NOTAS SOBRE A VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE FRAÇÕES

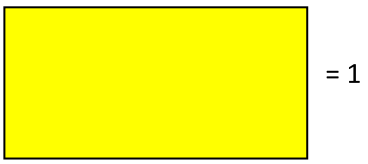
Notes on viewing fraction of geometric

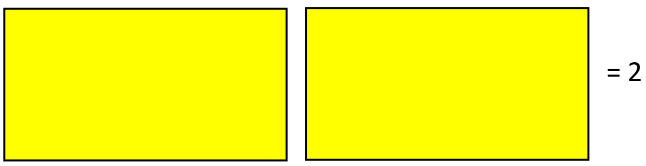
Eudes Antônio da Costa

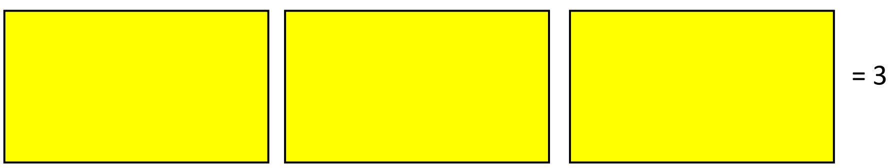
1 Introdução

Nestas notas consideraremos o conjunto dos números naturais (inteiros positivos) sendo $N = \{1,2,3,...\}$. E uma *fração* representada por $\frac{a}{b}$ sendo $a,b \in N$. O conjunto de todas as *frações* $\frac{a}{b}$ será indicado pelo conjunto $Q = \left\{\frac{a}{b} : a,b \in N\right\}$ e é chamado de número racional (não nulo), conforme Silva[2].

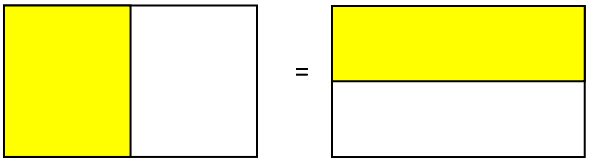
Inicialmente vamos escolher uma figura geométrica para representar a unidade (inteiro). Adotaremos como unidade um retângulo. Assim os números naturais (inteiros positivos) podem ser representados por coleções da unidade.



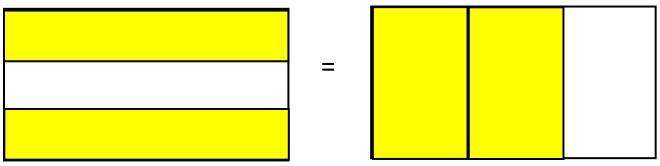




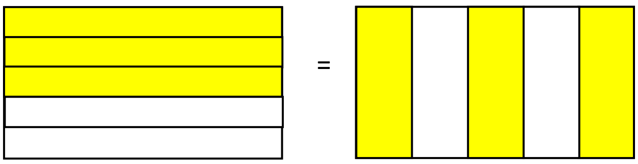
Para representar (visualização geométrica) uma *fração* $\frac{a}{b}$ teremos o número *b* *(denominador)* de pedaços (partes) iguais em que foi repartida (dividida) a unidade (ou uma coleção de unidades – um número inteiro), e a(s) parte(s) *(o numerador)* que foi (foram) considerada(s). Observe que isto não é uma definição, é apenas uma representação (visualização). As partes consideradas indicaremos por sombreamento, coloração, entre outras marcas.



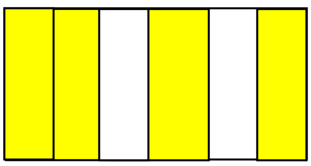
$= \frac{1}{2}$



$= \frac{2}{3}$

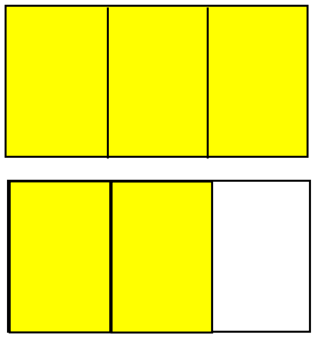


$= \frac{3}{5}$



$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$= \frac{4}{7}$



$$= \frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

Observamos que existem *frações* menores que a unidade (fração própria), por exemplo: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$. E *frações* maiores que a unidade(fração imprópria), por exemplo, $\frac{5}{3}$ que é uma unidade mais um outro pedaço da unidade (outra *fração*). As *frações* $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ são chamadas de *frações* inversas, visto que $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} \equiv 1$.

