Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: http://oatao.univ-toulouse.fr/20024

To cite this version:

Rotella, Frédéric and Zambettakis, Irène *Du calcul opérationnel à l'opérateur de transfert.* (2006) e-STA. ISSN 1954-3522

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Du calcul opérationnel à l'opérateur de transfert

Résumé— **Le calcul opérationnel est un outil fondamental en Automatique. S'intéresser à son développement historique, qui est loin d'être linéaire, a peut-être des répercussions sur notre façon d'enseigner cette discipline. Quoi qu'il en soit, ces quelques notes permettent de situer rapidement les apports de beaucoup d'auteurs que nous connaissons et de préciser le rôle central joué par Oliver Heaviside.**

Mots-clés— **calcul opérationnel, Heaviside, histoire, opérateur de dérivation, opérateur d'intégration, opérateur de transfert.**

I. Introduction

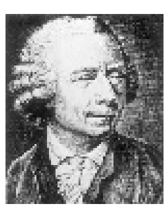
Le calcul opérationnel, appelé aussi *calcul symbolique,* représente un "*moyen de résoudre des équations différentielles*" (J. Hadlik, 1969) ou aux dérivées partielles et permet ainsi, en Automatique, "*l'étude des régimes transitoires*" (R. Pallu de la Barrière, *Encyclopædia Universalis*). Le premier objectif de traitement algébrique des équations différentielles linéaires a été celui qui a motivé toute l'importance de son développement et E.T. Whittaker pouvait noter en 1928 :

"We should now place the operational calculus with Poincaré's discovery of automorphic functions and Ricci's discovery of the tensor calculus as *the three most important mathematical advances* of the last quarter of the nineteenth century. Applications, extensions and justifications of it constitute a considerable part of the mathematical activity of today."

Leibniz

L'origine du calcul opérationnel peut être située lorsque G. von Leibniz introduit en 1695 le codage de la dérivation ou de l'intégration sous la forme :

$$d^n f \triangleq \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f \text{ et } d^{-n} f \triangleq \int \cdots \int f dx.$$



Euler

Vers 1730, L. Euler établit les premières formules opérationnelles comme par exemple $e^{ap} f(t) = f(t+a)$. Remarquons ici qu'il a obtenu cette formulation par des considérations simples sur le développement en série de Taylor de $f(t+a)$.

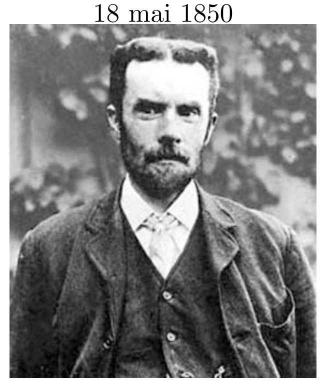
F.J. Servois note en 1814 la parenté algébrique entre opérateurs algébriques et différentiels ce qui implique que les codages différentiels de Leibniz peuvent être utilisés comme des grandeurs algébriques. Cette remarque fondamentale est peut être celle qui justifie l'aspect opérationnel de ce calcul.

À partir de ces prémices, nous allons voir que O. Heaviside a su en utiliser toute l'efficacité pour traiter des problèmes pratiques. Cela lui a permis de proposer des méthodes spécifiques de traitement mais lui a valu également l'opprobe de toute une communauté de mathématiciens. Cependant certaines de ses idées avaient été proposées par d'autres, précurseurs dans cette voie, et à partir de 1920 la communauté scientifique a vu se développer différentes tentatives pour essayer de justifier rigoureusement cette technique. Nous verrons que parmi ces différentes voies certaines sont plus adaptées à l'Automatique et permettent de déboucher sur la notion de ce que l'on pourrait appeler l'opérateur de transfert d'un système.

II. La méthode de Heaviside

A. Quelques mots sur O. Heaviside

18 mai 1850



3 février 1925

Neveu de Charles Wheastone (celui du pont...), il a été employé à la Great Northern Telegraph Company. Ses travaux sont essentiellement regroupés dans les deux ouvrages :

- *Electrical Papers*, 1873 à 1891 ;
- *Electromagnetic Theory*, 3 tomes, 1891 à 1893 (*ET1*), 1894 à 1898 (*ET2*), 1900 à 1912 (*ET3*).

Ses recherches en électricité et en électromagnétisme l'ont conduit à proposer des avancées :

- sur les équations de Maxwell, que l'on devrait, dans leur forme actuelle, appeler les équations de Maxwell-Heaviside (*ET1*) ;
- sur les couches conductrices de l'atmosphère, dont il a prévue l'existence en 1902 et qui ne seront découvertes qu'en 1923 (*ET3*) ;
- sur l'analyse vectorielle (*ET1*) ;
- sur la dérivation fractionnaire d'ordre 1/2 (processus de diffusion) (*ET2*) ;
- sur les séries divergentes (*ET2*) ;
- sur l'utilisation du calcul opérationnel (qu'il appelle *my operational method*) (*ET2*).

Concernant le dernier point, qui nous intéresse plus particulièrement, ses idées sont essentiellement réunies dans *ET2.* De façon générale, la lecture de ses écrits révèle un esprit brillant et un style très imagé. Malgré (ou peut être à cause de) ses déboires avec les mathématiciens (*the purists*), car son manque de rigueur est (et sera) attaqué, ses positions lui semblent justifiées (parfois par pragmatisme) :

Of course, I do not write for rigourists but for a wider circle
of readers who have fewer prejudices. (*ET2*)

Ses références sont peu nombreuses, exceptions faites de ceux qu'ils considère comme ses maîtres :

– Maxwell : *I saw it was great, greater and greatest* ;
– Fourier : *lucid, luminous, no one admires Fourier more than I do* ;
– Kelvin-Thomson : *eminent scientist, Sir W. Thomson's theory of the submarine cable is a splendid thing* ;

et il se réfère parfois à Boole. Mais gardons à l'esprit ce qui l'a toujours guidé :

There is, however, practicality in theory
as well as in practice. (*ET1*)

Mentionnons enfin que Maxwell a remarqué ses travaux, que Thomson le décrit comme une *authority*, et qu'il a été Fellow of the Royal Society.

