \sum_{i=3}^{n}\frac{\partial b}{\partial z_i}c_i \tag{8}$$

$$\bar{a} = \bar{a}(\zeta,\ \eta) \equiv \frac{\partial b}{\partial z_2}a + \frac{\partial a}{\partial z_1}z_2 + \sum_{i=3}^{n}\frac{\partial a}{\partial z_i}c_i \tag{9}$$

である．そこで，変数の添え字 k, $k+1$ がそれぞれ時刻 kT, $(k+1)T$ を表すものとし

$$\begin{aligned} b_k &\equiv b(\zeta_k,\ \eta_k),\ a_k \equiv a(\zeta_k,\ \eta_k),\ \overline{b_k} \equiv \bar{b}(\zeta_k,\ \eta_k), \\ \overline{a_k} &\equiv \bar{a}(\zeta_k,\ \eta_k) \end{aligned} \tag{10}$$

と定める．すると，(5), (6), (7) 式より，y_k, $\dot{y}_k$ のそれぞれ T^4, T^3 以上の微小項を無視して，次式のサンプル値モデルが得られる．

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + T\dot{y}_k + \frac{T^2}{2}\ddot{y}_k + \frac{T^3}{6}y_k^{(3)} \\ &= y_k + T\dot{y}_k + \frac{T^2}{2}b_k + \frac{T^3}{6}\bar{b}_k \\ &\quad + \left(\frac{T^2}{2}a_k + \frac{T^3}{6}\bar{a}_k\right)u_k \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{k+1} &= \dot{y}_k + T\ddot{y}_k + \frac{T^2}{2}y_k^{(3)} \\ &= \dot{y}_k + Tb_k + \frac{T^2}{2}\bar{b}_k + \left(Ta_k + \frac{T^2}{2}\bar{a}_k\right)u_k \end{aligned} \tag{12}$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + Tc(\zeta_k,\ \eta_k) \tag{13}$$

上式で $\bar{b}_k = \bar{a}_k = 0$ とすると，Yuz and Goodwin のモデルに一致しており，上式のモデルは T に関して，より高次項まで近似していることがわかる．

ここで以下の仮定 2 が成立しているものとする．

仮定 2：

$$\frac{\partial c(\zeta,\ \eta)}{\partial z_2} = 0 \tag{14}$$

この仮定の下で，真性ゼロダイナミクスの状態変数 η^S は，(13) 式で $\zeta_k = \mathbf{0}$ として決まる．

このとき，サンプリングによって新たに生じるサンプリングゼロダイナミクスは以下のように得られる．

$$y_{k+1} = y_k = 0 \tag{15}$$

とおくと，(11) 式より次式となる．

$$T\dot{y}_k + \frac{T^2}{2}b_{k0} + \frac{T^3}{6}\bar{b}_{k0} + \left(\frac{T^2}{2}a_{k0} + \frac{T^3}{6}\bar{a}_{k0}\right)u_k = 0 \tag{16}$$

b_{k0}, a_{k0}, $\bar{b}_{k0}$, $\bar{a}_{k0}$ は (10) 式で $y_k = 0$, $\eta_k = \eta^S$ としたものを意味する．上式を用いて，(12) 式の u_k を消去し

$$\begin{aligned} \dot{y}_{k+1} &= \dot{y}_k + \frac{T}{2}\left(2b_{k0} + T\bar{b}_{k0}\right) - \frac{2a_{k0} + T\bar{a}_{k0}}{2(3a_{k0} + T\bar{a}_{k0})} \\ &\quad \times \left(6\dot{y}_k + 3Tb_{k0} + T^2\bar{b}_{k0}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{2a_{k0} + T\bar{a}_{k0}}{3a_{k0} + T\bar{a}_{k0}} &\approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{T\bar{a}_{k0}}{2a_{k0}}\right)\left(1 - \frac{T\bar{a}_{k0}}{3a_{k0}}\right) \\ &\approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{\bar{a}_{k0}}{6a_{k0}}T\right) \end{aligned} \tag{18}$$

より

$$\begin{aligned} \dot{y}_{k+1} &\approx \dot{y}_k + \frac{T}{2}\left(2b_{k0} + T\bar{b}_{k0}\right) \\ &\quad - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\bar{a}_{k0}}{6a_{k0}}T\right)\left(6\dot{y}_k + 3Tb_{k0}\right) \\ &\approx -\dot{y}_k - \frac{\bar{a}_{k0}}{3a_{k0}}\dot{y}_k T \end{aligned} \tag{19}$$

したがって，サンプリングゼロダイナミクスは (19) 式で与えられる．ゆえに，明らかに

$$\frac{\bar{a}_{k0}}{3a_{k0}} < 0\ (> 0) \tag{20}$$

ならばサンプリングゼロダイナミクスは十分小さいサンプリング周期で安定（不安定）となる．

3. 例

例 1：振子システム

振子システムのダイナミクスは次式で与えられる．

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - d\sin x_1 + au,\ c > 0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{21}$$

このとき

$$\begin{aligned} a(\zeta,\ \eta) &= a,\ b(\zeta,\ \eta) = -cx_2 - d\sin x_1, \\ \bar{a}(\zeta,\ \eta) &= \frac{\partial b}{\partial x_2}a + \frac{\partial a}{\partial x_1}x_2 = -ac \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\bar{a}_{k0}}{3a_{k0}} = -\frac{c}{3} < 0 \tag{23}$$

したがって，サンプリングゼロダイナミクスは十分小さいサンプリング周期で安定である．

例 2：Van der Pol システム

Van der Pol システムのダイナミクスは次式で与えられる [3]．

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u,\ \epsilon > 0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{24}$$

このとき

$$\begin{aligned} a(\zeta,\ \eta) &= 1,\ b(\zeta,\ \eta) = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2, \\ \bar{a}(\zeta,\ \eta) &= \frac{\partial b}{\partial x_2}a + \frac{\partial a}{\partial x_1}x_2 = \epsilon(1 - x_1^2) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\frac{\bar{a}_{k0}}{3a_{k0}} = \left.\frac{\epsilon(1 - x_1^2)}{3}\right|_{x_1=0} = \frac{\epsilon}{3} > 0 \tag{26}$$

したがって，サンプリングゼロダイナミクスは十分小さいサンプリング周期で不安定である．

参考文献

[1] J. I. Yuz and G. C. Goodwin: IEEE Trans. on Automatic Control, Vo.50, No.10, pp.1477-1489, 2005.

[2] T. Hagiwara, T. Yuasa and M. Araki: Int. J. Control, Vol.58, No.6, pp.1325-1346, 1993.

[3] H. Khalil: Nonlinear Systems, 3rd ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.