2 Frações Equivalentes

Temos infinitas igualdades de *frações*, ou seja, podemos representar uma mesma *fração* de "várias" maneiras. Vejamos alguns exemplos:

$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots = \frac{n}{n}$, para qualquer n inteiro positivo,

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{n}{2n}$, para qualquer n inteiro positivo,

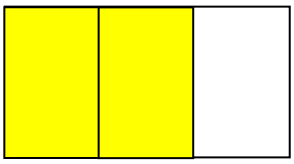
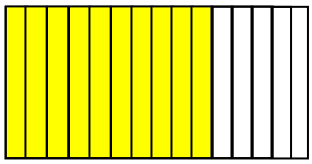
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \cdots = \frac{2n}{3n}$, para qualquer n inteiro positivo, entre outras.

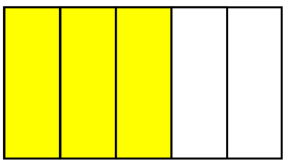
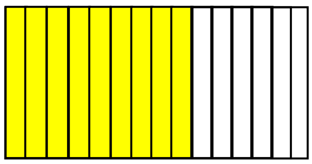
As *frações* que representam à mesma "quantidade" são chamadas de *frações equivalentes*. Assim qualquer *fração* da lista pode ser escolhida como "representante".

Portando, quando for conveniente podemos, por exemplo, substituir $\frac{2}{3}$ por $\frac{6}{9}$; pois $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ são *frações equivalentes.*

3 Comparando Frações

Começamos com a seguinte questão: dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ qual é a maior? Por exemplo, considere as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$, qual é maior? Comparando as duas frações vemos (visualmente) que $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{3}{5}$.

 $= \frac{2}{3} = \frac{10}{15} =$ 

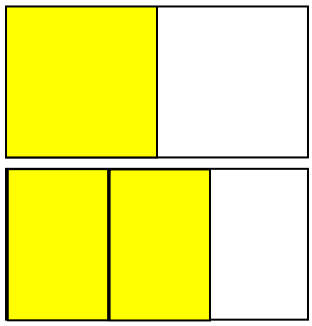
 $= \frac{3}{5} = \frac{9}{15} =$ 

Fazendo uso das frações equivalentes, mas com mesmo denominador, temos que $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ e $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, ou seja, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Com mais alguns exemplos é fácil perceber que para encontrar *frações equivalentes* com um mesmo número de divisões (denominadores) basta repartir cada parte da primeira *fração* pelo número de divisões (parte) da segunda *fração* e vice-versa. Ou seja, com mais alguns exemplos é fácil ver que para encontrarmos frações equivalentes, com mesmo denominador, dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, basta fazer $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ e $\frac{c \cdot b}{d \cdot b}$, assim as frações equivalentes terão mesmo denominador bd.

4 Adição de Frações

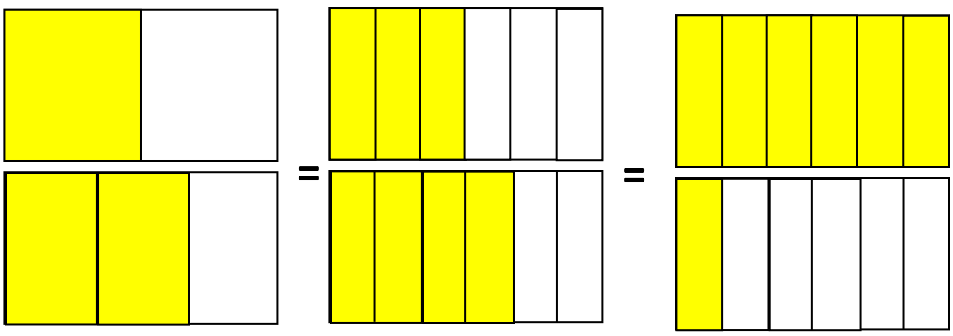
Representar geometricamente adição de fração é fácil, basta agrupar (reunir) as figuras que representam cada *fração,* mas a pergunta é qual é a fração resultante? Por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$, reunindo as figuras que representam respectivamente $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, temos:



Agora qual é a *fração* resultante? Esta *fração* é maior que ou menor que a unidade?

Olhando a figura intuitivamente arriscamos que é maior que a unidade, pois uma é a metade da unidade e a outra é um pouco maior que a metade. Mas quanto é maior que a unidade?

Assim para efetuar a adição de *frações* recorremos às *frações equivalentes* e indicamos cada *fração* com um mesmo número de divisões (denominadores), e contamos as partes que nos interessa, assim:



Ou seja, em representação numérica temos:

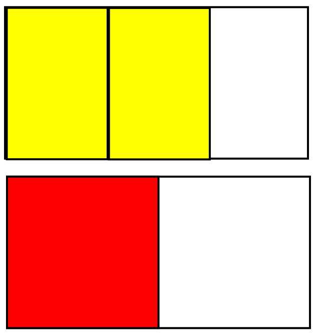
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}=\frac{6}{6}+\frac{1}{6}=1+\frac{1}{6}.$$