Quelques ouvrages biographiques sur Heaviside : G. Lee, *Oliver Heaviside*, 1947 ; H.J. Josephs, *Oliver Heaviside ; a biography*, 1963 ; G.F.C. Searle, *Oliver Heaviside, the man*, 1987 ; P.J. Nahin, *Oliver Heaviside : sage in solitude*, 1988 ; I. Yavetz, *From obscurity to enigma : the work of Oliver Heaviside*, 1995 ; P. J. Nahin, *Oliver Heaviside : the life work and times of an electrical genius of the victorian age*, 2002[1].

B. La méthode opérationnelle

Retraçons les grandes étapes de l'évolution de sa pensée sur le calcul opérationnel.

1. Codage de l'équation différentielle (1884) par l'opérateur :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \triangleq D \text{ (avant 1886) } \triangleq p \text{ (après 1886)},$$

pour un réseau électrique (ou pour des systèmes qui s'y ramènent par analogie) :

– mise en évidence de l'opérateur (*resistance operator*) $Z(p)$;
– définition de la solution opérationnelle : $C = \dfrac{E}{Z(p)}$ où E et C sont les tensions d'entrée et de sortie.

2. *Algebrization* : résolution de la solution opérationnelle lorsque E est spécifiée.

Lorsque $E = H(t)$, fonction de Heaviside, trois principes ont été successivement développés :

– le théorème de décomposition ou *expansion theorem* (1886) :

$$C = \frac{E}{Z(0)} + E\sum_k \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k Z'(\lambda_k)}, \text{ où } Z(\lambda_k) = 0;$$

– le développement en puissances de p (1888) :

$$C = \sum \alpha_n p^n H(t),$$

et comme il suppose $p^n H(t) = 0$, il obtient $C = \alpha_0$;

– le développement en puissances de p^{-1} (1892) :

$$C = \sum a_n p^{-n} H(t),$$

et comme $p^{-n}H(t) = \dfrac{t^n}{n!}$:

$$C = \sum a_n \frac{t^n}{n!}.$$

[1]Il s'agit en fait d'une réédition de celui de 1988 avec une nouvelle préface.

Lorsque $E = \sin(nt) = \Im(\exp(int))$, sinusoïde (1895), avec le théorème de translation d'Euler :

$$\varphi(p)e^{at}f(t) = \varphi(p+a)f(t),$$

il résout la solution opérationnelle en remplaçant p par ni puis i par $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(nt)}$.

À titre d'exemple, pour $Z(p) = R + Lp$ et $E = H(t)$:

$$Z(0) = R,\ k = 1,\ \lambda_k = -\frac{R}{L},\ Z'(\lambda_k) = L.$$

$$\Longrightarrow C = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Développements en série :

– en p^{-1} :

$$\begin{aligned} C &= \frac{E}{Lp}\frac{1}{1+\frac{R}{Lp}} \\ &= \frac{E}{Lp}\left(1 - \frac{R}{Lp} + \frac{R^2}{L^2p^2} - \cdots\right) \\ &= \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right). \end{aligned}$$

– en p :

$$\begin{aligned} C &= \frac{E}{R}\frac{1}{1+\frac{Lp}{R}} \\ &= \frac{E}{R}\left(1 - \frac{Lp}{R} + \frac{L^2p^2}{R^2} - \cdots\right) = \frac{E}{R}. \end{aligned}$$

Mais pour $E = \sin(nt)$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{R+Lp}\sin(nt) = \frac{R - Lni}{R^2 + n^2L^2}\sin(nt), \\ &= \frac{R}{R^2+n^2L^2}\sin(nt) - \frac{Ln}{R^2+n^2L^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(nt)}\sin(nt). \end{aligned}$$

Nous verrons qu'il s'inspire ici d'une procédure de G. Boole.

Remarquons qu'au début de ses réflexions, il pose $pH(t) = 0$, mais à partir de 1895, il considère $pH(t) = \delta$, ce qui le conduit à la solution impulsionnelle (peut-être sous l'influence de G. Kirchoff ?). Il écrit même :

Kirchoff

$$f(t) = \int \delta(y-t)f(y)\mathrm{d}y,$$

introduisant la notion de convolution (apparemment sans connaître le théorème fondamental d'approximation de K. von Weierstrass de 1885), mais il ne poursuivra pas dans cette direction. D'autre part, le traitement des équations aux dérivées partielles relève pour Heaviside, de la même procédure, ce qui le conduit à être un des premiers à proposer des *resistance operator* ou apparaissent des dérivées fractionnaires. Par exemple pour modéliser des cables de transmission télégraphiques, en notant :

– x l'abcisse le long de la ligne, t le temps, V la tension et C le courant ;
– R la résistance, L l'inductance, K la conductance et S la capacité par unité de longueur,

on obtient, pour un élément de longueur dx :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -L\frac{\partial C}{\partial t} - RC \Longrightarrow \frac{dV}{dx} = -(Lp+R)C,\\ \frac{\partial C}{\partial x} &= -S\frac{\partial V}{\partial t} - KV \Longrightarrow \frac{dC}{dx} = -(Sp+K)V.\end{aligned}$$

Cela le conduit à la forme opérationnelle de l'équation des télégraphistes :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \Delta(p)V, \text{ où } \Delta(p) = (Lp+R)(Sp+K),$$

dont la solution opérationnelle s'écrit :

$$V = \exp(x\sqrt{\Delta(p)})A(t) + \exp(-x\sqrt{\Delta(p)})B(t),$$

où $A(t)$ et $B(t)$ dépendent des conditions frontières.

