Bulletin of Faculty of Education, Nagasaki University, Combined Issue Vol. 5（2019）103〜117　103

平面における合同変換について

梶本ひろし，上野夏樹，内野将信，浦添彰
長崎大学教育学部　数理情報講座　数学教室

Congruent Transformations in a Plane

Hiroshi KAJIMOTO, Natsuki UENO, Masanobu UCHINO and Shou URAZOE
Mathematical Department, Faculty of Education, Nagasaki University

概要

Congruent transformations in an Euclidean plane are expressible in the form:

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},\ \ A \in O(2),\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$$

in an orthogonal coodinates. On the other hand they are transformations of 4 types according to the number of the reflections: reflection with respect to a line, translation, rotation around a point and glide reflection. In the article we give the coordinate form to 4 types of plane transformations. Oppositely we also determine which type of transformation a given coordinate form is, that is, we determine its center and rotational angle for a rotation, its reflective line for a reflection and its line and translation for a glide reflection.

1　合同変換の標準形

Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ における合同変換 T は，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $A \in O(n)$ 直交行列群, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ と表すことができる。これを標準形（座標形）と呼ぶこととする。今回は Euclid 平面 $\boldsymbol{R}^2$ に限定し，平面における 4 種類の合同変換について対応する標準形を考えていく。

1.1　回転，鏡映を表す行列

まずは, 回転と鏡映を表す行列について考える。

定理１

原点を中心とする回転 $R_\theta : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は，行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ により

$$R_\theta(\boldsymbol{x}) = R(\theta)\boldsymbol{x}$$

と表される.

(証明)

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = R_\theta(\boldsymbol{x})$ とする。

原点と $\boldsymbol{x}$ の距離を r とする。また，原点と $\boldsymbol{x}$ を通る直線と x 軸のなす角を α とする。

これより，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。これより，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，

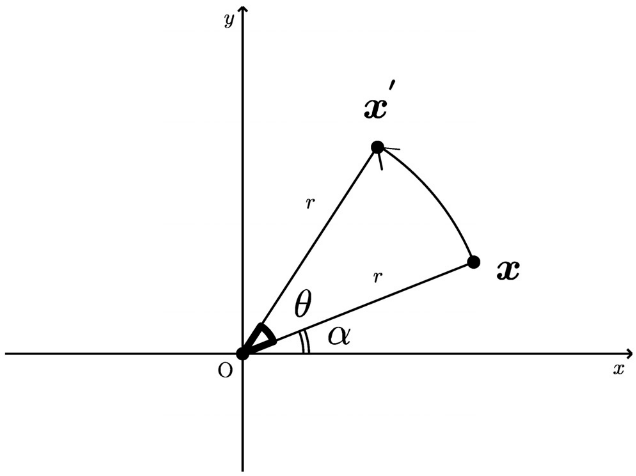
$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

となる。

よって，原点を中心とする回転 R_θ は，行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ により

$$R_\theta(\boldsymbol{x}) = R(\theta)\boldsymbol{x}$$

と表される。



(Q.E.D)

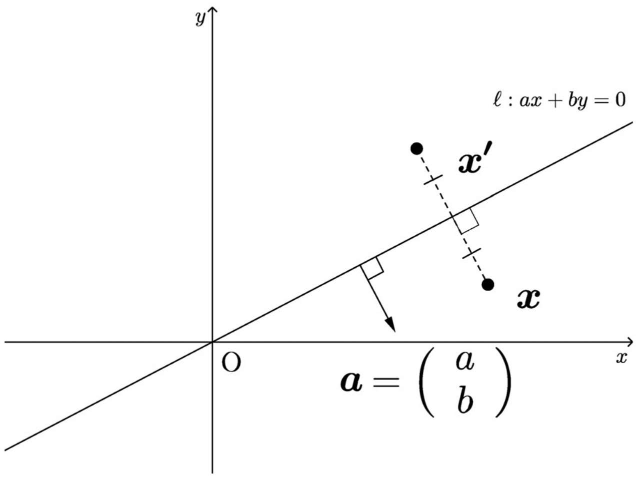
定理 2

直線 $\ell : ax + by = 0$ ($a^2 + b^2 = 1$, $a \geq 0$) に関する鏡映 $m_\ell : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は， ℓ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおいて，行列 $M(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ により，

$$m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$$

で表される．

(証明)



