



Étude et résolution de la rupture sismique par une méthode volumes finis dans un milieu bidimensionnel hétérogène

Mondher Benjemaa

► **To cite this version:**

Mondher Benjemaa. Étude et résolution de la rupture sismique par une méthode volumes finis dans un milieu bidimensionnel hétérogène. RR-5332, INRIA. 2004, pp.71. <inria-00070669>

HAL Id: inria-00070669

<https://hal.inria.fr/inria-00070669>

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Étude et résolution de la rupture sismique par une
méthode volumes finis dans un milieu
bidimensionnel hétérogène*

Mondher Benjema

N° 5332

Septembre 2004

Thème NUM



*Rapport
de recherche*

Étude et résolution de la rupture sismique par une méthode volumes finis dans un milieu bidimensionnel hétérogène

Mondher Benjemaa*

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 5332 — Septembre 2004 — 71 pages

Résumé : Dans ce travail, on présente une nouvelle méthode basée sur une formulation volumes finis pour la simulation d'une faille préexistante. Dans un premier temps, la représentation de la source par un ensemble d'éléments permet la validation de la méthode par comparaison aux résultats obtenus par une méthode de type différences finies. On s'intéresse ensuite à la représentation de la faille par un ensemble de segments et non plus d'éléments. Une étude d'énergie s'avère alors nécessaire afin d'assurer la stabilité du schéma et la précision des solutions. La validation des résultats se fait en comparant les solutions obtenues par l'approche par segments à celle par éléments.

Mots-clés : sismologie, faille, rupture, système élastodynamique, ondes P-SV, méthodes volumes finis, conditions PML.

Encadré par Nathalie Glinsky-Olivier & Jean Virieux

* Mondher.Ben_Jemaa@sophia.inria.fr

Study and resolution of the seismic rupture by a finite volume method in a heterogeneous two-dimensional medium

Abstract: In this work, we present a new method based on a finite volume formulation for simulation of a preexistent fault. Initially, the representation of the source by a group of elements allows the validation of the method by comparison with the results obtained by a finite difference method. We are interested then in the representation of the fault by a group of segments and not of elements. A study of energy is then necessary to insure scheme stability and solutions accuracy. The validation of the results is done by comparing the solutions obtained by elements approach with that by segments.

Key-words: sismology, fault, rupture, elastodynamic system, P-SV waves, finite volume methods, PML conditions.

Remerciements

Ce stage a été réalisé au sein du projet CAIMAN de l'unité de recherche INRIA Sophia Antipolis. Il correspond à un stage de DEA d'analyse numérique à l'École Normale Supérieure de Lyon.

Je tiens à remercier tout d'abord Mme Nathalie Glinsky-Olivier qui m'a accompagné tout au long de ce stage avec beaucoup d'intérêt, de patience et de disponibilité, aussi bien sur le plan scientifique qu'humain.

Je remercie également M. Jean Virieux pour son encadrement et ses conseils sur tous les aspects physiques de ce travail.

Je remercie vivement M. Serge Piperno pour ses conseils et son aide en ce qui concerne les aspects mathématiques du sujet.

Je veux aussi remercier tous les membres de l'équipe CAIMAN pour la joie et la bonne humeur qui règne dans ce groupe.

Je remercie enfin toute ma famille et surtout ma mère qui m'a toujours soutenu malgré l'éloignement géographique.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	7
Cadre de l'étude	11
1 Formulation du problème	13
1.1 Formulation physique	13
1.1.1 Mise en équations	14
1.1.2 Conditions initiales et conditions aux limites	15
1.2 Formulation mathématique	15
1.3 Méthodes des volumes finis en deux dimensions d'espace	19
2 Source ponctuelle	23
2.1 Cas test	23
2.2 Choix du support de la source	24
2.3 Analyse du support de la source	26
2.4 Validation des résultats	34
3 Faille plane finie	39
3.1 Faille décrite par éléments	39
3.2 Faille décrite par segments	43
3.2.1 Étude d'énergie	43
3.2.2 Résultats	52
Conclusion	59

Annexe A	61
Annexe B	65
Annexe C	69
Bibliographie	71

Introduction

Au sein des sciences de la terre, la sismologie est la discipline qui étudie les séismes (origine, propagation, conséquences, prévision, etc.) et de manière plus générale toute vibration naturelle ou artificielle de l'écorce terrestre. L'étude de ces phénomènes de rupture et de propagation (dit problème direct) et de ce qu'ils révèlent de la structure de la terre via des approches d'imagerie (dénommées problème inverse qui s'intitule aussi problème d'optimisation) réclame des approches combinées de différentes disciplines. Nous allons nous focaliser sur l'aspect rupture du problème direct en tenant compte des effets propagatifs. La mise au point d'outils de simulation est un pas essentiel vers la reconstruction des structures du sous-sol.

La majorité des séismes survient le long des frontières des plaques tectoniques, ou plus vers la surface, le long de ruptures dans les roches, appelées failles. Ces roches, trop rigides pour se déformer tranquillement comme les fluides, résistent au chargement tectonique pendant une durée de temps variant de quelques années à plusieurs milliers d'années, accumulent de l'énergie élastique, puis cèdent en des endroits plus fragiles. De petites fractures se forment au sein de ces zones de faiblesses, se rejoignent, et c'est la rupture à grande échelle. Les deux blocs de part et d'autre de cette cassure ou faille se déplacent tangentiellement l'un par rapport à l'autre, pour relâcher le trop plein d'énergie élastique emmagasinée. Ces phénomènes (rupture, frottement rugueux sur le plan de faille) s'accompagnent de l'émission d'ondes mécaniques, de chaleur... c'est le déclenchement d'un séisme, ou tremblement de terre. Comme une corde de guitare ou de piano que l'on aurait frappée, la terre vibre, à des fréquences qui lui sont propres. Les roches se ressoudent ensuite, et la mise en charge tectonique reprend : c'est le cycle sismique. Parmi les importants séismes survenus lors de ce dernier siècle, on peut citer le séisme

de Fuyun (Fig.1. Chine-Mongolie, Magnitude=8, août 1931) correspondant à une faille normale (La composante horizontale du glissement correspond à un écartement qui s'accompagne de l'affaissement d'un des blocs par rapport à l'autre), le séisme d'El Asnam (Fig.2. Algérie, Magnitude=7.3, octobre 1980) correspondant à une faille inverse (La composante horizontale du glissement correspond à un rapprochement qui s'accompagne du chevauchement d'un des blocs sur l'autre), le séisme de Landers (Fig.3. Californie, Magnitude=7.2, juillet 1992) correspondant à une faille décrochante (Plan vertical sur lequel se produit un glissement horizontal. Elle ne créent généralement pas de reliefs car les déplacements se font parallèlement à la surface de la terre),

Lors d'un tremblement de terre, deux catégories principales d'ondes sont générées : les ondes de surface qui sont guidées par la surface de la terre telles que les ondes de Rayleigh et les ondes de Love, et les ondes de volume qui se propagent à l'intérieur du globe. La vitesse de propagation dépend du matériau traversé et de manière générale augmente avec la profondeur. On s'intéresse dans le présent travail à l'ensemble de ces ondes, en se limitant à un milieu bidimensionnel où la vibration s'effectue dans ce plan en mode compressif/dilatant (onde P) et en mode cisailant (onde S). Les ondes de surface peuvent exister au contact de discontinuité (onde de Stoneley) mais on néglige la surface libre pour se concentrer sur la rupture proprement dite, dans un milieu infini, hétérogène, linéairement élastique et isotrope. Retenons que les ondes de volume se répartissent en ondes P pour Primaire et ondes S pour Seconde. L'onde P est l'onde de compression et se propage à la vitesse la plus rapide, suivie par l'onde de cisaillement S qui est moins rapide mais d'amplitude plus importante donc beaucoup plus dangereuse. Les ondes de surface sont présentes mais leur identification est plus complexe quand on reste près de la rupture elle-même. Dans de nombreux exemples, le milieu sera pris homogène, mais ceci n'est pas requis par notre approche numérique.

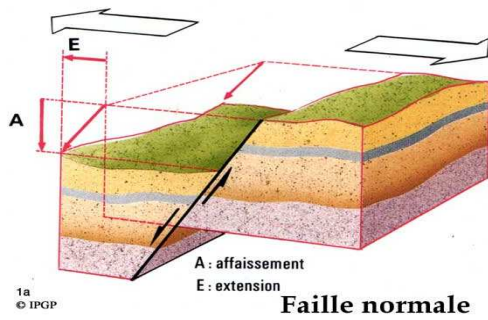


FIG. 1 – Séisme de Fuyun correspondant à une faille normale

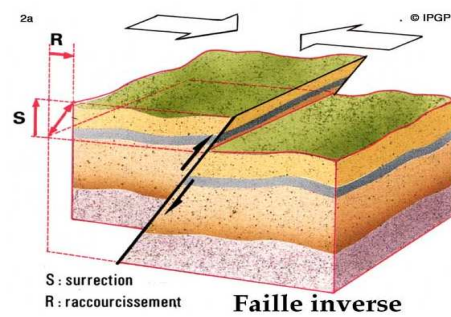


FIG. 2 – Séisme d'El-Asnam correspondant à une faille inverse

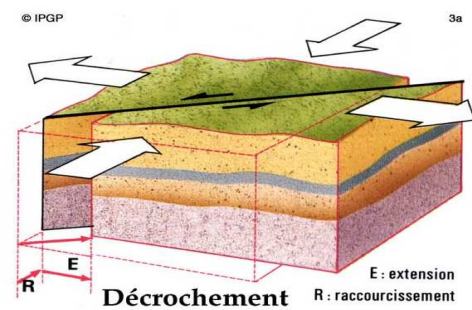


FIG. 3 – Séisme de Landers correspondant à un décrochement

Cadre de l'étude

Ce travail se base sur une étude plus générale déjà faite par V.M. Cruz-Atienza et J. Virieux [2] qui utilisent un schéma en différences finies avec des grilles décalées. En utilisant des opérateurs de dérivations croisés introduits par Saenger et al. [4], les différentes composantes du tenseur de contraintes sont exprimées en un seul nœud du maillage, cela permet un travail précis sur la mécanique de frottement. Le vecteur vitesse est aussi connu en un seul nœud sur la grille décalée. Des conditions aux limites sont appliquées à l'intérieur de la faille et la solution est obtenue en résolvant les équations de l'élastodynamique dans le reste du domaine qui est supposé infini. Le schéma obtenu est d'ordre 4 en espace et 2 en temps.

La difficulté majeure se situe au niveau de la représentation de la source qu'est la faille. Cette dernière est modélisée sur plusieurs cellules numériques. La solution obtenue est d'autant plus précise que le nombre de ces cellules est grand, ce qui se révèle contraignant lorsqu'il s'agit de la simulation d'une faille non plane. En effet, une géométrie complexe de la faille nécessite l'introduction de facteurs de corrections définis à partir des angles que fait la courbure de la faille avec les segments du maillage. La précision des résultats dépend aussi du pas d'espace choisi ce qui rend l'implémentation du schéma très lourde en trois dimensions d'espace.

Dans notre cas, le système sera résolu par un schéma volumes finis avec un maillage triangulaire. Via un changement de variable, on obtient une formulation faible en intégrant les équations sur les triangles. Deux approches sont alors possibles pour la représentation de la source : l'approche par triangle et l'approche par segment. L'approche par triangle est d'une certaine manière l'équivalent de ce qui a été fait en différences finies. Elle permet dans un premier temps de valider les résultats obtenus en les comparant avec ceux

présentés dans [2], notamment ceux concernant une source ponctuelle. L'approche par segment constitue la nouveauté de ce travail. Cette dernière permet de simuler une faille donnée sur une succession de segments et non pas de cellules. Les conditions aux limites sont appliquées uniquement sur les segments constituant la faille. Une étude d'énergie est faite afin de déterminer les conditions assurant la stabilité des solutions puis la précision. Les résultats obtenus sont validés en les comparant avec l'approche par triangle.

Chapitre 1

Formulation du problème

1.1 Formulation physique

Soit Ω un ouvert borné, fissuré de \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou 3 . On note $\partial\Omega = \Gamma_{ext} \cup \Gamma$ sa frontière, Γ étant la fissure et Γ_{ext} le bord extérieur (Fig.1.1).

Un modèle possible pour le processus de rupture d'un tremblement de terre est le relâchement de contraintes sur la faille Γ quelle que soit sa géométrie. En dehors de cette zone de rupture préalablement existante, le milieu se comporte comme un milieu élastique linéaire isotrope. Ses propriétés élastiques peuvent être modélisées par la masse volumique et les coefficients de Lamé.

Toute la complexité de la rupture se trouve concentrée sur la faille elle-même. Le relâchement de contraintes s'effectue principalement sur cette faille et nous considérerons un processus cisailant sans ouverture de la faille. Bien sûr, les ondes sont le moyen de transfert de l'énergie entre les zones de relâchement comme la faille et les zones d'accumulation comme les zones extérieures à la faille. Nous supposons un état de chargement du milieu homogène d'une valeur de 30 bars à l'extérieur de la faille. Nous admettrons aussi un glissement bien lubrifié correspondant à une contrainte de cisaillement nulle sur la faille indépendante de la contrainte normale grâce à un coefficient de frottement dynamique nul. Par linéarité du système, ce modèle est équivalent à un état de chargement nul à l'extérieur de la faille et une contrainte de cisaillement de -30 bars sur la faille. Nous aurions pu prendre en compte un état de contrainte initial plus complexe dans le cas de simulation devant rendre compte de cer-

taines mesures. Pour comprendre les phénomènes physiques et numériques mis en jeu, des conditions simples permettent une meilleure illustration.

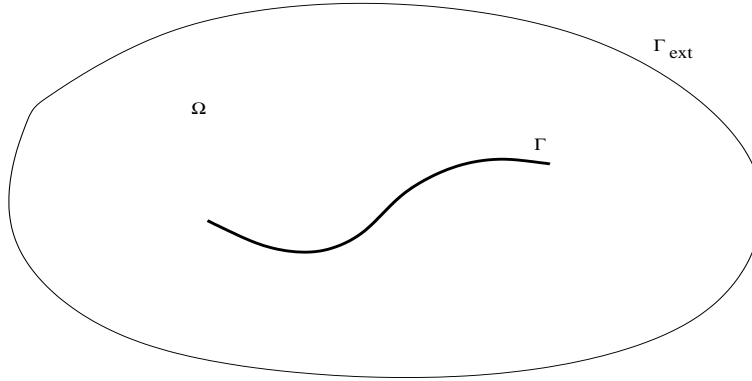


FIG. 1.1 – Une représentation de Ω en 2D

1.1.1 Mise en équations

Dans un milieu infini, élastique, linéaire et isotrope, le mouvement d'un élément de matière est régi par les équations élastodynamiques suivantes :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div } \tau \quad (1.1)$$

$$\tau = \lambda \text{div } \vec{u} I_n + \mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) \quad (1.2)$$

où $n = 2, 3$ est la dimension de l'espace, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur déplacement des particules, $\tau \in \text{sym}_n(\mathbb{R})$ est le tenseur de contraintes, ρ est la masse volumique et λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Ce système est transformé en un système hyperbolique de premier ordre en introduisant le vecteur vitesse défini par $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. On obtient ainsi le système suivant :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \tau \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} I_n + \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \quad (1.4)$$

Ce système décrit la propagation de toutes les ondes élastiques [6] dans un milieu linéairement élastique et isotrope, complètement déterminé par les coefficients de Lamé λ et μ et la densité ρ .

