

オブザーバーを用いた構造物の振動制御

岡 林 隆 敏* ・ 奥 松 俊 博**
古 江 照 巳***

Structural Vibration Control using Observers

by

Takatoshi OKABAYASHI*, Toshihiro OKUMATSU**
and Terumi FURUE***

In this study, optimal control techniques using observers are applied to vibration control of a five story building model subjected to random excitation. The minimal order observer and the full order observer are adapted to estimate state variables of the controlled model. The optimal closed-loop control scheme using the observer is employed to the system.

As numerical examples, we confirm efficiency of vibration control using the minimal order observer for the five-degree-of-freedom system modeled as the building model.

1. はじめに

近年、土木・建築構造物の振動を制御するための技術が発展し、振動の制御が実用的な段階に入りつつある。中でも、アクティブ振動制御については、様々な理論及び技術が提案^{1),2)}されている。土木構造物においては、高速道路橋の振動を制御するために、アクティブ制振が適用された事例³⁾がある。

現代制御理論により構造物の振動制御を考える場合、基本的には全状態量をフィードバックする必要がある。この場合、振動を制御しようとする振動次数だけのセンサーを設置しなければならない。しかし、構造物の振動制御システムから考えると、制御システムの信頼性から、センサーの個数は少ないことが望ましい。少ない数のセンサーから得られる観測量から、全状態量を推定する方法がオブザーバー⁴⁾である。

本研究は、多自由度系構造物に不規則外力が作用した場合、オブザーバーを用いた振動制御の有効性を、シミュレーションにより検討したものである。制御の対象を5層の骨組構造として、これを5質点系にモデル化する。この構造物に不規則外力が作用した場合、全次元オブザーバーおよび最小次元オブザーバーを設計し、その有効性を確認する。次にオブザーバーにより推定された状態変数を用いて、構造物の最適振動制御の効果について検討する。

2. アクティブ振動制御と制振対象のモデル化

(1) アクティブ振動制御システム

本研究で対象とするアクティブ振動制御システムを図-1に示した。制御対象は建築構造物を想定した5層の骨組構造である。最上階と基礎に加速度計を置き、

平成3年4月30日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**大学院修士課程土木工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

***(株)長大 (Chodai, Co., Ltd.)

それぞれの変位と速度を検出する。これらをA/D変換器を介してパーソナルコンピュータに取り込み、最適制御則の演算を行なう。最適フィードバック量をD/A変換して出力電圧を得る。これを電力増幅器に入力し、最上階に設置したアクチュエータにより、建造物の振動を制御する。

(2) 制御対象のモデル化

制御対象と考えているモデルは、図-2a)のような5層の骨組構造である。その寸法を図-2a)に示した。材料はアルミニウムでその弾性定数は $7.0 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ 、また構造物モデルの重量は4.305kgfである。このモデルを平面骨組構造と考え、17節点の有限要素モデルを構成する。次に各層の中心に単位の力を加えて、各層のた

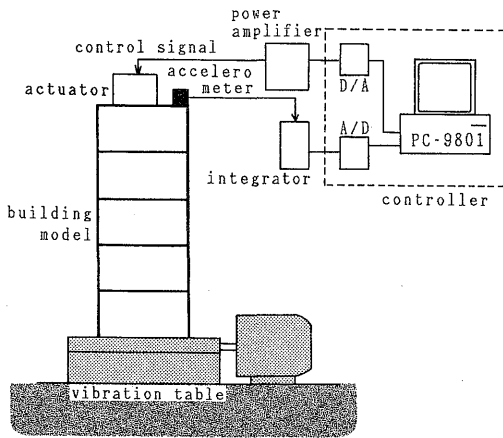
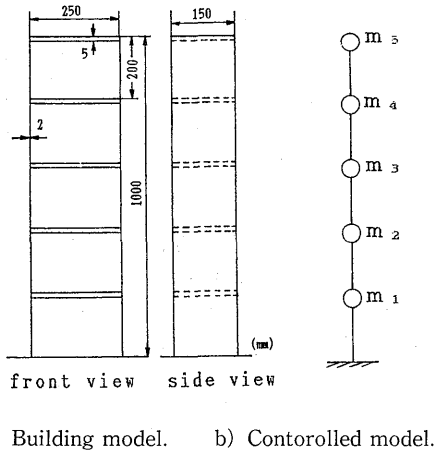


Fig. 1 Schematic diagram of structural system.



a) Building model. b) Contorlled model.

