

## 非対称形3ヒンジアーチの面内自由振動特性

崎山 毅\*・松田 浩\*  
森田 千尋\*・清水 義和\*\*Free In-Plane Vibration of Three-Hinged Arches  
with Nonsymmetrical Axis

by

Takeshi SAKIYAMA\*, Hiroshi MATSUDA\*,  
Chihiro MORITA\*, and Yoshikazu SHIMIZU\*\*

A semianalytical method is developed to study the free in-plane vibration of arches with any shape. The fundamental differential equations are first transformed into the integral equations. By applying the approximate solution of integral equation, semianalytical solutions of the original differential equations are obtained. The method is applied to analyze the free in-plane vibration of arches with nonsymmetrical axis because of the unequal height of the supports. Numerical results for the cases of nonsymmetrical, 3-hinged arches with parabolical axis are compared with the solution of the symmetric arches.

## 1. まえがき

アーチ系橋梁は、主として主構に対称形アーチを使用しており、対称形アーチの振動問題に関しては、従来、多くの研究が行われてきている。その自由振動性状についても十分に明らかにされており、逆対称振動は、ライズ比のいかんにかかわらず、曲げ変形主体の振動であること、一方、対称振動は、ライズ比が小さな値から大きな値へと変化するにつれて、軸伸縮変形主体の振動から、軸伸縮変形と曲げ変形との連成振動、さらに、曲げ変形主体の振動へと移行することが知られている。しかし、架設地点の地形、地質的な要因により、左右の両支点間に高低差が生じ、橋の主構に非対称形アーチを使用しなければならない場合が見受けられる。著者らの一人は、アーチの自由振動を支配する増分形基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく方法

により、非対称形2ヒンジアーチの面内自由振動を解析し、その振動性状を明らかにしている。

本研究は、上に述べた解析手法、すなわち、アーチの自由振動を支配する基礎微分方程式の積分方程式への変換と、積分方程式の近似解法の応用により得られる離散的な一般解に基づく非対称形3ヒンジアーチの面内自由振動解析法を提示するとともに、同一ライズ比をもつ対称形3ヒンジアーチの自由振動性状との比較を行うことにより、非対称形3ヒンジアーチの自由振動特性を明らかにしようとするものである。

## 2. 基礎微分方程式

Fig. 1 に示すアーチ軸上の任意の位置に中間ヒンジを有する3ヒンジアーチに関して、微小要素に関する力の釣り合い条件および、アーチの断面力（せん断力

平成4年4月 日受理

\*構造工学科 (Dept. of Structural Eng.)

\*\*構造工学専攻 (Graduate Student, Structural Eng.)

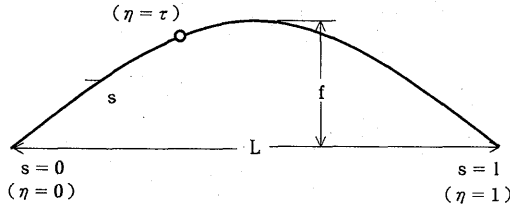


Fig. 1 Three-hinged Arch.

$Q$ , 軸力  $N$ , 曲げモーメント  $M$  と変形 (アーチ軸接線回転角  $\theta$ , 接線方向変位  $w$ , 法線方向変位  $u$ ) との関係により, 3 ヒンジアーチの振動を支配する基礎微分方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{N}{R} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{Q}{R} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q + \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} &= -\frac{M}{EI} \\ \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} &= \frac{N}{EA} \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} - \theta &= Q \frac{\kappa}{GA} \quad s \neq h \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,  $I(s)$ ,  $A(s)$ ,  $R(s)$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $G$  および  $\kappa$  は, それぞれ, アーチ部材の断面 2 次モーメント, 断面積, アーチ軸の曲率半径, 材料の質量密度, 弾性係数, せん断弾性係数および平均せん断応力補正係数である。

