ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.968.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310

Поступила в редакцию 28.04.2021
Received 28.04.2021

**А. П. Шилин**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

# РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМИ ТИПА ВРОНСКИАНОВ

**Аннотация.** Рассмотрено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение произвольного порядка на замкнутой кривой, расположенной в комплексной плоскости. Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару. Уравнение относится к линейным интегро-дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами частного вида, характерной особенностью является его запись с помощью определителей, близких к определителям Вронского. Для исследования привлекается метод аналитического продолжения, свойства определителей, обобщенные формулы Сохоцкого. Уравнение сводится к краевой задаче Римана о скачке в некотором классе функций. Если задача Римана оказывается разрешимой, то далее следует решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения в классе аналитических функций в областях комплексной плоскости. Неочевидным является анализ получаемых решений в бесконечно удаленной точке. Исследование носит законченный характер. В явном виде выписаны условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении в явном виде записано решение, приведен пример.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение, определитель

**Для цитирования.** Шилин, А. П. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с определителями типа вронскианов / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 296–310. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310

**Andrey P. Shilin**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## A SOLUTION OF THE HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DETERMINANTS OF THE VRONSKY TYPE

**Abstract.** In this paper, we consider a new hypersingular integro-differential equation of arbitrary order on a closed curve located in the complex plane. The integrals in the equation are understood in the sense of the finite Hadamard part. The equation refers to linear integro-differential equations with variable coefficients of a particular form. A characteristic feature of the equation is its representation with the help of determinants close to the Vronsky ones. The method of analytical continuation, properties of determinants, and generalized Sokhotsky formulas are used for the study. The equation reduces to the Riemann boundary value problem of a jump in a certain class of functions. If the Riemann boundary problem turns out to be solvable, then one should solve linear inhomogeneous differential equations in the class of analytic functions in the domains of the complex plane. The analysis of the obtained solutions in an infinitely distant point is not evident. The study has a complete look. The conditions for the solvability of the original equation are explicitly written out. When they are fulfilled, the solution is explicitly written, to which an example is given.

**Keywords:** integro-differential equation, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, linear differential equation, determinant

**For citation.** Shilin A. P. A solution of the hypersingular integro-differential equation with determinants of the Vronsky type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 296–310 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310

**Введение.** В уравнениях, которые изучаются в настоящей работе, интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару [1]. Интерес к подобным (гиперсингулярным) интегральным уравнениям во многом связан с их приложениями к аэро- и электродинамике, геофизике, атомной и ядерной физике и другим областям естествознания и техники. Весьма полный обзор имеющихся результатов по соответствующей тематике приведен в [2]. Данная статья продолжает начатые в [3–6] исследования, связанные с точным аналитическим решением гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Уравнения в настоящей работе записываются с помощью определителей, близких к определителям Вронского. В отличие от [7], от заданных функций не требуется аналитическая продолжимость с кривой, на которой рассматриваются уравнения. Известно, что определители Вронского широко используются для конструирования и исследования дифференциальных уравнений. Для записи и изучения сингулярных и гиперсингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, связанных с краевыми задачами для аналитических функций, определители типа определителей Вронского другими авторами, по-видимому, не привлекались.

**Постановка задачи и общая схема решения.** Обозначим через $L$ простую гладкую замкнутую положительно ориентированную кривую на комплексной плоскости. Пусть $D_+$ и $D_-$ – соответственно внутренняя и внешняя области, для которых кривая $L$ является границей. Зададим $H$-непрерывную (т. е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и $n$ раз $H$-непрерывно дифференцируемые функции $p_j(t),\ j=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N},\ t\in L.$ Будем искать на кривой $L$ $n$ раз $H$-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую интегро-дифференциальному уравнению порядка $n$ с интегралами в смысле конечной части по Адамару. Укажем вначале это уравнение при $n = 1$:

$$\frac{\varphi(t)}{\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-\frac{\varphi'(t)}{\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{p_1'(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{p_1(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=f(t),\quad t\in L. \tag{1}$$

Уравнение (1) встретилось и было решено в [6]. В настоящей работе мы обобщим это уравнение на случай произвольного порядка. Уравнение (1) может быть записано также с помощью определителей

$$\begin{vmatrix}\varphi(t) & \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t}\\ \varphi'(t) & \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} & p_1(t)\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & p_1'(t)\end{vmatrix}=f(t),\quad t\in L,$$

и именно с помощью определителей осуществляется упомянутое обобщение, причем оно имеет немного отличающийся вид для четных и нечетных значений $n$.

