

# 多層の被圧帯水層から揚水するときの 地下水定常流について

薦田 廣章\*・武政 剛弘\*

## Steady Flow to A Well in The Case of Pumping in Multi-layered Aquifers

by

Hiroaki KOMODA, Takehiro TAKEMASA

Pumping from artesian aquifers can cause drawdowns in the aquifers. When those drawdowns are so large, a groundwater nuisance such as ground subsidence, dry of well and penetration of salt water to wells, will occasionally occur.

Both to utilize groundwater efficiently and to prevent a groundwater nuisance, we need to know the hydraulic behavior of aquifers.

In this paper, the linear form of the simultaneous differential equations and boundary conditions that represent a steady multi-layered leaky aquifers system in which pumpage from the aquifers is balanced, are derived. Moreover, we obtain their general solutions and take numerical calculations for various cases.

### 1. まえがき

水は、人間が生活するうえで不可欠な重要な資源で、太古から今日に至るまで、生活用水、農業用水、工業用水として用いられてきた。その量も、工業の発達、生活の向上などに伴って著しく増大している。用水を得る手段としては、ダムや堰を設け河川や潮沼から取水する方法、井戸を掘り地下水を利用する方法、海水を淡水化する方法などがある。

その中でも、地下水は、四季を通しての恒温性、良好な水質、井戸のような簡単な施設によって取水可能であるという経済性などの理由により、用水としての需要が増大している。

一方、近年のわが国の水需要の増大は、井戸取水においては自由地下水から被圧地下水へと変化している。それに伴って地盤沈下、井戸の枯渇、地下水の塩水化、地下酸素欠乏空気などのような地下水障害現象が起きていることはよく知られている。良好な水資源としての地下水を有効に利用するだけでなく、このよ

うな現象を防止するために、被圧帯水層の水頭低下を知る必要がある。漏水現象を伴う2層からの集水理論は、Huisman<sup>1)</sup>、星田ら<sup>2)</sup>の研究がある。しかし、現実の被圧帯水層は幾重にも重なっているものと考えられ、多層被圧帯水層からの同時揚水について論じたものは、今日でも見ることができない。

本論文では、多層被圧帯水層から一定量揚水するときの各層の定常地下水流についての連続方程式を被圧水頭の低下を用いて導き、その一般解を求めた。さらに、種々の境界条件のもとでの特解を求め、数値計算を行った。なお、Darcyの法則は完全に成り立ち、帯水層に挟まれる半透水層を通しての鉛直方向の漏水があるものとする。ただし、井戸枠に設けられた集水孔は連続的に一様に分布していて、そこでの井戸損失は無視する。

### 2. 連続方程式とその一般解

Fig. 1において、 $n$ 層の被圧帯水層に完全完入した



$$\alpha_i = \frac{1}{k_i H_i C_i}, \dots, \alpha_n = \frac{1}{k_n H_n C_n} \quad (5)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{k_1 H_1 C_2}, \beta_2 = \frac{1}{k_2 H_2 C_3}, \dots, \beta_i = \frac{1}{k_i H_i C_{i+1}}, \dots, \beta_{n-1} = \frac{1}{k_{n-1} H_{n-1} C_n} \quad (6)$$

連立微分方程式(4)は  $n$  個の Bessel 方程式なので、一般解は  $2n$  個の積分定数を含む変形 Bessel 関数  $I_0$  および  $K_0$  で表される。  $r \rightarrow \infty$  で  $S_r \rightarrow 0$  を考慮して解くと、この微分方程式の一般解は次のようになる<sup>3)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= A_{11}K_0(\sqrt{\lambda_1}r) + A_{12}K_0(\sqrt{\lambda_2}r) + \dots \\ &\quad + A_{1i}K_0(\sqrt{\lambda_i}r) + \dots + A_{1n}K_0(\sqrt{\lambda_n}r) \\ S_2 &= A_{21}K_0(\sqrt{\lambda_1}r) + A_{22}K_0(\sqrt{\lambda_2}r) + \dots \\ &\quad + A_{2i}K_0(\sqrt{\lambda_i}r) + \dots + A_{2n}K_0(\sqrt{\lambda_n}r) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ S_i &= A_{i1}K_0(\sqrt{\lambda_1}r) + A_{i2}K_0(\sqrt{\lambda_2}r) + \dots \\ &\quad + A_{ii}K_0(\sqrt{\lambda_i}r) + \dots + A_{in}K_0(\sqrt{\lambda_n}r) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ S_n &= A_{n1}K_0(\sqrt{\lambda_1}r) + A_{n2}K_0(\sqrt{\lambda_2}r) + \dots \\ &\quad \dots \dots \dots + A_{nn}K_0(\sqrt{\lambda_n}r) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $K_0$  は 0 階の第 2 種変形 Bessel 関数である。また、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は次の固有多項式の  $n$  個の解である。