En considérant quelques cas particuliers, il obtient :

– une solution opérationnelle fractionnaire entre les tensions d'entrée, V, et de sortie, E, du cable (1893) :

$$\left(1 + bp^{-\frac{1}{2}}\right) E(t) = V(t);$$

– le traitement opérationnel de l'équation de la chaleur (1895) :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RS\frac{\partial V}{\partial t} \Longrightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = RSpV,$$

pour $V(0,t) = E$ et $V(l,t) = 0$, sous la forme :

$$V = \frac{\sinh\left[(l-x)\sqrt{RSp}\right]}{\sinh\left[l\sqrt{RSp}\right]}E.$$

La résolution de ces opérateurs pour $E = H(t)$ se fait toujours à l'aide des trois principes précédents mais cette fois en considérant, pour le théorème de décomposition, une infinité de racines. Cela le conduit à manipuler les séries divergentes et à se poser la question du sens de $p^{\frac{1}{2}}H(t)$. Par l'utilisation des séries de Fourier ou par d'autres méthodes, il obtient :

$$p^{\frac{1}{2}}H(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

et même il associe une fonction à $p^{n+\frac{1}{2}}H(t)$ (apparemment sans connaître le résultat de S.F. Lacroix de 1819).

En ce qui concerne le calcul opérationnel O. Heaviside a mis au point sa propre technique, qu'il appelle *my operational method.* Cependant d'autres, et non des moindres, avaient pensé à certains des éléments la constituant. Le grand apport de Heaviside a été de réunir et d'unifier différentes techniques et surtout, de notre point de vue, d'avoir proposé la notion d'opérateur relatif à un système.

III. Les précurseurs

Améliorant des idées de B. Brisson, A.L. Cauchy en 1827 code une équation différentielle $F(D)y(x) = \varphi(x)$ et obtient un développement de la solution pour :


Cauchy

– des conditions initiales non nulles ;
– un $\varphi(x)$ arbitraire ;
– des racines multiples pour $F(D) = 0$.

Ces hypothèses indiquent que le calcul de Cauchy est plus général que celui de Heaviside.

Un peu plus tard en Angleterre, D. Gregory en 1846, et G. Boole en 1859, parmi d'autres, retrouvent les développements de Cauchy et proposent les développements en série de $y(x) = \{F(D)\}^{-1}\varphi(x) + \{F(D)\}^{-1}.0$, où les deux termes représentent respectivement :

– une solution particulière de l'équation différentielle :

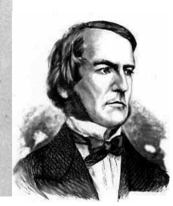
$$\begin{aligned}\{F(D)\}^{-1}\varphi(x) &= \left\{\sum f_i D^i\right\}\varphi(x)\\ &= \sum f_i\left\{D^i\varphi(x)\right\};\end{aligned}$$

– la solution générale de $F(D)y(x) = 0$:

$$\begin{aligned}\{F(D)\}^{-1}.0 &= D^{-n}\left\{G(D^{-1})\right\}^{-1}.0\\ &= \left\{\sum g_i D^{-i}\right\}\left\{D^{-n}.0\right\},\end{aligned}$$

bien que le traitement du 0 ne soit pas très explicite.


Gregory


Boole

Nous ne le détaillerons pas mais tous les trois proposent également des procédures de traitement par calcul opérationnel des équations aux dérivées partielles.

Finalement, qu'a apporté Heaviside au calcul opérationnel ? Les points à souligner sont :

– le traitement de nombreuses applications, côté applicatif qui manquait au calcul opérationnel ;
– une standardisation des procédures ;
– le théorème de décomposition appliqué aux fonctions transcendantes ;

et surtout :

– l'introduction de $H(t)$;
– la notion d'opérateur pour *modéliser* un système : "*[O.H.] engaged in this work to describe physical process*" ;
– la manipulation d'opérateurs :

The discovery of practical methods of manipulating operators is a matter importance to the future of physical analysis (*ET2*).

Ces derniers éléments sont pour nous révélateurs d'une pensée qui se détache de l'objectif initial du calcul opérationnel pour se tourner vers une préoccupation plus proche de l'Automatique.

IV. Les justifications

Pendant 16 ans, calme plat sur le calcul opérationnel, puis, brusquement, est apparu un besoin de justification théorique de façon à asseoir et conforter les résultats qu'il permettait d'obtenir. On peut grossièrement répartir ces justifications en deux ensembles, suivant l'outil utilisé :

– les transformations intégrales et la théorie des fonctions utilisées de K.W. Wagner (1915) à H.B.J. Florin (1934) ;
– les constructions algébriques et les espaces fonctionnels utilisés de P. Lévy (1926) à J. Mikusiński (1950).

A. Les transformations intégrales


Bromwich

L'utilisation de ce type de méthodes a commencé avec les travaux de T. Bromwich (1916) et K.W. Wagner(1915) sur le traitement du système différentiel (également envisagé par Heaviside dans *ET2*) :

$$\left[e_{ij} = a_{ij}\frac{d^2}{dt^2} + b_{ij}\frac{d}{dt} + c_{ij}\right][x_j]_{j=1,\ldots,n} = \left[p_i e^{\mu_i t}\right]_{i=1,\ldots,n}.$$

Avec la représentation intégrale :

$$x_i = \frac{1}{2\pi i}\int_K e^{\lambda t}\xi_i \mathrm{d}\lambda,$$

on obtient un système algébrique d'équations linéaires :

$$\left[\lambda_{ij} = a_{ij}\lambda^2 + b_{ij}\lambda + c_{ij}\right]\left[\xi_j(\lambda)\right]_{j=1,\ldots,n} = [\pi_i]_{i=1,\ldots,n},$$

où :
– K est une courbe fermée contenant les pôles des $\xi_i(\lambda)$;
– les π_i sont définis par :
  – la représentation intégrale des $p_i e^{\mu_i t}$;
  – les conditions initiales ;

La résolution de ce système fournit les $\xi_i(\lambda)$ donc les $x_i(t)$.

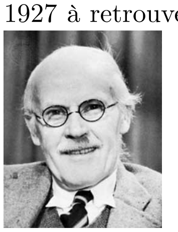
Par cette technique et par le calcul des résidus, ils retrouvent le théorème de décomposition de Heaviside-Cauchy. En 1927, T. Bromwich propose la représentation intégrale de $H(t)$:

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\mathrm{d}p,$$

qui conduit dans ce cas particulier à une nouvelle règle d'*algebrization* :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(p)}{p}e^{pt}\mathrm{d}p,$$

ce qui conduira, sur cette base rigoureuse, Sir H. Jeffreys en 1927 à retrouver les techniques utilisées par O. Heaviside.