$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = m_\ell(\boldsymbol{x})$ とする。

直線 ℓ に垂直なベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ の表す点と $\boldsymbol{x}'$ の表す点は ℓ に関して対称な位置にある。したがって，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の中点は ℓ 上にある。よって，

$$(\boldsymbol{a}, \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}')) = 0$$

が成り立つ。2 点の差 $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$ は，ℓ に垂直なベクトルであるから $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍になる。そこで，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}$ とおく。上式に代入すると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a})) &= 0 \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}) &= 0 \\ 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + t &= 0 \\ t &= -2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2(ax + by)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2a^2 + 1)x - 2aby \\ -2abx + (-2b^2 + 1)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b^2 - a^2)x - 2aby \\ -2abx + (a^2 - b^2)y \end{pmatrix} \because \ |\boldsymbol{a}|^2 = a^2 + b^2 = 1 \\ &= \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

となる。

したがって，直線 $\ell : ax + by = 0$ に関する鏡映 m_ℓ は行列 $M(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ により，

$$m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(a)\boldsymbol{x}$$

で表される。

(Q.E.D)

系 3

原点を通り，x 軸の正方向となす角が θ の直線 $\ell : x\sin\theta - y\cos\theta = 0$ による鏡映 $m_\ell : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は行列 $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ により

$$m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(\theta)\boldsymbol{x}$$

で表される．

(証明) $0 \leq \theta < \pi$ とし，直線 ℓ を，原点を通り，x 軸の正方向となす角 θ の直線とする。$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\ell : y = x\tan\theta$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\ell : x = 0$ (y 軸) である。また，直線 ℓ の単位法ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，$\boldsymbol{e}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とおいて，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ だから, $\ell : x\sin\theta - y\cos\theta = 0$ とも書ける。鏡映 m_ℓ を表す行列は，定理 2 から

$$M(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = M(\theta)$$

となる。

(Q.E.D)

鏡映や回転を表す行列を用いて，平面における合同変換を座標形で表す。

1.2 回転の標準形

定理 4

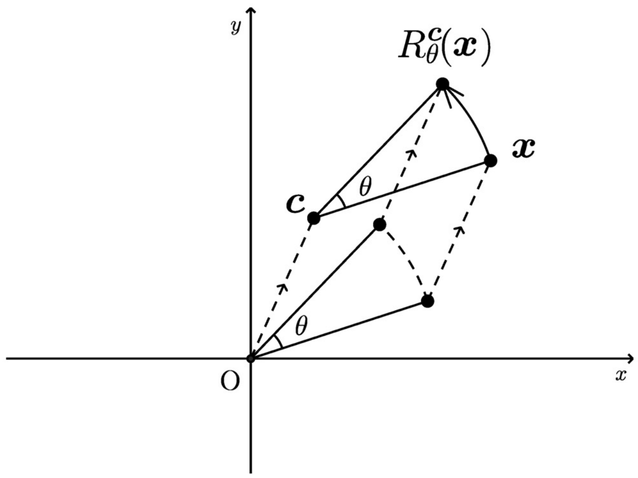
中心 $\boldsymbol{c}$, 回転角 θ の回転 $R_\theta^{\boldsymbol{c}} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は

$$R_\theta^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = R(\theta)\boldsymbol{x} + (E - R(\theta))\boldsymbol{c}$$

と表される．

(証明) 中心 $\boldsymbol{c}$, 回転角 θ の回転 $R_\theta^{\boldsymbol{c}}$ は，図から次のように表せる。

$$\begin{aligned} R_\theta^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) &= R(\theta)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \\ &= R(\theta)\boldsymbol{x} + (E - R(\theta))\boldsymbol{c}. \end{aligned}$$



(Q.E.D)

またベクトル $\boldsymbol{c}$ による平行移動 $\tau(\boldsymbol{c})$ を用いると，中心 $\boldsymbol{c}$, 回転角 θ の回転 $R_\theta^{\mathbf{c}}$ は

$$R_\theta^{\mathbf{c}} = \tau(\boldsymbol{c}) \circ R_\theta \circ \tau(-\boldsymbol{c})$$

とも表される。

1.3　鏡映および滑り鏡映の標準形

定理 5

鏡映軸 $\ell : ax + by = d$, $(a^2 + b^2 = 1$, $a \geq 0)$ をもつ鏡映 m_ℓ は，ℓ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおいて，

$$m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a}$$

と表される.