1.1.2 Conditions initiales et conditions aux limites

Sur Γ , on impose une chute de la contrainte cisailante de sa valeur initiale nulle à -30 bars, c'est à dire que l'on impose :

$$\vec{n}^T \tau(t, X) \vec{t} = g(t) \quad \forall X \in \Gamma$$

où \vec{n} et \vec{t} désignent respectivement la normale et la tangente à Γ en X et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Sur Γ_{ext} , les conditions aux limites ne jouent pas un rôle fondamental pour cette étude. On aurait pu prendre des conditions radiatives mais, en pratique, on imposera des conditions absorbantes de type PML (Perfectly Matched Layer) (voir Annexe B) pour simuler un domaine infini [1].

Comme on a transformé notre système en un système initialement au repos, on prend pour conditions initiales $\vec{v} = \vec{0}$ et $\tau = 0$ dans Ω . On en déduit la solution à l'extérieur de la faille Γ en résolvant les équations (1.3)-(1.4).

1.2 Formulation mathématique

Le tenseur de contraintes τ peut être décomposé en un tenseur de trace (ou sphérique)

$$s = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \tau I_n$$

et un tenseur déviatorique

$$d = \tau - s.$$

En notant $T = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \tau$, le système (1.3)-(1.4) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla T + \operatorname{div} d \quad (1.5)$$

$$\frac{n}{n\lambda + 2\mu} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{v} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial d}{\partial t} = \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{n} \operatorname{div} \vec{v} I_n \quad (1.7)$$

On introduit aussi les notations suivantes :

$$\Lambda = \operatorname{diag} \left(\rho I_n, \frac{n}{n\lambda + 2\mu}, \frac{1}{\mu} I_n \right) \text{ et } \tilde{\Lambda} = \operatorname{diag} \left(\frac{n}{n\lambda + 2\mu}, \frac{1}{\mu} I_n \right)$$

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ où } \tilde{v}_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\tilde{v}^T = (\tilde{v}_i^T)_{1 \leq i \leq n} \text{ où } \tilde{v}_i^T = \vec{e}_i \cdot \vec{v}^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\tilde{\tilde{v}} = (\tilde{\tilde{v}}_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ où } \tilde{\tilde{v}}_i = (\vec{v} \cdot \vec{e}_i) I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

avec $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

Si on note $\vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ T \\ d \end{pmatrix}$, le système s'écrit alors sous la forme conservative :

$$\Lambda \vec{W}_t - \operatorname{div} \mathcal{F}(\vec{W}) = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(\vec{W}) = \begin{pmatrix} T I_n + d \\ \vec{v} \\ \tilde{v} + \tilde{v}^T - \frac{2}{n} \tilde{\tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

L'équation (1.8) est intégrée sur un volume de contrôle C, ce qui donne

$$\int_C \Lambda \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \int_{\partial C} \mathcal{F}(\vec{W}) \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{n} est la normale extérieure sortante à la cellule C. La solution étant supposée constante par cellule, on obtient :

$$\mathcal{A}(C) \Lambda (\vec{W}_t)_C = \sum_{C' \in V(C)} \Phi_{C,C'} + \Phi_{C,\infty}$$

où $\mathcal{A}(C)$ est le volume de la cellule C, $(\vec{W}_t)_C$ est une approximation de $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}$ dans la cellule C, $V(C)$ est l'ensemble des cellules voisines de C, $\Phi_{C,C'}$ est le flux numérique à l'interface de C et C', et $\Phi_{C,\infty}$ est le flux au bord. Le flux est approché par

$$\Phi_{C,C'} \simeq \int_{\partial C \cap \partial C'} \mathcal{F}(\vec{W}) \cdot \vec{n} dS$$

et on utilise un schéma centré en espace donnant l'approximation

$$\Phi_{C,C'} = \Phi(\vec{W}_C, \vec{W}_{C'}) = \mathcal{F}\left(\frac{\vec{W}_C + \vec{W}_{C'}}{2}\right) \cdot \int_{\partial C \cap \partial C'} \vec{n} dS.$$

Si on désigne par \mathcal{V} et \mathcal{C} les parties vitesse et contraintes de \vec{W} , i.e. $\vec{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{V} = \vec{v}$ et $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} T \\ d \end{pmatrix}$, alors les flux se découpent en

$$\Phi(\vec{W}_C, \vec{W}_{C'}) = (\Phi_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}_C, \mathcal{C}_{C'}), \Phi_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}_C, \mathcal{V}_{C'}))^T.$$

Pour la discrétisation temporelle, on peut utiliser un schéma saute-mouton. On obtient alors à l'intérieur du domaine le schéma suivant :

$$\rho \mathcal{V}_C^{n+\frac{1}{2}} = \rho \mathcal{V}_C^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}(C)} \sum_{C' \in V(C)} \Phi_V(\mathcal{C}_C^n, \mathcal{C}_{C'}^n) \quad (1.9)$$

$$\tilde{\Lambda} \mathcal{C}_C^{n+1} = \tilde{\Lambda} \mathcal{C}_C^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}(C)} \sum_{C' \in V(C)} \Phi_C(\mathcal{V}_C^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{V}_{C'}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (1.10)$$

Dans [3], M. Remaki montre qu'un tel schéma appliqué aux équations de Maxwell est d'ordre deux en temps et en espace pour un maillage régulier.

Le but de ce mémoire étant d'implémenter une nouvelle méthode volumes finis pour résoudre les équations de l'élastodynamique, on se restreindra ici au cas bidimensionnel. On supposera donc dans toute la suite que $n = 2$. On notera alors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$ le vecteur vitesse et $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$ le tenseur de contraintes. On posera

$$T = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \tau = \frac{1}{2} (\tau_{xx} + \tau_{zz}) \quad \text{et} \quad T' = \frac{1}{2} (\tau_{xx} - \tau_{zz}).$$

Le système (1.5)-(1.7) s'écrit alors simplement :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial(T + T')}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (1.11)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial(T - T')}{\partial z} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (1.15)$$

On se limitera également à des géométries simples de faille, qui seront assimilées à des droites bien que nous n'exploitons pas les propriétés de symétrie de cette configuration particulière dans notre approche numérique (voir Annexe A).

1.3 Méthodes des volumes finis en deux dimensions d'espace

Considérons un problème de Cauchy pour une équation en deux dimensions d'espace qui s'écrit sous forme conservative :

$$u_t + f(u)_x + g(u)_z = 0 \quad (1.16)$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z) \quad (1.17)$$

dans un domaine bidimensionnel Ω . Le domaine de calcul est discrétisé en triangles quelconques de types éléments finis. A partir du même maillage, deux choix sont possibles pour les volumes de contrôles, conduisant à des schémas similaires, les différences résidant essentiellement dans la formulations de schémas d'ordre élevé en espace ainsi que dans le traitement des conditions aux limites.

La première méthode utilise des cellules centrées aux nœuds du maillage. La cellule C_i est obtenue en joignant les centres de gravités des triangles contenant i aux milieux des arêtes partant de i .

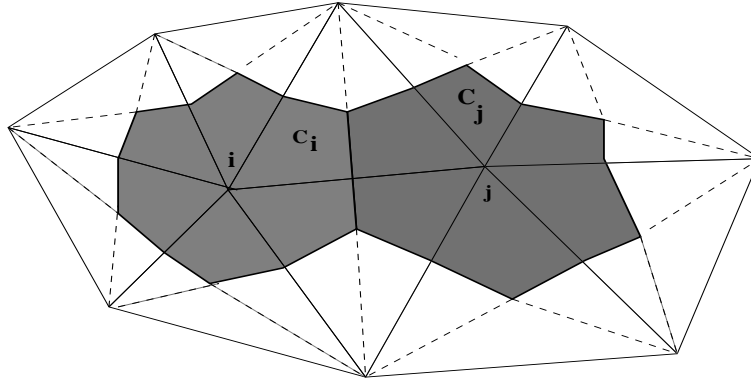


FIG. 1.2 – Cellule d'intégration C_i pour la méthode centrée aux nœuds

Une deuxième méthode consiste à prendre les triangles du maillage comme volume de contrôle. On dit que la cellule est centrée aux éléments. Le contour de la cellule est dans ce cas le bord du triangle et l'interface entre deux cellules est le segment commun aux deux triangles.

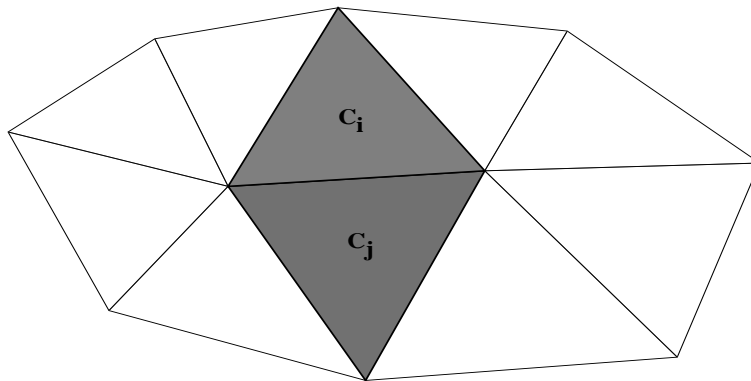


FIG. 1.3 – Cellule d'intégration C_i pour la méthode centrée aux éléments

Pour les deux méthodes, on obtient une formulation faible en intégrant l'équation (1.16) sur la cellule C_i .

Dans ce travail, on a opté pour la deuxième méthode qui est mieux adaptée au cas d'un milieu hétérogène. Le domaine de calcul est rectangulaire et le maillage est simplement construit à partir de quadrangles coupés dans les deux directions, en drapeau anglais.

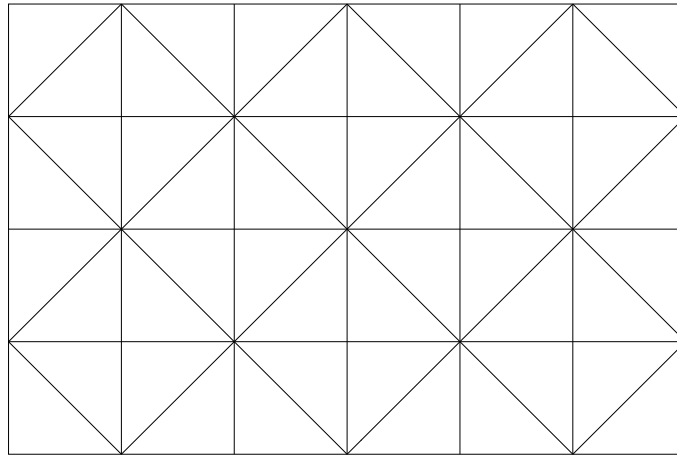


FIG. 1.4 – *Maillage régulier en drapeau anglais*

Cette construction n'est pas nécessaire, la méthode étant applicable à des maillages quelconques, mais elle simplifie la mise en œuvre pour nous concentrer sur les conditions aux limites sur la faille.

Chapitre 2

Source ponctuelle

2.1 Cas test

On considère une source ponctuelle qui émet le même champs d'onde dans toutes les directions. Le domaine de calcul est un carré de 20000 m de côté avec des conditions PML aux bords. La rupture est appliquée par une chute de la contrainte cisailante τ_{xz} de sa valeur initiale nulle à -30 bars linéairement en 0.1s, et on cherche à calculer les sismogrammes de v_x et v_z enregistrés en divers capteurs autour de la source (Fig.2.1).

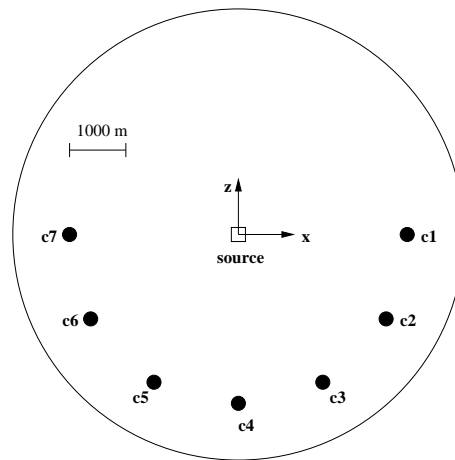


FIG. 2.1 – Position des divers capteurs situés dans un rayon de 3000 m autour de la source

2.2 Choix du support de la source

Dans un maillage en drapeau anglais, plusieurs configurations sont possibles pour la représentation d'une source dont le support a une surface fixe.

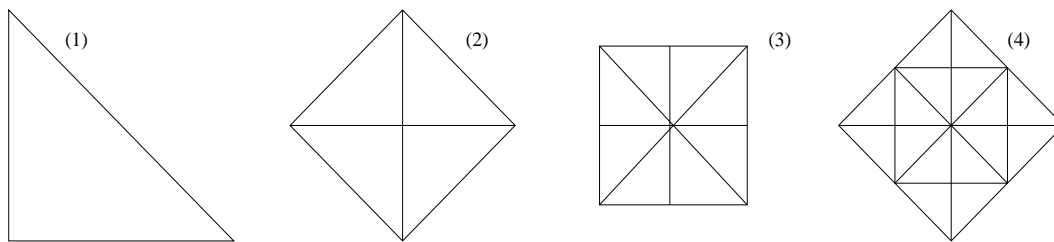


FIG. 2.2 – Exemples de configurations possibles pour le choix de la source dans un maillage en drapeau anglais.

Le cas simple consistant à prendre la source sur un seul triangle (configuration (1)) est à rejeter car fournit des résultats erronés. La figure 2.3 montre par

exemple que le sismogramme de v_z enregistré au capteur c1 présente des oscillations trop importantes pour être négligées. Les autres sismogrammes obtenus dans les différents autres capteurs, et qu'on ne montre pas ici, ne correspondent pas non plus à la solution de référence trouvée dans [2] (voir Fig.2.11).

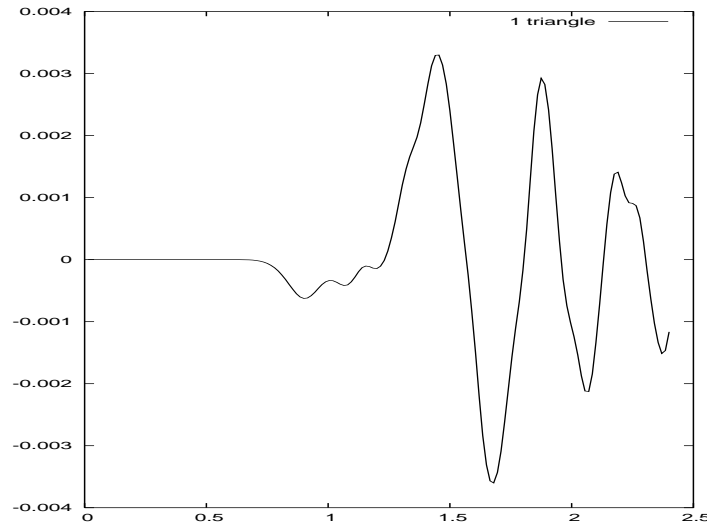


FIG. 2.3 – Composante v_z enregistré au capteur c1.

Les tests effectués sur les autres types de configurations montrent que le choix de la configuration (4) de la figure 2.2 donne des résultats plus réguliers que ceux obtenus par les autres. La figure 2.4 montre par exemple la comparaison entre les vitesses v_z enregistrés au capteur c1 pour les deux configurations (3) et (4) de la figure 2.2. On remarque que les oscillations parasites obtenues avec la configuration (4) sont moins importantes que celles observées pour la configuration (3), mais aussi que ces oscillations sont de plus en plus faibles en augmentant le nombre de cellules pour la dernière configuration alors que ce n'est pas toujours le cas pour la précédente.

