

# **CÁLCULO DE LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE ROTURA**

Trabajo Fin de Grado, Julio 2021  
Alumno: José Manuel Tocado Cabezas  
Tutor: Leandro Morillas Romero



# **CÁLCULO DE LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE ROTURA**

## **Trabajo Fin de Grado**

Grado en Estudios de Arquitectura

**José Manuel Tocado Cabezas**

Tutor: Leandro Morillas Romero

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

Universidad de Granada

Convocatoria: Julio 2021



**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**



**Escuela Técnica Superior de  
Arquitectura de Granada**

*A mi tutor Leandro, por todo su apoyo,  
esfuerzo y por su paciencia a pesar de las  
circunstancias.  
A mi familia y amigos por haberme apoyado  
durante todo mi camino para poder llegar a  
este momento, en especial, a mi madre, mi  
referente en la vida y la persona que más ha  
creído en mí durante toda mi carrera.*

*Gracias de corazón*

# RESUMEN

En este trabajo se ha planteado la problemática de resolver losas de hormigón armado mediante el análisis plástico, es decir, en la rotura de la pieza. Esto nos llevará a un análisis de la estructura con mayor exactitud, más cercano al comportamiento real de la pieza y a un resultado más económico del que se viene obteniendo con otros métodos. Todo ello en base al cálculo estructural mediante líneas de rotura, un cálculo en Estado Límite Último y que tiene como referente principal las teorías que planteó el profesor danés K.W. Johansen en 1972.

Se ha procedido a comparar los distintos análisis estudiados, elástico y plástico, y a comprobar las ventajas de uno sobre otro. El trabajo lleva a cabo el diseño y cálculo de distintos casos típicos de losas de hormigón armado, tanto por métodos manuales como mediante programas informáticos (*LIMITSTATE SLAB*). Después de realizar los distintos ejemplos y diseñar su armado, ha quedado demostrada la utilidad del método que se ha estudiado y las aplicaciones a losas y placas.

Palabras clave: Líneas de rotura, Análisis plástico, Estado Límite Último, Límite Superior, K.W. Johansen.

## **Abstract**

This work has considered the trouble of solving reinforced concrete slabs by plastic method, that is, at the ultimate capacity of piece. This leads to a more accurate analysis of the structure closer to the to real behaviour of the piece and a more economical result than elastic methods. All of them on base to structural calculus by yield lines, wich is a calculus in the ultimate limit state and it has the theories that the Danish teacher K.W. Johansen developed as principal refrence.

Comparison has been made between the different elastic and plastic analyses studied, so as to check the advantages of one over the other. The work carries out the design and calculus of different common cases of reinforced concrete slab, with both manual methods as well as computer software (*LIMITSTATE SLAB*). Different examples and designs are discussed to prove the usefulness, of the method proposed.

Keywords: Yield Lines, Plastic Analysis, Ultimate Limit State, Upper Bound, K.W. Johansen.

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	7
2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA.....	9
2.1 Análisis plástico .....	9
2.2 Contraste entre cálculo elástico y plástico.....	13
2.3 El método de trabajo. Cálculo del momento de rotura.....	16
2.3.1 Losa rectangular biapoyada. Apoyo simple.....	17
2.3.2 Losa rectangular biapoyada. Apoyo fijo.....	20
2.3.3 Dimensionado del armado de una losa de hormigón.....	23
2.4 Teoría de líneas de rotura de Johansen.....	25
2.5 Análisis plástico de losas de hormigón en las diferentes normativas de aplicación .....	29
2.5.1 Eurocode 2. Part 1-1: General rules and rules for buildings.....	29
2.5.2 Documento de aplicación a vivienda de la (EHE-08).....	30
2.6 Cálculo informático de líneas de rotura .....	40
3. CASOS TÍPICOS.....	45
3.1 Losa biapoyada oblicua.....	46
3.2 Losa sobre 4 lados no paralelos .....	50
3.3 Losa apoyada sobre dos lados y un pilar.....	56
3.4 Losa apoyada sobre 4 pilares .....	62
4. EJEMPLO RESUELTO .....	68
4.1 Patrón mediante líneas de rotura longitudinales .....	69
4.2 Patrón mediante líneas de rotura transversales.....	75
4.3 Propuesta de armado para losa rectangular sobre pilares.....	79
4.4 Comprobación de la losa mediante patrones de rotura en cono y en artesa..	86
4.5 Comprobación del armado proyectado en LIMITSTATE SLAB.....	95
5. CONCLUSIÓN.....	97
6. BIBLIOGRAFÍA.....	99

## 1. INTRODUCCIÓN

Son muchos los factores que entran en juego a la hora de proyectar un edificio: belleza, tipología, economía, sociedad, materialidad, etc. Cada uno de ellos no más importante que el anterior y todos necesarios para construir una arquitectura acorde a la situación en la que nos encontremos. Esto mismo sucede en el caso de las estructuras, el "esqueleto" de los edificios. Muchos son los progresos que se han realizado en éstas a lo largo de la historia, desde los muros de carga de adobe hasta grandes estructuras metálicas capaces de sostener alturas elevadas y salvar luces mayores.

Algo parecido ocurre en el caso de las estructuras de hormigón armado, donde el acero y el hormigón se complementan para soportar las tracciones y compresiones que se derivan de las cargas de un edificio. Desde sus primeras apariciones, allá por mediados del siglo XIX [ 1 ], de la mano de W. B. Wilkinson (1819-1902) [ 2 ] o Joseph Monier (1823-1906) [ 3 ], entre otros, donde se empezó a experimentar con maceteros de cemento reforzados con fibras de acero, hasta la actualidad, con estructuras cada vez más y más ligeras, un ejemplo



*Imagen nº1. Cubierta del Hipódromo de la Zarzuela, Madrid*

de ello es la cubierta del Hipódromo de la Zarzuela, de Eduardo Torroja (1899-1961) [ 4 ] en la *Imagen nº1*, una cubierta de hormigón armado que salva un vuelo de 13 m y que presenta un espesor de losa de 5 cm en su zona más estrecha.

Para realizar todo este tipo de estructuras de hormigón, se necesita previamente conocer con exactitud el comportamiento de las estructuras de hormigón y los cálculos necesarios para las mismas. El presente trabajo trata de analizar el comportamiento plástico de las losas de hormigón armado mediante el cálculo de líneas de rotura. Los actuales cálculos más utilizados para estos elementos (cálculo elástico) no muestran el verdadero comportamiento de este tipo de

elemento estructural. Se basan, principalmente, en las pequeñas deformaciones que pueden llegar a sufrir los distintos elementos que conforman la estructura sin tener en cuenta los efectos de la fisuración en la rigidez y la distribución de esfuerzos. Destacar que este tipo de cálculo suelen ir muy de la mano de la seguridad, sin llegar a demostrar el verdadero coeficiente de seguridad de la estructura ni llegando a saber el verdadero comportamiento de la misma.

Este cálculo elástico ha dado paso a nuevas teorías que mejoran el dimensionado de la estructura a través de cálculos más exactos como son los realizados en el comportamiento plástico de la misma, es decir, en el estado de rotura. Demostraremos las ventajas que tiene este sobre el cálculo elástico y nos ayudaremos de programas informáticos para conseguir proyectar adecuadamente cada tipo de estructura de hormigón armado que vayamos a calcular.

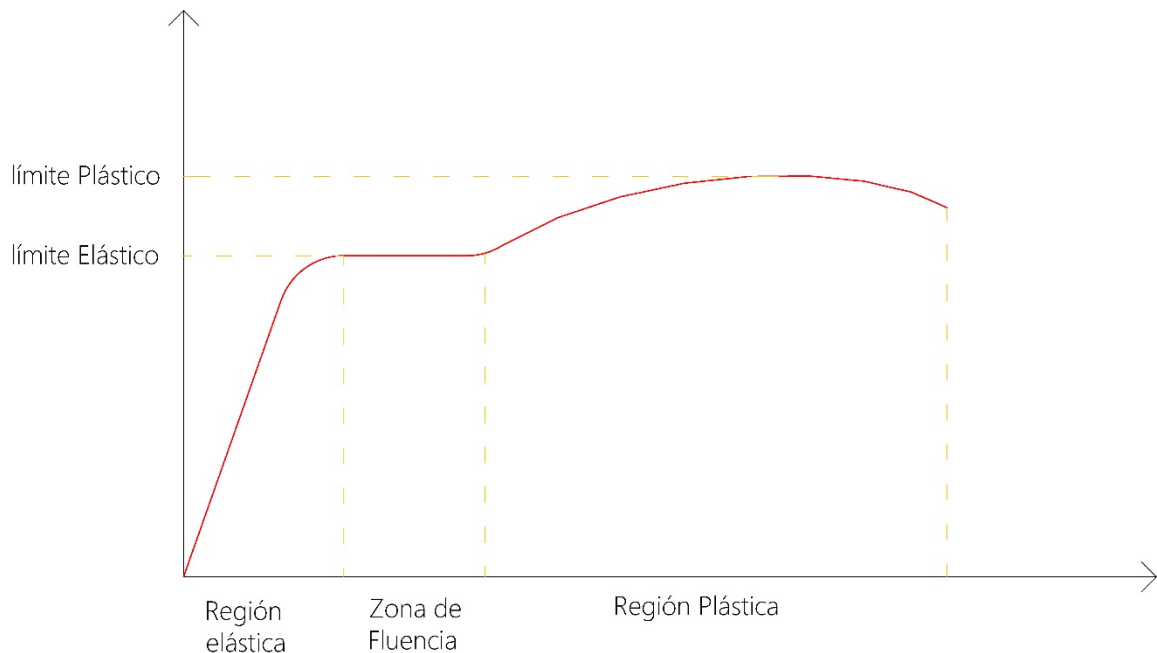


## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

### 2.1 *Análisis plástico*

El análisis en estado límite último permite conocer una redistribución de los momentos más allá de los límites empleados en las teorías elásticas. Este análisis nos permite evaluar la carga máxima de la losa al igual que los momentos que ésta misma genera. Suponiendo que la losa es lo suficientemente dúctil para permitir la formación de rótulas plásticas y líneas de rotura [ 5 ].

El cálculo mediante líneas de rotura se basa, fundamentalmente, en el cálculo en rotura de un elemento estructural, es decir, en el estado plástico o estado último del mismo. Todo material y, por consiguiente, todo elemento estructural está asociado a una gráfica tensión-deformación (*Imagen n°2*) donde se puede observar la deformación que genera la tensión en el elemento hasta el momento en el que se produce la rotura. Dicha gráfica refleja los dos estados que se generan en los materiales y en la estructura. Estado elástico, donde la deformación es reversible, y estado plástico, donde la deformación es irreversible. Es ahí, en el estado plástico y en la zona de fluencia, donde se producen las líneas de rotura.



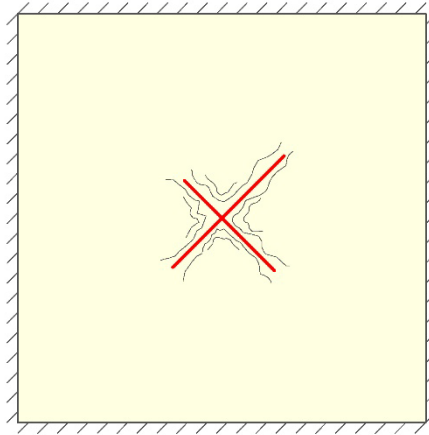
**Imagen n°2.** Gráfico tensión-deformación

Pero, ¿Qué es una línea de rotura? La podemos definir como una grieta que aparece en una losa de hormigón armado cuando las secciones llegan a su límite de rotura y, por tanto, alcanza la capacidad resistente [ 6 ]. A lo largo de esta línea será donde se produzca la rotación plástica de la estructura cuando se produzcan las

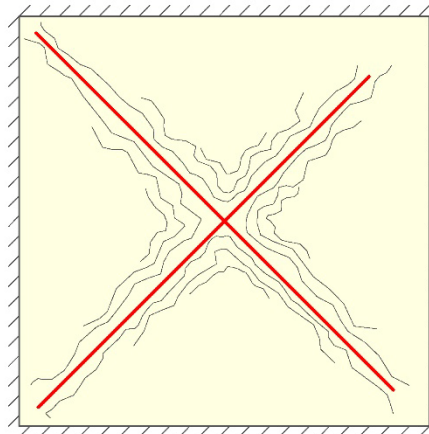
## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

deformaciones. Estas líneas de rotura nos darán a conocer o bien, el momento máximo por el cual la losa puede llegar a colapsar, o la carga máxima que la losa puede soportar sin llegar a producir la rotura.

En los momentos iniciales, la losa presenta un comportamiento elástico que produce grietas de menor tamaño en el interior de la losa. Este primer punto, desde donde se empiezan a formar las líneas, será el punto de mayor deformación de la losa, por ser el primero en empezar a disminuir su cota.

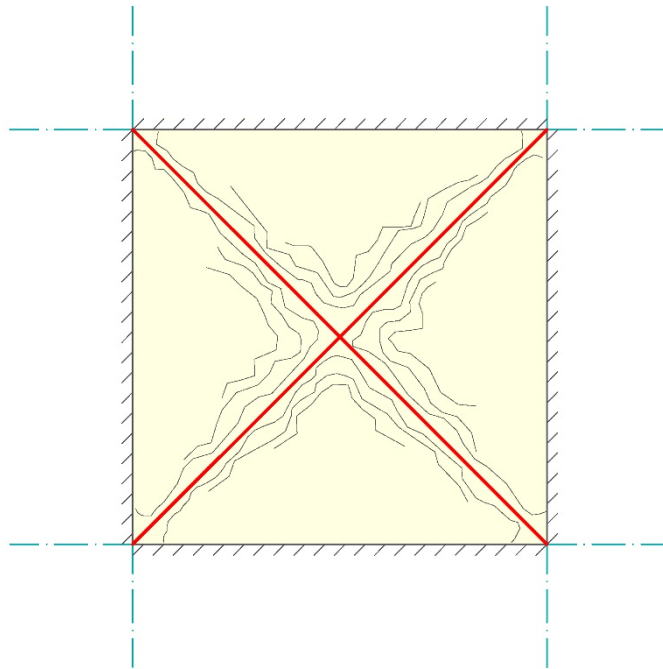


Si seguimos incrementando la carga sobre la losa. Estas grietas irán incrementando su longitud hasta los bordes de la estructura, concentrándose en ellas las principales rotaciones y tensiones de tracción.



## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

Cuando las líneas se han formado en su totalidad, la losa habrá llegado a la situación de Estado Límite Último y se producirá la rotura. Estas líneas dividen la losa en distintas regiones rígidas que rotan a través de cada línea de rotura. Estas regiones también lo hacen mediante los ejes de rotación (marcadas en color azul) que se forman en cada elemento de soporte de la estructura.



Es en este punto donde el valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación ( $E$ ) se equipara a la energía absorbida en cada una de las líneas de rotura ( $W$ )

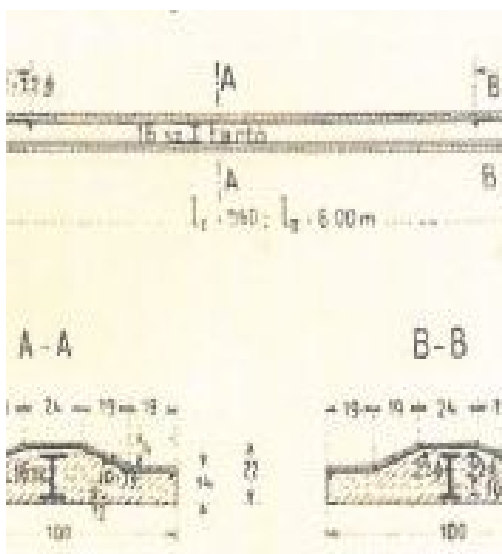
$$E = W$$

Como hemos comentado, las líneas de rotura se producirán en las zonas de la losa que se encuentren más solicitadas, formándose en ella ejes plásticos continuos. Llegado un nivel de carga, estos ejes o rótulas plásticas convierten a la losa en un mecanismo que forma un patrón de líneas de rotura. Estos patrones deben seguir las siguientes reglas:

- 1- Encontrar los ejes de rotación. Estos se formarán en los soportes de la estructura, tanto en bordes como en columnas.
- 2- Dibujar la línea de rotura. Estas deberán ser siempre rectas.
- 3- Cada línea de rotura que divida las regiones deberá coincidir con el punto de encuentro entre los ejes de giro de cada región.
- 4- Cada línea deberá terminar en el borde de la estructura.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

Todo este análisis lo conocemos gracias a que durante varios años muchos ingenieros y calculistas investigaron sobre la necesidad de realizar cálculos más exactos y cercanos a la realidad en las estructuras de hormigón armado. Hasta mediados del Siglo XX todo lo relacionado con el cálculo estructural debía venir de la mano de los cálculos elásticos para darle veracidad. Sin embargo, esto no impidió que algunos de los ingenieros de la época se arriesgaran a realizar teorías capaces de exprimir las estructura hasta su rotura, pero buscando mayor exactitud a la hora de diseñar estas mismas.



*Imagen nº 3. Vigas utilizadas en los experimentos de Kazinczy*

El profesor e ingeniero húngaro Gábor Kazinczy (1888-1964) [ 7 ] fue el primero en demostrar que el cálculo de tensiones mediante métodos elásticos no daba como resultado la resistencia real que puede soportar una estructura de acero. Destacar que lo hizo mediante resultados empíricos obtenidos a través de ensayos. Fue él mismo quien propuso el concepto de redistribución de momentos de flexión simple basado en el comportamiento plástico de las estructuras, tanto de acero como de hormigón.

Uno de sus logros más importantes fue el experimentar con vigas de acero embebidas en 1 metro de hormigón, formando parte del forjado de una losa. Dichas vigas estarán empotradas al soporte. Esta losa se fue cargando continuamente y de manera homogénea por toda su superficie hasta que el forjado colapsó. Durante el incremento de carga se fue midiendo la deformación que se iba generando en la estructura, en varios puntos de la misma, así como la rotación generada en los puntos de apoyo. Como resultado de esto, Kazinczy introdujo el término de rótula plástica ("Plastic Hinge"). Se demostró que la rótula plástica se genera cuando se llega al momento de plasticidad de la estructura y que la deformación irá en el sentido del momento, pero, si eliminamos la carga, la deformación permanece. Por ello, estas rótulas plásticas no se pueden considerar como rótulas reales. Una viga podrá realizar grandes deformaciones cuando, en tres puntos de la misma, los momentos alcancen el valor del momento plástico. Estos lugares se consideran como rótulas plásticas. Si en dicha viga, se generan solo dos rótulas, la parte central funcionará como una viga

biapoyada y podrá transmitir carga. En cambio, si se generan tres rótulas, se formarán grandes deformaciones y la viga colapsará. A este proceso, Kazinczy lo llamó mecanismo de rotura plástica de una estructura ("*plastic failure mechanism of a structure*")

Unos años más tarde a estos ensayos de Kazinczy, el ruso A. A. Gvozdez, [ 8 ] a través de un texto publicado en 1936, sentó las bases de la teoría plástica. En este texto enumera tres condiciones:

- Condición de Equilibrio
- Condición de Cedencia
- Condición de Mecanismo

Todas ellas con el fin de encontrar el mecanismo de deformación que conlleve la rotura del elemento estructural. Por tanto, el problema residía en encontrar la carga máxima por la cual, la estructura llegase a colapsar cumpliendo con las tres condiciones mencionadas. Todo ello dio paso a los tres teoremas fundamentales de la Teoría de la Plasticidad:

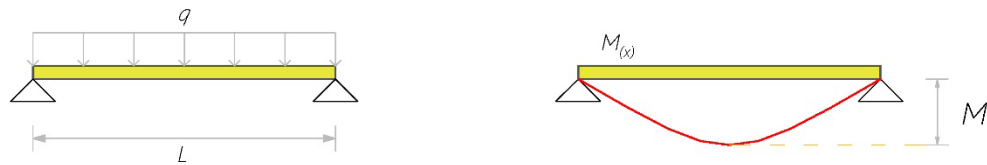
- Teorema de la Unicidad
- Teorema de la Inseguridad
- Teorema del Límite Superior

Este último se convirtió en la herramienta básica para el cálculo de cualquier tipo de estructura basados en hipótesis certeras de estados de equilibrio seguros y debidamente estudiados. Conocido en la actualidad como patrones de rotura.

## **2.2 Contraste entre cálculo elástico y plástico**

Como ya hemos comentado, el análisis plástico conlleva un cálculo más aproximado a la realidad de la capacidad de los elementos estructurales y vamos a comprobar porque ocurre esto. A continuación, veremos la diferencia que existe entre un cálculo elástico y uno plástico. A modo de ejemplo, compararemos el momento flector mínimo de la sección que permita a una viga soportar una carga  $q$  cuando se encuentra apoyada en apoyo simple o en empotramientos.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA



**Imagen n° 4.** Momentos sobre una biga biapoyada

En la *Imagen n°4* se representa una viga biapoyada que muestra una gráfica de momento parabólico donde el punto de fallo elástico se encuentra en el centro con un momento máximo que será el momento plástico:

$$M^+ = \frac{q \cdot L^2}{8} \quad (2.1)$$

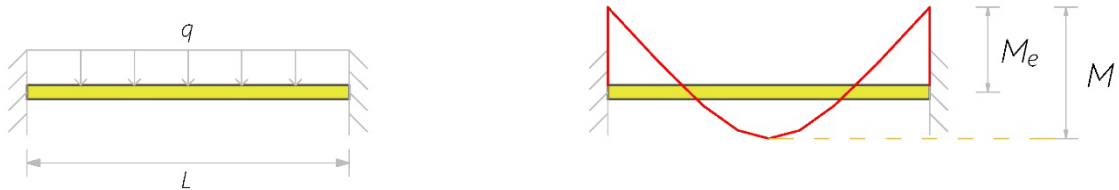
Si seguimos cargando esta viga, asumiendo un comportamiento elástico-plástico perfecto, se formará una rótula plástica que no será capaz de soportar mayores momentos al momento máximo  $M$  y se produciría una deformación descontrolada. Esta situación define el momento de colapso y, por ello, la carga de colapso elástica coincide con la plástica:

$$q(e_1) = q(p_1) = \frac{8 \cdot M}{L^2} \quad (2.2)$$

En el caso de una viga biempotrada, como se representa en la *imagen n°5*, donde se muestra la gráfica de momentos en el estado elástico. En el instante en el que el momento máximo, situado en los apoyos, alcanza el valor  $M$ , dichas secciones plastifican y su giro adoptará cualquier valor mientras que el momento mantendrá el valor  $M$ . En ese instante se habrá alcanzado el valor máximo de carga  $q$  por el cual se producirá el fallo elástico:

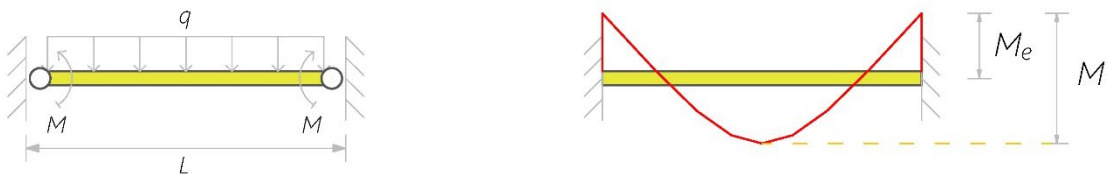
2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

$$q(e_2) = \frac{12 \cdot M}{L^2} \quad (2.3)$$



*Imagen nº 5. Momentos sobre una biga biempotrada en estado elástico*

$$M_e = \frac{q \cdot L^2}{12} \quad (2.4)$$



*Imagen nº 6. Momentos sobre una biga biempotrada en estado plástico*

La viga con la rótula plástica, *imagen nº 6*, seguirá manteniendo el equilibrio puesto que no ha alcanzado la condición de mecanismo, este hecho solo ha llevado a la viga a pasar de un estado hiperestático a otro isostático. Pero, si seguimos aumentando la carga, cuando el momento flector, en el centro, haya alcanzado el valor  $M$ , dicha sección plastificará y la viga colapsará en forma de un mecanismo de tres rótulas, dos en los extremos y una en el centro. En ese momento el valor de la carga de colapso plástico será:

$$q(p_2) = \frac{16 \cdot M}{L^2} \quad (2.5)$$

De esto, deducimos que, en un análisis elástico, una viga biempotrada soporta un 50% más de carga que una biapoyada, mientras que, en análisis plástico, soporta un 100% más de carga. Esto conlleva a que, en un diseño plástico de un elemento estructural, se necesitaría una sección 3/4 más pequeña que la necesaria en un diseño

elástico. Lo que permite un mayor ahorro económico en todo el diseño de la estructura [ 9 ].

$$q(e_1) = \frac{8 \cdot M}{L^2} \quad (2.6)$$

$$q(e_2) = \frac{12 \cdot M}{L^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{q(e_2)}{q(e_1)} = \frac{\frac{12 \cdot M}{L^2}}{\frac{8 \cdot M}{L^2}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad (2.8)$$

$$q(p_1) = \frac{8 \cdot M}{L^2} \quad (2.9)$$

$$q(p_2) = \frac{16 \cdot M}{L^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{q(p_2)}{q(p_1)} = \frac{\frac{16 \cdot M}{L^2}}{\frac{8 \cdot M}{L^2}} = \frac{16}{8} = 2 \quad (2.11)$$

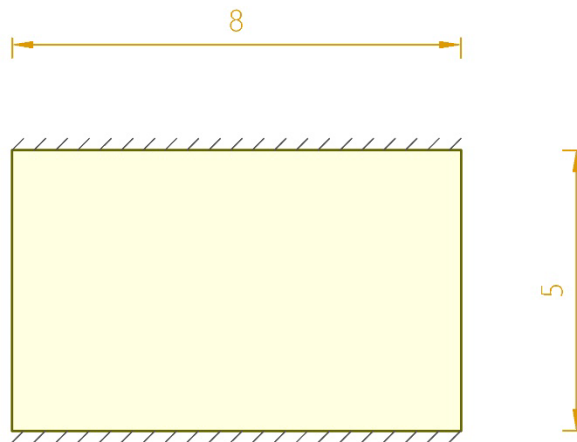
### **2.3 El método de trabajo. Cálculo del momento de rotura.**

Para obtener el momento de rotura en una losa de hormigón armado mediante el método de las líneas de rotura se debe conocer, principalmente, la geometría que presenta la estructura y la carga que ésta deberá soportar. En cada losa se producirán momentos tanto positivos como negativos, según el apoyo que se haya diseñado. En un apoyo simple se generarán solo momentos positivos en la línea de rotura mientras que, cuando existan apoyos fijos o empotramientos, los momentos serán positivos en las líneas y negativos en estos apoyos.

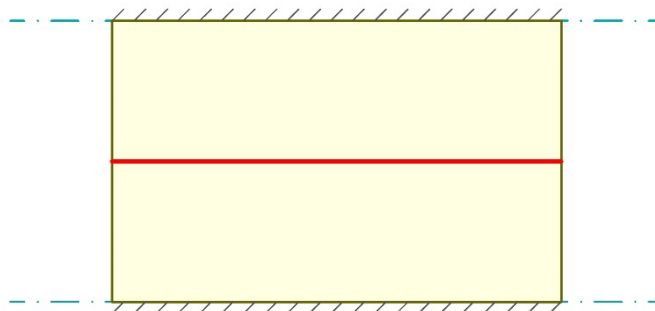
Para nuestros cálculos, utilizaremos un valor de carga de  $14,7 \frac{KN}{m^2}$  repartida homogéneamente por toda la superficie y una deformación igual a la unidad.



### 2.3.1 Losa rectangular biapoyada. Apoyo simple

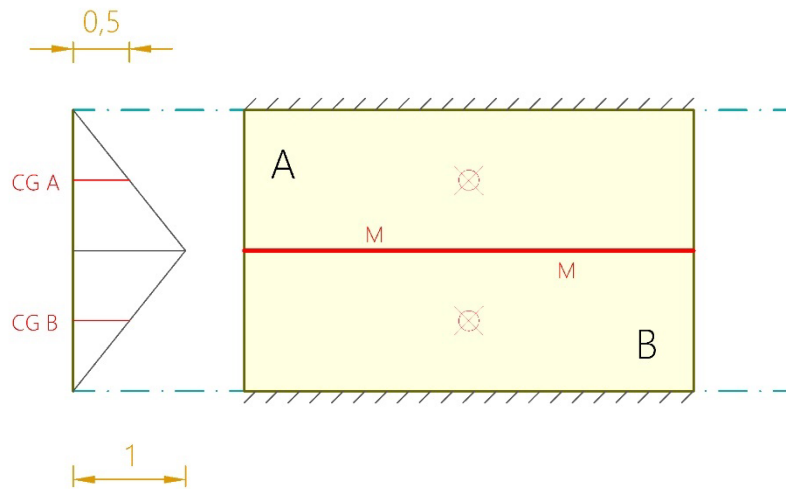


Plantear el patrón de rotura más desfavorable. En este caso el patrón resulta trivial: se nos generan dos ejes de giro (líneas en color azul), uno en cada apoyo y una línea de rotura (línea continua en color rojo), situada en el centro de la pieza.