アーチ軸長, アーチ支間, 曲げ剛性および伸び剛性を, それぞれ,  $l$ ,  $L$ ,  $EI$  および  $EA$  として

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{L^2 Q}{EI}, \quad X_2 = -\frac{L^2 N}{EI}, \quad X_3 = -\frac{LM}{EI} \\ X_4 &= \theta, \quad X_5 = \frac{w}{L}, \quad X_6 = \frac{u}{L}, \quad \eta = \frac{s}{l} \end{aligned}$$

なる無次元量を導入すれば, 3 ヒンジアーチの無次元規準関数  $X_1 \sim X_6$  に関する基礎微分方程式が得られ, 次式となる。

$$\frac{dX_t}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 G_{tk} X_k, \quad (\eta \neq \tau, \quad t=1 \sim 6) \quad (2)$$

ここに,

$$\begin{aligned} G_{12} &= -\nu\gamma, \quad G_{16} = \nu\lambda^4, \quad G_{21} = \nu\gamma, \quad G_{25} = \nu\lambda^4, \quad G_{31} = \nu \\ G_{34} &= -\nu\lambda^4/a^2, \quad G_{43} = \nu, \quad G_{52} = -\nu/a^2, \quad G_{56} = \nu\gamma \\ G_{61} &= -\nu/(\mu a^2), \quad G_{64} = \nu, \quad G_{65} = -\nu\gamma, \\ \text{other } G_{ik} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad a^2 = \frac{AL^2}{I}, \quad \gamma = \frac{L}{R}, \quad \nu = \frac{l}{L}, \quad \mu = \frac{G}{\kappa E}$$

$\omega$ : 固有円振動数

基礎微分方程式(2)は  $\eta \neq \tau$  として定義されるので, その解は関数  $X_{t1}(\eta)$  と  $X_{t2}(\eta)$  の和として得られ, 次式となる。

$$X_t(\eta) = X_{t1}(\eta) + X_{t2}(\eta) \cdot u(\eta - \tau) \quad (3)$$

ここで,  $u(\eta - \tau)$ ,  $\tau$  は, それぞれ, 単位ステップ関数, 中間ヒンジ点の位置である。

関数  $X_t(\eta)$  ( $t=1, 2, 3, 5, 6$ ) の連続性のため,  $\eta = \tau$  に関して以下の条件を満足しなければならない。

$$X_{t2}(\tau) = 0 \quad (t=1, 2, 3, 5, 6) \quad (4)$$

(3)式を(2)式に代入すれば, 微分方程式は次式で表わせる。

$$\frac{dX_{t1}}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 G_{tk} X_{k1} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{dX_{t2}}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 G_{tk} X_{k2} \quad \tau \leq \eta \leq 1 \quad (6)$$

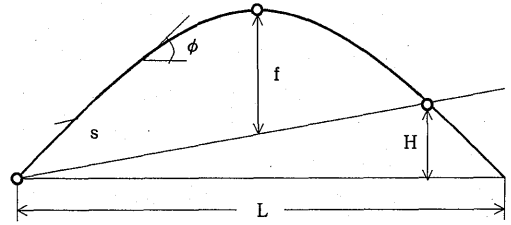


Fig. 2 Arch Axis.

また, Fig. 2 に示すように, アーチ軸接線の傾斜角を  $\phi(s)$  とすれば, アーチ軸微小長さ  $ds$  と水平軸微小長さ  $dx$  との間には,  $ds = dx / \cos\phi$  なる関係が成立するゆえ, 水平軸座標系に関して,  $\zeta = x/L$  なる無次元量  $\zeta$  を導入すれば,

$$d\eta = \frac{1}{\nu \cdot \cos\phi} d\zeta \quad (7)$$

となる。(7)式の関係を用いて, (5), (6)式の変数  $\eta$  を  $\zeta$  に変換すれば, 次式が得られる。

$$\frac{dX_{t1}}{d\zeta} = \sum_{k=1}^6 \frac{G_{tk}}{\nu \cdot \cos\phi} X_{k1} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (8)$$

$$\frac{dX_{t2}}{d\zeta} = \sum_{k=1}^6 \frac{G_{tk}}{\nu \cdot \cos\phi} X_{k2} \quad \tau \leq \zeta \leq 1 \quad (9)$$