Jeffreys

Pendant ce temps, J.R. Carson (1917), ingénieur à ATT Company, va proposer une approche guidée par des considérations pratiques, pour résoudre le système différentiel $[e_{ij}]\,[x_i] = [f_i(t)]$ avec $f_1(t) = E_1 e^{pt}$ et $f_2(t) = \cdots = f_n(t) = 0$. En supposant $x_i(t) = \xi_i e^{pt}$, il obtient un système de Cramer dont la résolution le conduit au théorème de décomposition de Heaviside. Entre 1919 et 1922, il introduit l'admitance indicielle $A(t)$ par le courant induit dans un circuit mis sous une tension $E(t)$:

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t A(t-\tau)E(t)\mathrm{d}t,$$

soit, après quelques manipulations :

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^\infty A(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

On peut noter ici l'analogie avec le *resistance operator* de Heaviside. En 1926, paraît l'ouvrage de Carson, dans lequel on trouve les tables de correspondances entre $Z(p)$ et $A(t)$. Cet ouvrage sur le calcul opérationnel est le premier parmi plusieurs qui seront édités pratiquement au même moment sur ce sujet (cf. S. Bennett t.1 p.199 : H. Jeffreys (1927), L.I. Cohen (1928) E.J. Berg (1929), V. Bush (1929), G.A. Campbell, R.M. Foster (1931)). Notons qu'en 1927, les deux formes de justification de la démarche de Heaviside :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{f(p)}{p}e^{pt}\mathrm{d}p \text{ et } f(p) = p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}\mathrm{d}t,$$

seront unifiées par H.W. March grâce à l'utilisation du théorème de Fourier-Laplace :

$$v(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{xy}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-yz}v(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

qui lui permet de montrer l'équivalence entre les approches de Bromwich et de Carson.

Un autre ingénieur, de la société Philips Gloeilampenfabriken, B. Van der Pol, va en 1929, proposer la procédure de résolution des équations différentielles (aux dérivées totales ou partielles) :

$$\begin{array}{ccccc} \text{domaine} & \text{EDO} & & \text{solution} \\ t & \text{(EDP)} & & \\ & \mathcal{C}\downarrow & & \uparrow \mathcal{C}^{-\infty} \\ \text{domaine} & \text{EAlgéb.} & & \\ p & \text{(EDO)} & \longrightarrow & \text{résolution} \end{array}$$

où $\mathcal{C}$ représente la transformation de Carson $p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$. Comme une intégration par parties de cette transformation lui assure la correspondance :

$$pf(p) - ph(0) \leftrightarrow \frac{d}{dt}h(t),$$

cela lui permettra de prendre en compte les conditions initiales. Ce problème des conditions initiales soulève celui de la non commutativité entre p et p^{-1}, ce qui l'amène à choisir en 1950 la transformation intégrale :

$$f(p) = p\int_{-\infty}^\infty h(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Remarquons qu'en posant arbitrairement $H(0) = 0$, Berg dans son ouvrage de 1929 avait contourné le problème de la commutativité.

$$\begin{aligned} p^{-1}p\{f(t)H(t)\} &= \int_0^t (f'(s)H(s) + f(s)H'(s))\mathrm{d}s, \\ &= [f(s)H(s)]_0^t - \int_0^t f(s)H'(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t f(s)H'(s)\mathrm{d}s, \\ &= f(t)H(t) - f(0)H(0) \\ &= f(t)H(t) = pp^{-1}\{f(t)H(t)\}, \end{aligned}$$

mais subsiste le problème : que vaut $H'(t)$?

Doetsch

Critiquant fortement les travaux de J.R. Carson, G. Doetsch, en 1930, promeut l'utilisation de la transformation de Laplace :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

et fournit les tables de correspondances dans son ouvrage de 1937.

En ce qui concerne cette désignation, il semblerait que la paternité de P.S. Laplace relativement à cette transformation ne soit pas si sûre. Suivant M.A.B. Deakin (1981-1982), sa forme serait dûe à L. Euler qui écrit en 1769 :

"*Si fuerint P, Q functiones ipsius x, at K functio ipsius u acponatur*
y = S exp(KQ)Pdx ...
ut evanescat casu x=b, *tum vero ponatur* x=b..."

ce que reconnaît Laplace en 1812. S. Spitzer, en 1878, précise que la transformée de Laplace désigne :

Laplace

$$y = \int_a^b e^{sx}\phi(s)\mathrm{d}s,$$

alors que pour F. Bernstein, en 1920, c'est la forme qui sera utilisée par G. Doetsch. Toujours est-il que H. Bateman l'utilise en 1910, pour résoudre l'équation différentielle $\dot{P}(t) = -\lambda P(t)$ qu'il transforme via la transformation de Laplace en équation algébrique. Ces méthodes basées sur des transformations seront unifiées par H.B.J. Florin en 1934. Il montre que toute transformation :

$$f(p) = \int K(p,t)h(t)\mathrm{d}t,$$

fonctionne pour le calcul opérationnel si $K(p,t) = e^{-\alpha pt}B(p)$. Et si de plus :

$$\int K(p,t)H(t)\mathrm{d}t = 1,$$

alors on retrouve les résultats de Heaviside. Remarquons ici que la transformation de Laplace ne vérifie pas ce dernier point, alors que la transformation de Carson, oui.


Bateman Bernstein

Les méthodes de transformation présentent de nombreux avantages dont des procédures simples de résolution des équations différentielles et de nombreuses tables de correspondances $f(t)H(t) \longleftrightarrow F(p)$. Mais elles présentent également certains inconvénients parmi lesquels : p n'est plus un opérateur de dérivation ; $F(p) \neq f(t)$; certaines fonctions n'admettent pas de représentation ; le choix non trivial du noyau et des bornes d'intégration. Certains de ces inconvénients peuvent poser un problème lors de l'application en Automatique du calcul opérationnel, notamment pour la construction de l'opérateur de transfert. Rappelons en effet que la recherche des solutions d'une équation d'évolution n'est pas un des objectifs premiers de l'Automatique mais qu'il s'agit plutôt de construire des modèles opérationnels au sens où l'entendait Heaviside.