Fig. 2 Five story building model and five-degree-of freedom system.

わみ性行列 S を求める。この逆行列から

$$K = S^{-1} \quad (1)$$

5質点系の剛性行列を得る。このような質点モデルを図-2b)に示した。各質点の質量は、各層を側壁の中央を分割し、それらで挟まれる部分で構成した。さらに、最上階にはアクチュエータの重量711gを付加してある。

5質点系モデルの有効性を検討するために、振動解析を行なった。表-1は、有限要素モデル、5質点系モデルおよび実測結果である。本論文で制御対象の制御する振動次数を3次振動と考えているので、実測は3次振動までの結果を示した。5質点モデルは、有限要素法モデルおよび実測結果と良く一致し、このモデルの有効性が確認できた。図-3は、5質点系モデルと実測結果の振動モードを3次振動まで比較したものである。1次振動では、アクチュエータの質量の影響で最上階付近に差が生じている。しかし、他の次数については、ほぼ一致することが分かる。これらの結果より、5質点系モデルが制御モデルの条件を満足していることがわかる。また、表-1には、実測による減衰定数を示した。平均すると、0.5%の小さな値を示している。

Table 1 Frequency and damping constant.

Order	Natural Frequency (Hz)			Damping
	FEM	5DOF	Experiment	
1	2.37	2.37	2.39	0.0064
2	7.25	7.17	7.52	0.0050
3	12.0	11.7	12.7	0.0045
4	15.9	15.6		
5	18.5	18.4		

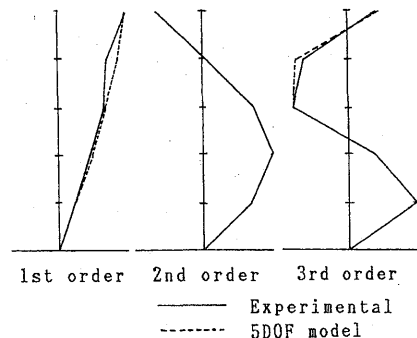


Fig. 3 Vibration mode.

3. 構造物の最適振動制御

(1) 構造物の状態空間表示と応答解析

各質点に外力 $f(t)$ を受ける n 質点系の運動方程式は、

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ey(t) = f(t) \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 $y(t)$ と $f(t)$ は n 次元ベクトル、 M 、 C および E は、 $(n \times n)$ の質量行列、減衰行列および剛性行列である。

次式から求められる非減衰系の固有振動モード

$$M\ddot{y}(t) + Ey(t) = 0 \quad (3)$$

を Φ とすると、各質点の変位は、基準座標 $q(t)$ を用いて、

$$y(t) = \Phi q(t) \quad (4)$$

で表わされる。なお $q(t)$ は n 次元ベクトル、 Φ は $(n \times n)$ 行列である。この基準座標を用いると、運動方程式は、次のような各振動モードごとの方程式に変換することができる。

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi^T f(t) \quad (5)$$

ここに、モード行列は、

$$\Phi^T M \Phi = I$$

となるように基準化する。また、 H と Ω は、次式で与えられる減衰行列と振動数行列である。

$$H = \begin{bmatrix} 2h_1\omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2h_n\omega_n \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 ω_i は i 次の固有円振動数、 h_i は i 次の減衰定数である。

次に、 $2n$ 次の元状態変数

$$X(t) = [q_1(t) \dot{q}_1(t) \cdots q_n(t) \dot{q}_n(t)]^T \quad (7)$$

を用いて、(5)式を状態空間表示すると、

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BF(t) \quad (8)$$

となる。ここに、 A と $F(t)$ は次のような係数行列と外力ベクトルである。これより以降、 $f(t)$ を改めて $F(t)$ で表わすものとする。

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_n \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2h_i\omega_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T f(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

