

Swing up of an inverted pendulum by energy control

正 石飛 光章 (熊本大) ○ 太田 義樹 (熊本大)

Mitsuaki ISHITOBI, Kumamoto University, 2-39-1, Kurokami, Kumamoto

Yoshiki OHTA, Kumamoto University, 2-39-1, Kurokami, Kumamoto

1. はじめに

倒立振子の振り上げは非線形制御則の有効性を検証する例として、しばしば用いられており¹⁾、近年、エネルギーに基づく方法が注目されている^{2),3)}。Lozanoらは台車型倒立振子系において、リヤプノフ関数を利用した、エネルギー制御による振り上げを研究している³⁾。

しかしこの研究では、摩擦の影響が考慮されていないため、実際には理論どおりの有効な振り上げを実現することが困難である。そこで本研究では、摩擦の影響を考慮した振り上げ制御を検討する。そして実験によりその有効性を示す。

2. 運動方程式

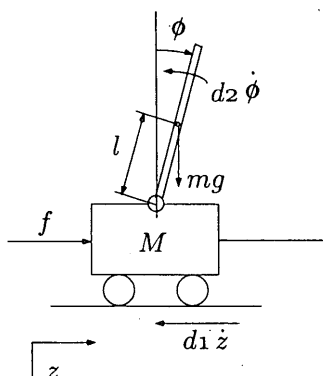


Fig. 1 The cart pendulum system

図1に示される台車型倒立振子系を考える。図1において、台車の質量を M [kg]、振子の質量を m [kg]、重心までの距離を l [m]、重力加速度を g [m/s²]、振子の重心周りの慣性モーメントを J [kgm²]、台車の位置を z [m]、振子の角度を ϕ [rad]、台車の粘性摩擦係数を d_1 [Ns/m]、振子の粘性摩擦係数を d_2 [Nms]、駆動力を f [N] とする。

このシステムの運動方程式は次のように書ける。

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

ただし、

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} z \\ \phi \end{bmatrix}, \quad M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \phi \\ ml \cos \phi & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml \sin \phi \dot{\phi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \phi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

3. 振り上げ制御方法

台車型倒立振子の全体エネルギーは、運動エネルギーを K 、ポテンシャルエネルギーを P とすると、次式により与えられる。

$$E = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q}) \\ = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + mgl(\cos \phi - 1) \quad (5)$$

ここで式(2)、(5)より、もし $\dot{z} = 0$ 、 $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ とすれば次式が成立する。

$$\frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\phi}^2 = mgl(1 - \cos \phi) \quad (6)$$

上式の解はホモクリニック軌道となる³⁾。この式では、 $\phi = 0$ のときのみ $\dot{\phi} = 0$ となることがわかる。これは振子が平衡点 $(\phi, \dot{\phi}) = (0, 0)$ に届くまで時計回り、または反時計回りし続けることを意味する。したがって、本研究の目的は、もしシステムが $\dot{z} = 0$ 、 $z = 0$ 、 $E = 0$ のときに軌道(6)に至れば達成されるから、システムをこのホモクリニック軌道に到達させることが振子の振り上げ問題を解くことになる³⁾。

そこで z 、 \dot{z} 、 E をゼロにするために次のリヤプノフ関数の候補を考える。

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{k_E}{2} E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^2 + \frac{k_v}{2} \dot{z}^2 + \frac{k_z}{2} z^2 \quad (7)$$

ここで、 k_E 、 k_v 、 k_z はそれぞれ正の定数である。このとき、上式の両辺を時間微分すると

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{z}(k_E E f + k_v \dot{z} + k_z z - d_1 k_E E \dot{z}) \\ - k_E E d_2 \dot{\phi}^2 \quad (8)$$

となる。次に式(1)より次式を得る。

$$\dot{z} = \frac{h_z(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) + (J + ml^2)f}{|M(\mathbf{q})|} \quad (9)$$

$$\dot{\phi} = \frac{h_\phi(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) - ml f \cos \phi}{|M(\mathbf{q})|} \quad (10)$$

ただし、

$$h_z(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) = h_1(\phi, \dot{\phi}) - d_1(J + ml^2)\dot{z} + d_2 ml \dot{\phi} \cos \phi$$

$$\begin{aligned} h_\phi(\dot{z}, \phi, \dot{\phi}) &= h_2(\phi, \dot{\phi}) + d_1 m l \dot{z} \cos \phi - d_2 (M + m) \dot{\phi} \\ h_1(\phi, \dot{\phi}) &= (J + m l^2) m l \dot{\phi}^2 \sin \phi - m^2 g l^2 \sin \phi \cos \phi \\ h_2(\phi, \dot{\phi}) &= (M + m) m g l \sin \phi - m^2 l^2 \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

ここで、式(9)を式(8)に代入し、制御入力を

$$f = d_1 \dot{z} - \frac{k_v h_1(\phi, \dot{\phi}) + |M(\mathbf{q})|(k_z z + k_{dz} \dot{z})}{k_v (J + m l^2) + k_E E |M(\mathbf{q})|} \quad (11)$$

とすると、次式が導かれる。

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -k_{dz} \dot{z}^2 - d_2 k_E E \dot{\phi}^2 \quad (12)$$