Calcular el valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación ( $E$ ). Para ello, deberemos conocer el área de las regiones generadas entre cada línea de rotura y la deformación del centro de gravedad ( $CG$ ) de cada una. Convencionalmente se toma que el descenso máximo de la losa es unitario.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA



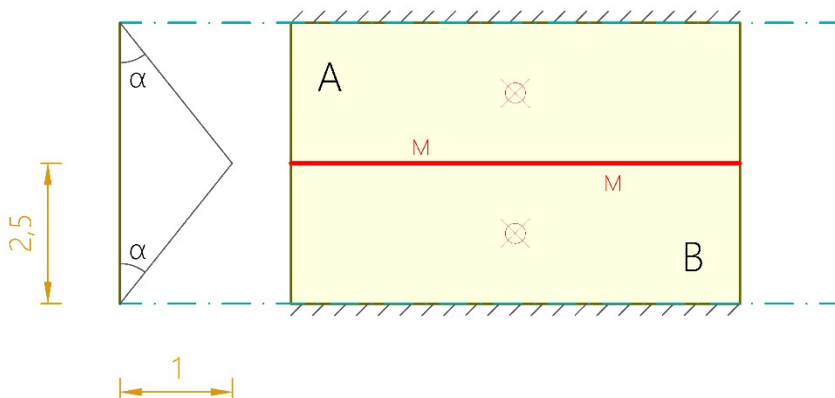
$$\mathbf{A} = 20,00 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG A} = 0,50 \text{ m}$$

$$\mathbf{B} = 20,00 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG B} = 0,50 \text{ m}$$

$$\mathbf{E} = 14,70 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot \left( (20,00 \text{m}^2 \cdot 0,50 \text{m}) + (20,00 \text{m}^2 \cdot 0,50 \text{m}) \right) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E} = 294 \text{ KNm}$$

Cálculo de la energía absorbida en cada una de las líneas de rotura ( $\mathbf{W}$ ). Para obtener dicho valor, utilizaremos el ángulo de giro generado en cada región, la longitud de la línea de rotura y el momento generado, que será nuestra incógnita.



$$\mathbf{W} = M \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \cdot \left( \left( 8,00 \text{m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} \right) + \left( 8,00 \text{m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} \right) \right) \quad (2.13)$$

$$W = 6,40 \cdot M \text{ KNm}$$

Una vez conocidas la energía potencial de la deformación y la energía generada en cada una de las líneas, debemos de calcular nuestra incógnita, el momento de rotura.

$$E = W \quad (2.14)$$

$$294 \frac{\text{KNm}}{\text{m}} = 6,40 \cdot M \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

$$M \frac{\text{KNm}}{\text{m}} = \frac{294}{6,40}$$

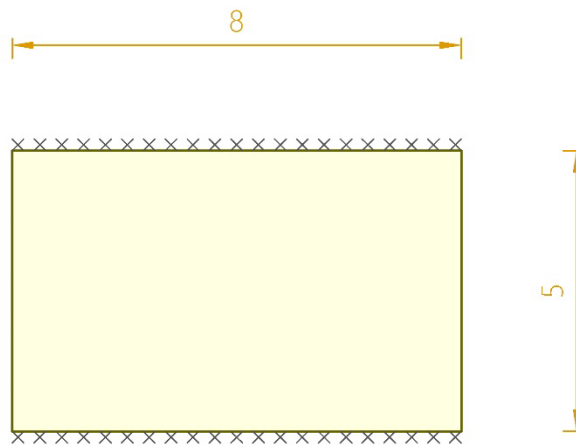
$$M = 45,94 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

Al tratarse de una losa biarticulada, podemos comprobar que:

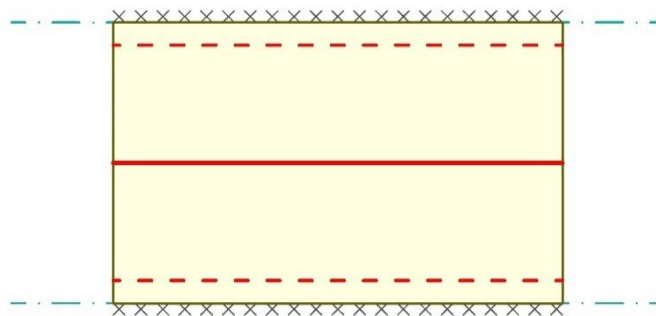
$$M = \frac{q \cdot L^2}{8} \quad (2.15)$$

$$M = \frac{14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot 5^2 \text{ m}^2}{8} = 45,94 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

### 2.3.2 Losa rectangular biapoyada. Apoyo fijo.

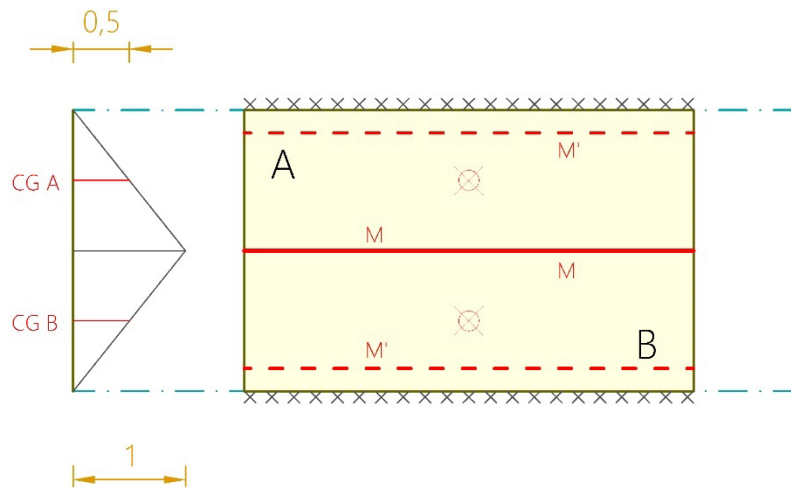


En este caso, el patrón de rotura será el mismo que para el caso anterior. Se vuelven a generar dos ejes de giro en los lados de apoyo (líneas en color azul) y una línea de rotura en el centro de la pieza (línea continua en color rojo). Al ser apoyo empotrado, se formarán momentos positivos ( $M$ ) en la línea de rotura y momentos negativos ( $M'$ ) en los apoyos (líneas discontinuas en color rojo).



Cálculo del valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación ( $E$ ).

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA



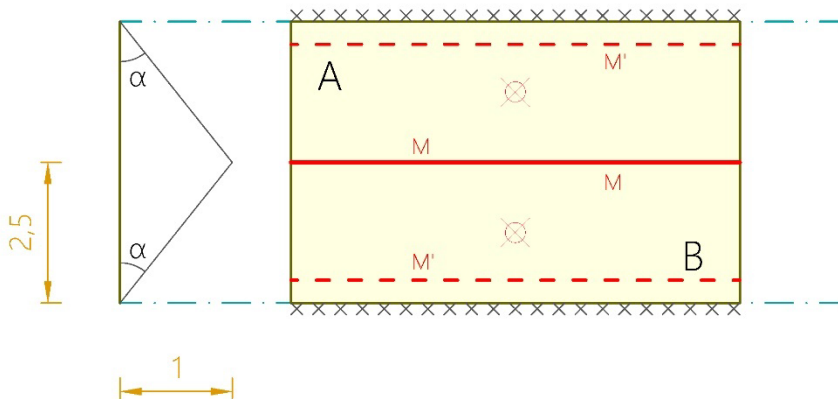
$$\mathbf{A = 20,00 \text{ m}^2} \quad \mathbf{CG \ A = 0,50 \text{ m}}$$

$$\mathbf{B = 20,00 \text{ m}^2} \quad \mathbf{CG \ B = 0,50 \text{ m}}$$

$$\mathbf{E = 14,70 \frac{KN}{m^2} \cdot ((20,00m^2 \cdot 0,50m) + (20,00m^2 \cdot 0,50m))} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{E = 294 \frac{KNm}{m}}$$

Cálculo de la energía generada en cada una de las líneas ( $\mathbf{W}$ ).  
Calcularemos la energía de cada momento, positivo y negativo y, como queremos buscar el equilibrio de la pieza, deberán ser los dos iguales.



2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

$$WA = \begin{cases} M \frac{KNm}{m} \cdot 8,00m^2 \cdot \frac{1,00m}{2,5m} = 3,20 \cdot M \frac{KNm}{m} \\ M' \frac{KNm}{m} \cdot 8,00m^2 \cdot \frac{1,00m}{2,5m} = 3,20 \cdot M' \frac{KNm}{m} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$WB = \begin{cases} M \frac{KNm}{m} \cdot 8,00m^2 \cdot \frac{1,00m}{2,5m} = 3,20 \cdot M \frac{KNm}{m} \\ M' \frac{KNm}{m} \cdot 8,00m^2 \cdot \frac{1,00m}{2,5m} = 3,20 \cdot M' \frac{KNm}{m} \end{cases}$$

$$Wt = WA + WB \quad M = M' \quad (2.18)$$

$$Wt = (3,20 + 3,20 + 3,20 + 3,20) \cdot M \frac{KNm}{m}$$

$$Wt = 12,80 \cdot M \text{ KNm}$$

Cálculo del momento de rotura. Igual para los momentos positivos y negativos.

$$E = W \quad (2.19)$$

$$294 \frac{KNm}{m} = 12,80 \cdot M \text{ KNm}$$

$$M \frac{KNm}{m} = \frac{294}{12,80}$$

$$M = 22,97 \frac{KNm}{m}$$

Al tratarse de una losa biempotrada unidireccional con iguales capacidades en sendas caras, podemos comprobar que:

$$M = \frac{q \cdot L^2}{16} \quad (2.20)$$

$$M = \frac{14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot 5^2 m^2}{16} = 22,97 \frac{KNm}{m}$$

### 2.3.3 Dimensionado del armado de una losa de hormigón.

#### 2.3.3.1 Armado de losa biapoyada.

$$\text{Acero B500} \rightarrow f_{yd} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{mm^2} \quad (2.21)$$

$$d = 25 \text{ cm} \rightarrow 25 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \quad (2.22)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (2.23)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,21 \text{ m} = 45,94 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{45,94 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,21 \text{ m}}$$

$$U_s = 243,07 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (2.24)$$

$$243,07 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{KN}{m^2} \rightarrow A_s = \frac{243,07 \text{ KN}}{434783 \frac{KN}{m^2}}$$

$$A_s = 0,000559 \text{ m}^2 = 5,59 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D12} = 1,13 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{5,59 \text{ cm}^2}{1,13 \text{ cm}^2} = 4,94 \quad (2.25)$$

**1 D12 cada 20 cm**

**2.3.3.2 Armado de losa biempotrada.**

$$\text{Acero B500} \rightarrow F_{yd} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{mm^2} \quad (2.26)$$

$$d = 25 \text{ cm} \rightarrow 25 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \quad (2.27)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (2.28)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,21 \text{ m} = 22,97 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{22,97 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,21 \text{ m}}$$

$$U_s = 121,53 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot F_{yd} \quad (2.29)$$

$$121,53 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{KN}{m^2} \rightarrow A_s = \frac{121,53 \text{ KN}}{434783 \frac{KN}{m^2}}$$

$$A_s = 0,000279 \text{ m}^2 = 2,79 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D12} = 1,13 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{2,79 \text{ cm}^2}{1,13 \text{ cm}^2} = 2,46 \quad (2.30)$$

**1 D12 cada 30 cm**



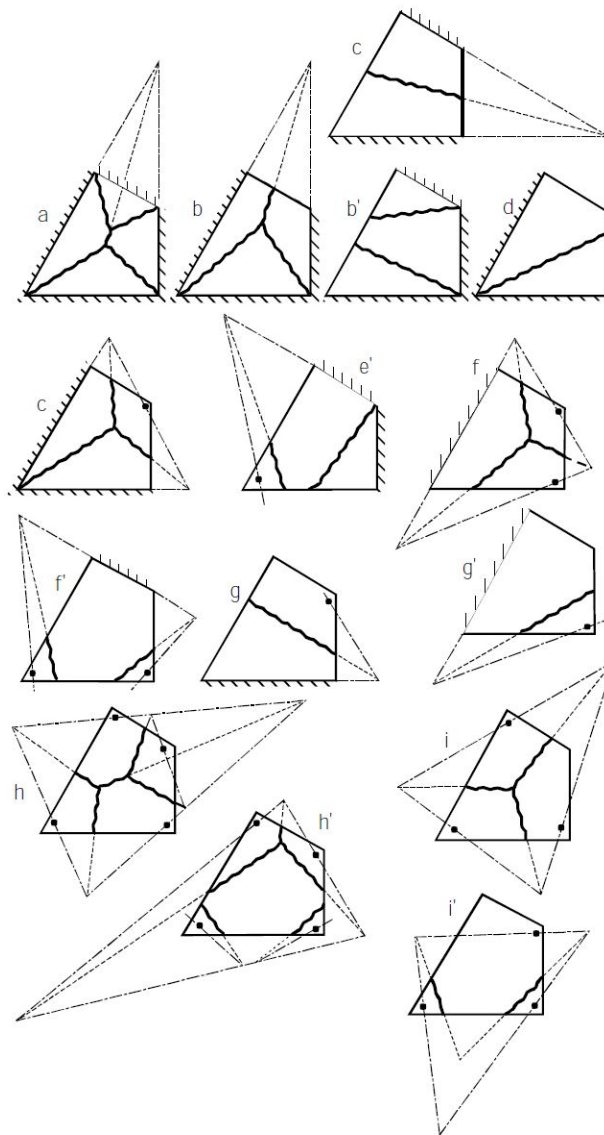
## **2.4 Teoría de líneas de rotura de Johansen**

El cálculo en estado plástico produce una mayor exactitud a la hora de proyectar elementos estructurales en Estado Límite Último ya que podemos obtener el coeficiente de seguridad con mayor precisión en comparación con el que se utiliza para los cálculos en el estado elástico. En este sentido, no podemos realizar los cálculos de la misma manera que para el estado elástico porque trabajamos en la zona de rotura. Es por ello que se han de admitir teorías que resuelvan estos problemas. Una de ellas, y la primera de las que se tienen constancia, es la Teoría de Johansen sobre líneas de rotura y su formulación para losas [ 10 ].

En 1944 el profesor danés y doctor en Ingeniería de la Construcción Knud Winstrup Johansen (1901-1978) publica un artículo referente al análisis y cálculo estructural de una losa cilíndrica de hormigón armado de 16 metros de ancho y 36 metros de longitud y asimétrica en sección [ 11 ]. Para su cálculo estableció tres hipótesis fundamentales:

1. Modelar la sección transversal de la losa dividiéndola en dos partes debido al desigual comportamiento estructural de cada una de ellas.
2. No se tendrá en cuenta la contribución a tracción del hormigón; mientras que la tensión admisible de las armaduras corresponderá a la tensión en la zona de fluencia entre un coeficiente de seguridad.
3. Los momentos se distribuirán acordes a la armadura dispuesta, en condiciones estáticamente indeterminadas.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA



*Imagen nº 7. Losas utilizadas por Johansen en sus ensayos*

Todo ello y, a través de los cálculos que realizó, le llevó a la conclusión de que, estableciendo un orden de rotura adecuado, se pueden obtener momentos iguales en los puntos de mayor esfuerzo en la estructura y, con ello, la obtención del armado necesario para la construcción de la misma.

Johansen ha sido el hombre más importante en el estudio de las líneas de rotura. Sus inquietudes por este tipo de cálculo le llevaron a seguir avanzando sobre esta idea hasta conseguir una solución adecuada para sus propias preguntas. Ensayos de prueba y error, como los de la *imagen nº7*, que fueron perfeccionando sus hipótesis y que nos ha llevado a un nuevo cálculo estructural.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

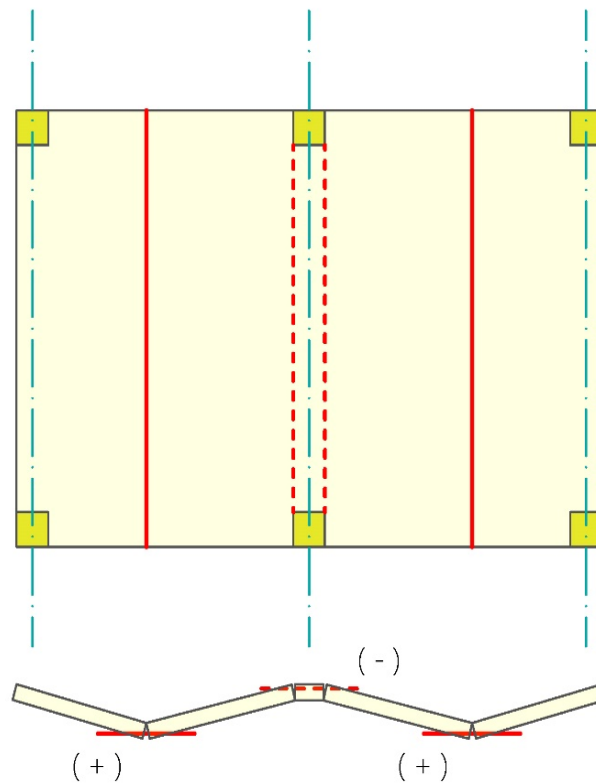
A raíz de estos ensayos formuló la que hoy llamamos Teoría de Johansen sobre Líneas de Rotura: *"Al cargar una placa hasta la rotura, ésta viene precedida de unas fisuras que pueden idealizarse en líneas rectas situadas y dirigidas en formas distintas según la forma de la placa, apoyos, carga, armadura..."*

A lo largo de estas líneas actuarán momentos flectores y tensiones tangenciales. Al tratar el comportamiento en rotura, los momentos vendrán dados únicamente por el canto de la losa, con su armadura dispuesta al límite plástico del acero. Estas mismas pueden expresarse mediante un momento, que será la incógnita a resolver en nuestros cálculos. Las tensiones tangenciales a lo largo de las líneas de rotura se podrán sustituir por dos fuerzas normales al plano de la propia losa, fuerzas a las que Johansen llama fuerzas nodales, que vendrán dadas por la descomposición del ángulo que genera la deformación de la losa con respecto al plano horizontal de la misma.

Las ecuaciones para realizar los cálculos se obtendrán aplicando a cada zona delimitada por las líneas de rotura las condiciones de equilibrio obteniendo como resultado los momentos que se generan en cada línea de rotura. Se debe recalcar que, para realizar estos cálculos, debemos conocer el patrón de rotura más desfavorable que se genera en la losa que estemos estudiando. Una vez conocidos el patrón de rotura y los momentos podemos averiguar, con sencillez, el armado necesario para nuestra losa de hormigón.

En ensayos realizados para demostrar estos cálculos en rotura, se ha llegado a la conclusión de que, en rotura, las deformaciones elásticas generadas son despreciables en comparación a las producidas en el estado plástico de la estructura. Lo que produce que, cada una de las zonas determinadas por las líneas de la losa, pertenezcan a un mismo plano y que, la deformación que se genera, vendrá dada por el giro de estos planos en base a un eje de giro único para cada delimitación. Una de las condiciones a cumplir para la realización de estos patrones de rotura es que, cada línea de rotura, debe interceder en la intersección de dos de los ejes de giro que se originen en la estructura.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA



**Imagen n° 8.** Situación de los refuerzos según el valor del momento

Se definen dos tipos de líneas de rotura, positivas y negativas, como se muestra en la *imagen n° 8*. Las positivas serán aquellas en las que el armado de tracción esté dispuesto en la parte inferior de la sección de la losa (líneas continuas en color rojo) mientras que, los negativos serán en las que el armado este situado en la zona superior (líneas discontinuas en color rojo). La situación de las líneas de rotura correcta será aquella que nos dé un valor de momentos más desfavorable cuando se produzca la rotura.

Estos son los fundamentos y conclusiones a las que llegó el profesor Johansen para elaborar la teoría de líneas de rotura. Una teoría que parece más racional que la elástica y que da como resultado estructuras más económicas y ligeras y, usualmente, un armado más racional [ 12 ].

## 2.5 Análisis plástico de losas de hormigón en las diferentes normativas de aplicación

### 2.5.1 Eurocode 2. Part 1-1: General rules and rules for buildings

La normativa europea, en el punto **5.6: Análisis plástico** del Eurocódigo 2, [ 13 ] trata el análisis plástico como un método de cálculo de estructuras que solo debería ser usado para comprobar el diseño de un elemento estructural en Estado Límite Último, pero nunca para el caso de proyectarlas. Enfatizando que:

1. La ductilidad de las secciones críticas deberá ser suficiente para que se forme el mecanismo de rotura previsto.
2. El análisis plástico deberá estar basado en el método *Upper Bound* [ 14 ], es decir, si elegimos un criterio de rotura que no es el más desfavorable, el cálculo nos dará un valor inseguro, es decir, una carga de colapso mayor a la real.
3. Los efectos de las aplicaciones previas de carga pueden ser ignorados y se puede suponer un aumento monótono de las acciones.

**Análisis plástico para vigas, estructuras y losas:** Podemos utilizar el método plástico para su cálculo sin tener en cuenta la rotación del elemento siempre y cuando se cumplan las condiciones antes mencionadas. Para dicho cálculo se debe de tener en cuenta que:

1. La ductilidad requerida puede considerarse satisfecha si se cumple lo siguiente:

- El área del refuerzo a tracción está limitada a:

$$\frac{X_u}{d} < 0,25 \text{ para hormigones } < \frac{C50}{60}$$

$$\frac{X_u}{d} < 0,15 \text{ para hormigones } < \frac{C55}{67}$$

Donde:

$X_u$  profundidad del eje neutro de la sección

$d$  canto útil de la sección

- Refuerzos de acero de clases B o C.
  - El radio de giro de los momentos en los soportes intermedios debe de estar entre 0,5 – 2.
2. Los pilares deben ser comprobados utilizando el momento plástico mayor de la estructura.
  3. En el cálculo de losas se deberá tener en cuenta cualquier tipo de refuerzo que se haya diseñado para la misma.

**Capacidad de rotación:** El procedimiento simplificado para vigas continuas y losas unidireccionales se basa en la capacidad de rotación de las regiones que se han generado en dicho elemento. Estas zonas se verán sometidas a deformación plástica y quedarán delimitadas por la propia línea de rotura. La comprobación de esta rotación plástica en Estado Límite Último será correcta si los momentos calculados son menores que el momento crítico en rotura de la sección de cálculo. Para dicha comprobación se tendrá en cuenta:

1. En las regiones de líneas de rotura, se debe cumplir:  $\frac{X_u}{d} < 0,45$  para hormigones  $< \frac{C50}{60}$  y  $\frac{X_u}{d} < 0,35$  para hormigones  $< \frac{C55}{67}$

Donde:

$X_u$  profundidad del eje neutro de la sección

$d$  canto útil de la sección

2. El ángulo de giro debe determinarse sobre las dimensiones reales de diseño del elemento estructural. Vendrá dado por la cota máxima generada en una región y la distancia desde el punto de mayor desviación de dicha región hasta su eje de giro.

**Análisis con modelos de nudo y punta:** Este análisis se puede utilizar para vigas y losas completas, en el estado de rotura, así como para regiones de los propios elementos estructurales que se encuentren, también, en la rotura. Siempre se deben realizar estos cálculos en Estado Límite Último. Para ello se deberá tener en cuenta que:

1. Las verificaciones en Estado Límite de Servicio también se pueden realizar utilizando este análisis, por ejemplo, en el caso de las tensiones en el acero.
2. Este análisis consiste en puntales que representan campos de tensión que se encuentran comprimidos, nudos que representan el esfuerzo y de sus puntos de unión. Las reacciones en un modelo de nudo y punta deben determinarse manteniendo el equilibrio con las cargas aplicadas en el Estado Límite Último.

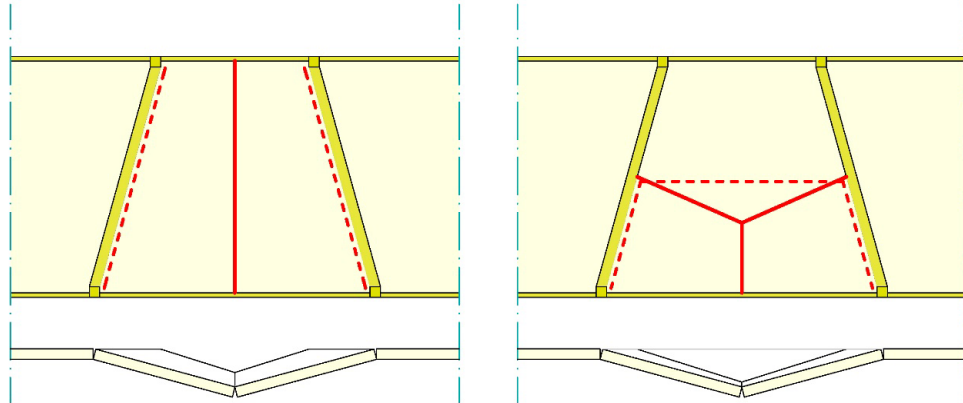
Los nudos de un modelo de nudo y punta deben coincidir en dirección y posición con su refuerzo correspondiente.

### 2.5.2 Documento de aplicación a vivienda (EHE-08)

El DAV estudia el cálculo de líneas de rotura englobado en el análisis de carga vertical sobre un elemento estructural. En una primera parte, donde se introduce el método, se define la línea de rotura y su utilización en el cálculo de losas, punto **5.4.3 Modelo de losas** [ 15 ], de la siguiente manera:

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

El cálculo mediante líneas de rotura se utiliza para analizar conjuntamente varios nervios o un área completa de losa, independientemente de que tengan o no la misma configuración de carga.

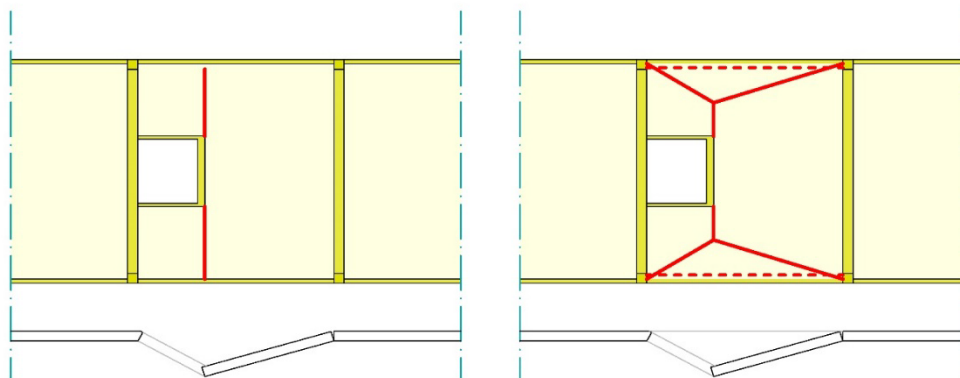


*Imagen n°9. Líneas de rotura generadas en vanos de luz variable*

Con este tipo de cálculo, se busca delimitar dicha superficie mediante cortes en la estructura que pueden producir un descenso incontrolado de la misma. Como solución, se establecen fórmulas para buscar el equilibrio entre las acciones y la capacidad resistente de los momentos generados en cada uno de los cortes. El equilibrio se busca aceptando el descenso arbitrario de uno de los puntos que delimitan estos cortes. Como la solución debe tener capacidad resistente ante todos los tipos posibles de cortes, el cálculo debe de ir dirigido a los que resulten más desfavorables. (*Imagen n°9*)

Con el cálculo mediante líneas de rotura se conduce a un valor de momento que, repartido uniformemente, sería lo mismo que suponer que en todas las líneas generadas basta con una capacidad resistente igual al momento promedio. Un corte local, después de encontrar el patrón más desfavorable, suministra el valor mínimo de capacidad para las zonas donde se hayan generado líneas de rotura más largas. Por ello, puede suponerse que la losa soportará el momento resultante en cualquiera de los dos signos.

