Pro gradu -tutkielma

Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma, matematiikan suuntautumisvaihtoehto

NÄKÖKULMIA FUNKTIOKÄSITTEEN OPPIMISEEN JA OPETTAMISEEN – TAVOITTEENA YMMÄRTÄMINEN

Sanna Nikula

Ohjaaja: Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme	
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma	

Tekijä – Författare – Author
Sanna Nikula

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Näkökulmia funktiokäsitteen oppimiseen ja opettamiseen – tavoitteena ymmärtäminen

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu	10.11.2021	61

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Funktio on matematiikan keskeisimpiä käsitteitä, mutta sen oppiminen aiheuttaa oppilaille paljon haasteita. Funktion kehitys alkoi varsinaisesti 1600-luvulla, jolloin Descartes esitti yhtälön avulla kahden muuttujan riippuvuuden ja Fermat keksi tämän riippuvuuden yhteyden tasokäyrään. Sanan funktio otti käyttöön Leibniz vuonna 1673 ja Euler esitteli 1700-luvulla funktion analyyttisen lausekkeen. Modernin Dirichlet-Bourbaki -määritelmän mukaan funktio voi olla minkä tahansa joukkojen välinen vastaavuus. Suomalaisissa peruskoulun ja lukion oppikirjoissa pysytään pitkälti analyyttisen lausekkeen määrittelemässä funktiossa, moderni Dirichlet-Bourbaki -määritelmä esitellään vasta yliopistotason oppikirjassa.

Matemaattisen käsitteen muodostuksessa proseduraalinen ja konseptuaalinen lähestymistapa yhdistyvät hyvin kehittyneessä ajattelussa proseptiksi, joka edustaa korkeinta abstraktiotasoa. Ymmärtäminen tarkoittaa käsitteen liittämistä osaksi käsitteenmuodostusprosessissa syntynyttä tietoverkkoa, tai se voidaan ajatella myös tilanteeseen suhteutettuna järkevänä toimintana. Ymmärtäminen tehostaa ongelmanratkaisua ja oppimista monin tavoin.

Funktion oppimiseen liittyviä yleisiä haasteita ovat mm. riittämätön algebran osaaminen, funktioon liittyvät monet alakäsitteet, käsitteen abstraktius ja funktion monet eri esitystavat. Funktioon liittyy myös useita spesifejä väärinkäsityksiä, kuten taipumus tulkita funktio lineaarisena, vaikeus tunnistaa vakiofunktiota, paloittain määriteltyä tai epäjatkuvaa funktiota funktioksi sekä vaikeus erottaa diskreetit ja jatkuvat funktiot toisistaan. Myös kulmakerroin ja kuvaajan tulkinta ja piirtäminen aiheuttavat haasteita. 9-luokkalaisille tehdyssä kyselyssä erityisesti paloittain määritellyt funktiot tunnistettiin huonosti. Avoimessa kysymyksessä funktion määritelmästä 9-luokkalaisista lähes puolet ei osannut antaa järkevää vastausta. Opettajat määrittelivät funktion yleisimmin vastaavuudeksi tai riippuvuudeksi, mikä vastaa funktion määritelmää joko uudessa tai vanhassa muodossaan.

Funktion ymmärtämiseen tähtäävässä opetuksessa on tärkeää luoda yhteyksiä käsitteiden ja funktion eri esitystapojen välille. Opettajan pitäisi myös esittää riittävästi huolella valittuja esimerkkejä ja vaihdella erityyppisiä tehtäviä. Opetus pitäisi aloittaa intuitiivisesta edeten siitä abstraktiin suuntaan. Kuvaajan piirtämistä ja tulkintaa on hyvä harjoittaa riittävästi ja esitellä kulmakertoimelle erilaisia tulkintoja. Opettajan aineenhallinta on erittäin tärkeää. Opetuksessa on hyvä käyttää myös teknisiä apuvälineitä oppimisen apuna. Keskustelu, avoimet tehtävät ja ongelmanratkaisu ovat myös tärkeitä funktion opettamisessa.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Funktio, funktiokäsite, ymmärtäminen, väärinkäsitykset

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

Johdanto

Funktio on yksi modernin matematiikan keskeisimpiä käsitteitä ja se onkin koulumatematiikassa tärkeässä roolissa viimeistään yhdeksänneltä luokalta lähtien ja läpi lukion. Yliopistossa ja korkeakoulussa funktio on keskeinen matematiikan, luonnontieteiden ja tekniikan opiskelussa ja sitä tarvitaan paljon myös muilla tieteenaloilla. Funktion käsite on kuitenkin osoittautunut yhdeksi koulumatematiikan vaikeimmista käsitteistä. Käsitteen oppiminen on hankalaa ja oppilaiden ymmärrys käsitteestä jää heikoksi. Tämä tulee hyvin esille tässä työssä esiteltävässä tutkimuskyselyssä, jonka avoimessa kysymyksessä yhdeksäsluokkalaiset oppilaat kuvasivat funktiota esimerkiksi näin: *"se mis on niitä äksiä ja yitä"*, *"emt"* ja *"se on suora jossa on kulmakerroin ja leikkaus kohta y-akselilla"*. Nämä lausahdukset eivät tule varmasti yllätyksenä yläkoulun eikä lukionkaan matematiikan opettajalle, mutta ne tuovat hyvin näkyviin sen, kuinka vajavainen oppilaiden funktiokäsite yläkoulun päättövaiheessa vielä on.

Funktion oppimisesta löytyy melko paljon tutkimustuloksia ja myös matemaattista käsitteenmuodostusta, ajattelua ja ymmärtämistä on tutkittu paljon. Matemaattisesta käsitteenmuodostuksesta on kirjoittanut Sfard (1991), jonka mukaan matemaattiset käsitteet voidaan ymmärtää toisaalta strukturaalisina, abstrakteina objekteina, mutta toisaalta operationaalisina käsitteinä, jotka joiden syntyminen vaatii tietyn prosessin läpikäynnin. Grey & Tall (1994) yhdistävät nämä kaksi näkökulmaa prosepti-käsitteeksi, koska heidän mukaansa näitä molempia näkökulmia tarvitaan käsitteen muodostumiseen. Myös suomalainen Haapasalo (2004) on kirjoittanut aiheesta paljon. Ymmärtämisen käsitteestä on kirjoitettu useita määritelmiä, joista tässä työssä esitellään muutamia. Hieman syvällisemmin perehdytään Hiebertin & Carpenterin (1992) ja Bereiterin (2002) ajatuksiin ymmärtämisestä, joista ensimmäinen korostaa ymmärtämisen parantavan muistamista ja siirtovaikutusta ja sitä kautta ongelmanratkaisua. Bereiter taas vertaa vaikean käsitteen ymmärtämistä konkreettisen työkalun ymmärtämiseen.

Funktion oppimisen tutkimuksessa keskitytään paljon haasteisiin ja väärinkäsityksiin. Funktion oppimisen yleisiä haasteita ovat riittävien perustaitojen ja algebrallisen osaamisen puute sekä funktiokäsitteen abstraktius. Funktion käsitteeseen liittyy myös useita jo sinänsä monimutkaisia alakäsitteitä, kuten muuttuja, raja-arvo, ääriarvot ja derivaatta. (Dreyfus & Eisenberg 1982, Leinhardt ym. 1990). Myös funktion eri esitystavat ja siirtyminen niiden välillä aiheuttavat oppilaille vaikeuksia. Oppilailla on myös taipumus ajatella funktioita lineaarisina (Markovits 1986), eivätkä he aina tiedä, pitäisikö funktio esittää diskreettinä vai jatkuvana. Vakiofunktiota, paloittain määriteltyä tai epäjatkuvaa funktiota ei useinkaan edes tunnisteta funktioksi. Myös kulmakerroin (Cho&Nagle 2017) ja kuvaajan tulkinta ja piirtäminen (mm. Bell&Janvier 1981) aiheuttavat paljon hankaluuksia oppilaille.

Tämän työn tavoitteena on koota kirjallisuudesta tietoa siitä, millaisia haasteita funktion oppiminen oppilaille aiheuttaa ja mitkä ovat tyypillisimmät väärinkäsitykset. Tavoitteena on myös selvittää, miten matemaattiset käsitteet muodostuvat ja mitä ymmärtäminen ja matemaattinen ajattelu ovat. Koska funktion oppimiseen liittyvä kirjallisuus on lähes poikkeuksetta vähintään kolmen vuosikymmenen takaa, tässä työssä haluttiin tuottaa pieni lisä tuohon tutkimukseen selvittämällä kyselyn avulla 9-luokkalaisten, opiskelijoiden ja opettajien käsityksiä funktiosta.

Kysely tehtiin uusimaalaisen peruskoulun 9-luokkalaisille, jotka olivat opiskelleet funktioon liittyviä asioita edellisen talven aikana. Sama kysely jaettiin myös Facebookin Matematiikka-ryhmässä, jossa jäseninä on matematiikan opettajia, opiskelijoita ja muita matematiikasta kiinnostuneita. Tutkimuskirjallisuuden ja kyselyn tulosten avulla tehdään lopuksi synteesi siitä, miten funktiokäsite voitaisiin opettaa niin, että se johtaa käsitteen ymmärtämiseen. Lopuksi koostetaan vielä konkreettinen ohje funktiokäsitteen opettamiseen.

Funktio käsitteenä

Funktion käsite on matematiikassa niin keskeinen, että sitä voidaan pitää yhtenä modernin matematiikan kivijaloista. Tästä syystä se on myös koulumatematiikassa tärkeässä roolissa yläkoulun viimeisestä vuodesta lähtien ja läpi lukion. Samalla se on kuitenkin osoittautunut yhdeksi vaikeimmista käsitteistä koko koulumatematiikassa (Eisenberg 1991).

Voidaksemme analysoida funktio-käsitteen opettamista, oppimista ja ymmärtämistä, meidän täytyy ensin tutustua käsitteen erilaisiin esiintymismuotoihin ja määritelmiin. Nämä muodot ja määritelmät ovat muotoutuneet historian saatossa käsi kädessä matematiikan yleisen kehityksen kanssa, ja jotkin niistä ovat varsinkin koulumatematiikassa edelleen käytössä yhdessä uusien, formaalien määritelmien rinnalla. Tästä syystä luomme seuraavassa lyhyen silmäyksen funktio-käsitteen historiaan. Tämän jälkeen pohdimme, millaisia merkityksiä käsitteellä funktio on nykypäivän matematiikassa ja muilla tieteenaloilla. Lopuksi teemme lyhyen katsauksen funktion esiintymisestä oppikirjoissa eri kouluasteilla.

Funktiokäsitteen monet muodot

Varhaisimpia esimerkkejä funktioista on löydettävissä jo muinaisista peruslaskutoimituksista ja babylonialaisista tauluista, joihin oli listattu muun muassa lukujen neliöitä, kuutioita ja neliö- ja kuutiojuuria (Ponte 1992). Kreikkalainen Eudoksos määritti pinta-aloja ja tilavuuksia ns. ekshaustio- eli tyhjennysmenetelmällä sivuten raja-arvon käsitettä, ja häntä voidaan pitää myös integraalilaskennan edelläkävijänä (Lehtinen 1995).

Kreikkalainen tähtitieteilijä Ptolemaios laati 100-luvulla jKr. alkeellisia trigonometrisia taulukoita, ja tähtitieteen tarpeita palveli myös Menelaoksen samoihin aikoihin kehittämä pallotrigonometria. Arabitähtitieteilijät omaksuivat Intiasta sinifunktion, ottivat itse käyttöön tangenttifunktion ja kehittivät 900-luvulla trigonometrian lähelle nykymuotoaan. (Lehtinen 1995) Trigonometriset funktiot ovat siis yksi varhaisimmin kehittyneistä funktioiden muodoista.

Ranskalainen Nicole Oresme pohti 1300-luvulla muuttuvia suureita tason koordinaatistoa muistuttavien käsitteiden “muotojen latitudi ja longitudi” avulla ja piirsi funktion kuvaajien tapaisia kuvioita (Lehtinen 1995). Hän pääsi lähelle modernin funktiokäsitteen muotoa ja esitti yleisellä tasolla myös riippuvan ja riippumattoman muuttujan idean (Ponte 1992).

Ranskalainen filosofi ja matemaatikko Descartes keksi 1600-luvun alussa, että kahden muuttujan yhtälö esittää riippuvuutta kahden muuttujan välillä (Ponte 1992). Myöhemmin kuitenkin hänen maanmiehensä Fermat oivalsi vielä selvemmin, että kahden muuttujan yhtälö määrittelee tasokäyrän. 1600-luvun lopussa englantilainen Newton kehitti differentiaali- ja integraalilaskentaa ja havaitsi muun muassa derivointi- ja integrointioperaatioiden käänteisyyden. Newton nimitti funktioita fluenteiksi ja niiden aikaderivaattoja fluksioiksi, ja näiden merkinnät ovat osin säilyneet mekaniikassa aina nykypäivään saakka. (Lehtinen 1995)

Filosofi ja yleisnero, saksalainen Leibniz otti ensimmäisenä käyttöön funktio-sanan vuonna 1673 ja esitteli myös käsitteet vakio, muuttuja ja parametri (Ponte 1992). Häntä pidetään differentiaalija integraalilaskennan toisena keksijänä, ja nykyinen integraalimerkki onkin peräisin hänen käsikirjoituksistaan (Lehtinen 1995). Leibnizin oppilas Jean Bernoulli jatkoi Leibnizin työtä määrittelemällä funktion suureeksi, joka on rakennettu jollakin tavoin muuttujasta ja vakioista. Hänen oppilaansa Euler (1707-1793) kehitti tätä määritelmää eteenpäin puhumalla analyyttisestä lausekkeesta suureen sijasta. (Ponte 1992)

Tärkeä osuus funktion kehityksessä oli Fourierilla (1768-1830), joka tutki lämmön johtumista kappaleissa kahden muuttujan, ajan ja paikan, suhteen (Ponte 1992). Fourier huomasi, että mikä tahansa funktio, jonka ei tarvitse olla edes jatkuva, voidaan esittää trigonometrisena Fourier-sarjana (Lehtinen 1995, s. 57). Keksinnöllä on yhä paljon sovelluksia esimerkiksi signaalinkäsittelyssä ja muilla fysiikan aloilla.

Saksalainen Dirichlet (1805-59) kehitti Fourierin trigonometrisia sarjoja eteenpäin. Fourier-sarjojen tutkimisen yhteydessä hän tuli kirjoittaneeksi myös funktion uuden määritelmän, jonka mukaan funktion ei välttämättä tarvitse olla määritelty analyyttisellä lausekkeella:

> *Jos muuttuja y liittyy muuttujaan x siten, että aina kun x:lle annetaan jokin lukuarvo, on olemassa sääntö, jonka perusteella y saa yksikäsitteisen lukuarvon, niin y:n sanotaan olevan x:n funktio.* (Lehtinen 1995, s. 65)

Joukko-opin kehityksen myötä funktio-käsite jatkoi muovautumistaan. Nimimerkillä Nicolas Bourbaki kirjoittanut ranskalainen kollektiivi vei Dirichletin ajatusta eteenpäin määrittelemällä funktion epätyhjien joukkojen A ja B vastaavuudeksi tai relaatioksi. Jokaista määrittelyjoukon A alkiota vastaa täsmälleen yksi alkio arvojoukossa B. Tämän modernin, Dirichlet-Bourbaki -määritelmän mukaan funktiolla ei tarvitse olla selkeää sääntöä, vaan relaatio voi olla täysin satunnainen. Tämän lisäksi alkioiden ei tarvitse olla edes numeroita. (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990, s. 15-16)

Funktion kehitys on siis kulkenut vuosisatojen varrella babylonialaisista lukutaulukoista, jotka vastaavat funktioiden lukupariesitystä, Oresmen esittämiin funktion kuvaajan esiasteisiin, joiden Descartes ja Fermat myöhemmin ymmärsivät olevan kahden muuttujan yhtälön määrittämiä tasokäyriä. Nämä Descartesin ja Fermatin ajan funktiot olivat kaikki vielä analyyttisiä, jatkuvia ja derivoituvia ja muutenkin hyvin käyttäytyviä.

Siitä edelleen kehitys jatkui Leibnizin keksimän funktio-sanan ja Eulerin lausekkeiden kautta Dirichletin määritelmään, joka otti mukaan myös kaikkialla epäjatkuvat funktiot, joista Dirichlet antoi määritelmänsä mukaisen esimerkin: kun x on rationaalinen, niin $y = c$, ja kun x on irrationaalinen, niin $y = d \neq c$ (Lehtinen 1995, s. 65). Tästä edelleen jalostettu Dirichlet-Bourbaki -määritelmä esittää funktion kahden, mitä tahansa symboleja sisältävän joukon väliseksi vastaavuudeksi tai relaatioksi, jonka ei tarvitse olla minkään loogisen säännön mukainen. Ainoa rajoittava tekijä on se, että määrittelyjoukon alkiota voi vastata vain yksi arvojoukon alkio.

Funktion kehitys on jatkunut edelleen. Teoreettisessa tietojenkäsittelytieteessä käytettävä kategoriateoria tutkii struktuureja ja struktuurisysteemejä ja sen peruskäsitteitä on funktio-käsitteelle sukua oleva funktori (Marquis 2019). Laskettavuuden teoriassa - joka sekin on keskeinen tietojenkäsittelytieteessä - funktiota ei nähdä relaationa vaan laskusääntönä, jolla on selkeä alku- ja lopputila (Ponte 1992, Paz & Leron 2009). Ohjelmoinnissa funktion käsite vaihtelee hieman käytettävästä ohjelmointikielestä riippuen, mutta funktionaalisessa ohjelmoinnissa funktio on sääntö, jonka mukaan funktion paluuarvo eli tulos lasketaan (Sethi 1996, s. 319).

Funktiokäsite on käytössä nykyään useilla matematiikan aloilla. Matemaattisessa analyysissa tutkitaan funktioita yhden muuttujan lineaarisista aina n muuttujan funktioihin, differentiaaliyhtälöiden teoriassa ratkaistaan yhtälöitä, joista tulokseksi saadaan funktio ja funktionaalianalyysi tutkii funktioista koostuvia avaruuksia. Numeerisessa analyysissä etsitään numeerisia keinoja approksimoida funktiota mahdollisimman tarkasti ja matemaattinen logiikka tutkii rekursiivisia funktioita. (Ponte 1992)

Funktiokäsite oppikirjoissa

Tässä luvussa pyrimme saamaan mahdollisimman kattavan, mutta tiivistetyn kuvan siitä, miten funktiokäsite on esiintynyt ja esiintyy nykyään Suomessa käytetyissä matematiikan oppikirjoissa.

Suomalaisten matematiikan oppikirjojen historiassa on yksi erityisesti tutustumisen arvoinen nimi. Professori Kalle Väisälä oli matematiikan oppikirjojen uudistaja, jonka kirjat muuttivat 1940-luvun puolivälistä lähtien matematiikan opetusta merkittävästi oppilaalle helpompaan ja ymmärrettävämpään suuntaan - tehden pesäeroa aikaisempiin Bonsdorffin ja Neovius-Nevanlinnan tiivistettyihin ja vaikeasti avautuviin matematiikan oppikirjoihin (Tossavainen, Joutsenlahti, Lehtinen & Merikoski 2017).

Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirjassa vuodelta 1963 funktio määritellään seuraavasti:

Jos suureen arvo riippuu jonkin määrätyn lain mukaan toisen muuttuvan suureen arvosta, niin edellistä sanotaan jälkimmäisen funktioksi ja jälkimmäistä funktion argumentiksi.
(Väisälä 1963, s. 63)

Tämän jälkeen esitellään riippuvan muuttujan (funktion), riippumattoman muuttujan (argumentin) ja vakion (konstantin) käsitteet ja todetaan, että argumenttia voidaan kutsua myös lyhyesti pelkästään muuttujaksi. Seuraavaksi Väisälä esittelee vielä erilaisia funktiotyyppejä: muuttujan polynomit, joita sanotaan kokonaisiksi funktioiksi, rationaalilausekkeista muodostuvat rationaaliset funktiot sekä algebralliset funktiot, joihin voi sisältyä myös “juurenottoja”. Lopuksi mainitaan ns. empiiriset eli kokemusperäiset funktiot, joita ei voida ilmaista minään matemaattisena lausekkeena. (Väisälä 1963)

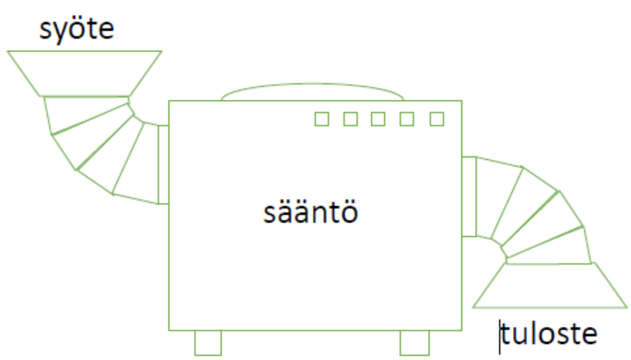
Tossavainen ym. (2017) mukaan eräs yksityiskohta esitetään kuitenkin nykyisissä matematiikan kirjoissa paremmin: Väisälä ei kiinnitä juurikaan huomiota polynomin funktioluonteeseen, vaan puhuu polynomin astetta määritellessään muuttujien sijasta hieman hankalasti kirjaimista. Väisälä ei myöskään korosta mitenkään funktion arvon yksikäsitteisyyttä, kuten Dirichlet tekee omassa määritelmässään. Sen sijaan Väisälän esityksessä painotetaan hyvin sitä, että funktion kuvaaja ei välttämättä noudata mitään matemaattista lauseketta, vaan voi määräytyä täysin satunnaisesti - eli Väisälän sanoin kokemusperäisesti.

Väisälän kieli on myös hyvin vanhanaikaista, nykyään matemaattisen funktion yhteydessä ei juuri kuule puhuttavan argumenteista, vaan sana on käytössä lähinnä ohjelmoinnissa rinnakkaiskäsitteenä ohjelmien toimintaa määritteleville parametreille. Vanhanaikainen konstantti -sana on nykyään kokonaan väistynyt vakio-sanan tieltä.

Joukko-oppiin perustuva Uusi matematiikka -suuntaus rantautui Suomeen 1960-luvulla. Suuntauksen kohtaamasta vastustuksesta huolimatta Tossavaisen ym. mukaan (2017) uuden matematiikan mukaiset oppikirjat edustavat kuitenkin korkeatasoisinta ja kunnianhimoisinta matematiikan opetusta Suomen kouluhistoriassa, mikä näkyy myös funktion opetuksessa: peruskoulun kuudennella luokalla pystyttiin opiskelemaan relaatioita ja funktioita tasolla, jolle nykyään päästään vasta lukiossa.

Uudesta matematiikasta pyristeltiin kokonaan eroon 1980-luvulla ja matematiikan opetus muuttui vähitellen yhä enemmän ongelmanratkaisun ja arkielämän ajattelutaitojen suuntaan. Yksittäisistä oppikirjasarjoista seuraava mainitsemisen arvoinen on kuitenkin vasta Laskutaito-sarja, joka hallitsi peruskoulun matematiikan oppikirjamarkkinoita 1990-2000-luvuilla. (Tossavainen ym. 2017)

Laskutaito-sarjassa funktio esiintyy ensimmäistä kertaa seitsemännen luokan kirjassa funktiokoneen muodossa. Koneen sääntöjä päätellään syötteiden ja tulosteiden avulla. Tämän jälkeen esitellään muuttuja ja lauseke ja kytketään nämä käsitteet funktiokoneen ideaan kirjoittamalla funktiokoneiden lausekkeita. (Lindroos-Heinänen 2009) Kahdeksannen luokan kirjassa jatketaan tästä ja kirjoitetaan taas lausekkeita eri tavoin toimiville funktiokoneille. Siitä edetään polynomeihin ja niiden sieventämiseen. (Lindroos-Heinänen, Talvitie & Vähä-Vahe 2010)



Kuva 1: *Funktiokone ((Lindroos-Heinänen ym. 2011)*

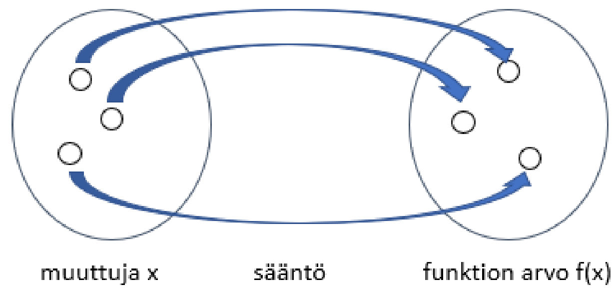
Funktiokäsite määritellään ensimmäistä kertaa Laskutaidon yhdeksännen luokan oppikirjassa (Lindroos-Heinänen, Talvitie & Vähä-Vahe 2011). Aihetta pohjustetaan ensin esimerkillä, jossa päätellään funktiokoneen sääntö ensin numeroiden ja sitten lausekkeena muuttujan avulla. Tämän jälkeen seuraa funktion määritelmä:

Funktio f on sääntö, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo f(x). Funktio määritellään usein antamalla funktion lauseke f(x), esimerkiksi f(x) = 10x + 1, jonka avulla funktion arvot voidaan laskea.

Funktion määritelmää havainnollistaa taulukko muuttujan arvoista x ja funktion arvoista f(x). (Kuva 2 vasemmalla) Opettajan oppaassa on opettajalle vinkiksi piirretty joukko-oppiin viittaava kuva, jolla voidaan havainnollistaa funktion käsitettä (Kuva 2 oikealla).

x	*f*	*f(x)*
1	→	11
2	→	21
3	→	31

$f(x) = 10x + 1$



Kuva 2: *Laskutaito-kirjan eri tapoja havainnollistaa funktio-käsitettä (Lindroos-Heinänen ym. 2011)*

Nykyään käytössä olevissa, uusimman perusopetuksen opetussuunnitelman 2016 mukaisissa oppimateriaaleissa funktion käsite esiintyy esiasteinaan jo alakoulun oppikirjoissa. Esimerkiksi Sanoma Pro:n Kymppi 4 -harjoituskirjassa tulkitaan yksinkertaisia aika-paikka -kuvaajia ja piirretään kuvaajia lapsen painon kehityksestä tai lämpötiloista. Ylöspäin eriyttävässä Pohdi ja oivalla -tehtävässä päätellään funktiokoneen sääntö ja lasketaan säännön avulla sekä koneeseen sisään meneviä arvoja että koneen tulostamia arvoja. Funktio-sanaa ei tehtävissä kuitenkaan mainita. (Rinne, Sintonen, Uus-Leponiemi & Uus-Leponiemi 2019)

Sanoma Pro:n vuosiluokille 7-9 suunnatussa uunituoreessa Muuttuja-kirjassa (Kettunen, Koponen, Portaankorva-Koivisto, Seppäläinen & Tuohilampi, 2020) funktio määritellään kahden luvun tai suureen välistä riippuvuutta kuvaavana sääntönä, joka esitetään usein lausekkeena. Tämän jälkeen käydään läpi funktion merkintä sekä käsitteet muuttuja ja lauseke. Sivun reunassa on korostettuna toteamus, että funktiossa tiettyä muuttujan arvoa vastaa tasan yksi funktion arvo.