Dirac Schwartz

Un autre inconvénient majeur réside sur la définition de l'impulsion de Dirac et de ses dérivées dont nous avons déjà parlé au niveau de son origine. L. Schwartz, en 1945, a répondu à cette question par la théorie des distributions : l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction mais on peut dériver au sens des distributions ($\langle \mathrm{D}T, \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle$). Pour étendre les transformations aux distributions, L. Schwartz en 1947, introduit la notion de distribution tempérée et de convolution des distributions. Par la transformation de Laplace-Fourier d'une distribution tempérée :

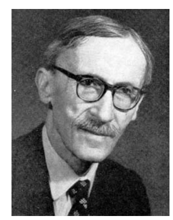
$$T \longrightarrow \mathcal{L}(T) = \left\langle T, e^{-pt}\right\rangle,$$

il déduit :

$$\mathcal{L}(\mathrm{D}T) = \left\langle \mathrm{D}T, e^{-pt}\right\rangle = \left\langle T, \frac{\mathrm{d}e^{-pt}}{\mathrm{d}t}\right\rangle = p\mathcal{L}(T),$$

qui indique que p agit *comme* l'opérateur de dérivation sur les transformées sans que l'effet des conditions initiales apparaissent mais ce n'est pas un opérateur de dérivation ! Rappelons en effet qu'une dérivation (Kaplansky, 1976) est une application, $a \to a'$, additive d'un anneau *sur lui-même*.

B. Les méthodes algébriques



Lévy

L'approche algébrique de P. Lévy (1926) consiste à relier le calcul opérationnel à la convolution :

$$(f * g)(t) = \textstyle\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u = F(g).$$

ce qui définit opérateur d'intégration :

$$I(g) = (1 * g)(t) = \int_0^t g(u)\mathrm{d}u,$$

qu'il peut itérer sous la forme I^n ou I^{-n}. Il construit ainsi l'anneau des *opérateurs*, $(f, +, *)$ mais n'arrive pas à définir clairement l'espace fonctionnel sur lequel il travaille et surtout, élément important pour la mise en évidence de la notion de transfert, il n'arrive pas non plus à en construire une extension de corps. Grâce au théorème de E.C. Titchmarsh (1926), qui indique que l'anneau de convolution de Lévy n'a pas de diviseurs de zéro, J. Mikusiński, en 1950, construit $(\mathcal{O}, +, *)$, le corps des fractions de l'anneau de convolution dont les éléments sont les opérateurs. Autrement dit, ce sont les solutions de l'équation de convolution, $af = b$, notées :

$$f = \frac{b}{a}.$$

Titchmarsh

Parmi les nombreuses conséquences qu'il extrait de cette construction, il désigne par h l'opérateur d'intégration et construit l'intégration à un ordre quelconque :

$$\forall\alpha, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, h^{\alpha} = \left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\}.$$

$$\forall\alpha, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, h^\alpha f = \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\mathrm{d}x\right\},$$

où on reconnait les intégrales de Riemann-Liouville propres au calcul fractionnaire. Il définit la multiplication par un scalaire :

$$[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{h},$$

et note [1] l'élément neutre de la convolution. Il construit l'opérateur de dérivation p, défini comme la solution de l'équation de convolution $h^2 p = h$, soit $ph = [1]$, donc comme l'inverse de l'élément unité de la convolution. Le résultat suivant montre qu'ici p joue bien le rôle de l'opérateur de dérivation :

Théorème : *Si f, continue sur $[0,\infty)$, possède une dérivée localement intégrable, alors :*

$$pf = \left\{f^{(1)}(t)\right\} + [f(0)].$$

Erdélyi

Mentionnons que l'ouvrage de A. Erdélyi sur le calcul opérationnel de Mikusiński a été traduit en français en 1971. En résumé les caractéristiques de ce calcul opérationnel qui nous paraissent essentielles pour l'Automatique sont :
- p est l'opérateur de dérivation ;
- il n'y a pas de transformation ;
- la notion d'opérateurs est clairement définie.

Un autre point important est la construction à partir de la convolution qui permet des extensions comme celle proposée par I.H. Dimovski (1990).

V. Notion de transfert

Rappelons que l'objectif de la notion de transfert réside dans la recherche d'une modélisation d'une relation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire stationnaire qui soit facilement manipulable :

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma\mathrm{LS}} \longrightarrow s(t)$$

En Automatique, nous disposons de deux formes de transfert (en restant assez vague pour le moment) :
- la fonction de transfert ou réponse harmonique ou fréquentielle d'un système :
$$F(\omega),$$
où ω est une fréquence ;
- le transfert opérationnel :
$$F(p).$$

A. Fonction de transfert fréquentielle

Proposée initialement par H. Harris (1942), puis par M.A. Gardner et J.L. Barnes (1942), et A.C. Hall (1943) pour l'étude des systèmes électriques bouclés, elle est basée sur le comportement en régime permanent du système en réponse à une entrée sinusoïdale.

Suivant H. Harris :
- *corresponding to each sinusoidal term... [in the] input...there is a term of the same frequency... [in the] output* ;
- *the two corresponding terms at each frequency will differ in amplitude and in phase* ;
- il définit, pour les amplitudes : *the ratio*, pour les phases : *the difference* ;
- *the transfer function contains all the information available from the system differential equation.*

De façon plus précise, à partir de l'équation différentielle entrée-sortie :

$$a_n s^{(n)}(t) + \cdots + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \cdots + b_0 e(t),$$

le régime permanent en réponse à l'entrée $e(t) = E(\omega)e^{j\omega t}$, est obtenu sous la forme :

$$s(t) = S(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))},$$

$$\frac{S(\omega)}{E(\omega)} = |F(j\omega)| \text{ et } \varphi(\omega) = \arg(F(j\omega)),$$

où :

$$F(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \cdots + b_0}{a_n(j\omega)^n + \cdots + a_0}.$$

Notons que pour définir cette fonction de transfert, Harris utilise un calcul opérationnel sous la forme :

1. *Set up the linear differential equations....*
2. *Replace each derivative dx/dt by px and each integral $\int xdt$ by x/p...Then solve the resulting set of simultaneous equations...*
3. *Substitute $p = j\omega$. This results in... $F(j\omega)$. This expression is known as the system response transfer function.*

Comme $F(j\omega)$ est une fonction de $\omega \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, le terme de fonction de transfert est tout à fait justifié ici, ce qui le sera moins des constructions suivantes.