Cuando existe un hueco (*Imagen n°10*), puede tratarse como una línea longitudinal a ras del borde del hueco o una línea de rotura local que también discurra a ras del borde del hueco. El resultado obtenido quedará



*Imagen nº10. Líneas de rotura generadas en vanos donde existen huecos*

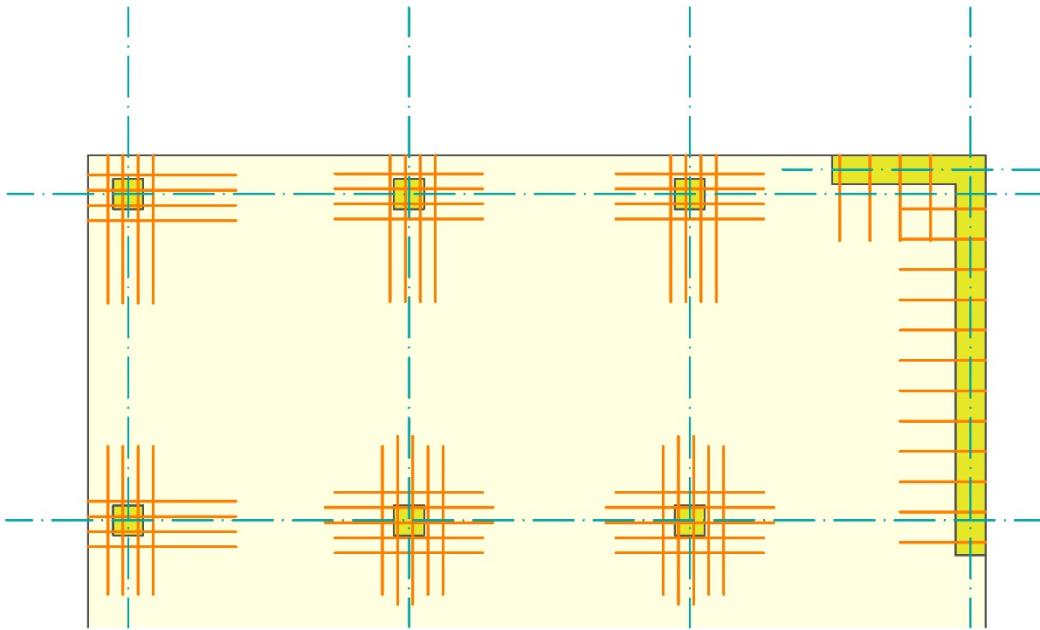
limitado solo a la zona de la losa en la que no afecte el hueco. Para el resto, se debe calcular con una configuración distinta, en función de la capacidad del zuncho de borde. Para estos casos, tras realizar el cálculo general más desfavorable, debe realizarse también un cálculo puntual para repartir homogéneamente el momento resultante del cálculo global.

Para el caso de cargas concentradas debe optarse por configuraciones tipo "sobre" o en "cruz" considerando las vigas o zunchos laterales como ejes de giro con capacidad de carga.

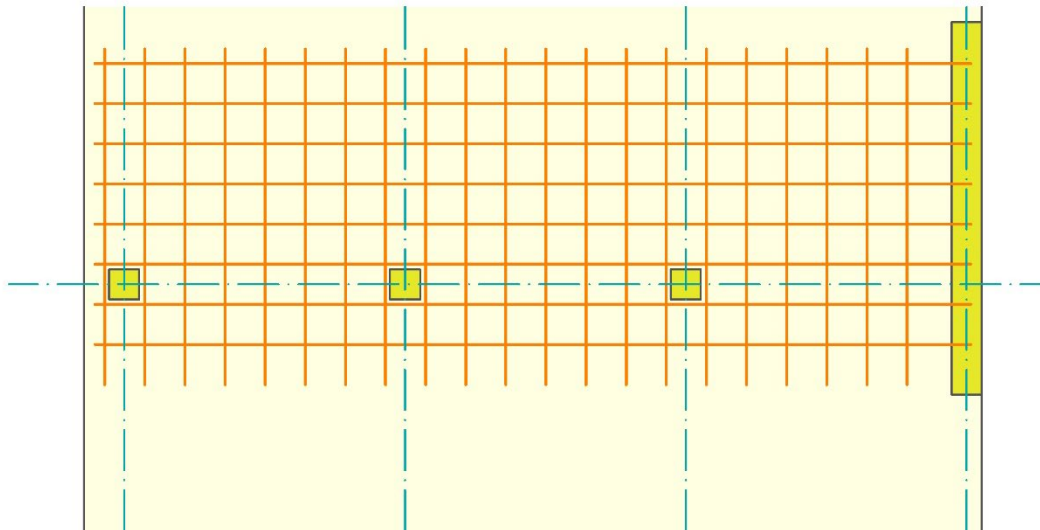
En el punto **6.3 Flexión por carga vertical**, encontramos los distintos patrones de rotura que se pueden generar en una losa de hormigón, independientemente de su geometría. El DAV propone comprobar la losa ante varias configuraciones de rotura, en este punto, especifica que no existe un método suficientemente fiable que podamos utilizar para obtener las sollicitaciones a flexión de un elemento estructural. Debemos de considerar un valor realista, uno que produzca la rotura del elemento. Lo ideal, para ello, sería encontrar el valor de la rigidez fisurada, pero, para conseguir este valor debemos de haber, previamente, definido la armadura. Este sistema es más sencillo y más coherente en el método de cálculo y que, además, da como resultado la solución más constructiva, eficaz y sostenible, es decir, menos armadura utilizada.



## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA



**Imagen n°11.** Patrón de armado en forjados de losa de hormigón. Refuerzos locales en cara superior



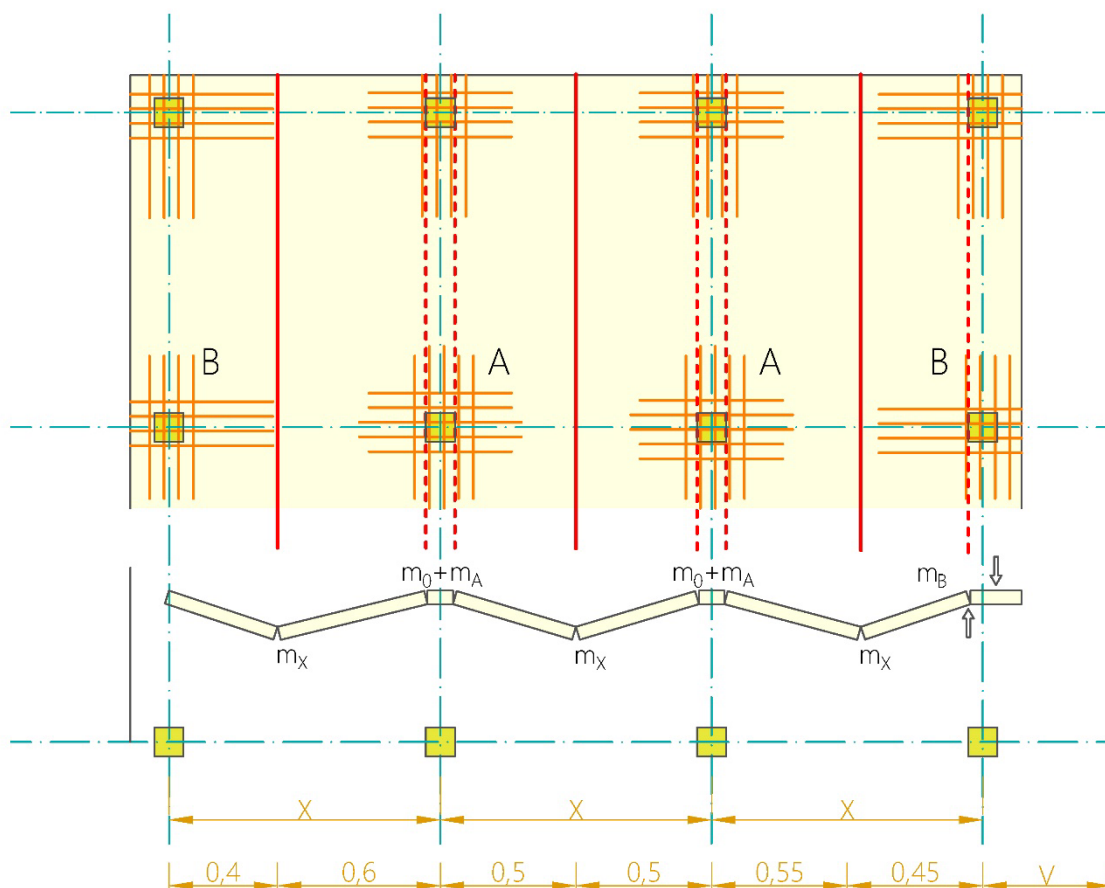
**Imagen n°12.** Patrón de armado en forjados de losa de hormigón. Armado inferior y superior de base continuo

Se deberá establecer la situación más desfavorable y obtener el valor, por equilibrio, de la capacidad resistente del elemento antes de que produzca la rotura. Para encontrar esta situación no se dispone de un método reglado capaz de encontrar la situación idónea por la que una estructura llegue a fisurar en su capacidad de carga máxima real.

Un patrón de armado razonable y simple sobre un forjado puede ser el mostrado en las imágenes n° 11 y n° 12: armadura completa en la zona inferior de la losa, lo que conllevará diámetros menores; armadura "base" en la cara superior, también de diámetros menores; utilizar refuerzos locales en las zonas donde se encuentren situados los soportes de la estructura, dispuesta en las dos direcciones y con disposición centrada en cada soporte. Sobre muros se utilizará armadura de refuerzo transversal en la longitud del muro

El DAV EHE-08 define distintos patrones de agotamiento que se pueden producir en las distintas estructuras que se vayan a estudiar:

**Agotamiento tipo Diedro:** Se forma mediante líneas paralelas, una constituida en el centro del vano (momento positivo) y otra en los bordes de las vigas (momento negativo). Esta línea en los bordes actuará, a su vez, como eje de giro de la superficie generada por las líneas. Este patrón presenta suficiente capacidad resistente al agotamiento entre cada superficie generada.



**Imagen n°13.** Modelo de agotamiento tipo Diedro. Refuerzos locales y localización de la línea de rotura según el tipo de crujía (de drcha. a izq.: externa, interna y con voladizo)

En este tipo de casos se adopta una configuración tal que, entendiendo la estructura en su conjunto (*imagen n°13*), los vanos laterales producirán la línea de rotura más cercana al extremo, al contrario de lo que ocurre con el central, que si la producirá en el centro. Esto ocurre debido a que se tiene que cumplir el equilibrio, la superficie 2 ve compensado su momento con la superficie 3. En el caso de la zona 1, no encuentra compensación debido a que está situada en el extremo, por ello y para que se produzca el equilibrio, el giro producido debe ser mayor que el que se produce en los vanos centrales. Se utilizará, para el cálculo, una configuración 40-60 para situar dicha línea de rotura. Lo mismo ocurre en las zonas donde exista voladizo, aunque en este caso, utilizaremos una configuración 45-55.

Los refuerzos de armadura en este caso, se distribuirán entre los soportes de la estructura, centralizado e igual en las dos direcciones. En el caso de muros, se utilizará armado longitudinal.

$$\text{Crujía interna: } m_x + m_0 + m_A \geq \frac{q \cdot X^2}{8}$$

$$\text{Crujía externa: } m_x + 0,45 \cdot (m_0 + m_A + m_B) \geq \frac{q \cdot X^2}{8}$$

$$\text{Crujía externa con vuelo: } m_x + 0,4 \cdot (m_0 + m_A) \geq \frac{q \cdot X^2}{8}$$

Donde:

$X$  Luz entre pilares

$m_0$  momento negativo de la armadura de base

$m_A$  momento negativo generado por la línea de rotura en apoyos interiores

$m_B$  momento negativo generado por la línea de rotura en apoyos exteriores

$m_x$  momento positivo generado por la línea de rotura en el centro de los vanos

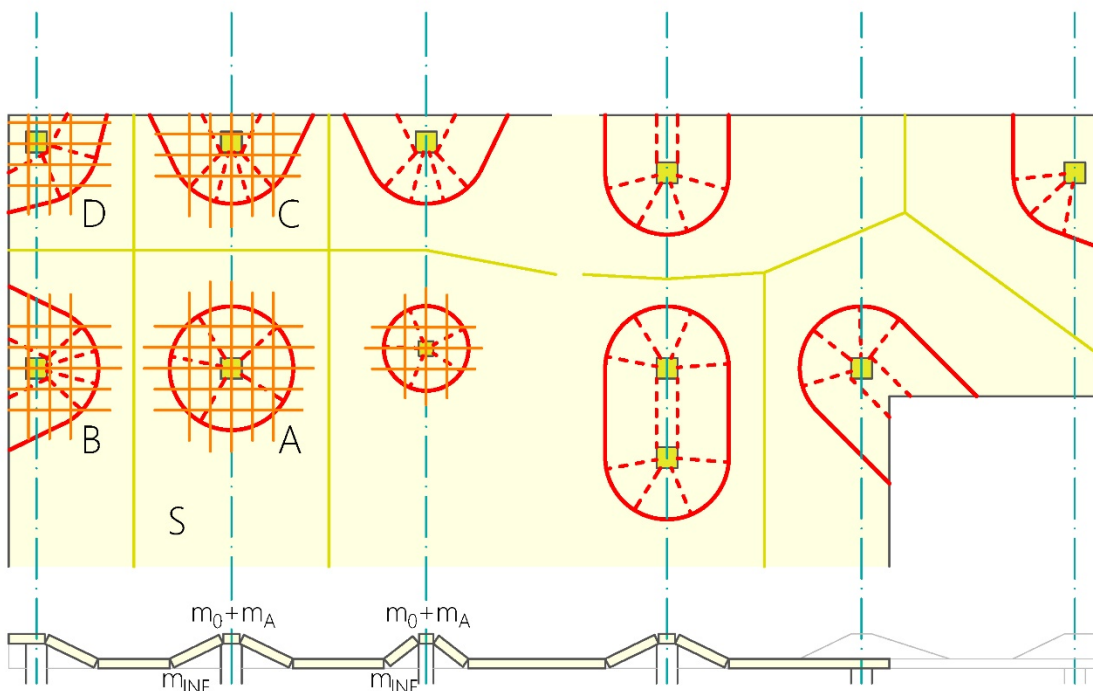
$q$  carga superficial sobre la losa  $\frac{Kg}{m^2}$

**Agotamiento tipo Cono:** Estas líneas se generan a partir de conos locales situando los centros de dichos conos en los soportes de la estructura. Los conos presentaran momento positivo en el perímetro del mismo, mientras que, el momento negativo, aparecerá en varios radios, donde se produce rotura. Con este patrón de rotura, no se tendrá en cuenta la disposición de los soportes debido a que existe suficiente capacidad resistente en la estructura.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

El perímetro de cada cono de rotura viene dado por la situación de cada soporte. En los centrales, la circunferencia es completa. Para los que estén situados en los extremos, es de media circunferencia o un cuarto de la misma para el caso de soportes en esquina.

Para este caso, los refuerzos de armadura se disponen de la misma manera que en el caso anterior, pero siempre teniendo en cuenta que, dicho armado, debe cubrir toda el área generada por el cono de rotura.



**Imagen nº14.** Modelo de agotamiento tipo Cono

$$\text{Interior: } m_{inf} + m_0 + m_A \geq \frac{q \cdot S}{2\pi}$$

$$\text{De borde: } m_{inf} + m_0 + m_{BC} \geq \frac{q \cdot S}{\pi}$$

$$\text{De esquina: } m_{inf} + m_0 + m_D \geq \frac{q \cdot S}{0,5\pi}$$

Donde:

$m_{inf}$  momento de la armadura inferior en cada dirección, interesada por la base del cono

$m_0$  momento negativo de la armadura de base

$m_A$  momento en apoyo central de la armadura superior interesada por el cono

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

$m_{BC}$  momento en apoyo de borde de la armadura superior interesada por el cono

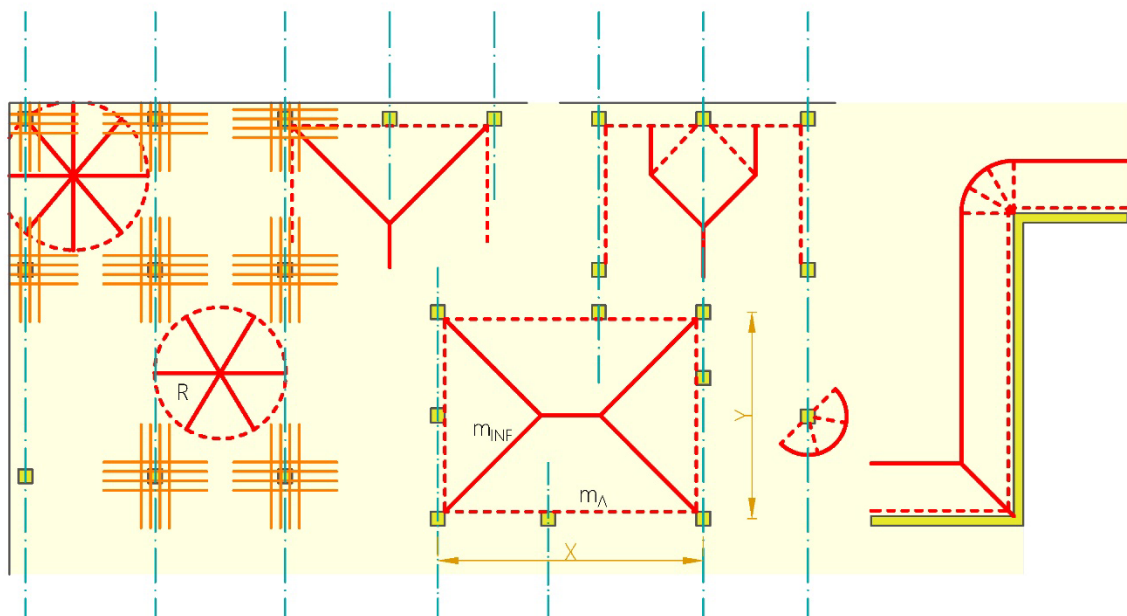
$m_D$  momento en apoyo en esquina de la armadura superior interesada por el cono

$q$  carga superficial sobre la losa  $\frac{Kg}{m^2}$

$S$  superficie tributaria del soporte

**Agotamiento tipo Artesa:** Este patrón de rotura se genera en la zona interior a los soportes, generándose un perímetro cerrado. Este espacio cerrado presenta momento negativo en las líneas del perímetro mientras que, las diagonales que se generen en el interior, serán en momento positivo. La línea de rotura más desfavorable, o de mayor punto de desviación, será aquella que tenga menor longitud y una mayor superficie de giro.

En los vanos entre soportes, se debe considerar la rotura mediante una artesa circular, lo que implica armadura de refuerzo y de base en la zona inferior del elemento estructural. Se especifica, que la línea o el perímetro más desfavorable en este caso es aquel en el que las líneas de momento negativo discurren a ras de los soportes.



*Imagen n°15. Modelo de agotamiento tipo Artesa*

Si nuestra estructura de cálculo se realiza mediante el apoyo de la losa sobre vigas, los cortes locales sobre la losa más desfavorables serán los de tipo "Artesa"

mientras que, para un estudio de fisura global, se deberá utilizar un modelo tipo "diedro" o "cono"

$$\text{Artesa circular: } m_{inf} + m_0 \geq \frac{q \cdot R^2}{6}$$

$$\text{Artesa rectangular a ras de soportes: } m_{inf} + m_0 + m_A \geq \frac{q \cdot X \cdot Y}{24}$$

Donde:

**X Y** dimensiones del rectángulo de cálculo

**$m_{inf}$**  momento de la armadura inferior en cada dirección, interesada por la base del cono

**$m_0$**  momento negativo de la armadura de base

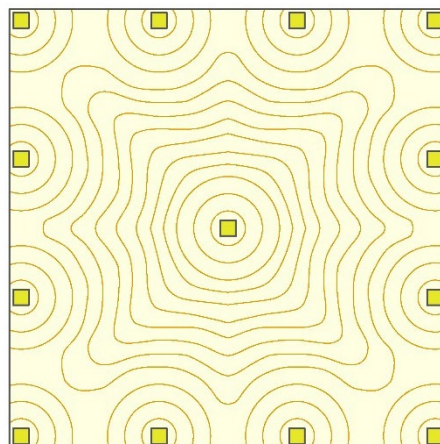
**$m_A$**  momento de la línea perimetral de cálculo

**q** carga superficial sobre la losa  $\frac{Kg}{m^2}$

**R** radio del círculo mayor que se puede trazar sin interceder en la parte resistente de la armadura de refuerzo inferior

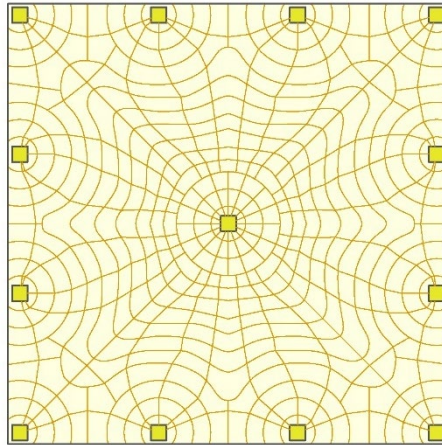
**Modelo general de rotura:** Para los casos en los que no sea fácil identificar el patrón de rotura del elemento, se podrán utilizar los pasos siguientes:

- 1- Dibujar curvas de nivel de la deformación, trazando envolventes sucesivas a través de los puntos de soportes y a distancias arbitrarias.

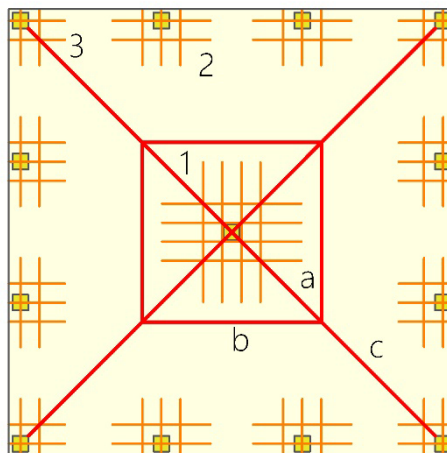


## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

2- Trazar lo que serían las líneas de pendiente de las curvas generadas.



3- Entre estas líneas y curvas generadas se encontrará la configuración más desfavorable para nuestra estructura, pero para poder averiguar la real, debemos de tener en cuenta la disposición de la armadura que hayamos definido previamente.



Se especifica en la norma que, la configuración crítica siempre será aquella que, con menor perímetro y desarrollo, permita la máxima deformación de la estructura.

**Momento x giro**

**Líneas a:**  $4 \cdot (L \cdot m_0 + m_A) \times \frac{\delta}{0,5 \cdot L}$

**Líneas b:**  $2 \cdot 4 \cdot L \cdot m_x \times \frac{\delta}{0,5 \cdot L}$

**Líneas c:**  $4 \cdot L \cdot m_x \times \frac{\delta}{0,5 \cdot L}$

**Carga x descenso**

**Zonas 1:**  $\frac{q \cdot L^2}{2} \times 2 \cdot \frac{\delta}{3}$

**Zonas 2:**  $2 \cdot \frac{q \cdot L^2}{2} \times \frac{\delta}{2}$

**Zonas 3:**  $q \cdot L^2 \times \frac{\delta}{3}$

**Igualando ambos:**  $24 \cdot m_x + 8 \cdot m_0 + \frac{8 \cdot m_A}{L} = 2 \cdot q \cdot L^2$

Donde:

**L** longitud del lado de la losa de cálculo

**$m_x$**  momento en la línea de rotura de cálculo

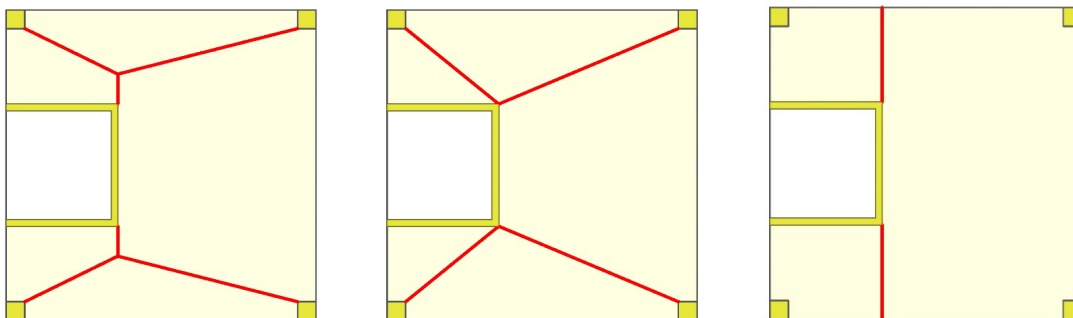
**$m_0$**  momento negativo de la armadura de base

**$m_A$**  momento de la línea perimetral de cálculo en el soporte

**q** carga superficial sobre la losa  $\frac{Kg}{m^2}$

**$\delta$**  deformación de la línea de rotura de cálculo

**Patrones de rotura en el caso de existencia de huecos:** Para conseguir el patrón más desfavorable en este tipo de análisis, debemos generar que, por el hueco, discurren el mayor número de líneas posibles. A continuación, se muestran distintos casos típicos:



*Imagen nº16. Modelos de agotamiento en huecos*

## 2.6 Cálculo informático de líneas de rotura

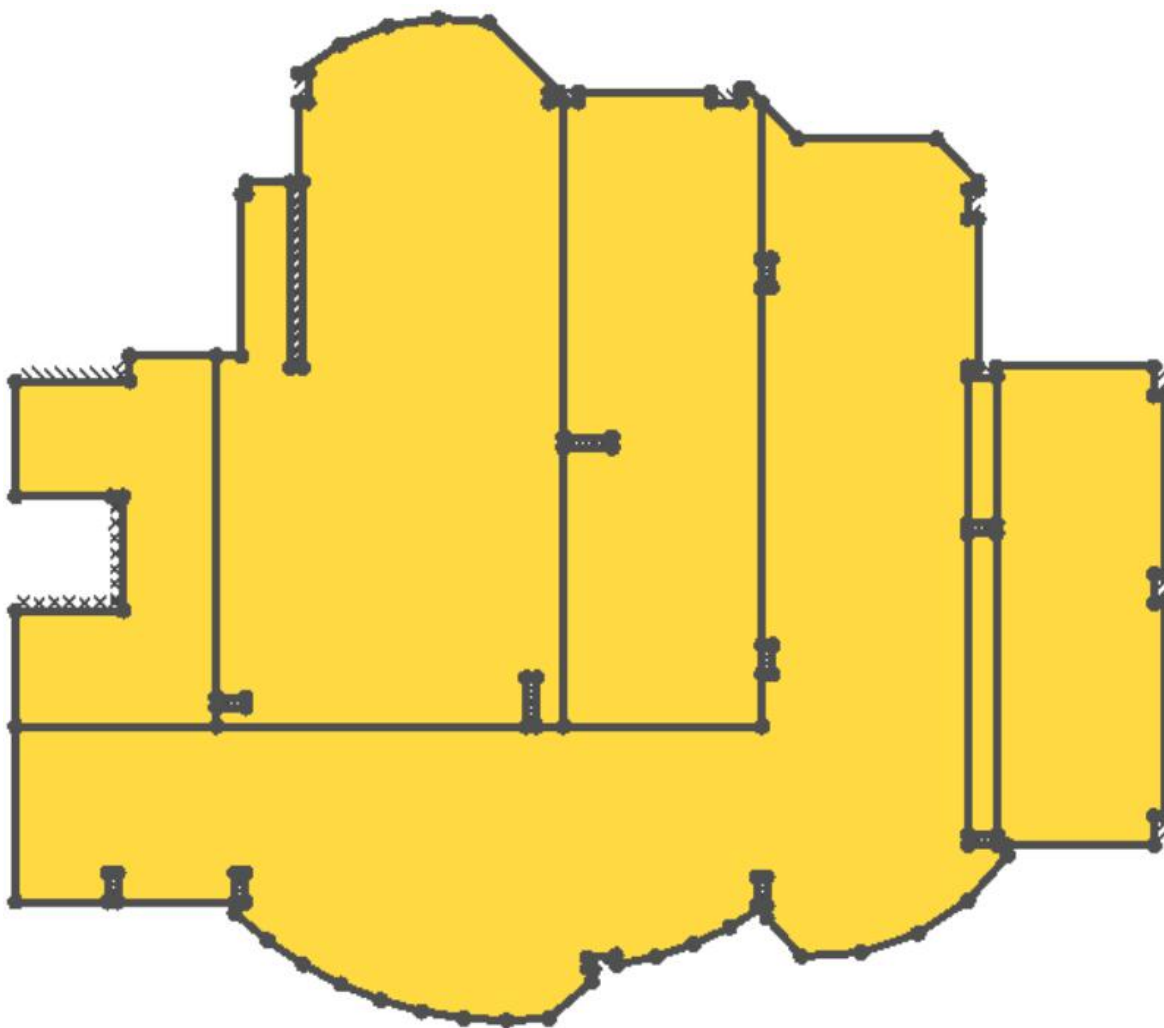
Como ya sabemos, no es fácil encontrar el patrón de rotura más desfavorable para el cálculo de la losa de hormigón. Con el tiempo, se ha ido investigando y realizando cálculos cada vez más precisos hasta llegar a desarrollar un programa



## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

informático capaz de realizar este trabajo. Uno de ellos lo ha producido el desarrollador *LIMITSTATE* con el programa *LIMITSTATE SLAB* [ 16 ]. El programa tiene un algoritmo de optimización que, según los valores que nosotros le demos, nos genera el patrón de rotura más desfavorable para dicha losa, así como el valor de la carga o el momento máximo por el que se generarán esas líneas de rotura.