Com alguns exemplos é fácil perceber que para encontrar *frações equivalentes* com um mesmo número de divisões (denominadores) basta repartir cada parte da primeira *fração* pelo número de divisões (parte) da segunda *fração* e vice-versa. E estes passos facilitam o entendimento da definição de adição de *frações*:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{ab+cd}{bd}.$$

5 Subtração de Frações

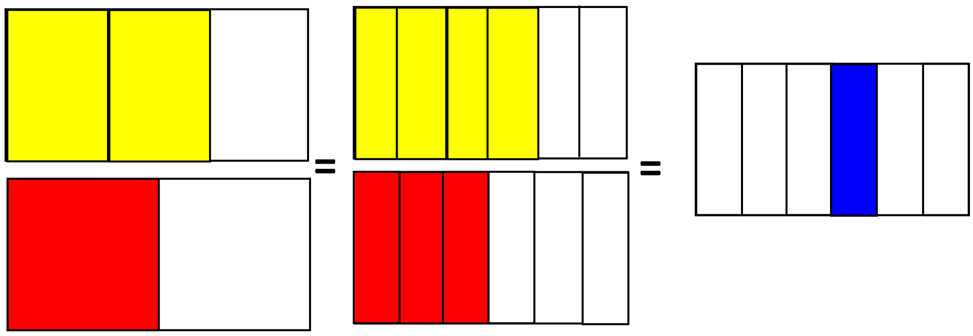
Assim como na adição, representar geometricamente subtração de fração é fácil, basta comparar as figuras que representam cada *fração,* mas a pergunta é qual é a fração resultante? Por exemplo, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$, comparando as figuras que representam respectivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$, temos:



Agora qual é a *fração* resultante? Esta *fração* é maior que ou menor que a unidade?

Olhando a figura intuitivamente percebemos que é menor que a unidade. Mas quanto é menor que a unidade? Que fração (parte) representa da unidade?

Para efetuar a subtração de *frações*, também, recorremos às *frações equivalentes* e indicamos cada *fração* com um mesmo número de divisões (denominadores), e comparamos a diferença entre as duas frações, isto é, determinamos a diferença da maior pela menor. E por fim contamos as partes que nos interessa, assim:



Ou, em representação numérica temos:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}.$$

Mais alguns exemplos facilitam o entendimento da subtração de *frações*:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{ab-cd}{bd}.$$

Segue dos exemplos que na adição e na subtração recorremos a processo comum:

1. Redução das frações ao mesmo denominador, e para isto basta multiplicar os denominadores (frações equivalentes);
2. Adição ou subtração dos numeradores;
3. Redução, se necessário, por frações equivalentes.

Para ilustrar o terceiro passo, façamos um exemplo numérico:

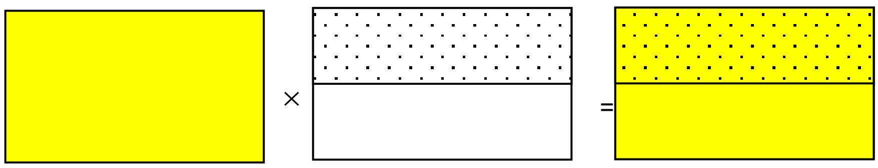
$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{12}{18}+\frac{15}{18}=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}$$

6 Multiplicação de Frações

Primeiramente vejamos o significa multiplicar um número q (número racional) por uma *fração* $\frac{a}{b}$. Veja que $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, isto significa repartir (dividir) 1 em b partes iguais e considerar a vezes. Logo, dada uma *fração* qualquer $\frac{c}{d}$, tenho que tomar cada c parte de $\frac{1}{d}$ e dividir em b partes iguais e depois tomar as a partes de $\frac{1}{bd}$.

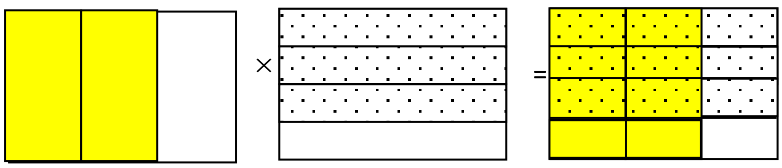
Há uma maneira fácil de visualizar o produto representando uma das *frações* com divisões horizontais e outra com divisões verticais e sobrepondo as duas figuras. Assim, por exemplo:

$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ representamos por



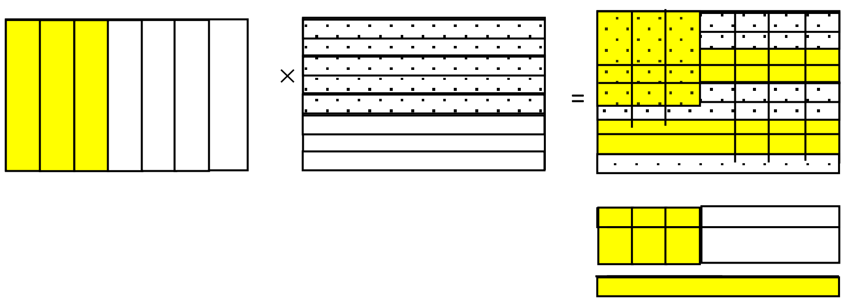
$= \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ representamos por