B. Utilisation de la transformée de Laplace

Depuis J.G. Truxal (1955), les principales définitions communément admises pour la *fonction* de transfert sont :
- rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée à conditions initiales nulles :
$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Leftrightarrow S(p) = F(p)E(p);$$
$$E(p) \longrightarrow \boxed{F(p)} \longrightarrow S(p)$$
- transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

Mais quelques problèmes surgissent :
- quelle transformée de Laplace choisir, ou plutôt quelle borne inférieure d'intégration prendre ? Suivant les auteurs d'ouvrages d'Automatique on trouve plusieurs possibilités : $-\infty$, 0^-, 0 ou 0^+ ?
- la transformée recèle *some skeletons-in-the-closet* (T. Kailath, 1980), notamment en ce qui concerne l'usage et la manipulation de l'impulsion de Dirac. Peut-on noter celle-ci comme une fonction ?
- certains signaux n'ont pas de transformée de Laplace (e.g. $\exp(t^2)$). L'automaticien s'interdit-il de traiter certains signaux ?
- on ne peut écrire $s(t) = F(p)e(t)$.

Devant ces inconvénients, d'autres propositions plus *opérationnelles* ont été adoptées. Pour les systèmes à temps discret représentés par des équations de récurrence, D. Cochrane et G.H. Orcutt (1949), K.J. Aström et T. Bohlin (1965), ont utilisé le modèle ARMAX :

$$A(q^{-1})s_k = B(q^{-1})e_k,$$

où q représente l'opérateur d'avance. Notons que dans leur ouvrage très connu de 1994, K.J. Aström et B. Wittenmark utilisent tantôt l'opérateur q tantôt la variable complexe z, variable de la transformée en z qui est, pour le temps discret l'analogue de la transformée de Laplace pour le temps continu, sans que soit bien explicité l'intérêt de la notation choisie. Pour les systèmes continus multi-entrées multi-sorties, H.H. Rosenbrock (1970) et W.A. Wolowich (1974) partent d'une représentation par matrices polynomiales ou matrices-systèmes faisant explicitement apparaître l'opérateur de dérivation :

$$\begin{aligned} P(\frac{d}{dt})\xi(t) &= Q(\frac{d}{dt})e(t), \\ s(t) &= R(\frac{d}{dt})\xi(t) + W(\frac{d}{dt})e(t). \end{aligned}$$

En 1983, H. Blomberg et R. Ylinen, définissent, à partir de la notion fondamentale de module, la notion de générateur d'un système :

$$\begin{bmatrix} A(p) & -B(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = 0.$$


Fliess

En associant stucture de module et calcul tensoriel, M. Fliess en 1994 fournit une structure algébrique pour la transformation de Laplace qui est généralisable aux équations différentielles linéaires à coefficients non constants. Là encore sont utilisés des opérateurs dans un corps de fractions faisant intervenir explicitement d/dt.

Finalement, la variable complexe introduite dans la transformée de Laplace ne permet pas la construction d'un opérateur de transfert étroitement lié à l'opération de dérivation donc à l'équation différentielle modélisant le système.

C. *Opérateur de transfert*

Ainsi, parmi les justifications du calcul opérationnel que nous avons vu précédemment on peut légitimement se demander lesquelles permettent de trouver de façon rigoureuse une notion de transfert en accord avec la vision pratique de Heaviside et avec les formes algébriques précédentes. Par construction, le calcul opérationnel de Mikusiński introduit la définition de la notion de processus générateur d'un signal par l'écriture en h ou p d'une fonction. Mikusiński montre que lorsque qu'un signal admet une transformée de Laplace, cette transformée et ce processus générateur coïncident. Cela permet d'utiliser les tables usuelles mais sans changer d'espace. Le processus générateur n'est qu'une écriture différente d'une fonction du temps. D'autre part, il utilise l'équation de convolution pour définir un opérateur $F(p)$ comme la solution de :

$$s(t) = F(p)e(t),$$

que l'on peut représenter par le schéma opérationnel :

$$e(t) \longrightarrow \boxed{F(p)} \longrightarrow s(t)$$

où p *désigne* l'opérateur de dérivation.

Lorsque $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, la structure algébrique du calcul opérationnel conduit à :

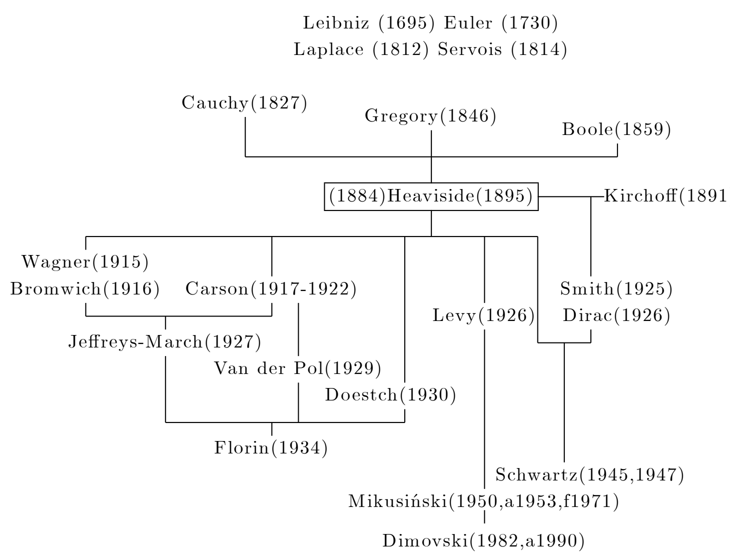
$$D(p)s(t) = N(p)e(t),$$

ce qui est équivalent aux modèles opérationnels précédents :

$$\begin{bmatrix} D(p) & -N(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = 0.$$