A través de un ejemplo, vamos a comprobar cómo funciona el programa y la gran utilidad que éste presenta para este tipo de cálculos:

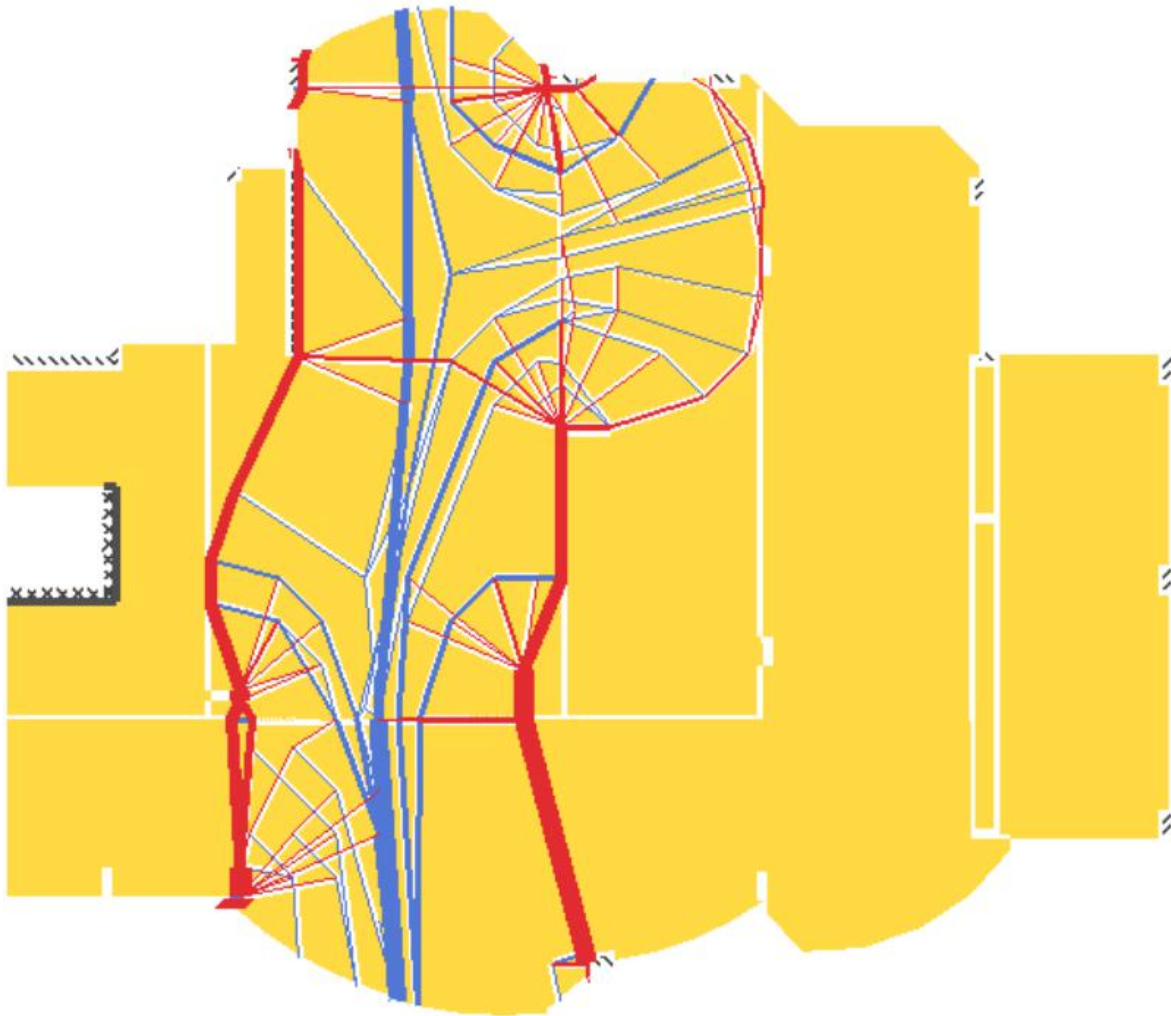


*Imagen n°17. Losa de hormigón armado irregular*

Se nos presenta una losa de hormigón armado irregular, tal y como vemos en la *imagen n° 17*. Una losa de geometría irregular para la cual, un cálculo manual, sería algo que podríamos llamar "interminable". En una estructura de esta geometría, deberíamos generar un número bastante alto de patrones de rotura y realizar su cálculo hasta encontrar el patrón de rotura que se produce a menor carga. Algo que

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

nos llevaría bastante tiempo y que, los resultados generados, no serán todo lo real que nosotros querriamos. Por ello, nos apoyaremos en el programa, que nos genera las líneas de rotura más desfavorables:

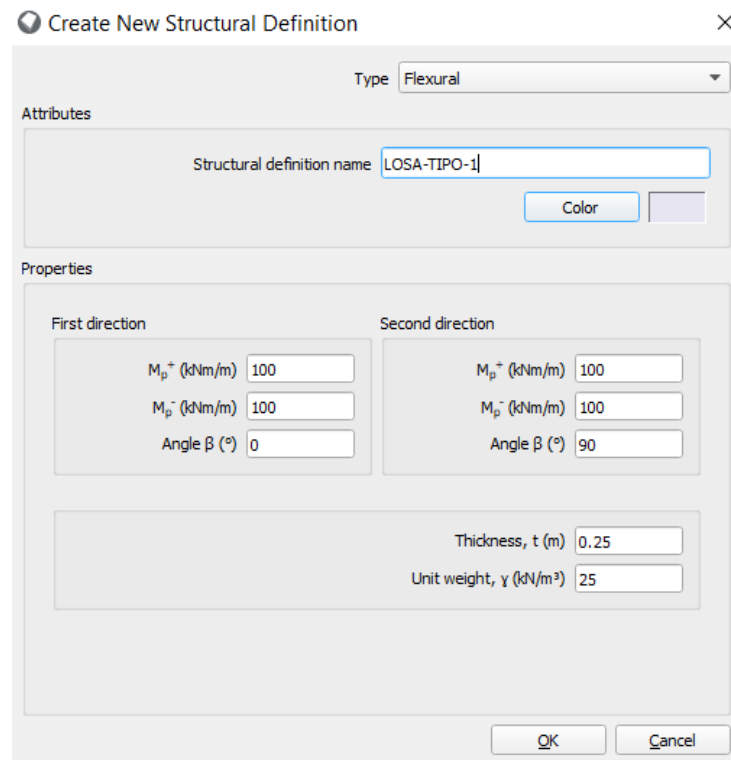


*Imagen n°18. Patrón de rotura generado por el programa LIMITSTATE SLAB*

En la *imagen n° 18* vemos el patrón de rotura que ha generado el programa en la losa de hormigón, considerando una capacidad a flexión igual en ambas caras y direcciones. Como vemos, se han obtenido bastantes líneas de rotura, en este caso, las líneas de color azul serán las positivas, mientras que, las de color rojo, serán las negativas. Con ello, tendremos un resultado más preciso para poder proyectar los refuerzos de armado de la estructura, sabemos por dónde romperá y sabemos por donde la debemos reforzar.

## 2. TEORÍA DE LÍNEAS DE ROTURA

En el programa típicamente se define la capacidad del material (momento de rotura), indicando el momento plástico positivo y negativo en dos direcciones como se muestra en la *imagen n° 19*.

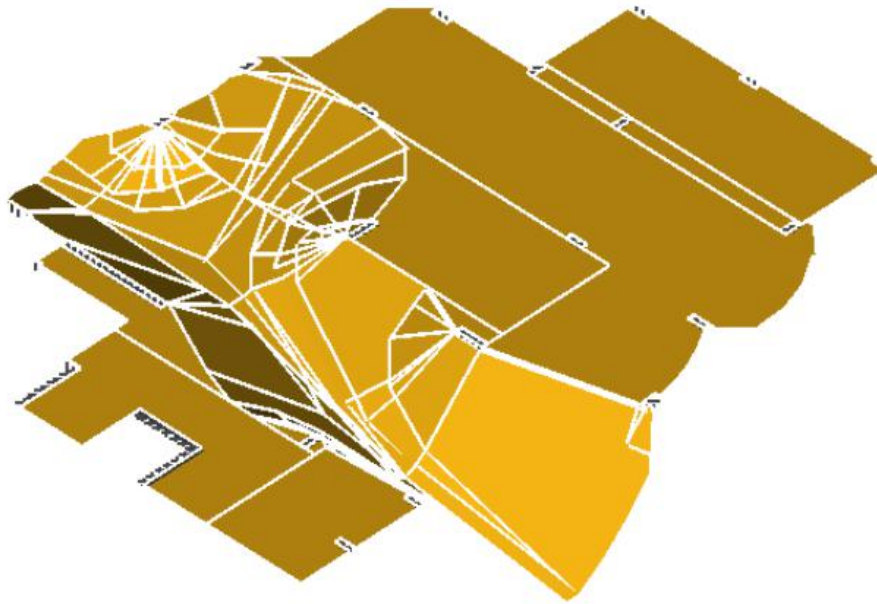


*Imagen n°19. Pantalla de definición del material en el programa LIMITSTATE SLAB*

En este caso, se ha optado por utilizar el valor  $100 \frac{KNm}{m}$  para todos los momentos, tanto positivos como negativos y en las dos direcciones. Se ha aplicado una carga unitaria de  $1 \frac{KN}{m^2}$  sobre la losa, el programa incrementa esta carga por un factor  $\lambda$  hasta que se produce la rotura. El resultado en este caso es la carga última  $q_u$  que la losa es capaz de soportar en este patrón de carga.

$$q_u = 42,7 \frac{KN}{m^2} \quad (2.31)$$

El programa también nos ayudará a visualizar el alcance del patrón de rotura correspondiente a esta carga última a través de una representación gráfica en 3D de la misma:



*Imagen nº20. Representación en 3D del patrón de rotura generado por el programa LIMITSTATE SLAB*

Como hemos podido comprobar, el programa presenta muy buena utilidad para el cálculo de este tipo de estructuras mediante el método de las líneas de rotura. Por ello, en este trabajo, lo utilizaremos para diseñar, con mayor exactitud, los ejemplos de losas de hormigón que se han estudiado.

El programa también puede emplearse para calcular el momento plástico  $M_p$  necesario para soportar una carga última  $q_u$  dada. En este caso puede procederse asignando un momento plástico unitario  $M_p = 1 \text{ KNm}$  al material, y una carga superficial unitaria  $1 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$ . El resultado del programa es el factor  $\lambda$  que produce la rotura de la losa, con una carga  $\lambda \cdot 1 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$ . En estas condiciones, el momento plástico  $M_p$  necesario para soportar una carga última  $q_u$  es:

$$M_p = \frac{q_u}{\lambda} \quad (2.32)$$

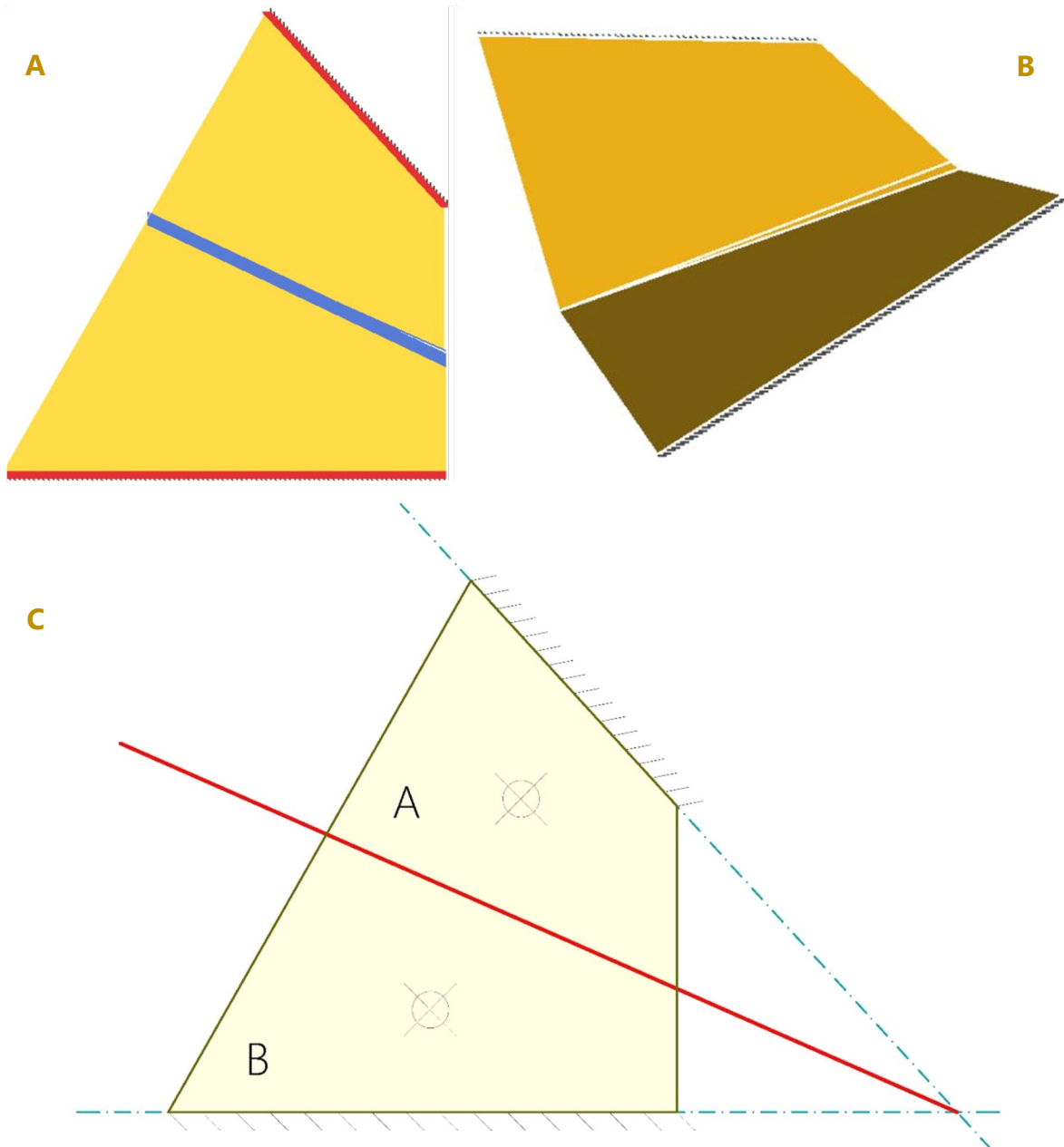
### 3. CASOS TÍPICOS

Una vez visto el proceso para el cálculo de las líneas de rotura generadas en una geometría correspondiente a una losa de hormigón armado, vamos a estudiar distintos casos típicos que se nos pueden dar a la hora de realizar nuestro estudio sobre la losa.

Para los cálculos de cada una de las losas realizaremos el mismo proceso contado anteriormente, utilizando como valor de carga  $q_u = 14,7$  KN/m<sup>2</sup> y Acero B-500 para el cálculo del armado. El canto de la losa será de 25 cm y el canto útil de 21 cm:

### 3.1 Losa biapoyada oblicua

En este caso se nos presenta una losa biapoyada en dos de sus laterales, apoyo simple. Al ser solo dos zonas de apoyo, solo se formarán dos ejes de giro y la línea de rotura será la bisectriz de dichos ejes, coincidiendo la línea con el centro de la losa:



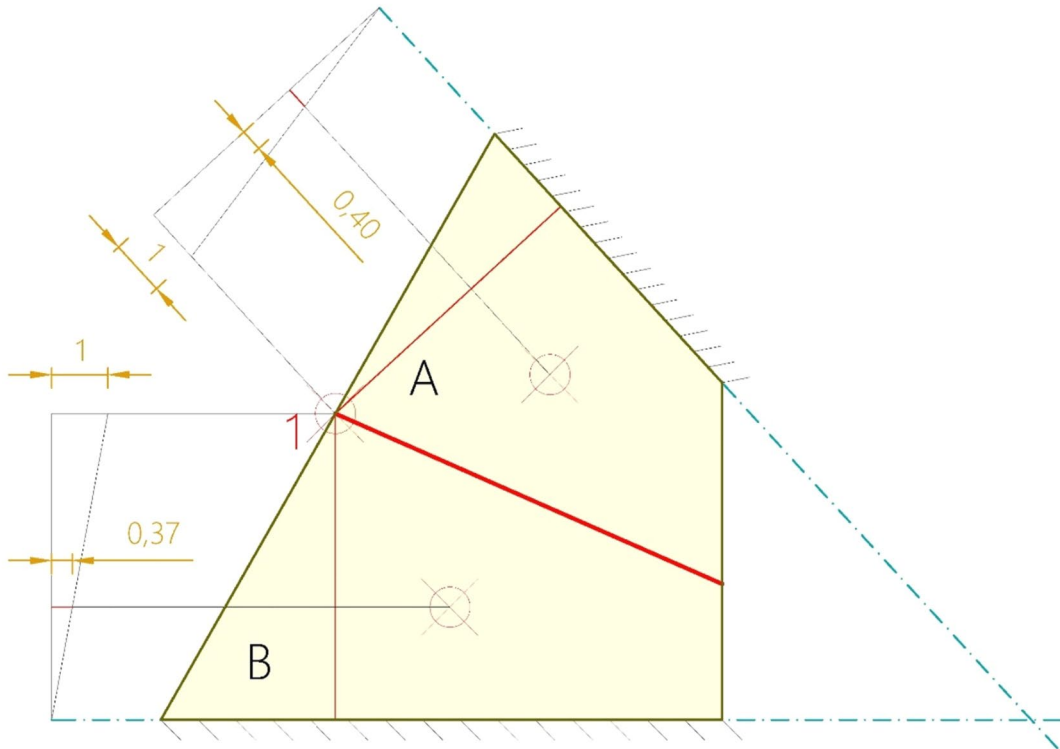
**Imagen nº21.** Patrón de rotura de losa biapoyada oblicua. A- Planta de la solución en LIMITSTATE SLAB; B- Vista 3D de la solución en LIMITSTATE SLAB; C- Patrón de rotura calculado a mano

### 3. CASOS TÍPICOS

La solución en LIMITSTATE SLAB es:

$$\lambda = 0,006984 \quad M_p = \frac{1}{0,006984} = 143,84 \frac{KNm}{m} \quad (3.1)$$

Comprobamos el resultado mediante cálculo manual, en primer lugar, las áreas de cada región y el descenso de sus centros de gravedad (**CG**):



*Imagen n°22. Áreas de cálculo de losa biapoyada oblicua. Cotas: descenso de los CG de cada área*

$$\mathbf{A} = 28,69 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG A} = 0,40 \text{ m}$$

$$\mathbf{B} = 35,59 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG B} = 0,37 \text{ m}$$

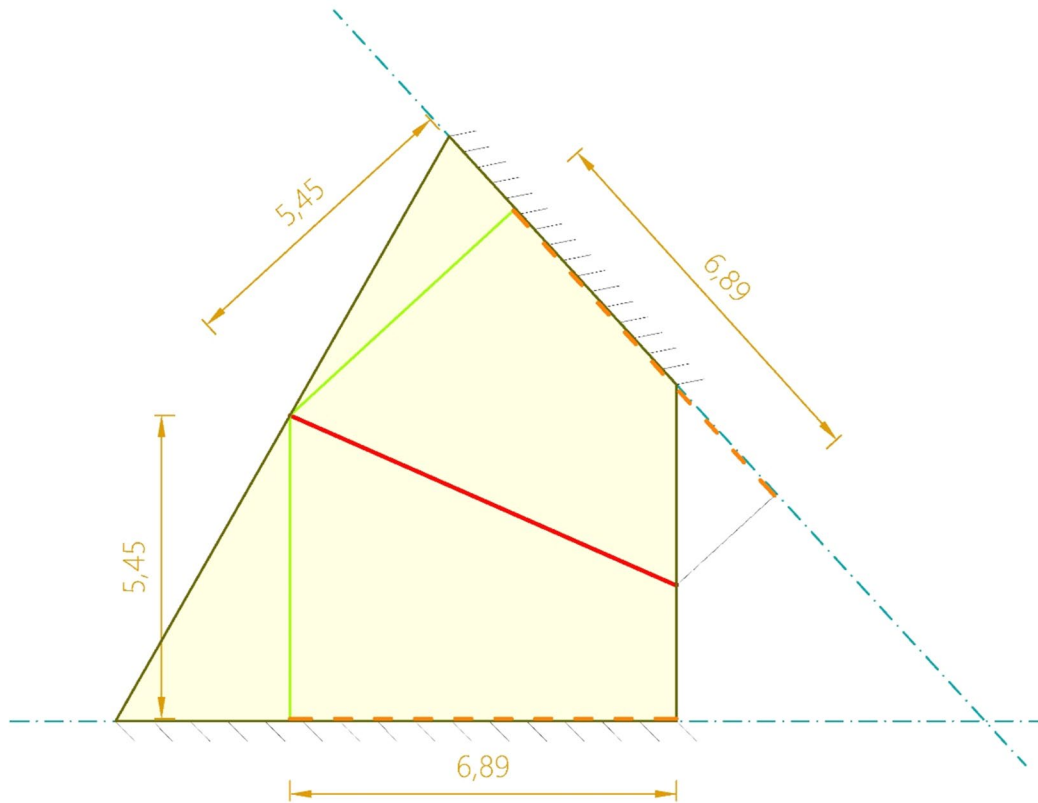
Calculamos el valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación:

$$\mathbf{E} = 14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot ((28,69 \text{ m}^2 \cdot 0,4m) + (35,59 \text{ m}^2 \cdot 0,37m)) \quad (3.2)$$

3. CASOS TÍPICOS

$$E = 362,26 \frac{KNm}{m}$$

Calculamos ahora el valor de la energía generada en la línea de rotura:



*Imagen n°23. Dimensiones de la proyección de la línea de rotura, en losa biapoyada oblicua, sobre los ejes de giro. En color verde: distancia de giro desde el punto de mayor deformación*

$$W = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 6,89 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{5,45 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.3)$$

$$W = 2,52 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Igualemos estos valores para obtener el momento **M** que estamos buscando:

$$E = W \rightarrow 362,26 \frac{KNm}{m} = 2,52 \cdot M \frac{KNm}{m} \rightarrow M \frac{KNm}{m} = \frac{362,26}{2,52} \quad (3.4)$$



### 3. CASOS TÍPICOS

$$M = 143,75 \frac{KNm}{m}$$

Obtenido este valor del momento máximo que soportará la losa, proyectamos el armado de la misma:

$$\text{Acero B500} \rightarrow f_{yd} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{mm^2} \quad (3.5)$$

$$d = 25 \text{ cm} \rightarrow 25 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \quad (3.6)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (3.7)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,21 \text{ m} = 143,18 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{143,18 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,21 \text{ m}}$$

$$U_s = 757,567 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (3.8)$$

$$757,567 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{KN}{m^2} \rightarrow A_s = \frac{757,567 \text{ KN}}{434783 \frac{KN}{m^2}}$$

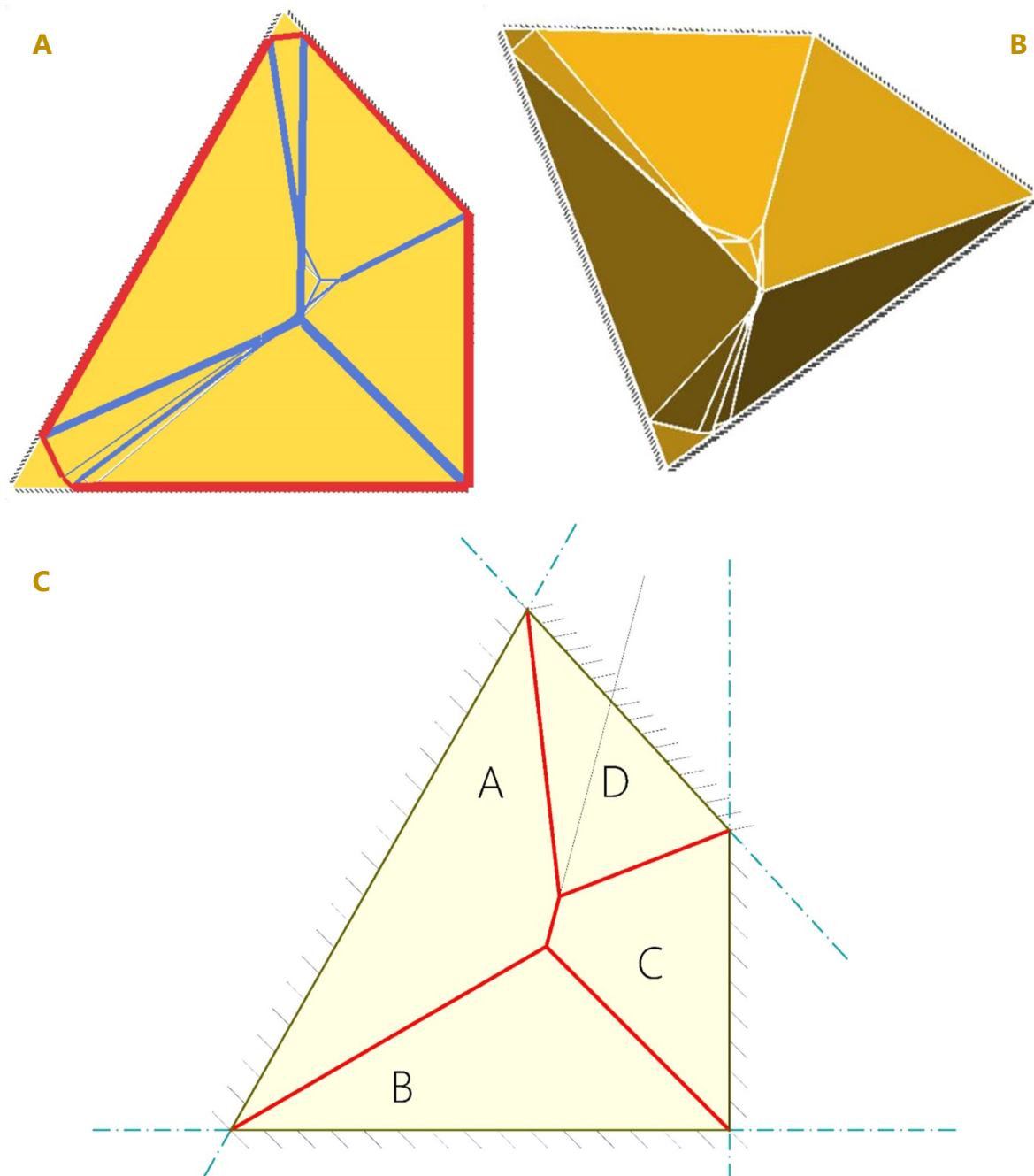
$$A_s = 0,001742 \text{ m}^2 = 17,42 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D20} = 3,14 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{17,42 \text{ cm}^2}{3,14 \text{ cm}^2} = 5,55 \quad (3.9)$$

**1 D20 cada 17 cm**

### 3.2 Losa sobre 4 lados no paralelos

La losa se encuentra apoyada en todos sus lados, apoyo simple. Nos encontraremos 4 ejes de giro correspondientes a sus 4 lados por lo que, se nos formarán 4 regiones de rotura. De estas 4 regiones se nos han generado 5 líneas de rotura y debemos calcular los momentos que se generan en cada una por separado debido a que la estructura no es simétrica.