Пусть $n=2m,\ m=1,2,...,$ тогда подлежащее изучению уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix}p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \varphi(t)\\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \varphi'(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \varphi^{(n)}(t)\end{vmatrix}+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(j_1,j_2,...,j_{2k})}\begin{vmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \varphi(t)\\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \varphi'(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \varphi^{(n)}(t)\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\sum_{(j_1,j_2,...,j_{2k-1})}\begin{vmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}}\end{vmatrix}\right)=f(t),\quad t\in L, \tag{2}$$

где при $l=\overline{1,n+1}$

$$a_{lj}(t)=\begin{cases}\dfrac{(l-1)!}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{p_j(\tau)d\tau}{(\tau-t)^l} & \text{для } j, \text{ указанных под знаком внутренних сумм,}\\ p_j^{(l-1)}(t) & \text{для остальных } j,\end{cases}$$

а суммы $\sum\limits_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})}$ и $\sum\limits_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k-1})}$ распространяются на всевозможные сочетания из соответственно $2k$ и $2k-1$ натуральных чисел, взятых из первых $n=2m$ натуральных чисел. (Аналогично понимаются подобные суммы в дальнейшем.)

Укажем, в частности, развернутый вид уравнения (2) при $n=2$:

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \varphi(t) \\ p_1'(t) & p_2'(t) & \varphi'(t) \\ p_1''(t) & p_2''(t) & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_2(\tau)d\tau}{\tau-t} & \varphi(t) \\ \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \varphi'(t) \\ \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} & \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} & \varphi''(t) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} p_1(t) & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_2(\tau)d\tau}{\tau-t} & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ p_1''(t) & \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_2(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} & \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & p_2(t) & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & p_2'(t) & \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} & p_2''(t) & \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} = f(t), \quad t\in L. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) при более тяжелых, чем в настоящей работе, ограничениях на заданные функции дано в [8].

Приведем вид интегро-дифференциального уравнения нечетного порядка $n = 2m + 1$, $m=1,2,\dots$:

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k+1})} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \varphi(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{0!}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1!}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{n!}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \frac{0!}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \frac{1!}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \frac{n!}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} = f(t), \quad t\in L. \tag{4}$$

Из-за полной аналогии в исследовании уравнений (2) и (4) ограничимся далее уравнением (2).

**Сведение уравнения к задаче Римана о скачке.** Перепишем уравнение (2), представляя в нем каждый определитель в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{2k})}\left(\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix}\right) +\right.$$

$$+\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{2k-1})}\left(\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} +\right.$$

$$\left.\left.+\begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & -\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & -\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & -\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix}\right)\right) = f(t), \quad t\in L, \tag{5}$$

где для $l=\overline{1,n+1}$

$$b_{lj}(t)=\begin{cases} -\frac{(l-1)!}{\pi i}\int_L\frac{p_j(\tau)d\tau}{(\tau-t)^l} & \text{для } j\text{, указанных под знаком внутренних сумм,} \\ p_j^{(l-1)}(t) & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

Добавим в левую часть уравнения (5) сумму

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & -\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & -\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & -\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix},$$

равную нулю, и еще две суммы

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k-1})}\left(\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})}\left(\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{0!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & -\frac{0!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & -\frac{1!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & -\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix}\right),$$

также равные нулю, поскольку, очевидно, равна нулю сумма каждой пары слагаемых, стоящих в скобках. Теперь сумма слагаемых

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k-1})}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \frac{1}{2}\varphi(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix}\right)$$

в левой части уравнения может быть записана в виде одного определителя

$$\begin{vmatrix} p_1(t)+\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \cdots & p_n(t)+\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{p_n(\tau)d\tau}{\tau-t} & \dfrac{1}{2}\varphi(t) \\ p_1'(t)+\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \cdots & p_n'(t)+\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \dfrac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t)+\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \cdots & p_n^{(n)}(t)+\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \dfrac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Аналогично суммы

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m}\left( \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k-1})} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) & \dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) & \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1}(t) & \cdots & a_{n+1,n}(t) & \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} \right),$$

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & \dfrac{1}{2}\varphi(t) \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & \dfrac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m}\left( \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})} \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k-1})} \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & \dfrac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} \right),$$

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) & -\dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \cdots & p_n'(t) & -\dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n)}(t) & \cdots & p_n^{(n)}(t) & -\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m}\left( \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k})} \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & -\dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & -\dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & -\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_{2k-1})} \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) & -\dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) & -\dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1}(t) & \cdots & b_{n+1,n}(t) & -\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} \right)$$