(証明) 直線 ℓ と平行で原点を通る直線を $\ell_0 : ax + by = 0$ とおく。ℓ_0 に関する鏡映は，定理 2 より，$m_{\ell_0}(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$ である。今 ℓ 上の点 $\boldsymbol{b}$ を任意にとると，$\ell = \tau(\boldsymbol{b})\ell_0$ だから

$$\tau(\boldsymbol{b}) \circ m_{\ell_0}(\boldsymbol{x}) = m_\ell \circ \tau(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}), \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2.$$

が成立つ。よって $m_\ell = \tau(\boldsymbol{b}) \circ m_{\ell_0} \circ \tau(-\boldsymbol{b})$,

$$m_\ell(\boldsymbol{x}) = \tau(\boldsymbol{b}) m_{\ell_0} \tau(-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + M(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.$$

$M(\boldsymbol{a})^2 = E,\ M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ そして $\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 | M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}\}$ に注意して，$M(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{b} - M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a},\ \lambda \in \boldsymbol{R}$ とおける。$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1,\ {}^tM(\boldsymbol{a}) = M(\boldsymbol{a})^{-1} = M(\boldsymbol{a})$ より $\lambda = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} - M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}, M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}) = 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$. $\boldsymbol{b} \in \ell$ だったから $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d$. 以上から $\boldsymbol{b} - M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = 2d\boldsymbol{a}\ \therefore\ m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a}$. (Q.E.D)

定理 6

鏡映軸 $\ell : ax + by = d$, $(a^2 + b^2 = 1$, $a \geq 0)$, 平行移動 $\boldsymbol{p}$ $(\boldsymbol{p} \mathbin{/\!/} \ell)$ の滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ は，ℓ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおいて，

$$m_{\ell,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$$

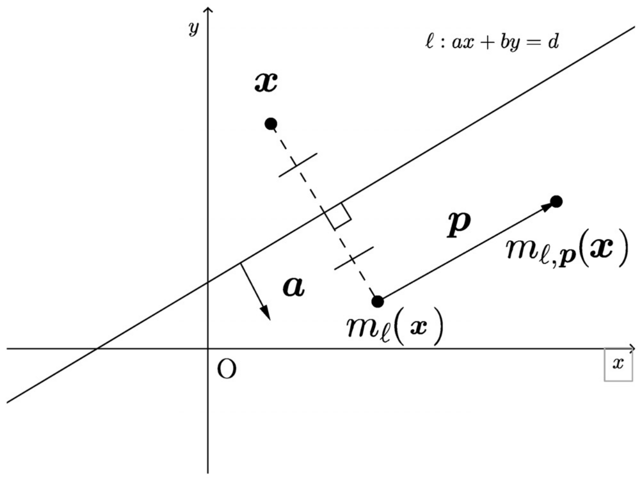
と表される．

(証明) 鏡映軸 $\ell : ax + by = d$, 平行移動 $\boldsymbol{p}$ の滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ はベクトル $\boldsymbol{p}$ による平行移動 $\tau(\boldsymbol{p})$ を用いると

$$m_{\ell,\boldsymbol{p}} = \tau(\boldsymbol{p}) \circ m_\ell$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} m_{\ell,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) &= \tau(\boldsymbol{p}) \circ m_\ell(\boldsymbol{x}) \\ &= M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p} \end{aligned}$$



(Q.E.D)

1.4 まとめ

平面の 4 種類の合同変換の標準形を表にまとめる。平面における合同変換は，この 4 種類しかないことが知られている（e.g. 川崎 [1]）。

合同変換	鏡映の個数	記号	不動点	向き	標準形
鏡映	1	m_ℓ	鏡映軸	$-$	$m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a}$
平行移動	2	$\tau(\boldsymbol{b})$	なし	$+$	$\tau(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$
回転	2	$R_\theta^{\boldsymbol{c}}$	回転中心	$+$	$R_\theta^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = R(\theta)\boldsymbol{x} + (E - R(\theta))\boldsymbol{c}$
滑り鏡映	3	$m_{\ell,\boldsymbol{p}}$	なし	$-$	$m_{\ell,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$