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 - \lambda & -\beta & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 + \beta_2 - \lambda & -\beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\alpha_i & \alpha_i + \beta_i - \lambda & -\beta_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -\alpha_n & \alpha_n - \lambda & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

一般解(7)の係数  $A_{ij}$  は積分定数であるが、そのうち任意の解  $S_i$  の係数  $n$  個だけは独立で、他は従属関係にある。例えば、 $i=2$  の場合、解  $S_2$  の係数  $A_{2j}$  は解  $S_1$  の係数  $A_{1j}$  を用いて、

$$A_{2j} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_j}{\beta_1} A_{1j} \quad (9)$$

( $j=1, 2, \dots, n$ )

で示される。同様に、 $i=3, 4, \dots, n$  の場合、 $A_{i-2j}$  と  $A_{i-1j}$  を用いて、

$$A_{ij} = -\frac{\alpha_{i-1}}{\beta_{i-1}} A_{i-2j} + \frac{\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} - \lambda_j}{\beta_{i-1}} A_{i-1j} \quad (10)$$

( $j=1, 2, \dots, n$ )

で表すことができる。

また、 $\lambda$  と  $\alpha, \beta$  との間には次式が成り立つ。

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} \quad (11)$$

この式は式(8)から導くことができる。

### 3. 解析例

数値計算を行う場合、まず固有多項式(8)を解き、 $\lambda$  の各値を求めなければならない。解析例として 3 層の被圧帯水層からなる多層集水井戸について考える。この場合、解(7)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= A_{11}K_0(\sqrt{\lambda_1}r) + A_{12}K_0(\sqrt{\lambda_2}r) + A_{13}K_0(\sqrt{\lambda_3}r) \\ S_2 &= A_{11} \frac{\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_1}{\beta_1} K_0(\sqrt{\lambda_1}r) \\ &\quad + A_{12} \frac{\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_2}{\beta_1} K_0(\sqrt{\lambda_2}r) \\ &\quad + A_{13} \frac{\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_3}{\beta_1} K_0(\sqrt{\lambda_3}r) \\ S_3 &= A_{11} \frac{\alpha_3(\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_1)}{\beta_1(\alpha_3 - \lambda_1)} K_0(\sqrt{\lambda_1}r) \\ &\quad + A_{12} \frac{\alpha_3(\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_2)}{\beta_1(\alpha_3 - \lambda_2)} K_0(\sqrt{\lambda_2}r) \\ &\quad + A_{13} \frac{\alpha_3(\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_3)}{\beta_1(\alpha_3 - \lambda_3)} K_0(\sqrt{\lambda_3}r) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、 $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  は積分定数である。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  は、 $\lambda$  についての 3 次方程式

$$\lambda^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2)\lambda^2 + \{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2) + \alpha_2(\alpha_3 - \beta_1)\}\lambda - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0 \quad (13)$$

の 3 実根である。一般に代数方程式は 3 次まで解析的に解くことができる。

つぎに、種々の境界条件のもとで被圧水頭の低下  $S_i$  を求める (Fig. 2)。

#### 3. 1 CASE 1.

半径  $r_0$  の井戸は完全に帯水層に貫入しており、3 層の帯水層から同時に揚水する。ただし、全体としての揚水量は  $Q_0$  で、 $r=r_0$  で  $S_1=S_2=S_3=S_0$  とする。ここに、 $S_0$  は井戸水面の低下である。

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty; S_1 \rightarrow 0, S_2 \rightarrow 0, S_3 \rightarrow 0 \\ r = r_0; S_1 = S_2 = S_3 = S_0 = \text{const.} \\ Q_{01} + Q_{02} + Q_{03} = Q_0 \end{aligned}$$

この場合、解(12)の係数  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= S_0 \frac{N_{11}}{D_1} (\lambda_2 - \lambda_3)(\alpha_3 - \lambda_1) \frac{1}{K_0(\sqrt{\lambda_1}r_0)} \\ A_{12} &= S_0 \frac{N_{12}}{D_1} (\lambda_3 - \lambda_1)(\alpha_3 - \lambda_2) \frac{1}{K_0(\sqrt{\lambda_2}r_0)} \\ A_{13} &= S_0 \frac{N_{13}}{D_1} (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_3 - \lambda_3) \frac{1}{K_0(\sqrt{\lambda_3}r_0)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 $N_{11}, N_{12}, N_{13}, D_1$  は次式で示される。