могут быть записаны в виде определителей соответственно

$$\begin{vmatrix} p_1(t)+\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \cdots & p_n(t)+\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{\tau-t} & \dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t)+\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \cdots & p_n'(t)+\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n)}(t)+\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \cdots & p_n^{(n)}(t)+\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} p_1(t)-\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \cdots & p_n(t)-\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{\tau-t} & \dfrac{1}{2}\varphi(t) \\ p_1'(t)-\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \cdots & p_n'(t)-\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \dfrac{1}{2}\varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n)}(t)-\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \cdots & p_n^{(n)}(t)-\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \dfrac{1}{2}\varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} p_1(t)-\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \cdots & p_n(t)-\dfrac{0!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{\tau-t} & -\dfrac{0!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t)-\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \cdots & p_n'(t)-\dfrac{1!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & -\dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n)}(t)-\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \cdots & p_n^{(n)}(t)-\dfrac{n!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & -\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Складывая определители (6) и (7), а также (8) и (9), теперь легко придать уравнению (5) вид

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{2}p_1(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \cdots & \frac{1}{2}p_n(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{p_n(\tau)d\tau}{\tau-t} & \frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\
\frac{1}{2}p_1'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \cdots & \frac{1}{2}p_n'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{1}{2}\varphi'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{2}p_1^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \cdots & \frac{1}{2}p_n^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}}
\end{vmatrix} -
$$

$$
-\begin{vmatrix}
-\frac{1}{2}p_1(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{\tau-t} & \cdots & -\frac{1}{2}p_n(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{p_n(\tau)d\tau}{\tau-t} & -\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\
-\frac{1}{2}p_1'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & \cdots & -\frac{1}{2}p_n'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} & -\frac{1}{2}\varphi'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\frac{1}{2}p_1^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{p_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & \cdots & -\frac{1}{2}p_n^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{p_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} & -\frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}}
\end{vmatrix} =
$$

$$
=\frac{f(t)}{2^n}, \quad t\in L. \tag{10}
$$

Введем кусочно-аналитические функции с помощью интегралов типа Коши:

$$
\Phi_{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad P_{j\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_j(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad j=\overline{1,n},
$$

$$
F_{\pm}(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_L\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad z\in D_{\pm},
$$

а также с помощью определителей Вронского

$$
V_{\pm}(z)=\begin{vmatrix}
P_{1\pm}(z) & \cdots & P_{n\pm}(z) & \Phi_{\pm}(z) \\
P_{1\pm}'(z) & \cdots & P_{n\pm}'(z) & \Phi_{\pm}'(z) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_{1\pm}^{(n)}(z) & \cdots & P_{n\pm}^{(n)}(z) & \Phi_{\pm}^{(n)}(z)
\end{vmatrix}, \quad
W_{\pm}(z)=\begin{vmatrix}
P_{1\pm}(z) & \cdots & P_{n\pm}(z) \\
P_{1\pm}'(z) & \cdots & P_{n\pm}'(z) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
P_{1\pm}^{(n-1)}(z) & \cdots & P_{n\pm}^{(n-1)}(z)
\end{vmatrix},
$$

$$
W_{j\pm}(z)=\begin{vmatrix}
P_{1\pm}(z) & \cdots & P_{j-1,\pm}(z) & P_{j+1,\pm}(z) & \cdots & P_{n\pm}(z) \\
P_{1\pm}'(z) & \cdots & P_{j-1,\pm}'(z) & P_{j+1,\pm}'(z) & \cdots & P_{n\pm}'(z) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_{1\pm}^{(n-2)}(z) & \cdots & P_{j-1,\pm}^{(n-2)}(z) & P_{j+1,\pm}^{(n-2)}(z) & \cdots & P_{n\pm}^{(n-2)}(z)
\end{vmatrix}, \quad j=\overline{1,n}, \quad z\in D_{\pm}.
$$

На основании обобщенных формул Сохоцкого [9] уравнение (10) может быть записано в виде краевой задачи Римана о скачке

$$
V_{+}(t)-V_{-}(t)=\frac{f(t)}{2^n}, \quad t\in L. \tag{11}
$$

**Решение задачи Римана о скачке.** Для решения задачи (11) следует установить поведение функции $V_{-}(z)$ на бесконечности. Обозначим $k_j\in\mathbb{N}$ порядки нулей на бесконечности соответствующих функций $P_{j-}(z)$. Это означает, что в окрестности бесконечности справедливы разложения

$$P_{j-}(z)=\sum_{s=k_j}^{\infty}\frac{c_{js}}{z^s},\quad c_{js}\in\mathbb{C},\ c_{jk_j}\neq 0,\qquad j=\overline{1,n}.$$