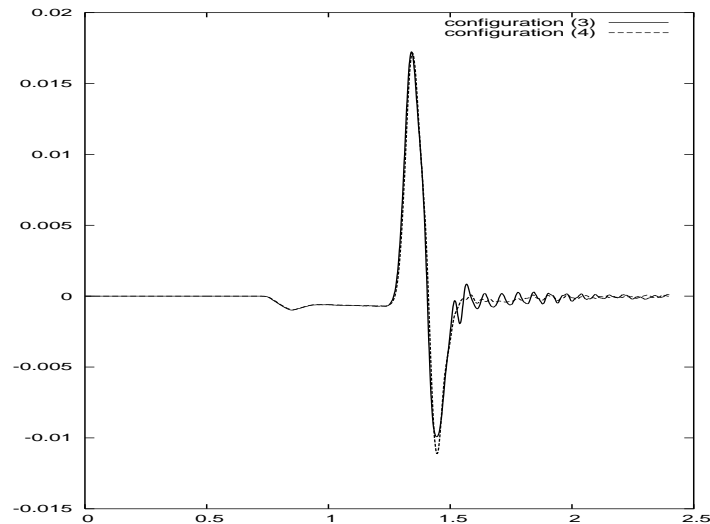


FIG. 2.4 – *Comparaison de la composante v_z pour deux discrétisations différentes de la source*

On ne s'intéressera donc dans ce qui suit qu'aux sources représentées par ce dernier genre de configuration.

2.3 Analyse du support de la source

Le nombre d'éléments constituant la source a une influence majeure sur la nature de la solution. Ce nombre vaut dans notre cas $4n^2$; $n \in 2\mathbb{N}$. Plus ce nombre est grand, meilleure est la solution. La figure 2.5 compare différents sismogrammes obtenus pour diverses valeurs de n . On remarque qu'en augmentant le nombre d'éléments à l'intérieur de la source, les oscillations diminuent. Ce même aspect de régularité a été observé en différences finies sur des grilles décalées [2].

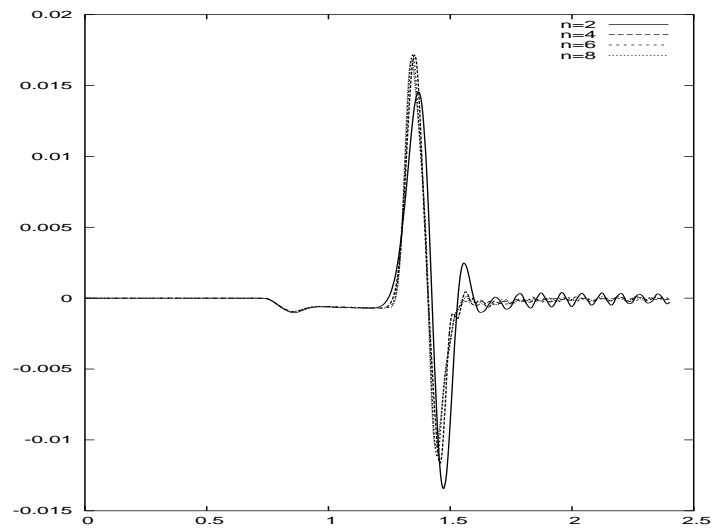


FIG. 2.5 – Composante v_z pour différentes discrétisations de la source

La source ponctuelle a toujours un support fini, ce qui veut dire qu'on doit préserver sa surface quand le nombre des éléments augmente. Cette condition se traduit dans notre cas par le choix d'un pas d'espace h_n vérifiant la relation :

$$h_n \cdot n = \sqrt{S}$$

où S est la surface physique de la source.

Cette relation a été obtenue numériquement en comparant les résultats avec ceux obtenus dans l'article [2].

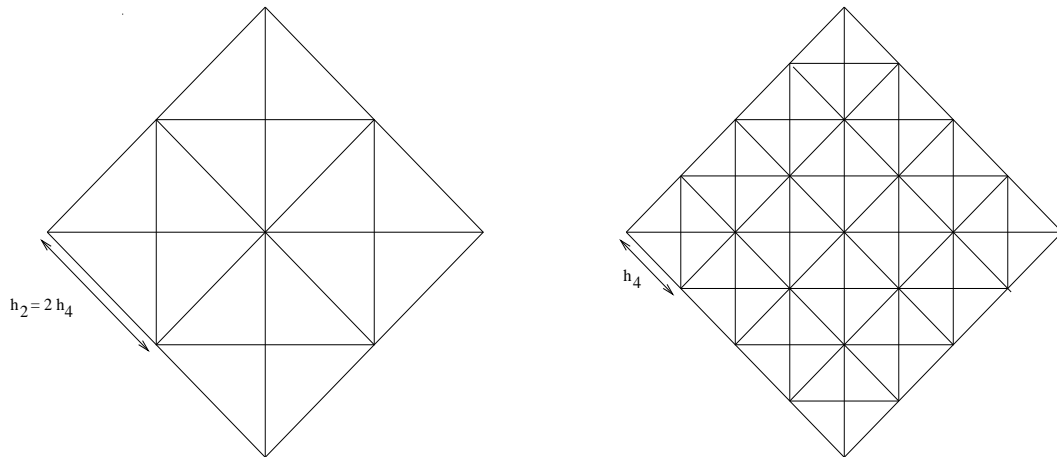
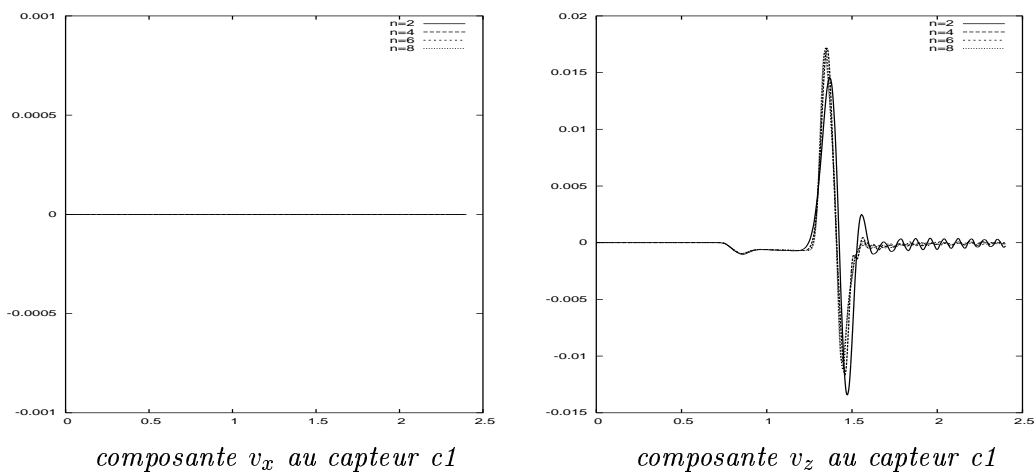
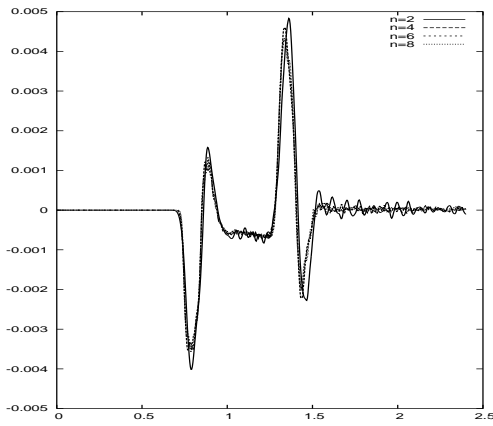
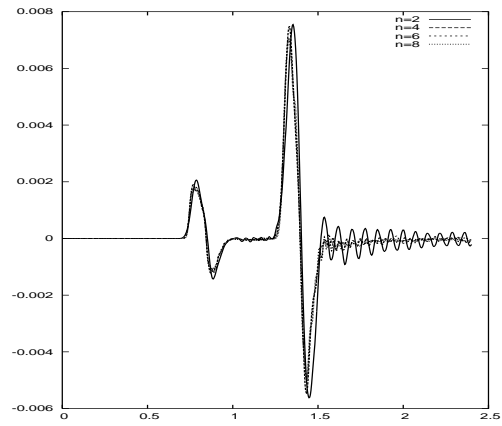
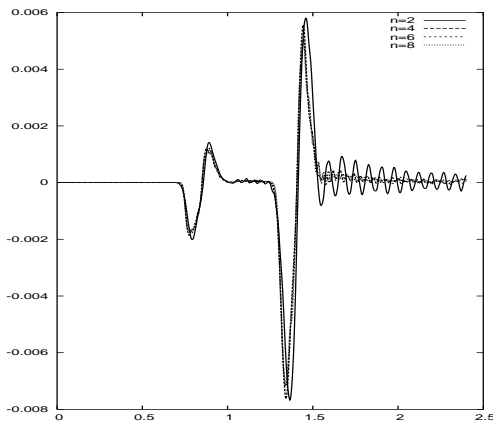
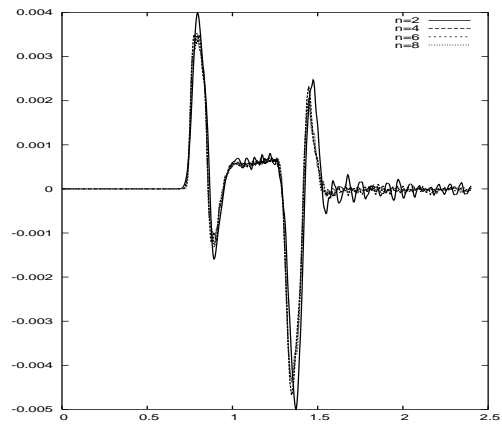
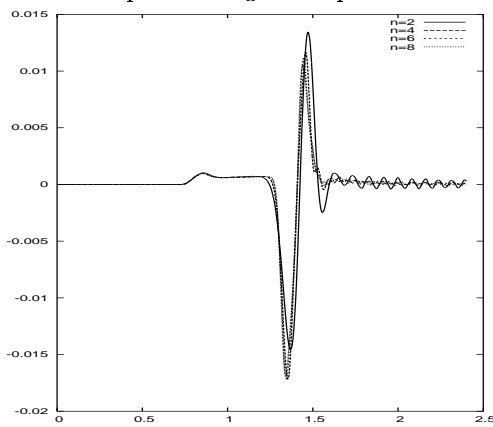
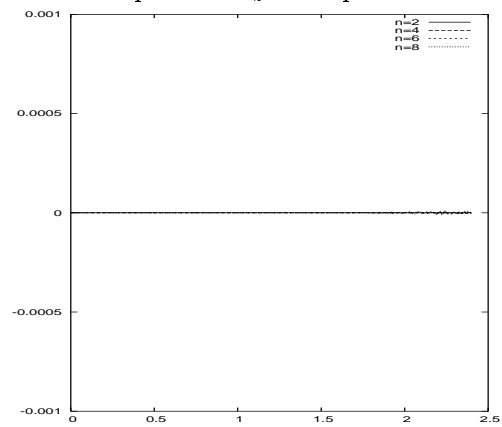


FIG. 2.6 – Deux cellules numériques équivalentes vérifiant la relation $h_n \cdot n = \sqrt{S}$ pour une même surface S

La figure 2.7 compare les sismogrammes de v_x et v_z obtenus aux différents capteurs pour diverses valeurs de n . On remarque que les résultats sont très proches dans toutes les situations, avec une nette diminution des oscillations parasites pour des valeurs de n de plus en plus grandes.



composante v_x au capteur $c2$ composante v_z au capteur $c2$ composante v_x au capteur $c3$ composante v_z au capteur $c3$ composante v_x au capteur $c4$ composante v_z au capteur $c4$

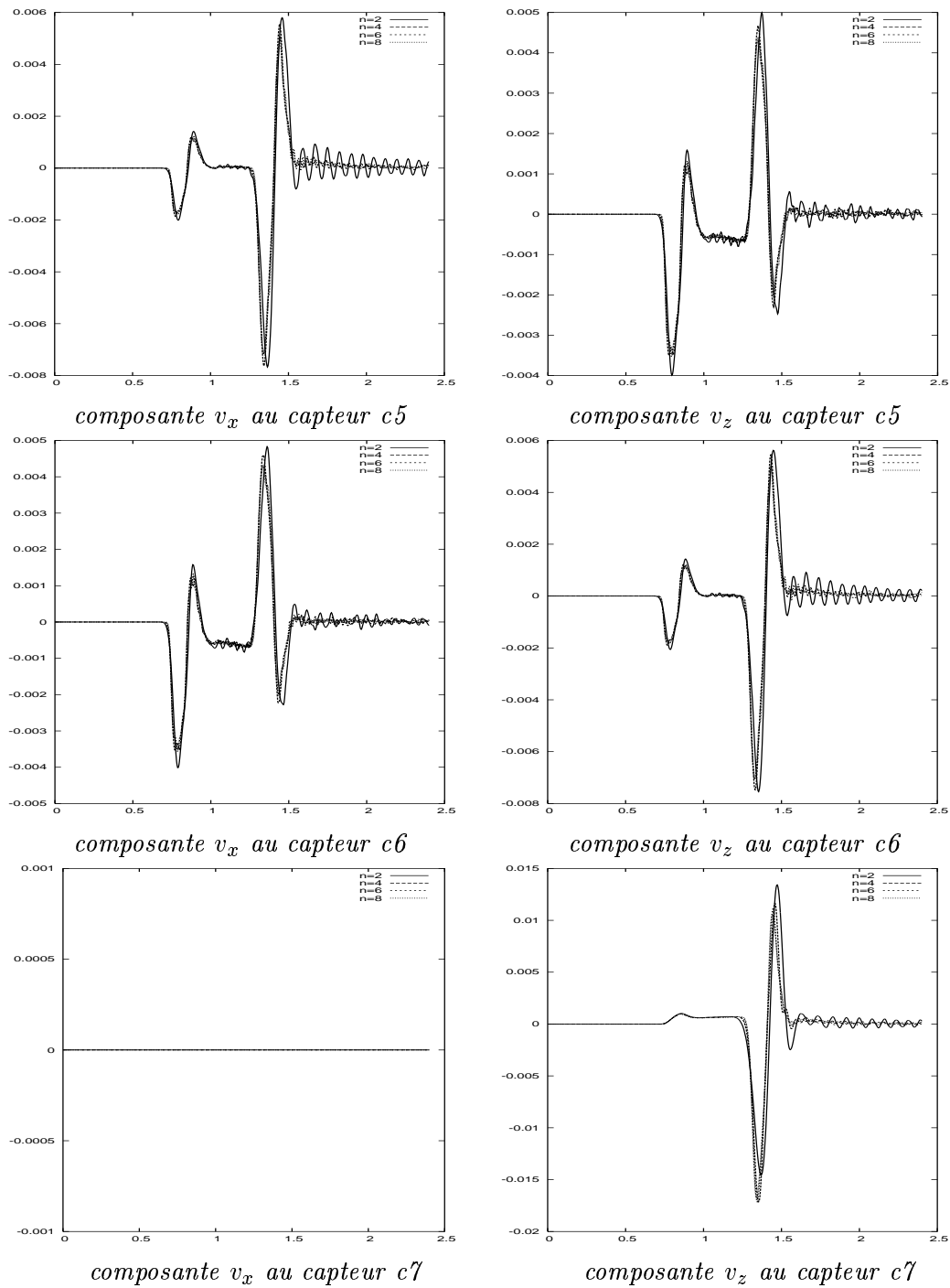


FIG. 2.7 – *Comparison entre les sismogrammes enregistrés en sept capteurs c1-c7 pour différentes discrétisations de la source.*

