

ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ИНФОРМАТИКА INFORMATICS

УДК 539.3
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-533-538>

Поступило в редакцию 13.07.2021
Received 13.07.2021

О. Л. Швед, В. В. Ткаченко

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь*

КРИТЕРИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАКРОРАЗРУШЕНИЯ И ОБРАЗОВАНИЯ ИЗЛОМА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛА

(Представлено членом-корреспондентом М. Я. Ковалевым)

Аннотация. При обобщении на пластичность геометрически нелинейного закона упругости Мурнагана был введен формально математический критерий деформационного макроразрушения (возникновения макротрещины), связанный с ростом упругой и пластической анизотропии, в качестве причины разрушения. Использование двойной потенциальности определяющих уравнений в напряжениях и их скоростях позволило получить достоверную информацию о строении девиаторного сечения поверхности текучести, существование которой является классической гипотезой в механике деформируемого твердого тела. Вектор нормали к поверхности девиаторного сечения выбирается из двух взаимно ортогональных собственных векторов построенного оператора. Существуют два семейства регулярных вогнутых поверхностей, и поверхность сечения образуется соединением в сингулярных точках частей двух представителей семейств. Для выбора векторов нормалей используется полученное соотношение для них при изотропии. В связи с рассмотренной задачей о двойном простом сдвиге установлено появление кратных собственных значений для обоих векторов нормалей. Для однозначного определения вектора нормали в регулярной точке, необходимо исключить наличие кратных собственных значений у обоих векторов нормалей одновременно. В сингулярной точке по-прежнему недопустимо появление кратного собственного значения у одного из векторов нормалей. Эти два условия являются необходимыми и достаточными для справедливости определяющих уравнений обобщенной модели Мурнагана. В противном случае возникает макротрещина. Теоретическое построение поддерживается разработанными комплексами программ.

Ключевые слова: твердое тело, изотропия, деформация, анизотропия, макротрещина, кривая пластичности, критическая точка, критерий разрушения

Для цитирования. Швед, О. Л. Критерий возникновения макроразрушения и образования излома при деформации металла / О. Л. Швед, В. В. Ткаченко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 5. – С. 533–538. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-533-538>

Oleg L. Shved, Vadim V. Tkachenko

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

CRITERION FOR OCCURRENCE OF THE MACRO DESTRUCTION AND FORMATION OF BREAKING DURING METAL DEFORMATION

(Communicated by Corresponding Member Mikhail Ya. Kovalev)

Abstract. When generalizing the geometrically nonlinear law of Murnaghan elasticity to plasticity, a formally mathematical criterion was introduced for deformational macrofracture (macrocrack appearance) associated with an increase in elastic and plastic anisotropy as a failure cause. The use of the double potentiality of the governing equations in stresses and their velocities made it possible to obtain the reliable information on the structure of the deviator section of the yield surface, the existence of which is a classical hypothesis in solid mechanics. The normal vector to the surface of the deviator section is selected from two mutually orthogonal eigenvectors of the constructed operator. There are two families of regular concave

surfaces, and a section surface is formed by joining the parts of two representatives of the families at singular points. To select normal vectors, the obtained ratio for them is used for isotropy. In connection with the considered problem of a double simple shift, it is established that multiple eigenvalues appear for the both normal vectors. To unambiguously determine the normal vector at a regular point, it is necessary to exclude the presence of multiple eigenvalues for the both normal vectors at the same time. At a singular point, the appearance of a multiple eigenvalue of one of the normal vectors is still unacceptable. These two conditions are necessary and sufficient to validate the governing equations of the generalized Murnaghan model. Otherwise, a macrocrack occurs. The theoretical construction is supported by the developed software complexes.

Keywords: solid, isotropy, deformation, anisotropy, macrocrack, plasticity curve, critical point, fracture criterion

For citation. Shved O. L., Tkachenko V. V. Criterion for the occurrence of the macro destruction and formation of breaking during metal deformation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 5, pp. 533–538 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-533-538>