Вначале установим порядок нуля на бесконечности функции $W_{-}(z)$, для чего разложим в ряды Тейлора в окрестности бесконечности элементы соответствующего определителя:

$$W_{-}(z)=\begin{vmatrix} \dfrac{c_{1k_1}}{z^{k_1}}+\ldots & \cdots & \dfrac{c_{nk_n}}{z^{k_n}}+\ldots \\ \dfrac{-k_1c_{1k_1}}{z^{k_1+1}}+\ldots & \cdots & \dfrac{-k_nc_{nk_n}}{z^{k_n+1}}+\ldots \\ \dfrac{-k_1(-k_1-1)c_{1k_1}}{z^{k_1+2}}+\ldots & \cdots & \dfrac{-k_n(-k_n-1)c_{nk_n}}{z^{k_n+2}}+\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{-k_1(-k_1-1)\ldots(-k_1-n+2)c_{1k_1}}{z^{k_1+n-1}}+\ldots & \cdots & \dfrac{-k_n(-k_n-1)\ldots(-k_n-n+2)c_{nk_n}}{z^{k_n+n-1}}+\ldots \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя сначала в $j$-м столбце множитель $\dfrac{c_{jk_j}}{z^{k_j}}$, а затем в $j$-й строке – множитель $\dfrac{1}{z^{j-1}}$, $j=\overline{1,n}$; кроме того, в каждой четной строке вынесем за знак определителя «минус». В результате получим

$$W_{-}(z)=\frac{A}{z^M}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1+\ldots & \cdots & 1+\ldots \\ k_1+\ldots & \cdots & k_n+\ldots \\ k_1^2+k_1+\ldots & \cdots & k_n^2+k_n+\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1}+\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}k_1^{n-2}+\ldots+(n-2)!k_1+\ldots & \cdots & k_n^{n-1}+\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}k_n^{n-2}+\ldots+(n-2)!k_n+\ldots \end{vmatrix},\tag{12}$$

где

$$A=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}c_{1k_1}c_{2k_2}\ldots c_{nk_n}\neq 0,$$

$$M=\sum_{j=1}^{n}k_j+\sum_{j=1}^{n}(j-1)=\sum_{j=1}^{n}k_j+\frac{n(n-1)}{2},\tag{13}$$

а многоточие в конце каждого элемента определителя (12) будет выражать бесконечно малые функции при $z\to\infty$.

Определитель в (12) представим в виде надлежащей суммы определителей, элементами которых будут отдельные слагаемые строк. Определитель из всех первых слагаемых строк будет определителем Вандермонда чисел $k_1,k_2,\ldots,k_n$. Если эти числа попарно различны, то определитель Вандермонда окажется отличным от нуля. Остальные определители в получающейся сумме будут либо равны нулю из-за пропорциональности каких-либо строк, либо будут бесконечно малыми при $z\to\infty$ из-за наличия таких бесконечно малых хотя бы в одной строке. Таким образом, при попарно различных значениях $k_1,k_2,\ldots,k_n$ порядок $W_{-}(z)$ на бесконечности равен $M$.

Пусть хотя бы два порядка $k_1,k_2,\ldots,k_n$ равны между собой. Обозначим $\tilde{k}_1=k_{j_1}=\min(k_1,k_2,\ldots,k_n)$. Если среди функций $P_{j-}(z)$ помимо функции $P_{j_1-}(z)$ есть еще функции с порядком $\tilde{k}_1$ на бесконечности, то добавим к столбцам определителя $W_{-}(z)$, содержащим такие функции, $j_1$-й столбец, домноженный на подходящие константы так, чтобы порядки на бесконечности первых функций в этих столбцах увеличились, а $j_1$-й столбец остался единственным с порядком $\tilde{k}_1$. Пусть $\tilde{k}_2 = k_{j_2}$ – минимальный порядок на бесконечности всех функций в первой строке нового определителя, кроме функции в $j_1$-м столбце. Если порядок $\tilde{k}_1$ имела лишь функция $P_{j_1-}(z)$, то в роли «нового» определителя будет исходный определитель. Если порядок $\tilde{k}_2$ есть у некоторых других функций в первой строке нового определителя, то добавим к столбцам с этими функциями $j_2$-й столбец, домноженный на подходящие константы так, чтобы $j_2$-й столбец оказался единственным с порядком $\tilde{k}_2$ у первой функции. Продолжая подобные действия со столбцами, добьемся попарно различных порядков $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, ..., \tilde{k}_n$ на бесконечности в элементах первой строки определителя. Значение исходного определителя $W_-(z)$ в результате подобных действий со столбцами не изменится, поэтому, не теряя общности, можно считать с самого начала порядки $k_1, k_2, ..., k_n$ попарно различными, что мы в определителе $W_-(z)$ и будем в дальнейшем предполагать.