Sur les diagrammes précédents, on peut voir clairement les ondes P et S. L'onde P étant la plus rapide, elle précède toujours l'onde S qui est d'amplitude bien plus importante. La figure 2.10 montre les diagrammes de rayonnement de l'onde P et de l'onde S à différents temps. On vérifie bien que l'onde P est plus rapide que l'onde S. D'autre part, pour les profils, on retrouve la théorie selon laquelle la radiation élastique peut être décrite par le modèle de double couples de forces selon le schéma suivant :

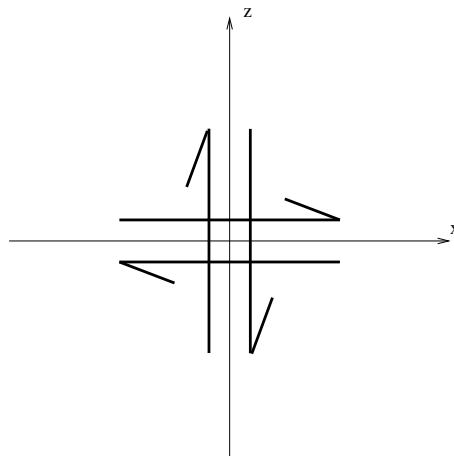


FIG. 2.8 – *Modèle de double couples de forces.*

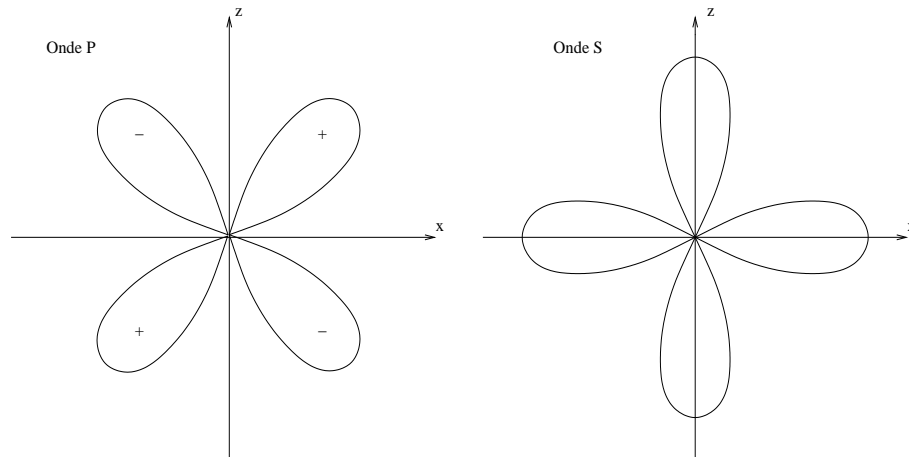


FIG. 2.9 – Diagrammes de rayonnement de l'onde P (à gauche) et de l'onde S (à droite). Le signe + correspond à une zone de compression et le signe - à une zone de dilatation.

On vérifie aussi que l'onde P s'annule sur les plan horizontal et vertical passant par le centre de la source, appelés plans nodaux (voir [5] pour de plus amples explications).

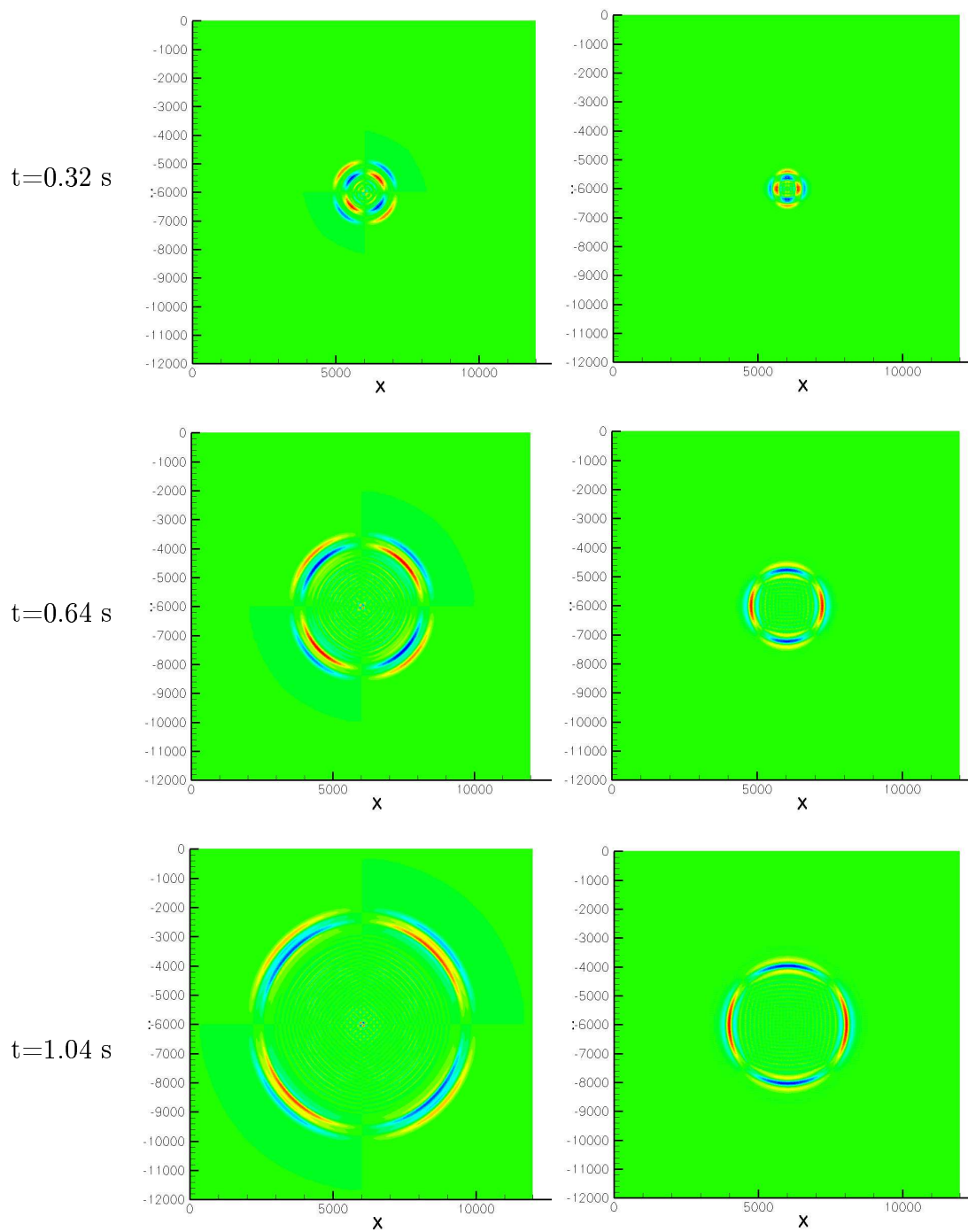
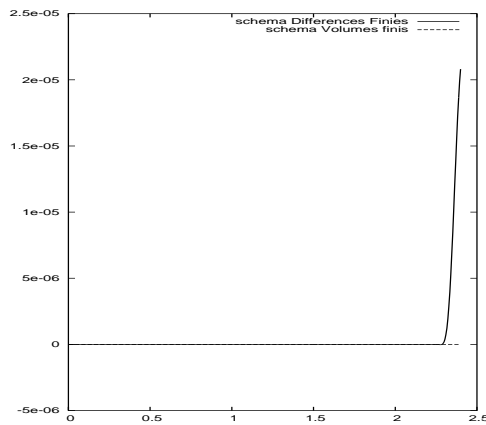


FIG. 2.10 – Diagrammes de rayonnement de l'onde P (à gauche) et de l'onde S (à droite)

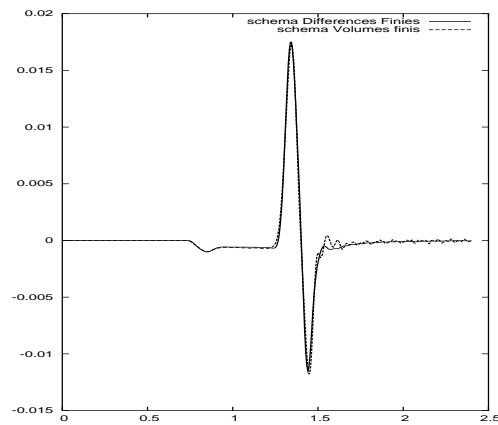
RRH 5332

2.4 Validation des résultats

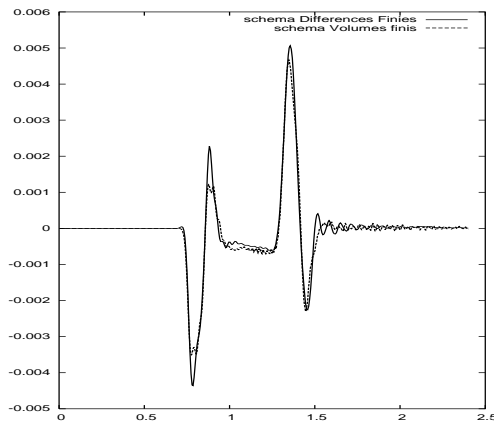
Pour valider nos résultats, on les compare aux solutions trouvées avec le schéma différences finies [2]. On remarque que les résultats sont quantitativement comparables sans aucune mise à l'échelle des sismogrammes.