また、 m 次元の観測量を $Y(t)$ とすると、これは $(m \times$

$n)$ の観測マトリックス C を用いて、

$$Y(t) = CX(t) \quad (11)$$

で表わすことができる。

時間刻みを Δt として、(8)式を差分表示する。状態遷移行列を

$$\exp(A\Delta t) = (I - A\Delta t/2)^{-1}(I + A\Delta t/2) \quad (12)$$

で近似⁵⁾すると、(7)式は、

$$(I - A\Delta t/2)X_{j+1} = (I + A\Delta t/2)X_j + B(F_{j+1} + F_j)\Delta t/2 \quad (13)$$

で与えられる。ここで、 $X_j = X(j\Delta t)$ 、 $F_j = F(j\Delta t)$ である。

(2) 構造系のフィードバックゲイン

図-2 に示した構造物模型において、地震外力のように各質点に同じ力 $f(t)$ が作用し、また最上階に制御力 $u(t)$ が作用するものとする。この場合、(2)式の外力項は

$$f(t) = b_1 f(t) + b_2 u(t) \quad (14)$$

で構成されることになる。ただし、 b_1 と b_2 は n 次元ベクトルである。制御力 $u(t)$ が作用した形で、状態方程式(8)式を書き改めると、

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B_2 F(t) + B_1 u(t) \quad (15)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (16)$$

となる。ここに、

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T b_i \end{bmatrix} (i = 1, 2) \\ b_1 = [0 \cdots 0 \quad 1], \quad b_2 = [1 \cdots 1 \quad 1] \quad (17)$$

ここで外力 $F(t)$ が作用しないものと考え、制御力 $u(t)$ は、全状態量 $X(t)$ をフィードバックさせた量

$$u(t) = -KX(t)$$

として与えられる。 K はフィードバックゲイン行列である。この K の値は最適レギュレータの理論⁶⁾により求めることができる。すなわち、 Q と R を適当な重み行列として、リカッチの方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (18)$$

を解き、

$$K = R^{-1}B^T P \quad (19)$$

としたものが、最適フィードバックゲイン行列となる。

4. 構造系のオブザーバーと最適制御

(1) 構造系のオブザーバー

オブザーバーには、観測値から全状態量を直接推定する全次元オブザーバー⁹⁾と、観測値は与えられた変数と考え、それ以外の変数を計算して状態変数を推定する最小次元オブザーバー⁹⁾がある。本研究では、構造物の振動制御にオブザーバーを適用した。ここでは、オブザーバーの概要について説明する。考える系を、外力と制御力を含んだ(8)式について考える。

1) 全次元オブザーバー

全次元オブザーバーは(8)(11)式に対応して、次式で記述される。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}}(t) &= A\hat{X}(t) + BF(t) + G(Y(t) - W(t)) \\ W(t) &= C\hat{X}(t)\end{aligned}\quad (20)$$

ここに $\hat{X}(t)$ はオブザーバーの出力で(8)式の $X(t)$ の推定量である。 G は全次元オブザーバーのゲインマトリックスであり、これを求める必要がある。(8)(11)式において (C, A) が可観測であれば、 $A^T - C^TK$ の固有値を任意に設定することができる。したがって極配置法により K を求めると、

$$G = K^T \quad (21)$$

として、ゲインマトリックス G を求めることができる。

2) 最小次元オブザーバー

構造系(8)(11)式において、 m 次元の測定量 $Y(t)$ が得られたとすれば、 n 次元よりも次数の低いオブザーバーで状態量を推定することができる。最小次元オブザーバーは、 $(n-m)$ 次元の動的系として記述できる。

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(t) &= \hat{A}\omega(t) + \hat{B}F(t) + GY(t) \\ \hat{X}(t) &= \hat{C}\omega(t) + \hat{D}Y(t)\end{aligned}\quad (22)$$

ここに、 \hat{A} 、 \hat{B} 、 G 、 \hat{C} および \hat{D} は、それぞれ $(2n-m \times 2n-m)$ 、 $(2n-m \times 2n)$ 、 $(2n-m \times m)$ 、 $(2n \times 2n-m)$ 、 $(2n \times m)$ 行列である。最小次元オブザーバーは、構造系(8)(11)式の係数行列からこれらの行列を誘導することにより構成することができる。