このとき、式(11)を式(9)、式(10)に代入すると、閉ループ系は次式となる。

$$\ddot{z} = \frac{h_{cz}(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi})}{k_v (J + m l^2) + k_E E |M(\mathbf{q})|} + \frac{d_2 m l \dot{\phi} \cos \phi}{|M(\mathbf{q})|} \quad (13)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{h_{c\phi}(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi})}{k_v (J + m l^2) + k_E E |M(\mathbf{q})|} - \frac{d_2 (M + m) \dot{\phi}}{|M(\mathbf{q})|} \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} h_{cz}(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) &= k_E E h_1(\phi, \dot{\phi}) - (J + m l^2) (k_z z + k_{dz} \dot{z}) \\ h_{c\phi}(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}) &= k_E E h_2(\phi, \dot{\phi}) + k_v m g l \sin \phi \\ &\quad + m l \cos \phi (k_z z + k_{dz} \dot{z}) \end{aligned}$$

ここで、 $d_2 = 0$ の場合は Lozano らの方法³⁾と同様にしてホモクリニック軌道周りの安定性が導かれる。しかし、 $d_2 \neq 0$ の場合には式(12)の右辺第2項が正となり、 \dot{V} が非正定とならないことがありうる。その結果、振子が十分に振り上がらないことが考えられ、実際、実験でもそのようになる。そこでここでは、制御入力に付加項を加えることによって、振子に関する閉ループ方程式を $d_2 = 0$ の場合に一致させることにする。すなわち、式(11)の右辺を f_1 とおいて

$$f = f_1 - \frac{d_2 (M + m) \dot{\phi}}{m l \cos \phi} \quad (15)$$

とすると、式(10)より

$$\ddot{\phi} = \frac{h_{c\phi}(z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi})}{k_v (J + m l^2) + k_E E |M(\mathbf{q})|} \quad (16)$$

となって、振子の粘性摩擦の項が打ち消され、その影響がなくなることがわかる。ただし、式(15)より、 $\cos \phi \approx 0$ のときには入力が発散しないような方策が必要である。なお、制御入力を式(15)とすると、 \dot{V} の非正定性は保証されるとは限らない。

4. 振り上げ制御実験

前節の制御法により実験を行なった。初期条件を $z = 0$ [m]、 $\dot{z} = 0$ [m/s]、 $\phi \approx 2\pi/3$ [rad]、 $\dot{\phi} \approx 0$ [rad/s]、各ゲインを $k_E = 1$ 、 $k_v = 1.6$ 、 $k_z = 15$ 、 $k_{dz} = 0.5$ 、サンプリング周期を 0.005 [s] とした。

また、 $\cos \phi \approx 0$ での入力の発散を避けるために、1.54

$< \phi < 1.60$ 、 $4.68 < \phi < 4.74$ の範囲では、この範囲内に入る直前の入力値を用いることにした。

そして、振子の角度 ϕ が $|\phi| < 0.3$ [rad] になったときに、制御方法を切り替えて、オブザーバを用いた状態フィードバック制御による極配置で倒立させた。

結果を図2～図4に示す。ここでは図4の制御入力を、駆動力 f [N] ではなく、モータへの入力電圧 u [V] で示している。すなわち、入力電圧と駆動力との比例ゲインを r [N/V] として、 $u = f/r$ の関係を用いている。

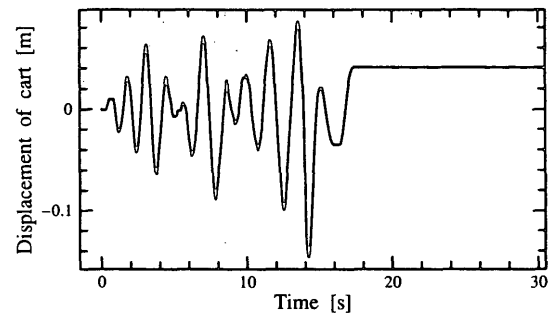


Fig. 2 Displacement of cart

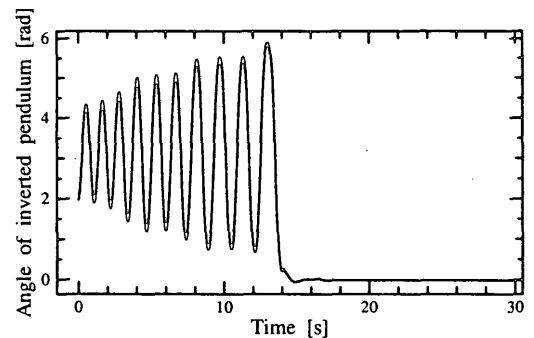


Fig. 3 Angle of inverted pendulum

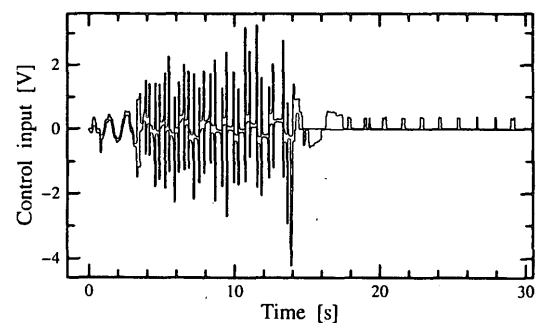


Fig. 4 Control input

参考文献

- 1) 川島 豪: 機論 (C), Vol.55, No.640, pp. 4700~4707 (1999)
- 2) Åström and K. Furuta: Proc. of the 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA, pp. 37~42 (1996)
- 3) R. Lozano, I. Fantoni and D. J. Block: Systems & Control Letters, Vol.40, No.3, pp. 197~204 (2000)