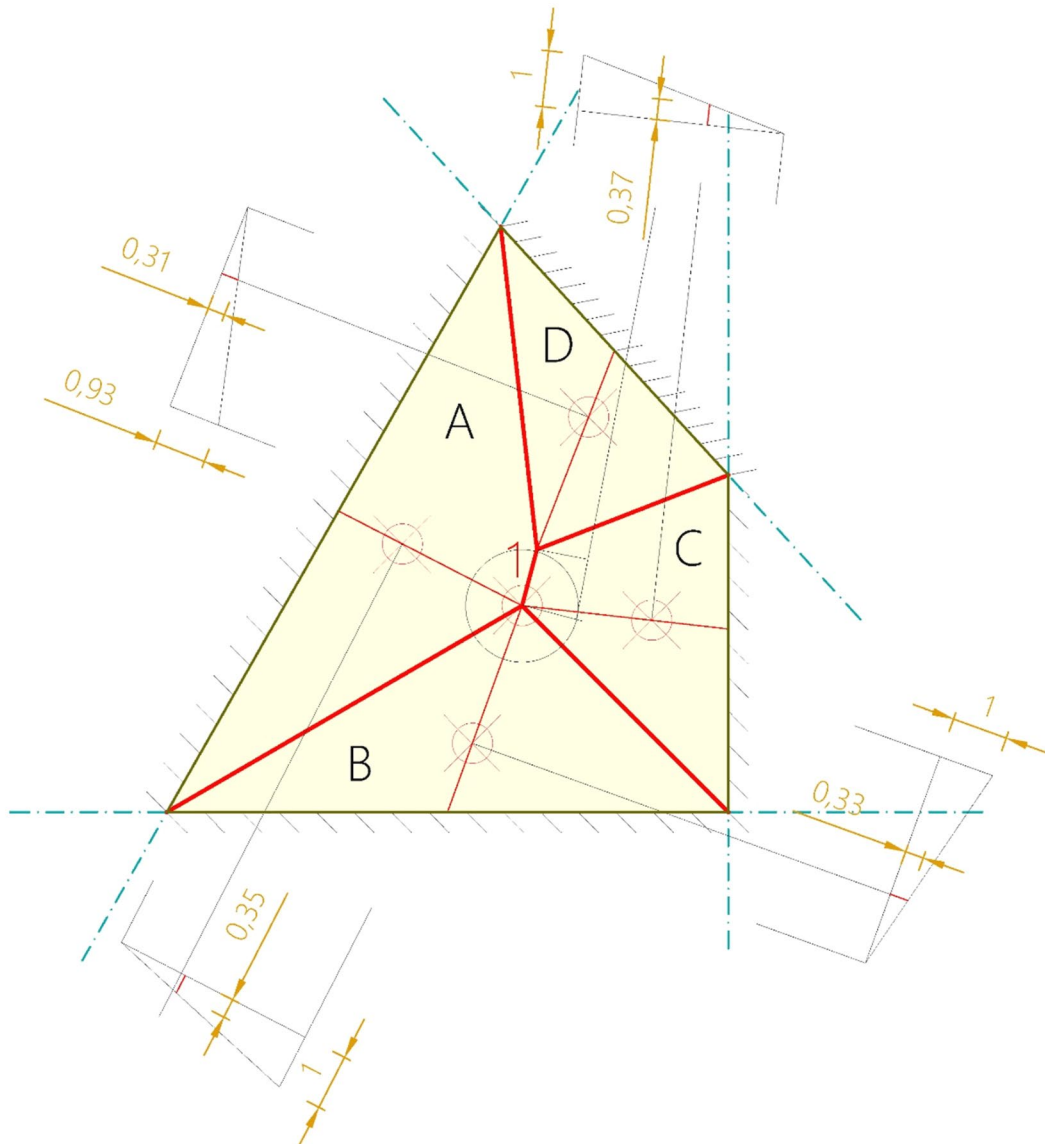
**Imagen n°24.** Patrón de rotura de losa sobre 4 lados no paralelos. A- Planta de la solución en LIMITSTATE SLAB; B- Vista 3D de la solución en LIMITSTATE SLAB; C- Patrón de rotura calculado a mano

### 3. CASOS TÍPICOS

La solución en LIMITSTATE SLAB es:

$$\lambda = 0,02783 \quad M_p = \frac{1}{0,02783} = 35,93 \frac{KNm}{m} \quad (3.10)$$

Comprobamos el resultado mediante cálculo manual, en primer lugar, las áreas de cada región y el descenso de sus centros de gravedad (**CG**):



**Imagen n°25.** Áreas de cálculo de losa sobre 4 lados no paralelos. Cotas: descenso de los CG de cada área

$$\mathbf{A} = 23,13 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG A} = 0,35 \text{ m}$$

$$\mathbf{B} = 18,35 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG B} = 0,33 \text{ m}$$

### 3. CASOS TÍPICOS

$$C = 12,56 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG C} = 0,37 \text{ m}$$

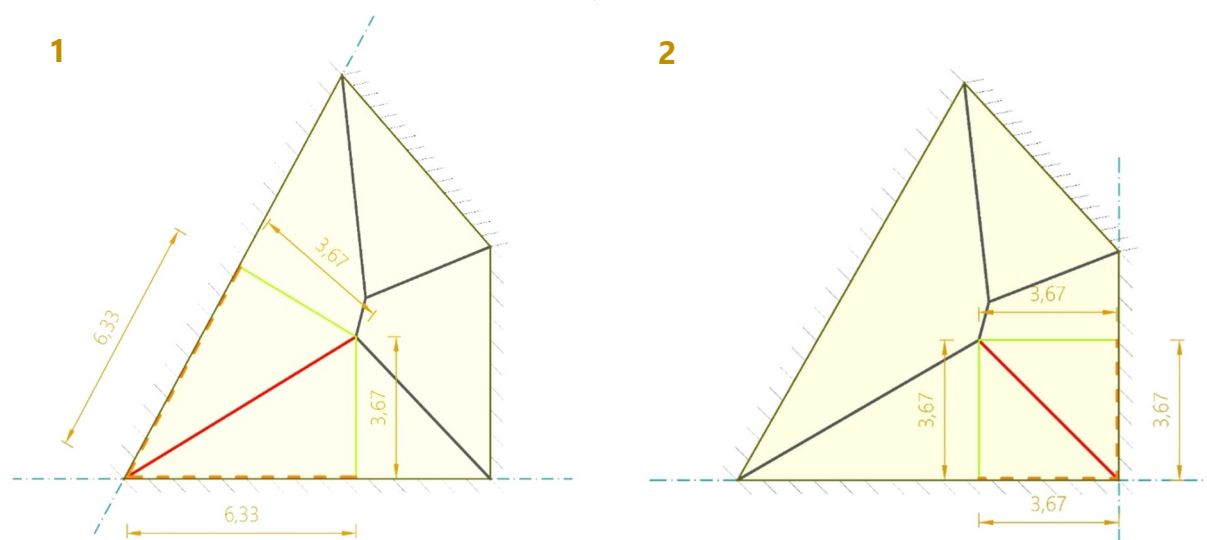
$$D = 10,23 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG D} = 0,31 \text{ m}$$

Calculamos el valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación:

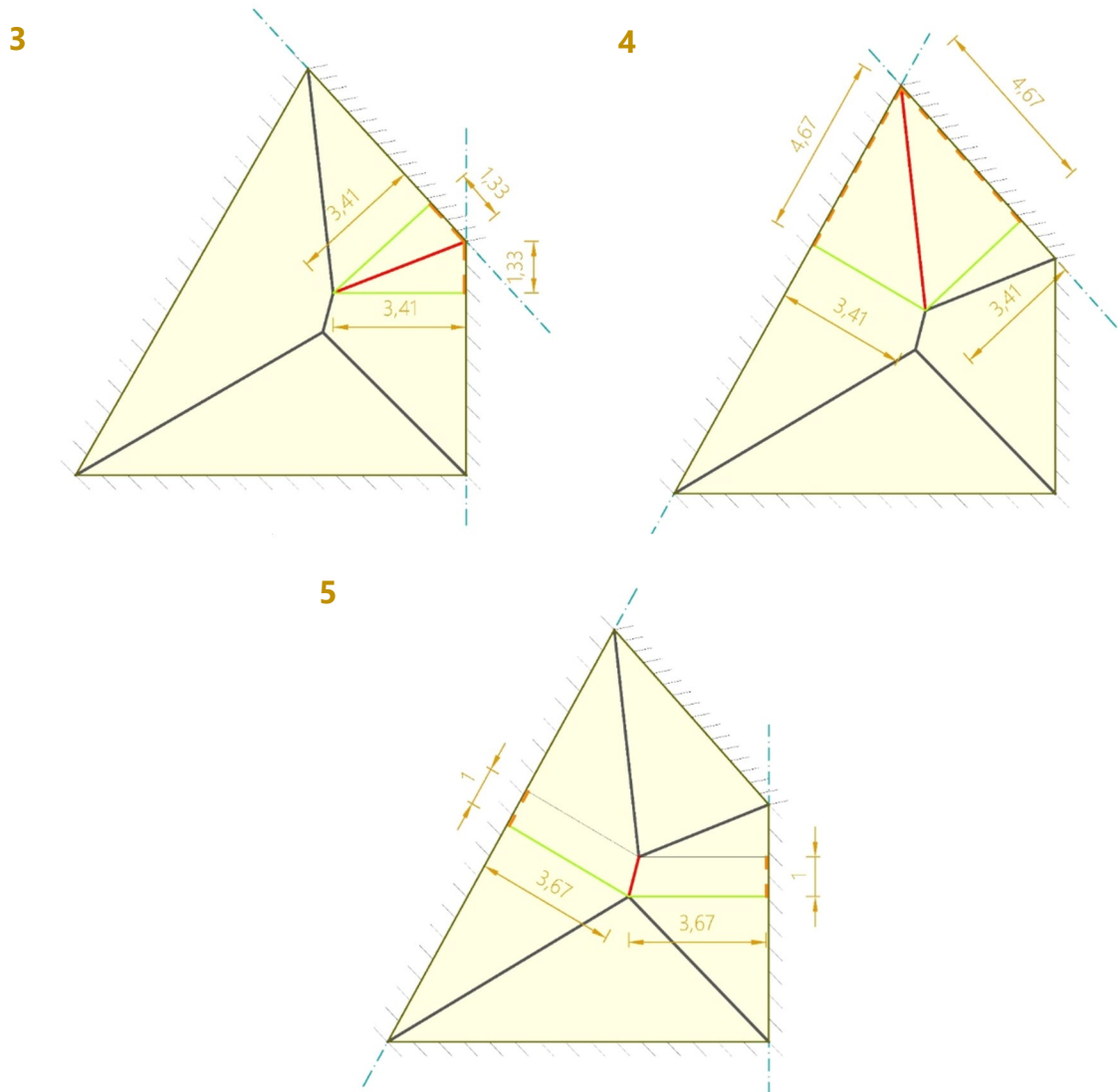
$$E = 14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot ((28,13\text{m}^2 \cdot 0,35\text{m}) + (18,35\text{m}^2 \cdot 0,33\text{m}) + (12,56\text{m}^2 \cdot 0,37\text{m}) + (10,23\text{m}^2 \cdot 0,31\text{m})) \quad (3.11)$$

$$E = 322,95 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

Para obtener el trabajo absorbido por las líneas de rotura generadas en la losa, se va a proceder a analizarlas por separado, proyectando cada línea en los dos ejes de giro horizontales del contorno. Debemos calcular este valor para cada una de las regiones en las que esté situada. Para ello utilizaremos el valor de la proyección de la línea en los ejes de giro y la distancia, perpendicular, desde el punto de mayor deformación hasta el eje de giro:



### 3. CASOS TÍPICOS



**Imagen n°26.** Dimensiones de la proyección de las líneas de rotura, en losa sobre 4 lados no paralelos, sobre los ejes de giro. En color verde: distancia de giro desde el punto de mayor deformación

- Losa sobre 4 lados no paralelos: trabajo sobre línea de rotura 1

$$W1 = \left( M \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \cdot 6,33 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,67 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.12)$$

$$W1 = 3,45 \cdot M \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

- Losa sobre 4 lados no paralelos: trabajo sobre línea de rotura 2

### 3. CASOS TÍPICOS

$$W2 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 3,67 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,67 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.13)$$

$$W2 = 2,00 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losa sobre 4 lados no paralelos: trabajo sobre línea de rotura 3

$$W3 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 1,33 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,41 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.14)$$

$$W3 = 0,78 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losa sobre 4 lados no paralelos: trabajo sobre línea de rotura 4

$$W4 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 4,67 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,41 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.15)$$

$$W4 = 2,74 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losa sobre 4 lados no paralelos: trabajo sobre línea de rotura 5

$$W5 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 1,00 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,67 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.16)$$

$$W5 = 0,545 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Conseguidos todos los valores, calculamos la energía generada total por la losa, que será la suma de todas las anteriores:

$$Wt = M \frac{KNm}{m} \cdot (3,45 + 2,00 + 0,78 + 2,74 + 0,545) \quad (3.17)$$

3. CASOS TÍPICOS

$$Wt = 9,515 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Igualamos estos valores para obtener el momento  $M$  que estamos buscando:

$$E = Wt \rightarrow 322,95 \frac{KNm}{m} = 9,515 \cdot M \frac{KNm}{m} \rightarrow M \frac{KNm}{m} = \frac{322,95}{9,515} \quad (3.18)$$

$$M = 33,94 \frac{KNm}{m}$$

Obtenido este valor del momento máximo que soportará la losa, proyectamos el armado de la misma:

$$\text{Acero B500} \rightarrow f_{yd} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{mm^2} \quad (3.19)$$

$$d = 25 \text{ cm} \rightarrow 25 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \quad (3.20)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (3.21)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,21 \text{ m} = 33,94 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{33,94 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,21 \text{ m}}$$

$$U_s = 179,58 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (3.22)$$

$$179,58 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{KN}{m^2} \rightarrow A_s = \frac{179,58 \text{ KN}}{434783 \frac{KN}{m^2}}$$

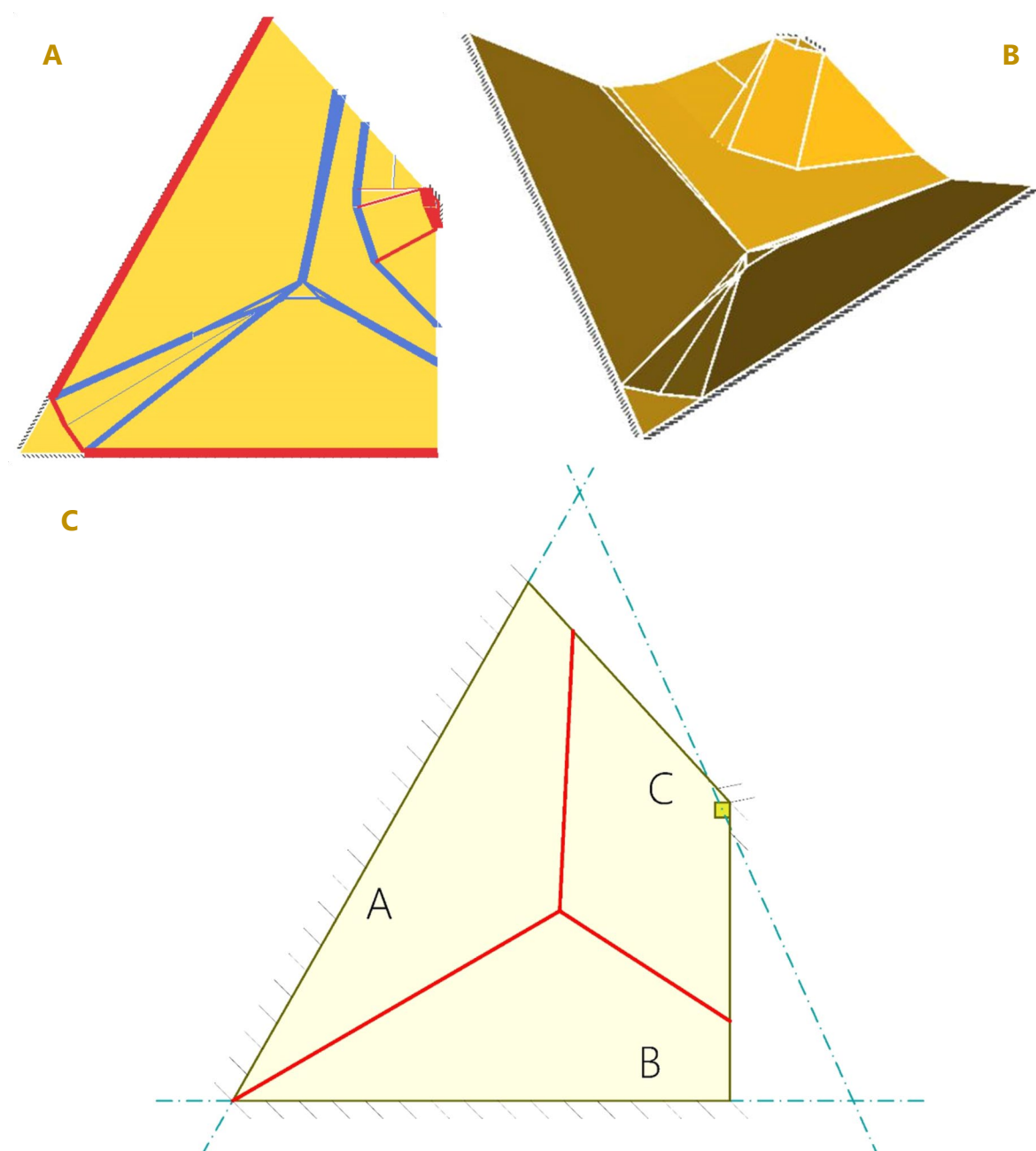
$$A_s = 0,000413 \text{ m}^2 = 4,13 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D12} = 1,13 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{4,13 \text{ cm}^2}{1,13 \text{ cm}^2} = 3,65 \quad (3.23)$$

**1 D12 cada 25 cm**

### 3.3 Losa apoyada sobre dos lados y un pilar

En este ejemplo, la losa está apoyada en dos de sus lados mientras que, en la zona contraria, está apoyada en un pilar, apoyo simple en ambos casos. 3 son los puntos de apoyo y 3 serán los ejes de giro que se generarán en la estructura. Por ello, se formarán 3 regiones de giro y 3 líneas de rotura que confluyen en un punto central que será el punto de mayor deformación de la losa. Debemos calcular los momentos en cada una de las líneas:



**Imagen n°27.** Patrón de rotura de losa apoyada sobre dos lados y un pilar. A- Planta de la solución en LIMITSTATE SLAB; B- Vista 3D de la solución en LIMITSTATE SLAB; C- Patrón de rotura calculado a mano

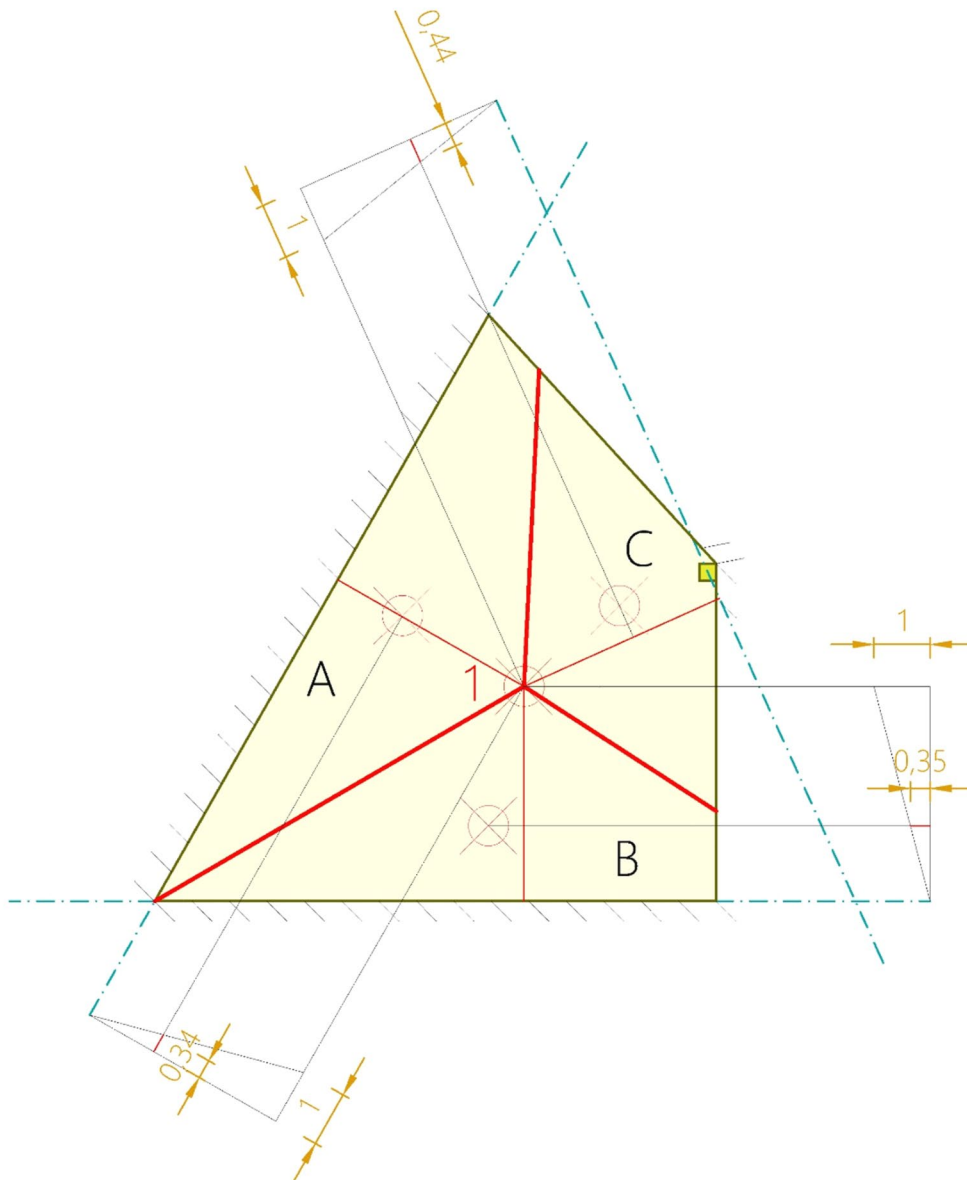


### 3. CASOS TÍPICOS

La solución en LIMITSTATE SLAB es:

$$\lambda = 0,02164 \quad M_p = \frac{1}{0,02164} = 46,21 \frac{KNm}{m} \quad (3.24)$$

Comprobamos el resultado mediante cálculo manual, en primer lugar, las áreas de cada región y el descenso de sus centros de gravedad (**CG**):



**Imagen n°28.** Áreas de cálculo de losa apoyada sobre dos lados y un pilar. Cotas: descenso de los CG de cada área

### 3. CASOS TÍPICOS

$$\mathbf{A} = 25,58 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG A} = 0,34 \text{ m}$$

$$\mathbf{B} = 21,84 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG B} = 0,35 \text{ m}$$

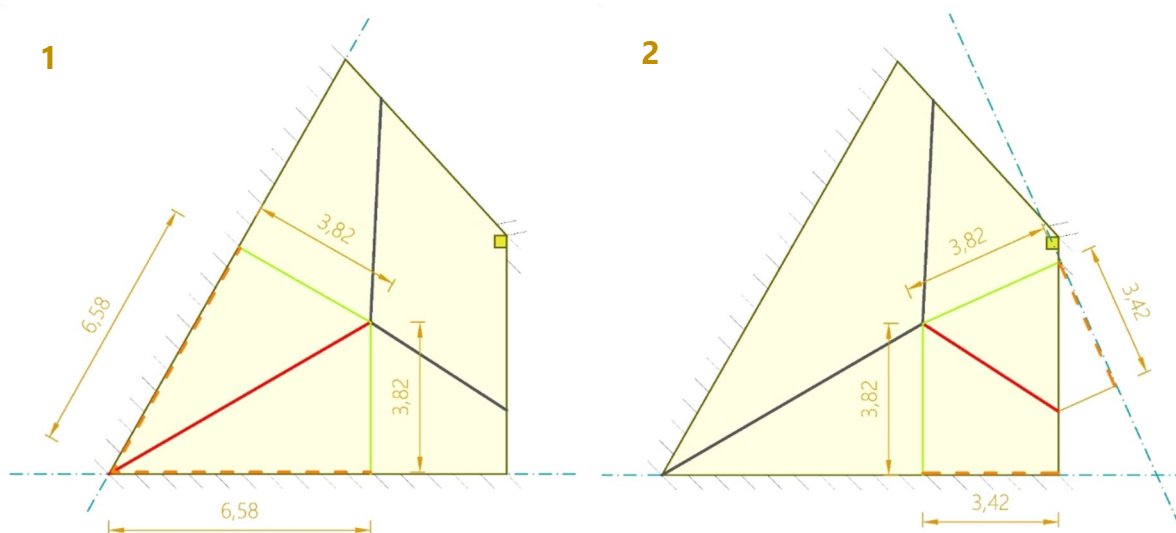
$$\mathbf{C} = 16,86 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG C} = 0,44 \text{ m}$$

Calculamos el valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación:

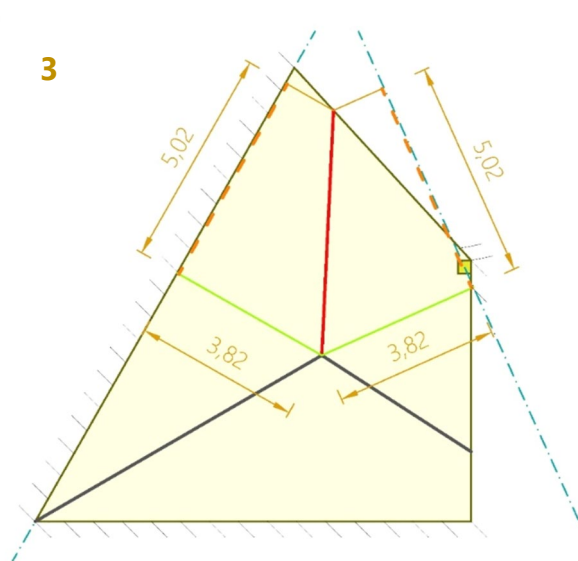
$$E = 14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot \left( (25,58 \text{m}^2 \cdot 0,34 \text{m}) + (21,84 \text{m}^2 \cdot 0,35 \text{m}) + (16,86 \text{m}^2 \cdot 0,44 \text{m}) \right) \quad (3.24)$$

$$E = 349,26 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

Para obtener el trabajo absorbido por las líneas de rotura generadas en la losa, se va a proceder a analizarlas por separado, proyectando cada línea en los dos ejes de giro horizontales del contorno. Utilizaremos el mismo procedimiento que en el caso anterior:



### 3. CASOS TÍPICOS



**Imagen n°29.** Dimensiones de la proyección de las líneas de rotura, en losa apoyada sobre dos lados y un pilar, sobre los ejes de giro. En color verde: distancia de giro desde el punto de mayor deformación

- Losa apoyada sobre dos lados y un pilar: trabajo sobre línea de rotura 1

$$W1 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 6,58 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,82 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.25)$$

$$W1 = 3,45 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losa apoyada sobre dos lados y un pilar: trabajo sobre línea de rotura 2

$$W2 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 3,42 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,82 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.26)$$

$$W2 = 1,79 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losa apoyada sobre dos lados y un pilar: trabajo sobre línea de rotura 3

$$W3 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 5,02 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{3,82 \text{ m}} \right) \cdot 2 \quad (3.27)$$