Введение. Закономерности строения изломов следует рассматривать совместно с закономерностями и особенностями процесса разрушения [1]. Состояние исследований повреждаемости и разрушения за последние годы представлены в [2]. В этих работах проверяются разработанные математические модели повреждаемости и разрушения или уточняются границы их применимости. В [3] рассматриваются условия пластичности, критерии прочности и механизмы разрушения кристаллических тел. Однако указанные условия пластичности не имеют теоретического обоснования [4]. Обоснованная информация о поверхности текучести получена в [5] при обобщении геометрически нелинейного материала Мурнагана [6; 7] и предложен специфический критерий разрушения, вызванного возникновением и развитием упругой деформационной анизотропии. По мнению П. А. Жилина [4] «описаны процессы роста трещин, но не их возникновения». Критерий проверен в [8–11] на двумерных задачах деформируемого твердого тела. Целью исследования является уточнение и формулировка критерия разрушения в трехмерном случае. Для этого используем модельную задачу о двойном простом сдвиге, которая требует использования всего пятимерного пространства девиаторов напряжений, при векторной интерпретации симметричного тензора второго ранга. В этом смысле такой тензор будем называть вектором. Применяем обозначения из [6].

Функция разрушения. Обозначим $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр, \mathbf{E} – единичный тензор, векторный базис пространства указанных девиаторов

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3), \mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1), \mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1), \\ \mathbf{W}_4 &= (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1), \mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

По [5] поверхность текучести в пространстве напряжений образуется своими пятимерными девиаторными сечениями. Поверхность сечения получается соединением частей поверхностей представителей двух взаимно ортогональных семейств вогнутых регулярных поверхностей в сингулярных точках. Она определяется для элемента деформируемого твердого тела, и ее непрерывное изменение зависит от истории нагружения элемента.

Запишем определяющие уравнения модели материала [5] в конечном виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{23}(\delta_j) + c, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \sum_{j=1}^{77} \delta_j \mathbf{T}_j,$$

где ε – удельная потенциальная энергия упругой деформации (потенциал напряжений); $\varepsilon_0, \varepsilon_{23}(\delta_j)$ – изотропная и анизотропная части ε , скаляр c обеспечивает условие $\varepsilon \geq 0$. Тензор напряжений Коши \mathbf{T} также образуется такими же слагаемыми, δ_j – параметры анизотропии [6; 7]. В дифференциальном виде определяющие уравнения состоят из трех уравнений для скалярных и тензорных переменных $\varepsilon, \mathbf{T}, \delta_j$ и приведены в [5].

Предполагалось существование второго потенциала – скорости напряжений. Это позволило найти \mathbf{N} – единичный вектор нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести.

При изотропии векторов \mathbf{N} оказалось два, нормальный \mathbf{N}_1^0 и касательный \mathbf{N}_2^0 . В зависимости от участка кривой пластичности они меняются местами:

$$\mathbf{N}_i^0 = \mathbf{N}_{i0} \|\mathbf{N}_{i0}\|^{-1}, \quad \mathbf{N}_{i0} = (\text{dev } \mathbf{T})^2 - S_i \text{ dev } \mathbf{T} + 3^{-1} 2 J_2 \mathbf{E} \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где $J_2(J_3)$ – второй (третий) главный инвариант $\text{dev } \mathbf{T}$, соотношения для S_i имеются в [5]. Согласно (2) строились шестизвенные кривые пластичности, для нелинейных законов упругого материала Мурнагана, Синьорини [6], они приблизительно совпадают и близки к условию пластичности А. Ю. Ишлинского [12]. Невыпуклость кривой предсказана А. А. Ильюшиным [13]. Возможные случаи, когда вектор $\mathbf{N}_{20} = 0$ при $|L|=1$, параметр Лоде $L = -\sqrt[3]{2^{-1} J_3 (\sqrt{-3^{-1} J_2})^{-1}}$, исключены с использованием вектора \mathbf{N}_{10} всегда не равного нулю.

Для анизотропного материала отыскиваются собственные значения $\lambda = \lambda_k$ ($k = \overline{1, 5}$) характеристического уравнения $\det(Q - \lambda E) = 0$, где Q – матрица критериального оператора \mathbf{Q} в базисе (1), E – единичная матрица [8]. Находятся собственные векторы, из них выбираются \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 , близкие к \mathbf{N}_1^0 и \mathbf{N}_2^0 . Назовем для регулярной точки вектор \mathbf{N}_1 – нормальным, а вектор \mathbf{N}_2 – касательным согласно их роли при переходе в главные оси материала. Пусть им отвечают значения $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. Выполняется $\lambda_1 \neq \lambda_2$, имеется оценка через постоянные Ламе. Остальные векторы физического смысла не имеют.