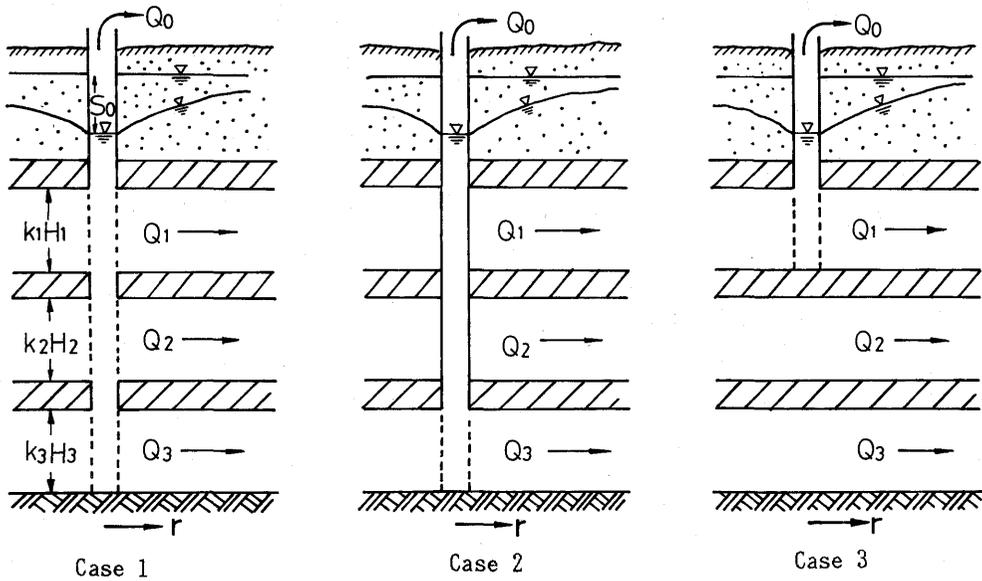


Fig. 2 Example of Pumping for Various Cases.

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \alpha_1 \alpha_3 (\lambda_2 + \lambda_3 - \alpha_1 - \beta_1) + \lambda_2 \lambda_3 (\beta_1 - \alpha_3) \\ N_{12} &= \alpha_1 \alpha_3 (\lambda_3 + \lambda_1 - \alpha_1 - \beta_1) + \lambda_3 \lambda_1 (\beta_1 - \alpha_3) \\ N_{13} &= \alpha_1 \alpha_3 (\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_1 - \beta_1) + \lambda_1 \lambda_2 (\beta_1 - \alpha_3) \\ D_1 &= \alpha_3 (\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_3) \{ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \\ &\quad + \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) \} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

つぎに、全揚水量  $Q_0$  と井戸水面の低下量  $S_0$  との関係を求める必要がある。  $r=r_0$  における連続条件より、次式が得られる。

$$Q_0 = -2\pi r_0 \left\{ k_1 H_1 \left( \frac{dS_1}{dr} \right) + k_2 H_2 \left( \frac{dS_2}{dr} \right) + k_3 H_3 \left( \frac{dS_3}{dr} \right) \right\}_{r=r_0} \quad (17)$$

$S_1, S_2, S_3$  の係数  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  のなかに  $S_0$  が含まれることより、全揚水量  $Q_0$  が決まると、それに応じて井戸水面の低下量  $S_0$  も決定される。逆に、 $S_0$  が決まると、それに対応して  $Q_0$  を決定することができる。

**3.2 CASE2.** 半径  $r_0$  の井戸で一番下層の帯水層からのみ揚水する。

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty; S_1 \rightarrow 0, S_2 \rightarrow 0, S_3 \rightarrow 0 \\ r = r_0; S_3 = S_0 \\ Q_{03} = Q_0 \end{aligned}$$

この場合、解(12)の係数  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{Q_0}{2\pi r_0 k_3 H_3} \frac{N_2 (\lambda_2 - \lambda_3)}{D_2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} K_1(\sqrt{\lambda_1} r_0)} \\ A_{12} &= \frac{Q_0}{2\pi r_0 k_3 H_3} \frac{N_2 (\lambda_3 - \lambda_1)}{D_2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2} K_1(\sqrt{\lambda_2} r_0)} \\ A_{13} &= \frac{Q_0}{2\pi r_0 k_3 H_3} \frac{N_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}{D_2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_3} K_1(\sqrt{\lambda_3} r_0)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、 $K_1$  は 1 階の第 2 種変形 Bessel 関数である。また、 $N_2, D_1$  は次式で示される。

$$N_2 = \beta_1 (\alpha_3 - \lambda_1) (\alpha_3 - \lambda_2) (\alpha_3 - \lambda_3) \quad (19)$$

$$D_2 = \alpha_3 (\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_3) \{ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) \} \quad (20)$$