### 3. CASOS TÍPICOS

$$W3 = 2,63 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Conseguidos todos los valores, calculamos la energía generada total por la losa, que será la suma de todas las anteriores:

$$Wt = M \frac{KNm}{m} \cdot (3,45 + 1,79 + 2,63) \quad (3.28)$$

$$Wt = 7,87 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Igualamos estos valores para obtener el momento  $M$  que estamos buscando:

$$E = Wt \rightarrow 349,26 \frac{KNm}{m} = 7,87 \cdot M \frac{KNm}{m} \rightarrow M \frac{KNm}{m} = \frac{349,26}{7,87} \quad (3.29)$$

$$M = 44,38 \frac{KNm}{m}$$

Obtenido este valor del momento máximo que soportará la losa, proyectamos el armado de la misma:

$$\text{Acero B500} \rightarrow f_{yd} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{mm^2} \quad (3.30)$$

$$d = 25 \text{ cm} \rightarrow 25 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \quad (3.31)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (3.32)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,21 \text{ m} = 44,38 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{44,38 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,21 \text{ m}}$$

$$U_s = 234,82 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (3.33)$$

### 3. CASOS TÍPICOS

$$234,82 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_s = \frac{234,82 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

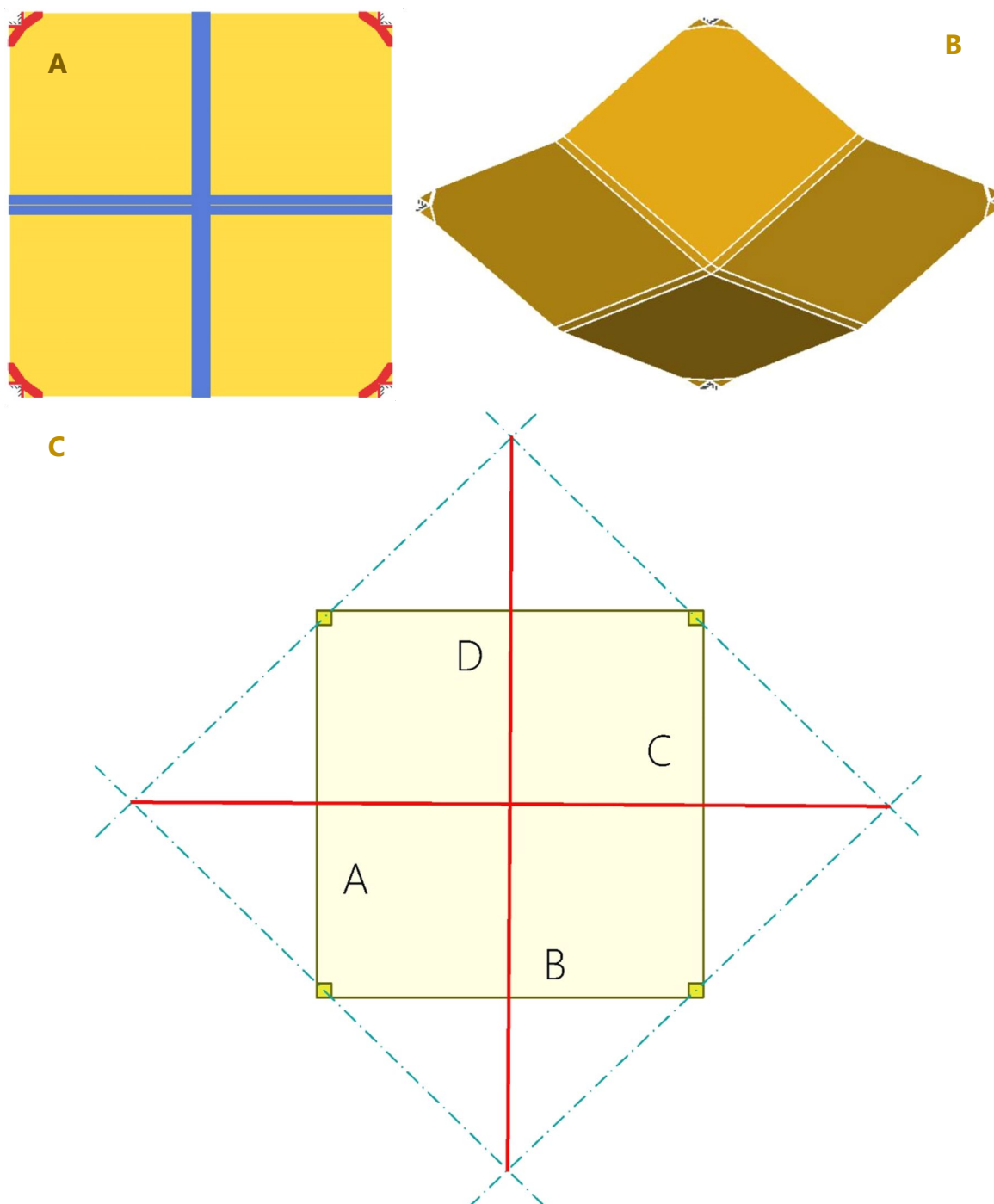
$$A_s = 0,00054 \text{ m}^2 = \mathbf{5,40 \text{ cm}^2}$$

$$1 \text{ D12} = 1,13 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{5,40 \text{ cm}^2}{1,13 \text{ cm}^2} = 4,77 \quad (3.34)$$

**1 D12 cada 20 cm**

### 3.4 Losa apoyada sobre 4 pilares

En el caso de una losa apoyada sobre 4 pilares, ninguna de las líneas que se generan pasa por los vértices de la misma. Lo contrario ocurre en el caso de los ejes de giro los cuales, deben de cruzar por el centro de los pilares. Para este caso utilizaremos una losa cuadrada, de 8 x 8 metros y apoyada en sus 4 esquinas:



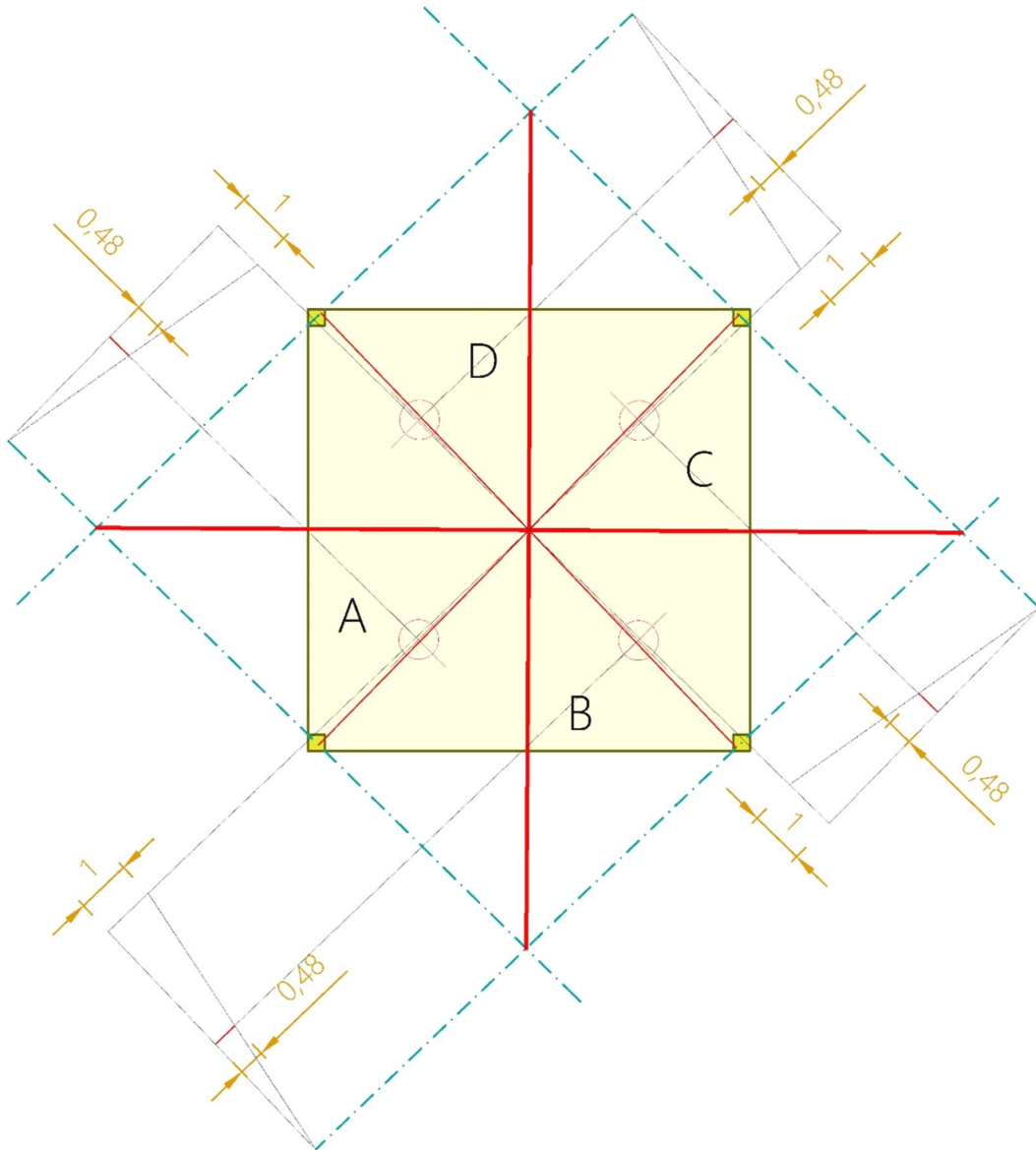
**Imagen n°30.** Patrón de rotura de losa apoyada sobre 4 pilares. A- Planta de la solución en LIMITSTATE SLAB; B- Vista 3D de la solución en LIMITSTATE SLAB; C- Patrón de rotura calculado a mano

### 3. CASOS TÍPICOS

La solución en LIMITSTATE SLAB es:

$$\lambda = 0,01024 \quad M_p = \frac{1}{0,01024} = 97,65 \frac{KNm}{m} \quad (3.35)$$

Comprobamos el resultado mediante cálculo manual, en primer lugar, las áreas de cada región y el descenso de sus centros de gravedad (**CG**):



*Imagen n°31. Áreas de cálculo de losa apoyada sobre 4 pilares. Cotas: descenso de los CG de cada área*

### 3. CASOS TÍPICOS

$$\mathbf{A} = 15,75 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG A} = 0,48 \text{ m}$$

$$\mathbf{B} = 15,99 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG B} = 0,48 \text{ m}$$

$$\mathbf{C} = 16,03 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG C} = 0,48 \text{ m}$$

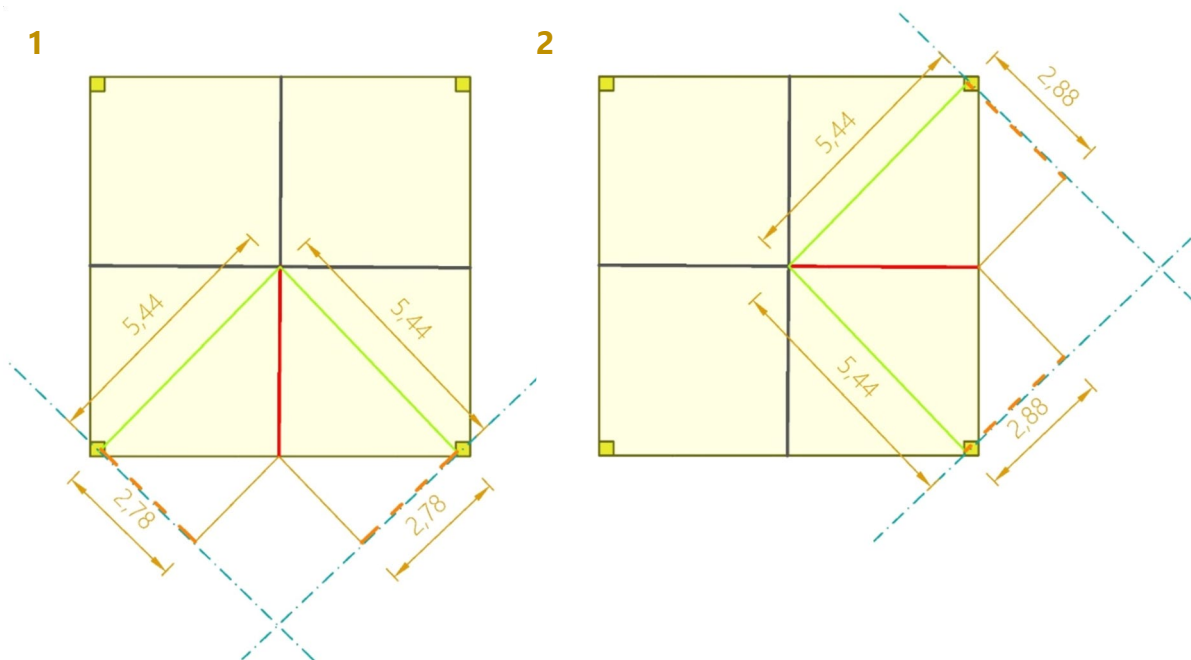
$$\mathbf{D} = 15,85 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG D} = 0,48 \text{ m}$$

Cálculo del valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación:

$$E = 14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot ((15,75\text{m}^2 \cdot 0,48\text{m}) + (15,99\text{m}^2 \cdot 0,35\text{m}) + (16,03\text{m}^2 \cdot 0,48\text{m}) + (15,85\text{m}^2 \cdot 0,48\text{m})) \quad (3.36)$$

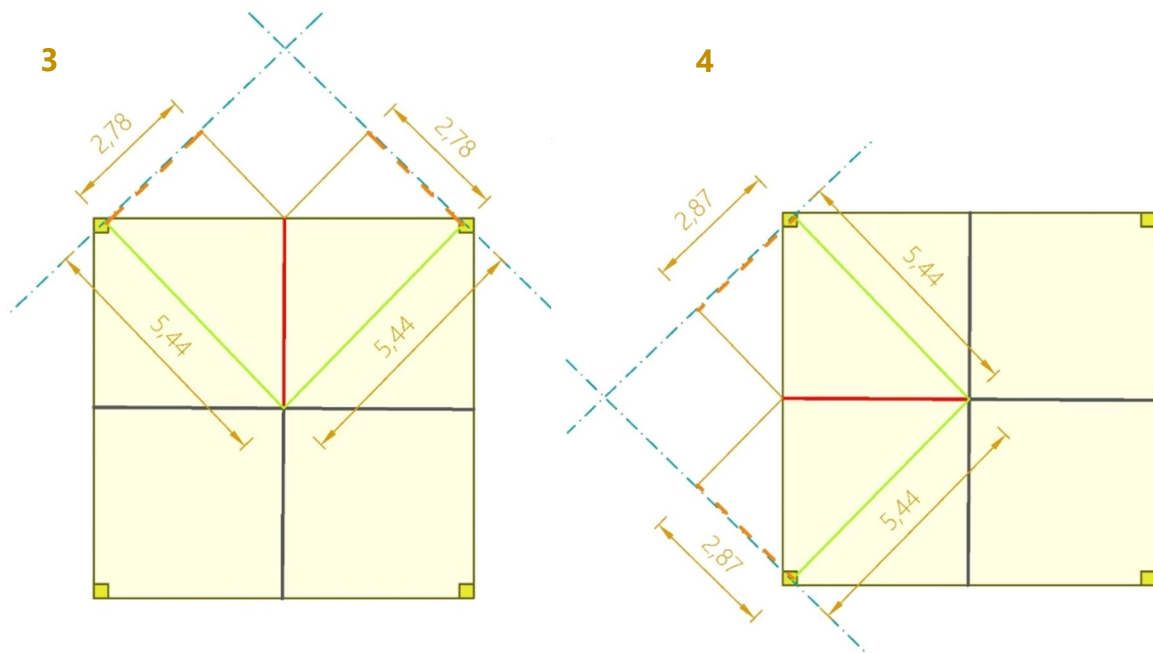
$$E = 448,93 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

Cálculo del trabajo absorbido por las líneas de rotura generadas en la losa, se va a proceder a analizarlas por separado, proyectando cada línea en los dos ejes de giro horizontales del contorno. Utilizaremos el mismo procedimiento que en los casos anteriores:





### 3. CASOS TÍPICOS



**Imagen n°32.** Dimensiones de la proyección de las líneas de rotura, en losa apoyada sobre 4 pilares, sobre los ejes de giro. En color verde: distancia de giro desde el punto de mayor deformación

- Losas apoyadas sobre 4 pilares: trabajo sobre línea de rotura 1

$$W1 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 2,94 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{5,44 \text{ m}} \right) + \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 2,94 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{5,43 \text{ m}} \right) \quad (3.37)$$

$$W1 = 1,08 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losas apoyadas sobre 4 pilares: trabajo sobre línea de rotura 2

$$W2 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 2,67 \text{ m} \cdot \frac{1,00 \text{ m}}{5,44 \text{ m}} \right) + \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 2,67 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5,43 \text{ m}} \right) \quad (3.38)$$

$$W2 = 0,98 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

- Losas apoyadas sobre 4 pilares: trabajo sobre línea de rotura 3

$$W3 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 2,69 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5,44 \text{ m}} \right) + \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 2,70 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5,43 \text{ m}} \right) \quad (3.39)$$

$$W3 = 0,99 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

### 3. CASOS TÍPICOS

- Losa apoyada sobre 4 pilares: trabajo sobre línea de rotura 4

$$W4 = \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 3,00 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5,44 \text{ m}} \right) + \left( M \frac{KNm}{m} \cdot 3,00 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5,43 \text{ m}} \right) \quad (3.40)$$

$$W4 = 1,10 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Calculamos la energía generada total por la losa, que será la suma de todas las anteriores:

$$Wt = M \frac{KNm}{m} \cdot (1,08 + 0,98 + 0,99 + 1,10) \quad (3.41)$$

$$Wt = 4,16 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

Igualamos estos valores para obtener el momento **M** que estamos buscando:

$$E = Wt \rightarrow 448,93 \frac{KNm}{m} = 4,16 \cdot M \frac{KNm}{m} \rightarrow M \frac{KNm}{m} = \frac{448,93}{4,16} \quad (3.42)$$

$$M = 107,89 \frac{KNm}{m}$$

Una de las reglas que existen en este tipo de cálculos, la llamada regla del 10%. Esto ocurre debido a la exactitud de los cálculos mediante medios tecnológicos, como ocurre en el caso del programa *LIMITSTATE SLAB*, y a la geometría utilizada en los cálculos manuales que, en muchas ocasiones, no será tan exacta como la obtenida en el programa. En este caso podemos aplicar esta regla para asegurarnos de que los cálculos son correctos. Mediante *LIMITSTATE SLAB* hemos obtenido un resultado de  $97,65 \frac{KNm}{m}$  y en el cálculo manual un resultado de  $107,89 \frac{KNm}{m}$ . Lo que equivale a una diferencia de un 10,5 % por encima, entre cada uno de ellos, estaría dentro del margen del 10%. Significa que nuestros cálculos son correctos. Utilizando el momento conseguido en el cálculo manual, obtendremos el armado de la estructura.

Obtenido el valor del momento máximo que soportará la losa, proyectamos el armado de la misma:

### 3. CASOS TÍPICOS

$$\text{Acero B500} \rightarrow f_{yd} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{mm^2} \quad (3.43)$$

$$d = 25 \text{ cm} \rightarrow 25 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \quad (3.44)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (3.45)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,21 \text{ m} = 107,89 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{107,89 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,21 \text{ m}}$$

$$U_s = 570,85 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (3.46)$$

$$570,85 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{KN}{m^2} \rightarrow A_s = \frac{570,85 \text{ KN}}{434783 \frac{KN}{m^2}}$$

$$A_s = 0,00131 \text{ m}^2 = 13,10 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D16} = 2,01 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{13,10 \text{ cm}^2}{2,01 \text{ cm}^2} = 6,52 \quad (3.47)$$

**1 D16 cada 14 cm**

## 4. EJEMPLO RESUELTO

Hemos resuelto casos sencillos de losa rectangular, losa apoyada en todos sus lados, losa apoyada en dos lados y un pilar y losa sobre 4 pilares. Hemos averiguado el momento máximo que soportan las diferentes losas con las cargas dadas y el armado necesario para cada una por metro lineal.

Una vez sabido esto, vamos a pasar al cálculo del armado de una losa de hormigón que se asemeje a la realidad de las estructuras en edificación, vamos a calcular el armado necesario para los dos ejes de coordenadas, tanto en X como en Y.

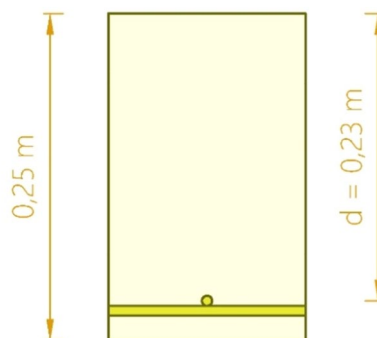
Nos encontramos una losa rectangular de 30,25 x 22,75 metros apoyada sobre malla cuadrada de pilares de 7,5 x 7,5 metros. Estos pilares tendrán distinta dimensión según se encuentren en el interior de la estructura o en los extremos [ 17 ]. Son conocidas las cargas que deberá soportar la losa, así como las características de la misma. Calcularemos la losa mediante dos patrones de rotura diferentes, uno para cada dirección. Una vez realizado este cálculo y proyectemos el armado, introducimos estos valores en el programa *LIMITSTATE SLAB* para comprobar el resultado y obtener el patrón de rotura ideal y la carga máxima para esta estructura:

Diseño del forjado de una losa de hormigón armado de grosor 250mm y 7,5 x 7,5 m entre ejes. Hormigón C37, recubrimiento de 20mm y una carga de:

$$N = 14,7 \frac{KN}{m^2}$$

$$\text{Carga permanente} \rightarrow G = 9,5 \frac{KN}{m^2}$$

$$\text{Sobrecarga} \rightarrow Q = 5,2 \frac{KN}{m^2}$$



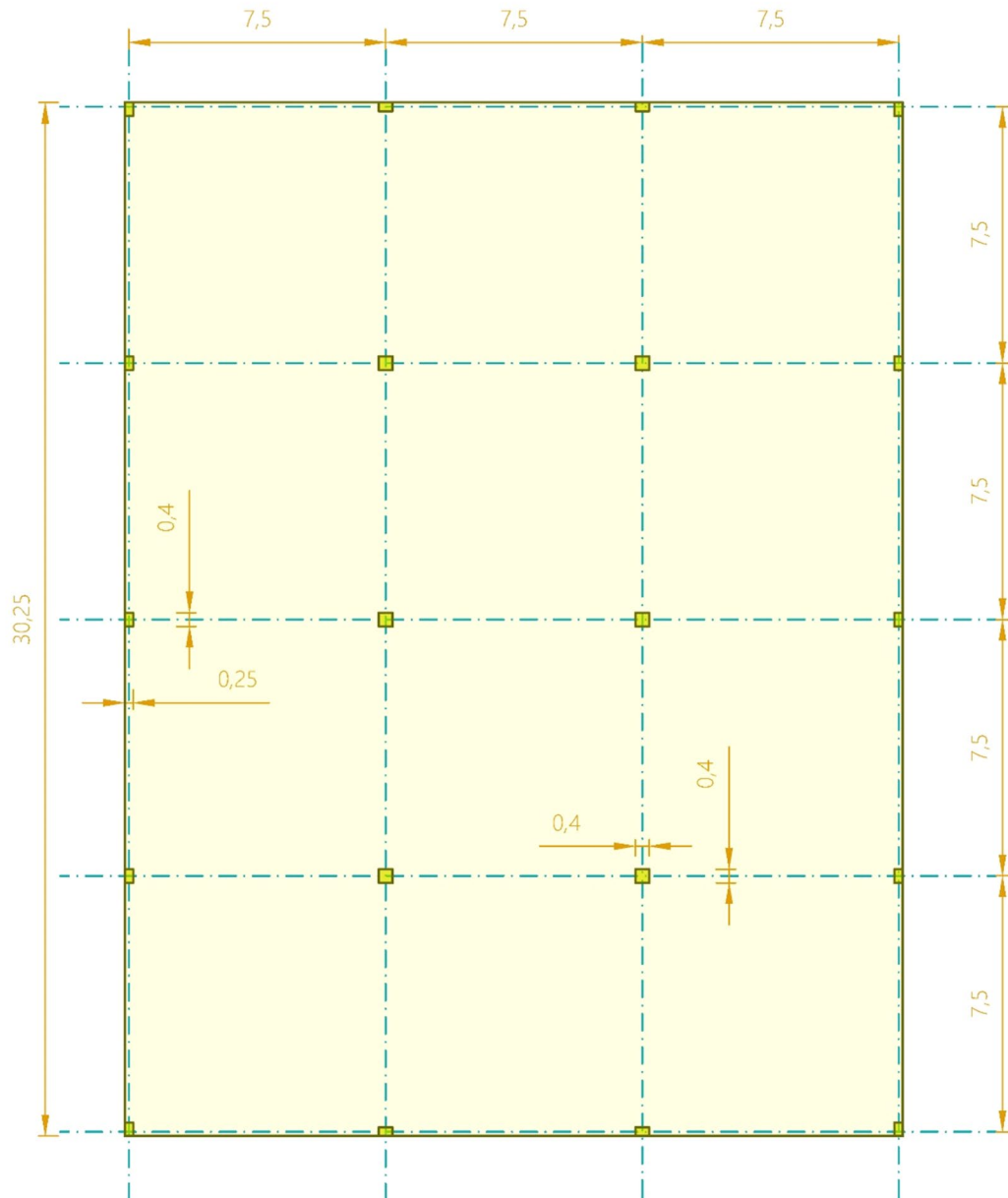
**Imagen nº33.** Sección de la losa de cálculo.  $d =$  canto útil

Tomaremos momentos iguales, tanto positivos como negativos  $M = M'$ .