Вводится ранее использованная ([10; 11] и др. работы) функция разрушения

$$\Phi = 8 \prod_{k=1}^3 (\lambda_1 - \lambda_{2+k})(\lambda_2 - \lambda_{2+k})((\lambda_2 - \lambda_{2+k})^2 + (\lambda_2 - \lambda_{2+k})^2)^{-1} \quad (3)$$

для поиска критической точки – нуля функции в сингулярной точке кривой пластичности.

На рис. 1 сингулярные точки кривой пластичности отмечены вертикальными чертами на оси абсцисс графика функции разрушения. Цифрами 1, 2, 3 обозначены проекции главных базисных осей ($\mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i$). Указаны расчетная точка и расположенная вблизи начала расчета точка процесса в рассматриваемой ниже модельной задаче при начале течения.

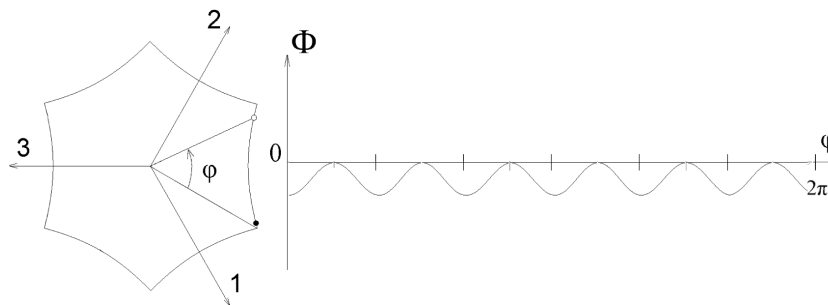


Рис. 1. Изотропный материал. Кривая пластичности и функция разрушения

Fig. 1. Isotropic material. Plasticity curve and fracture function

Двойной простой сдвиг. Пространственная кривая пластичности. Пусть вектор места частицы в отсчетной конфигурации $\mathbf{r} = q^i \mathbf{c}_i$, q^i – ее декартовы координаты; \mathbf{R} – вектор места частицы в актуальной конфигурации. Преобразование типа простого сдвига для единичного куба (рис. 2) запишем как

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + S q^3 \mathbf{c}_2 + S q^1 \mathbf{c}_3 \quad (0 \leq q^i \leq 1, \quad S \geq 0). \quad (4)$$

Если убрать одно из двух слагаемых справа в (4), то получаем известный пример [6].

Материал для упрощения предполагался идеально упругопластическим. Использованы данные постоянных Ламе по рекристаллизованному вольфраму [6]. Напряжение текучести при растяжении принято 450 МПа. Численное моделирование проводилось для инвариантных тензоров с заменой индифферентных тензоров [8; 9], и тензор упругого поворота находился с использованием полученного аналитического решения. Расчеты по упругости и упругопластичности проводились разными комплексами программ. При начале течения для удобства применялась замена неподвижного базиса $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ (1) переходом в фиксированный базис собственных векторов точки процесса. Начало текучести соответствует величине параметра $S = S_T = 0,00238\text{м}$,

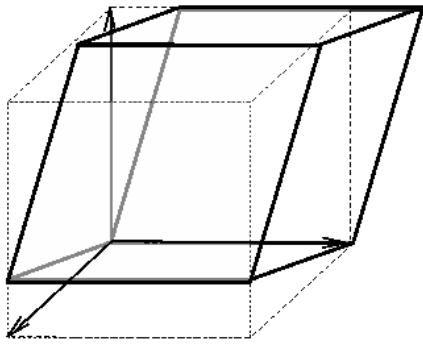


Рис. 2. Двойной простой сдвиг.
Объем тела постоянный

Fig. 2. Double simple shift.
Body volume is constant

а появления макротрещины величине $S = S_R = 0,00256m$. Не-нулевых параметров анизотропии δ_j получилось 23, максимальное значение одного параметра 78,6 МПа, еще 3 такого же порядка. Величина обобщенного эффекта Баушингера составила 0,92, при изотропии она равна единице.