VI. Conclusion

Dans le développement du calcul opérationnel apparaît un point focal très important : Oliver Heaviside. Nous avons essayé de mettre en évidence que ses idées ont été fertiles pour l'Automatique. De par sa vision pragmatique très indépendante, il a apporté de nombreuses notions originales. En ce qui nous concerne, il a même été l'un des premiers à se préoccuper de la notion de transfert (notion centrale en Automatique s'il en est) relativement à celle de calcul opérationnel. En effet, relativement à cette discipline, nombreux sont ses prédécesseurs et ceux qui, dans des tentatives de justification ou dans des extensions, ont apporté leur concours. On peut par exemple, pour en résumé le développement dresser l'arbre généalogique :



On peut ainsi remarquer, lorsque l'on cherche les répercussions du calcul opérationnel en Automatique, l'apport d'individus plus portés sur le côté pratique du calcul opérationnel qui ont conduit à une utilisation intuitive de la notion de transfert où l'opérateur de dérivation gardait toute son interprétation. Pour être plus précis nous avons vu qu'il y avait deux aspects dans le calcul opérationnel : la résolution d'équations d'évolution et la modélisation d'un système. En ce qui concerne l'Automatique, il ne faudrait pas que le premier aspect prenne le pas sur le deuxième. Ainsi de nombreuses études partent directement d'un codage de l'opérateur d'évolution utilisé. Citons ici par exemple les séries génératrices de Fliess (1983) qui utilisent un codage d'intégrales itérées sur les entrées. La série génératrice ainsi définie joue le rôle, pour un système non linéaire, de l'opérateur de transfert.

À ce propos remarquons que tous les développements, excepté le dernier que nous venons de mentionner, l'ont été dans un cadre linéaire. En effet, ce calcul opérationnel a eu pour origine le traitement des équations différentielles linéaires et la représentation par convolution qui implique cet *a priori* sur le système. Mais la question que l'on doit se poser est : que doit-on imposer à un système pour avoir une représentation linéaire ? En effet, dans le cas des systèmes discrets, l'axiome de linéarité totale $f(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f(u_n)$ conduit à une représentation par convolution, mais ce n'est plus le cas en continu (T. Kailath, 1980, L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, 1982). Pour obtenir une représentation linéaire, certains auteurs ont ajouté des hypothèses complémentaires : la complétude (J.C. Willems, 1986–1987, 1991) ou la mémoire évanescente (S. Boyd, L. Chua, 1985). Il serait intéressant d'en faire le lien avec le calcul opérationnel.

Mais il est évident que ce que nous avons dit n'a été qu'une ébauche de l'histoire du transfert en Automatique. Nous ne saurions prétendre en effet à une quelconque compétence en Histoire des Sciences, mais on peut en tirer des conclusions (sûrement provisoires !) par exemple sur l'enseignement en Automatique, afin de proposer, dans les premiers cours, la construction d'un modèle opérationnel efficace. Ainsi, le calcul de Mikusiński fournisssant un cadre opérationnel rigoureux tout en préservant l'approche pratique de Heaviside :

peut-on se passer de la transformée de Laplace ?
évidemment, oui !
doit-on enseigner au préalable le calcul de Mikusiński ?
évidemment, non !

Les méthodes utilisées en Automatique à partir du transfert sont inchangées et peuvent être enseignées directement. Mais cela ne signifie pas qu'il faille ne plus enseigner le calcul opérationnel et que l'Automatique ne doive plus s'en servir. Au contraire, il faut en extraire *la substantifique moëlle.*

VII. Références

Åström, K.J., Bohlin, T., Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records, in *Theory of self-adaptative control systems*, pp. 96–111, Plenum, 1965.

Aström, K.J., Wittenmark, B., *Computer controlled systems*, Prentice Hall, 1994.

Bennett, S., *A history of control engineering, 1800–1930*, 1978 ; *1930–1955*, 1993.

Blomberg, H., Ylinen, R., *Algebraic theory for multivariable linear systems*, Academic Press, 1983.

Boyd, S., Chua, L., Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series, IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-32, n.11, pp.1150–61, nov. 1985.

Cochrane, D., Orcutt, G.H., Application of least squares regression to relationships containing autocorrelated error terms, *J. amer. statist. assoc.*, vol. 44, pp. 32–61, 1949.

Dautray, R., Lions, J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique*, T.6, Masson, 1988.

Deakin, M.A.B., The development of Laplace transform, 1737–1937 :

I. From Euler to Spitzer, 1737–1880, vol. 25, n. 4, pp. 343–90, *Archive for history of exact science*, 1981.

II. From Poincaré to Doetsch, 1880–1937, vol. 26, n. 4, pp. 351–81, *Archive for history of exact science*, 1982.

Deakin, M.A.B., The ascendancy of the Laplace transform and how it came about, vol. 44, n. 3, pp. 265–286, *Archive for history of exact science*, 1992.

Desoer, C.A., Vidyasagar, M., *Feedback systems : input-output properties*, Academic Press, 1975.

Dimovski, I.H., *Convolutional calculus*, Kluwer Academic Publishers, 1990.

Dugowson, S., *Les différentielles métaphysiques*, Thèse, Paris XIII, 1994.

Dorf, R.C., Bishop, R.H., *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, 1998.

Erdélyi, A., *Calcul opérationnel et fonctions généralisées*, Dunod, 1971, (trad. de *Operational calculus and generalized functions*, Holt, Rinehard and Winston, 1962).

Fliess, M., Lamnabhi, M., Lamnabhi-Lagarrigue, F., An algebraic approach to non linear functional expansions, *IEEE trans. on Circuits and Systems*, CAS-30, n. 8, pp. 554–570, 1983.

Fliess, M., Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert, *Linear Algebra and its applications*, vol. 203–204, pp. 429–442, 1994.

Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naemi, A., *Feedback Control of Dynamics Systems*, Addison-Wesley, 1994.