Отметим для дальнейшего, что порядки $M_j$ на бесконечности определителей $W_{j-}(z)$ будут, очевидно, вычисляться вполне аналогично порядку $M_j$ и окажутся равными

$$M_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} k_s + \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Обозначим $k_*$ минимальное натуральное число такое, что $k_* \neq k_j$, $j = \overline{1, n}$.

Интеграл типа Коши $\Phi_-(z)$, выражающийся через искомую функцию $\varphi(t)$, должен иметь на бесконечности нуль по меньшей мере 1-го порядка. Очевидно, что чем выше этот порядок, тем выше порядок нуля на бесконечности функции $V_-(z)$. Следовательно, порядок нуля на бесконечности функции $V_-(z)$ характеризуется своим минимально возможным значением $M_*$, получающимся при 1-м порядке нуля у функции $\Phi_-(z)$.

Порядок нулей на бесконечности функций $P_{j-}(z)$ в определителе $V_-(z)$ можно считать равными тем же значениям $k_j$, что и в определителе $W_-(z)$. В противном случае мы придем к этим порядкам, выполняя те же преобразования первых $n$ столбцов определителя $V_-(z)$, что и преобразования столбцов в определителе $W_-(z)$: они точно так же не изменят определитель $V_-(z)$, как и определитель $W_-(z)$. Если $k_j \neq 1$, $j = \overline{1, n}$, то $k_* = 1$, при этом порядки на бесконечности всех функций в 1-й строке определителя $V_-(z)$ попарно различны. Тогда значение $M_*$ вычисляется аналогично значению $M$ и получается равным

$$M_* = \sum_{j=1}^{n} k_j + k_* + \frac{(n+1)n}{2}. \tag{15}$$

Если $k_j = 1$ для некоторого $j = j_1$, то, добавляя к последнему столбцу определителя $V_-(z)$ $j_1$-й столбец, умноженный на подходящую постоянную, мы уменьшим, вообще говоря, на единицу порядок на бесконечности у 1-й функции в последнем столбце. Если $k_j = 2$ для некоторого $j = j_2$, то, добавляя к новому последнему столбцу определителя $V_-(z)$ $j_2$-й столбец, умноженный на подходящую постоянную, уменьшим, вообще говоря, еще на единицу порядок 1-й функции в последнем столбце. Продолжая этот процесс, дойдем до порядка $k_*$ у 1-й функции в последнем столбце. При этом значение $V_-(z)$ не изменится, а порядки на бесконечности у всех функций в 1-й строке преобразованного определителя $V_-(z)$ станут попарно различны, и тогда снова значение $M_*$ вычисляется по формуле (15). Итак,

$$V_-(z) = \mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{M_*}\right), \quad z \to \infty.$$

Теперь на основании теории задачи Римана [10] можно утверждать, что для разрешимости задачи (11) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L f(\tau)\tau^k d\tau = 0, \quad k = \overline{0, M_* - 2}. \tag{16}$$

Если эти условия выполняются, то $V_\pm(z) = F_\pm(z)$.

**Дальнейшее решение. Основной результат.** Предположим, что условия (16) выполнены. Далее следует решать дифференциальные уравнения

$$\begin{vmatrix} P_{1\pm}(z) & \cdots & P_{n\pm}(z) & \Phi_{\pm}(z) \\ P'_{1\pm}(z) & \cdots & P'_{n\pm}(z) & \Phi'_{\pm}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P^{(n)}_{1\pm}(z) & \cdots & P^{(n)}_{n\pm}(z) & \Phi^{(n)}_{\pm}(z) \end{vmatrix} = F_{\pm}(z), \quad z \in D_{\pm}, \tag{17}$$

после чего по формуле

$$\varphi(t) = \Phi_{+}(t) - \Phi_{-}(t), \quad t \in L, \tag{18}$$

придем к решению исходного уравнения (2).