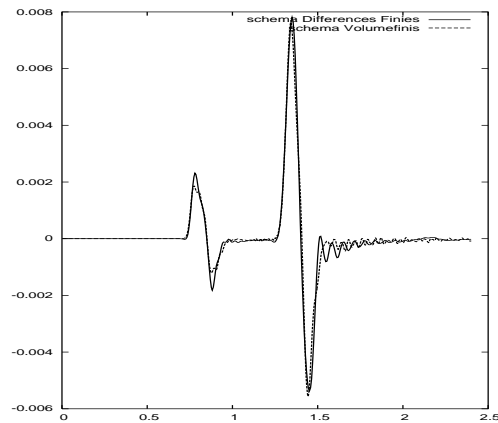
composante v_x au capteur $c1$



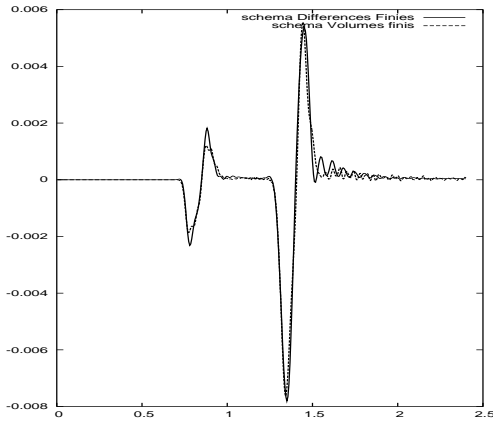
composante v_z au capteur $c1$



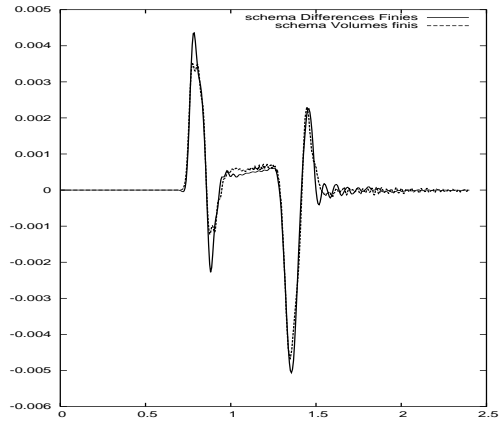
composante v_x au capteur $c2$



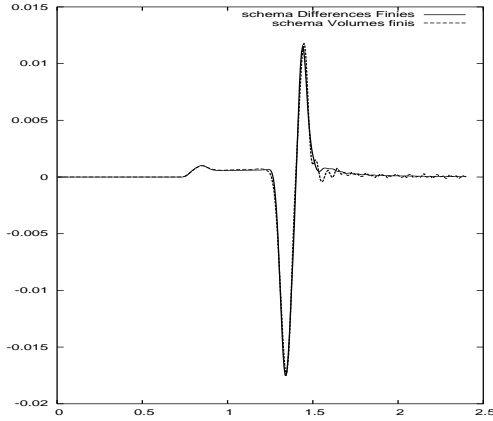
composante v_z au capteur $c2$



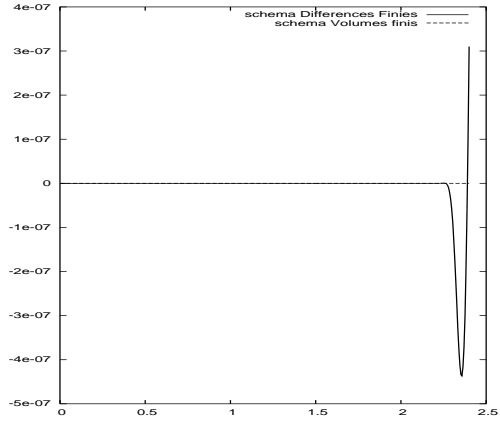
composante v_x au capteur $c3$



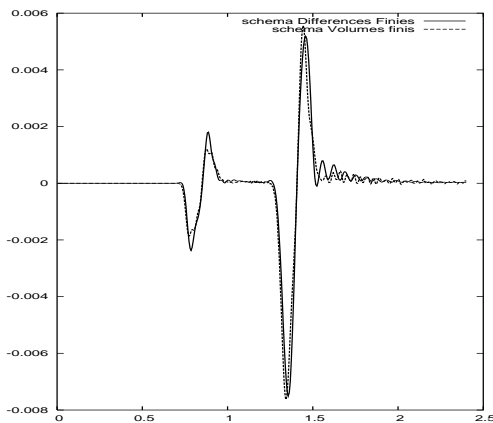
composante v_z au capteur $c3$



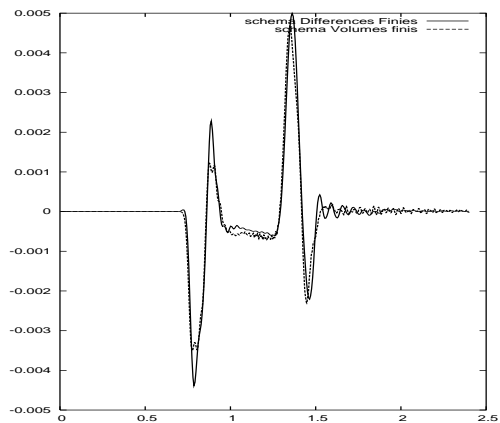
composante v_x au capteur $c4$



composante v_z au capteur $c4$



composante v_x au capteur $c5$



composante v_z au capteur $c5$

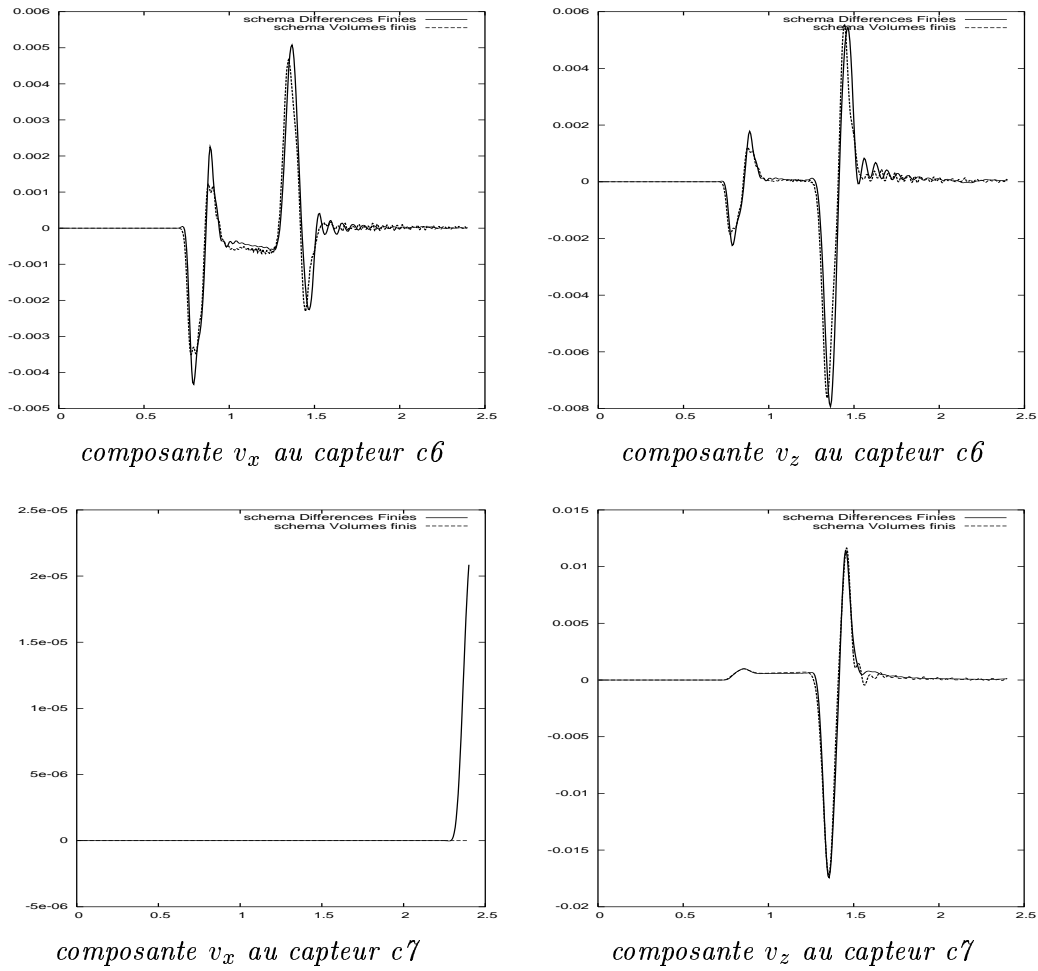


FIG. 2.11 – Comparaison entre les sismogrammes enregistrés en sept capteurs $c1$ - $c7$ obtenus par la méthode *Différences finies* et *Volumes finis*.

On note cependant une petite différence sur les premiers extrema : ceci est dû à l'introduction d'un Laplacien diffusant dans le schéma différences finies permettant de réduire les oscillations numériques parasites. De plus ce dernier

schéma est d'ordre 4 en espace et 2 en temps alors que le schéma volumes finis utilisé ici est d'ordre 2 en temps et en espace.

Chapitre 3

Faille plane finie

Dans cette section, on étudie la propagation des ondes générées par une faille plane finie en utilisant deux approches : l'approche par élément et l'approche par segment. Dans l'approche par élément, la faille est représentée par un ensemble d'éléments dans lesquels on applique une chute de la contrainte cisailante de 0 à -30 bars en 0.1s (voir section 1.1.2). Deux configurations pour la représentation de la faille sont testées aboutissant aux mêmes résultats. Dans l'approche par segment, on cherche à représenter la faille par des segments du maillage. Les conditions aux limites doivent être changées afin de préserver la stabilité du schéma. Une étude d'énergie est nécessaire pour déterminer ces conditions. Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux de l'approche par élément pour être validés.

3.1 Faille décrite par éléments

On considère une faille plane horizontale de longueur 6000 m située au centre d'un domaine rectangulaire $[0,12000] \times [0,6000]$. On applique une chute de la contrainte cisailante de 0 à -30 bars linéairement en 0.1s et on cherche à calculer les sismogrammes de v_x et v_z dans divers capteurs autour de la faille, placés comme indiqué sur la figure 3.1.

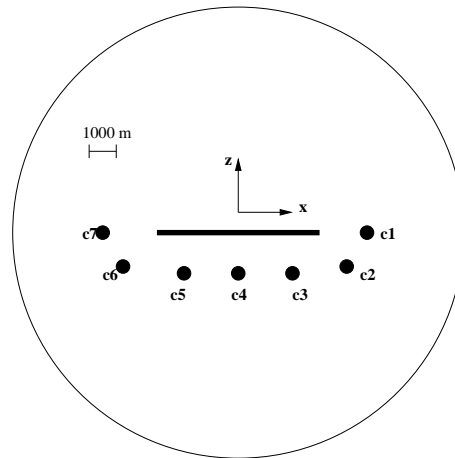


FIG. 3.1 – *Position des divers capteurs autour de la faille*

Deux cas ont été étudiés pour la représentation de la faille. Le premier consiste à discrétiser la faille sur une succession de cellules contigües et le deuxième sur des cellules adjacentes comme le montre la figure 3.2.

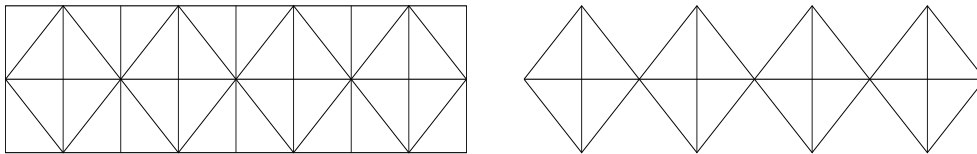
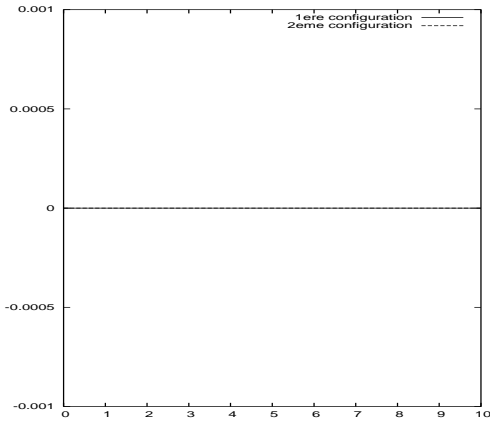
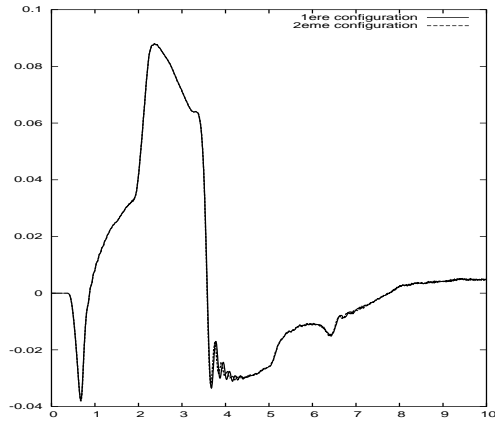


FIG. 3.2 – *Deux configurations possibles pour la discrétisation de la faille*

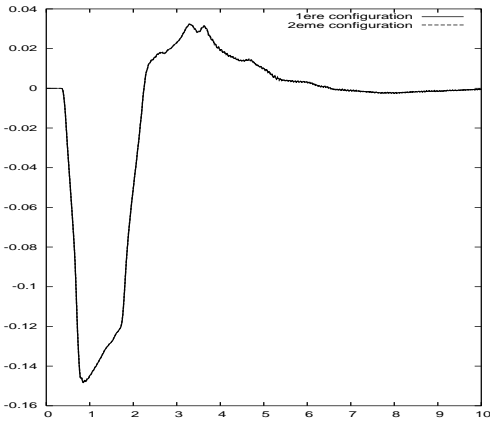
La figure 3.3 montre les sismogrammes de v_x et v_z dans les sept capteurs cités ci-dessus pour les deux configurations. On remarque que tous les résultats coïncident. On vérifie aussi que les autres composantes de la solution i.e. les composantes du tenseur de contraintes sont semblables pour les deux configurations.



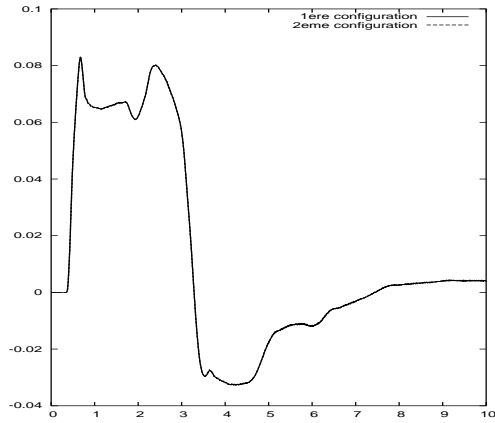
composante v_x au capteur $c1$



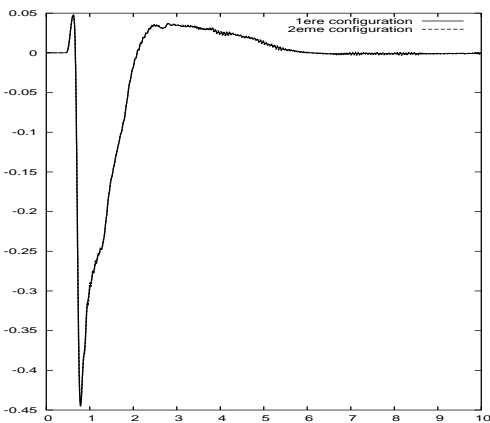
composante v_z au capteur $c1$



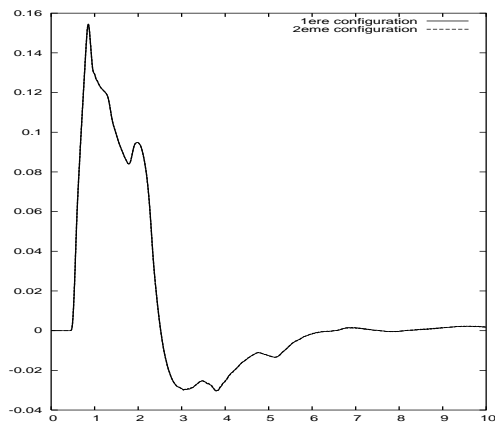
composante v_x au capteur $c2$



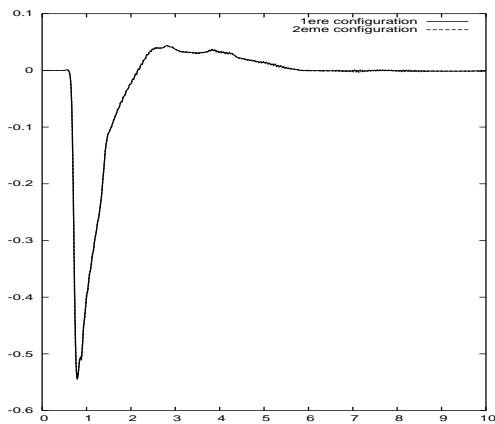
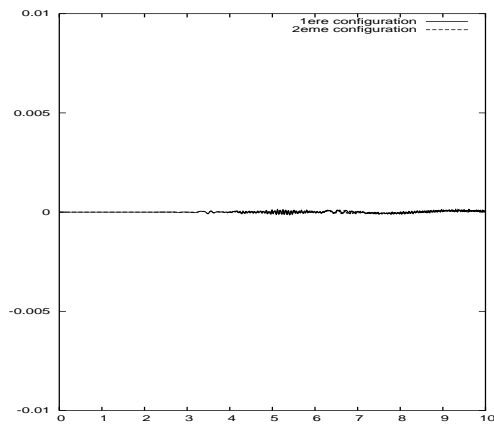
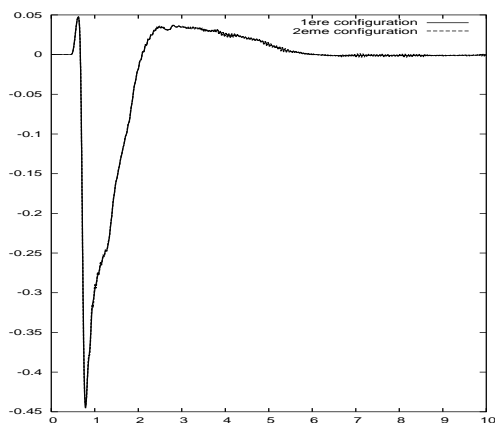
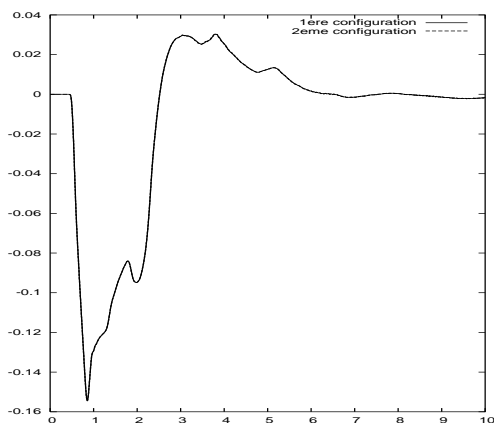
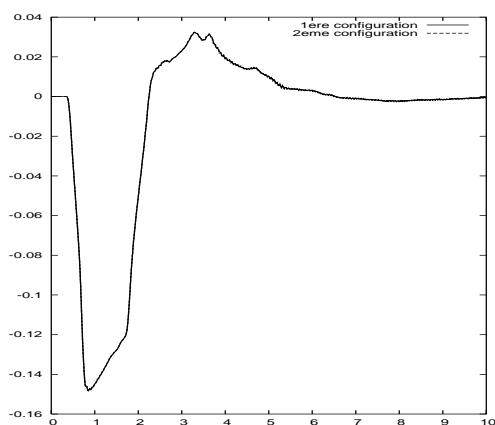
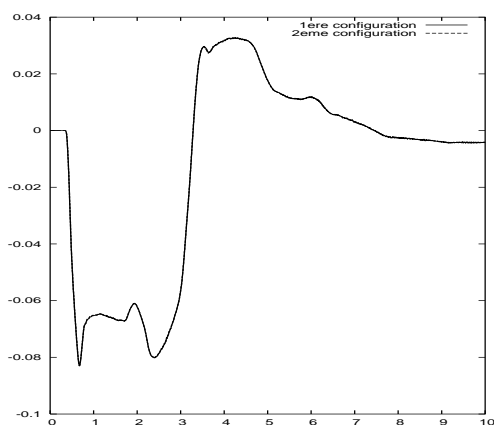
composante v_z au capteur $c2$



composante v_x au capteur $c3$



composante v_z au capteur $c3$

*composante v_x au capteur c_4* *composante v_z au capteur c_4* *composante v_x au capteur c_5* *composante v_z au capteur c_5* *composante v_x au capteur c_6* *composante v_z au capteur c_6*

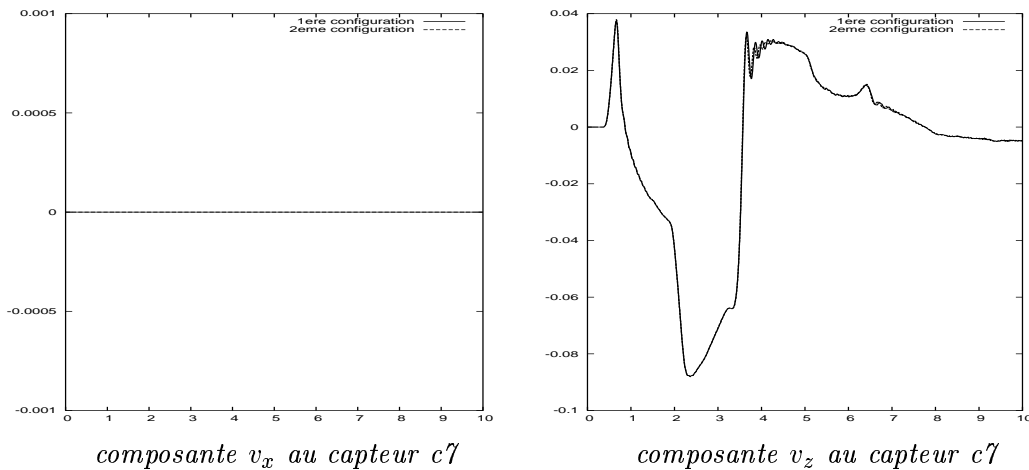


FIG. 3.3 – Comparaison entre les sismogrammes enregistrés en sept capteurs $c1-c7$ pour les deux configurations de la faille.