$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{56}$ representamos por



$= \frac{15}{56}$

Após alguns exemplos é fácil concluir que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

7 Divisão de Frações

Primeiramente observe que:

- dividir uma quantidade em duas (2) partes iguais equivale a multiplicar por meio $\left(\frac{1}{2}\right)$;

- dividir uma quantidade em três (3) partes iguais equivale a multiplicar por um terço $\left(\frac{1}{3}\right)$;

E assim por diante.

Da mesma forma:

- dividir uma quantidade por meio $\left(\frac{1}{2}\right)$ partes iguais equivale a multiplicar por dois (2);

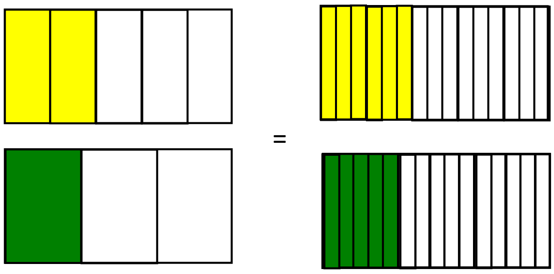
- dividir uma quantidade por um terço $\left(\frac{1}{3}\right)$ partes iguais equivale a multiplicar por três (3);

Logo dividir uma quantidade por uma *fração* é equivalente a multiplicar esta quantidade pela *fração inversa,* mesmo quando esta quantidade é uma fração.

Portanto, $\frac{a}{b} \div \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Mostraremos uma visualização da divisão de frações. Primeiramente façamos a redução a um mesmo denominador. Assim $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{cb}{bd}$. Vejamos alguns exemplos:

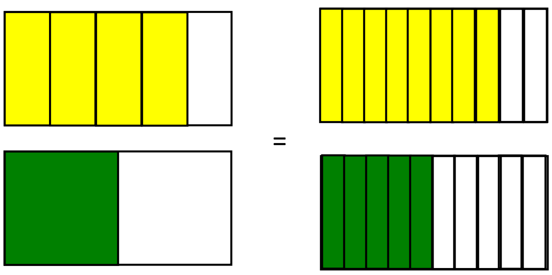
a) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{6}{15} \div \frac{5}{15}$ (agora a visualização geométrica)



Quantas vezes a fração $\frac{5}{15}$ cabe na fração $\frac{6}{15}$?

Cabe uma vez e sobra um pedaço (6=5+1), em relação ao grupo de cinco que estamos comparando. Ou seja, $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{6}{15} \div \frac{5}{15} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$.

b) $\frac{4}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{8}{10} \div \frac{5}{10}$ (a visualização)



Percebemos que $\frac{5}{10}$ cabe uma vez e sobram 3 (três) pedaços (8=5+3) em $\frac{8}{10}$, sobram três pedaços em relação ao grupo de cinco que estamos comparando. Ou seja, $\frac{4}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{8}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$.

Com mais alguns exemplos é possível perceber que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{cb}{bd} = \frac{ad \div cb}{bd \div bd} = \frac{ad \div cb}{1} = \frac{ad}{cb}$. Assim chegamos ao conhecido algoritmo da divisão, isto é $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{cb} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

8 Considerações Finais

Como dissemos o objetivo destas notas é apenas mostrar uma maneira geométrica que justifica o procedimento prático adotado nos textos didáticos relativo ao ensino de frações.

Outro fato que vale destacar é que não usamos o *mmc* (menor múltiplo comum) para encontrar frações com mesmo denominador.

9 Referências

COSTA, E. A. 2006. Visualização Geométrica do Produto de Frações. Revista do Professor de Matemática, n.º 60, SBM. 2º Quadrimestre.

SILVA, V. V. 2003. Números: Construção e Propriedades. Editora da UFG, Goiânia.

Resumo

É comum encontrarmos em textos didáticos para o ensino fundamental (matemática) visualizações geométricas para frações, adição e subtração de frações, em alguns textos encontramos visualização para a multiplicação, mas não para divisão de frações. Neste artigo mostraremos uma maneira geométrica que justifica o procedimento prático (na divisão de fração) adotado nos textos didáticos.

Palavras-chave: Número racional. Fração. Representação geométrica.

Abstract:

It is common to find in textbooks for elementary education (mathematics) geometric views to fractions, addition and subtraction of fractions in some texts found view to multiplication, but not for division of fractions. In this show a geometric way justifies the practical procedure (the fraction division) adopted in textbooks.

Keywords: Rational number. Fraction. Geometric representation.