基礎微分方程式(8), (9)を用いて非対称形アーチの自由振動性状の解析を行うことができる。

3. 基礎微分方程式の離散的一般解

水平軸上の無次元変数  $\zeta$  の原点をアーチ部材の左端にとり、基礎微分方程式(8)を変域  $[0, \zeta]$  で、(9)式を変域  $[\tau, \zeta]$  で積分すれば、次の積分方程式が得られる。

$$X_{t1}(\zeta) = X_{t1}(0) + \int_0^\zeta \sum_{h=1}^6 \frac{G_{th}(\xi)}{\nu \cdot \cos\phi(\xi)} X_{t1}(\xi) d\xi \quad (10)$$

$$X_{t2}(\zeta) = X_{t2}(0) + \int_0^\zeta \sum_{h=1}^6 \frac{G_{th}(\xi)}{\nu \cdot \cos\phi(\xi)} X_{t2}(\xi) d\xi \quad (11)$$

次に、全変域  $[0, 1]$ 、すなわち、アーチ支間を  $m$  等分し、Fig. 3 に示すように、左側等分点より順に、 $0, 1, 2, \dots, i, \dots, m$  なる番号を付け、任意点  $i$  に対応する諸量に添字  $i$  を付与すれば、関数  $X_{t1}(\zeta), X_{t2}(\zeta)$  の値は、 $X_{t1i}, X_{t2i}$  として表示される。積分方程式(10)、(11)に等間隔の数値積分法を繰り返し適用し、左側等分点より順に解を求めてゆけば、基礎微分方程式(8)、(9)の、任意点  $i$  に対応する離散表示された近似的な一般解が求められ、次式となる。なお、この離散的一般解を求める方法の詳細については文献1)を参照されたい。

$$X_{t1i} = \sum_{n=1}^6 d_{mi} X_{n0} \quad i = 1 \sim m \quad (12)$$

$$X_{t2i} = D_{ii} \Delta \theta_h \quad i = h \sim m \quad (13)$$

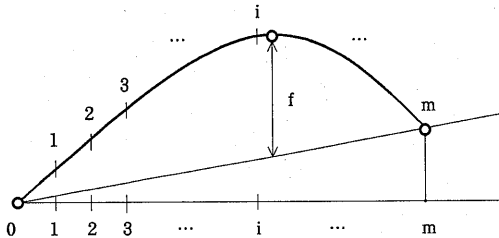


Fig. 3 Discrete Points on Arch Axis.

ここに、

$$d_{mi} = \delta_{mi} + \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^6 \beta_{ij} \frac{G_{tkj}}{\nu \cdot \cos\phi_j} d_{kmi}$$

$$D_{ii} = \delta_{ii} + \sum_{j=h}^i \sum_{k=1}^6 \beta_{ij} \frac{G_{tkj}}{\nu \cdot \cos\phi_j} D_{kj} \quad \begin{matrix} I=i-h \\ J=j-h \end{matrix}$$

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} / 24m, \delta_{mi}: \text{Kronecher's delta}$$

ここで、 $\beta_{ij}$  は数値積分法における重み係数であり、Simpson の多分割数値積分法を用いた場合の  $\alpha_{ij}$  値は Table 1 に示す。

Table 1  $\alpha_{ij}$ -Value

i	j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	12	12								
2	8	32	8							
3	9	27	27	9						
4	8	32	16	32	8					
5	9	27	27	17	32	8				
6	8	32	16	32	16	32	8			
7	9	27	27	17	32	16	32	8		
8	8	32	16	32	16	32	16	32	8	
...										