Le choix de la deuxième configuration permet de vérifier que la condition aux limites peut être appliquée seulement aux cellules ayant un côté sur l'axe de symétrie horizontale de la faille. Ceci permet éventuellement de supposer qu'un traitement portant uniquement sur cet axe est possible. C'est l'approche par segment.

3.2 Faille décrite par segments

On cherche à présent à modéliser la faille par une succession de segments et non pas de cellules. Les conditions aux limites sont donc remplacées par des conditions sur les flux traversant ces segments. Une étude d'énergie se trouve alors nécessaire afin de déterminer ces conditions.

3.2.1 Étude d'énergie

Soit E l'énergie définie par :

$$E = E_c + E_m$$

où

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \|v\|^2$$

est l'énergie cinétique du système et

$$E_m = \frac{1}{2} \tau^T \varepsilon$$

est son énergie mécanique (voir annexe C).

En utilisant la loi de Hooke, on obtient en développant

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} \tau^T C \tau \\ &= \frac{1}{8\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (\tau_{xx}^2 + \tau_{zz}^2) - \frac{2\lambda}{\lambda + \mu} \tau_{xx} \tau_{zz} + 4\tau_{xz}^2 \right) \\ &= \frac{1}{8\mu(\lambda + \mu)} \left((\lambda + 2\mu) (\tau_{xx} + \tau_{zz})^2 - 4(\lambda + 2\mu) \tau_{xx} \tau_{zz} \right) + \frac{1}{2\mu} \tau_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{8\mu(\lambda + \mu)} \left((\lambda + 2\mu) \left((\tau_{xx} + \tau_{zz})^2 - \left((\tau_{xx} + \tau_{zz})^2 - (\tau_{xx} - \tau_{zz})^2 \right) \right) \right) + \frac{1}{2\mu} \tau_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \left((\lambda + 2\mu) T^2 - (\lambda + \mu) (T^2 - T'^2) \right) + \frac{1}{2\mu} \tau_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \left(\mu T^2 + (\lambda + \mu) T'^2 \right) + \frac{1}{2\mu} \tau_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + \mu} T^2 + \frac{1}{\mu} T'^2 + \frac{1}{\mu} \tau_{xz}^2 \right) \end{aligned}$$

Ainsi l'énergie totale du système s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} \rho (v_x^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + \mu} T^2 + \frac{1}{\mu} T'^2 + \frac{1}{\mu} \tau_{xz}^2 \right) \quad (3.1)$$

En dérivant l'équation (3.1) par rapport au temps et en utilisant les équations (1.11)-(1.15), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \left(\frac{\partial(T + T')}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \right) v_x + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial(T - T')}{\partial z} \right) v_z \\ &+ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) T + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) T' + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \tau_{xz} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left((T + T') v_x + \tau_{xz} v_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{xz} v_x + (T - T') v_z \right). \end{aligned}$$

Et en posant $\vec{F} = \begin{pmatrix} (T + T') v_x + \tau_{xz} v_z \\ \tau_{xz} v_x + (T - T') v_z \end{pmatrix}$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} E dx dz = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

En écrivant

$$\vec{F} = \mathcal{V}^T \sigma$$

avec $\sigma = \begin{pmatrix} T + T' & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & T - T' \end{pmatrix}$ et $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} E dx dz &= \int_{\partial\Omega} \mathcal{V}^T \sigma \vec{n} dS \\ &= \int_{\Gamma \cup \Gamma_{ext}} \mathcal{V}^T \sigma \vec{n} dS \end{aligned}$$

Si de plus Ω est supposé infini, alors la variation de l'énergie se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} E dx dz = \int_{\Gamma} \mathcal{V}^T \sigma \vec{n} dS.$$

On a donc conservation de l'énergie si

$$\mathcal{V}^T \sigma \vec{n} = 0$$

le long de la faille Γ .

Maintenant, si on passe à la version discrétisée, le système (1.9)-(1.10) s'écrit :

$$\mathcal{A}_i \rho \frac{\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{V}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} N_{ij} \cdot \frac{\gamma_i^n + \gamma_j^n}{2} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{A}_i \tilde{\Lambda} \frac{\gamma_i^n - \gamma_i^{n-1}}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} N_{ij}^T \cdot \frac{\mathcal{V}_i^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{V}_j^{n-\frac{1}{2}}}{2} \quad (3.3)$$

$$\text{où } \gamma = \begin{pmatrix} T \\ T' \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\Lambda} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda + \mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right) ;$$

$N_{ij} = \begin{pmatrix} n_{xij} & n_{xij} & n_{zij} \\ n_{zij} & -n_{zij} & n_{xij} \end{pmatrix}$ et \mathcal{A}_i est le volume de la cellule C_i . Les indices i et j désignent respectivement la cellule C_i et la cellule C_j alors que l'indice ij indique le sens de la normale de C_i vers C_j .

On définit alors l'énergie numérique dans une cellule i à l'instant n par :

$$\mathcal{E}_i^n = \frac{1}{2} \mathcal{A}_i \rho (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T \mathcal{V}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_i (\gamma_i^n)^T \tilde{\Lambda} \gamma_i^n$$

La variation de l'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned} 2 \Delta \mathcal{E}_i^n &= 2 (\mathcal{E}_i^{n+1} - \mathcal{E}_i^n) \\ &= \mathcal{A}_i \rho (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T (\mathcal{V}_i^{n+\frac{3}{2}} - \mathcal{V}_i^{n-\frac{1}{2}}) + \mathcal{A}_i (\gamma_i^{n+1} + \gamma_i^n)^T \tilde{\Lambda} (\gamma_i^{n+1} - \gamma_i^n) \\ &\quad (\text{car } \tilde{\Lambda} \text{ est symétrique}) \end{aligned}$$

En notant $\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]} = \frac{\gamma_i^{n+1} + \gamma_i^n}{2}$, on a :

$$\frac{2 \Delta \mathcal{E}_i^n}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ij} (\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]}) + \sum_{j \in V(i)} (\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ij}^T (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}}).$$

Or l'équilibre des normales d'une cellule s'écrit :

$$\int_{\partial C_i} 1.N dS = \int_{C_i} \nabla 1 dx dz = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{j \in V(i)} N_{ij} = 0$$

Ainsi

$$\frac{2 \Delta \mathcal{E}_i^n}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} (\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ij}^T \mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ij} \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]}$$

L'énergie totale du système est donnée par :

$$\mathcal{E}^n = \sum_i \mathcal{E}_i^n$$

et la variation de l'énergie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 2 \Delta \mathcal{E}^n &= 2(\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n) \\ &= \Delta t \sum_i \sum_{j \in V(i)} (\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ij}^T \mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ij} \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]} \\ &= \Delta t \sum_{i,j \text{ interne}} \left[(\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ij}^T \mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ij} \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ji}^T \mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ji} \gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right] \\ &+ \Delta t \sum_{i,j \text{ bords}} \left[(\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ij}^T \mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ij} \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]} \right] \end{aligned}$$

Comme $N_{ji} = -N_{ij}$ on a :

$$\mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j \text{ bords}} \left[(\gamma_i^{[n+\frac{1}{2}]})^T N_{ij}^T \mathcal{V}_j^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{V}_i^{n+\frac{1}{2}})^T N_{ij} \gamma_j^{[n+\frac{1}{2}]} \right]$$

Si on suppose que le domaine est infini et que le bord considéré est celui de la faille Γ , on obtient après développement :

$$\Delta \mathcal{E}^n = \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{i,j \\ \partial C_i \cap \partial C_j \in \Gamma}} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \cdot n_{ij}$$

où

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} (T_i^{[n+\frac{1}{2}]} + T_i'^{[n+\frac{1}{2}]}) v_{x_j}^{n+\frac{1}{2}} + \tau_{xz_i}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{z_j}^{n+\frac{1}{2}} + (T_j^{[n+\frac{1}{2}]} + T_j'^{[n+\frac{1}{2}]}) v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + \tau_{xz_j}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \\ \tau_{xz_i}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{x_j}^{n+\frac{1}{2}} + (T_i^{[n+\frac{1}{2}]} - T_i'^{[n+\frac{1}{2}]}) v_{z_j}^{n+\frac{1}{2}} + \tau_{xz_j}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + (T_j^{[n+\frac{1}{2}]} - T_j'^{[n+\frac{1}{2}]}) v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

et

$n_{ij} = \begin{pmatrix} n_{x_{ij}} \\ n_{z_{ij}} \end{pmatrix}$ est la normale dirigée de la cellule C_i vers la cellule C_j .

Dans le cas d'une faille horizontale, on a $n_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. On a donc conservation de l'énergie si :

$$\tau_{xz_i}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{x_j}^{n+\frac{1}{2}} + (T_i^{[n+\frac{1}{2}]} - T_i'^{[n+\frac{1}{2}]}) v_{z_j}^{n+\frac{1}{2}} + \tau_{xz_j}^{[n+\frac{1}{2}]} v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + (T_j^{[n+\frac{1}{2}]} - T_j'^{[n+\frac{1}{2}]}) v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.4)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous i et j tels que $\partial C_i \cap \partial C_j \in \Gamma$.

Ou encore

$$\begin{aligned} \tau_{xz_i}^n v_{x_j}^{n+\frac{1}{2}} + (T_i^n - T_i'^n) v_{z_j}^{n+\frac{1}{2}} + \tau_{xz_j}^n v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + (T_j^n - T_j'^n) v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ \text{et} \\ \tau_{xz_i}^{n+1} v_{x_j}^{n+\frac{1}{2}} + (T_i^{n+1} - T_i'^{n+1}) v_{z_j}^{n+\frac{1}{2}} + \tau_{xz_j}^{n+1} v_{x_i}^{n+\frac{1}{2}} + (T_j^{n+1} - T_j'^{n+1}) v_{z_i}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous i et j tels que $\partial C_i \cap \partial C_j \in \Gamma$.

Pour alléger les notations, on omettra les indices temporels. On propose donc la relation suivante :

$$\tau_{xz_i} v_{x_j} + (T_i - T_i') v_{z_j} + \tau_{xz_j} v_{x_i} + (T_j - T_j') v_{z_i} = 0 \quad (3.6)$$

pour tout temps t et tous i et j tels que $\partial C_i \cap \partial C_j \in \Gamma$.

Soient alors deux cellules i et j telles que $\partial C_i \cap \partial C_j \in \Gamma$. On a vu dans la section 1.2 que les flux à travers une surface $C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$ se découpent en

$$\Phi_{ij} = \Phi(C_i, C_j) = (\Phi_{\mathcal{V}}(\gamma_i, \gamma_j), \Phi_{\gamma}(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j))^T$$

Ce flux ne vérifie pas en général l'équation (3.6). Pour se faire, on réécrit Φ_{ij} comme somme de deux quantités indépendantes :

$$\Phi_{ij} = \Phi_i \delta_{C_i} + \Phi_j \delta_{C_j}$$

où l'on impose à Φ_i et Φ_j de vérifier les conditions de l'équation (3.6) pour chaque cellule. Il suffit alors de prendre :

$$\Phi_k = (\Phi_{\mathcal{V}}(\gamma_k, -\gamma_k), \Phi_{\gamma}(\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_k))^T \quad \text{pour } k = i, j.$$

On veut de plus que la moyenne du flux de τ_{xz} sur la faille soit égale à une constante τ_{xz}^0 (ou plus généralement égale à une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$). On prend alors dans ce cas :

$$\Phi_k = (\Phi_{\mathcal{V}}(\gamma_k + \tau_{xz}^0 \mathbf{e}_3, -\gamma_k + \tau_{xz}^0 \mathbf{e}_3), \Phi_{\gamma}(\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_k))^T \quad \text{pour } k = i, j \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce traitement se fait de sorte que deux cellules voisines de part et d'autre de la faille ne communiquent pas entre elles. Physiquement, cela traduit un **contact partiel** entre les deux lèvres de la faille (Fig. 3.4).

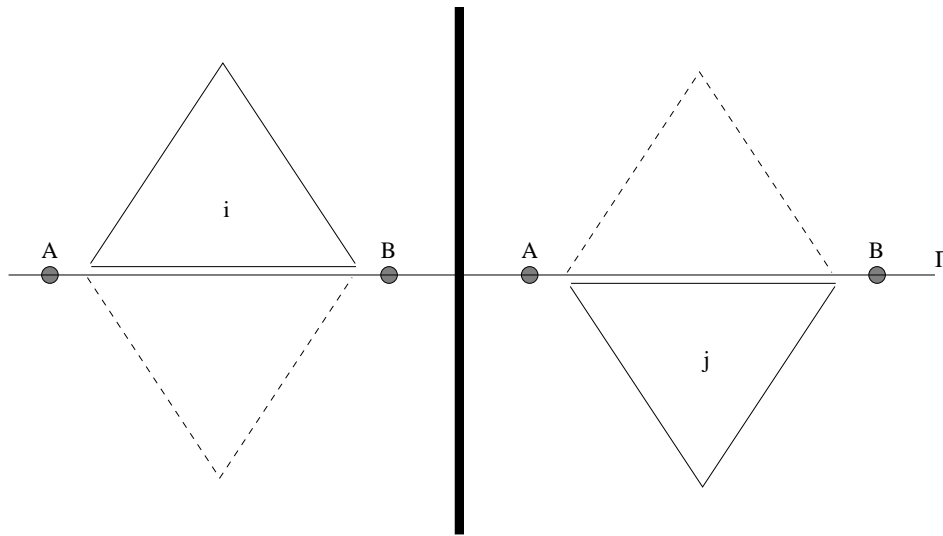


FIG. 3.4 – Deux cellules voisines de part et d'autre de la faille : contact partiel

La condition (3.6) permet aussi d'autres possibilités pour le choix des flux. Les tests effectués donnent des "solutions" stables mais qui ne correspondent pas à ceux trouvés en appliquant les conditions aux limites aux éléments. Ces possibilités ne seront donc pas retenues.