2　標準形を判別する

平面における合同変換は，標準形ですべて $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と書ける。この座標形の式 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ が 4 種類のどの合同変換を表しているのかということを調べる。A は直交行列なので，${}^tAA = E$。両辺の行列式をとって

$$|{}^tA||A| = |A|^2 = 1$$

つまり

$$|A| = \pm 1$$

しかるに，

$$|M(\theta)| = |M(\boldsymbol{a})| = -1$$

$$|R(\theta)| = 1$$

特に $\theta = 0$ として

$$|E| = 1$$

となる。これより，合同変換 T は $|A| = -1$ のとき，鏡映か滑り鏡映を表し，$|A| = 1$ のとき，回転か平行移動を表すことがわかる。このことをふまえ，与えられた標準形の式がどの合同変換を表すのか判別していく。標準形 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ が回転を表すとき，中心と回転角はどのように定まるのか，滑り鏡映を表すときの鏡映軸や平行移動はどのように定まるのかということを考察していく。考察するにあたって，次の補題に注意する。

補題 1

A , B を（直交）行列，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$ として，変換 $T : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, $S : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\ ,\ S(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

とおく. いま $T = S$, すなわち $T(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x})\ (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n)$ ならば

$$A = B\ ,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

が成り立つ.

（証明）

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のとき，

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{b} \\ S(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{c} \end{cases}$$

より，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ が成り立つ。したがって，

$$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}\ \ (\forall \boldsymbol{x})$$

が成り立つ。ここで，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ とおき，A , B を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ とおく。よって，

$$A\boldsymbol{e}_j = B\boldsymbol{e}_j$$
$$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}_j$$

より $A = B$ が成り立つ。よって $T = S$ のとき

$$A = B \text{ , } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

が成り立つ。

(Q.E.D)

次の補題も容易に証明でき，よく知られている。

補題 2（2 次直交行列群 $O(2)$ の構造）

2 次直交群 $O(2) := \{A \in M_2(\boldsymbol{R}) | {}^tAA = E\}$ を，2 次特殊直交群 $SO(2) := \{A \in O(2) |\ |A| = 1\}$ で剰余分解すると，

$$O(2) = SO(2) \sqcup SO(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \therefore\ O(2) \triangleright SO(2)\text{（正規部分群）　ここで}$$

$$\begin{cases} SO(2) & = \{A \mid |A| = 1\} & = \{R(\theta) | 0 \leq \theta < 2\pi\} = \text{回転行列全体}, \\ SO(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & = \{A \mid |A| = -1\} & = \{M(\theta) = R(2\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} | 0 \leq \theta < \pi\} = \text{鏡映行列全体} \end{cases}$$

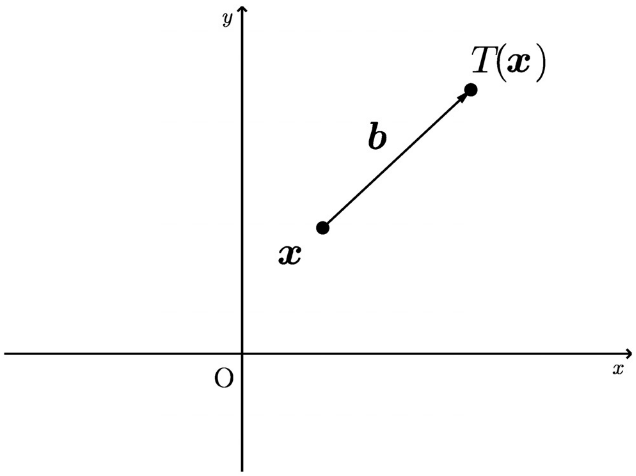
これらの補題を使って，与えられた標準形の式がどのような合同変換を表すのか判別していく。

2.1　$|A| = 1$ かつ $A = E$ のとき

A が単位行列のとき，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ となる。よって，

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \tau(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x})$$

となる。これより，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は平行移動を表し，ベクトル $\boldsymbol{b}$ だけ平行移動することがわかる。