ゴピナスの方法⁹⁾により最小次元オブザーバーの係数は決められる。

構造系(8)(11)式に対して、観測量 $Y(t)$ が得られるならば、状態変数 $X(t)$ を推定するオブザーバーを構成することができる。全次元オブザーバーでは、オブザーバーの変数の次元を、構造系の次元と同じにするが、最小次元オブザーバーでは、変数は観測量 $Y(t)$ を除いた次

元となるために、オブザーバーの計算量が減少する。

(2) オブザーバーを用いた最適制御

ここでは、オブザーバーとして最小次元オブザーバーのみについて考える。これは、実際の制御においてオブザーバーの計算時間を短くするためである。オブザーバーを用いた場合、状態フィードバックはオブザーバーの出力すなわち状態推定量 $\hat{X}(t)$ を用いることになる。したがって、制御力は、

$$u(t) = -K\hat{X}(t) \quad (23)$$

として与えられる。

ここでは、構造物の方程式として、制御力と外力が作用する(15)式について考える。オブザーバーは(22)式である。これらを合成して表示すると、次式のようなになる。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - B_1K\hat{D}C \\ GC - \hat{B}_1K\hat{D}C \\ -B_1K\hat{C} \\ \hat{A} - \hat{B}_1KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} F(t)\end{aligned}\quad (24)$$

この方程式がオブザーバーを用いた振動制御の基礎式になっている。 \hat{B}_1 および \hat{B}_2 は、最小次元オブザーバーの係数である。

5. 数値解析と考察

(1) オブザーバーの有効性

数値解析では、5質点系のモデルの3次振動までを制御の対象とする。これは、本論文で用いた構造系において、3次振動以上の振動振幅が小さくなることと、模型実験におけるオブザーバーの計算量を少なくするためである。5質点系の振動数、振動モードおよび減衰定数に関する解析結果および実測結果は、表-1と図-3に示した。

構造系の各質点に不規則外力を作用させ、応答解析を行ない、1次振動から3次振動までの応答を求める。この応答を、全次元と最小次元オブザーバーにより推定し、これらの適合性によりオブザーバーの有効性を検討した。

最小次元オブザーバーは、5質点系モデルの最上点における変位および速度が観測できたものとして、他の4個の状態変数を推定している。ここで設計したオブザーバーの極は、

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.17 \pm 31.13i \\ \lambda_2 &= -0.30 \pm 65.52i\end{aligned}\quad (25)$$

に設定した。構造系には、図-4のような不規則外力が作用するものとする。図-5 a) b) c) は、1次から3次振動までの変位応答を表わしたものである。横軸は2 secまでの時間を表わし、縦軸は応答変位をそれぞれの最大応答で基準化したものである。

図-5は応答解析の結果とオブザーバーによる解析の結果を重ねて示したものであるが、両者は識別できない程度に良く一致していることがわかる。このこと

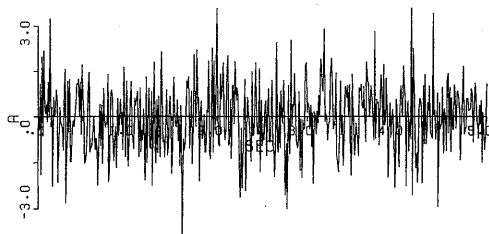
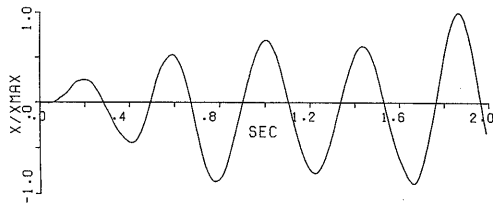
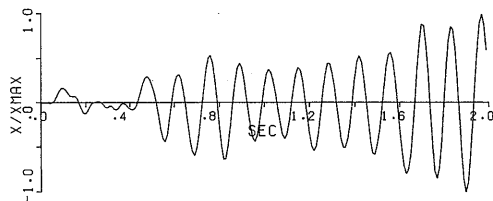


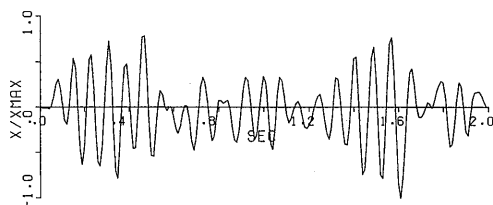
Fig. 4 Random excitation.



a) 1st order vibration.



b) 2nd order vibration.



c) 3rd order vibration.