Dans le cas d'un **contact parfait**, la composante normale v_z de la vitesse doit être continue. On doit donc tenir compte de cette continuité dans le choix des flux Φ_i et Φ_j . On réécrit alors l'équation de conservation de l'énergie discrète (3.6) sous la forme

$$\begin{aligned} & \tau_{xz_{i^+}} v_{x_{i^-}} + (T_{i^+} - T'_{i^+}) v_{z_{i^-}} + \tau_{xz_{i^-}} v_{x_{i^+}} + (T_{i^-} - T'_{i^-}) v_{z_{i^+}} - \\ & \left(\tau_{xz_{j^+}} v_{x_{j^-}} + (T_{j^+} - T'_{j^+}) v_{z_{j^-}} + \tau_{xz_{j^-}} v_{x_{j^+}} + (T_{j^-} - T'_{j^-}) v_{z_{j^+}} \right) = 0 \quad (3.8) \end{aligned}$$

pour tout temps t et tous i et j tels que $\partial C_i \cap \partial C_j \in \Gamma$, avec $C_{k^+} = C_k$, $k = i, j$ et C_{k^-} est une cellule fictive telle que $\partial C_{i^+} \cap \partial C_{i^-} = \partial C_{j^+} \cap \partial C_{j^-} = \partial C_i \cap \partial C_j$ (Fig. 3.5).

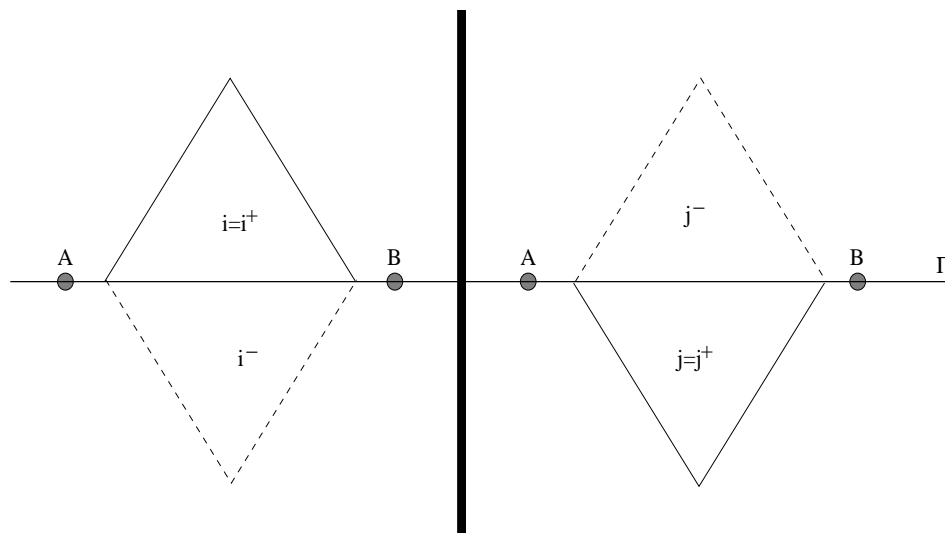


FIG. 3.5 – Deux cellules voisines de part et d'autre de la faille : contact parfait

En tenant compte cette fois de la continuité de v_z , on choisit

$$\Phi_i = \left(\Phi_{\mathcal{V}}(\gamma_i + \tau_{xz}^0 \cdot \mathbf{e}_3, \gamma_j \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \gamma_i \cdot \mathbf{e}_3 + \tau_{xz}^0 \cdot \mathbf{e}_3), \Phi_{\gamma}(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_i \cdot \mathbf{e}_1 + \mathcal{V}_j \cdot \mathbf{e}_2) \right)^T$$

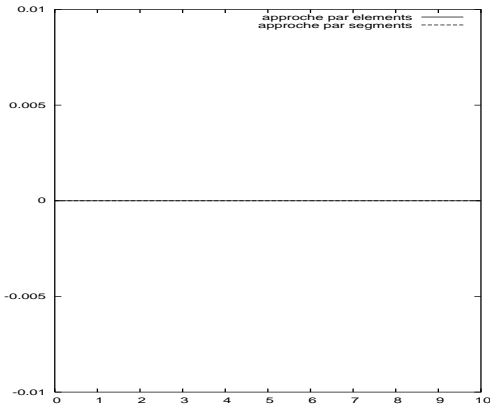
et

$$\Phi_j = \left(\Phi_{\mathcal{V}}(\gamma_j + \tau_{xz}^0 \cdot \mathbf{e}_3, \gamma_i \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \gamma_j \cdot \mathbf{e}_3 + \tau_{xz}^0 \cdot \mathbf{e}_3), \Phi_{\gamma}(\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_j \cdot \mathbf{e}_1 + \mathcal{V}_i \cdot \mathbf{e}_2) \right)^T$$

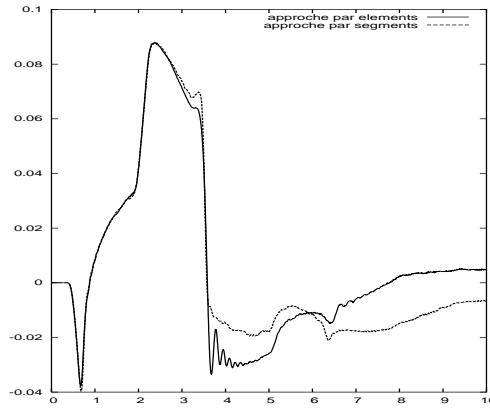
où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

3.2.2 Résultats

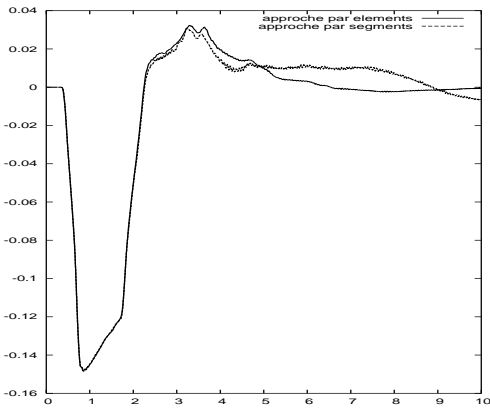
On présente ici les sismogrammes de v_x et v_z enregistrés aux divers capteurs autour de la faille pour les deux approches citées ci dessus (contact partiel et contact parfait). On les compare aux résultats obtenus par l'approche par éléments. La figure 3.6 montre que la solution obtenue pour un contact partiel présente quelques différences par rapport à celle obtenue par l'approche par élément. Ceci peut être expliqué par le fait qu'on n'a pas tenu compte de la continuité de v_z dans cette approche. La figure 3.7 montre par contre qu'on a bien une coïncidence parfaite entre les solutions obtenues par l'approche par éléments et l'approche par segment pour un contact parfait. On peut vérifier également que les composantes du tenseur de contraintes sont identiques pour ces deux approches.



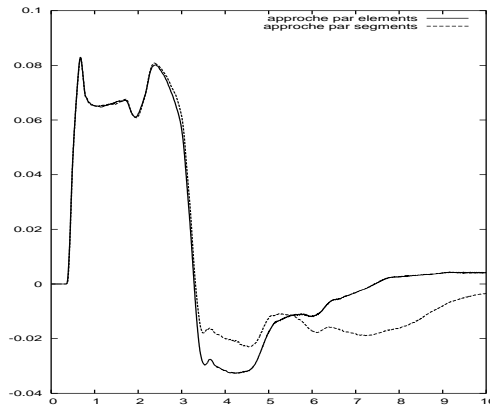
composante v_x au capteur $c1$



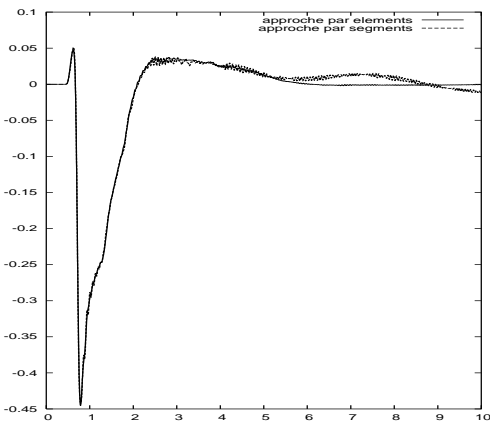
composante v_z au capteur $c1$



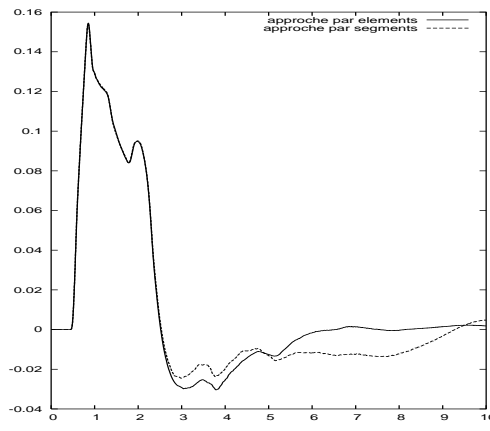
composante v_x au capteur $c2$



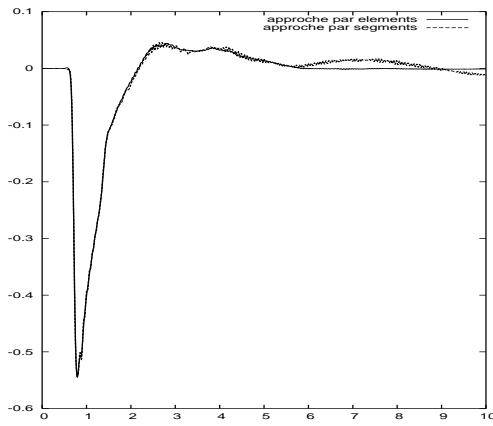
composante v_z au capteur $c2$



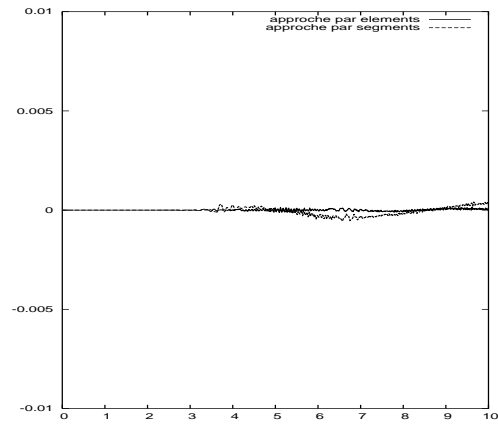
composante v_x au capteur $c3$



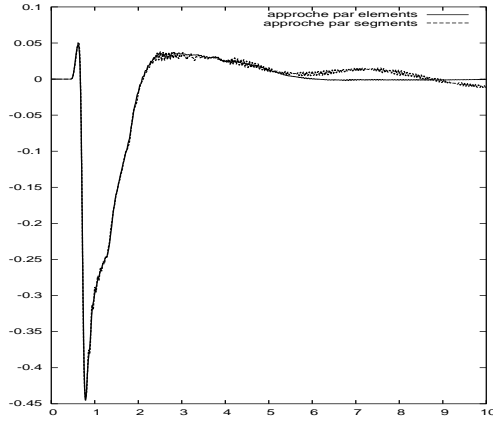
composante v_z au capteur $c3$



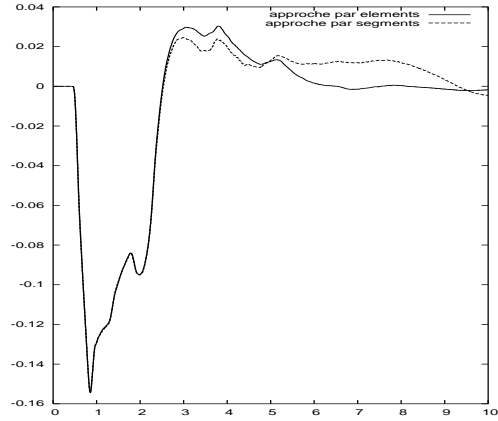
composante v_x au capteur c_4



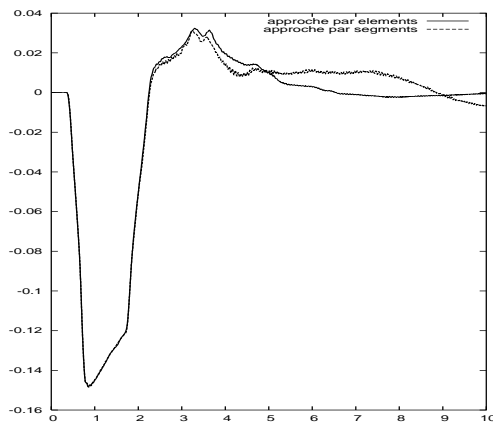
composante v_z au capteur c_4



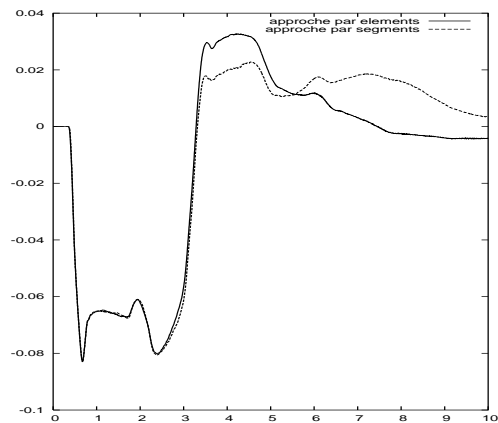
composante v_x au capteur c_5



composante v_z au capteur c_5



composante v_x au capteur c_6



composante v_z au capteur c_6

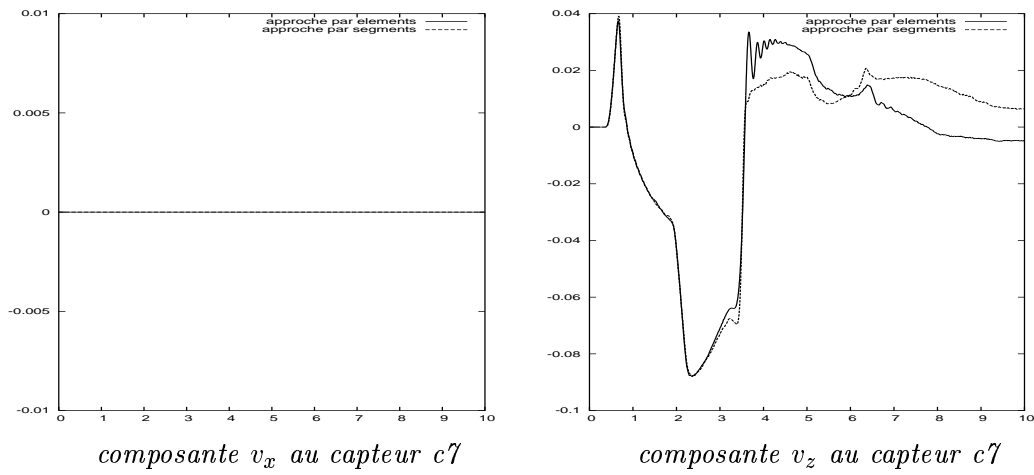
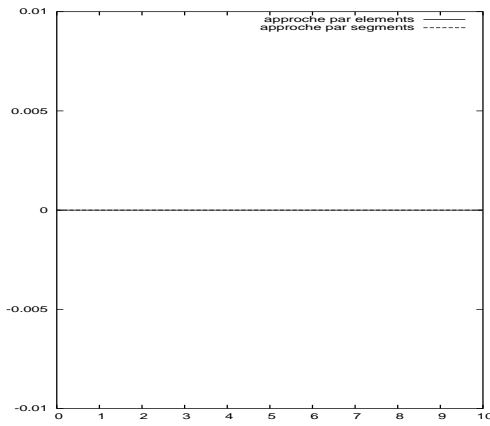
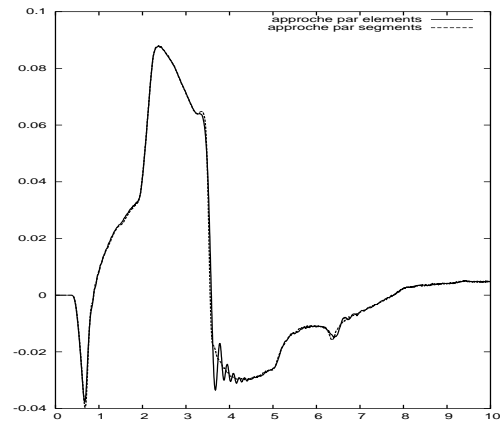


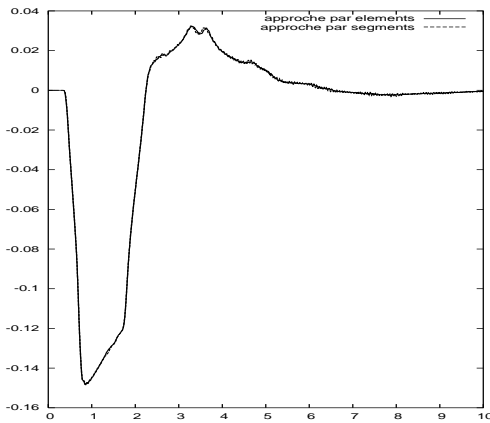
FIG. 3.6 – Comparaison des sismogrammes enregistrés en sept capteurs $c1$ - $c7$ entre l'approche par éléments et l'approche par segments pour un **contact partiel**.