Tämän jälkeen seuraa kuitenkin yllätys: seuraavassa kappaleessa todetaan, että ihmisen iän ja pituuden välinen riippuvuus ei ole funktio, koska pituus ei riipu iästä eikä ikä pituudesta minkään matemaattisen laskusäännön mukaisesti. Tämä voitaisiin toki tulkita yleisemmin relaatioksi ihmisten iän ja pituuden välillä, jolloin kyseessä ei olisi funktio, mutta yläkoulun oppilaille suunnatussa kirjassa tämä ei ole kovin todennäköistä. Muuttuja-kirja siis melkoisen rohkeasti irtisanoutuu sekä modernista Dirichlet-Bourbaki -määritelmästä, jonka mukaan funktion sääntö voi olla täysin satunnainen, että Väisälän esittämästä ajatuksesta kokemusperäisistä funktioista. Dirichlet-Bourbaki -määritelmähän hyväksyy funktioksi kaikki muut relaatiot tai vastaavuudet paitsi yhdestä moneen -vastaavuuden (Leinhardt 1990, 15-16). Olisi mielenkiintoista selvittää, onko kyseessä harkittu linjanveto vai ensimmäiseen painokseen jäänyt lapsus.

Saman kustantajan muutamaa vuotta vanhemmassa lukion Tekijä -sarjassa (Ekonen, Hassinen, Heiskanen, Hemmo, Kaakinen & Tahvanainen 2016) on funktiokäsitteen pohjustamisessa käytössä taas funktiokone, kun se yläkoulun uusimmasta kirjasta oli jätetty pois. Funktio määritellään kirjassa seuraavasti:

Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon lukuun täsmälleen yhden luvun, jota kutsutaan funktion arvoksi.

Kirja jättää portin auki myös uusimmille funktion määritelmille toteamalla, että funktion sääntö voidaan *usein* esittää lausekkeena. Asiaa ei kuitenkaan enempää avata. Määritelmässä ei myöskään erityisesti korosteta riippuvuutta.

Yliopistossa käytettävissä kirjoissa mennään ennalta arvattavasti formaalille tasolle. Helsingin yliopiston matemaattisen analyysin peruskursseilla käytettävässä Analyysiä reaaaliluvuilla -kirjassa (Harjulehto, Klen & Koskenoja, 2016) funktio määritellään varsin puhtaasti Dirichlet-Bourbaki -määritelmän mukaisesti:

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Relaatio $R \subset A \times B$ on funktio (eli kuvaus), jos jokaista $a \in A$ kohti on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle $(a,b) \in R$.

Teksti jatkuu määrittelyjoukon ja arvojoukon käsitteiden esittelyllä. Todetaan myös, että jos funktiolla on lauseke, se voidaan antaa suljetussa muodossa, esimerkiksi $f(x) = 1 + x^2$.

Teknillisessä korkeakoulutuksessa paljon käytetty Adamsin Calculus -kirja (Adams 1995) on kirjoitettu amerikkalaiseen opiskelijalähtöiseen tyyliin helppolukuisesti. Kirjan kuvassa esitetään funktiokone ja esitetään helppo esimerkki ympyrän pinta-alan funktiosta. Määrittelyjoukon ja arvojoukon sekä riippumattoman ja riippuvan muuttujan käsitteiden jälkeen määritellään funktio lyhyesti joukko-opin avulla:

A function f on a set D into a set S is a rule that assigns a unique element f(x) in S to each element x in D.

Toisin kuin Harjulehdon ym. (2020) kirjassa, relaatio-käsitettä ei ole käytetty, vaan funktio määritellään suoraan määrittely- ja arvojoukkojen avulla. Relaatio-sanan sijasta käytetään sanaa rule eli suomeksi sääntö. Erikseen on mainittu Dirichlet-Bourbaki -määritelmän mukaisesti, että määrittely- ja arvojoukot voivat sisältää mitä tahansa objekteja, joiden ei tarvitse olla numeroita.

On mielenkiintoista havaita, että matematiikan opiskelijan käsitteenmuodostus funktio-käsitteen oppimisessa eri kouluasteilla kulkee samankaltaisten vaiheiden kautta kuin käsitteen historiallinen kehitys. Alakoulussa funktioon tutustutaan ensin lukuparitaulukoiden ja kuvaajien avulla (Rinne ym. 2019), kuten babylonialaisissa tauluissa (Ponte 1992), Ptolemaioksen taulukoissa ja Fermat'n tasokäyrissä (Lehtinen 1995). Yläkoulussa etsitään funktion sääntöä ja päädytään kirjoittamaan yksinkertainen polynomifunktio (Lindroos-Heinänen ym. 2010 ja 2011), kuten Bernoulli ja Euler tekivät 1700-luvulla (Ponte 1992). Lukiossa kirjoitettavat lausekkeet muuttuvat monimutkaisemmiksi (Ekonen ym. 2016) ja vihdoin yliopistossa otetaan funktion määrittelyssä avuksi joukko-oppi, ja funktion määritelmä irtautuu selkeästi pelkästään lausekkeiden avulla ilmaistavista riippuvuuksista (Harjulehto ym. 2016, Adams 1995) - kuten modernissa Dirichlet-Bourbaki -määritelmässä (Leinhardt ym. 1990).

Läpi kouluasteiden funktion käsitteen esittelyssä toistuu funktiokoneen idea (esim. Lindroos-Heinänen ym. 2010 ja 2011, Ekonen ym. 2016), hieman yllättäen se löytyy myös yliopistotason oppikirjasta (Adams 1995). Määritelmissä esiintyy kirjasta riippuen joko vastaavuus, riippuvuus, tai käytetään ilmauksia “liittyy” tai “on olemassa”. Funktion arvon yksikäsitteisyyttä korostetaan kautta linjan. (esim. Lindroos-Heinänen ym. 2010 ja 2011, Ekonen ym. 2016, Adams 1995)

Matemaattinen käsitteenmuodostus ja ymmärtäminen

Ymmärtäminen on nostettu yhdeksi tämän työn suureksi teemaksi, koska monimutkaisempien matemaattisten käsitteiden oppimista ei oikeastaan voi sanoa tapahtuvan ilman ymmärtämistä. Työn tavoitteena on luoda jonkinlainen synteesi siitä, miten funktiokäsite opetetaan tai opitaan niin, että käsite ymmärretään. Jotta tämä olisi mahdollista, meidän täytyy ensin saada jonkinlainen yleiskuva siitä, miten matemaattiset käsitteet muodostuvat ja mitä ymmärtäminen on. Ymmärtämistä on usein vaikea erottaa matemaattisesta ajattelusta, ja kirjallisuudessa käsitteet esiintyvät usein yhtä aikaa ja niiden erottaminen toisistaan on usein vaikeaa. Siksi tässä yhteydessä käsitellään myös matemaattista ajattelua.

Matemaattisten käsitteiden muodostuminen

Sana käsite on laajasti käytetty - esimerkiksi opetussuunnitelman perusteiden yläkoulun matematiikan osioissa se mainitaan parisenkymmentä kertaa (Opetushallitus 2014) - mutta sitä ei ole helppo määritellä. Väljä määrittely onnistuu parhaiten listaamalla esimerkkejä tiettyyn käsiteluokkaan kuuluvista tai kuulumattomista asioista tai esittämällä käsitteille niitä määritteleviä ominaisuuksia tai ehtoja (Haapasalo 2004). Lapsi toimii itse asiassa luonnostaan näin, luokittelee asioita kokemustensa perusteella ja sovittaa uudet kokemukset johonkin näistä luokista. Vähitellen hän oppii tunnistamaan asioista samankaltaisuuksia ja muuttumattomia ominaisuuksia ja muodostaa käsitteen. Edelleen hän kehittää uusia abstraktiotasoja, muodostaa yläkäsitteitä ja näiden kautta monimutkaisempia käsiterakenteita. (Skemp 1986)

Koulussa opetus tapahtuu suurelta osin kielen avulla, ja tämän kielellisen sanoman ymmärtäminen tapahtuu käsitteiden välityksellä. Käsitteet ovat siis ajattelun ja oppimisen keskeisiä välineitä, joiden välittämisessä kieli on merkittävässä osassa. (Leinonen 2003) Toisaalta matemaattiset käsitteet ovat käsitteistä abstrakteimpia ja siten vaikeimpia (Skemp 1986). Näiden tietojen perusteella voitaneen perustellusti sanoa, että matematiikan käsitteiden välittäminen oppilaalle ja onnistunut käsitteenmuodostus asettavat ensinnäkin opettajalle melkoisen haasteen kielellisessä mielessä ja toisaalta vaativat oppilaalta matemaattisen tekstin erityispiirteiden hallintaa ja lukutaitoa (Leinonen 2003). Näitä haasteita ei ole useinkaan onnistuttu voittamaan, vaan matemaattisen ajattelun opetteleminen asettaa usein oppilaille ylipääsemättömiä vaikeuksia ja tulokset ovat kaukana tyydyttävästä - kuten Sfard asian muotoilee (1991).

Käsitteiden tehtävä on saada ote todellisuuden asioiden ominaisuuksista ja suhteista, ja niiden hallinta avaa mutta myös rajaa sitä, miten hahmotamme ympäristöä. Käsite ilmaistaan erilaisten esitysmuotojen eli representaatioiden avulla: esimerkiksi funktiokäsite voidaan esittää kuvaajan tai algebrallisen lausekkeen avulla, laskuprosessina tai järjestettyjen parien joukkona. (Leinonen 2018, Sfard 1991)

Strukturaalinen ja operationaalinen käsite, konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Mikä sitten erottaa matemaattiset käsitteet muista abstrakteista käsitteistä? Sfardin (1991) mukaan niin pitkään kuin käsitteitä kuvaillaan sanallisesti, yhteneväisyyksiä muiden tieteiden kanssa on enemmän kuin eroavaisuuksia. Matemaatikko kuvaa lukujoukkoja hyvin samalla tavalla kuin kemisti kuvaa molekyylien rakennetta tai fyysikko atomien sisältämiä kvarkkeja. Suurin ero on kuitenkin siinä, että abstrakteimmat matemaattiset rakenteet ovat kokonaan aistiemme ulottumattomissa, voimme nähdä ne vain mielessämme. Paperille tai tietokoneen ruudulle kirjoittamamme funktio on vain yksi mahdollinen representaatio tästä abstraktista kokonaisuudesta, jota emme voi käsillämme koskettaa emmekä silmillämme nähdä.

Silti olennainen osa matemaattista kykyä on Sfardin mukaan (1991) pystyä jollakin tavalla “näkemään” nämä matemaattiset objektit. Matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen abstrakteina objekteina ei ole kuitenkaan ainoa mahdollisuus. Vaikka tämä strukturaalinen käsitys on vallitseva modernissa matematiikassa, asiaa voidaan ajatella myös toisin. Esimerkiksi funktio voidaan nähdä paitsi järjestettynä parina tai relaationa, myös laskulausekkeena tai laskuprosessina, jonka avulla voidaan funktiolle laskea arvo (Tall 1996). Jälkimmäisen vaihtoehdon mukaista käsitettä Sfard (1991) kutsuu operationaaliseksi käsitteeksi.

Operationaalinen käsite tulee todelliseksi oikeastaan vasta sitten, kun siihen sisältyvän prosessin vaiheet on suoritettu. Siinä missä strukturaalinen käsite on mahdollista havaita yhdellä silmäyksellä ja on luonteeltaan staattinen, operationaalinen käsite vaatii tietyn prosessin läpikäyntiä ja on dynaaminen, vaiheittainen ja yksityiskohtiin pureutuva. (Sfard 1991)

Haapasalo (2004) käyttää sanoja konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto tarkoittaessaan itse asiassa samaa asiaa kuin Sfard (1991), joka puhuu strukturaalisista ja operationaalisista käsitteistä. Konseptuaalisen tiedon Haapasalo (2004) määrittelee hieman tiivistettynä semanttiseksi verkoksi, jonka solmujen ja linkkien rakentamiseen yksilö osallistuu. Proseduraalinen tieto tarkoittaa hänen mukaansa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien suorittamista tiettyjä esitystapoja noudattaen, mikä edellyttää esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei niiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista ainakaan silloin, jos suoritus on automatisoitunut.

Prosepti ja reifikaatio

Strukturaalista lähestymistapaa voidaan pitää matemaattisen käsitteenmuodostuksen kehittyneempänä muotona. Historiallisesti tarkasteltuna käytännöllisesti katsoen kaikki laskennallinen matematiikka on saanut alkunsa prosesseista ja edennyt vasta sitten strukturaalisiksi objektikäsitteiksi. (Sfard 1991) Hyvänä esimerkkinä tästä toimii funktiokäsite, joka hahmotettiin vuosisatojen kuluessa Ptolemaioksen trigonomisten taulukoiden, Eulerin analyyttisten lausekkeiden ja Fourierin sarjojen avulla erilaisiin proseduureihin perustuen ennen strukturaalisen ja abstraktin Dirichlet-Bourbaki -käsitteen muodostumista. (Lehtinen 1995, Ponte 1992, Leinhardt ym. 1990)

Silti näitä kahta lähestymistapaa, operationaalista ja strukturaalista ei saisi pitää toisiaan poissulkevana, vaan pikemminkin toisiaan täydentävänä. Opetuksessa näitä kahta elementtiä ei itse asiassa voi erottaa toisistaan. Siinä missä matemaattisessa ajattelussa tarvittavaa intuitiota on vaikeaa saavuttaa ilman abstrakteja objektikäsitteitä, prosessit voidaan nähdä näiden käsitteiden ymmärtämisen perustana. (Sfard 1991) Hyvin kehittyneessä matemaattisessa ajattelussa nämä kaksi lähestymistapaa yhdistyvät ja antavat vapauden liikkua joustavasti näiden kahden välillä. Gray & Tall (1994) antoivat tällaiselle lähestymistapojen sulautumalle nimen procept ottamalla loppuosan sanasta concept ja alkuosan sanasta procedure. (Käytän tässä helppouden vuoksi käsitteestä suomennosta prosepti.) He tarjoavat useita esimerkkejä prosepteista, joista poimin muutamia:

- symboli ¾ tarkoittaa sekä jakolaskua prosessina (laskutoimituksena) että murtolukua käsitteenä
- algebrallinen ilmaus 3x + 2 tarkoittaa sekä prosessia “lisää kolme kertaa x ja 2” että tämän prosessin tulosta, lauseketta “3x + 2”
- funktiomerkintä $f(x) = x^2 - 3$ tarkoittaa yhtä aikaa sekä sitä, kuinka funktion arvo lasketaan tietylle x:n arvolle, että kokonaista funktion käsitettä yleisellä x:n arvolla

Haapasalo (2004) kuvailee proseptien muodostumista seuraavasti. Lähtiessään muodostamaan uutta matemaattista käsitettä opiskelija käyttää ensin konkreettisia, aistein havaittavia perusobjekteja, jollaisina voisivat funktion tapauksessa toimia funktiokoneeseen syötettävät ja sen tulostamat arvot ja funktiokoneen säännön miettiminen konkreettisella tasolla. Opiskelija reflektoi sekä itse että yhdessä muiden kanssa näitä verbaalisia ilmauksia ja muodostaa näitä vastaavia symbolisia merkintöjä, kuten funktiokoneen sääntöä “syötteeseen lisätään kaksi” vastaava lauseke y = x + 2. Opiskelija oppii liittämään tilanteeseen yhä hienovaraisempia vivahteita ja alkaa käyttää eri esitysmuotoja, jolloin voidaan puhua kohteen ilmentymästä. Kun muunnos eri esitysmuotojen välillä muodostuu rutiiniksi, voidaan alkaa puhua proseduurista ja kun proseduurit eri vaihtoehtoineen sulautuvat yhteen joustavaksi ratkaisutavaksi, kyseessä on prosessi. Prosepti edustaa korkeinta abstraktiotasoa, jossa prosessi on kapseloitunut (encapsulated) symboliseksi esitystavaksi. Tällöin voidaan puhua proseptuaalisesta ajattelusta.

Sfard (1991) kuvailee käsitteenmuodostusprosessia hieman eri tavoin, mutta siitä on tunnistettavissa samoja elementtejä kuin Haapasalon kuvauksessa. Sfardin mukaan ensimmäinen vaihe on sisäistäminen (kirjoittajan vapaa käännös, alkuperäinen termi interiorization). Tässä vaiheessa oppilas totuttelee prosessiin, jonka avulla hän alkaa muodostaa uutta käsitettä. Funktion tapauksessa hän sijoittaa funktion kaavaan eri muuttujan arvoja ja saa selville funktion arvot. Vähitellen oppilas oppii taitavaksi tässä sijoitusprosessissa. Seuraavassa vaiheessa, tiivistymisessä (condensation), oppilas paketoi monimutkaiset operaatiot käsiteltävämmiksi yksiköiksi ja oppii ajattelemaan prosessia kokonaisuutena, tarvitsematta kiinnittää huomiota yksityiskohtiin. Tähän vaiheeseen liittyvät vertailujen tekeminen, yleistykset ja siirtyminen eri esitysmuotojen välillä. Funktioiden tapauksessa oppilas oppii tutkimaan funktioita, piirtämään niiden kuvaajia, yhdistää funktioita ja jopa löytämään käänteisfunktioita.

Reifikaatiossa (reification) opiskelija irtautuu prosessista ja oppii näkemään käsitteen puhtaasti objektina. Reifikaatio on ontologinen muutos, jossa opiskelija onnistuu näkemään tutun asian täysin uudessa valossa ja osaa yhdistää eri esitystavat saman abstraktin rakenteen sisälle. Funktioiden tapauksessa reifikaatio voi tarkoittaa esimerkiksi kykyä ratkaista differentiaaliyhtälöitä, joissa "tuntemattomat" ovat funktioita, kykyä keskustella yhdistettyjen funktioiden tai käänteisfunktioiden ominaisuuksista tai kykyä ymmärtää moderni funktion määritelmä, jossa funktion arvojen ei tarvitse määräytyä minkään laskulausekkeen perusteella.

Tällainen Haapasalon (2004) ja Sfardin (1991) kuvailema konseptuaalisen ja proseduraalisen ajattelun yhdistäminen on tyypillistä kokeneille ongelmanratkaisijoille eli nykykielellä asiantuntijoille (Haapasalo käyttää Newellin ja Simonin termiä ekspertti vuodelta 1972). Haapasalon (2004) mukaan asiantuntijan tietorakenne on kytkennöiltään rikas ja hän pystyy yhdistämään konseptuaaliset ja proseduraaliset tiedot tilanteen kannalta tarkoituksenmukaisella tavalla. Hän kykenee muodostamaan tiedoista ja käsitteistä semanttisia rakenteita, jolloin hänen tiedonkäsittelykapasiteettinsa kasvaa ja kognitiivista kapasiteettia vapautuu. Tällainen ajattelu lienee myös matematiikan opetuksen ja opiskelun lopullinen tavoite, tosin asiantuntijan tasolle oppilaista päässee lopulta vain harva.

Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen

Jo yli sata vuotta sitten tunnettu ranskalainen matemaatikko ja filosofi Henri Poincaré parahti epätoivossaan:

Erään… asian täytyy hämmästyttää meitä, tai lähinnä pitäisi hämmästyttää, jos emme olisi liian tottuneita siihen. Kuinka on mahdollista, että on olemassa ihmisiä, jotka eivät ymmärrä matematiikkaa? Tiede on ottanut apuun kaikki logiikan säännöt, jotka parhaat ajattelijat ovat hyväksyneet… miten voi olla mahdollista, että on olemassa niin paljon ihmisiä, jotka ovat täysin immuuneja sille?

(Poincaré 1952, s. 49, ranskankielinen alkuteos 1908; vapaa suomennos kirjoittajan)

Schoenfeld puolestaan kertoo kirjassaan (1994, s. 56) esimerkin oppilaista, jotka antoivat käytännön kysymykseen sotilaiden kuljettamiseen tarvittavien bussien määrästä vastauksen "31, jakojäännös 12". Hän toteaa lakonisesti oppilaiden ajattelun olevan yhtä kaukana järkevästä matemaattisesta ajattelusta kuin on yleensä mahdollista päästä. Vastaavia esimerkkejä löytyisi suomalaisistakin luokkahuoneista lukuisia.

Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen - tai vielä useammin niiden puute - puhuttaa suomalaisiakin matematiikan opettajia jatkuvasti. Nämä käsitteet liittyvät niin läheisesti toisiinsa, että niiden erottaminen on lähes mahdotonta (Pehkonen 2011). Ensimmäisessä lainauksessa Poincaré ihmetteli matemaattisen ymmärtämisen puutetta, mutta hän olisi aivan yhtä hyvin voinut puhua matemaattisesta ajattelusta. Schoenfeld kaipasi oppilailta järkevää matemaattista ajattelua, mutta eivät esimerkin oppilaat myöskään osoittaneet juuri matemaattista ymmärrystä.

Matemaattinen ajattelu

Matemaattisesta ajattelusta on kirjoitettu paljon sekä ainedidaktiikan kirjallisuudessa että opetussuunnitelmissa. Käsitteen merkityksestä ei ole kuitenkaan päästy yksimielisyyteen, vaan tutkijat määrittelevät sen omasta näkökulmastaan käsin. Matemaattista ajattelua voidaan tarkastella ainakin pedagogisesta, matemaattisesta tai antropologisesta näkökulmasta, tai tutkimalla tiedon prosessointia ja mielen eri alueita. (Sternberg 1996)

Joutsenlahti (2005, s. 51-63) jalostaa Sternbergin ajattelua eteenpäin ja hänen mukaansa matemaattiseen ajatteluun vaikuttavat myös uskomukset, kulttuuri ja yksilön matemaattiset kyvyt. Matemaattista ajattelua voidaan ymmärtää myös tarkastelemalla informaation prosessointia tai ongelmanratkaisua. Jotkin tutkijat pitävät ongelmanratkaisua koko matemaattisen ajattelun ytimenä (esim. Schoenfeld 1994).

Jos matemaattista ajattelua tarkastellaan puhtaasti matemaattisesta näkökulmasta, päädytään tutkimaan ongelmanratkaisua. Dreyfus & Eisenberg (1996) kirjoittavat, että matematiikkaa voi harjoittaa - eli hallita opetussuunnitelman osoittamat käsitteet ja ratkaista erilaisia matemaattisia ongelmia - määrittelemättä sen kummemmin mitä matematiikka on. Matemaattinen ajattelu on yksinkertaisesti ajatteluprosessi, jota käytetään tässä matematiikan harjoittamisessa - eli ongelmanratkaisussa.

He antavat esimerkin ongelmasta, jossa 1024 tenniksen pelaajaa pelaavat yksinkertaisen pudotuspeliturnauksen. Montako peliä täytyy pelata, jotta saadaan voittaja selville? Oheisessa taulukossa on esitetty kaksi eri ratkaisuvaihtoehtoa, A ja B.

A	B
Ensimmäisellä kierroksella pelattiin 512 ottelua, toisella 256, kolmannella 128 jne. Otteluita voittajan selvittämiseen tarvitaan siis 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1023	Turnaukseen ilmoittautui 1024 pelaajaa. Koska voittajia oli vain yksi, häviäjiä oli 1023. Jokainen häviäjä hävisi täsmälleen yhden ottelun, joten voittajan selvittämiseen tarvittiin 1023 ottelua.

Taulukko 1: *Montako peliä täytyy pelata, jotta saadaan voittaja selville yksinkertaisessa pudotuspeliturnauksessa? (Dreyfus & Eisenberg 1996)*

Dreyfus & Eisenberg (1996) toteavat, että molemmilla tavoilla päästään eri reittejä samaan ratkaisuun, mutta B on ratkaisuna paljon elegantimpi kuin A. Joidenkin matemaatikkojen ja matematiikan harjoittajien mielestä juuri tämä on tärkeää: matemaattinen päättely ei ole vain ajattelumalleja, joilla saadaan tietty ongelma ratkaistua, vaan se on myös estetiikkaa. Ei riitä, että vain “saadaan työ tehtyä”, vaan se täytyy tehdä elegantisti.

Dreyfus & Eisenberg (1996) kuvaavat myös erilaisia matemaattisia ajattelustrategioita, kuten analogioiden ja rakenteiden tunnistaminen, eri esitystapojen käyttö, visuaalinen päättely ja käänteinen ajattelu. Rice (1992) lähestyy matemaattista ajattelua myös ajattelustrategioiden avulla, ja hänen mukaansa niihin kuuluvat jo mainittujen analogioiden muodostamisen lisäksi luokittelu, lukujonotaidot ja deduktiivinen päättely. Hän myös listaa ongelmanratkaisutaidot omaksi ajattelustrategiakseen, kun Dreyfus & Eisenberg näkevät kaikki listaamansa ajattelustrategiat ongelmanratkaisun välineinä.

Hyvänä osoituksena käsitteiden ajattelu ja ymmärtäminen päällekkäisyydestä Mayer & Hegarty (1996) kirjoittavat matemaattisten ongelmien ymmärtämisestä, mutta tarkoittavat itse asiassa samantyyppisiä ajattelustrategioita kuin Dreyfus & Eisenberg ja Rice. He erottelevat kaksi strategiaa, joista ensimmäisessä pyritään keräämään ongelmasta kaikki tarvittavat tiedot ja päädytään niiden avulla suoraan laskutoimituksiin (direct translation strategy) ja toisessa yritetään ensin ymmärtää tehtävässä kuvattu tilanne ja hahmotellaan ratkaisu eri esitystapojen avulla (problem model strategy).

Ajattelustrategioiden avulla voidaan lisätä matemaattisen ajattelun joustavuutta, joka on keskeinen taito matemaattisessa ongelmanratkaisussa ja matemaattisessa ajattelussa yleensä. Monet suuret matemaattiset keksinnöt ovat syntyneet juuri joustavan ajattelun kautta. (Dreyfus & Eisenberg 1996) Joustava ajattelu on lähellä luovaa ajattelua, joka Pehkosen (2011) mukaan liittyy kiinteästi matemaattiseen ongelmanratkaisuun loogisen ajattelun lisäksi.

Ymmärtäminen

Ymmärtäminen on kirjallisuudessa paljon paremmin määritelty kuin matemaattinen ajattelu. Hiebert & Carpenter (1992, s. 67) määrittelevät ymmärtämisen sen pohjalta, miten informaatio on mielessä rakentunut.

Matemaattinen idea, proseduuri tai fakta on ymmärretty, jos se on osa sisäistä tietoverkkoamme… Ymmärtämisen asteen määräävät tietoverkon yhteyksien lukumäärä ja voimakkuus.

Sierpinska (1992, s.26) painottaa myös määriteltävän asian yhteyttä muihin käsitteisiin löytämättä kuitenkaan varsinaista määritelmää ymmärtämiselle ja muotoilee:

It is only when we have seen instances and non-instances of the object defined, when we can say what this object is and what it is not, when we have become aware of its relations with other concepts, when we have noticed that these relations are analogous to relations we are familiar with, when we have grasped the position that the object defined has inside a theory and what are its possible applications, that we can say we understood something about it.