Utilizaremos acero B500:

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$\text{Acero B500} \rightarrow f_{yd} = \frac{500 \frac{N}{\text{mm}^2}}{1,15} = 434,783 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.1)$$



*Imagen n°34. Losa rectangular sobre pilares*

#### **4.1 Patrón mediante líneas de rotura longitudinales**

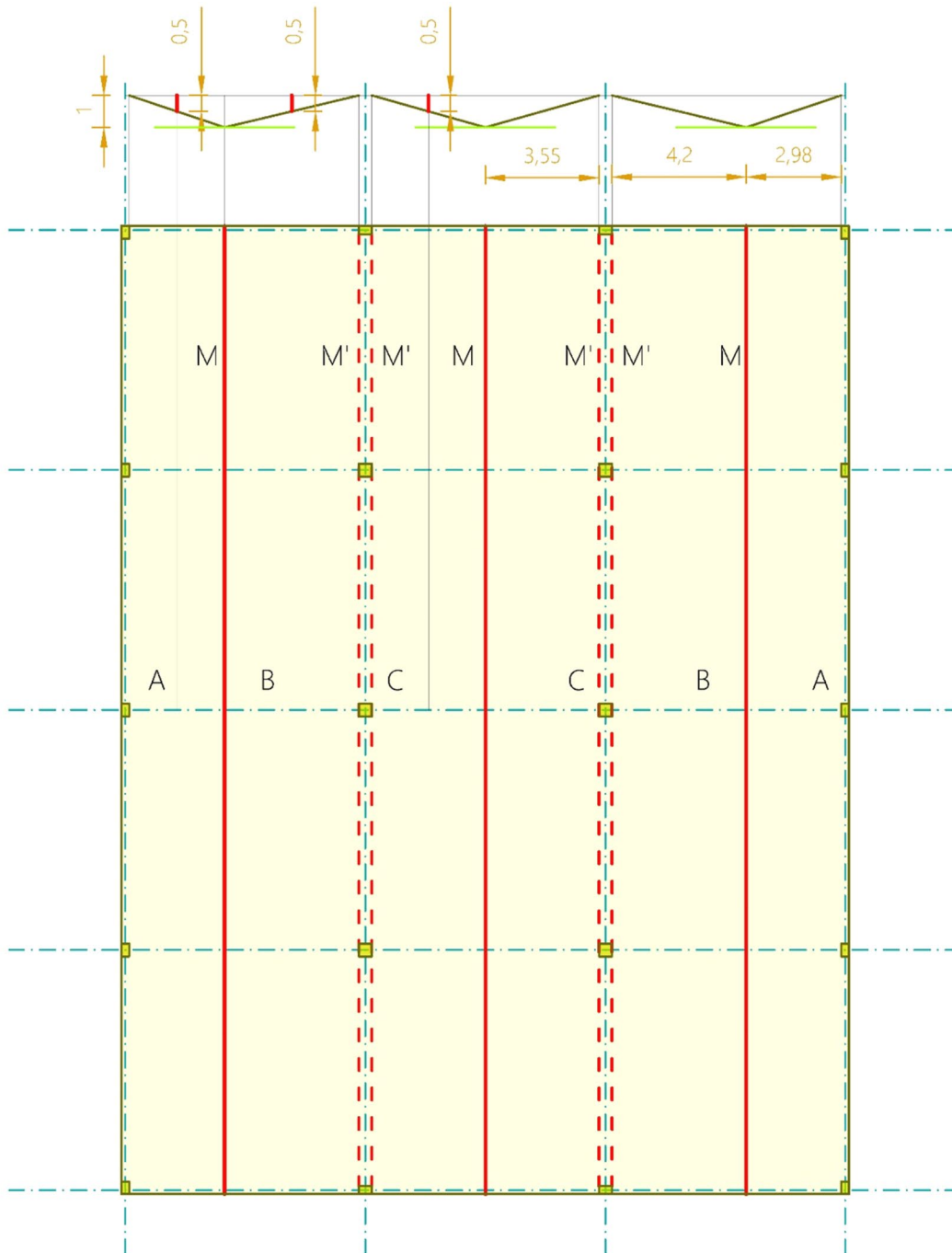
De este patrón vamos a proyectar el armado para la dirección X de la estructura. De la geometría se obtienen los siguientes resultados para las áreas de cálculo y para la deformación de los centros de gravedad ( **CG** ):

$$\mathbf{A} = 90,15 \text{ m}^2 \quad \mathbf{CG A} = 0,50 \text{ m}$$

4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$B = 126,90 \text{ m}^2 \quad \text{CG B} = 0,50 \text{ m}$$

$$C = 107,39 \text{ m}^2 \quad \text{CG C} = 0,50 \text{ m}$$



*Imagen n°35. Patrón de rotura longitudinal. Cálculo de la deformación del CG*

Cálculo del valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación, en este caso debemos calcularlo para los distintos vanos de la losa, tanto para vano exterior como interior. Los resultados serán distintos y el armado de

4. EJEMPLOS RESUELTOS

cada uno será diferente. Como es una losa simétrica los vanos exteriores serán iguales:

$$E (ext.) = 14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot ((90,15m^2 \cdot 0,5m \cdot 2) + (126,90m^2 \cdot 0,5m \cdot 2)) \quad (4.2)$$

$$E (ext.) = 3190,54 \frac{KNm}{m}$$

$$E (int.) = 14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot 107,39m^2 \cdot 0,5m \cdot 2 \quad (4.3)$$

$$E (int.) = 1578,57 \frac{KNm}{m}$$

Cálculo del trabajo absorbido por las líneas de rotura generadas en la losa, se va a proceder a analizarlas por separado, proyectando cada línea en los dos ejes de giro horizontales del contorno. Utilizaremos el mismo procedimiento que para los casos típicos. Ocurre lo mismo que para  $E$ , al ser simétrica la losa, el valor del trabajo absorbido será el mismo para la línea de rotura de los vanos exteriores:

1- Trabajo sobre línea de rotura en área A

$$W1 = M \frac{KNm}{m} \cdot 30,25m \cdot \left(\frac{1m}{2,98m}\right) \cdot 2 \quad (4.4)$$

$$W1 = 20,30 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

2- Trabajo sobre línea de rotura en área B

$$W2 = \begin{cases} M \frac{KNm}{m} \cdot 30,25m \cdot \left(\frac{1m}{4,20m}\right) \cdot 2 = 14,4 \cdot M \frac{KNm}{m} \\ M' \frac{KNm}{m} \cdot 30,25m \cdot \left(\frac{1m}{4,20m}\right) \cdot 2 = 14,4 \cdot M' \frac{KNm}{m} \end{cases} \quad (4.5)$$

3- Trabajo sobre línea de rotura en área C

4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$W3 = \begin{cases} M \frac{KNm}{m} \cdot 30,25m \cdot \left(\frac{1m}{3,55m}\right) \cdot 2 = 17,04 \cdot M \frac{KNm}{m} \\ M' \frac{KNm}{m} \cdot 30,25m \cdot \left(\frac{1m}{3,55m}\right) \cdot 2 = 17,04 \cdot M' \frac{KNm}{m} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$WT (int.) = 20,30 \cdot M \frac{KNm}{m} + 28,80 \cdot M \frac{KNm}{m} \quad (4.7)$$

$$WT (ext.) = 49,10 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

$$WT (int.) = 34,08 \cdot M \frac{KNm}{m} \quad (4.8)$$

Obtenido el valor del momento máximo que soportará la losa, proyectamos el armado de la misma. Como hemos comentado, el armado será diferente para los vanos interiores y exteriores:

- Armado inferior de los vanos exteriores

$$E (ext.) = WT (ext.) \rightarrow 1578,57 \frac{KNm}{m} = 49,10 \cdot M \frac{KNm}{m} \quad (4.9)$$

$$M = \frac{3190,54 \frac{KNm}{m}}{49,10 \frac{KNm}{m}} = 64,98 \frac{KNm}{m}$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (4.10)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,23 m = 64,98 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{64,98 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,23 m}$$

$$U_s = 313,91 KN$$



4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.11)$$

$$313,91 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_s = \frac{313,91 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

$$A_s = 0,000723 \text{ m}^2 = \mathbf{7,23 \text{ cm}^2}$$

$$1 \text{ D16} = 2,01 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{7,23 \text{ cm}^2}{2,01 \text{ cm}^2} = 3,60 \quad (4.12)$$

**1 D16 cada 25 cm**

- Armado inferior de los vanos interiores

$$E (\text{int.}) = WT (\text{int.}) \rightarrow 1578,57 \frac{\text{KNm}}{\text{m}} = 34,08 \cdot M \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \quad (4.13)$$

$$M = \frac{1578,57 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}}{34,08 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}} = \mathbf{46,32 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}}$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (4.14)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,23 \text{ m} = 46,32 \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \rightarrow U_s = \frac{46,32 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}}{0,9 \cdot 0,23 \text{ m}}$$

$$U_s = \mathbf{223,79 \text{ KN}}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.15)$$

4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$223,79 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_s = \frac{223,79 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

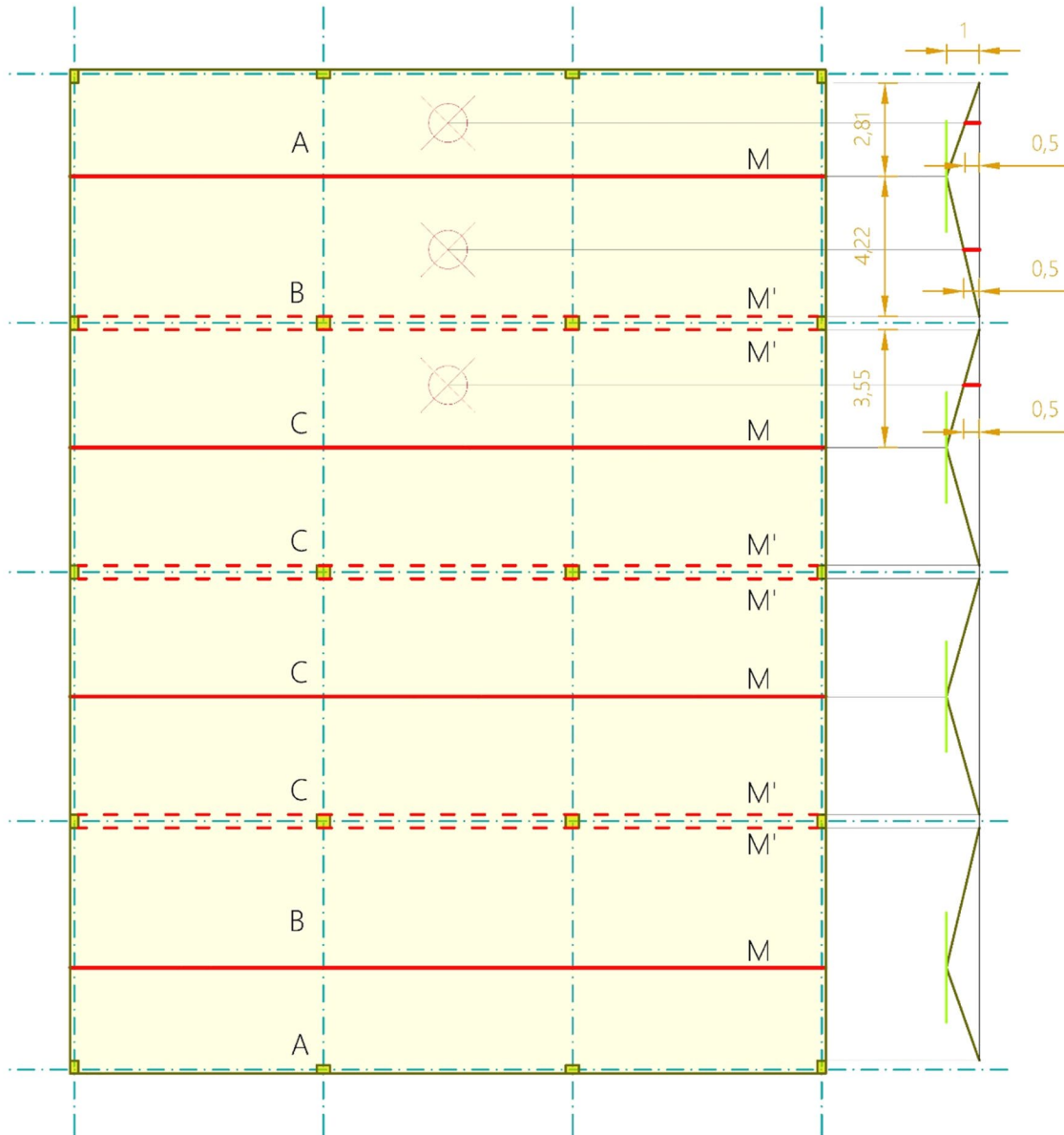
$$A_s = 0,000515 \text{ m}^2 = \mathbf{5,15 \text{ cm}^2}$$

$$1 \text{ D12} = 1,13 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{5,15 \text{ cm}^2}{1,13 \text{ cm}^2} = 4,55 \quad (4.16)$$

**1 D12 cada 20 cm**

### 4.2 Patrón mediante líneas de rotura transversales

En este caso vamos a proyectar el armado para la dirección Y de la estructura. De la geometría se obtienen los siguientes resultados para las áreas de cálculo y para la deformación de los centros de gravedad ( **CG** ):



*Imagen nº36. Patrón de rotura transversal. Cálculo de la deformación del CG*

$$A = 73,03 \text{ m}^2 \quad \text{CG A} = 0,50 \text{ m}$$

$$B = 100,44 \text{ m}^2 \quad \text{CG B} = 0,50 \text{ m}$$

$$C = 85,31 \text{ m}^2 \quad \text{CG C} = 0,50 \text{ m}$$

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

Calculamos el valor de la energía potencial que ha perdido la carga con la deformación, procederemos de la misma manera que para el caso anterior en los vanos exteriores e interiores y realizaremos un cálculo para cada región de las mismas características:

$$E (\text{ext.}) = 14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot ((73,03m^2 \cdot 0,5m \cdot 2) + (100,44m^2 \cdot 0,5m \cdot 2)) \quad (4.17)$$

$$E (\text{ext.}) = 2550,01 \frac{KNm}{m}$$

$$E (\text{int.}) = 14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot 81,31m^2 \cdot 0,5m \cdot 4 \quad (4.18)$$

$$E (\text{int.}) = 2508,12 \frac{KNm}{m}$$

Cálculo del trabajo absorbido por las líneas de rotura generadas en la losa, las analizaremos por separado. Vamos a utilizar el mismo procedimiento que para el caso de las líneas verticales. Ocurre lo mismo que para  $E$ , al ser simétrica la losa, el valor del trabajo absorbido será el mismo para la línea de rotura de los vanos de iguales características:

##### 1- Trabajo sobre línea de rotura en área A

$$W1 = M \frac{KNm}{m} \cdot 22,75m \cdot \left(\frac{1m}{2,81m}\right) \cdot 2 \quad (4.19)$$

$$W1 = 16,20 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

##### 2- Trabajo sobre línea de rotura en área B

$$W2 = \begin{cases} M \frac{KNm}{m} \cdot 22,75m \cdot \left(\frac{1m}{4,22m}\right) \cdot 2 = 10,78 \cdot M \frac{KNm}{m} \\ M' \frac{KNm}{m} \cdot 22,75m \cdot \left(\frac{1m}{4,22m}\right) \cdot 2 = 10,78 \cdot M' \frac{KNm}{m} \end{cases} \quad (4.20)$$

3- Trabajo sobre línea de rotura en área C

$$W3 = \begin{cases} M \frac{KNm}{m} \cdot 22,75m \cdot \left(\frac{1m}{3,55m}\right) \cdot 4 = 25,63 \cdot M \frac{KNm}{m} \\ M' \frac{KNm}{m} \cdot 22,75m \cdot \left(\frac{1m}{3,55m}\right) \cdot 4 = 25,63 \cdot M' \frac{KNm}{m} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$WT (ext.) = 16,20 \cdot M \frac{KNm}{m} + 21,56 \cdot M \frac{KNm}{m} \quad (4.22)$$

$$WT (ext.) = 37,76 \cdot M \frac{KNm}{m}$$

$$WT (int.) = 51,26 \cdot M \frac{KNm}{m} \quad (4.23)$$

Obtenido el valor del momento máximo que soportará la losa, proyectamos el armado de la misma. Como hemos comentado, el armado será diferente para los vanos interiores y exteriores:

- Armado inferior de los vanos exteriores

$$E (ext.) = WT (ext.) \rightarrow 2550,01 \frac{KNm}{m} = 37,76 \cdot M \frac{KNm}{m} \quad (4.24)$$

$$M = \frac{2550,01 \frac{KNm}{m}}{37,76 \frac{KNm}{m}} = 67,53 \frac{KNm}{m}$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (4.25)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,23 m = 67,53 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_s = \frac{67,53 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,23 m}$$

$$U_s = 326,23 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.26)$$

$$326,23 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_s = \frac{326,23 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

$$A_s = 0,00075 \text{ m}^2 = 7,50 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D16} = 2,01 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{7,50 \text{ cm}^2}{2,01 \text{ cm}^2} = 3,73 \quad (4.27)$$

**1 D16 cada 25 cm**

- Armado inferior de los vanos interiores

$$E (\text{int.}) = WT (\text{int.}) \rightarrow 2508,12 \frac{\text{KNm}}{\text{m}} = 51,26 \cdot M \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \quad (4.28)$$

$$M = \frac{2508,12 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}}{51,26 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}} = 48,93 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot d = M \quad (4.29)$$

$$0,9 \cdot U_s \cdot 0,23 \text{ m} = 48,93 \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \rightarrow U_s = \frac{48,93 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}}{0,9 \cdot 0,23 \text{ m}}$$

$$U_s = 236,37 \text{ KN}$$

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.30)$$

$$236,37 \text{ KN} = A_s \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_s = \frac{236,37 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

$$A_s = 0,000544 \text{ m}^2 = 5,44 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D12} = 1,13 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{5,44 \text{ cm}^2}{1,13 \text{ cm}^2} = 4,81 \quad (4.31)$$

**1 D12 cada 20 cm**

### 4.3 Propuesta de armado para losa rectangular sobre pilares

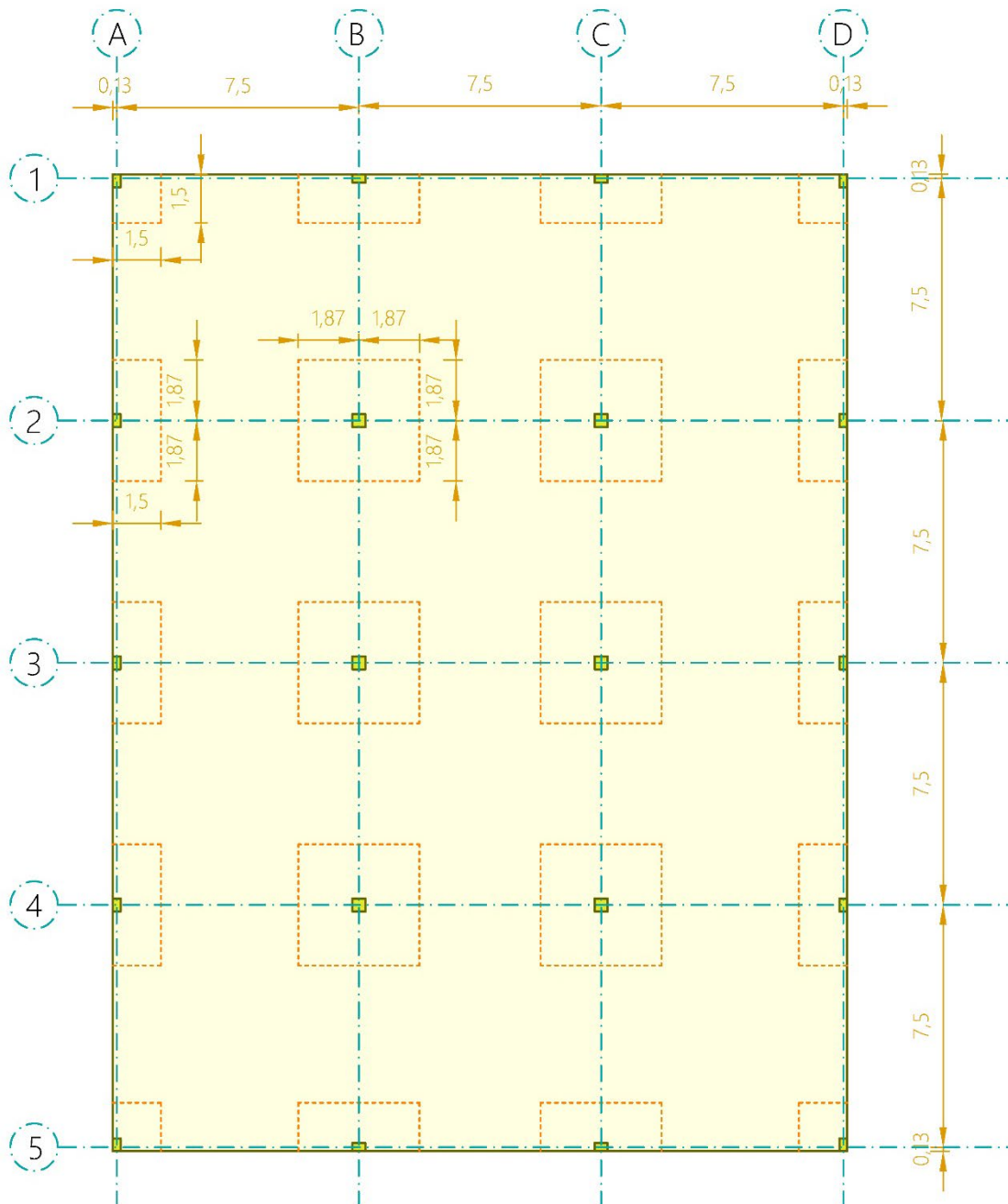
Para el cálculo del armado inferior, hemos tomado toda la longitud de la losa, porque es en esa longitud donde vamos a colocar el armado. En el caso de los ábacos no ocurre lo mismo, ya que solo ocupan un área alrededor del soporte, dicho área será el que soporte los momentos negativos de la estructura. Debemos calcularlos en la longitud real que ocupen todos ellos, el resto será ocupado por el armado de base. Conocemos el momento total que debe soportar el armado superior, el momento negativo de la losa, una parte de este momento lo soporta el armado de base y el resto el armado de los ábacos.

Para el cálculo de los ábacos se han tomado las dimensiones siguientes:

- Ábacos interiores =  $0,5 \cdot L$
- Ábacos laterales =  $0,2 \cdot L$  para el lado menor y  $0,5 \cdot L$  para el lado mayor
- Ábacos en esquina =  $0,2 \cdot L$

Siendo **L** = longitud de los ejes entre pilares

4. EJEMPLOS RESUELTOS



*Imagen n°37. Dimensiones de los ábacos de losa rectangular sobre pilares.*

Tomaremos de armado base armaduras de  $D6$  cada  $20\text{ cm}$ :

$$1\ D6 \rightarrow 0,28\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área } A_{sb} \text{ cada metro (5 barras)} = 5 \cdot 0,28\ \text{cm}^2 = 1,4\ \text{cm}^2$$

$$U_{sb} = A_{sb} \cdot f_{yd} \tag{4.32}$$



4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$U_{sb} = 0,0014 \text{ m}^2 \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

$$U_{sb} = 60,87 \text{ kN}$$

$$M'_b = U_{sb} \cdot 0,9 \cdot 0,23 \text{ m} \quad (4.33)$$

$$M'_b = 60,87 \text{ kN} \cdot 0,9 \cdot 0,23 \text{ m}$$

$$M'_b = 12,6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

- Armado superior en X de los ábacos alrededor de los soportes

Conocemos el momento que soportará el armado de base, vamos a calcular el de los ábacos para poder proyectar el armado. Para ello necesitamos estos datos, longitudes en la dirección X:

- Longitud de la línea de rotura = 30,25 m
- Longitud de todos los ábacos = 14,25 m
- Longitud para el armado base = 16,00 m

$$M_{LR} \text{ en la línea de rotura} = 30,25\text{m} \cdot M \text{ (ext.)} \quad (4.34)$$

$$M_{LR} = 30,25\text{m} \cdot 64,98 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}$$

$$M_{LR} = 1965,65 \text{ kNm}$$

$$M_{Ab} \text{ para el armado de base en su longitud} = 12,6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \cdot 16,00 \text{ m} \quad (4.35)$$

$$M_{AB} = 201,60 \text{ kNm}$$

$$M_{ABA} \text{ para el armado de los ábacos en su longitud} = M_{LR} - M_{Ab} \quad (4.36)$$

$$M_{ABA} = 1965,65 \text{ kNm} - 201,60 \text{ kNm}$$

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$M_{ABA} = 1764,05 \text{ kNm}$$

Este es el momento que soportan los ábacos en toda su longitud, ahora calcularemos el armado en cada metro de la estructura:

$$M'_{ABA} = \frac{1764,05 \text{ kNm}}{14,25 \text{ m}} \quad (4.37)$$

$$M'_{ABA} = 123,79 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

$$0,9 \cdot U_{sABA} \cdot d = M'_{ABA} \quad (4.38)$$

$$0,9 \cdot U_{sABA} \cdot 0,23 \text{ m} = 123,79 \frac{\text{KNm}}{\text{m}} \rightarrow U_{sABA} = \frac{123,79 \frac{\text{KNm}}{\text{m}}}{0,9 \cdot 0,23 \text{ m}}$$

$$U_{sABA} = 598,03 \text{ KN}$$

$$U_{sABA} = A_{sABA} \cdot f_{yd} \quad (4.39)$$

$$598,03 \text{ KN} = A_{sABA} \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_{sABA} = \frac{598,03 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

$$A_s = 0,001375 \text{ m}^2 = 13,75 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D20} = 3,14 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{13,75 \text{ cm}^2}{3,14 \text{ cm}^2} = 4,38 \quad (4.40)$$

**1 D20 cada 20 cm**

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

##### - Armado superior en Y de los ábacos alrededor de los soportes

Estas serán las longitudes para los cálculos en la dirección Y:

- Longitud de la línea de rotura = 22,75 m
- Longitud de todos los ábacos = 10,50 m
- Longitud para el armado base = 12,25 m

$$M_{LR} \text{ en la línea de rotura} = 22,75m \cdot M \text{ (ext.)} \quad (4.41)$$

$$M_{LR} = 30,25m \cdot 67,53 \frac{KNm}{m}$$

$$\mathbf{M_{LR} = 1536,31 kNm}$$

$$M_{Ab} \text{ para el armado de base en su longitud} = 12,6 \frac{kNm}{m} \cdot 10,50 m \quad (4.42)$$

$$\mathbf{M_{AB} = 154,35 kNm}$$

$$M_{ABA} \text{ para el armado de los ábacos en su longitud} = M_{LR} - M_{Ab} \quad (4.43)$$

$$M_{ABA} = 1536,31 kNm - 154,35 kNm$$

$$\mathbf{M_{ABA} = 1381,96 kNm}$$

Este es el momento que soportan los ábacos en toda su longitud, ahora calcularemos el armado en cada metro de la estructura:

$$M'_{ABA} = \frac{1381,96 kNm}{12,25 m} \quad (4.44)$$

$$M'_{ABA} = 131,62 \frac{kNm}{m}$$

$$0,9 \cdot U_{SABA} \cdot d = M'_{ABA} \quad (4.45)$$

$$0,9 \cdot U_{SABA} \cdot 0,23 m = 131,62 \frac{KNm}{m} \rightarrow U_{SABA} = \frac{131,62 \frac{KNm}{m}}{0,9 \cdot 0,23 m}$$

4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$U_{sABA} = 635,82 \text{ KN}$$

$$U_{sABA} = A_{sABA} \cdot f_{yd} \quad (4.46)$$

$$598,03 \text{ KN} = A_{sABA} \cdot 434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \rightarrow A_{sABA} = \frac{598,03 \text{ KN}}{434783 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}}$$

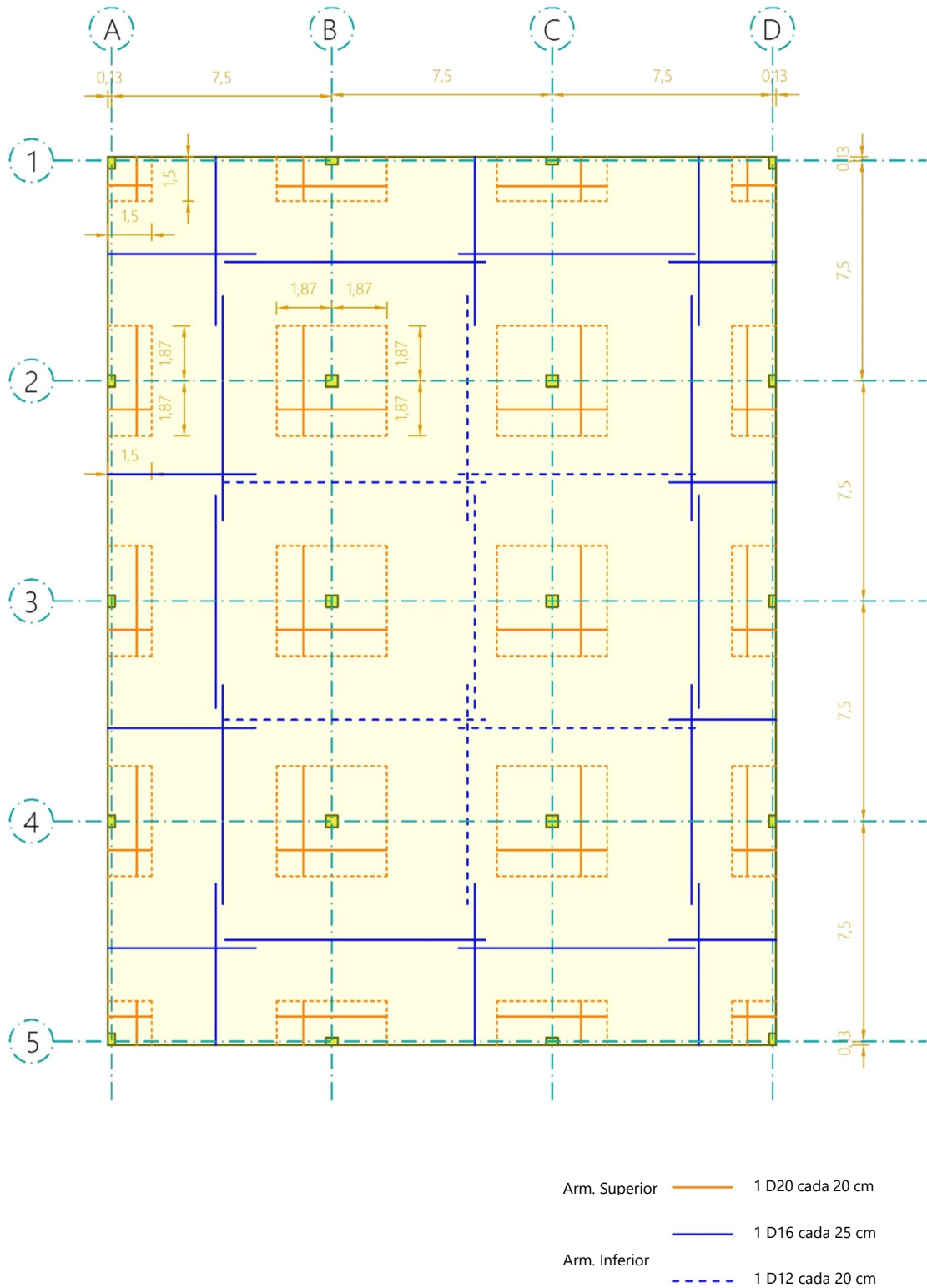
$$A_s = 0,001462 \text{ m}^2 = 14,63 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ D20} = 3,14 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{14,63 \text{ cm}^2}{3,14 \text{ cm}^2} = 4,66 \quad (4.47)$$

**1 D20 cada 20 cm**

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

Este es el armado completo proyectado para la estructura, en las dos direcciones y tanto el armado superior como el inferior:



**Imagen n°38.** Disposición de la armadura en la dirección X de losa rectangular sobre pilares

#### 4.4 Comprobación de la losa mediante patrones de rotura en cono y en artesa

Diseñado el armado para cada dirección de la losa, vamos a comprobar si otros patrones de rotura, como son en cono y en artesa, que hemos comentado en el punto 2.5.2. de este trabajo, pueden llegar a ser mas desfavorables que los calculados anteriormente. Para su comprobación utilizaremos la capacidad resistente del armado proyectado que será ligeramente superior a los de cálculo.