**3.3 CASE3.** 半径  $r_0$  の井戸で一番上層の帯水層からのみ揚水する。

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty; S_1 \rightarrow 0, S_2 \rightarrow 0, S_3 \rightarrow 0 \\ r = r_0; S_1 = S_0 \\ Q_{01} = Q_0 \end{aligned}$$

この場合、解(12)の係数  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{Q_0}{2\pi r_0 k_1 H_1} \frac{1}{D_3} (\lambda_3 - \lambda_2) (\alpha_3 - \lambda_1) (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_2) \\ &\quad \times (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_3) \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} K_1(\sqrt{\lambda_1} r_0)} \\ A_{12} &= \frac{Q_0}{2\pi r_0 k_1 H_1} \frac{1}{D_3} (\lambda_1 - \lambda_3) (\alpha_3 - \lambda_2) (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_3) \\ &\quad \times (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_1) \frac{1}{\sqrt{\lambda_2} K_1(\sqrt{\lambda_2} r_0)} \\ A_{13} &= \frac{Q_0}{2\pi r_0 k_1 H_1} \frac{1}{D_3} (\lambda_2 - \lambda_1) (\alpha_3 - \lambda_3) (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_1) \\ &\quad \times (\alpha_1 + \beta_1 - \lambda_2) \frac{1}{\sqrt{\lambda_3} K_1(\sqrt{\lambda_3} r_0)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、 $D_3$  は次式で示される。

$$D_3 = (\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_3) \{ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) \} \quad (22)$$

同様に、中間の帯水層からのみ揚水する場合、2 層

の帯水層から同時に揚水する場合に関しても、境界条件を満足する解を得ることができる。

また、 $x$  が小さい場合、変形 Bessel 関数を第 1 項までで近似すると、

$$K_0(x) = \ln \frac{1.123}{x}, K_1(x) = \frac{1}{x} \quad (23)$$

となり、解の係数(14), (18), (21)は容易に計算することができる。

4. 数値計算例

CASE1. について数値計算を行う。計算を簡単化するために、被圧帯水層の厚さ  $H_1, H_2, H_3$ , 透水係数  $k_1, k_2, k_3$  をそれぞれ一様に、

$$H_1 = H_2 = H_3 = 10m \quad (24)$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 10^{-5} m/s \quad (25)$$

とすると、被圧帯水層の伝達係数は、それぞれ、

$$k_1 H_1 = k_2 H_2 = k_3 H_3 = 10^{-4} m^2/s \quad (26)$$

となる。半透水層の厚さ、鉛直透水係数をそれぞれ一様に、 $d = 1m, k' = 5.0 \times 10^{-9} m/s$  とすると、鉛直流動抵抗  $c$  は

$$c = 2.0 \times 10^8 s \quad (27)$$

となり、式(5), (6)の  $\alpha, \beta$  の値は、

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = 5.0 \times 10^{-5} m^{-2} \quad (28)$$

となる。この値を式(13)に代入することにより、3 個の  $\lambda$  の値を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1.624 \times 10^{-4} m^{-2} \\ \lambda_2 &= 0.778 \times 10^{-4} m^{-2} \\ \lambda_3 &= 0.099 \times 10^{-4} m^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

井戸の半径を  $r_0 = 0.5m$  として、式(14)で解の係数を求めると、 $S_1, S_2, S_3$  は式(12)より、 $S_0$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S_0 \{ 0.0208 K_0(0.013r) + 0.0631 K_0(0.009r) \\ &\quad + 0.0827 K_0(0.003r) \} \\ S_2 &= S_0 \{ -0.0259 K_0(0.013r) + 0.0281 K_0(0.009r) \\ &\quad + 0.1490 K_0(0.003r) \} \\ S_3 &= S_0 \{ 0.0116 K_0(0.013r) - 0.0506 K_0(0.009r) \\ &\quad + 0.1858 K_0(0.003r) \} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。これを Fig. 3 に示す。この図から、下層の被圧水頭の低下が一番大きく、次に中層、上層となることがわかる。すなわち、上層から中層、中層から下層の被圧帯水層へ各帯水層間で水の移動があることを示している。