Muidenkin tutkijoiden mielestä ymmärtämiselle on ollut vaikeaa löytää tarkkaa määritelmää. He ovat määritelleet käsitteen laveammin käytännön näkökulmasta. Bereiterin (2002, 99) mukaan esimerkiksi Brownell ja Sims (1946, 28) kuvailivat ymmärtämistä seuraavasti:

Voimme sanoa, että oppilas ymmärtää, kun hän pystyy toimimaan, tuntemaan tai ajattelemaan järkevästi suhteessa tilanteeseen.

Perkins & Blythe (1994) näkevät ymmärtämisen samaan tapaan toimintakyvyn näkökulmasta (performance perspective):

Ymmärtäminen on kykyä tehdä erilaisia aiheeseen liittyviä, ajattelua vaativia toimintoja kuten selittämistä, todisteiden ja esimerkkien löytämistä, yleistämistä, soveltamista, analogioiden löytämistä ja aiheen esittämistä toisella tavalla.

Bereiter (2002, 99-101) kuitenkin kyseenalaistaa ymmärtämisen näkemisen puhtaasti toimintakykynä. Miksi vaivautua edes puhumaan ymmärtämisestä, jos se ei ole mitään muuta kuin tilanteeseen sopivia suorituksia? Hän sanoo kannattavansa näkemystä, jonka mukaan

ymmärtämiseen tähtäävä opetus vaalii oppijan suhdetta tietoon, kehittämällä sitä sellaiseksi, että se tukee älykästä toimintaa.

Tämän kauniin lauseen jälkeen hän pohtii, miksi edes tieteellisten käsitteiden ymmärtämistä pitäisi kuvata mentaalimallien, käsiteverkkojen tai skeemojen avulla? Hän väittää, että tällainen siirtymä on turha. Tapa, jolla puhumme käytännössä ihmisten tai koneiden ymmärtämisestä, on hyvä tapa lähestyä myös teoreettista ymmärtämistä. Hän kirjoittaa listan havaintoja, joilla voidaan kuvailla jonkun ihmisen ymmärtämistä ja soveltaa sitten näitä samoja havaintoja ensin yksinkertaiseen työkaluun, putkipihteihin, ja lopuksi Newtonin mekaniikkaan. Käytän nyt tätä samaa havaintojen listaa funktiokäsitteen ymmärtämisen kuvaamiseen. (Bereiter 2002, 101-111)

1. Mitä funktioiden ymmärtäminen on, riippuu henkilön suhteesta niihin. Matematiikan opettajalle tarkoituksenmukainen ymmärtäminen on erilaista kuin vakuutusmatemaatikolle, ohjelmoijalle tai kauppiaalle.
2. Funktioiden ymmärtäminen tulee esiin siinä, että osaa toimia järkevästi niiden kanssa. Tämä voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että osaa järkevästi käyttää niitä apuvälineenä tai pystyy niiden avulla mallintamaan tosielämän ilmiöitä. Henkilö, joka on kunnolla sisäistänyt funktiokäsitteen, hahmottaa maailmaa ja toimii käsitteen mukaisesti tarvitsematta erikseen kerrata siihen liittyviä perusasioita.
3. Ymmärtäminen on läheisesti yhteydessä kiinnostukseen. Vaikka poikkeuksia on (kuten ihmisten kanssakin), on oletettavaa, että henkilö, joka ei ole kiinnostunut funktioista ei myöskään ymmärrä niitä.
4. Funktioiden ymmärtäminen edellyttää, että ymmärtää niiden suhteen polynomeihin, yhtälönratkaisuun, kuvaajiin, lausekkeisiin jne.
5. Funktioiden ymmärtäminen ei välttämättä tarkoita, että osaa selittää niitä. Selittäminen voi kuitenkin syventää funktioiden ymmärtämistä.
6. Vaikka ei ole olemassa yhtä ainoaa oikeaa tapaa ymmärtää funktioita, on kuitenkin olemassa selkeästi vääriä tapoja, joita voidaan tarpeen mukaan korjata.
7. Keskusteltaessa funktioista viitataan harvoin keskustelijoiden mielessä oleviin malleihin tai mielikuviin. Sen sijaan keskitytään funktioihin itseensä, niiden merkitykseen, sovelluksiin, rajoituksiin, ym.
8. Henkilö voi osoittaa ymmärtävänsä funktioita kertomalla niihin liittyvistä asioista kuten kulmakertoimesta tai derivaatasta, jatkuvuudesta, pienimmästä tai suurimmasta arvosta tms. Esimerkiksi hankalan ääriarvotehtävän ratkaiseminen paljastaa oletettavasti henkilön ymmärtävän funktiota hyvin. Sen sijaan virheet suoran kuvaajan piirtämisessä voivat kertoa heikosta funktioiden ymmärtämisestä.
9. Funktioiden syvällinen ymmärtäminen tarkoittaa, että henkilö ymmärtää syvällisempiä asioita niihin liittyen, kuten integrointia, rationaalifunktioiden raja-arvoja tai differentiaaliyhtälöitä.
10. Funktioiden syvällinen ymmärtäminen näkyy selkeimmin siinä, että henkilö pystyy esittämään oivaltavia ratkaisuja funktioihin liittyviin ongelmiin.

11. Hyvä funktioiden ymmärtäminen syntyy vain syvällisestä perehtymisestä funktion käsitteeseen - ajattelemalla sitä paljon eri näkökulmista ja käyttämällä sitä eri asiayhteyksissä ja moniin tarkoituksiin.

Kuten Bereiter (2002, 110) toteaa Newtonin teoriasta, voimme melko hyvin kuvailla myös funktion käsitteen ymmärtämistä samaan tapaan kuin kuvailemme jonkun henkilön tai työkalun ymmärtämistä. Henkilön ymmärtämisen kuvailu itse asiassa vaatii enemmän vivahteita kuin teoreettisen käsitteen.

Bereiter (2002, 112-113) jatkaa vielä, että ymmärtäminen itsessään ei ole kykyä toimia älykkäästi, vaan älykkään toiminnan edellytys. Sen lisäksi älykäs toiminta voi toki riippua lukuisista muista asioista, kuten motivaatiosta, taidoista, yleisistä älyllisistä valmiuksista, olosuhteista, ym. Ymmärtäminen on vain yksi aspekti, joka kuvaa suhdetta asiaan tai ihmiseen. Ymmärtäminen on myös tietynlaista varmuutta, tuntemus siitä, että tietää kuinka toimia oikein käsillä olevassa tilanteessa.

Miksi ymmärtäminen on niin tärkeää?

Bereiterin (2002) mukaan ymmärtäminen on kaiken älykkään toiminnan edellytys. Perkins ja Blythe (1994) taas näkevät ymmärtämisen kykynä tehdä aiheeseen liittyviä, ajattelua vaativia toimintoja. Nämä näkökulmat voidaan nähdä sellaisenaan syynä ymmärtämisen tärkeydelle – ilman ymmärtämistä ei ole älykästä toimintaa eikä ihminen pysty tekemään ajattelua vaativia tehtäviä. Mutta miksi näin on?

Selitystä voidaan etsiä Hiebertin ja Carpenterin (1992) ymmärtämisen määritelmästä, jonka mukaan ymmärretty asia on osa sisäistä tietoverkkoamme. Heidän mukaansa opiskelija luo oppiessaan mielikuvia oppimastaan ja rakentaa näistä sisäisistä esitystavoista verkon. Mitä rikkaampia nämä mielen sisäiset verkot ovat, sitä helpompi niihin on yhdistää uusia mielikuvia opituista asioista ja sitä helpompaa uuden oppiminen on. Tällainen ymmärtämisen ja rikkaiden tietoverkkojen rakentaminen ja yhteyksien luominen asioiden välille onkin Hiebertin ja Carpenterin mukaan paljon tärkeämpää kuin oppia taitavaksi proseduurien suorittajaksi.

Nämä Hiebertin ja Carpenterin kuvaamat tietoverkot ovat itse asiassa hyvin samankaltaisia, joiden avulla Sfard (1991) kuvaa strukturaalisia käsitteitä. Ne ovat reifikaation tuloksena syntyneitä kompakteja objekteja, kokonaisuutta kuvaavia esitystapoja, ikään kuin karttoja tai puumaisia verkkoja, joiden avulla asioista saadaan yleiskuva. Ongelmanratkaisussa ne toimivat sisällysluettelona, jonka avulla löydetään tarvittava yksityiskohtaisempi tieto. Mitä parempi verkon rakenne on, sitä tehokkaampaa on tiedon haku. Ilman näitä tietoverkkoja eli strukturaalisia objektikäsitteitä kaikki ajattelu olisi paljon vaikeampaa. Reifikaatio ja verkkomaisten objektikäsitteiden muodostuminen – eli Hiebertin ja Carpenterin (1992) määritelmän mukaan ymmärtäminen - parantavat siis ongelmanratkaisua ja oppimista.

Strukturaalinen ajattelu toimii myös tehokkaana keinona työmuistin rajoitteita vastaan. Tämä johtuu siitä, että hyvin rakentuneessa mielen sisäisessä verkossa yhdestä solmusta lähtevien haarojen määrä ei ylitä lukua 7±2 (Sfard viittaa Milleriin, 1956, jonka mukaan tämä on suurin yksiköiden määrä, joka voidaan samaan aikaan säilyttää työmuistissa). (Sfard 1991)

Samankaltaisesti kirjoittaa Hiebert ja Carpenter (1992), joiden mukaan kukin verkon haara voidaan käsittää yhtenä kokonaisuutena, jolloin muistettavien yksiköiden määrä vähenee. Joskus verkko voi olla jopa niin tiiviisti rakentunut, että sitä voidaan käsitellä yhtenä kokonaisuutena. Silloin yhden yksikön hakeminen tavoittaa yhtä aikaa koko verkon sisältämän tiedon. Juuri näin Haapasalo (2004) kuvailee asiantuntijan tietorakennetta. Se on kytkennöiltään rikas, semanttinen rakenne, jonka seurauksena tiedonkäsittelykapasiteetti kasvaa, kognitiivista kapasiteettia vapautuu ja jotkin toiminnot automatisoituvat rutiineiksi.

Hiebertin ja Carpenterin (1992) mukaan muistaminen on itse asiassa aktiivista tietoverkon rakentamista. Ihminen muokkaa muistettavaa tietoa niin, että sille tulee jokin merkitys ja siis samalla verkkoa rakentaessaan ymmärtää asian. Yhtä aikaa hän huolehtii siitä, että uusi tieto sulautuu osaksi olemassaolevaa tietoverkkoa, sillä vahvoin yhteyksin varustettu tieto muistetaan paremmin. Kokonainen verkko myös säilyy paremmin kuin yksittäinen tiedon palanen ja rikkain yhteyksin varustetusta verkosta tiedon hakeminen on helpompaa, koska reittejä muistettavan tiedon luo on enemmän.

Ymmärtäminen myös parantaa siirtovaikutusta, joka on keskeinen osa matemaattista osaamista. Siirtovaikutus on tärkeä, koska ongelmanratkaisussa tarvitaan aiemmin opittuja ongelmanratkaisustrategioita. Olisi melko mahdotonta opetella täysin uusi strategia aina uuden ongelman ratkaisua varten. Ongelmanratkaisua usein harjoitellaankin samantyyppisiä ongelmia ratkaisemalla ja siten samalla vahvistetaan siirtovaikutuksen syntymistä. (Hiebert & Carpenter 1992)

Tiivistäen voidaan siis todeta, että ymmärtäminen on erittäin tärkeää kaikelle matemaattiselle ajattelulle, oppimiselle, muistamiselle ja ongelmanratkaisulle. Hiebertin ja Carpenterin (1992) mukaan ymmärtämisen kehittämiseksi oppilaita pitäisi nimenomaan rohkaista luomaan yhteyksiä opittujen asioiden välille. Tämä voisi auttaa oppilaita näkemään matematiikan kokonaisuutena, mikä puolestaan tukisi matemaattisen tietämyksen kehittymistä edelleen.

Funktion oppiminen ja opettaminen

Funktion käsitteen oppiminen on osoittautunut hankalaksi ja monen hyvinkin suoriutuvan oppilaan ymmärrys käsitteestä on heikko (Carlson & Oehrtman 2005) Tässä luvussa pohditaan funktion oppimisen ja opettamisen haasteita ja etsitään ratkaisuja niihin. Pohjaksi tälle pohdinnalle käydään ensin läpi, mitä yläkoulun ja lukion opetussuunnitelmissa on kirjoitettu funktion käsitteestä ja ymmärtämisestä. Sitten pohditaan ensin yleisesti funktion oppimisen aiheuttamia haasteita opiskelijoille ja sen jälkeen käydään läpi tärkeimpiä funktioon liittyviä väärinkäsityksiä.

Tämän jälkeen esitellään kirjallisuuden pohjalta koostettu tutkimuskysely, joka tehtiin joukolle yhdeksäsluokkalaisia koulussa ja Facebookin Matematiikka-ryhmän kautta vapaaehtoisille opettajille, opiskelijoille sekä muille asiasta kiinnostuneille. Kyselyn esittelyn jälkeen vedetään yhteen kyselyn tulokset. Viimeisessä kappaleessa kootaan yhteen kirjallisuuden ja tutkimuskyselyn pohjalta saatu tieto siitä, miten funktiokäsite voitaisiin opettaa ymmärtämistä tukevalla tavalla. Tämän synteesin avulla koostetaan konkreettinen lista ohjeita funktion ymmärtämistä tukevaan opetukseen.

Opetussuunnitelmat

Yläkoulun matematiikan opetussuunnitelman (Opetushallitus 2014) tavoitteissa funktion käsite on listattu erillisenä kohtana. Tavoitteiden mukaan oppilasta ohjataan ymmärtämään muuttujan käsite ja tutustutetaan funktion käsitteeseen. Oppilasta ohjataan myös harjoittelemaan funktion kuvaajan tulkitsemista ja tuottamista. Arvosanan kahdeksan osaamista osoittaa oppilas, joka ymmärtää muuttujan ja funktion käsitteen sekä osaa piirtää ensimmäisen ja toisen asteen funktion kuvaajan, ja osaa tulkita kuvaajia monipuolisesti. Sisältöalueissa on lisäksi erikseen mainittu kulmakertoimen ja vakiotermin käsitteet, funktion nollakohdat ja funktion kasvamisen ja vähenemisen tutkiminen. Algebran sisällöissä mainitaan muuttujan käsitteeseen perehtyminen, lausekkeen muodostaminen ja sen arvon laskeminen.

Lukion opetussuunnitelmissa funktion opiskelu on jakautunut moneen eri kurssiin. Sekä aiemmassa vuoden 2015 opetussuunnitelmassa (Opetushallitus 2015) että uudessa vuonna 2021 käyttöön otetussa vuoden 2019 opetussuunnitelmassa (Opetushallitus 2019) ensimmäisen, kaikille yhteisen matematiikan kurssin tavoitteena on vahvistaa opiskelijan ymmärrystä funktion käsitteestä ja oppia käyttämään teknisiä apuvälineitä ja ohjelmistoja funktion piirtämisessä ja havainnoinnissa.

Aiemmassa lukion opetussuunnitelmassa pitkän matematiikan toisella kurssilla keskityttiin polynomifunktioihin, trigonometriset sekä juuri- ja logaritmifunktiot opiskeltiin kursseilla MAA7 ja MAA8. Uudessa opetussuunnitelmassa toisella kurssilla edetään polynomifunktioiden jälkeen juurifunktioihin asti. Sini- ja kosinifunktioihin sekä eksponentti- ja logaritmifunktioihin perehdytään kurssilla MAA5. Uudessa opetussuunnitelmassa painotetaan ilmiöiden matemaattista mallintamista funktioiden avulla. Sekä vanhan että nykyisen opetussuunnitelman mukaisilla kursseilla perehdytään myös funktioiden tutkimisessa tarvittaviin teknisiin apuvälineisiin ja ohjelmistoihin.

Molemmissa opetussuunnitelmissa pitkän matematiikan kurssilla MAA6 tutustutaan derivaattaan. Vanhassa opetussuunnitelmassa asetettiin tavoitteeksi, että oppilas “omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta” ja osaa määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat. Uusi opetussuunnitelma korostaa tässäkin mallintamista: tavoitteena on tutustua ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla ja ymmärtää derivaatan tulkinta funktion muutosnopeutena. Vanhassa opetussuunnitelmassa tavoitteena oli suppeammin polynomifunktion kulun tutkiminen derivaatan avulla ja ääriarvojen määrittäminen. Integraalin käsitteeseen tutustuttiin kurssilla MAA9 ja differentiaali- ja integraalilaskennan taitoja syvennettiin valinnaisella kurssilla MAA13. Siellä tutkittiin funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta sekä käänteisfunktioita ja tutustuttiin kahden muuttujan funktioon sekä osittaisderivaattaan. Kaikilla kursseilla käytetään teknisiä apuvälineitä ja ohjelmistoja analyysin apuna.

Lyhyen matematiikan vanhassa opetussuunnitelmassa polynomifunktioon tutustuttiin lyhyesti muun sisällön ohella kurssissa MAB2. Nykyisessä vuoden 2019 opetussuunnitelmassa samaan kurssiin on sovitettu vielä lukujonot ja niiden summat, joten polynomifunktion läpikäynti jäänee hyvin pintapuoliseksi. Molemmissa opetussuunnitelmissa mainitaan myös ohjelmistojen käyttö funktion tutkimisessa. Polynomifunktioiden osaamista syvennetään matemaattisen mallintamisen kurssilla MAB4, jossa tutkitaan polynomi- ja eksponenttifunktioita lähinnä ohjelmistojen avulla. Funktion tutkimista syvennetään valinnaisella matemaattisen analyysin kurssilla MAB8, jossa tutkitaan funktion muutosnopeutta lähinnä graafisin ja numeerisin menetelmin, mutta käydään läpi myös derivaatan käsite ja tutkitaan funktion kulkua sen avulla.

Ymmärtäminen ja matemaattinen ajattelu opetussuunnitelmissa

Ymmärtäminen ja matemaattinen ajattelu on opetussuunnitelmissa paljon esillä. Perusopetuksen luokkien 7-9 suunnitelmassa (Opetushallitus 2014) heti oppiaineen tehtävää kuvattaessa kirjoitetaan, että opetuksen tavoitteena on luoda pohja matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle. Opetuksen tehtävänä on myös kehittää oppilaiden “loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua”. Lisäksi tavoitteena on kehittää oppilaiden kykyä tiedonkäsittelyyn ja ongelmanratkaisuun.

Työskentelyn taitojen tavoitteissa kirjoitetaan, että oppilasta ohjataan ymmärtämään oppimiensa asioiden välisiä yhteyksiä. Lisäksi oppilasta tuetaan loogista ja luovaa ajattelua vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa ja siinä tarvittavien taitojen kehittämisessä. Myös kriittistä ajattelua korostetaan sekä omien ratkaisujen että uuden tiedon analysoinnissa.

Käsitteellisissä tavoitteissa ymmärtäminen mainitaan niin lukukäsitteen, prosenttilaskennan, geometrian kuin muuttujan ja funktionkin yhteydessä. Lisäksi puhutaan algoritmisen ajattelun kehittämisestä sekä päättelytaidoista ja matematiikan soveltamisesta ongelmanratkaisussa.

Lukion opetussuunnitelmien mukaan (Opetushallitus 2015, 2019) matematiikan tehtävä oppiaineena on antaa opiskelijalle valmiudet ymmärtää, soveltaa, tuottaa ja arvioida matemaattisesti esitettyä tietoa. Lisäksi opetuksen pitäisi kehittää luovan ajattelun sekä ilmiöiden mallintamisen, ennustamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Laaja-alaisen osaamisen tavoitteissa puhutaan matemaattisten käsitteiden merkityksen ymmärtämisestä ja niiden yhteyksistä laajempiin kokonaisuuksiin. Opiskelijaa rohkaistaan käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan esitysmuodosta toiseen siirtymisessä, ongelman ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa sekä ilmiöiden mallintamisessa. Kurssikohtaisissa tavoitteissa sekä ymmärtäminen että matemaattinen ajattelu mainitaan moneen kertaan.

Funktion oppimisen yleisiä haasteita ja edellytyksiä

Funktiokäsite on yksi modernin matematiikan peruskäsitteistä, joka tulee vastaan lähes kaikilla matematiikan ja luonnontieteen alueilla. Samalla se on osoittautunut yhdeksi vaikeimmista käsitteistä hallita koko koulumatematiikassa. On esitetty, että funktiokäsitteen - tai minkä tahansa muun matemaattisen käsitteen - hallinta voidaan saavuttaa helposti laatimalla tarpeeksi hyvät opetustuokiot ja tehtävät, minkä jälkeen oppilaat ymmärtävät, sisäistävät ja hallitsevat käsitteen. Asia ei ole kuitenkaan näin helppo. Paljon tutkimusta on tehty sen selvittämiseksi, miten matemaattiset käsitteet muodostetaan, mutta vieläkään ei tiedetä tarkalleen, miten ihmiset oppivat funktioita tai muita abstrakteja käsitteitä. Oppimista kyllä tapahtuu, mutta yksityiskohtainen mekanismi on vielä tuntematon. (Eisenberg 1991)

Ratkaisua formaalin matematiikan käsitteiden omaksumiseen on etsitty varhaisesta matematiikan oppimisesta. On ajateltu, että alkeismatematiikassa opittujen, todellisiin ja intuitiivisiin havaintoihin perustuvien tietojen päälle voidaan rakentaa abstrakteja käsitteitä. Esimerkiksi kokonais- ja murtolukujen käsitteiden on todettu olevan avuksi abstraktin, formaalin aritmetiikan oppimisessa. (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990, 2) Sierpinskan (1992) mukaan myös yksi funktion käsitteen ymmärtämisen edellytyksistä on se, että lukukäsite on riittävän hyvin muodostunut. Thompson (1994, 6-7) selittää tätä tarkemmin: algebran alkeita opiskellessaan oppilaat usein ajattelevat muuttujan lauseketta, esimerkiksi $x(5 - 3x)$, käskynä laskea. Samoin ajattelevat alakoulun oppilaat, jotka harvoin pitävät lauseketta $2 \cdot (5 - 3 \cdot 2)$ lukuna, vaan yleensä näkevät sen pelkästään laskutoimituksena. Tällöin myös funktiokäsite typistyy lausekkeeksi, johon syötetään lukuja, mutta ei ymmärretä lausekkeen edustavan laskutoimituksen tulosta. Näin käsitys funktiosta kahden luvun välisenä suhteena jää syntymättä.

Matematiikan oppiminen olisikin hyvin vaikeaa, jos oppilaat eivät voisi perustaa päättelyään aikaisemmin opittuun (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990, 2). He tekevät sitä kuitenkin myös epätarkoituksenmukaisesti, mikä aiheuttaa haasteita opetukselle. Tutkimuksissa on esimerkiksi todettu, että oppilailla ei ole intuitiivisesti lainkaan oikeaa käsitystä niinkin perustavanlaatuisista käsitteistä kuin reaaliluvuista ja lukusuorasta (Tall 1996, 19), jotka Sierpinskan (1992) mukaan ovat ehtoja myös funktion ymmärtämiselle. Funktion käsite taas on sen verran monimutkainen, että siihen liittyviä intuitioita etsiessään voi löytää sarjan näennäisesti toisiinsa liittymättömiä mielikuvia, joiden yhteen liittäminen kypsäksi funktion käsitteeksi on oppilaan ja opettajan yhdessä kohtaama haaste. (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990)

Riittävä algebran osaaminen ja algebrallisten työkalujen hallinta on selkeästi tarpeellinen edellytys funktion oppimiselle. Algebrallisen tietämyksen puute tekisi vaikeaksi ymmärtää edes yksinkertaista funktion lauseketta y = 2x - 1, saati sitten monimutkaisempia ilmaisuja kuten y = f(x), y = f(x + t) tai y = mx + n. Monille algebrallisen formalismin ymmärtäminen tuottaa kuitenkin hankaluuksia vielä siinä iässä, kun funktioita ensimmäistä kertaa opiskellaan. Algebran hallinnan puute taas tekee funktioiden ymmärtämisestä hyvin hankalaa tai jopa mahdotonta. Toisaalta myös liian sujuva algebrallinen osaaminen yhdistettynä uskoon algebrallisten työkalujen voimasta minkä tahansa ongelman ratkaisussa voi toimia esteenä funktion peruskäsitteen ymmärtämiselle. (Sierpinska 1992, 44-45)

Muiden tärkeiden perustaitojen oppimisen ohella kuvaajien tulkinnan ja piirtämisen oppiminen voidaan nähdä yhtenä varhaisen matematiikan kriittisistä hetkistä, koska se tarjoaa mahdollisuuden suureen oppimiskokemukseen ja helpottaa myös funktiokäsitteen omaksumista. On esitetty toiveita funktion ja kuvaajien tuomista mukaan opetukseen jo varhaisina vuosina, mutta alaluokkien opetussuunnitelmissa ne kuitenkin pitkälti ohitetaan ja kirjatkin käyttävät aiheeseen vain muutaman sivun silloin tällöin. (Leinhardt ym. 1990; Rinne ym. 2019; Opetushallitus 2014) 1960-luvulla uusi matematiikka -liike toi funktion käsitteen jo alakouluun, mutta keinot osoittautuivat vääriksi. Formaaliin joukko-oppiin ja pedagogisesti heikkoon ja epäintuitiiviseen järjestetyn parin käsitteeseen perustuvan lähestymistavan nähtiin pikemminkin rajoittavan oppilasta kuin tarjoavan valmiuksia myöhempään funktioiden oppimiseen. (Eisenberg 1991)

Funktioon liittyvät käsitteet, kontekstit ja esitystavat

Funktion käsitteen haastavuuteen on useita syitä. Ensinnäkin funktiokäsite koostuu useista tasoista: siihen liittyy läheisesti useita alakäsitteitä, jotka jo yksinään ovat monimutkaisia. Näitä ovat ainakin muuttuja, funktion arvo, raja-arvo ja ääriarvot, määrittelyjoukko ja arvojoukko, vakiotermi, kulmakerroin ja derivaatta sekä kuvaajan piirtäminen ja tulkinta eri muodoissaan. (Dreyfus & Eisenberg 1982; Leinhardt ym. 1990)

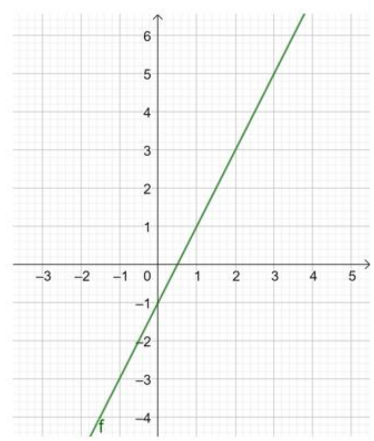
Pelkästään muuttujan käsite ymmärretään oppilaiden keskuudessa huonosti, vaikka siihen perustuu kaikki abstrakti matematiikka (Eisenberg 1991) ja muuttujan käsitteen ymmärtäminen on edellytys täydelle funktion käsitteen ymmärtämiselle (Leinhardt ym. 1990, Sierpinska 1992). Funktion ymmärtämisen kannalta on tärkeää erottaa yhtälöiden ratkaisussa tarvittava tuntemattoman käsite ja funktion oppimisessa tarvittavat muuttujan ja vakion käsitteet selkeästi toisistaan (Sierpinska 1992). Vielä monet yläkoululaiset sekoittavat tuntemattoman ja muuttujan käsitteen keskenään tai eivät esimerkiksi ymmärrä tietyn kirjaimen viittaavan aina samaan arvoon (Fujii 2003). Tiedostamattomasti myös helposti ajatellaan kaikki yhtälöiden kautta ja etsitään funktion lausekkeistakin ratkaistavia tuntemattomia (Sierpinska 1992).Toisen symbolin sijoittaminen muuttujan paikalle voi myös sekoittaa opiskelijan ja saa unohtamaan tärkeimmän eli kahden muuttujan välisen funktionaalisen riippuvuuden. Toisaalta ymmärrys muuttujasta voi syventyä funktioiden opiskelun aikana. (Leinhardt ym. 1990)