離散的一般解(12)に含まれる左支点の諸量  $X_{n0}$  は積分定数であり、(13)式の  $\Delta \theta_h$  は中間ヒンジの左右における相対たわみ角である。また、任意点  $i$  に対応する諸量  $X_{mi}$  を積分定数  $X_{n0}$  に関係づける要素  $d_{mi}$  は、伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

4. 数値解析

3 ヒンジアーチの固有値の計算方法について簡単に述べる。まず、左右両支点の境界条件  $M(0) = w(0) = u(0) = 0$ 、 $M(L) = w(L) = u(L) = 0$  および、中間ヒンジ点での曲げモーメントの条件  $M(\tau) = 0$  より、次の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} d_{31m} & d_{32m} & d_{34m} & d_{3m} \\ d_{51m} & d_{52m} & d_{54m} & d_{5m} \\ d_{61m} & d_{62m} & d_{64m} & d_{6m} \\ d_{31h} & d_{32h} & d_{34h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \\ X_{40} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この係数行列式から振動数方程式が得られる。係数行列式の要素中に、振動数パラメーター  $\lambda$  が含まれているので、この係数行列式の値を 0 とする  $\lambda$  値を試行錯誤法によって求めることにより、固有値が計算される。

本章で数値解析するリブアーチの軸線形は放物線とした。

左右両支点間に高低差を持つ非対称形アーチの面内自動振動を明らかにするため、Fig. 4 に示すような支点間に高低差がある 3 ヒンジアーチにおいて、高低差比  $H/L$  が  $0.1 \sim 0.3$  の場合について自由振動解析を行ない、Fig. 4 に示す。同一スパン  $L$ 、同一ライズ比  $f/L$  をもつ対称形アーチの自由振動性状との比較を行った。なお、本論文においては、対称形アーチの逆

対称振動および対称振動に対応する非対称形アーチの振動を、それぞれ、逆対称的振動 (Semiantisymmetric Vibration) および対称的振動 (Semisymmetric Vibration) と称することとする。

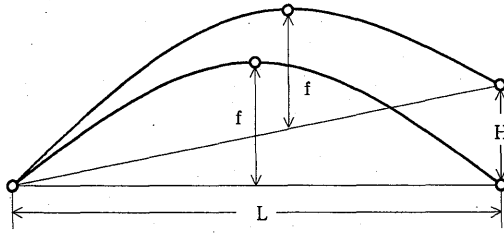


Fig. 4 Parabolic Arch with Unequal Height of Supports.

Fig. 5 に非対称形 3 ヒンジアーチの逆対称的、二次振動および対称的、二次振動の固有振動数曲線を示す。これにより、非対称形 3 ヒンジアーチの固有振動数は、逆対称的振動においては、対称形 3 ヒンジアーチの固定振動数より全体的に低く現われ、対称的振動においては、逆に、全体的に高くなることを確認できる。

Fig. 6 は、細長比  $a=200$ 、ライズ比  $f/L=0.2$  の非対称形 3 ヒンジアーチと対称形 3 ヒンジアーチの振動モードを比較したものである。実線は高低差比  $H/L=0.0$  の対称形 3 ヒンジアーチの鉛直変位モードおよび水平変位モードであり、点線は高低差比  $H/L=0.1$  の非対称形 3 ヒンジアーチの変位モードである。