Для построения кривой пластичности по известной точке процесса находятся противоположная ей точка по величине эффекта Баушингера, и полученные из них 4 вспомогательные точки обходом по поверхности девиаторного сечения ортогонально вектору нормали в подпространствах $\{W_1, W_2, W_4\}$, $\{W_1, W_2, W_5\}$. По найденным точкам строятся 6 сингулярных точек, которые обходятся расчетной точкой против часовой стрелки из правой нижней сингулярной точки. Обход по участкам с малым шагом расчетной точки по кривой пластичности происходит в основном пятимерном пространстве с бази-

сом (1). Постоянно, на каждом шаге используется прием перехода в главные оси. Расчетная точка ортогональным преобразованием переводится в главные оси, определяется касательный вектор к кривой, который обратным преобразованием возвращается в основное пространство. Там выполняется шаг и следующая расчетная переводится новым ортогональным преобразованием в главные оси. Соблюдается непрерывность отображений за счет учета для правой тройки векторов всех способов выбора трехмерного базиса: 24 в случае простых собственных значений и 18 при наличии кратного собственного значения.

Для обобщенной кривой пластичности на рис. 3 изображены образы точек пространственной кривой пластичности на совмещенные плоскости $\{W_1, W_2\}$ их главных осей e_1, e_2, e_3 (в (1) $e_i = e_i$). Для функции разрушения на оси абсцисс откладываются величины углов между радиус-векторами точек пространственной кривой пластичности. Отмечена точка процесса, как и на рис. 1. На участках неоднозначного определения функции Φ , в случаях наличия кратных λ_1, λ_2 она представлена прямолинейными отрезками.

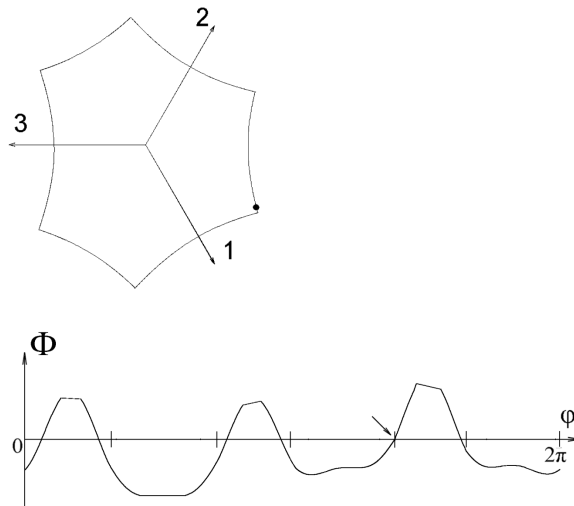


Рис. 3. Анизотропный материал. Обобщенная кривая пластичности. Функция разрушения

Fig. 3. Anisotropic material. Generalized plasticity curve. Destruction function

Критерий разрушения. Неожиданно обнаружилось наличие немалого числа кратных собственных значений λ_1 у вектора нормали, а также λ_2 у касательного вектора на регулярных участках. Разработана методика применения касательного вектора для выбора вектора нормали и соответствующие программные средства. Это необходимо, так как девиатор N используется при задании определяющих уравнений в скоростях. Видимо, в трехмерной задаче проявились недо-

статки полиномиальных зависимостей в законе Мурнагана [7]. Поэтому следует поправить формулировку критерия определения критической точки.

Макроразрушение материала возникает тогда и только тогда, когда в сингулярной точке построенной кривой пластичности собственное значение λ_1 или λ_2 кратное, либо в регулярной точке оба значения λ_1 и λ_2 кратные.

Во втором, новом случае критерия разрушения однозначно найти девиатор \mathbf{N} с использованием соотношения (2) невозможно. В рассмотренном примере получается, что значение λ_2 кратное в сингулярной – критической точке, соединения четвертого и пятого звена кривой, она указана стрелкой на рис. 3.

Заключение. Внесены необходимые поправки в определяющие уравнения модели и сформулирован критерий макроразрушения – поиска критической точки кривой пластичности (2), (3). Параметр повреждаемости материала не требуется. Разработаны комплексы программ для численного моделирования. Полученный результат может быть использован при анализе процесса образования излома деформируемого твердого тела. Построение модельных решений и осуществление экспериментальных исследований при режимах нагружения, предсказанных этой моделью теоретически, позволит получить новые знания об эволюции материальной структуры тел при сложном нагружении.