Funktion oppimisen haasteista puhuttaessa ei myöskään ole olemassa yhtä yleistä lähtökohtaa keskustelun pohjaksi, koska funktiot ovat matematiikassa kaikkialla. Eri alakäsitteiden lisäksi funktio vetää yhteen kaikki matematiikan osa-alueet - niin peruslaskutoimituksia, algebran epäyhtälöitä, trigonometrian ja geometrian ongelmia kuin differentiaali- ja integraalilaskennan sovelluksiakin voidaan ajatella funktioiden avulla. Funktio voi siis esiintyä lukemattomissa eri konteksteissa. Tällöin myös funktioon liittyvissä tehtävissä esiintyvät virheet ovat kontekstiriippuvaisia ja niiden korjaamiseen liittyvät selitykset ovat erilaisia asiayhteydestä ja tehtävän yksityiskohdista riippuen. Nämä selitykset taas eivät ole yleensä yleistettävissä muihin funktioon liittyviin tehtäviin. Yleistä, kaikkiin tilanteisiin sopivaa oppimistrategiaa ei siis ole, vaan strategiat ovat aina joko liian yksityiskohtaisia tai liian yleisellä tasolla. (Eisenberg 1991)

Suuren haasteen funktion oppimiselle asettaa se, että samaa funktiota voidaan kuvata useilla eri esitystavoilla, kuten algebrallisesti, järjestettyjen parien avulla, taulukkona, funktiokoneena, kuvaajana tai sanallisina kuvauksina (Leinhardt ym. 1990; Dreyfus & Eisenberg 1982). Tutkimusten mukaan sekä oppilaiden että joidenkin opettajien käsitys eri esitystavoista jää hyvin rajalliseksi ja jotkut heistä suosivat lähes yksinomaan algebrallista esitystapaa (mm. Dubinsky & Wilson 2013; Gerson 2001). Meistä tuntuu luonnolliselta nähdä funktiot graafisesti, mutta opiskelijat eivät yksinkertaisesti käsitä asioita niin, vaan he näyttävät prosessoivan tietoa ja ratkaisevan tehtäviä analyyttisesti visuaalisen tarkastelun sijaan, ja myös kuvaajien tulkinta on heille hankalaa (Eisenberg 1991). Thompsonin (1994, 23) mukaan voikin olla aiheellista miettiä, että vaikka taulukot, kuvaajat ja lausekkeet ovat funktion eri esitystapoja meille, onko mitään todistetta niiden olevan oppilaan mielestä esitystapoja yhtään millekään. Hänen mukaansa itse funktion käsitettä ei esitetä eri esitystavoilla, vaan sen sijaan pitäisi keskittyä tiettyihin tilanteisiin, jotka on esitettävissä erilaisia esitystapoja käyttäen.

$$f(x) = 2x - 1$$

x	y	(x, y)
-2	-5	(-2, -5)
-1	-3	(-1, -3)
0	-1	(0, -1)
1	1	(1, 1)
2	3	(2, 3)
3	5	(3, 5)
4	7	(4, 7)
5	9	(5, 9)
6	11	(6, 11)



Kuva 3: *Saman funktion eri esitystapoja*

Monille opiskelijoille esitystapojen liittäminen toisiinsa ja siirtyminen eri esitystapojen välillä aiheuttaa paljon haasteita (esim. Tall 1996; Gerson 2001; Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis 2007) ja ongelmia näissä asioissa on havaittu myös matematiikan opettajiksi opiskelevilla (Moon, Brenner, Jacob & Okamoto 2013). Joskus tietystä esitystavasta toiseen siirtyminen sujuu, mutta edestakaisin siirtyminen on hankalaa (Tall 1996, 8). Itse asiassa opiskelijat usein käsittelevät funktion eri esitystapoja itsenäisinä ja erillisinä toisistaan. Tätä ilmiötä Gerson (2001) kutsuu nimellä lokerointi (compartmentalization). Tämä väistämättä rajoittaa opiskelijan funktiokäsitteen sisältämää tietoa ja joustavuutta, koska ongelmanratkaisussa vain yksi esitystapa on käytössä samanaikaisesti.

Tutkimuksissa on todettu, että siirtyminen lausekkeesta kuvaajaan tapahtuu erilaisen psykologisen prosessin kautta kuin kuvaajasta lausekkeeseen siirtyminen. On myös todisteita siitä, että siirtyminen kuvaajasta lausekkeeseen on vaikeampaa (esim. Markovits ym. 1986), koska se vaatii kuvaajan hahmottamista. Yleisimmin siirtymät tapahtuvat algebrallisesta esitystavasta tai taulukosta järjestettyyn pariin ja kuvaajaan. Toisaalta luonnontieteissä yleensä edetään havainnoista datataulukkoon, siitä järjestettyihin pareihin, siitä edelleen kuvaajan akselien nimeämisen ja skaalauksen kautta kuvaajaan ja lopulta ehkä myös funktion lausekkeeseen. Usein käykin niin, että oppilas suoriutuu funktioon ja niiden kuvaajiin liittyvistä tehtävistä matematiikassa, mutta tietojen soveltaminen luonnontieteisiin on vaikeaa. (Leinhardt ym. 1990; 3, 35)

On hyvä huomata, että algebrallinen ja graafinen esitystapa ovat keskenään hyvin erilaisia symbolijärjestelmiä, jotka kuitenkin yhdessä muodostavat ja määrittelevät matemaattisen funktion. Kumpaakaan niistä ei voi kohdella erillisinä käsitteinä, vaan ne ovat yhteydessä toisiinsa ja niitä käytetään kuvaamaan toisiaan. Tämä vaatii opiskelijalta yhtenäisiä merkintätapoja ja symbolien vastaavuutta. Vaikka sekä algebrallinen että graafinen esitystapa ovat abstrakteja, ne voivat perustua myös kokeellisuuteen tai jopa intuitioon. Nämä kaksi symbolijärjestelmää voivat yhdessä sekä auttaa että haitata funktiokäsitteen ymmärryksen kehittymistä. Toisaalta ne voivat auttaa siirtymissä konkreettisesta tiedosta abstraktiin ja eri abstraktioiden välillä. (Leinhardt ym. 1990)

Funktioihin liittyvät merkintätavat aiheuttavat tutkimusten mukaan opiskelijoille paljon hankaluuksia, hän voi esimerkiksi vahingossa kirjoittaa y(F) = x. Yleisesti monille opiskelijoille funktiokäsitteeseen liittyvä terminologia on vierasta. (Vinner & Dreyfus 1989) Toisaalta merkintätapa f(x) on itsessään harhaanjohtava ja ymmärretään usein väärin, se voidaan esimerkiksi ymmärtää funktion f ja muuttujan x kertolaskuna (Eisenberg 1991; Gerson 2001). Näissä ongelmissa ei itse asiassa ole kyse ollenkaan itse matematiikasta, vaan pelkistä merkintätavoista. Nämä merkintätapojen aiheuttamat hankaluudet toimivat kuitenkin usein esteenä funktion käsitteen ymmärtämiselle. (Eisenberg 1991)

Funktiokäsitteen abstraktius ja erilaiset ajatteluprosessit

Funktio on käsitteenä hyvin abstrakti ja juuri tämä abstraktius ja yleistettävyys tekee funktiokäsitteestä monimutkaisen (Dreyfus & Eisenberg 1982). Lähes missä tahansa matematiikan oppikirjassa opiskelija kohtaa symbolien ja kaavojen viidakon, joka aivan liian usein on hänelle vieras, ja vaatii häneltä hirvittävän työmäärän ymmärtää, mitä yleensä on kirjoitettu. Tällainen matemaattisten abstraktien ilmausten merkitysten kadottaminen on yleinen ongelma opiskelijoiden keskuudessa ja johtaa usein opintomenestyksen laskuun. Liian usein opettaja, joka on luonnollisestikin sisäistänyt abstraktin aiheen ja hallitsee sen hyvin, olettaa myös opiskelijoiden pystyvän tähän ennätysajassa. Tämä johtaa opiskelijoiden lannistumiseen jo ennen kuin opiskelu on kunnolla edes alkanut, ja juuri se on usein syynä opiskelijan epäonnistumiseen. Oppiminen siis estyy affektiivisista ja emotionaalisista syistä, vaikka kognitiivisesti opiskelijalla ei olisi esteitä asian oppimiseen. (Eisenberg 1991)

Mutta onko olemassa muita syitä sille, että opiskelijat pitävät matematiikan opiskelua liian abstraktina? Millaisia kognitiivisia selityksiä abstraktien käsitteiden omaksumisen hankaluudelle voidaan esittää? Tallin (1991) mukaan abstraktin käsitteen muodostaminen on työlästä, koska se ei ole vain aikaisemmin opitun prosessin laajentamista uuteen asiaan, vaan vaatii massiivisen päänsisäisen uudelleenorganisoinnin. Samankaltaisesti matemaattisten käsitteiden muodostumista ovat kuvanneet muutkin tutkijat: proseptin muodostuminen ja reifikaatio ovat monivaiheisen ajatteluprosessin tuloksia (Haapasalo 2004, Sfard 1991). Tämä ajatteluprosessi voi myös epäonnistua, tyypillisesti kiireen seurauksena. Se voi muuttua pelkäksi uusien ideoiden ulkoa opetteluksi ja tiedon lisäämiseksi vanhan päälle ilman minkäänlaista yritystä yhdistää sitä aikaisempaan tietoon. Tämä saattaa ehkä auttaa opiskelijaa suoriutumaan uusista tehtävistä, mutta ei auta opiskelijaa pitkällä tähtäimellä, koska se vain lisää irrallisia tiedonsirpaleita opiskelijan päähän parantamatta oppilaan käsitystä laajemmasta abstraktista merkityksestä. (Eisenberg 1991)

Tämäntyyppiseen opiskeluun perustuu valitettavan usein perinteinen matematiikan opetus. Opettaja esittää taululla esimerkkejä ja ratkaisee ne tarjoten opiskelijoille valmiin ratkaisumallin, jonka he voivat kopioida suoraan tulevien harjoitustehtävien ratkaisua varten, ilman opiskelijoiden omien ajatusten herättämistä. Tällainen lähestymistapa saa osan oppilaista vihaamaan matematiikkaa, koska he eivät enää näe mitään muuta syytä matematiikan opiskelulle kuin matematiikan kokeista läpipääsyn. Matematiikasta tulee tylsä ja tarkoitukseton oppiaine. Epäoleellisilta tuntuvien matemaattisten käsitteiden ulkoa opettelu johtaa myös usein väärinkäsityksiin. (Makonye 2014)

Voidaan myös väittää, että monet oppilaiden koulumatematiikan kanssa kokemista vaikeuksista liittyy paineeseen opiskella abstrakteja käsitteitä välittämättä niiden luonnollisista, havainnoista syntyneistä lähtökohdista. Taulukoiden muodostaminen ja analysointi sekä numeeristen arvojen laskenta kehittävät kvantitatiivista tuntumaa ja taitoa tehdä approksimaatioita, ja kehittävät sellaista matemaattista kompetenssia, johon voidaan päästä vain konkreettisen, mielellään tosielämästä kerätyn datan avulla. (Ponte 1992)

Yhden suurimmista esteistä abstraktien käsitteiden oppimiselle asettaa kuitenkin se tosiseikka, että monet - ehkäpä jopa suurin osa - täysi-iän saavuttaneista nuorista ei pysty abstraktin tason formaaleihin operaatioihin, minkä vaiheen Piaget väitti nuoren saavuttavan varhaisina teinivuosinaan. Uusien opetusmenetelmien suunnittelua vaikeuttaa erityisesti se, että Piagetin oman arvion mukaan siirtymistä vaiheesta toiseen ei voida juuri nopeuttaa opetuksen keinoin. (Tall 1991, 8; viitattu Piagetiin yleisellä tasolla ilman lähdeviitettä)

Erityisesti opettajan on hyvä tiedostaa yleisemminkin, että kullakin oppilaalla, opettajalla ja matemaatikolla on oma henkilökohtainen näkemyksensä matematiikasta, joka eroaa monin tavoin muiden käsityksistä. Voi tulla yllätyksenä, kuinka erilaiset ajatteluprosessit eri ihmisillä voi olla. Meillä kaikilla on vähintään hienoisesti erilainen tapa nähdä matemaattinen käsite omien aikaisempien kokemustemme pohjalta. Opiskelija näkee funktiokäsitteen hyvin eri tavalla kuin hänen opettajansa, ja sovelletun matematiikan asiantuntija eri tavalla kuin teoreettisen matematiikan professori. Mikä tahansa matemaattinen ajattelu, siis myös funktion käsite, on hyvä nähdä laajemmassa kontekstissa, johon vaikuttavat myös mentaaliset ja kulttuuriset tekijät. Ei ole yhtä ainoaa oikeaa tapaa ajatella matematiikkaa, vaan hyvin eri tavoin kehittyneitä ajattelutapoja, joihin vaikuttavat monet eri näkökulmat. (Tall 1991)

Opiskelijan kannalta onkin tärkeää,että matemaattinen tieto kasvaa rinta rinnan opiskelijan ajattelun kehityksen kanssa, opetus siis ottaa huomioon opiskelijan tietorakenteen ja ajatteluprosessin kehityksen (Tall 1991). Vinner (1983) havaitsi tutkimuksessaan, että jopa opiskelijat, jotka osasivat antaa funktiolle oikean formaalin joukko-opillisen määritelmän, vastasivat funktioon liittyviin kysymyksiin kuitenkin omien intuitiivisten mielikuviensa mukaan. Heidän intuitiivinen käsityksensä funktiosta erosi siis formaalin määritelmän mukaisesta.

Voidaan nähdä ongelmallisena, että formaali funktion käsite eroaa niin paljon vanhasta käytännönläheisestä käsitteestä, että opiskelijan intuitioita ei enää voida käyttää käsitteen rakentamisessa apuna. Onkin esitetty, että koulumatematiikan pitäisi perustua lähinnä vanhemman määritelmän mukaisiin funktioihin, joilla on olemassa selkeä analyyttinen lauseke tai yksinkertainen sääntö (mm. Ponte 1992).

Yleisiä väärinkäsityksiä

Funktio on aiheena haastava. Tämä johtuu ensinnäkin siitä, että siihen liittyy muita hankalia matemaattisia käsitteitä, kuten muuttuja ja kuvaaja, ja se vetää yhteen monia alikäsitteitä ja matematiikan haaroja. Lisäksi funktio voidaan esittää useilla eri esitystavoilla. (Dreyfus & Eisenberg, 1982) Opetuksen ja oppimisen tehtävä on vetää yhteen nämä funktioon liittyvät asiat ja koostaa niistä yhtenäinen funktion käsite. (Leinhardt ym. 1990, s. 5) Tämä ei ole aina helppoa, vaan oppilaalle pääsee syntymään väärinkäsityksiä.

Mitä väärinkäsitykset ovat ja miten ne syntyvät?

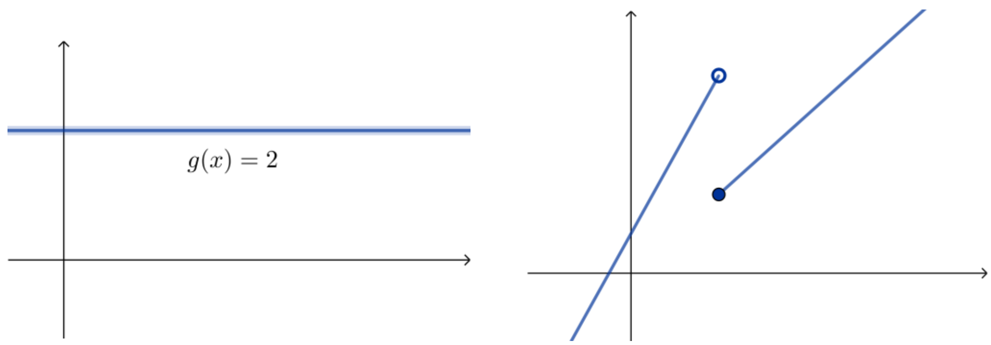
Väärinkäsitykset ovat selkeitä, toistuvia, virheellisiä yksityiskohtia tai kokonaisuuksia oppilaan tiedoissa. Ne eivät siis ole yksittäisiä, satunnaisia virheitä, vaan melko hyvin muotoiltuja ja selkeitä, mutta vääriä tai epätarkkoja ajatusrakenteita. (Leinhardt ym. 1990, s. 5, 30)

Väärinkäsitykset voivat kehittyä sinänsä oikean käsityksen virheellisestä yleistämisestä, esimerkiksi kaikkia U:n muotoisia kuvaajia pidetään paraabeleina (Carlson&Oehrtman 2005, s. 3). Jotkin väärinkäsitykset ovat jäljitettävissä intuitioihin, esimerkiksi oppilaiden taipumus tulkita kuvaajia kuvina liittyy kuvaajan tulkinnassa herääviin mielikuviin. Intuitiot ovat tyypillisesti peräisin arkielämän kokemuksista ja jokapäiväisistä havainnoista, jotka ovat olemassa jo ennen formaalia kouluopetusta. (Leinhardt ym. 1990, s. 5, 30)

Funktion käsitteen monimutkaisuuden takia matemaattisesti kelvollisen funktiokäsitteen löytäminen monien, usein toisiinsa liittymättömien intuitiivisten käsitysten keskeltä voi olla haastava tehtävä. Toisaalta intuitiot nähdään nykyään matematiikan opetuksessa positiivisesti mahdollisuutena, joiden ympärille voi rakentaa opetusta ja oppimista. (Leinhardt ym. 1990, s. 5)

On hyvä muistaa, että funktioiden oppimisen yhteydessä oppilaissa heräävät mielikuvat ja käsitykset ovat niiden ennakkokäsitysten värittämiä, joita heillä on matemaattisista lausekkeista, muuttujista, aritmeettisista operaatioista ja suureista (Thompson 1994, 1) - eli niistä asioista, joita he ovat opiskelleet koulumatematiikassa aiemmin. Kuten matemaattiset käsitteet yleensäkin, funktion käsite kehittyy vähitellen pitkänkin ajan kuluessa. Näennäisesti triviaalit väärinkäsitykset aiemmassa matematiikan oppimisessa voivat vaikuttaa suuresti siihen, millaisen muodon funktion käsite lopulta saa oppilaan mielessä. (Thompson 1994, 2)

Funktioihin ja kuvaajiin liittyvät väärinkäsitykset ovatkin usein lähtöisin aikaisemmasta formaalista opetuksesta. Tyypillinen esimerkki tällaisesta väärinkäsityksestä on oppilaiden taipumus tunnistaa vain yksi yhteen -vastaavuudet funktioiksi ja jättää monesta yhteen -vastaavuudet eli vakiofunktiot tunnistamatta.



Kuva 4: *Vakiofunktiota tai paloittain määriteltyä ja epäjatkuvaa funktiota ei usein tunnisteta funktioiksi*

Funktion käsite voi olla jäänyt rajalliseksi siksi, että opetuksessa ei ole käyty läpi riittävän monipuolisesti erilaisia esimerkkejä. Toisaalta funktioiden tulkinta voi olla epätarkkaa symbolisten merkintöjen aiheuttamien sekaannusten takia. (Leinhardt ym. 1990, s. 5, 30)

Aiemmin tässä työssä on funktion käsitteen ymmärtämistä tutkivassa kyselyssä havaittu, että paloittain määritelty tai epäjatkuva funktio tunnistetaan huonosti. Toisaalta virheellisesti tunnistetaan funktioksi pystysuora suora eli tilanne, jossa yhtä muuttujan arvoa vastaavat kaikki y:n arvot. Opiskelijat voivat myös virheellisesti ajatella, että funktio täytyy aina olla määritelty algebrallisella lausekkeella. (mm. Vinner&Dreyfus 1989)

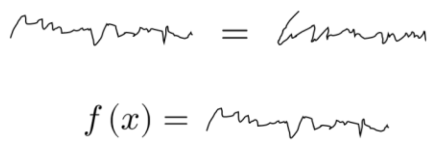
Edellä tunnistettiin funktiokäsitteen oppimisen kannalta tärkeiksi asioiksi hyvin muodostunut lukukäsite, algebran riittävä osaaminen ja kuvaajien tulkinnan ja piirtämisen osaaminen. Funktiokäsitteen haastavuuden syiksi lueteltiin mm. käsitteen sisältämät eri tasot ja alakäsitteet (kuten itsessään vaikea muuttujan käsite), funktion eri esitys- ja merkintätavat sekä käsitteen abstraktius. (mm. Leinhardt ym. 1990)

Seuraavassa keskitytään yllä jo tunnistettujen funktion käsitteeseen liittyvien hankaluuksien lisäksi tutkimuskirjallisuudessa esiintyviin, spesifeihin väärinkäsityksiin.

Mielikuvia funktiosta sekä funktion lauseke ja yhtälö

Ennen funktioiden opiskelua oppilaat ovat koulumatematiikassa opetelleet yhtälöiden ratkaisemista ja lausekkeiden sieventämistä tiettyjen kaavojen ja sääntöjen mukaan. Tämä vahva proseduraalinen painotus ei ole välttämättä paras rakennusalusta funktiokäsitteelle - siis sellaiselle vahvalle funktion ymmärtämiselle, jonka avulla merkitykselliset tulkinnat ja funktion soveltaminen eri tilanteisiin tarkoituksenmukaisia esitystapoja käyttäen on mahdollista. Jopa funktion ymmärtäminen yksinkertaista funktiokoneideaa käyttäen - eli funktion käsittäminen koneena, joka ottaa vastaan syötteen ja tietyn säännön mukaan antaa tulosteen - voi olla suurelle osalle opiskelijoista haastavaa. Merkintä f(x + a) käsitetään usein niin, että lausekkeen perään pitää lisätä a sen sijaan, että ymmärrettäisiin sijoittaa lauseke x + a funktion lausekkeeseen. Selvästikään opiskelijat eivät ymmärrä, että x + a on funktion syöte, vaan tilanteesta yritetään selvitä jollakin ulkoa opetellulla säännöllä. (Carson&Oehrtman 2005, 2)

Vieläkin haastavampaa opettajan näkökulmasta on, että Thompsonin mukaan (1994, 5-6) oppilaat usein mieltävät funktion kahtena lausekkeena, jotka on erotettu yhtäsuuruusmerkillä. Merkintä f(x) taas esiintyy oppilaiden mielikuvissa vain symbolina käytettävälle lausekkeelle. Heille ei ole luontevaa ajatella, että funktiota voisi merkitä myös jollakin muulla symbolilla.



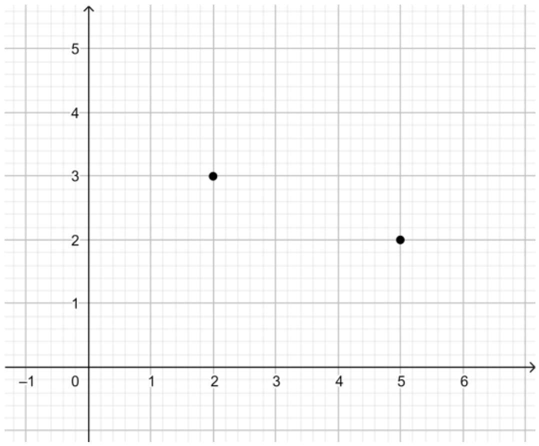
Kuva 5: *Oppilaiden mielikuvia funktiosta (Thompsonia 1994 mukaillen)*

Edellisen tiedon valossa ei ole yllättävää, että oppilailla on vaikeuksia erottaa toisistaan algebrallisesti määritelty funktio ja yhtälö. Se on itse asiassa hyvin luonnollista tietäen yhtäsuuruusmerkin monet käyttötarkoitukset ja se, että funktion opetuksessa lineaarisen funktion kuvaajaan viitattaessa puhutaan usein suoran yhtälöstä. (Carlson&Oehrtman 2005, 2) Suomalaiset oppikirjat eivät tee poikkeusta tästä perinteestä, sillä sekä Laskutaito- että Muuttuja-sarjoissa puhutaan suoran yhtälöstä, kun viitataan lineaarisen funktion yleiseen esitystapaan y = kx + b. Muuttuja-kirjassa tosin huolella selitetään, että suoran yhtälö on suoran koordinaatit määrittävä laskusääntö, ja se kertoo, miten suora kulkee koordinaatistossa. Myös merkintöjen f(x) ja y välinen yhteys selitetään huolella toisin kuin Laskutaidossa, joka jättää tämän opettajan tehtäväksi. (Lindroos-Heinänen ym. 2011, Kettunen ym. 2020)

Oppilaalle tämä yhtälö-sanan monitulkintainen käyttö näyttää aiheuttavan vaikeuksia erottaa toisistaan tilanteet, joissa yhtäsuuruusmerkkiä käytetään määrittelemään kahden muuttuvan suureen välinen suhde ja tilanteet, joissa yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa kahden lausekkeen yhtäsuuruutta. Oppilaat hyötyvät siitä, että opettaja näkee erikseen vaivaa sen eteen, että oppilaat oppivat erottamaan funktiot ja yhtälöt toisistaan. Yleisemminkin olisi hyötyä siitä, että koulumatematiikassa käytetyt algebralliset proseduurit kytkettäisiin paremmin käsitteelliseen oppimiseen. Näin oppilaat oppisivat paremmin ja ymmärtäen soveltamaan algebrallisia tekniikoita uusien ongelmien ja tehtävien ratkaisemiseen, ja ymmärtämisen parantuessa myös ylläkuvatut triviaalit väärinkäsitykset vähenisivät. (Carlson&Oehrtman 2005)

Taipumus lineaarisuuteen

Oppilailla on tutkimusten mukaan monissa erilaisissa tilanteissa taipumus painottua lineaarisuuteen. Markovitsin ym. tutkimuksessa (1986) oppilaita pyydettiin piirtämään kuvaaja kahden pisteen kautta ja kysyttiin mahdollisten kuvaajien lukumäärää. Oppilaat piirsivät pääasiassa lineaarisia funktioita ja vain noin puolet oppilaista sanoi, että kuvaajien määrä on ääretön. Loput väittivät, että vain yksi funktio voidaan piirtää, koska vain yksi suora kulkee kahden pisteen kautta.