Будем в дальнейшем предполагать, что $W_{\pm}(z) \neq 0$, $z \in D_{\pm} \bigcup L$, $z \neq \infty$. Решение уравнения (17) для $z \in D_{+}$, полученное методом вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Phi_{+}(z) = \sum_{j=1}^{n} P_{j+}(z) \left( C_j^{+} + (-1)^{n+j} \int_{z_0^{+}}^{z} \frac{W_{j+}(\zeta) F_{+}(\zeta)\, d\zeta}{W_{+}^{2}(\zeta)} \right),$$

где $C_j^{+} \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$, $z_0^{+} \in D_{+}$. Формула решения уравнения (17) для $z \in D_{-}$ аналогична:

$$\Phi_{-}(z) = \sum_{j=1}^{n} P_{j-}(z) \left( C_j^{-} + (-1)^{n+j} \int_{z_0^{-}}^{z} \frac{W_{j-}(\zeta) F_{-}(\zeta)\, d\zeta}{W_{-}^{2}(\zeta)} \right), \tag{19}$$

где $C_j^{-} \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$, $z_0^{-} \in D_{-}$, $z_0^{-} \neq \infty$, однако нуждается в исследовании при $z \to \infty$. Справедливы равенства

$$\frac{W_{j-}(\zeta) F_{-}(\zeta)}{W_{-}^{2}(\zeta)} = \mathrm{O}\left( \left( \frac{1}{z} \right)^{N_j} \right), \quad z \to \infty,$$

где на основании формул (13)–(15)

$$N_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} k_s + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{j=1}^{n} k_j + k_* + \frac{(n+1)n}{2} -$$
$$-2\left( \sum_{j=1}^{n} k_j + \frac{n(n-1)}{2} \right) = k_* + 1 - k_j, \quad j = \overline{1,n},$$

следовательно, для однозначности $\Phi_{-}(z)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname*{res}_{\zeta=\infty} \frac{W_{j-}(\zeta) F_{-}(\zeta)}{W_{-}^{2}(\zeta)} = 0 \ \text{ для тех } j, \text{ для которых } k_j > k_*. \tag{20}$$

Важно также отметить, что возможные полюсы порядков $-k_* + k_j$ на бесконечности у интегралов в формуле (19) при $k_* + 1 - k_j \leq 0$ будут «гаситься» нулями порядков $k_j$ у соответствующих множителей $P_{j-}(z)$. При этом функция $\Phi_{-}(z)$, вычисленная по формуле (19), будет иметь на бесконечности нуль по меньшей мере 1-го порядка. Сформулируем окончательный результат.

Т е о р е м а. *Для разрешимости уравнения* (2) *необходимо и достаточно выполнение условий* (16) *и* (20). *Если эти условия выполняются, то решение уравнения дается формулой*

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}p_j(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_j(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\left(C_j^{+}+(-1)^{n+j}\int_{z_0^{+}}^{t}\frac{W_{j+}(\zeta)F_{+}(\zeta)d\zeta}{W_{j+}^2(\zeta)}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}p_j(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p_j(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\left(C_j^{-}+(-1)^{n+j}\int_{z_0^{-}}^{t}\frac{W_{j-}(\zeta)F_{-}(\zeta)d\zeta}{W_{j-}^2(\zeta)}\right)\right),\quad t\in L.$$

Пример. Решим уравнение (3) на окружности $|t|=1$, если $p_1(t)=t-\frac{1}{t}$, $p_2(t)=t^3+3-\frac{1}{t^5}-\frac{2}{t^4}-\frac{2}{t}$, $f(t)=4\left(1-\frac{1}{t^{10}}-\frac{\delta}{t^{11}}\right)$, $\delta$ – числовой параметр:

$$\begin{vmatrix} t-\frac{1}{t} & t^3+3-\frac{1}{t^5}-\frac{2}{t^4}-\frac{2}{t} & \varphi(t)\\ 1+\frac{1}{t^2} & 3t^2+\frac{5}{t^6}+\frac{8}{t^5}+\frac{2}{t^2} & \varphi'(t)\\ -\frac{2}{t^3} & 6t-\frac{30}{t^7}-\frac{40}{t^6}-\frac{4}{t^3} & \varphi''(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t+\frac{1}{t} & t^3+3+\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^4}+\frac{2}{t} & \varphi(t)\\ 1-\frac{1}{t^2} & 3t^2-\frac{5}{t^6}-\frac{8}{t^5}-\frac{2}{t^2} & \varphi'(t)\\ \frac{2}{t^3} & 6t+\frac{30}{t^7}+\frac{40}{t^6}+\frac{4}{t^3} & \varphi''(t)\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\begin{vmatrix} t-\frac{1}{t} & t^3+3+\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^4}+\frac{2}{t} & \int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\\ 1+\frac{1}{t^2} & 3t^2-\frac{5}{t^6}-\frac{8}{t^5}-\frac{2}{t^2} & \int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\\ -\frac{2}{t^3} & 6t+\frac{30}{t^7}+\frac{40}{t^6}+\frac{4}{t^3} & 2\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\begin{vmatrix} t+\frac{1}{t} & t^3+3+\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^4}+\frac{2}{t} & \int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\\ 1-\frac{1}{t^2} & 3t^2-\frac{5}{t^6}-\frac{8}{t^5}-\frac{2}{t^2} & \int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\\ \frac{2}{t^3} & 6t+\frac{30}{t^7}+\frac{40}{t^6}+\frac{4}{t^3} & 2\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}\end{vmatrix}=4\left(1-\frac{1}{t^{10}}-\frac{\delta}{t^{11}}\right),\quad |t|=1. \qquad (21)$$

Краевая задача (11) для уравнения (21) примет вид

$$\begin{vmatrix} t & t^3+3 & \Phi_{+}(t)\\ 1 & 3t^2 & \Phi'_{+}(t)\\ 0 & 6t & \Phi''_{+}(t)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^4}+\frac{2}{t} & \Phi_{-}(t)\\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{5}{t^6}-\frac{8}{t^5}-\frac{2}{t^2} & \Phi'_{-}(t)\\ \frac{2}{t^3} & \frac{30}{t^7}+\frac{40}{t^6}+\frac{4}{t^3} & \Phi''_{-}(t)\end{vmatrix}=1-\frac{1}{t^{10}}-\frac{\delta}{t^{11}}.$$

Во втором определителе из второго столбца вычтем удвоенный первый, добиваясь разных порядков на бесконечности у первых элементов этих столбцов:

$$\begin{vmatrix} t & t^3+3 & \Phi_{+}(t)\\ 1 & 3t^2 & \Phi'_{+}(t)\\ 0 & 6t & \Phi''_{+}(t)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^4} & \Phi_{-}(t)\\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{5}{t^6}-\frac{8}{t^5} & \Phi'_{-}(t)\\ \frac{2}{t^3} & \frac{30}{t^7}+\frac{40}{t^6} & \Phi''_{-}(t)\end{vmatrix}=1-\frac{1}{t^{10}}-\frac{\delta}{t^{11}}.$$

В результате получен тот вид краевой задачи, который позволяет делать дальнейшие вычисления. Получим

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4, \ k_* = 2, \quad M_* = 1 + 4 + 2 + \frac{2 \cdot 3}{2} = 10.$$

Для функции $1 - \frac{1}{t^{10}} - \frac{\delta}{t^{11}}$ будет, очевидно,

$$F_+(z) = 1, \quad F_-(z) = \frac{1}{z^{10}} + \frac{\delta}{z^{11}}.$$

Наличие нуля 10-го порядка на бесконечности у функции $F_-(z)$ означает выполнение условий (16). Важно убедиться, что для соответствующих уравнению (21) функций

$$W_+(z) = 2z^3 - 3, \quad W_-(z) = -\frac{4 + 6z}{z^7}$$

выполняются неравенства $W_+(z) \neq 0$ при $|z| \leq 1,\ W_-(z) \neq 0$ при $|z| \geq 1,\ z \neq \infty$. Далее следует решать уравнение

$$\begin{vmatrix} z & z^3 + 3 & \Phi_+(z) \\ 1 & 3z^2 & \Phi'_+(z) \\ 0 & 6z & \Phi''_+(z) \end{vmatrix} = 1, \quad |z| < 1,$$

откуда

$$\Phi_+(z) = \left( -\int_{z_0^+}^{z} \frac{(\zeta^3 + 3)d\zeta}{(2\zeta^3 - 3)^2} + C_1^+ \right) z + \left( \int_{z_0^+}^{z} \frac{\zeta d\zeta}{(2\zeta^3 - 3)^2} + C_2^+ \right)(z^3 + 3).$$

Теперь следует решать уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z^5} + \frac{2}{z^4} & \Phi_-(z) \\ -\frac{1}{z^2} & -\frac{5}{z^6} - \frac{8}{z^5} & \Phi'_-(z) \\ \frac{2}{z^3} & \frac{30}{z^7} + \frac{40}{z^6} & \Phi''_-(z) \end{vmatrix} = \frac{1}{z^{10}} + \frac{\delta}{z^{11}}, \quad |z| > 1.$$