Fig. 5 Deflection response and estimated value.

により、少ない測定量から状態変数を推定する、最小次元オブザーバーが、構造物の振動問題において有効であることが確認できた。

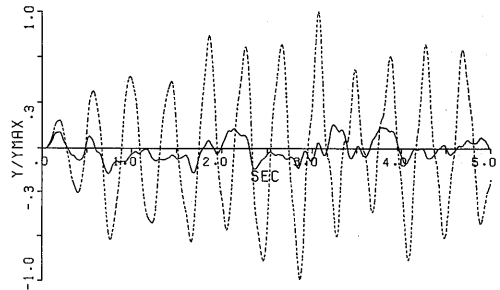
(2) 最小次元オブザーバーによる最適制御

最小次元オブザーバーにより状態推定を行ない、この状態量をフィードバックする最適制御について検討した。

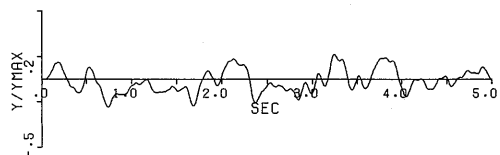
構造系に、図-4のような不規則外力が作用した場合、構造物の最上点の変位応答を、図-6 a)の破線で示した。すなわち、これは制御をかけていない場合である。図の横軸は時間であり5 secまで与えている。縦軸は、制御をかけていない応答の最大応答で基準化した。状態変数が求められると仮定した場合の最適フィードバックゲインを用いた制御を行なった結果を、図-6 a)の実線で示した。この場合の重み係数は、

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = [1] \quad (26)$$

である。制御のない場合と比較すると、最上点の変位応答は、約80%程度減少していることがわかる。このことより、制御の効果は著しいことが確認できる。図



a) Uncontrolled and Optimal controlled response.



b) Optimal controlled response using minimal order observer.

Fig. 6 Deflection response of top floor.

— 6 b) は、最小次元オブザーバーを用いて制御した場合の結果である。状態変数を直接フィードバックさせた場合とその結果が識別できない程度によく一致している。このことより、最小次元オブザーバーを用いた構造物の振動制御が有効であることが検証できた。

6. おわりに

本研究では、5層骨組構造物模型の振動制御システムを構成するために、オブザーバーの有効性と最適制御の効果を確認するために、数値シミュレーションを行なった。得られた結果を要約すると、次のようになる。

- (1) 5層骨組構造物模型の解析モデルを有限要素法により構成した。さらに、この構造物を制御するための5質点系の制御モデルを構成した。この制御モデルの構成法は、有限要素法解析および実測と比較して良好であることが確認できた。
- (2) 構造物の最小次元オブザーバーを設計した。これは応答解析結果を良く推定しており、最小次元オブザーバーによる構造物振動の状態推定が可能であることが検証できた。
- (3) 最適レギュレータの理論により、構造物振動を制御するレギュレータを構成した。不規則外力が構造物に作用する場合でも、最適ゲインマトリックスを用いて、効果的な振動制御が可能であることがわかった。
- (4) 最小次元オブザーバーを用いて状態推定を行なっても、効果的な構造物の振動制御が実現できることを、コンピュータシミュレーションにより明らかにした。

参考文献

- 1) Leipholz, H. H. E. and M. Abdel-Rohman: Control of Structures, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- 2) Yang, J. and T. T. Soong: Recent Advance in Active Control of Civil Engineering, Mechanics, Vol. 3, No. 4, pp. 179-188, 1988.
- 3) 矢作 枢・吉田和彦: 高架橋における交通振動アクティブコントロール, 土木学会論文集, 第350号/I-3, pp. 435~444, 1985. 4.
- 4) 岩井善太・井上 昭・川路茂保: オブザーバー, コロナ社, 1988.
- 5) Trujillo, D. M.: The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equations using Pade Approximations, Int. Journal for Numerical Method in Engineering, vol. 9, pp. 259-270, 1975.
- 6) 白石昌武: 入門現代制御理論, 啓学出版株式会社.