Kuva 6: *Montako kuvaajaa voidaan piirtää kahden pisteen kautta?*

Taipumus lineaarisuuteen näkyy myös tehtävissä, joissa täytyy yhdistää useampia pisteitä. Kun oppilaita pyydettiin yhdistämään monta peräkkäistä pistettä jonkin kuvaajan avulla, suuri osa heistä yhdisti aina kaksi peräkkäistä pistettä janalla. Oppilaiden selitys vain yhdestä kahden pisteen kautta kulkevasta suorasta voisi viitata siihen, että oppilaat ovat yleistäneet lineaarisia funktioita koskevan säännön - että suora voidaan määrittää yksiselitteisesti kahden pisteen avulla - kaikkiin funktioihin. Toisaalta taipumus lineaarisiin funktioihin näkyi myös tehtävissä, joissa selkeästi etsittiin jotakin muuta kuvaajaa kuin suoraa. Kun oppilailta kysyttiin, sijaitseeko piste, joka oli kahden pisteen välisellä suoralla, paraabelilla vai ei, oppilaat väittivät sen sijoittuvan paraabelille. Toisaalta tehtävässä, joissa pyydettiin etsimään paraabeli, joka kulkee kolmen pisteen kautta, jotkin oppilaat käyttivät vain kahta pistettä funktion lausekkeen löytämiseen. Lisäksi he määrittivät kulmakertoimen, jota yrittivät sitten käyttää paraabelin lausekkeen kirjoittamiseen. (Leinhardt ym. 2005, s. 33)

On mielenkiintoista miettiä, mistä oppilaiden taipumus lineaarisiin funktioihin ja suorien piirtämiseen kumpuaa. Leinhardt ym. (2005) ehdottaa yhdeksi syyksi suosittua päiväkodissa ja esikoulussa esiintyvää tehtävää “yhdistä pisteet”. Tässä tehtävässä lapset harjoittelevat suurissa määrin peräkkäin numeroitujen pisteiden yhdistämistä janoilla. Samanlainen tehtävä toistuu myös alakoulun matematiikan tunneilla, joilla harjoitellaan pisteiden piirtämistä karteesiseen koordinaatistoon. Näissä tehtävissä pisteet yhdistämällä syntyvä kuva toimii lopullisena palkintona harjoituksen oikeasta suorittamisesta.

Toisaalta luonnollisena syynä taipumukseen voi olla myös se, että lineaariset funktiot ovat ensimmäinen funktiotyyppi, johon oppilaat tutustuvat funktioiden opiskelun aluksi. (Leinhardt ym., 2005) Tämä näkyy myös oppikirjoissa. Esimerkiksi Muuttuja-sarjan funktioita käsittelevässä kappaleessa esitetyistä noin kahdestakymmenestä funktion kuvaajasta vain neljä esitti jotakin muuta kuin lineaarista funktiota, loput olivat suoria (Kettunen ym. 2020) Laskutaito-kirjassa (Lindroos-Heinänen ym. 2011) funktiota käsitellään yhteensä kahdentoista kappaleen verran.

Näistä kappaleista yhdessä harjoitellaan lukemaan sekä funktioiden että muuttujien arvoja useilta eri kuvaajatyypeiltä, mukana siis sekä suoria, paraabeleja, että kolmannen asteen polynomifunktioiden kuvaajia. Toisessa kappaleessa opitaan erottamaan lineaarisen funktion kuvaaja muista kuvaajista. Kuvissa esitetään mm. paraabelin ja hyperbelin kuvaajat sekä paloittain määritelty suora. Kaikki muut kappaleet keskittyvät yksinomaan lineaarisen funktion analysoimiseen ja piirtämiseen. Tästä näkökulmasta katsoen taipumus lineaarisuuteen ja suorien piirtämiseen ei vaikuta mitenkään yllättävältä, vaan pikemminkin hyvin luonnolliselta reaktiolta lineaarisuuteen painottuvan opetuksen jälkeen.

Diskreetit ja jatkuvat funktiot

Oppilaille ei ole aivan yksinkertaista päättää, pitäisikö kuvaaja esittää jatkuvana vai epäjatkuvana. Leinhardt ym. (1992, 34) viittaa useisiin tutkijoihin esittäessään esimerkkejä, joissa oppilaat erehtyvät molempiin suuntiin: tulkitsevat tai esittävät jatkuvaa dataa epäjatkuvana tai epäjatkuvaa dataa jatkuvana.

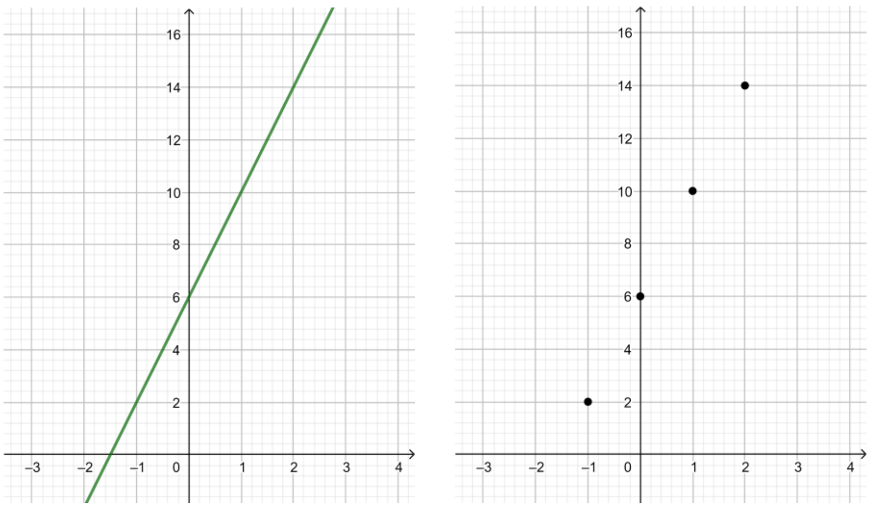
Tyypillinen esimerkki tästä on se, että oppilaat eivät ymmärrä jatkuvaa kuvaajaa jatkuvana funktiona, vaan ottavat huomioon vain pisteet, jotka on kuvaajalle piirretty erikseen. Kun oppilaita esimerkiksi pyydettiin piirtämään koordinaatistoon pisteet ja piirtämään näiden pisteiden kautta kulkeva suora, moni oppilas väitti kysyttäessä, että merkittyjen pisteiden välillä ei kuvaajalla ole pisteitä. Kun kysyttiin suoralla sijaitsevien pisteiden määrää yhteensä, osa oppilaista antoi piirtämiensä pisteiden määrän, jotkut välillä olevien kokonaislukupisteiden määrän ja jotkut laskivat, kuinka monta kertaa kuvaaja leikkasi taustaruudukon pystyviivoja.

Jopa ne oppilaat, jotka ymmärtävät pisteitä suoralla olevan todella paljon, näyttävät ajattelevan pisteiden kokonaismäärän kuitenkin rajoittuvan sen mukaan, montako pistettä suoralle todella mahtuu piirtämään. Oppilaat näyttävätkin tulkitsevan pisteet fyysisinä olentoina abstraktin käsitteen sijaan. Kahden pisteen väliin mahtuvien pisteiden määrä määräytyy siis heidän mielestään yhden pisteen mittojen mukaan. Tämä on hyvä esimerkki siitä, että oppilailla ei usein ole oikeaa käsitystä reaaliluvuista ja lukusuorasta (Tall 1996, 19) ja nämä käsitteet taas ovat edellytyksenä funktiokäsitteen ymmärtämiselle (Sierpinska 1992).

Oppilailla on myös taipumus yhdistää erillisiä pisteitä, vaikka se ei ole tarkoituksenmukaista. Eräässä tutkimuksessa oppilaille esitettiin kaavio, jossa oli erillisinä pisteinä esitetty neljän eri henkilön mitat ja oppilailta kysyttiin, pitäisikö pisteet yhdistää. Osa oppilaista oli selkeästi sitä mieltä, että pisteet pitäisi yhdistää, suurimpana syynä heidän mielikuvansa siitä, miltä kuvaajan tulisi näyttää. Jotkut oppilaat sanoivat, että pisteiden yhdistäminen tekee kuvaajasta tarkemman ja huolitellumman näköisen. (Leinhardtin ym. 1992 mukaan Kerslake 1981)

Yleisesti ottaen oppilaat näyttävät keskittyvän yksittäisiin pisteisiin siitä riippumatta, ovatko ne yhdistetty toisiinsa vai ei. Vaikka pisteitä yhdistävät janat nähdään osana kuvaajia, niillä näyttää olevan ennemmin pisteitä yhdistävä merkitys kuin merkitys itsessään kuvaajien täysivaltaisina osina. (Leinhardt ym. 1992)

Toisaalta Markovitsin ym. tutkimuksessa (1986, 22) oppilaille esitettiin algebrallisessa muodossa funktio $f(x) = 4x + 6$ niin, että sen määrittely- ja arvojoukko oli rajattu luonnollisiin lukuihin. Sitten oppilaille esitettiin kuvaaja, jossa suora kulki oikeiden pisteiden kautta ja kysyttiin, onko kyseessä sama funktio. Puolet oppilaista vastasi oikein, mutta loput jättivät huomiotta määrittely- ja arvojoukon rajoituksen ja vastasivat kyseessä olevan sama funktio. Kun oppilaille esitettiin diskreetti kuvaaja, johon oli merkitty oikeat pisteet, suurin osa oppilaista vastasi, että kyseessä ei ole sama funktio ja monet esittivät perusteluksi, että pisteet pitäisi yhdistää toisiinsa.



$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(x) = 4x + 6$$

Kuva 7: *Onko kyseessä sama funktio?*

Muutosnopeus, kulmakerroin

Kulmakertoimen käsite on edellytys lineaarisen funktion ymmärtämiselle ja se luo pohjan derivaatan käsitteelle. Siksi kulmakertoimen käsitteen ymmärtäminen on keskeinen funktion opiskelussa. Cho ja Nagle (2017) analysoivat tutkimuksessaan virheitä, joita collegeopiskelijat tekivät kulmakertoimeen liittyvissä tehtävissä ja tekivät tämän perusteella päätelmiä siitä, millaisiin asioihin kulmakertoimen opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota.

Opiskelijat tekivät paljon virheitä kulmakertoimen kaavan kanssa - jakoivat x-koordinaattien erotuksen y-koordinaattien erotuksella, laskivat y-koordinaattien erotuksen eri päin kuin x-koordinaattien erotuksen ja saivat siten kulmakertoimelle väärän merkin tai jopa vähensivät pisteen y- ja x-koordinaatit toisistaan ja jakoivat tämän toisen pisteen x- ja y-koordinaattien erotuksella.

Todella yleinen virhe oli myös päätellä kulmakertoimen merkki väärin, laittaa miinusmerkki nousevan suoran kulmakertoimeen ja plusmerkki laskevan suoran kulmakertoimeen. Sama virhe toistui myös kuvaajan piirtämisessä, kuvaajan suunta oli päätelty väärin kulmakertoimesta. Eräs yleinen, mutta hyvin triviaali virhe oli kirjoittaa suoran yhtälö ilman muuttujaa, kulmakertoimen perään siis unohdettiin laittaa x. Yleistä oli myös sekoittaa pisteiden piirtämisessä x- ja y-koordinaatit keskenään. Huomionarvoista kuitenkin on, että selvästi yleisimmät yksinkertaisista virheistä liittyivät aritmeettisiin peruslaskutoimituksiin tai murtolukuihin: yhteen-, vähennys-, kerto- tai jakolasku oli tehty väärin tai murtolukua ei osattu esimerkiksi supistaa oikein.

Varsinkin todellista käytännön tilannetta käsittelevissä tehtävissä tehtiin paljon virheitä arvojen lukemisessa kuvaajalta ja niiden tulkinnassa. Arvojen lukemisessa käytettiin esimerkiksi ruutuja akselien yksiköiden sijaan. Kulmakertoimen ja vakiotermin merkitys kuvaajassa saatettiin tulkita väärin ja funktion arvot, niiden muutoksen suunta ja suuruus muuttujan arvojen muuttuessa luettiin väärin.(Cho&Nagle 2017)

Yleinen virhe kuvaajan tulkinnassa on myös sekoittaa kulmakerroin ja suurin arvo keskenään. Tehtävissä, joissa on kahta eri tapausta kuvaavat kuvaajat piirrettynä samaan kuvaan ja kysytään, kumman kuvaajan muutos on suurempi tietyllä välillä, tarkastellaan kuvaajien muutosten sijaan usein vahingossa kuvaajan arvoja ja annetaan vastaukseksi kysytyllä välillä suurempia arvoja saava kuvaaja, vaikka sen muutosnopeus olisi pienempi. (Even 1998, 111-112; Bell&Janvier 1981, 37)

Cho&Nagle (2017, 135) pohtivat, voisivatko opiskelijoiden vaikeudet kulmakertoimen käsitteen oppimisessa liittyä siihen, että kulmakerroin voidaan käsitteellistää hyvin monilla eri tavoilla: geometrisesti, algebrallisesti, funktion ominaisuutena, parametrina, jne. Taulukkoon on listattu eri tapoja, joilla kulmakertoimen käsite voidaan tulkita (muokattu Cho&Naglen 2017 taulukosta). Näistä graafinen tulkinta jää usein algebralliseen laskukaavaan perustuvan tulkinnan alle ja tekee opiskelijoiden kulmakertoimen käsitteestä haavoittuvan ja alttiin virheille (Leinhardt 1990, 36).

Kategoria	Kulmakertoimen tulkinta
Geometrinen tulkinta	Suoran kahden pisteen pystysuoran etäisyys jaettuna vaakasuoralla etäisyydellä, merkki nousevalla suoralla + , laskevalla -
Algebrallinen kaava	Suoran kahden pisteen y-koordinaattien erotus jaettuna x-koordinaattien erotuksella, huomattava järjestys
Fyysinen ominaisuus	Suoran fyysiset ominaisuudet, kuvaillaan usein sanoilla jyrkkyys, kaltevuus, nousu/lasku jne.
Funktion ominaisuus	Funktion arvojen vakiona pysyvä muutosnopeus muuttujan arvojen kasvaessa tasaisesti
Muuttujan kerroin	Muuttujan x kerroin k lineaarista funktiota kuvaavassa suoran yhtälössä $y = kx + b$
Trigonometrinen tulkinta	Suoran nousukulman tangentti, vektorin suuntakulma
Differentiaalilaskennan tulkinta	Erotusosamäärän raja-arvo, derivaatta, käyrän tangenttisuoran kulmakerroin sivuamispisteessä
Käytännön esimerkkeihin perustuva tulkinta	Esimerkiksi paikan muutos tietyssä ajassa, kalteva taso
Määrittävä ominaisuus	Ominaisuus joka määrittää, ovatko suorat yhdensuuntaiset tai kohtisuorat, ominaisuus, jolla suora voidaan määritellä, kun lisäksi tiedossa suoran piste
Kuvaajan käyttäytymisen indikaattori	Reaaliluku, joka kuvaa suoran käyttäytymistä: nouseva + , laskeva - , vaakasuora 0 , itseisarvo kuvaa muutoksen suuruutta
Lineaarinen vakio	Suoraa kuvaava yksikäsitteinen vakio

Taulukko 2: *Kulmakertoimen eri tulkintoja (Cho&Naglea 2017 mukaillen)*

Kuvaajan tulkinta ja piirtäminen

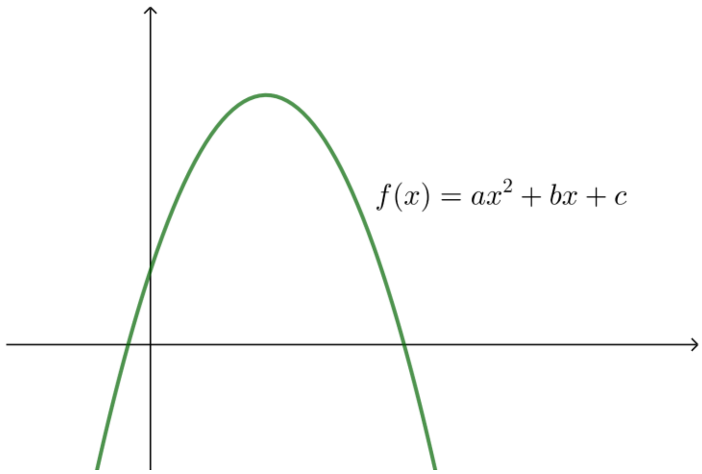
Kuvaajat ja erilaiset graafiset esitystavat ovat laajassa käytössä paitsi käytännön elämässä, myös tieteessä, taloudessa ja monilla muilla aloilla, ja hyvin usein ne esittävät jonkinlaista funktiota. Kuvaajien hyödyllisyys perustuu niiden kykyyn tuoda esiin sellaisia ominaisuuksia kuvattavasta tilanteesta, jotka muuten olisivat vaikeasti havaittavissa (Leinhardt ym. 1990, 37).

Monet yläkoululaiset ovat kuitenkin heikkoja tulkitsemaan kuvaajien yleisiä ominaisuuksia ja poimimaan niistä oleellisia tietoja niiden kuvaamista tilanteista. Hyvin usein he rajoittuvat tutkimaan yksittäistä pistettä tai pistejoukkoa kuvaajan yleisten piirteiden sijaan, kuten kuvaajan muoto kokonaisuudessaan, välit, joilla kuvaaja kasvaa tai pienenee, jne. (Bell&Janvier 1981, 34)

Näistä haasteista ehkä selkein esimerkki on tehtävä, jossa oppilaan täytyy vertailla samaan koordinaatistoon piirrettyä kahta kuvaajaa ja kertoa, millä välillä toinen kuvaaja saa suurempia arvoja kuin toinen. Suurin hankaluus tehtävään vastatessa on antaa vastaukseksi väli yksittäisen pisteen sijaan. Samankaltainen ongelma on tehtävä, jossa pitää kertoa, kumpi kuvaajista kasvaa tietyllä välillä enemmän - suuri osa oppilaista antoi vastaukseksi kuvaajan, jonka arvo on suurempi. Tähän kulmakertoimen käsitteeseen liittyvään tehtävään viitattiinkin jo edellisessä kappaleessa. (Bell&Janvier 1981, 37-38; Cho&Nagle 2017)

Yleisesti siis kuvaajan globaalista tulkinnasta tuntuu olevan hyötyä verrattuna yksittäisiin pisteisiin keskittymiseen. Erityisen selvästi globaalin tulkinnan hyöty näkyy tehtävissä, joissa opiskelijoita pyydettiin kirjoittamaan monimutkaisempaa sinimuotoista funktiota kuvaava lauseke annetun kuvaajan perusteella. Varsinkin vaikeamman funktion lausekkeen -2sin3x määrittäminen onnistui selkeästi paremmin, kun opiskelija ajatteli yleisesti funktion x:n ja y:n arvojen kertomista ja jakamista tai arvojen skaalaamista ja kiertoa akseleiden suhteen. Sen sijaan yksittäisiin testipisteisiin keskittyvä tarkastelu johti oikeaan tulokseen vain yksinkertaisten sinifunktioiden tapauksessa. (Even 1998, 109-111)

Joskus kuitenkin yksittäisten pisteiden tutkiminen on suorastaan välttämätöntä ongelman ratkaisemiseksi. Hyvänä esimerkkinä tästä on ongelma, jossa kuvaan on piirretty alaspäin aukeava paraabeli, joka esittää funktiota $f(x) = ax^2 + bx + c$, ja vastaajan täytyy selvittää, ovatko vakiot a, b ja c positiivisia, negatiivisia vai saavatko ne arvon nolla. Tässä ongelmassa globaali tulkinta funktioiden $f(x) = x^2$ ja $f(x) = x^2 + c$ avulla johti helposti päätelmään, että paraabelin huipun sijainnista voi suoraan päätellä vakion c merkin, mikä ei ole totta. Sen sijaan tapauksen $x = 0$ tutkiminen johti oikeaan tulokseen, että tässä pisteessä $f(x) = c$, eli c:n arvo on positiivinen, jos paraabelin ja y-akselin leikkauspiste on x-akselin yläpuolella. (Even 1998, 112-113)



Kuva 8: *Minkä merkkisiä ovat vakiot a, b ja c?*

Joissakin tilanteissa väärinkäsitykset nousevat pintaan helpommin kuin toisissa. Yleisesti oppilailla näyttää olevan eniten vaikeuksia tulkita kuvaajasta sellaisia suureita, jotka eivät suoraan siitä näy. Hyvä esimerkki tästä on nopeuden päättely matka-aika -kuvaajasta yksinkertaisen nopeus-aika -kuvaajan sijaan. Matka-aika -kuvaajassa nopeus on piilossa kulmakertoimessa, joka täytyy kuvaajasta ensin erikseen määrittää. Väärinkäsityksiä syntyy myös helpommin sellaisissa kuvaajissa, joissa on jokin voimakas muoto kuten yhtäkkinen nousu, lasku tai epäjatkuvuus. Ongelmia aiheuttavat myös kuvaajat, joiden muuttujat ovat erityisen tuttuja tai jollain tavalla harhaanjohtavia. (Leinhardt ym. 1990, s. 41-42)

Eräs tyypillinen kuvaajiin liittyvä tulkintaongelma on kuvaajan muodon sekoittaminen tilanteesta piirrettyyn kuvaan. Bellin ja Janvierin tutkimuksessa (1981, 38-39) oppilaille esitettiin kilpa-auton nopeutta esittävä kuvaaja ja heitä pyydettiin valitsemaan useista erimuotoisista autoradoista se, jolla havaittuja autojen nopeuden muutoksia kuvaaja kuvasi parhaiten. Suurin osa tutkittavista antoi vastaukseksi autoradan, jonka muoto vastasi eniten nopeuskuvaajan muotoa.

Leinhardt ym. (1990) viittaa myös paljon viitattuun Kerslaken (1981) tutkimukseen, jossa oppilaiden piti tunnistaa aika-paikka -kuvaajista ne, jotka kuvaavat tietyn reitin kulkemista. Lisäksi heitä pyydettiin kuvailemaan reitin yksityiskohtia kuten nopeutta ja kulkusuuntaa. Oppilaat antoivat vastaukseksi myös kuvaajat, joista toisessa oli pystysuora osuus ja toisessa oli yhdistettynä nouseva suora laskevaan suoraan niin, että ne kuvan oikeassa reunassa yhdistyivät - siis kuvaajat, jotka eivät esittäneet funktioita lainkaan, koska yhtä x-koordinaatin eli ajan arvoa vastasi useampi y-koordinaatin eli matkan arvo. Oppilaat kuitenkin väittivät kunkin näistä kuvaajista kuvaavan yksittäistä reittiä ja kuvailivat reitin yksityiskohtia niin, että ne vastasivat kuvaajan muotoa. Selkeästi oppilaat sekoittivat kuvaajan muodon ja reitin muodon keskenään ja tekivät reitistä tulkintoja kuvaajan muodon perusteella.

Kuvaajan asteikkojen lukeminen oli myös usein puutteellista ja tehotonta. Kun piti selvittää kahden pisteen arvojen erotus, oppilaat usein lukivat kummankin pisteen arvon erikseen ja vähensivät ne toisistaan sen sijaan, että olisivat lukeneet erotuksen suoraan akselin asteikolta tai vielä suoremmin käyttäneet kuvaajan ruudukkoa hyväkseen erotuksen lukemisessa. (Bell&Janvier 1981, 37) Samoin interpolointi eli arvon lukeminen ruudukon viivojen välistä oli oppilaille haastavaa. Tässä suurin osa virheistä johtui siitä, että vastaukseksi annettiin ruudukon leikkauspisteestä luettu arvo viivojen väliltä luetun arvon sijaan. (Bell&Janvier 1981, 38)

Koordinaatiston piirtäminen ei myöskään ole oppilaille niin yksinkertaista kuin monesti kuvitellaan. Akselien piirtäminen vaatii varsin monimutkaista tietoa ja taitoa. Oppilaat saattavat sijoittaa datan akseleille kyllä oikeassa järjestyksessä, mutta eivät kiinnitä huomiota niiden etäisyyksiin. He myös usein luulevat, että x- ja y-akseleiden asteikkojen täytyy olla symmetriset. Kuvaajan nousukulma ja muoto riippuvat kuitenkin suuresti valituista koordinaattiasteikoista ja niiden mittakaavojen suhteista. Lyhyesti sanottuna monet oppilaat eivät kunnolla ymmärrä välimatka-asteikon käsitettä. (Leinhardt ym. 1990, 43)

Oppilaiden ja opettajien käsityksiä funktiosta

Funktion oppimista käsittelevä tutkimuskirjallisuus on suurelta osin melko vanhaa, valtaosa löytämästäni aihetta kattavasti käsittelevästä kirjallisuudesta on kolmen vuosikymmenen takaa tai vielä vanhempaa. Vain joistakin funktion alakäsitteistä, kuten kulmakertoimesta, löytyi tuoreempaa materiaalia. Osittain tästä syystä ja osittain omasta mielenkiinnosta halusin tehdä tässä työssä myös oman pienen tutkimuksen.

Pohjana tutkimukselleni käytin Vinnerin ja Dreyfusin (1989) mielenkiintoista selvitystä, jossa tutkittiin aloittelevien collegeopiskelijoiden ja yläkoulun matematiikan opettajien näkemyksiä funktion käsitteestä. Tutkittavien piti ensin tunnistaa funktiot kuvaajien ja sanallisten kuvausten joukosta, ja lopuksi vastaajia pyydettiin kertomaan omin sanoin, mikä on funktio.

Tutkittavien kirjoittamista funktion määritelmistä erotettiin kuusi toisistaan eroavaa kategoriaa (Vinner & Dreyfus 1989):

1) ***Vastaavuus.*** Funktio on kahden joukon välinen vastaavuus, joka liittää ensimmäisen joukon jokaiseen elementtiin täsmälleen yhden elementin toisessa joukossa.
2) ***Riippuvuussuhde.*** Funktio on kahden muuttujan välinen riippuvuussuhde (y riippuu x:stä).
3) ***Sääntö.*** Funktio on sääntö - oletuksena on siis jonkinlainen säännönmukaisuus, kun 1-kategorian vastaavuus voi olla puhtaasti satunnainen.
4) ***Laskutoimitus.*** Funktio on jonkinlainen laskutoimitus tai toimenpide, joka suoritetaan annetulle numerolle ja saadaan arvojoukon arvo.
5) ***Kaava.*** Funktio on kaava, algebrallinen lauseke tai yhtälö, joka kuvaa kahden objektin välistä suhdetta tai yhteyttä.
6) ***Esitysmuoto.*** Funktio tunnistetaan joko sen graafisen tai symbolisen esitysmuodon perusteella, mahdollisesti täysin merkityksettömällä tavalla.

Näistä kategorioista ensimmäinen vastaa modernia Dirichlet-Bourbaki -määritelmää, tosin ainakin suomenkielisessä oppikirjassa käytetään vastaavuus-sanan synonyymiä relaatio tai kuvaus (Harjulehto ym. 2016). Toinen kategoria vastaa Descartesin ja toisaalta myöhemmin Newtonin ja Leibnizin käsitystä funktiosta, jossa kaksi suuretta muuttuivat yhdessä toisistaan riippuen (Ponte 1992, Lehtinen 1995). Tämä ajatus tosin oli vallitsevana vielä pitkälle 1900-

luvulle asti, esimerkiksi Väisälä käyttää sitä oppikirjansa funktion määritelmässä (1963, s. 63), ja esiintyypä ajatus riippuvuudesta vielä aivan uudessa Muuttuja-kirjassakin (Kettunen ym. 2020).