Получим

$$\Phi_-(z) = \left( -\int_{z_0^-}^{z} \frac{(\zeta + \delta)(1 + 2\zeta)d\zeta}{(4 + 6\zeta)^2 \zeta^2} + C_1^- \right) \frac{1}{z} + \left( \int_{z_0^-}^{z} \frac{(\zeta + \delta)\zeta^2 d\zeta}{(4 + 6\zeta)^2} + C_2^- \right) \left( \frac{1}{z^5} + \frac{2}{z^4} \right).$$

Из условий (20), выражающих требование однозначности полученных интегрированием функций, останется лишь условие

$$\operatorname*{res}_{\zeta=\infty} \frac{(\zeta + \delta)\zeta^2}{(4 + 6\zeta)^2} = \frac{1}{27}(\delta - 1) = 0,$$

откуда $\delta = 1$. Итак, уравнение (21) разрешимо лишь при $\delta = 1$, а его решение при этом значении $\delta$ согласно формуле (18) будет равно

$$\varphi(t)=\left(C_1^+-\int\limits_{z_0^+}^{t}\frac{(\zeta^3+3)d\zeta}{(2\zeta^3-3)^2}\right)t+\left(\int\limits_{z_0^+}^{t}\frac{\zeta d\zeta}{(2\zeta^3-3)^2}+C_2^+\right)\left(t^3+3\right)-$$

$$-\left(C_1^- -\int\limits_{z_0^-}^{t}\frac{(\zeta+1)(1+2\zeta)d\zeta}{(4+6\zeta)^2\zeta^2}\right)\frac{1}{t}-\left(\int\limits_{z_0^-}^{t}\frac{(\zeta+1)\zeta^2 d\zeta}{(4+6\zeta)^2}+C_2^-\right)\left(\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^4}\right),\quad |t|=1.$$

Подчеркнем, что интегралы $\int\limits_{z_0^+}^{t}$ и $\int\limits_{z_0^-}^{t}$ в полученной формуле для $\varphi(t)$ берутся по любым кривым в областях соответственно $|z|\le 1$ и $|z|\ge 1$. (Аналогичный факт в формулировке теоремы не указан, поскольку он очевиден из обозначений подынтегральных функций.) Отметим также, что интегралы в полученной формуле для $\varphi(t)$ поддаются дальнейшим вычислениям, которые легко осуществляют современные компьютерные программы. Результаты этих вычислений не приводим из-за их громоздкого вида.

**Заключение.** Исследование уравнения (2) при сделанных предположениях носит законченный характер. В дальнейшем может быть изучен случай, когда определители $W_{\pm}(z)$ допускают нули в конечном числе точек. По-видимому, можно вводить в рассмотрение и исследовать уравнения, близкие к (2), (4) и сводящиеся к тем случаям краевых задач Гильберта, Карлемана и др., которые являются аналогами задачи Римана о скачке.

## Список использованных источников

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

2. Бойков, И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Динам. системы. – 2019. – Т. 9, № 3. – С. 244–272.

3. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

4. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

5. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

6. Шилин, А. П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 298–309. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

7. Шилин, А. П. Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям / А. П. Шилин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

8. Шилин, А. П. Решение одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, заданного с помощью определителей / А. П. Шилин // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. (Пенза, Россия, 1–4 дек. 2020 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. – Пенза, 2020. – С. 18–22.

9. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.

10. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

## References

1. Adamar Zh. *The Cauchy Problem of Linear Equations with Partial Derivatives of Hyperbolic Type*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p. (in Russian).

2. Boykov I. V. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. *Dinamicheskie Sistemy*, vol. 9, no. 3, pp. 244–272 (in Russian).

3. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

4. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

5. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation of the Euler type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

6. Shilin A. P. On the solution of one integro-differential equation with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 298–309 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

7. Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

8. Shilin A. P. Solution of a second-order integro-differential equation given by the determinants. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: materialy XV Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii (Penza, Rossiya, 1–4 dekabrya 2020 g.)* [Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems. Proceedings of the XV International Conference ANM-2020. Penza, Russian Federation, 1–4 December, 2020]. Penza, 2020, pp 18–22 (in Russian).

9. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

10. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

## Информация об авторе

**Шилин Андрей Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

## Information about the author

**Andrey P. Shilin** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com