Список использованных источников

1. Фридман, Я. Б. Строение и анализ изломов / Я. Б. Фридман, Г. А. Гордеева, А. М. Зайцев. – М., 1960. – 128 с.
2. Волегов, П. С. Поврежденность и разрушение: обзор экспериментальных работ / П. С. Волегов, Д. С. Грибов, П. В. Трусов // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 11–24.
3. Ботвина, Л. Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности / Л. Р. Ботвина. – М., 2008. – 334 с.
4. Жилин, П. А. Математическая теория неупругих сред / П. А. Жилин // Успехи механики. – 2003. – № 4. – С. 3–36.
5. Швед, О. Л. Модель упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 1. – С. 158–172. <https://doi.org/10.1134/s0032823519010144>
6. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М., 1980. – 512 с.
7. Murnaghan, F. D. Finite deformation of an elastic solid / F. D. Murnaghan. – N.Y., 1951. – 140 p.
8. Швед, О. Л. Вычисление критериального девиатора и вектора нормали к девиаторному сечению поверхности текучести для упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 48–58.
9. Швед, О. Л. Вычисление изменения состояния упругопластического материала Мурнагана в условиях течения при известных скоростях перемещений / О. Л. Швед // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 59–70.
10. Швед, О. Л. Численное моделирование чистого сдвига для идеально упругопластического материала (материала Мурнагана) / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2019. – Т. 64, № 2. – С. 182–189. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-2-182-189>
11. Швед, О. Л. Численное моделирование опытов Бриджмена для упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед, В. В. Ткаченко // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2021. – № 1. – С. 125–135.
12. Пикуль, В. В. Прикладная механика деформируемого твердого тела / В. В. Пикуль. – М., 1989. – 221 с.
13. Ильюшин, А. А. О постулате пластичности / А. А. Ильюшин // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 3. – С. 503–507.

References

1. Fridman Ya. B., Gordeeva G. A., Zaitsev A. M. *Structure and analysis of fractures*. Moscow, 1960. 128 p. (in Russian).
2. Volegov P. S., Gribov D. S., Trusov P. V. Damage and Fracture: Review of Experimental Studies. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2015, vol. 18, no. 3, pp. 11–24 (in Russian).
3. Botvina L. R. *Destruction: kinetics, mechanisms, general laws*. Moscow, 2008. 334 p. (in Russian).
4. Zhilin P. A. Mathematical theory of inelastic media. *Uspekhi mekhaniki* [Advances in mechanics], 2003, no. 4, pp. 3–36 (in Russian).
5. Shved O. L. Murnaghan's elastoplastic material model. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 819–831. <https://doi.org/10.3103/s0025654419050169>
6. Lurie A. I. *Nonlinear theory elasticity*. Moscow, 1980. 512 p. (in Russian).
7. Murnaghan F. D. *Finite deformation of an elastic solid*. New York, 1951. 140 p.
8. Shved O. L. Calculation of the criteria deviator and the vector of normal to the deviator section of the yield surface for the Murnaghan elastic-plastic material. *Informatika = Informatics*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 48–58 (in Russian).
9. Shved O. L. Calculation of change in state of Murnaghans elastic-plastic material under conditions of flow with known movement speeds. *Informatika* [Informatics], 2018, vol. 15, no. 4, pp. 59-70 (in Russian).

10. Shved O. L. Numerical modeling of a clean shift for perfectly elastic-plastic material (Murnaghan's material). *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2019, vol. 64, no. 2, pp. 182–189 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-2-182-189>

11. Shved O. L., Tkachenko V. V. Numerical modeling of the Bridgman experience for elastic-plastic material of Murnaghan. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika = Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 125–135 (in Russian).

12. Pikul V. V. *Applied Solid Mechanics*. Moscow, 1989. 221 p. (in Russian).

13. Ilyushin A. A. On the postulate of plasticity. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1961, vol. 25, no. 3, pp. 503–507 (in Russian).

Информация об авторах

Швед Олег Лаврентьевич – канд. техн. наук, доцент, вед. науч. сотрудник. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: swed@newman.bas-net.by.

Ткаченко Вадим Викторович – канд. техн. наук, доцент, заведующий лабораторией. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tkach@newman.bas-net.by.

Information about the authors

Shved Oleg L. – Ph. D. (Engineering), Associate professor, Leading researcher. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: swed@newman.bas-net.by.

Tkachenko Vadim V. – Ph. D. (Engineering), Associate professor, Head of the Laboratory. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tkach@newman.bas-net.by.