Kolmas kategoria vastaa Dirichletin 1800-luvulla kirjoittamaa funktion määritelmää, jossa funktio määriteltiin lukuarvojen välisenä sääntönä (Lehtinen 1995, s. 65). Myös yläkoulun ja lukion oppikirjat käyttävät yleisesti sanaa sääntö funktion määritelmissä (Lindroos-Heinänen ym. 2011, Ekonen ym. 2016). Loput kategoriat ovat kaavamaisempia ja kuvaavat mielestäni ennemminkin vastaajan funktio-käsitteen jäämistä suoritettavan proseduurin tai ulkoa opetellun kaavan tasolle. Kategoriassa 5 sentään mainitaan kahden objektin välinen suhde tai yhteys, mikä osoittaa hieman enemmän käsitteen ymmärrystä.

Melko arvattavasti Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksessa (1989) yläkoulun matematiikan opettajat ja pääaineenaan matematiikkaa tai fysiikkaa lukevat opiskelijat kuvasivat funktiota useimmin ensimmäisen, Dirichlet-Bourbaki -määritelmää mukailevan vaihtoehdon mukaan (69% opettajista, 45% matematiikan tai fysiikan opiskelijoista). Muista opiskelijoista suurin osa kuvasi funktiota riippuvuussuhteena, mutta myös muihin kategorioihin kuuluvia vastauksia esiintyi paljon.

Funktioiden tunnistamistehtävissä yleisin perustelu oli funktion arvon yksikäsitteisyysvaatimus, eli funktion määrittelyjoukon jokaista arvoa vastaa vain yksi arvo. Tätä perustelua käytettiin myös epäjatkuvan tai paloittain määritellyn funktion tapauksessa, eli nämä vastaajat selkeästi ymmärsivät tämän perustelun olevan tärkein päätettäessä, onko joku relaatio funktio vai ei. (Vinner & Dreyfus 1989)

Osalla vastaajista oli vaikeuksia hyväksyä relaatiota funktioksi, jos kuvaaja oli epäjatkuva tai funktio oli paloittain määritelty (Vinner & Dreyfus 1989). Myös Markovits, Eylon & Bruckheimer (1986) havaitsivat 9-luokkalaisille tekemässään tutkimuksessa haasteita paloittain määritellyn funktion tunnistamisessa funktioksi algebrallisesta lausekkeesta. Paloittain määritellyn funktion saatettiin käsittää koostuvan useammasta funktioista. Osa opiskelijoista ajatteli, että funktio täytyy pystyä ilmaisemaan yhdellä lausekkeella ja jopa kuvitteli tämän olevan mahdollista paloittain määritellyn funktion tapauksessa, kun palat koostuivat suorista (Vinner & Dreyfus 1989). Sierpinskan (1992, s. 46) mukaan funktiokäsitteen oppimisen esteenä on yleisemminkin käsitys, että vain analyyttisellä lausekkeella ilmaistavia relaatioita voidaan kutsua funktioiksi.

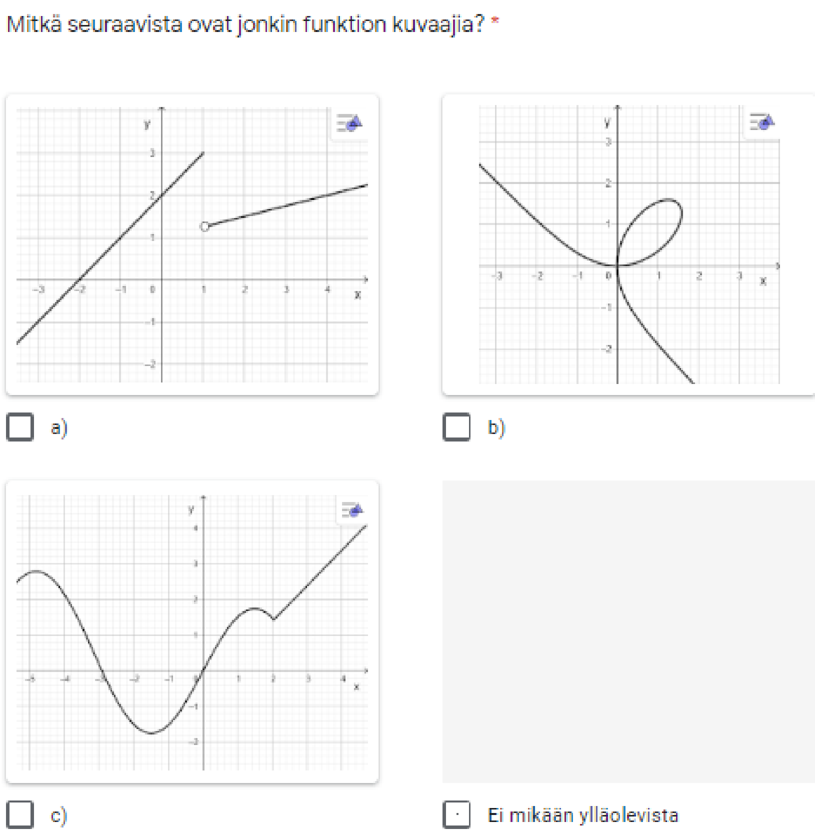
Markovits ym. (1986) havaitsivat oppilailla olevan vaikeuksia vakiofunktioiden kanssa. Myös Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimus vahvistaa tätä käsitystä - opettajista ja matematiikan opiskelijoista vain 67% tunnisti vakiofunktion funktioksi sanallisesta kuvauksesta, muiden vastaajien joukossa osaaminen oli vielä paljon tätäkin heikompaa. Leinhardt ym. (1992, s. 31) esittää selitykseksi, että opiskelijat perustavat käsityksensä funktiosta vanhoihin funktion määritelmiin, jotka painottivat kahden suureen yhtäaikaista ja toisistaan riippuvaa muutosta. Markovits ym. (1986) toteaakin, että oppikirjoissa 1800-luvun lopulta 1900-luvun puoliväliin asti funktio esitettiin yleisesti toisistaan riippuvien muuttujien yhtäaikaisena muutoksena: muutos yhdessä muuttujassa saa aikaan muutoksen toisessa.

Vanhaan funktion määritelmään nojautuminen aiheutti hankaluuksia laajemminkin funktioiden tunnistamisessa. Satunnaiseen vastaavuuteen perustuvia tai erillisistä pisteistä koostuvia funktioita ei hyväksytty funktioiksi, eikä myöskään funktioita, joita ei ole merkitty funktioiksi matemaattisesti. (Leinhardt 1992, Markovits ym. 1986).

Kysely 9-luokkalaisille, opiskelijoille ja opettajille

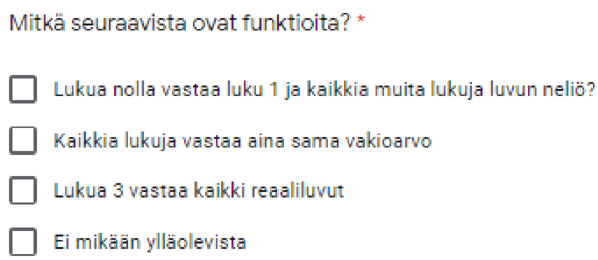
Saadakseni jonkinlaista kuvaa suomalaisten peruskoululaisten, opiskelijoiden ja opettajien funktiokäsityksistä tein aiheesta pienen kyselyn. Kyselyssä käytettiin pohjana Vinnerin ja Dreyfusin (1989) opiskelijoille ja opettajille teettämää kyselyä, mutta sitä muokattiin paremmin kohderyhmälle sopivaksi poistamalla vaikeimmat kysymykset ja muokkaamalla sanamuotoja mahdollisimman hyvin ymmärrettäviksi. Lisäksi mukaan otettiin yksi uusi kysymys selkeästä ei-funktiosta, jossa yhtä lukuarvoa vastaa kaikki reaaliarvot. Lähteeksi valittiin Vinnerin ja Dreyfusin kysely siksi, että se yksinkertaisuudestaan huolimatta näytti antavan paljon tietoa opiskelijoiden ja opettajien funktiokäsitteen muodostumisesta. Lisäksi kysely oli sopivan kevyt toteutettava ja sopi siten hyvin osaksi pro gradu -työtä.

Kyselyn ensimmäisessä osassa (Kuva 9) vastaajien piti tunnistaa kuvaajien joukosta funktion kuvaajat. Kohdassa a) oli kyseessä epäjatkuva paloittain määritelty funktio, joka koostui kahdesta suorasta, kohdassa b) oli Descartesin lehtenä tunnettu tasokäyrä ja kohdassa c) paloittain määritelty jatkuva funktio, joka koostui sinimuotoisesta osasta ja suorasta. Kuvaajien valinnan jälkeen vastaajaa pyydettiin vielä perustelemaan vastauksensa sanallisesti.



Kuva 9: *Kyselyn ensimmäinen osa*

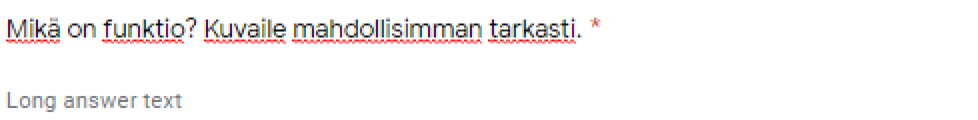
Kyselyn toisessa osassa vastaajan piti tunnistaa funktiot sanallisten kuvausten joukosta. Ensimmäinen vaihtoehto oli toisen asteen funktio, jossa oli yksi yksittäinen epäjatkuvuuskohta. Toinen vaihtoehto oli vakiofunktio ja kolmas kuvaus, jossa yhtä arvoa vastaa kaikki reaaliluvut eli selkeä esimerkki relaatiosta, joka ei ole funktio. Myös tämän kysymyksen vastaus piti perustella sanallisesti.


Mitkä seuraavista ovat funktioita? *

- Lukua nolla vastaa luku 1 ja kaikkia muita lukuja luvun neliö?
- Kaikkia lukuja vastaa aina sama vakioarvo
- Lukua 3 vastaa kaikki reaaliluvut
- Ei mikään ylläolevista

Kuva 10: *Kyselyn toinen osa*

Viimeisenä kysymyksenä vastaajan piti kuvailla omin sanoin käsite funktio. Tarkka kysymyksenasettelu on kuvassa 11.


Mikä on funktio? Kuvaile mahdollisimman tarkasti. *

Long answer text

Kuva 11: *Kyselyn viimeinen osa*

Mahdollisuutta kyselyyn vastaamiseen tarjottiin kevään viimeisillä oppitunneilla uusimaalaisen peruskoulun 9-luokkalaisille, jotka olivat opiskelleet funktioon liittyviä perusasioita edellisen talven aikana. Tutkimuslupa hankittiin hyvissä ajoin ennen kyselyn teettämistä rehtorilta. Kyselystä tiedotettaessa kerrottiin kyselyn olevan vapaaehtoinen ja anonyymi ja korostettiin, että se ei siten voi vaikuttaa mm. oppilaiden arviointiin. Suostumusta huoltajilta ei tarvittu, sillä kaikki oppilaat olivat yli 15-vuotiaita. Kysely toteutettiin Google Formsilla siten, ettei se tallentanut automaattisesti mitään henkilötietoja vastaajasta eikä yksittäisen oppilaan tunnistaminen tulosdatasta ollut siten mahdollista.

Sama kysely jaettiin myös Facebookin Matematiikka-ryhmässä, jossa jäseninä on matematiikan opettajia, opiskelijoita ja muita matematiikasta kiinnostuneita. Tämä kysely oli luonnollisestikin täysin vapaaehtoinen, mikä saattoi osaltaan lisätä aiheesta kiinnostuneiden osanottoa ja siten parantaa tuloksia. Kyselyn saatetekstissä myös kerrottiin, että vastaukset käsitellään anonyymisti ja vain tutkittavan itsensä antamien pohjatietojen avulla (viiteryhmä, matematiikan opinnot).

Kyselyn tulokset

Yhdeksäsluokkalaisten kyselyssä oppilaita oli paikalla yhteensä 58, joista 41 vastasi kyselyyn. Oletus ja myös tutkimustilanteessa syntynyt havainto oli, että kyselyyn tarttuivat useammin ne, jotka olivat kiinnostuneita matematiikasta ja suoriutuivat siinä paremmin. Tämä todennäköisesti lisäsi hyvien vastausten osuutta kyselyssä.

Facebookin Matematiikka-ryhmässä kyselyyn tuli parin viikon aikana 71 vastausta. Vastaajista 25 (35,2%) oli matematiikan opettajia lukiossa tai yliopistossa ja 18 (25,4%) peruskoulussa, muita opettajia oli 3 (4,2%). Ainakin yhtenä aineena matematiikkaa lukeneita yliopisto-opiskelijoita (myös entiset opiskelijat) oli 12 (16,9%) ja muita opiskelijoita oli 9 (12,6%). Muita vastaajia, joita ei voitu lukea mihinkään ylläolevista ryhmistä, oli 4 (5,6%).

Funktioiden tunnistamistehtävät

Yhdeksäsluokkalaisista ensimmäisen kysymyksen a)-kohdan paloittain määritellyn epäjatkuvan suoran tunnisti funktioksi 22 vastaajaa eli vähän yli puolet. (katso Taulukko 1) Paloittain määritelty jatkuva sinifunktion ja suoran yhdistelmä kohdassa c) tunnistettiin vähän huonommin, sen luokitteli funktioksi 32% yhdeksäsluokkalaisista vastaajista. Kahdeksan vastaajaa eli noin 20% tunnisti virheellisesti b)-kohdan tasokäyrän funktioksi. Täysin oikein koko ensimmäisen kysymyksen sai kolme vastaajaa, joista kaksi vastausta oli selityksenä annettujen “Xaxaxa” ja “Emt” perusteella arvauksia. Yksi oppilas osasi perustella oikean vastauksensa hienosti funktion arvon yksikäsitteisyyteen vetoamalla: “Samalla x:n arvolla ei voi olla kahta pistettä”.

Yleisin perustelu a)-kohdan funktiolle oli se, että siinä esiintyi suora tai “suora viiva”. Näitä perusteluja käytti 10 vastaajaa. Nämä vastaukset luultavasti kertovat siitä, että yläkoulussa funktion opiskelu keskittyy pääosin suoran yhtälöön ja lineaarisiin funktioihin (Lindroos-Heinänen ym. 2011). Toisaalta funktio jätettiin myös muutamassa vastauksessa tunnistamatta sillä perusteella, että “funktio ei ollut yksiosainen suora” tai muulla asiasisällöltään vastaavalla perustelulla. Muutama vastaaja tosin myös mainitsi, että funktion ei tarvitse olla lineaarinen.

Paloittain määritelty funktio nähtiin selkeästi ongelmallisena muutamassa vastauksessa kuten tässä: “välillä suora ja välillä mutka, ei käy”. Epäjatkuvuus mainittiin myös perusteluna kahdessa vastauksessa funktion hylkäämiselle ja samalla toisessa vastauksessa nähtiin selkeästi kaksi eri funktiota: “funktiot eivät ole yhteydessä toisiinsa”. Nämä vastaukset ovat samankaltaisia kuin Vinner ja Dreyfus havaitsivat tutkimuksessaan (1989). Muissa perusteluissa vedottiin kuvaajan säännöllisyyteen tai järkevyyteen, tai siihen, että kuvaaja näytti tutulta tai väärältä. Pari vastaajaa perusteli funktioksi hyväksymistä sillä, että koordinaatistosta löytyi x ja y. Jopa kymmenessä vastauksessa vastausta ei perusteltu millään tavalla tai ilmaistiin selkeästi oma tietämättömyys, mikä kuvastaa kysymyksen ysiluokkalaiselle asettamaa haastetta.

Kyselyn toisessa kysymyksessä vakiofunktion tunnisti funktioksi 21 vastaajaa eli hieman yli puolet yhdeksäsluokkalaisista ja yksittäisen epäjatkuvuuskohdan sisältävän funktionkin 18 vastaajaa (44%). Toisaalta 16 vastaajaa eli 39% väitti funktioksi kuvausta, jossa lukua kolme vastaa kaikki reaaliarvot. Perusteluista oli pääteltävissä, että kysymys oli vaikea. Jopa 22 vastaajaa ilmaisi, ettei tiedä perustelua, vain arvasi vastaukset tai ei perustellut vastaustaan mitenkään. Loputkin vastaajat vetosivat yleisimmin siihen, että vaihtoehto näytti oikealta tai oli järkevä. Pari vastaajaa oli hyvin saanut kiinni funktiokäsitteen monipuolisuudesta ilmaisemalla, että “funktioita voi olla kaikenlaisia” tai “funktio voi olla monen näköinen”.

Matematiikan opettajat tunnistivat varsin ennalta arvattavasti funktiot erittäin hyvin (katso Taulukko 1). Ensimmäiseen tehtävään tuli yhteensä 43 matematiikan opettajalta vain kolme väärää vastausta, joissa perustelukaan ei muuttanut vastausta niin, että se voitaisiin tulkita oikeaksi. Näistä kahdessa vastauksessa perustelussa oli esitetty ehto funktion arvon yksikäsitteisyydelle aivan oikein, mutta silti oli valittu väärät vaihtoehdot.

Kaksi vastaajaa perusteli ensimmäisen tehtävän b)-kohdan Descartesin lehden olevan parametrisesti määritelty funktio. Ja aivan totta, tasokäyrän voidaan ajatella olevan funktio, jossa parametria t vastaa tason piste (x, y). Yhdessä vastauksessa oli tunnistettu tasokäyrä funktioksi, mutta parametrisesti määriteltyä funktiota ei osattu perustella oikein. Ylivoimaisesti yleisin perustelu ensimmäisessä tehtävässä oli vaatimus funktion arvon yksikäsitteisyydestä, jonka mainitsi jopa 32 vastaajaa eli 74% vastaajista. Muista perusteluista monet olivat lyhyitä ja kuvasivat lähtö- ja maalijoukkojen käsitteitä tai funktion tyyppejä.

	Matematiikan opettajat (n=43)	Matematiikan opiskelijat (n=12)	9-luokkalaiset (n=41)	Muut (n=16)
Paloittain määritelty epäjatkuva, kuvaaja	42 (98%)	11 (92%)	22 (54%)	14 (88%)
Descartesin lehti, kuvaaja	41 (95%)	12 (100%)	33 (80%)	16 (100%)
Paloittain määritelty jatkuva, kuvaaja	43 (100%)	11 (92%)	13 (32%)	16 (100%)
Paloittain määritelty epäjatkuva, sanallinen	41 (95%)	11 (92%)	18 (44%)	13 (81%)
Vakiofunktio, sanallinen kuvaus	43 (100%)	11 (92%)	21 (51%)	13 (81%)
Yhtä lukua vastaa kaikki reaaliluvut (ei funktio), sanallinen	41 (95%)	11 (92%)	25 (61%)	15 (94%)

Taulukko 3: *Funktion tunnistamistehtäviin oikein vastanneiden määrät ja suhteelliset osuudet*

Toiseen kysymykseen vastasi väärin vain neljä opettajaa eli 9% kaikista vastanneista opettajista. Kaksi vastaajaa tunnisti virheellisesti funktioksi myös kolmannen kohdan kuvauksen, jossa lukua 3 vastaa kaikki reaaliarvot. Yksi vastaaja tunnisti funktioksi pelkästään vakiofunktion ja toinen tämän lisäksi virheellisesti kolmannen vaihtoehdon. Kuten ensimmäisessä tehtävässä, tämänkin tehtävän vastauksia perusteltiin yleisimmin funktion arvojen yksikäsitteisyydellä tai viitattiin suoraan edellisen tehtävän perusteluuun.

Matematiikkaa yliopistossa opiskelevista tai opiskelleista yksi ei tunnistanut epäjatkuvaa funktiota funktioksi. Yksi vastaaja tarttui merkintöihin ja väitti, että pelkkä (x, y) -tasoon piirretty käyrä ei ole funktio. Kuten matematiikan opettajistakin, myös matematiikkaa opiskelleista muutama tunnisti Descartesin lehden parametrisesti määritellyksi funktioksi. Myös toisessa kysymyksessä yliopiston matematiikan opinnot olivat selvästi laajentaneet vastaajien funktiokäsitettä - kolme vastaajaa luokitteli funktioksi myös tapauksen, jossa lukua kolme vastaa kaikki reaaliluvut. Modernin funktion määritelmän mukaisesti he perustelivat, että kyseessä on funktio, joka kuvautuu vain luvun 3 sisältämältä joukolta lukujoukkojen joukolle. Dirichlet-Bourbaki -määritelmän mukaanhan joukkojen alkioiden ei tarvitse olla numeroita, vaan ne voivat olla mitä tahansa objekteja. (Adams 1995) Nämä vastaukset tulkittiin oikeiksi vastauksiksi.

Muista vastaajista (15 kpl) ensimmäiseen kysymykseen vastasi väärin vain kaksi ja toiseen viisi vastaajaa, mikä varmaankin kertoo Matematiikka-ryhmän jäsenten matemaattisesta harrastuneisuudesta, vaikka näillä vastaajilla ei muodollisia matematiikan yliopisto-opintoja ollutkaan takanaan. Funktion arvon yksikäsitteisyys oli näilläkin vastaajilla yleisin perustelu molempiin kysymyksiin, tosin joku vastaajista vetosi yleisesti funktion määritelmään ja toinen myönsi suoraan, että ei osaa perustella vastaustaan. Koko kyselyn selkeästi hauskin perustelu tuli kuitenkin tästä joukosta, kun vastauksestaan selvästi epävarma vastaaja kirjoitti perusteluksi: “Ilmeinen, sanoi Wiles eräässä kohdassa Fermat`n lausetta todistaessaan”.

Avoin kysymys funktion määritelmästä

Kyselyn viimeisessä kysymyksessä vastaajaa pyydettiin kuvailemaan mahdollisimman tarkasti, mikä on funktio. Kaikki kyselyyn vastanneet jaettiin neljään ryhmään: matematiikan opettajiin, matematiikkaa yliopistossa opiskeleviin tai opiskelleisiin, 9-luokkalaisiin ja muihin. Näiden ryhmien kuvaukset funktiosta jaettiin kuuteen kategoriaan Vinnerin ja Dreyfusin tutkimusta (1989) mukaillen. Vastaukset, joissa vastaaja ei osannut vastata kysymykseen, vastaus oli triviaali tai järkevää vastausta ei annettu, listattiin erikseen. Tulokset on koottu taulukkoon 2.

Mitään pitkälle vietyjä johtopäätöksiä en väitä numeroista pystyväni tekemään, mutta eri kategorioihin osuvien vastausten suuruusluokkia on mielenkiintoista vertailla Vinnerin ja Dreyfusin (1989) tutkimuksen kanssa. Samoin yksittäisiä vastauksia on hedelmällistä tutkia tarkemmin.

Molemmissa tutkimuksissa suurin osa opettajista määritteli funktion modernin Dirichlet-Bourbaki -määritelmän mukaiseksi vastaavuudeksi tai kuvaukseksi. Alla muutama ote kyselyni matematiikan opettajien vastauksista.

“Funktio on kuvaus, joka liittää jokaiseen lähtöjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion.”

“Funktio on relaatio, jossa jokaista lähtöjoukon pistettä vastaa täsmälleen yksi maalijoukon piste.”

“Funktio on kuvaus joukosta A joukkoon B siten, että jokainen A:n alkio kuvautuu täsmälleen yhdelle B:n alkiolle.”

	Matematiikan opettajat (n=43)	Matematiikan opiskelijat (n=12)	9-luokkalaiset (n=41)	Muut (n=16)
Vastaavuus	22 (51%)	9 (75%)	-	6 (38%)
Riippuvuussuhde	3 (7%)	1 (8%)	7 (17%)	1 (6%)
Sääntö	15 (35%)	2 (17%)	-	5 (31%)
Laskutoimitus	1 (2%)	-	2 (5%)	1 (6%)
Kaava	-	-	2 (5%)	2 (12%)
Esitysmuoto	-	-	12 (29%)	-
Ei järkevää vastausta	-	-	18 (44%)	1 (6%)

Taulukko 4: *Vastausten jakauma kysymyksessä “Mikä on funktio?” eri vastaajaryhmissä*

Selkeästi yli kolmannes suomalaisista opettajista kuitenkin vastasi funktion olevan jonkinlainen sääntö, kun Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksessa näin vastasi vain muutama opettaja. Syynä tähän eroon saattaa olla se, että suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa sekä yläkoulussa että lukiossa funktio määritellään sääntönä (esim. Lindroos-Heinänen ym. 2011, Ekonen ym. 2016). Tästä näkökulmasta katsoen on tosin silmiinpistävää, että 9-luokkalaisista yksikään ei määritellyt funktiota säännöksi. Voidaan ehkä ajatella funktiokäsitteen olevan ysiluokkalaiselle niin vaikea, että sitä ei vielä sisäistetä, kun määritelmä käydään lyhyesti läpi funktion opiskelua aloitettaessa, vaan funktion käsite muotoutuu vasta muun funktioista opitun perusteella myöhemmin.

Joissakin vastauksissa esiintyi myös yhdistelmiä eri kategorioista, kuten näissä lukion matematiikan opettajien määritelmissä:

“Sääntö tai relaatio, joka yhdistää kunkin määrittelyjoukon alkion täsmälleen yhteen arvojoukon alkioon.”
“Funktio kuvaa luvun x pisteeksi f(x) määritellyllä säännöllä”

Muutama peruskoulun matematiikan opettaja vastasi funktion olevan riippuvuus, ja jälkimmäinen näistä vastaajista liitti mukaan myös ajatuksen säännöstä:

“Funktio on riippuvuus kahden luvun välillä.”
“Kaksi muuttujan riippuu toisistaan tietyn säännön mukaan.”

Tämä funktion määritelmä lienee myös peräisin oppikirjoista, joista esimerkiksi Muuttuja (Kettunen ym. 2020) määrittelee funktion kahden muuttujan tai suureen riippuvuutta kuvaavaksi säännöksi.

Kuten Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksessakin (1989), matematiikkaa yliopistossa opiskelevista tai opiskelleista valtaosa määritteli funktion modernin määritelmän mukaan vastaavuutena tai kuvauksena, esimerkiksi näin:

“Kuvaus kahden joukon välillä, joka liittää kuhunkin lähtöjoukon alkioon tasan yhden maalijoukon alkion.”
“Funktion jokaista x:n arvoa pitää vastata täsmälleen yksi y:n arvo.”

Näissä määritelmissä, kuten matematiikkaa opiskelleiden vastauksissa yleensäkin, tuli myös hyvin esille vaatimus funktion arvon yksikäsitteisyydestä. Sama havainto koski myös matematiikan opettajien vastauksia. Matematiikan yliopisto-opinnot näyttävät hyvin auttavan sisäistämään tämän funktion määrittelyssä tärkeän ehdon.

Yhdeksäsluokkalaisten vastauksia lukiessa kävi selkeästi ilmi, kuinka vaikea funktiokäsite heistä suurelle osalle on. Lähes puolet vastaajista ei osannut mitään määritelmää funktiolle. Osa ilmaisi tietämättömyytensä selkeästi vastaamalla esimerkiksi “emt” tai “en ole varma”, osa yritti jonkinlaista selitystä kuten “funktio” tai “matemaattinen asia”. Joukosta löytyy myös yksi vastaus, jonka uraansa aloitteleva matematiikan opettaja voisi tulkita motivoituneen opiskelijan innostuksen osoitukseksi, mutta pidempään yläkoulussa opettanut tunnistaa kyllä teini-ikäisen sarkasmin:

“Funktio kuvaa jotain arvoja joita on ihanaa selvitellä ja niistä voi puhua loputtomasti.”