よって，$A=E$ のときの標準形 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{b}$ だけ平行移動する平行移動を表す。

2.2　$|A|=1$ かつ $A\neq E$ のとき

$|A|=1$ かつ $A\neq E$ のとき，補題 2 より $A=R(\theta)$ $(\exists\theta\not\equiv 0 \bmod 2\pi)$ だから標準形 $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ は回転を表す。中心 $\boldsymbol{c}$ と回転角 θ を求める。但し $A\neq E$ より $0<\theta<2\pi$ とする。ここで，

$$T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\,,\ R_\theta^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x})=R(\theta)\boldsymbol{x}+(E-R(\theta))\boldsymbol{c}$$

より，$T=R_\theta^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x})$ のとき，

$$\boldsymbol{b}=(E-R(\theta))\boldsymbol{c}\,,\ A=R(\theta)$$

となる。したがって，

$$\boldsymbol{b}=(E-A)\boldsymbol{c}$$

$A=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ $(u^2+v^2=1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}|E-A| &= \begin{vmatrix} 1-u & v \\ -v & 1-u \end{vmatrix}\\ &= (1-u^2)+v^2\\ &= 1-2u+u^2+v^2\\ &= 2(1-u)\end{aligned}$$

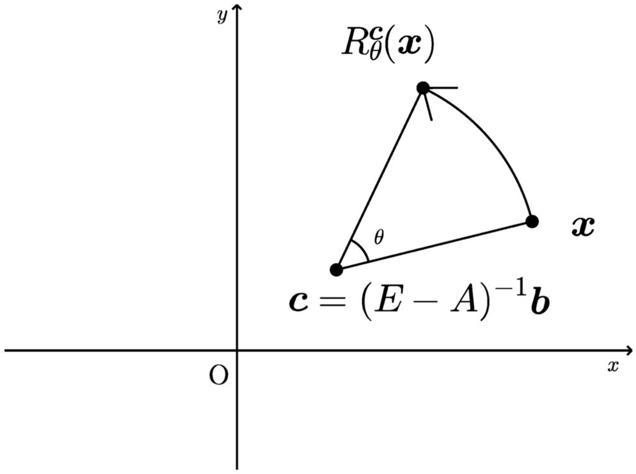
である。$A\neq E$ より $u\neq 1$ であるから $|E-A|\neq 0$ である。したがって，$E-A$ は逆行列をもち

$$\boldsymbol{c}=(E-A)^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる。また $A=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$，$A=R(\theta)$ より回転角 θ は

$$\begin{cases} u=\cos\theta \\ v=\sin\theta \end{cases}$$

によって決まる角である。



よって，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $|A| = 1$ かつ $A \neq E$ のとき回転を表し，中心 $\boldsymbol{c} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$, 回転角 θ は $\begin{cases} u = \cos\theta \\ v = \sin\theta \end{cases}$ で決まる角となる。

2.3 $|A| = -1$ のとき

$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ が $|A| = -1$ とする。このとき補題 2 より $A = M(\theta) = M(\boldsymbol{a})(\exists\theta,\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}(\theta - \frac{\pi}{2}))$ だから $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は鏡映か滑り鏡映を表す。以下，鏡映を平行移動 $\boldsymbol{p} = 0$ なる滑り鏡映の一つとして考察する。したがって，鏡映軸 $\ell : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d$ と平行移動 $\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{p} \mathbin{/\!/} \ell)$ を求める。ここで鏡映軸 ℓ と x 軸の正方向となす角を $\theta\ (0 \leq \theta < \pi)$ とし，単位法ベクトルを $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}(\theta - \frac{\pi}{2})$ とする．単位法ベクトルの取り方には $\pm\boldsymbol{a}$ の 2 通りがありえるが，x 座標 ≥ 0 となる方を選んだ。いま

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\ ,\ m_{\ell,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$$

として，$T = m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ とすると補題 1 より

$$\boldsymbol{b} = d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}\ ,\ A = M(\boldsymbol{a})$$