式(30)に  $r = r_0 = 0.5m$  を代入すると、 $S_1 = S_2 = S_3 = S_0$  となり、境界条件を満足する解であることがわかる。また、この式は、式(17)より、 $S_0$  の代わりに  $Q_0$  を用いて表すこともできる。被圧帯水層から井戸への流入量と全揚水量との間には、次の関係が成り立つ。

$$Q_{01}/Q_0 = 0.36, Q_{02}/Q_0 = 0.33, Q_{03}/Q_0 = 0.32 \quad (31)$$

5. 結論および考察

多層被圧帯水層から種々の条件下で揚水したときの定常状態における各帯水層の連続方程式を導き、その解を求め、数値計算を行った。現場のデータとの照合は現在行っているが、以下の事が明らかになった。

- ① 定常地下水流れを支配する連続方程式は、線形の微分方程式なので、解を重ね合わせることができる。すなわち、井戸が多数ある場合、個々の井戸についての被圧水頭の低下を求め、それぞれを重ね合わせればよい。
- ② 解は全揚水量  $Q_0$  もしくは井戸水面の低下  $S_0$  を用いて示すことができる。従って、全揚水量  $Q_0$  が決まれば、それぞれの状況に応じた解を検討することにより、井戸のストレーナーの深さおよび半径を決定することができ、最も経済的な取水計画が可能となる。
- ③ 各帯水層間の漏水量を予測することにより、自由地下水層に与える被圧水頭の悪い影響、例えば水頭低下で自由井戸が枯渇するなど、を未然に防ぐことができる。
- ④ 解に含まれる積分定数は複雑であるが、井戸の半径は一般に小さいことを考慮すれば、0 階および 1 階の第 2 種変形 Bessel は第 1 次項で近似され、幾分簡単な形となる。
- ⑤ 解(7)は  $r \rightarrow \infty$  で  $S_i \rightarrow 0$  を考慮して求めたが、境界条件が異なり、0 階の第 1 種変形 Bessel 関数  $I_0$  を考慮する必要があるときには、一般解  $S_i$  は次式で示される。

$$\begin{aligned} S_i &= A_{i1} K_0(\sqrt{\lambda_1} r) + A_{i2} K_0(\sqrt{\lambda_2} r) + \dots \\ &\quad + A_{in} K_0(\sqrt{\lambda_n} r) \\ &\quad + B_{i1} I_0(\sqrt{\lambda_1} r) + B_{i2} I_0(\sqrt{\lambda_2} r) + \dots \\ &\quad + B_{in} I_0(\sqrt{\lambda_n} r) \end{aligned} \quad (32)$$

ここに、 $A_{ij}, B_{ij}$  は積分定数で、境界条件に応じ

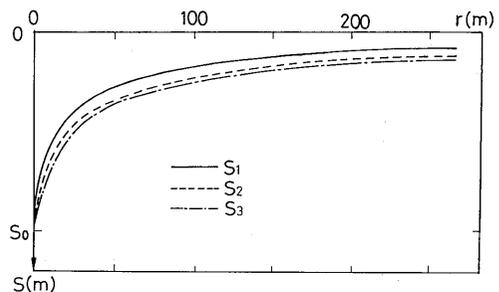


Fig. 3 Drawdowns for Multi-layered Aquifers.

て決定される。

- ⑥ 自由地下水層の水頭低下を無視できない場合には、一番上層の被圧帯水層を自由地下水層と考え、その上にある自由地下水層と半透水層の存在を無視すればよい。ただし、この場合でも自由地下水層の流れは準一次元流と仮定しなければならない。
- ⑦ 境界条件は各帯水層から井戸に流入する流量もしくは井戸における各帯水層の水頭である。従って、口径の異なるストレーナーで揚水する場合、任意の帯水層から一定の揚水量で取水する場合なども容易に解を求めることができる。

おわりに、日頃御指導御鞭撻いただく本学土木工学科加藤重一教授に感謝いたします。

#### 参 考 文 献

- 1) L. Huisman; Groundwater Recovery, p. 90~94, Macmillan, 1972.
- 2) 星田・市川・玉井; 2つの帯水層から揚水するときの地下水の流動について考察, 土木学会論文報集, 第331号, p. 75~p. 81, 1983.
- 3) 薦田・武政; 多層帯水層から揚水したときの地下水の定常流について, 農業土木学会九州支部講演 p. 207~p. 210, 1983.