Vajaa kolmasosa yhdeksäsluokkalaisista kuvasi funktiota pelkästään sen esitysmuotojen perusteella, mikä ei antanut juuri parempaa kuvaa osaamisesta:

“sellanen mis on niitä äksiä ja yitä”
“Se on suora jossa on kulmakerroin ja leikkaus kohta y-akselilla”
“Funktio on kuvaaja, joka on joko ruudukossa olevia suoria tai yhtälöitä. Yhtälöt alkavat yleensä f(x) =?”

Lisäksi muutama vastaajaa kuvasi funktiota laskutoimituksena *“Funktio on laskulauseke, jonka muuttujan arvon perusteella voidaan laskea toinen luku.”* tai kaavana *“Funktio on lauseke, jossa on tuntematon muuttuja x joka pitää ratkaista.”* Näistä jälkimmäisessä oli yhdistetty ensinnäkin tuntemattoman ja muuttujan käsitteet ja toiseksi funktion ja yhtälön käsitteet tavalla, joka ei saanut matematiikan opettajaa vakuuttumaan käsitteiden ymmärtämisestä. Kaksi vastaajaa oli ohjeista huolimatta turvautunut Google-hakuun selvästikään aivan ymmärtämättä lukemaansa, sillä teksti näytti aivan pidemmästä tekstistä suoraan kopioidulta:

“Funktion kuvaaja koostuu siis määrittelyjoukon alkion ja vastaavan arvojoukon alkion muodostamista pareista. Funktion kuvaajan määritelmä on identtinen yllä esitetyn funktion eksaktin määritelmän kanssa.”

Nämä vastaukset luokiteltiin “Ei järkevää vastausta” -kategoriaan, sillä niiden perusteella ei voinut päätellä opiskelijan ymmärtävän funktion käsitettä.

Loput vastaajista kuvasivat ehkä hieman yllättäen funktiota riippuvuutena tai suhteena, kuten alla olevissa lainauksissa. Tämä saattaa johtua opetuksessa tai tehtävissä käytetyistä esimerkeistä, joissa ostoksen hinta riippuu ostettavasta määrästä, neliön pinta-ala riippuu neliön sivun pituudesta tai kemian kokeen arvosana riippuu kokeesta saadusta pistemäärästä (Lindroos-Heinänen ym. 2011). Vastaavuuteen tai sääntöön viittaavia sanoja ei käyttänyt yksikään yhdeksäsluokkalainen vastaaja.

“Funktio kuvaa x:n suhdetta y:hyn. Sitä voidaan havainnollistaa kuvaajan avulla.”
“Funktio on laskulauseke, joka kuvaa kahden suureen riippuvuutta.”

Vaikka kysely antaakin hyvin vaatimattoman kuvan yhdeksäsluokkalaisten funktiokäsitteen ymmärtämisestä, opettajana ei liene silti syytä vaipua epätoivoon. Täytyy muistaa, että käsite on yksittäisten aikaisempien luokka-asteiden pohjustusyritysten jälkeen esitelty oppilaille kunnolla vasta edellisenä talvena ja se on kaikista yläkoulun aikana käytävistä matematiikan asioista vaikeimmasta päästä.

Suurella osalla yhdeksäsluokkalaisista opiskelijoista opiskeluintoon vaikuttaa ensinnäkin käsitteen vaikeus ja toisaalta se tosiseikka, että he tietävät jatkavansa opiskeluaan jossakin muualla kuin lukiossa, jossa funktiokäsitettä ei juuri tarvita. Lukioon menijöillä toisaalta on monta vuotta aikaa vahvistaa tietämystään, sillä funktio on lukiomatematiikan keskeisimpiä asioita, jonka opiskeluun ainakin pitkässä matematiikassa keskitytään monen kurssin ajan (Opetushallitus 2015). Ja tutkimuskyselyn perusteella oli toisaalta helppo vakuuttua siitä, että heitä ohjaamassa on lukiossa funktiokäsitteen varsin hyvin hallitsevat opettajat.

Funktiokäsitteen ymmärtämiseen johtava opetus ja oppiminen

Asioiden ymmärtäminen lienee jokaiselle matematiikan opettajalle opetuksen luonnollinen tavoite. Aivan kuin varmuuden vuoksi asia on silti kirjattu sekä lukion että perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteisiin tärkeäksi tavoitteeksi matemaattisen ajattelun kehittämisen rinnalle (Opetushallitus 2014, 2015, 2019). Etsittäessä parhaita tapoja funktiokäsitteen ymmärtämiseen johtavaan opetukseen on luontevaa palata erilaisiin ymmärtämisen määritelmiin ja pyrkiä toteuttamaan niiden ymmärtämiselle asettamia ehtoja funktiokäsitteen opettamisessa.

Hiebertin ja Carpenterin (1992, s. 67) mukaan asia on ymmärretty sitä paremmin, mitä enemmän ja mitä vahvempia yhteyksiä sille on muodostunut sisäiseen tietoverkkoomme. Selvästikin opetus pitäisi suunnitella niin, että opiskelijat rakentavat yhteyksiä aiheeseen liittyvien asioiden ja käsitteiden välille. Yhtä itsestään selvää on, että käsitteitä ja proseduureja ei pitäisi opettaa irrallisina tiedon palasina. Vähemmän selvää kuitenkin on, millaiset yhteydet ovat tärkeimpiä ja millainen opetus tehokkaimmin näitä yhteyksiä luo. (Hiebert & Carpenter 1992, s. 81)

Hiebert ja Carpenter (1992, s. 77) antavat useisiin tutkijoihin viitaten (Case & Sandieson 1988; Kieren 1988 Vergnaud 1988; Hiebert & Lindquist 1990; Lampert 1986, 1989) joitakin ohjeita opetuksen kehittämiselle ymmärtämisen parantamiseksi. Ensinnäkin oppilaille annettavat matemaattiset ongelmat pitäisi olla sillä tapaa vaihtelevia, että ne edistäisivät yhteyksien luomista asioiden välille. Toiseksi yhteyksien luomista eri ulkoisten esitystapojen välillä pitäisi tukea. Kolmanneksi opetuskeskustelu ja oppilaiden välinen yhteistyö luokassa pitäisi olla sellaista, että se helpottaisi yhteyksien tunnistamista ja sisäisten tietoverkkojen organisointia.

Sierpinskan (1992, s. 26) mukaan ymmärtäminen on paitsi yhteyksien luomista muihin käsitteisiin, myös esimerkkien ja vastaesimerkkien esittämistä käsitteelle ja analogioiden löytämistä aiemmin opittuun sekä käsitteeseen liittyvän teorian ja sovellusten hahmottamista. Sierpinska (1992, s. 57) pitääkin tärkeänä esittää oppilaille laaja kirjo erilaisia esimerkkejä funktioista eri muodoissaan ja etsiä näitä esimerkkejä myös jokapäiväisestä elämästä.

Määritelmien mukaan ymmärtäminen näyttää siis olevan juuri käsitteiden muodostamista ja konseptuaalista tietoa, jota Haapasalo (2004) kuvailee tietoverkoksi, jonka yhteyksien (linkkien) muodostamiseen verkon solmujen eli matemaattisten käsitteiden välillä opiskelija osallistuu. Toisaalta konseptuaalisen tiedon ymmärtäminen perustuu Sfardin (1991) mukaan prosesseihin ja proseduraaliseen tietoon, jotka kehittyneessä matemaattisessa ajattelussa yhdistyvät proseptiksi (Gray & Tall 1994), jolloin liikkuminen näiden kahden eri lähestymistavan välillä on joustavaa ja käsitteiden ymmärtäminen on korkeimmalla tasollaan (Haapasalo 2004). Tällaisen kehittyneen matemaattisen ajattelun muodostumista voitaisiin tukea proseduraalisten ja konseptuaalisten tehtävien vuorottelulla, minkä Walton (2016) havaitsi olevan opiskelijoiden ajattelun kehitykselle hyödyllistä.

Ymmärtämisen tärkeyttä matematiikan opetuksessa ei kuitenkaan voi liikaa korostaa. Kuten aeimmin todettiin, ymmärtäminen tehostaa tiedonhakua ja muistamista sekä parantaa siirtovaikutusta, jotka puolestaan helpottavat ongelmanratkaisua ja oppimista (Sfard 1991, Hiebert & Carpenter 1992). Ymmärtäminen on siis erittäin tärkeää matemaattisessa ajattelussa ja ongelmanratkaisussa. Tämän takia ymmärtäminen täytyy olla keskeinen tavoite matematiikan opetuksessa, aivan kuten se opetussuunnitelmissa onkin (Opetushallitus 2014, 2015, 2019).

Funktion esitystavat ja funktioon liittyvät keskeiset käsitteet koulumatematiikassa

Funktiokäsitteen opettamisessa Hiebertin ja Carpenterin (1992) sekä Sierpinskan painottama yhteyksien luominen on erityisen tärkeää funktion eri esitystapojen välillä, muuten ne voivat jäädä toisistaan irrallisiksi. Matematiikan käsitteiden ymmärtämisessä onkin jo pitkään korostettu erilaisten esitystapojen ja niiden välisten yhteyksien vahvistamista (Goldin 1998; Hähkiöniemi 2006). On myös tärkeää tarjota oppilaille laaja kirjo esimerkkejä erilaisista funktioista. (Sierpinska 1992, s. 57) Esimerkit on kuitenkin syytä valita huolella, jotta ne eivät toimi väärinkäsitysten lähteenä (Leinhardt ym. 1990, s. 52).

Jo aiemmin todettiin, että opiskelijoille esitystapojen liittäminen toisiinsa ja siirtyminen eri esitystapojen välillä aiheuttaa paljon haasteita (esim. Tall 1996; Gerson 2001; Elia ym. 2007) ja opiskelijat usein käsittelevät funktion eri esitystapoja itsenäisinä ja erillisinä toisistaan (Gerson 2001). Ymmärtäminen kehittyy asteittain, kun uutta tietoa liitetään olemassaolevaan sisäiseen tietoverkkoon ja uusia yhteyksiä rakennetaan aiemmin irrallisten tiedonpalasten välille ja tuetaan yhteyksien luomista eri ulkoisten esitystapojen välillä (Hiebert & Carpenter 1992, s. 67, 69).

Myös Makonyen (2014, s. 655) mukaan käsitteiden monipuolinen mallintaminen auttaa opiskelijoita ymmärtämään funktiokäsitteeseen liittyvät matemaattiset käsitteet kokonaisuudessaan. Tässäkin parhaana apuna voisivat olla Sierpinskan (1992) mainitsemat monipuoliset esimerkit erilaisista funktioista.

Kuten aiemmin huomattiin, funktiokäsitteeseen liittyy useita jo yksinään monimutkaisia alakäsitteitä, kuten muuttuja, vakiotermi, funktion ja muuttujan arvo, raja-arvo ja ääriarvot, kulmakerroin ja derivaatta, määrittely- ja arvojoukko, sekä tarvittavana taitona kuvaajan piirtäminen ja tulkinta (Leinhardt ym. 1990). Funktion ymmärtämisen kannalta erityisen tärkeitä ovat tuntemattoman, muuttujan ja vakion käsitteet ja riittävä algebran perustietämys (Sierpinska 1992). Näiden käsitteiden hallinta on hyvä tarkistaa funktion opiskelua aloitettaessa.

Toisaalta monilla koululaisilla on vaikeuksia abstraktin ajattelun kanssa, ja kuvaajien ja algebrallisten lausekkeiden kanssa työskentely ei ole helppoa. Ponten (1992) mielestä funktioiden opetuksen tulisikin antaa mahdollisimman tasapainoinen kuva kolmesta tärkeimmästä funktion esitysmuodosta eli numeerisesta, graafisesta ja algebrallisista esitystavasta. Juuri näihin esitysmuotoihin funktion opetus varsinkin peruskoulussa painottuukin (Opetushallitus 2014) ja suurimmalle osalle oppilaista näissäkin on aivan tarpeeksi omaksuttavaa.

Numeerinen esitystapa on oppilaille luonnollinen tapa tulkita vaikkapa kuvaajia, ja Ponten (1992) mielestä numeroihin pitäisi myös abstraktien matemaattisten käsitteiden yhteydessä säännöllisesti viitata. Hän myös väittää, että monet vaikeudet, joita oppilaat kokevat koulumatematiikassa nousevat paineesta käsitellä lähinnä abstrakteja kokonaisuuksia kunnioittamatta niiden luonnollisia juuria eli konkreettisia numeroita.

Toisaalta abstraktin ajattelun kehittyminen vaatinee riittävän määrän harjoitusta analyyttisten lausekkeiden parissa, ja Ponte myöntääkin niiden olevan edelleen tärkeitä. Mutta hänen mukaansa tärkeämpää kuin pitkien lausekkeiden oikeaoppinen pyörittely, on ymmärtää näiden lausekkeiden merkitys konkreettisissa tilanteissa ja etsiä esimerkkejä vaikkapa fysiikasta ja muilta tieteenaloilta. Myös funktioiden ominaisuuksien tulkinta karteesisista kuvaajista ansaitsee vakiintuneen paikan matematiikan opetuksessa (Ponte 1992), sillä kuvaajien tulkinta ei ole oppilaille helppoa (Leinhardt ym, 1990).

Kulmakertoimen käsitteen oppiminen on tärkeä osa funktion käsitteen opiskelua, sillä siihen perustuu erittäin keskeinen derivaatan käsite. Kulmakerroin voidaan tulkita useilla eri tavoilla, kuten geometrisesti, algebrallisesti, fyysisenä, suoraa määrittävänä tai funktion ominaisuutena, trigonometrisesti, lineaarista funktiota kuvaavana kertoimena, lukuna tai vakiona, differentiaalilaskennan tulkintana tai käytännön esimerkkeihin perustuvana tulkintana (Cho & Nagle 2017).

Ymmärtämisen määritelmien perusteella (Hiebert & Carpenter 1992, Sierpinska 1992) ymmärtämistä tukevassa opetuksessa näiden tulkintojen välille pitäisi pyrkiä muodostamaan mahdollisimman vahvoja yhteyksiä. Tämä voisi tapahtua käytännössä antamalla mahdollisimman paljon erilaisia esimerkkejä kulmakertoimesta ja ilmaista sitä yhtä aikaa graafisesti, algebrallisesti ja käyttämällä yllämainittuja eri tulkintoja.

Kulmakertoimeen liittyvissä tehtävissä tehtiin eniten virheitä aritmeettisissa laskutoimituksissa ja kulmakertoimen kaavan käyttämisessä (Cho & Nagle 2017). Peruslaskutoimitusten vahvistamisen lisäksi näihin ongelmiin voitaisiin mahdollisesti vaikuttaa myös kulmakertoimen monipuolisilla tulkinnoilla. Erityisesti geometrisen tulkinnan käyttö ja laskukaavojen mekaanisen käytön välttäminen auttoi osaa opiskelijoista (Cho & Nagle 2017). Tämän voi havaita myös käytännön opetustyössä, kulmakertoimen päättely kuvasta on monelle helpompaa vähemmän virhealtista kuin laskukaavan käyttö.

Funktion tunnistaminen ja yleisten funktioon liittyvien väärinkäsitysten ja haasteiden huomioiminen opetuksessa

Edellä esiteltiin yleisimpiä funktioon liittyviä väärinkäsityksiä. Osa näistä virheellisistä käsityksistä syntyi sinänsä oikean käsityksen virheellisestä yleistämisestä, esimerkiksi kaikki U:n muotoiset kuvaajat tulkittiin paraabeleiksi (Carlson & Oehrtman 2005) ja oppilailla oli vahva taipumus tulkita funktioita lineaarisina (Markovits 1986) tai ne liittyivät arkielämän kokemuksista peräisin oleviin mielikuviin tai aiempaan formaaliin opetukseen (Leinhardt ym. 1990).

Funktion käsite on voinut jäädä rajalliseksi — esimerkiksi vakiofunktiota, epäjatkuvaa tai paloittain määriteltyä funktiota ei tunnisteta funktioiksi tai diskreettiä ja jatkuvaa funktiota ei eroteta toisistaan — koska opetuksessa ei ole käyty läpi riittävän monipuolisesti erilaisia esimerkkejä (Vinner & Dreyfus 1989, Leinhardt ym. 1992). Funktion tunnistamisessa ja määrittelyssä havaittiin suuria puutteita myös tämän tutkimuksen yhteydessä 9-luokkalaisille oppilaille tehdyssä kyselyssä, eikä matematiikan yliopisto-opiskelijoilla tai opettajillakaan osaaminen ollut vielä täydellistä. Näihin virheellisiin tai puutteellisiin käsityksiin funktiosta voisi auttaa Sierpinskan (1992) peräänkuuluttama riittävän monipuolisten esimerkkien, vastaesimerkkien (esimerkit ei-funktioista) ja funktion esitystapojen käyttö opetuksessa.

Vahva proseduraalinen painotus haittaa usein funktion oppimista, ja oppilaat saattavat yrittää selvitä funktioon liittyvistä tehtävistä ulkoa opetelluilla säännöillä (Carlson & Oehrtman 2005). Toisaalta käsitys funktiosta saattaa olla rajoittunut kahteen yhtäsuuruusmerkkien erottamaan lausekkeeseen (Thompson 1994), ja funktio voidaan sekoittaa yhtälöön (Carlson & Oehrtman 2005). Näitä haasteita voitaisiin yrittää vähentää myöskin mahdollisimman monipuolisilla ja selkeillä esimerkeillä sekä graafisen ja numeerisen esitystavan ottamisella vahvasti opetukseen mukaan ja näiden kytkemisellä algebralliseen esitystapaan, sekä liian proseduraalisen painotuksen ja ulkoa opettelun välttämisellä.

Kuvaajien tulkinnassa oppilailla on paljon haasteita. Heillä on muun muassa taipumus keskittyä yksittäisiin pisteisiin kuvaajan globaalin tulkinnan sijaan—heidän on esimerkiksi vaikeaa nimetä kuvaajasta välit, joilla funktio kasvaa tai vähenee tai toinen funktio on suurempi kuin toinen. Kuvaajan muoto voidaan myös helposti sekoittaa tilanteesta piirrettyyn kuvaan ja kuvaajan asteikkojen lukeminen oli usein puutteellista. (Bell & Janvier 1981) Koordinaatiston piirtämisessä on myös oppilailla paljon vaikeuksia (Leinhardt ym. 1990). Näiden tietojen valossa tuntuu järkevältä ottaa opetukseen mukaan riittävästi sekä kuvaajan tulkinnan että piirtämisen harjoittelua keskittyen juuri edellä mainittuihin ongelmakohtiin.

Funktiokäsitteen opettamisen järjestys - onko tähän olemassa parasta ratkaisua?

Ymmärtämiseen tähtäävä ja käsitteiden välisiä yhteyksiä luova matematiikan opetus voidaan Hiebertin ja Carpenterin mukaan (1992, 81-83) jakaa erilaisiin näkökulmiin sen mukaan, analysoidaanko ensin tavoiteltavan tiedon rakenne ja lähdetään rakentamaan siihen liittyviä yhteyksiä vai aloitetaanko oppilaan jo olemassaolevasta tietämyksestä ja laajennetaan tätä kohti tavoiteltavaa tietorakennetta. Ensimmäisen ylhäältä alas -näkökulman vaarana on, että opetuksella ei ole yhteyttä oppilaan olemassaolevaan tietoon ja oppilas luo erilliset järjestelmät käytännön ongelmanratkaisulle ja koulumatematiikalle. Jälkimmäisen alhaalta ylös -näkökulman heikkoutena taas on oppilaan epäformaalien käsitysten rajoittavuus. Oppilaalle merkitykselliset käytännön ongelmatilanteet eivät tarjoa välttämättä riittävän laajaa kontekstia uuden käsitteen rakentamiselle.

Leinhardt ym. (1990) esittelevät kolme funktion opetuksen aloitustapaa, jotka edustavat lähinnä ylhäältä alas -näkökulmaa. Ensimmäisessä opetus aloitetaan etsimällä funktion sääntö annetun datan perusteella. Tämä tapa rakentaa oppilaiden intuitiivista näkemystä funktioista ja toimii funktiokoneen nimellä yleisenä aloitustapana myös suomalaisissa oppikirjoissa (Lindroos-Heinänen ym. 2010, 2011; Ekonen ym. 2016). Toisessa generoidaan ensin dataa todellisesta tilanteesta ja piirretään niistä kuvaaja ja kolmannessa aloitetaan tutkimalla kvalitatiivisia kuvaajia eri tilanteista. Sen sijaan Leinhardtin ym. mukaan funktion opetuksen aloittaminen oppilaiden omasta tietämyksestä vaatii todella paljon pedagogista sisältötietoa opettajalta ja yhtenäisen kokonaisuuden rakentaminen voi olla vaikeaa.

Kuva 12: *Funktiokone on suomalaisissa oppikirjoissa yleinen tapa aloittaa funktion opetus*

Funktion opetuksen järjestyksen merkityksestä oppimiseen ei tutkimuksessa ole olemassa juurikaan todisteita, mutta sen sijaan on laaja yksimielisyys siitä, että opetuksen pitäisi edetä vähemmän formaalista ja abstraktista, globaalista ja intuitiivisesta formaaliin ja merkinnällisesti rikkaaseen funktiokäsitteeseen (Leinhardt ym. 1990, s. 49). Tall (1991) muistuttaa, että looginen esitys ei välttämättä ole tarkoituksenmukainen opiskelijalle, vaan ajattelun pitäisi kehittyä opiskelijalle sopivalla tavalla - matemaattisen ajattelun pitäisi kasvaa oppilaiden kasvun kanssa yhtä aikaa. Esimerkiksi vanhaa funktion käsitettä pitäisi painottaa kouluopetuksessa formaalin käsitteen sijaan (Ponte 1992, Sierpinska 1992). Opetus, joka auttaa opiskelijaa aktiivisesti rakentamaan käsitteitä omista lähtökohdistaan käsin voi olla todella menestyksellistä (Tall 1991).

Perinteinen suomalainen matematiikan opetus toteuttaa näitä periaatteita mielestäni melko hyvin aloittamalla funktion (itse havaitusta) säännöstä ja määritelmästä ja etenemällä siitä funktion arvoon ja funktion kuvaajan tulkintaan sekä piirtämiseen, nollakohtiin, kulmakertoimeen ja suoran yhtälöön ja siitä monimutkaisempiin funktioihin, derivaatan ja integraalin käsitteeseen ym. (Lindroos-Heinänen ym. 2011; Opetushallitus 2014, 2016) Opettaja voi omassa opetuksessaan tukea yhteyksien muodostumista oppilaalle jo tuttuun tietoon esimerkiksi käytännön esimerkkien kautta ja auttaa oppilasta rakentamaan itselleen mielekkäitä merkityksiä käsitteille. Ammattitaitoiselta opettajalta tämä onnistuu, ja opettajan hyvä aineenhallinta onkin funktion opettamisessa erityisen tärkeää. Ammattitaitoisen opettajan opetus sisältää huolellisesti valittuja esitystapoja ja hiottuja verbalisointeja, ratkaisujen periaatteet kuvataan selkeästi ja tyypilliset virheet tutkitaan tarkasti nopean ohittamisen sijaan (Leinhardt ym. 1990, s. 51).

Merkittävä konsensus vallitsee tutkijoiden välillä myös siitä, että siirtyminen edestakaisin kvalitatiivisten ja kvantitatiivisten esitysten välillä on hyödyllistä, sillä tutkimuksen mukaan näiden välisissä yhteyksissä on puutteita ja kuitenkin molempia tarvitaan (Leinhardt ym. 1990, s. 50). Walton (2016) taas havaitsi opetuksen, jossa proseduraaliset ja konseptuaaliset tehtävät vuorottelivat, olevan hyödyllistä oppilaiden kognitiiviselle kehitykselle. Myös Leinhardt ym. (1990) painottaa erityyppisten tehtävien tärkeyttä.

Millaisia johtopäätöksiä tästä kaikesta voimme vetää? Näyttäisi siltä, että opetuksen järjestyksellä ei välttämättä ole kovin suurta merkitystä oppilaan oppimiselle, kunhan opetus etenee vähemmän abstraktista ja intuitiivisesta formaaliin, sisältää vaihtelua kvalitatiivisten ja kvantitatiivisten sekä proseduraalisten ja konseptuaalisten harjoitusten välillä ja auttaa oppilasta luomaan käsitteitä omista lähtökohdistaan käsin ammattitaitoisen opettajan ohjauksella.

Ongelmanratkaisu, käytännön esimerkit, keskustelu ja kysymykset

Matematiikka ei ole pelkkää laskemista, vaan matematiikan opetuksessa pitäisi pyrkiä ymmärtämiseen. Tämä tavoite on selkeästi kirjattu myös opetussuunnitelmiin (Opetushallitus 2014, 2015 & 2019). Yksi opetusmalli, joka tässä yhteydessä nousee kirjallisuudesta esiin, on avoimien tehtävien, joissa lähtö- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritelty, käyttö kehittämään opetusta ymmärtämistä ja luovuutta edistävään suuntaan (Pehkonen 2011, s. 21 viittaa useisiin lähteisiin: Nohda 1991, Silver 1993, Stacey 1995). Myös Tallin (1991, s. 15) mukaan matematiikan perusopetuksessa, joka on aiemmin perustunut matemaattisen tiedon synteesiin, painotus on vähitellen siirtymässä ongelmanratkaisun ja avoimien tutkimusten suuntaan. Pehkonen (2011, s. 22) kuitenkin muistuttaa, että tämä edellyttää opettajalta aineenhallinnan ja pedagogisten taitojen lisäksi kehittynyttä matematiikkakuvaa ja joustavuutta opetuksen toteuttamisessa.

Usein ajatellaan, että matemaattinen ajattelu on vain loogista ajattelua, mutta aktiivisesti matematiikkaa käyttävä tarvitsee myös luovaa ajattelua, ja matemaattisessa ongelmanratkaisussa nämä asiat liittyvät kiinteästi toisiinsa (Pehkonen 2011, s. 12). Tall (1991, s. 15) puhuu tässä yhteydessä joustavasta ajattelusta, sitä tarvitaan matemaattisessa ajattelussa logiikan ja päättelyn lisäksi yhteyksien luomiseen aiemmin irrallisten käsitteiden välille. Kaiken tämän tiedon pohjalta voisi siis ajatella, että avoimien tehtävien käyttö ja ongelmanratkaisu voisi edistää myös funktiokäsitteen ymmärtämiseen johtavaa opetusta.

Ponte (1992) muistuttaa, että koulumatematiikka on pitkään keskittynyt algebrallisten lausekkeiden muokkaamiseen, mistä ei ole apua todellisten ongelmien ratkaisemisessa. Siksi oppilaille tulisi tarjota mahdollisuuksia oikeiden, konkreettisten ongelmien ratkaisemiseen, joiden avulla he voisivat ymmärtää lausekkeiden käytännön merkityksen. Samalla he saisivat kosketusta numeeriseen ajatteluun, mikä on usein heille luontaisempaa kuin abstraktit matemaattiset käsitteet. Makonyen (2014) mukaan esimerkkien tarjoaminen oikeasta elämästä voi paitsi estää väärinkäsityksiä, myös herättää kiinnostusta matematiikkaa kohtaan.