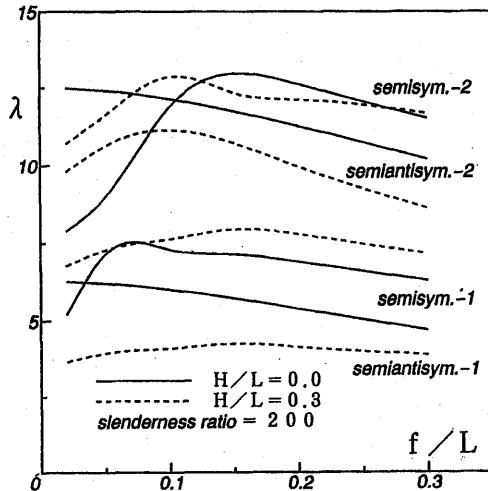
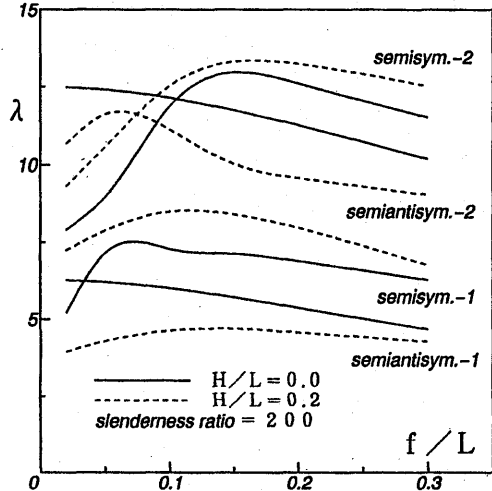
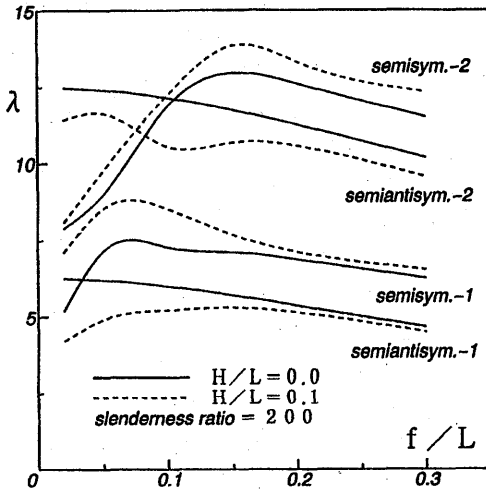


Fig. 5 Frequency Curve of 3-hinged Parabolic Arch with Unequal Height of Supports.

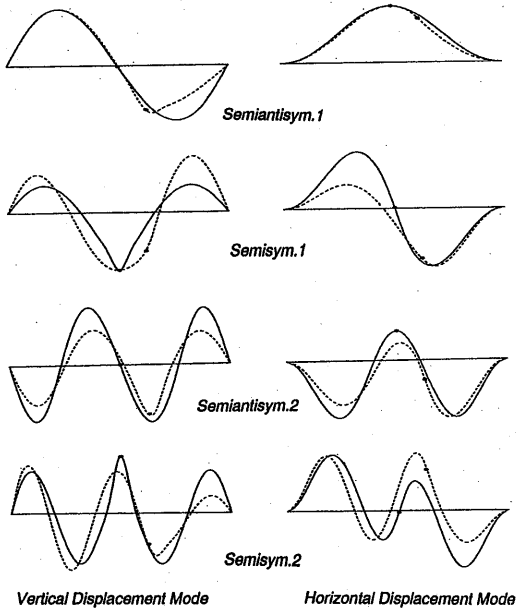


Fig. 6 Free Vibrational Modes.

### 5. あとがき

2 ヒンジアーチにおける, アーチの自由振動を支配する基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく方法を3

ヒンジアーチに拡張し, さらにこれを応用して, 左右両支点間に高低差のある非対称形3ヒンジアーチの自由振動特性を明らかにすることができた。本文においては, 支点間に高低差をもつ非対称形3ヒンジアーチの, 対称形3ヒンジアーチに対する, 自由振動特性を明らかにすることを目的として, 高低差比  $H/L = 0.1, 0.2, 0.3$  の場合について解析結果を示した。数値解析は放物線形の3ヒンジアーチについて行ったが, カテナリー, 円, サイクロイドその他の軸線形をもつ非対称形3ヒンジアーチについても全く同様に解析することができる。また, 変断面の非対称形3ヒンジアーチの解析にも応用できる。

### 参 考 文 献

- 1) 崎山毅: 初期荷重を有する変断面任意形アーチの面内自由振動, 土木学会論文報告集, 第287号, pp.33~44, 1979.
- 2) 崎山毅・松田浩: 非対称形アーチの面内自由振動特性, 土木学会論文報告集, 第368号, pp.425~428, 1986.
- 3) T. SAKIYAMA, FREE VIBRATION OF THREE-HINGED ARCHES, Journal of sound and Vibration 111, 343-348, 1986.