となる。したがって，$A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$ $(u^2 + v^2 = 1)$ とおいたとき，

$$\begin{cases} u = b^2 - a^2 \\ v = -2ab \end{cases}$$

が成り立つ。$u = b^2 - a^2$, $|\boldsymbol{a}|^2 = a^2 + b^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} u &= (1 - a^2) - a^2 \\ 2a^2 &= 1 - u \\ a^2 &= \frac{1 - u}{2} \end{aligned}$$

$a \geq 0$ より

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{2-2u}$$

また，$v = -2ab$ より，$a \neq 0$ つまり $u \neq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} b &= -\frac{v}{2a} \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2-2u}}. \end{aligned}$$

次に $a = 0$ つまり $u = 1$ のとき，$b^2 = 1$ であり，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}(\theta - \frac{\pi}{2})$ すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

そして $0 \leq \theta < \pi$ としているから $-1 \leq b = -\cos\theta < 1$，よって

$$b = -1$$

となる．したがって，$u \neq 1$ のとき，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2-2u} \\ -\frac{v}{\sqrt{2-2u}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2-2u}}\begin{pmatrix} 1-u \\ -v \end{pmatrix}$$

$u = 1$ のとき，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る。

平行移動 $\boldsymbol{p}$ を求める。$\boldsymbol{p}$ は鏡映軸 ℓ に平行であり，ℓ と x 軸のなす角 θ としているから

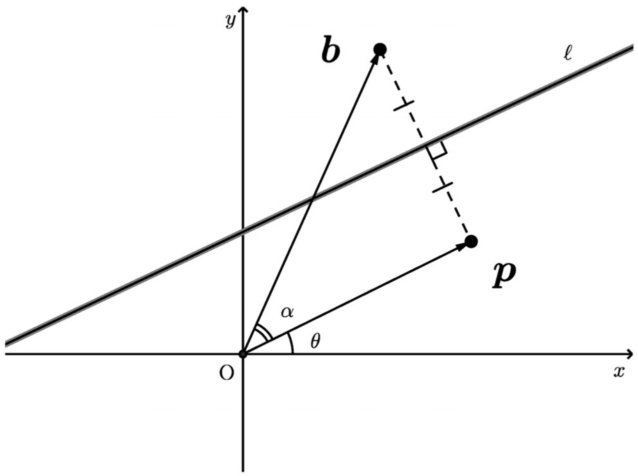
$$\boldsymbol{e}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\ (0 \leq \theta < \pi) \therefore \sin\theta \geq 0$$

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{e}(\theta)\ (t \in \boldsymbol{R})$$

と表せる。また，$\ell : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = ax + by = d$ だから

$$\boldsymbol{e}(\theta) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

と表すこともできる。以下では $\boldsymbol{e}(\theta) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ を用いて考える。



上図のように $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{p}$ の間の角を α とすると

$$t = |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\alpha = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}(\theta))$$

したがって，いま $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}(\theta)) \cdot \boldsymbol{e}(\theta) \\
&= (-bb_1 + ab_2)\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b^2 b_1 - abb_2 \\ -abb_1 + a^2 b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1+u}{2} & \dfrac{v}{2} \\ \dfrac{v}{2} & \dfrac{1-u}{2} \end{pmatrix}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{1}{2}(E + A)\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(E + A)\boldsymbol{b}$$

を得る。

次に鏡映軸 $\ell : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d$ について考える。$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ より，$T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{b}$ である。図より，鏡映軸 ℓ は $\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$ を通る。よって $\left(\boldsymbol{a}, \dfrac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = d$. したがって，$u \neq 1$ のとき，

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2-2u}}\begin{pmatrix} 1-u \\ -v \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$d=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{1}{2\sqrt{2-2u}}\left(\begin{pmatrix}1-u\\-v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2-2u}}\{(1-u)b_1-vb_2\}$$

となる。したがって，鏡映軸 ℓ の方程式は

$$\ell:(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=d$$
$$\frac{1}{\sqrt{2-2u}}\left(\begin{pmatrix}1-u\\-v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2-2u}}\left(\begin{pmatrix}1-u\\-v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)$$
$$(1-u)x-vy=\frac{1}{2}\{(1-u)b_1-vb_2\}.$$