Myös Sierpinskan (1992, s. 57) mielestä oppilaille tulisi antaa mahdollisuuksia käyttää funktioita jokapäiväisten ilmiöiden tai tieteistä poimittujen esimerkkien selittämiseen. Hänen mukaansa tilanteesta luotavan mallin ei tarvitse olla yksinkertaistettu suoraviivaiseksi harjoitukseksi, jossa on yksiselitteinen ratkaisu, vaan mallista pitäisi käydä keskustelua yhdessä luokan kanssa. Oppilaille pitäisi myös antaa tilaisuuksia verbalisoida havaintoja, joita he tekevät suureiden muutoksista ja niiden välisistä suhteista.

Keskustelu on tärkeää muutenkin opetuksessa, sillä opettajan on vaikeaa havainnoida oppilaiden ajattelua muuten kuin keskustelujen kautta (Pehkonen 2011, s. 11). Opettajan tulisi myös rohkaista oppilaitaan kysymään, ja toisaalta opettaja pystyy omilla kysymyksillään ohjaamaan oppilaidensa ajattelua ja syventämään ymmärtämistä (Leinonen 2018, s. 77). Jokaisella oppilaalla on erilaiset ajatteluprosessit (Tall 1991, s. 5), joihin opettaja voi kysymysten avulla saada näkymää. Näin opettaja pääsee helpommin puuttumaan virheelliseen päättelyyn ja ohjaamaan sitä oikeaan suuntaan.

Tekniset apuvälineet

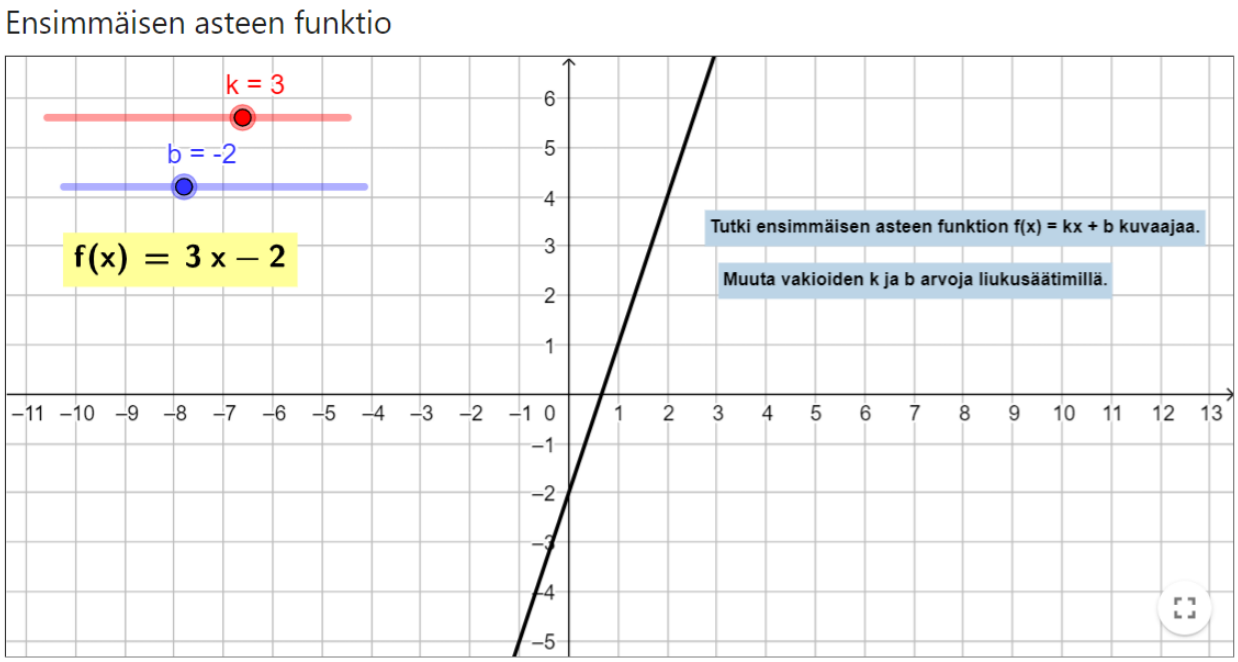
Tieto- ja viestintätekniikasta on vihdoin tullut valtavirtaa myös koulumaailmassa, ja matematiikan opettamisesta onkin vaikeaa puhua luomatta silmäystä matematiikan opetuksessa käytettäviin tietoteknisiin apuvälineisiin. Merkittävä askel kulttuurin muuttumiseen on ollut sähköisen ylioppilastutkinnon käyttöönotto myös matematiikan kokeessa sekä symbolisen laskennan (CAS) salliminen laskennan apuvälineenä lukio-opinnoissa ja ylioppilaskirjoituksissa (Silfverberg 2018).

Jo kolme vuosikymmentä sitten Tall (1991, s. 18) ehdotti tietokoneen käyttöä derivaatan havainnollistamisessa ja arveli tietokoneesta olevan yleisemminkin apua matemaattisten käsitteiden visualisoinnissa. Tietokoneen avulla saadaan hänen mukaansa globaali näkymä matemaattisiin käsitteisiin, mikä johtaa matemaattisen ajattelun kehittymiseen. Hän muistutti kuitenkin, että on tärkeää yhdistää visuaaliset ideat laskennalliseen käsittelyyn ja teoriaan ja etsiä hedelmällistä vuorovaikutusta näiden ajattelun eri ilmenemismuotojen välillä.

Opetussuunnitelmissa tekniset apuvälineet on mainittu sekä opiskelun yleisissä tavoitteissa että matematiikan tavoitteissa (Opetushallitus 2014, 2015 & 2019). Lukion uusimmassa opetussuunnitelmassa (Opetushallitus 2019) on ohjelmistojen ja digitaalisten tiedonlähteiden käytön lisäksi mainittu tavoitteena myös, että opiskelija oppii arvioimaan näiden välineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta - ohjelmiston tuottama tulos ei yksinään riitä todistamaan tai perustelemaan väitettä.

Kunhan nämä tietotekniikan käytön rajat pidetään mielessä, ohjelmien käyttäminen voi tehostaa matematiikan oppimista ja säästää aikaa, kun opiskelijoiden omatoiminen tutkiminen tulee helpommaksi (Hähkiöniemi 2018, s. 124). Myös yhä suurempi osa rutiinilaskennasta on siirtynyt koneiden tehtäväksi ainakin sitten, kun peruslaskutaito on saavutettu (Silfverberg 2018, s. 397). Funktion opiskelussa esimerkiksi funktion kuvaajat voidaan nopeasti piirtää ja ainakin hankalampien funktion derivaatan ja integraalin laskeminen siirtää tietokoneen tehtäväksi. Näin aikaa riittää paremmin kuvaajien tutkimiseen ja päätelmien tekemiseen tietokoneen antamien laskelmien pohjalta. Myös funktion eri esitystapojen välisiä yhteyksiä voidaan vahvistaa, kun numerodata tai algebrallinen lauseke on helposti siirrettävissä graafiseksi esitykseksi, ja siten parantaa funktiokäsitteen ymmärtämistä. Matematiikka onkin yhä enemmän ihmisen ja koneen hallittua vuorovaikutusta: käyttäjän pitää osata muotoilla matemaattinen sisältö koneelle ja arvioida saadun vastauksen mielekkyys (Silfverberg 2018, s. 397).

Uudet välineet, kuten dynaamiset matematiikkaohjelmistot sekä monipuolinen applettien tarjonta ja niiden helppo laadinta, ovat lisänneet mahdollisuutta konkretisoida ja visualisoida matematiikan käsitteitä ja sääntöjä (Silfverberg 2018, s. 396). Esimerkiksi ilmaisella Geogebra-ohjelmalla, joka on käytössä myös sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa, voidaan helposti julkaista kaikkien saataville appletteja, jotka havainnollistavat matemaattisia käsitteitä. Kuvassa alla on ohjelmalla luotu sovelma ensimmäisen asteen funktiosta (Huisman 2019). Käyttäjä voi valita kulmakertoimen ja vakiotermin arvot liukusäätimellä ja ohjelma piirtää funktion kuvaajan ja antaa funktion lausekkeen. Tällainen apuväline voi toimia hyvänä tukena funktion alkeiden opiskelussa siinä vaiheessa, kun peruskäsitteet ja ensimmäisen asteen funktion lausekkeen rakenne ja piirtäminen on jo opittu. Myös funktion algebrallisen lausekkeen ja kuvaajan välinen yhteys vahvistuu, kun niitä voidaan helposti vierekkäin vertailla ja niiden muutoksia tutkia. Haasteena teknisten apuvälineiden helpossa saatavuudessa on toki se, että osa oppilaista ei tule enää piirtäneeksi kuvaajaa itse ja tämä tärkeä taito jää oppimatta. Toisaalta kuvaajan ja sitä vastaavan funktion lausekkeen, kulmakertoimen ja vakiotermin yhteyksien tutkiminen on helpompaa ja se saattaa nopeuttaa oppimista.



Kuva 13: *Ensimmäisen asteen funktiota havainnollistava Geogebra-sovelma (Huisman 2019)*

On selvää, että tietotekniset apuvälineet mahdollistavat monen asian, kuten funktion käsitteen, opettamisen paremmin kuin ennen. Toisaalta oppimistulokset eivät välttämättä parane tieto- ja viestintätekniikan käyttöä lisäämällä (OECD 2015). Tähän voi olla syynä se, että teknologian käytön ohjaaminen ja opettelu on vienyt aikaa varsinaiselta matematiikan opiskelulta. (Silfverberg 2018) Tieto- ja viestintätekniikka on kuitenkin osa nykymaailmaa ja koulu ei voi jäädä tämän teknisen kehityksen ulkopuolelle. Lieneekin parasta ottaa teknisistä apuvälineistä kaikki se hyöty, mikä niistä on saatavissa funktiokäsitteen havainnollisempaan ja monipuolisempaan oppimiseen.

Ohjeita opetukseen

Edellisissä kappaleissa pohdittiin tutkimuskirjallisuuden pohjalta funktion ymmärtämiseen johtavaa opetusta ja oppimista monista eri näkökulmista. Kirjallisuudesta tehdyn synteesin ja päätelmien pohjalta tiivistän tähän listan suosituksia, joita opetuksessa kannattaisi ottaa huomioon. En millään tavalla väitä, että lista olisi tyhjentävä ohje, mutta siitä voi opettajana poimia ideoita omaan opettamiseen, sitä voi käyttää apuna opetussuunnitelmatyössä tai se voi toimia pohjana jatkotutkimukselle. Toivon siitä olevan apua mahdollisimman monelle funktion opettamisen tai opetuksen tutkimuksen parissa työskentelevälle.

Ohjeita funktiokäsitteen opettamiseen:

- ➢ Esitä riittävän monipuolisesti esimerkkejä funktioista ja ei-funktioista
- ➢ Varmista algebran ja aritmetiikan perustaitojen hallinta sekä tarkista funktioon liittyvien peruskäsitteiden kuten muuttujan (erota tuntemattoman käsitteestä) ja vakion osaaminen. Varmista, että keskeiset funktioon liittyvät käsitteet opitaan.

- Esittele useita funktion esitystapoja ja varmista, että eri esitystapojen välille muodostuu riittävän vahva yhteys. Jos abstraktin ajattelun kanssa on vielä haasteita, keskity kolmeen tärkeimpään esitysmuotoon eli numeeriseen, graafiseen ja algebralliseen esitykseen (mahdollisesti vielä painottaen numeerista ja graafista esitystä).
- Harjoita riittävästi funktion kuvaajan piirtämistä. Varmista koordinaatiston piirtämisen hallinta ja asteikkojen sujuva lukeminen ja käyttö.
- Varmista kuvaajan tulkinnan taito ja anna esimerkkejä konkreettisista tilanteista. Pyri pois pisteittäisestä tulkinnasta ja harjoita riittävästi globaalia tulkintaa, kuten millä välillä funktio kasvaa tai vähenee tai toinen funktio saa suurempia arvoja kuin toinen. Varmista asteikkojen lukemista ja arvojen lukemista myös akselien pisteiden väleiltä.
- Aloita vähemmän abstraktista ja intuitiivisesta ja etene siitä formaaliin esitykseen. Pyri luomaan käsitteitä oppilaan omista lähtökohdista käsin niin, että matemaattinen ajattelu kasvaa rinta rinnan oppilaan kognitiivisen kasvun kanssa.
- Vaihtele erityyppisiä tehtäviä: kvalitatiivisia ja kvantitatiivisia, proseduraalisia ja konseptuaalisia. Vältä kuitenkin liikaa proseduraalista painotusta ja ulkoa opettelua.
- Esittele monipuolisesti kulmakertoimen eri tulkintoja ja luo yhteyksiä niiden välille antamalla erilaisia esimerkkejä. Erityisesti pidä graafinen tulkinta mukana algebrallisen tulkinnan ja aritmeettisten laskutoimitusten rinnalla.
- Varmista, että aineenhallintasi on riittävän hyvä. Jos ei ole, opiskele lisää.
- Valitse esimerkit huolella, jotta ne eivät johda väärinkäsityksiin.
- Tarjoa mahdollisuuksia avoimiin tehtäviin ja ongelmanratkaisuun, myös oikeissa, konkreettisissa tilanteissa.
- Keskustele, kysy ja rohkaise oppilaita kysymään!
- Opeta hyödyntämään teknisiä apuvälineitä niin, että ne tehostavat ja auttavat oppimista. Opeta arvioimaan saadun vastauksen mielekkyys ja muistuta, että tietokoneen antama tulos ei yksin riitä perusteluksi.

Johtopäätökset

Funktiokäsitteen ymmärtäminen ei ole oppilaalle yksinkertainen tehtävä. Väärinkäsityksiä syntyy usein ja käsite jää helposti vajavaiseksi tai se jää kokonaan muodostumatta. Siksi käsitteen opettaminen vaatii myös opettajalta erityistä huolellisuutta ja kärsivällisyyttä.Yleisimmät väärinkäsitykset on hyvä huomioida opetuksessa ja uusien muodostuminen estää tarkkaan suunnitellulla opetuksella ja taitavasti valituilla esimerkeillä.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on ollut saada käsitys siitä, miten funktiokäsite voitaisiin opettaa niin, että oppilaat todella ymmärtävät oppimansa. Työssä on käyty läpi funktion syntyhistoriaa ja löydetty sieltä yhtymäkohtia nykyäänkin opetuksessa käytettäviin funktio-käsitteen muotoihin. Toisaalta on pohdittu tutkimuskirjallisuuden pohjalta, mitä ymmärtäminen ja matemaattinen ajattelu ylipäänsä ovat ja kuinka abstraktit matemaattiset käsitteet muodostuvat. Työn keskeistä antia on kirjallisuuskatsaus viimeisten vuosikymmenien aikana tehdystä tutkimuksesta, joka käsittelee funktiokäsitteen oppimista. Kirjallisuudesta löydettiin lukuisia funktiokäsitteen oppimista haittaavia yleisiä haasteita sekä erityisiä, tiettyyn käsitteen yksityiskohtaan liittyviä selkeitä väärinkäsityksiä. Kirjallisuutta tutkiessa huomattiin, että funktiokäsitteen ymmärtämistä kokonaisuutena käsittelevä tutkimus oli jo monen vuosi-kymmenen takaa. Uudempaa tutkimusta löytyi lähinnä joistakin funktiokäsitteen pienistä osa-alueista, kuten kulmakertoimesta.

Toisaalta tästä syystä, ja toisaalta omasta mielenkiinnosta, halusin toteuttaa tämän työn yhteydessä pienen tutkimuksen. Idea syntyi, kun luin Vinnerin ja Dreyfusin (1989) yli 30-vuotta sitten toteuttaman, mielestäni erittäin hyvän ja mielenkiintoisen tutkimuksen, jossa oli tutkittu collegeopiskelijoiden ja yläkoulun matematiikan opettajien näkemyksiä funktiokäsitteestä. Toin tutkimuksen nykypäivään muokkaamalla sen pohjalta kyselyn joukolle 9-luokkalaisia sekä sekalaiselle joukolle matematiikan opettajia, opiskelijoita ja muita aiheesta kiinnostuneita. Tuloksista löytyi paljon yhteneväisyyksiä 30 vuoden takaiseen, mutta myös selkeitä eroja.

Tällaiselle tutkimuksen uusintamiselle olisi kirjallisuuskatsauksen perusteella paljon tarvetta. Löytyy paljon tutkimusta erityisesti 1980-90-luvuilta, joiden toteuttaminen sopivasti muokattuna nykypäivän oppilaille toisi lisää tietoa vuosikymmenten kuluessa muuttuneen opetuksen vaikutuksesta oppilaiden funktiokäsitteeseen. Erityisen hedelmällistä voisi olla tutkia tietoteknisten apuvälineiden vaikutusta funktion eri esitysmuotojen välisten yhteyksien ymmärtämiseen. Funktion esitysmuotojen välisissä siirtymissä on oppilailla paljon ongelmia, joita nykytekniikalla voitaisiin helpottaa esimerkiksi tässäkin työssä esitetyn tapaisilla Geogebra-sovelmilla, joilla funktion algebrallisen esitysmuodon ja kuvaajan välinen yhteys tulee oppilaalle selkeästi näkyviin ja tekee helpoksi oppilaan oman tutkimisen ja kokeilun erilaisten funktion lausekkeiden avulla.

Toisaalta ongelmanratkaisu on noussut nykypäivänä yhdeksi matematiikan opetuksen kuumista aiheista. Olisi mielenkiintoista toteuttaa ohjattuun ongelmanratkaisuun perustuva opetus-kokonaisuus, jossa funktioon liittyvää ongelmaa ratkottaisiin ohjatusti niin, että vaihdeltaisiin proseduraalisia ja konseptuaalisia työvaiheita ja lopuksi selvitettäisiin, miten interventio vaikutti oppilaiden funktiokäsitteen muodostumiseen. Käytännön opetustyössä myös huomaa, kuinka abstraktien matematiikan sisältöjen lisääntyminen yläkoulun aikana lisää oppilaiden negatiivisia ajatuksia matematiikasta ja aiheuttaa jopa suoranaista matematiikka-ahdistusta, ja aiheesta on myös kirjoitettu paljon (mm. Eisenberg 1991, Huhtala 1999, Hannula & Holm 2018). Olisi mielestäni tarpeellista selvittää, kuinka suuri osuus funktiokäsitteen opiskelun haasteista liittyy affektiivisiin ja motivaatiotekijöihin ja miten asiaa voitaisiin erityisesti yläkoulun puolella parantaa.

Tämän työn ehdottomasti tärkein lopputulos on kirjallisuuden ja oman tutkimuksen pohjalta tehty synteesi hyvästä funktiokäsitteen opettamisesta ja tämän perusteella kootut konkreettiset ohjeet opettajalle funktiokäsitteen ymmärtämistä lisäävään opetukseen. Ohjeiden lista on melko pitkä ja osittain myös yksityiskohtiin pureutuva. Kuinka olisi mahdollista kiteyttää se tärkein, jonka avulla matematiikan opetusta voisi kehittää ymmärrystä lisäävään suuntaan? Ehkä yhden hyvän vastauksen löytää, kun tutkii Polyan kirjoitusta lähes puolen vuosisadan takaa (1963). Hän kirjoittaa, että matematiikan opetuksen tärkein tarkoitus on opettaa nuoria *ajattelemaan* - mikä tarkoittaa, että opettajan ei pitäisi pelkästään välittää tietoa, vaan opettaa oppilaita käyttämään tuota tietoa esimerkiksi ongelmanratkaisuun. Jotta tämä olisi mahdollista, oman kokemukseni mukaan opettajan täytyy oppilaan lähtötaso huomioiden osata kertoa asiat niin selkeästi, ymmärtämisen esteitä tieltä raivaten, että oppilaan ajattelu pääsee kehittymään. Opettajan pitäisi siis tehdä matematiikasta oppilaalle mahdollisimman ymmärrettävää ja selkeää. Eisenberg tiivistää hyvin funktion oppimisen vaikeuksista kirjoittaessaan:

“Good mathematics is not necessarily complex mathematics, and complex mathematics is not necessarily good mathematics. But, given a choice, it seems obvious that one would opt for the less complex and the more intuitive.” (Eisenberg 1991, 152)

Siis aloita intuitiivisesta ja etene siitä varovaisin askelin kohti abstraktimpaa esitystä. Ota huomioon oppilaan lähtökohdat niin, että matematiikan ymmärrys kasvaa rinta rinnan oppilaan ajattelun kehityksen ja kognitiivisen kasvun kanssa. Ehkä tämä voisi toimia ensimmäisenä askeleena kaiken abstraktin matematiikan ja siten myös funktiokäsitteen ymmärrettävämpään opetukseen.

Lähteet

Adams, R. A. (1995). Calculus: A Complete Course. Addison-Wesley Publishers Limited.

Bell, A. & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34-42.

Bereiter, C. (2002). Education and mind in the knowledge age. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function. MAA Online, 9. Haettu 29.2.2020 osoitteesta https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function

Cho, P. & Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135-150.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education 13*, 360-389. In *Investigations in Mathematics Education 16*(2).

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.), *The nature of mathematical thinking,* 253-284.. Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Dubinsky, E. & Wilson, R.T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior 32.* 83-101.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (ed), *Advanced mathematical thinking* s. 140-152. Kluwer Academic Publishers.

Ekonen, M., Hassinen, S., Heiskanen, P., Hemmo, K., Kaakinen, P., Tahvanainen, J. & Taskinen, T. (2016). Yhteinen Tekijä Lukion matematiikka 1. Sanoma Pro Oy.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2007). Relations Between Secondary Pupils' Conceptions About Functions and Problem Solving in Different Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education 5*, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior 17*(1), 105-121.

Fujii, T. (2003). Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand. *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference, vol 1,* 49-65. IGPME.

Gerson, H. H. (2001). Making connections: Compartmentalization in pre -calculus students' understanding of functions. University of New Hampshire. https://scholars.unh.edu/dissertation/16

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen,* 50-83. Niilo Mäki Instituutti.

Harjulehto, P., Klén, R. & Koskenoja, M. (2016). Analyysiä reaaliluvuilla. Unigrafia Oy.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). In Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 65-97. National Council of Teachers of Mathematics.

Huisman, J. (2019). Ensimmäisen asteen funktio. https://www.geogebra.org/m/p2u3cyjv

Hähkiöniemi, M. (2006). The role of representations in learning the dervative. [Doctoral dissertation, University of Jyväskylä]. University of Jyväskylä, Department of Mathematics and Statistics, Report, 104.

Hähkiöniemi, M. (2018). Derivaatan ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen ja opetus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 394-408). Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. (2005). Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä [väitöskirja, Tampereen yliopisto]. Tampereen Yliopistopaino Oy.

Kerslake, D. (1981). Graphs. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics concepts: 11-16* (s. 120-136). John Murray.

Kettunen, J., Koponen, J., Portaankorva-Koivisto, P., Seppäläinen, S. & Tuohilampi, L. (2020). Muuttuja 7-9 Matematiikan käsikirja. Sanoma Pro Oy.

Lehtinen, M. (1995). Matematiikan lyhyt historia. Yliopistopaino.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1-64.

Leinonen, J. (2003). Käsite ja ymmärtäminen. *Kasvatus, 34*(1), 56-65.

Leinonen, J. (2018). Matematiikan ymmärtämisestä: Käsitteistä käytäntöön [väitöskirja, Lapin yliopisto]. Lapin yliopisto.

Lindroos-Heinänen, R. (2009). Laskutaito 7 Opettajan opas 3. WSOYpro Oy.

Lindroos-Heinänen, R., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. (2010). Laskutaito 8 Opettajan opas 2. WSOYpro Oy.

Lindroos-Heinänen, R., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. (2011). Laskutaito 9 Opettajan opas 2. WSOYpro Oy.

Makonye, Judah P. (2014). Teaching Functions Using a Realistic Mathematics Education Approach: A Theoretical Perspective. *International Journal of Educational Sciences, 7*. 653-662.

Markovits, Z., Bat-Sheva, E. & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2). 18-24, 28.

Marquis, Jean-Pierre. (2019). Category Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/category-theory/>.

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.), *The nature of mathematical thinking.* (s. 29-53). Lawrence Erlbaum Associates.

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B. & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical thinking and learning, 15*(3), 201-227.

OECD (2015). Students, Computers and Learning: Making the Connection. OECD Publishing. Haettu osoitteesta https://www.oecd.org/publications/students-computers-and-learning-9789264239555-en.htm

Opetushallitus (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki. http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Opetushallitus (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Helsinki. http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

Opetushallitus (2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. Helsinki. https://www.oph.fi/fi/tilastot-ja-julkaisut/julkaisut/lukion-opetussuunnitelman-perusteet-2019

Paz, T. & Leron, U. (2009). The Slippery Road From Actions on Objects to Functions and Variables. *Journal for Research in Mathematics Education. 40*(1), 18-39.

Pehkonen, E. (2011). Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa Pehkonen, E. (toim.) *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista.* Helsingin yliopisto.

Perkins, D. & Blythe, T. (1994). Putting understanding up front. *Educational Leadership*, 4-7. http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/feb94/vol51/num05/Putting-Understanding-Up-Front.aspx

Poincaré, H. (1952). Science and method. Thomas Nelson and Sons.

Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. *The American Mathematical Monthly, 70*(6), 605-619.

Ponte, J. P. (1992). The history of concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2), 3-8.

Rice, B. (1992). Increasing critical thinking skills of the fourth-grade student through problem solving activities (Ed.D. Practicum, Nova University).

Rinne, S., Sintonen, A.M., Uus-Leponiemi, T. & Uus-Leponiemi, M. (2019) Kymppi 4 Syksy. Sanoma Pro Oy.

Sethi, R. (1996). Programming Languages: Concepts and Constructs. Addison-Wesley, 2 edition.

Schoenfeld, A. H. (1994). Mathematical thinking and problem solving. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy MAA Notes 25* (s. 25-58). Mathematical Association of America.

Silfverberg, H. (2018). Tieto- ja viestintätekniikka matematiikan oppimisessa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 394-408). Niilo Mäki Instituutti.

Skemp, R. R. (1986). The psychology of learning mathematics (2. ed.). Penguin Books.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed), *Advanced mathematical thinking* (s. 140-152). Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, (s. 289–325). Kluwer.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1* (*Issues in Mathematics Education, 4*, 21-44). American Mathematical Society.

Tossavainen, T., Joutsenlahti, J., Lehtinen, M. & Merikoski, J.(2017). Merkittäviä suomalaisia matematiikan oppikirjoja ja -kirjailijoita. https://www.researchgate.net/publication/313559214_Merkittavia_suomalaisia_matematiikan_oppikirjoja_ja_-kirjailijoita

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Väisälä, K. (1963). Algebran oppi- ja esimerkkikirja. Werner Söderström osakeyhtiö. Haettu https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/vaisala/vaisala.pdf

Walton, G. (2018). Could an iterative approach to relational and procedural tasks aid depth of understanding mathematics. In Adams, G. (Ed.) Proceedings of the British society for research into learning mathematics 36(2) (s. 67-72).