Franklin, G.F., Powell, J.D., Workman, L., *Digital control of dynamic systems*, Addison Wesley, 1990.

Gardner, M.A., Barnes, J.L., *Transient in linear systems*, Wiley, 1942.

Gohberg, M.G., Kreĭn, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, American Mathematical Society, 1970.

Goodwin, G.C., Graebe, S.F., Salgado, M.E., *Control System Design*, Prentice Hall, 2001.

Hall, A.C., *The analysis and synthesis of linear servomechanisms*, The technology press, 1943.

Harris, H. Jr, The analysis end design of servomechanisms, OSRD report n.454, 1942 ; The frequency response of automatic control systems, *Trans. electrical engineering*, pp. 539–46, 1946.

Heaviside, O., *Electromagnetic theory*, vol. 2, 1899.

Hladik, J., *La transformation de Laplace*, Masson, 1969.

Jeffreys, H., Jeffreys, B., *Methods of mathematical physics*, Cambridge University Press,1st ed., 1946, 7th ed., 1999.

Kailath, T., *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980.

Kaplansky, I., *Differential algebra*, Hermann, 1976.

Kučera, V., *Discrete linear control : a polynomial approach*, Wiley Intersciences, 1979.

Kučera, V., *Analysis and design of discrete linear control systems*, Prentice Hall, 1991.

Kullstram, P.A., Heaviside's operational calculus : Oliver's revenge, *Ieee trans. education*, 1991.

Landau, I.D., *Identification et commande des systèmes*, Hermès, 1993.

Lévy, P., Le calcul symbolique de Heaviside, *Bull. Sci. Math.* (2), vol. 50, pp. 174–192, 1926.

Ljung, L., *System identification*, Prentice-Hall, 1987.

Lützen, J., Heaviside's operational calculus and the attempts to rigorise it, *Archive for history of exact science*, 1979.

Miller, K.S., Ross, B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley, 1993.

Mikusiński, J., *Operational calculus*, Pergamon Press, 1959.

Mutambara, A.G.O., *Design and Analysis of Control Systems*, CRC Press, 1999.

Ogata, K., *System Dynamics*, Prentice Hall, 1998.

Petrova, S.S., Heaviside and the development of the symbolic calculus, *Archive for history of exact science*, 1986.

Pier, J.P., *Histoire de l'intégration*, Masson, 1996.

Rosenbrock, H.H., *State-space and multivariable theory*, Wiley, 1970.

Rotella, F., Zambettakis, I., Mikusiński operational calculus for distributed parameter systems, IEEE-SMC Conf. CESA'96, pp. 975–979, 1996.

Rotella, F., Sur la notion de transfert en Automatique, CETSIS-2001, Clermont-Ferrand.

Rotella, F., Calcul opérationnel de Mikusiński, chap. 2 de *Mathématiques pour les systèmes dynamiques*, (dir. J.P. Richard) pp. 55–78, Traité IC2, Hermès, 2002.

Rouche, N., Mawhin, J., *Équations différentielles ordinaires*, Tome 1, Masson, 1973.

Rudolph, J., Duality in time-varying systems : a module theoretic approach, *Linear Algebra Appl.*, n. 245, pp. 83–106, 1996.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., *Fractional integrals and derivatives theory and applications*, Gordon & Breach, 1987.

Servois, F.J., Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol.5, pp. 93–140, 1814.

Spiegel, M.R., *Formules et tables de Mathématiques*, Mac Graw-Hill, 1978.

Willems, J.C., From time series to linear system :

I : finite dimesnsional linear time invaviant systems, *Automatica*, vol. 22, pp. 561-80, 1986.

II : exact modeling, *Automatica*, vol. 22, pp. 675–94, 1986.

III : approximate modeling, *Automatica*, vol. 23, pp. 87–115, 1987.

Willems, J.C., Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 36, n.3, pp 259–294, 1991.

Truxal, J.G., *Automatic control system synthesis*, Mc Graw-Hill, 1955.

Wolowich, W.A., *Linear multivariable systems*, Springer-Verlag, 1974.

Yosida, K., *Operational calculus : a theory of hyperfunctions*, Springer Verlag, 1984.

Zwillinger, D., *Handbook of differential equations*, Academic Press, 1998.

http ://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

Les auteurs

Frédéric Rotella
Ecole nationale d'ingénieurs de Tarbes
BP 1629, 65016, Tarbes CEDEX, France
`rotella@enit.fr`

Frédéric Rotella est ingénieur de l'Ecole Centrale de Lille (1981) et Docteur d'Etat ès Sciences Physiques de l'Université des Sciences et Technologies de Lille-Flandres-Artois (1987), spécialité Automatique. Il est actuellement Professeur d'Automatique à l' Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes. Ces Travaux concernent principalement la commande des systèmes non-linéaires et des systèmes linéaires non stationnaires. Il est membre du Club EEA , senior member IEEE, et co-auteur de l'ouvrage *Théorie et Pratique du Calcul Matriciel* (1995, ed. Technip, Paris, France).

Irène Zambettakis
IUT Tarbes - Université Paul Sabatier (Toulouse III)
BP 1624 - 65016, Tarbes CEDEX, France
`izambettakis@iut-tarbes.fr`

Irène Zambettakis est ingénieur de l'Ecole Centrale de Lille (1981) et Docteur d'Etat ès Sciences Physiques de l'Université des Sciences et Technologies de Lille-Flandres-Artois (1987), spécialité Automatique. Elle est actuellement Professeur d'Automatique à l' IUT de Tarbes. Ces Travaux concernent principalement la modélisation et la commande des systèmes à paramètres distribués. Elle est membre du Club EEA et senior member IEEE.

Frédéric Rotella et Irène Zambettakis sont co-auteurs de cinq ouvrages en Automatique (ed. Technip, Paris, France) : *Analyse et Régulation des Processus Industriels* (1993), tome 1 : Régulation Continue, tome 2 : Régulation Numérique ; *Modélisation et Identififation des Processus* (1992), tomes 1 et 2 ; *Commande et Optimisation des Processus* (1990).