##### - Patrón de rotura en cono

##### - Cono en soportes interiores

Primero debemos calcular el radio de los conos que se van a generar en cada soporte. Cada radio será de distinta dimensión según la carga y dimensión de cada soporte, según la expresión propuesta en [ 6 ]:

$$r = c \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{q \cdot A}} \quad (4.48)$$

Donde:

$S =$  Carga sobre cada columna

$$\rightarrow S (int.) = 835,11 \text{ KN}$$

$$q = \text{Carga del forjado} = 14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

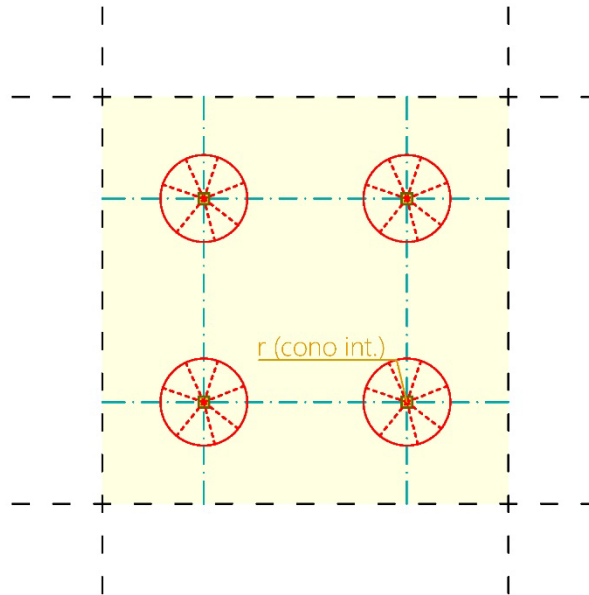
$$A = \text{área de la sección de la columna} = 0,16 \text{ m}^2$$

$$c = \text{radio del círculo equivalente de la columna} = 0,23 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}} \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ los lados de los pilares}$$

$$r (\text{cono int.}) = 0,23 \cdot \sqrt[3]{\frac{835,11 \text{ KN}}{14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot 0,16 \text{ m}^2}} = 1,60 \text{ m} \quad (4.49)$$

4. EJEMPLOS RESUELTOS



**Imagen n°39.** Patrón de rotura en cono sobre los soportes interiores

Conocido el radio, pasaremos a calcular los momentos que genera este patrón de rotura en los soportes, mediante las ecuaciones que encontramos en el libro "Practical yield line design" [ 6 ]. La necesaria para los soportes interiores es:

$$M + M' = \frac{S}{2 \cdot \pi} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{q \cdot A}{S}} \right) \quad (4.50)$$

Siendo los datos los mismos que aparecen en la ecuación anterior

$$M + M'(\text{conos int.}) = \frac{835,11 \text{ kN}}{2 \cdot \pi} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{14,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,16 \text{ m}^2}{835,11 \text{ kN}}} \right)$$

La suma de momentos de este patrón de rotura es:

$$M + M'(\text{conos int.}) = 114,14 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

La suma de momentos dispuesta en los cálculos en patrones de rotura transversales y longitudinales es:

4. EJEMPLOS RESUELTOS

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}'(\text{vanos int.}) = 50,85 \frac{kNm}{m} + 141,39 \frac{kNm}{m} = 192,24 \frac{kNm}{m}$$

De estos cálculos podemos deducir que el patrón de rotura mediante conos en el interior de la losa no será el más desfavorable.

- Cono en soportes laterales

$$\mathbf{r} = c \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{q \cdot A}} \quad (4.51)$$

Donde:

$S =$  Carga sobre cada columna

$$\rightarrow S (\text{int.}) = 425,27 \text{ KN}$$

$$\mathbf{q} = \text{Carga del forjado} = 14,7 \frac{KN}{m^2}$$

$$\mathbf{A} = \text{área de la sección de la columna} = 0,10 \text{ m}^2$$

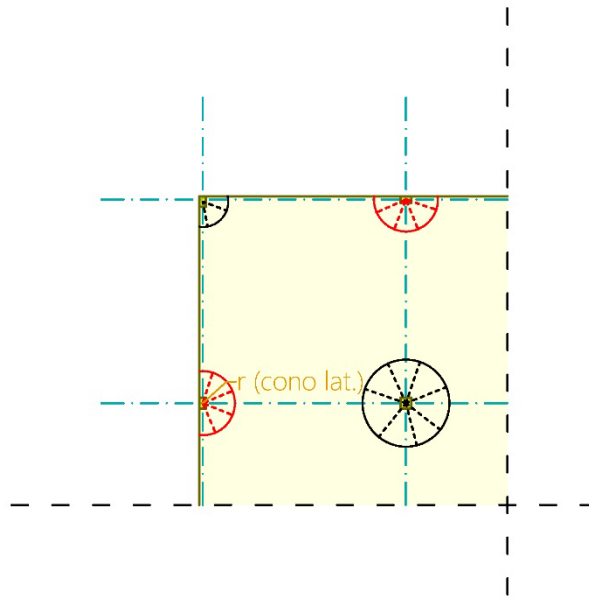
$$\mathbf{c} = \text{radio del círculo equivalente de la columna} = 0,18 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}} \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ los lados de los pilares}$$

$$\mathbf{r} (\text{cono lat.}) = 0,18 \cdot \sqrt[3]{\frac{425,27 \text{ KN}}{14,7 \frac{KN}{m^2} \cdot 0,10 \text{ m}^2}} = 1,18 \text{ m} \quad (4.52)$$



4. EJEMPLOS RESUELTOS



**Imagen n°40.** Patrón de rotura en cono en los soportes laterales

En este caso la ecuación a utilizar es:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}' = \frac{S}{5,14} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{q \cdot A}{S}} \right) \quad (4.53)$$

Siendo los datos los mismos que aparecen en la ecuación anterior

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}'(\text{conos lat.}) = \frac{425,27 \text{ kN}}{5,14} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{14,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,10 \text{ m}^2}{425,27 \text{ kN}}} \right)$$

La suma de momentos de este patrón de rotura es:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}'(\text{conos lat.}) = 140,45 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

La suma de momentos dispuesta en los cálculos en patrones de rotura transversales y longitudinales es:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}'(\text{vanos ext.}) = 72,36 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} + 141,39 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} = 213,75 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

De estos cálculos podemos deducir que el patrón de rotura mediante conos en soportes laterales de la losa no será el más desfavorable.

- Cono en soportes de esquina

$$r = c \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{q \cdot A}} \quad (4.54)$$

Donde:

$S$  = Carga sobre cada columna

$$\rightarrow S \text{ (int.)} = 216,53 \text{ KN}$$

$$q = \text{Carga del forjado} = 14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

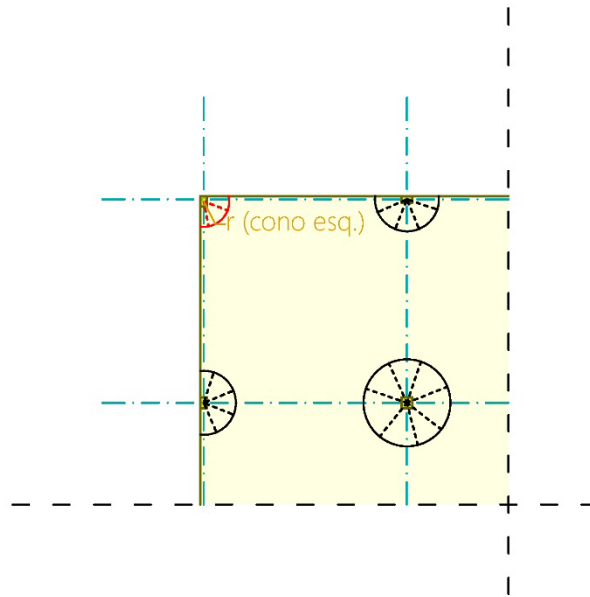
$$A = \text{área de la sección de la columna} = 0,10 \text{ m}^2$$

$$c = \text{radio del círculo equivalente de la columna} = 0,18 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}} \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ los lados de los pilares}$$

$$r \text{ (cono esq.)} = 0,18 \cdot \sqrt[3]{\frac{216,53 \text{ KN}}{14,7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot 0,10 \text{ m}^2}} = 0,94 \text{ m} \quad (4.55)$$

4. EJEMPLOS RESUELTOS



*Imagen n°41. Patrón de rotura en los soportes en esquina*

Para los soportes de esquina la ecuación es::

$$M + M' = \frac{S}{2} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{q \cdot A}{S}} \right) \quad (4.56)$$

*Siendo los datos los mismos que aparecen en la ecuación anterior*

$$M + M'(\text{conos esq.}) = \frac{216,53 \text{ kN}}{2} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{14,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,10 \text{ m}^2}{216,53 \text{ kN}}} \right)$$

La suma de momentos de este patrón de rotura es:

$$M + M'(\text{conos esq.}) = 175,53 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

La suma de momentos dispuesta en los cálculos en patrones de rotura transversales y longitudinales es:

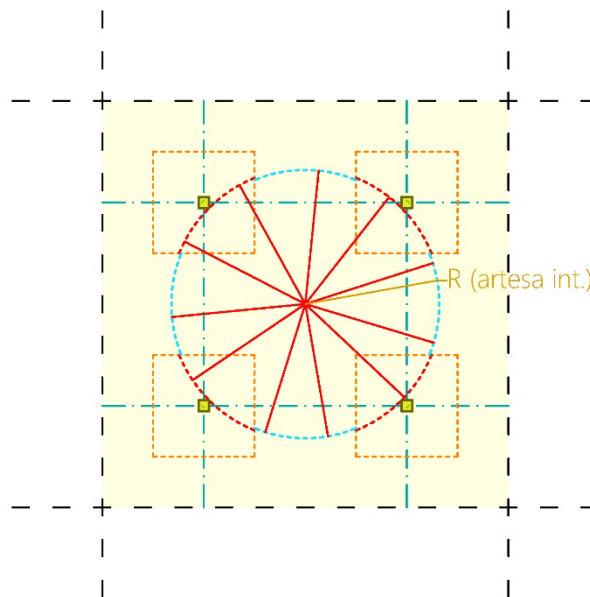
$$M + M'(vanos\ ext.) = 72,36 \frac{kNm}{m} + 141,39 \frac{kNm}{m} = 213,75 \frac{kNm}{m}$$

De estos cálculos podemos deducir que el patrón de rotura mediante conos en soportes en esquina de la losa no será el más desfavorable.

**- Patrón de rotura en artesa**

El patrón de rotura en artesa también la podemos encontrar en el punto **2.5.2.** y es un patrón que también se puede formar en esta losa, en este caso se forma un cono en el interior de los vanos y entre los pilares. Donde el punto de mayor deformación se forma en el centro de dicho cono. En el caso de esta losa, debemos calcular un cono formado entre los pilares interiores y que abarque un diámetro dentro de los ábacos y otro que se forma en las esquinas:

**- Artesa en vanos interiores a ras de soportes**



**Imagen nº42.** Patrón de rotura en artesa en los vanos interiores

Para estos cálculos utilizaremos las ecuaciones que podemos encontrar en el documento de aplicación a la vivienda de la EHE-08 [ 15 ]. En el caso de la artesa en interiores la ecuación es:

$$m_{inf} + m_0 + m_A \geq \frac{q \cdot R^2}{6} \quad (4.57)$$

Donde:

$m_{inf}$  momento de la armadura inferior en cada dirección, interesada por la base del cono =  $50,85 \frac{kNm}{m}$

$m_0$  momento negativo de la armadura de base =  $12,6 \frac{kNm}{m}$

$m_A$  momento de la línea perimetral de cálculo =  $141,39 \frac{kNm}{m}$

$q$  carga superficial sobre la losa  $14,7 \frac{kN}{m^2}$

$R$  radio del círculo mayor que se puede trazar sin interceder en la parte resistente de la armadura de refuerzo inferior =  $5,02 m$

$$m_{inf} + m_0 + m_A = \frac{14,7 \frac{kN}{m^2} \cdot 5,02 m^2}{6}$$

$$m_{inf} + m_0 + m_A = 61,74 \frac{kNm}{m}$$

Este será el momento que deben superar los calculados en los patrones de rotura transversal y longitudinal. Para calcularlos en este caso, al igual que para los ábacos en el armado, debemos de obtener las longitudes del círculo que ocupa zonas de ábacos y zonas de armado de base. Estas longitudes son:

Longitud del cono en los ábacos:  $15,6 m$

Longitud del cono en armado de base:  $15,6 m$

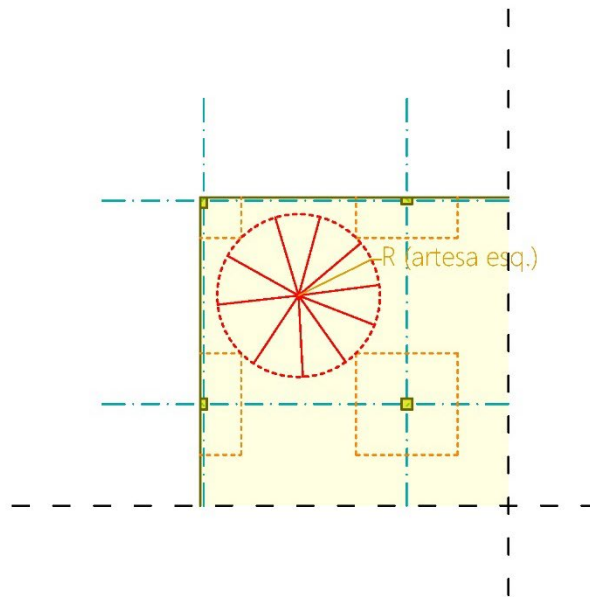
Como son las mismas longitudes, el cálculo será igual al promedio entre los momentos negativos sumado al momento positivo en esa zona de la losa:

$$50,85 \frac{kNm}{m} + \left( 141,39 \frac{kNm}{m} + 12,6 \frac{kNm}{m} \right) \cdot 0,5 = 127,8 \frac{kNm}{m}$$

De estos cálculos podemos deducir que el patrón de rotura mediante artesa en vanos interiores de la losa no será el más desfavorable.

4. EJEMPLOS RESUELTOS

- Artesa en las esquinas de la losa



**Imagen n°43.** Patrón de rotura en artesa en las esquinas de la losa

Para este caso la ecuación será la misma que en el caso anterior, en este caso el cono de cálculo está fuera de los ábacos:

$$m_{inf} + m_0 \geq \frac{q \cdot R^2}{6} \quad (4.58)$$

Donde:

$m_{inf}$  momento de la armadura inferior en cada dirección, interesada por la base del cono =  $72,36 \frac{kNm}{m}$

$m_0$  momento negativo de la armadura de base =  $12,6 \frac{kNm}{m}$

$q$  carga superficial sobre la losa  $14,7 \frac{kN}{m^2}$

$R$  radio del círculo mayor que se puede trazar sin interceder en la parte resistente de la armadura de refuerzo inferior =  $3,15 m$

$$m_{inf} + m_0 = \frac{14,7 \frac{kN}{m^2} \cdot 3,15 m^2}{6}$$

$$m_{inf} + m_0 = 24,31 \frac{kNm}{m}$$

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

Este es el momento que deben superar los calculados en los patrones de rotura transversal y longitudinal:

$$72,36 \frac{kNm}{m} + 12,6 \frac{kNm}{m} = 84,96 \frac{kNm}{m}$$

De estos cálculos podemos deducir que el patrón de rotura mediante artesa en esquina de la losa no será el más desfavorable.

Calculados los dos casos, hemos podido comprobar que ninguno de estos dos patrones de rotura es más desfavorable que los patrones de líneas de rotura longitudinal y transversal. Con ello, mantendremos el armado calculado para la losa. Este armado será el que introduzcamos en el programa *LIMITSTATE SLAB* para comprobar dicho armado y para encontrar la carga máxima y el patrón de rotura más desfavorable según el armado que hemos proyectado:

#### **4.5 Comprobación del armado proyectado en LIMITSTATE SLAB**

Conocidos todos los momentos que deberá soportar la estructura en cada región de la losa podemos comprobar este resultado en el programa. Introducimos todos los datos obtenidos y nos debe resultar el patrón de rotura más desfavorable y la carga máxima que puede soportar la losa.

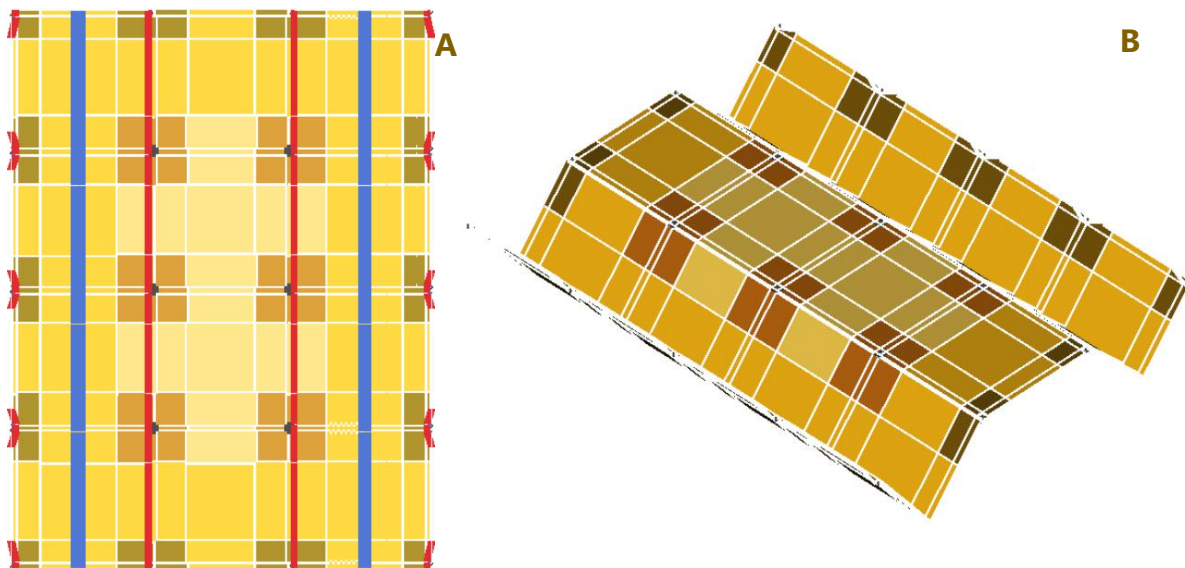
Las cuantías de cálculo de la losa se transforman en redondos por lo que la capacidad del armado va a ser ligeramente superior al de cálculo, al igual que ocurre en las comprobaciones anteriores. La capacidad resistente de la losa a momento positivo y negativo se resume en la tabla siguiente:

Material	$M^+ \left( \frac{kNm}{m} \right)$	$M^- \left( \frac{kNm}{m} \right)$
Vanos exteriores	72,36	12,6
Vanos interiores	50,85	12,6
Ábacos exteriores	72,36	141,39
Ábacos interiores	50,85	141,39

Los colores utilizados para los materiales corresponden a los mismos colores utilizados en el programa.

#### 4. EJEMPLOS RESUELTOS

Con estos valores nos vamos al programa obteniendo el patrón de rotura siguiente:



**Imagen n°44.** Patrón de rotura más desfavorables para la losa rectangular. A- Planta de la solución en LIMITSTATE SLAB; B- Vista 3D de la solución en LIMITSTATE SLAB

Este es el patrón de rotura más desfavorable para la losa que hemos proyectado con una carga de rotura de:  $19,43 \frac{kN}{m^2}$

En definitiva, se han verificado los patrones de líneas de rotura de vano y varios fallos en cono a flexión tanto manual como computacionalmente. Se comprueba que el armado propuesto en la losa es válido para resistir las acciones de proyecto.



## 5. CONCLUSIÓN

Este trabajo de Fin de Grado ha tratado de presentar una alternativa al cálculo elástico de las losas de hormigón. Mediante las líneas de rotura se realiza un cálculo con mayor exactitud y un resultado más económico y eficiente que los cálculos que se realizan en la actualidad. A través del cálculo de los momentos en barras apoyadas y empotradas hemos podido comprobar como una barra empotrada que se realiza en estado plástico podrá soportar cargas dos veces mayores a los obtenidos en el cálculo elástico. Esto hará que la barra soporte momentos menores y, por consiguiente, el armado será menor, adquiriendo así esa economía que antes hemos comentado.

Hemos buscado en la historia hasta irnos al principio de los cálculos en estado plástico, los profesores Gábor Kazinczy y A. A. Gvozdez fueron los primeros en plasmar sobre el papel teorías que indicaban que realizar un armado de losa en el momento de la rotura iba a traer consigo un diseño más cercano a la realidad. Utilizando estas hipótesis, el danés K.W. Johansen planteó la que será la primera de las teorías en base a las líneas de rotura. Plantear el patrón más desfavorable por el cual la losa comenzará a sufrir daños para que nos ayude a encontrar la carga máxima y su momento correspondiente.

Las losas de hormigón, por lo general, rompen por la zona más solicitada que ésta presenta. Si nosotros, una vez diseñada la losa, podemos conocer esa rotura, seremos capaces de proyectar el armado adecuado para dicha losa, yendo del lado de la seguridad del que conoce y sabe perfectamente cual va a ser la rotura de la losa en el caso de que se supere la carga máxima que ésta podrá soportar. A través de los distintos ejemplos que Johansen utilizó para sus ensayos, hemos realizado algunos de los ejemplos de este trabajo demostrando la validez de los mismos y en favor de utilizar este método para casos reales de estudio.

Para ello nos hemos ayudado de los recursos informáticos que se nos presentan, como es el caso del programa *LIMITSTATE SLAB*, que nos ha dado ese patrón de rotura necesario para cada losa y el valor del momento máximo de cada una. No solo nos hemos ayudado del programa para realizar estos patrones de rotura, sino que hemos comprobado este resultado a través del cálculo manual de este método de trabajo.

Lo mismo hemos realizado en el caso de comprobar el armado para las losas de mayor complejidad, en este caso el valor obtenido ha sido la carga máxima que podrá soportar la losa según los momentos calculados y el armado proyectado. Para esta losa hemos calculado el armado posible, hemos comprobado si otros patrones de rotura como los de cono o artesa podrían ser mas desfavorables a los calculados, se ha demostrado que no y hemos mantenido el armado. Ya en el programa hemos obtenido la carga máxima y el patrón de rotura real para el armado proyectado.

## 5. CONCLUSIÓN

Los resultados han sido satisfactorios y nos han demostrado la validez de dicho programa. Una herramienta indispensable para el futuro cercano de las losas de hormigón, algo que nos facilitará el diseño de dichas losas y que nos hará invertir lo necesario en su armado.

Demostrando su validez hemos querido apoyarnos en las diferentes normativas que debemos aplicar tanto en España como en la comunidad europea. Estas normativas nos facilitan estos cálculos a mano que debemos realizar. Nos enseñan los distintos patrones de rotura que se nos pueden presentar en cada losa de hormigón. Pero, tanto el Documento de aplicación de la EHE-08 en España y el Eurocódigo 2 en Europa nos insisten en que este método de cálculo solo lo podemos utilizar para la comprobación del armado de la losa, nunca como el cálculo principal para el armado, pues no tendrían validez a la hora de dimensionar en Estado Límite de Servicio (deformación y fisuración). Es por ello que se ha realizado este trabajo, demostrando la validez del método para cada tipo de losa y en el estado de rotura.

En general, el método de las líneas de rotura facilita el diseño y construcción de las losas de hormigón armado. Reduce costes y tiempos y hace de las losas de hormigón un tipo de construcción más económico y eficiente, acorde con la época en la que vivimos.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [ 1 ] Moussard, M., Garibaldi, P., & Curbach, M. (2018). The invention of Reinforced concrete (1848–1906). In *High Tech Concrete: Where Technology and Engineering Meet* (pp. 2785-2794). Springer, Cham.
- [ 2 ] BROWN, J. M. (1966). WB Wilkinson (1819-1902) and his place in the History of Reinforced Concrete.
- [ 3 ] Bosc, J. L. (2001). *Joseph Monier et la naissance du ciment armé*. Editions du Linteau.
- [ 4 ] Torroja, E. (1962). Hipódromo de la Zarzuela. *Informes de la Construcción*, 14(137), 19-38.
- [ 5 ] DE LOSAS, D. Y. A., & DE HORMIGÓN, A. U. HORMIGÓN II. Carlos Ricardo Llopiz
- [ 6 ] Kennedy, G., & Goodchild, C. (2004). Practical yield line design. *Concrete Centre, Surrey, UK*.
- [ 7 ] Kaliszky, S., Sajtos, I., Lógó, B. A., Lógó, J. M., & Szabó, Z. (2015). Gábor Kazinczy and his legacy in structural engineering. *Periodica Polytechnica. Civil Engineering*, 59(1), 3.
- [ 8 ] Gvozdev, A.A. 1936. Opredelenie velichiny razrushayushchei nagruzki dlya staticheskoi neopredelimykh sister, preterpevayushchikh plasticheskie deformatsii. *Proceedings of the Conference on Plastic Deformations, Akademia Nauk SSSR, Moscow-Leningrad*, 19–30.
- [ 9 ] Carlborg, G. R. (2008). CÁLCULO PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS: TEORÍA Tercera edición.
- [ 10 ] MONGE, F. (1998). EL MÉTODO DEL PROFESOR JOAHNSEN PARA EL CALCULO DE PLACAS. *Informes de la construcción*, 50(456-457).

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [ 11 ] Johansen, K. W. (1944). Skalkonstruktion paa Radiohuset. *Bygningsstatistiske Meddelelser*, 15, 1-26.
- [ 12 ] Martínez, M. M. (2017). KW Johansen y el origen del cálculo plástico en las cáscaras cilíndricas largas de cubierta. In *Actas del Décimo Congreso Nacional y Segundo Congreso Internacional Hispanoamericano de Historia de la Construcción: Donostia-San Sebastián, 3-7 octubre 2017* (pp. 1007-1016). Instituto Juan de Herrera.
- [ 13 ] EN, B. (1992). 1-1: 2004: Eurocode 2: Design of concrete structures-Part 1-1: General rules and rules for buildings. *British Standards Institution, London*.
- [ 14 ] Quintas, V. I. N. (2003). Two main methods for yield line analysis of slabs. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(2), 223-231.
- [ 15 ] Documento de aplicación a la edificación. EHE 08 Seguridad estructural: Hormigón. 2008
- [ 16 ] Gilbert, M., He, L., & Pritchard, T. (2015). The yield-line method for concrete slabs: automated at last. *The Structural Engineer*, 93(10), 44-48.  
[LimitState:SLAB - Automated Yield-Line Analysis Software | LimitState](#)
- [ 17 ] Maturana, A., Canales, J., Orbe, A., & Cuadrado, J. (2014). Análisis plástico y Ensayos de Losas multidireccionales de HRFA. *Informes de la Construcción*, 66(535), e031.



# TRABAJO DE FIN DE GRADO

Escuela Técnica Superior de Arquitectura  
Universidad de Granada