よって $u\neq 1$ のとき，鏡映軸 $\ell:(1-u)x-vy=\dfrac{1}{2}\{(1-u)b_1-vb_2\}$ となる。

また $u=1$ のとき，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$，$d=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)=-\dfrac{b_2}{2}$ だから，鏡映軸 ℓ の方程式は

$$\ell:(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=d$$
$$\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=-\frac{b_2}{2}$$
$$y=\frac{b_2}{2}$$

これより，鏡映軸 $\ell:y=\dfrac{b_2}{2}$ となる。

以上より鏡映軸は $\ell:(1-u)x-vy=\dfrac{1}{2}\{(1-u)b_1-vb_2\}\ (u\neq 1)$，$\ell:y=\dfrac{b_2}{2}\ (u=1)$ となる。

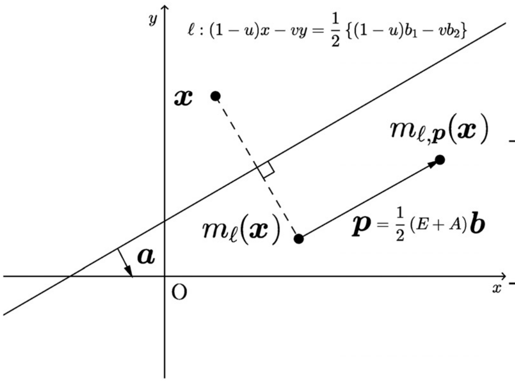


図１　$u\neq 1$ のとき

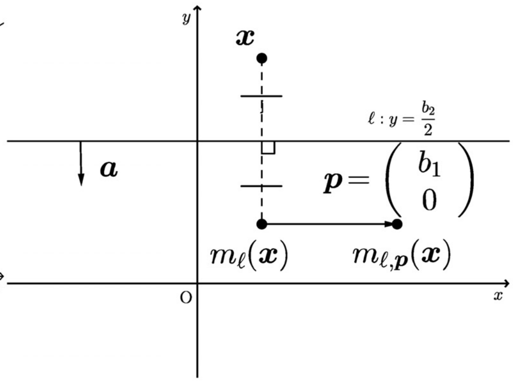


図２　$u=1$ のとき

よって，$T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ は，$|A|=-1$ のとき滑り鏡映を表し，
鏡映軸は $\ell:(1-u)x-vy=\dfrac{1}{2}\{(1-u)b_1-vb_2\}\ (u\neq 1)$，$\ell:y=\dfrac{b_2}{2}\ (u=1)$
平行移動 $\boldsymbol{p}=\dfrac{1}{2}(E+A)\boldsymbol{b}$ となる。（注：滑り鏡映の，鏡映軸 ℓ と平行移動 $\boldsymbol{p}$ の導出は，更に簡易化可能である）

2.4 まとめ

平面における合同変換の標準形 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の判別について表にまとめる。

行列式 $\vert A\vert$	A について	どのような合同変換か
$+1$	$A = E$	ベクトル $\boldsymbol{b}$ による平行移動 $\tau(\boldsymbol{b})$
	$A \neq E$ $A = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ $(u^2 + v^2 = 1)$	中心 $\boldsymbol{c} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ 回転角 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を $\begin{cases} u = \cos\theta \\ v = \sin\theta \end{cases}$ で決まる角とする回転 $R_\theta^{\boldsymbol{c}}$
-1	$A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$ $(u^2 + v^2 = 1)$	鏡映軸 $\ell : (1 - u)x - vy = \dfrac{1}{2}\{(1 - u)b_1 - vb_2\}$ $(u \neq 1)$ または $\ell : y = \dfrac{b_2}{2}$ $(u = 1)$ 平行移動 $\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{2}(E + A)\boldsymbol{b}$ の滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$

参考文献

[1] 川崎徹郎 『文様の幾何学　文様における群作用と対称性』(2014 年) 牧野書店
[2] 三宅敏恒 『入門線形代数』（1998 年） 培風館
[3] 石村園子 『やさしく学べる線形代数』(2000 年) 共立出版
[4] ア・イマリツェフ 『線型代数学』(1960 年) 東京図書
[5] 松坂和夫 『線型代数入門』　(1980 年)　岩波書店

(付記) 北村右一名誉教授および山路裕昭名誉教授へ
遅くなりましたが，本稿は退職記念の寄稿です。退職時の 4 年ゼミナール生の卒業論文を纏め直しました。