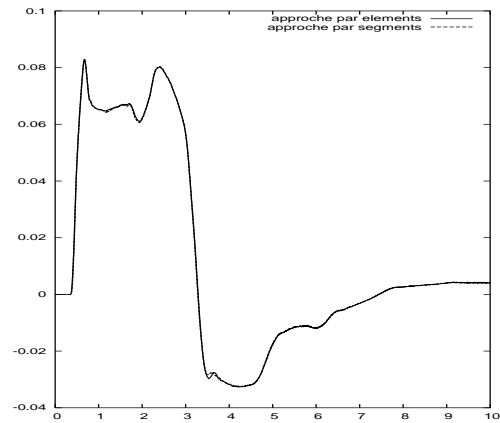
composante v_x au capteur $c1$



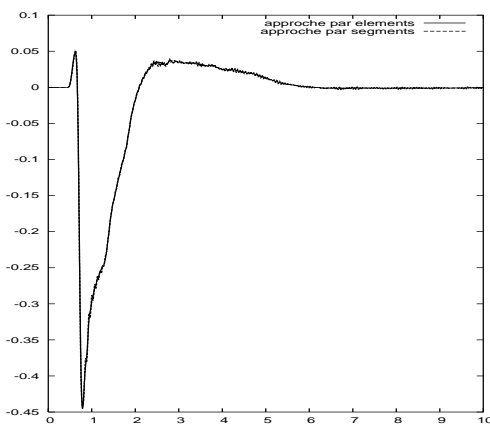
composante v_z au capteur $c1$



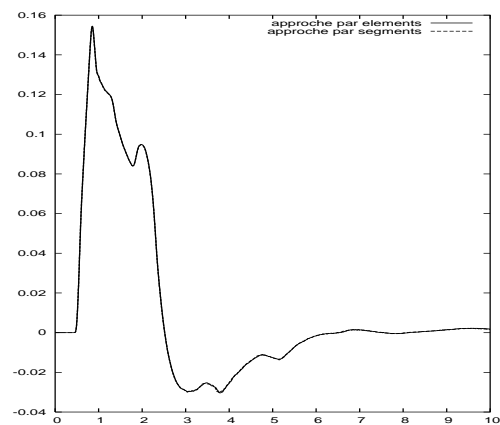
composante v_x au capteur $c2$



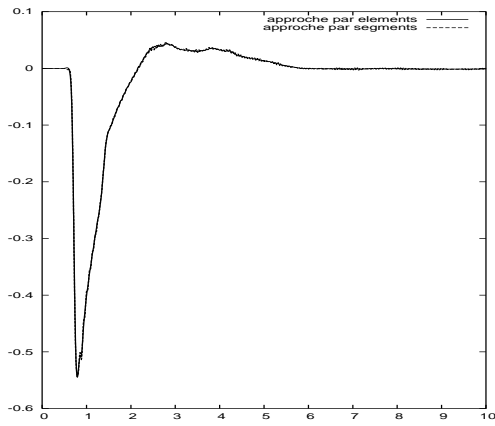
composante v_z au capteur $c2$



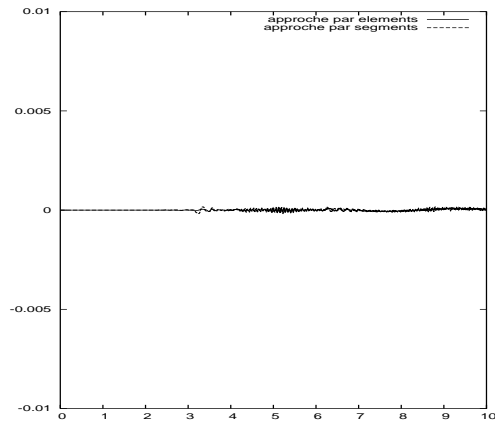
composante v_x au capteur $c3$



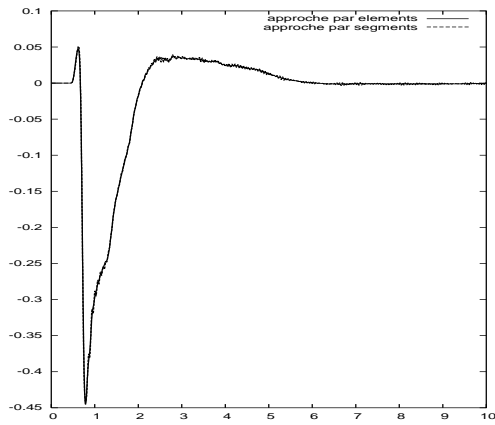
composante v_z au capteur $c3$



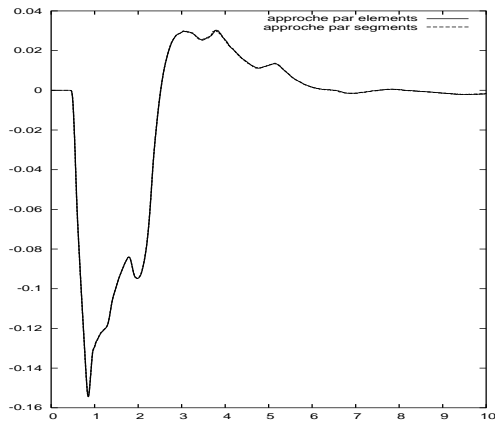
composante v_x au capteur c_4



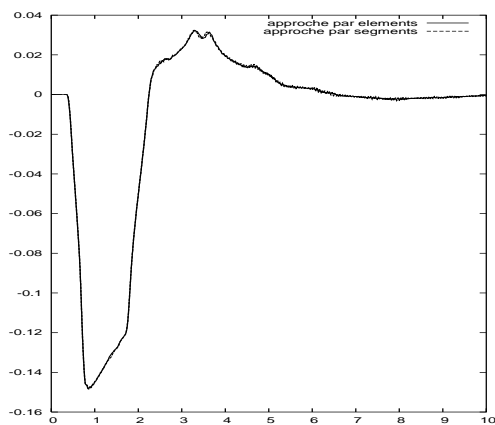
composante v_z au capteur c_4



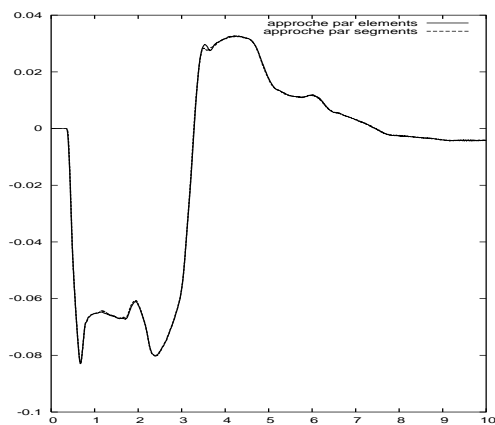
composante v_x au capteur c_5



composante v_z au capteur c_5



composante v_x au capteur c_6



composante v_z au capteur c_6

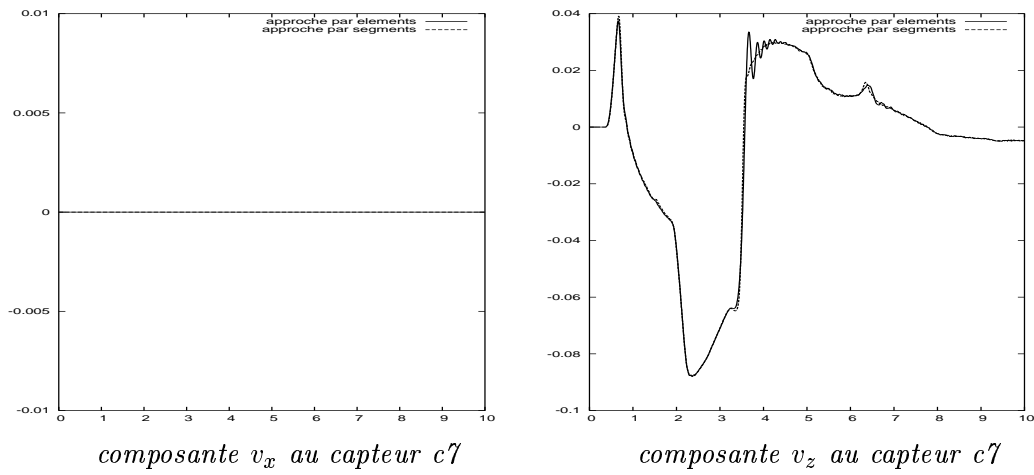


FIG. 3.7 – Comparaison des sismogrammes enregistrés en sept capteurs $c1$ - $c7$ entre l'approche par éléments et l'approche par segments pour un **contact parfait**.

Conclusion

Cette étude a permis d'utiliser une nouvelle méthode basée sur les volumes finis pour la simulation d'une faille préexistante. Dans un premier temps, la représentation de la source par un ensemble d'éléments permet la validation de la méthode par comparaison aux résultats obtenus par une méthode différences finies [2]. Le résultat le plus innovant est l'approche par segments, très complexe en différences finies, consistant à représenter la faille par une succession de segments et non pas d'éléments, et permettant une meilleure prise en compte d'une géométrie complexe de cette dernière. Ceci est fondamental pour le passage au cas tridimensionnel.

L'absence de solutions analytiques dans le cas d'une faille plane finie nous contraint à comparer nos résultats à d'autres solutions obtenues numériquement. Des tests ont aussi été effectués pour le cas d'une source ponctuelle ayant un axe de symétrie incliné d'un angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ avec l'horizontale. Les résultats sont satisfaisants. Ceci permet de valider une fois de plus notre méthode.

On s'est limité ici pour simplifier au cas de failles planes dans un milieu bidimensionnel homogène. Néanmoins, les équations telles qu'elles sont écrites dans la première section restent valables dans un milieu hétérogène tridimensionnel. Quant à l'étude de l'énergie dans la dernière section, elle s'étend de manière naturelle au cas de failles courbes dans un milieu hétérogène bidimensionnel et tridimensionnel.

Annexe A

Dans le cas où le milieu est homogène, les coefficients de Lamé λ et μ ainsi que la densité ρ sont constantes. Dans ce cas, l'équation (1.8) peut s'écrire :

$$\vec{W}_t - \operatorname{div} \mathcal{G}(\vec{W}) = 0 \quad (3.9)$$

où $\mathcal{G} = \Lambda^{-1} \mathcal{F}$.

En 2D, le système (1.5)-(1.7) est équivalent au système (1.11)-(1.15). Si on note

$$\begin{aligned} \vec{W} &= (\rho v_x, \rho v_z, \frac{T}{\lambda + \mu}, \frac{T'}{\mu}, \frac{\tau_{xz}}{\mu})^T \\ &= (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5)^T \end{aligned}$$

alors le système (1.11)-(1.15) s'écrit

$$\vec{W}_t + \mathcal{G}_1(\vec{W})_x + \mathcal{G}_2(\vec{W})_z = 0$$

avec :

$$\mathcal{G}_1(\vec{W}) = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) W_3 + \mu W_4 \\ \mu W_5 \\ \frac{W_1}{\rho} \\ \frac{W_1}{\rho} \\ \frac{W_2}{\rho} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(\vec{W}) = \begin{pmatrix} \mu W_5 \\ (\lambda + \mu) W_3 - \mu W_4 \\ \frac{W_2}{\rho} \\ -\frac{W_2}{\rho} \\ \frac{W_1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne associée $\xi_1 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial W} + \xi_2 \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial W}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda + \mu) \xi_1 & \mu \xi_1 & \mu \xi_2 \\ 0 & 0 & (\lambda + \mu) \xi_2 & -\mu \xi_2 & \mu \xi_1 \\ \frac{\xi_1}{\rho} & \frac{\xi_2}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_1}{\rho} & -\frac{\xi_2}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_2}{\rho} & \frac{\xi_1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle a pour valeurs propres :

$-V_p \|\xi\|$, associée au vecteur propre

$$\left((\lambda + 2\mu) \xi_1, (\lambda + 2\mu) \xi_2, V_p \|\xi\|, -\frac{V_p (\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\|\xi\|}, -\frac{2V_p \xi_1}{\|\xi\|} \right)^T$$

$-V_s \|\xi\|$, associée au vecteur propre

$$\left(\rho V_s \|\xi\| \xi_2, -\rho V_s \|\xi\| \xi_1, 0, -2 \xi_1 \xi_2, \xi_1^2 - \xi_2^2 \right)^T$$

0, associée au vecteur propre

$$\left(0, 0, \frac{\mu \|\xi\|^2}{\lambda + \mu}, \xi_2^2 - \xi_1^2, -2 \xi_1 \xi_2 \right)^T$$

$V_s \|\xi\|$, associée au vecteur propre

$$\left(-\rho V_s \|\xi\| \xi_2, \rho V_s \|\xi\| \xi_1, 0, -2 \xi_1 \xi_2, \xi_1^2 - \xi_2^2 \right)^T$$

$V_p \|\xi\|$, associée au vecteur propre

$$\left((\lambda + 2\mu) \xi_1, (\lambda + 2\mu) \xi_2, V_p \|\xi\|, \frac{V_p (\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\|\xi\|}, \frac{2 V_p \xi_1}{\|\xi\|} \right)^T$$

avec $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde P, $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'ondes S et $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Annexe B

Les conditions d'absorption du type PML (Perfectly Matched Layer) sont des conditions qui permettent d'éliminer les réflexions des ondes aux bords du domaine de calcul. Elles sont basées essentiellement sur un découplage des variables avec l'introduction d'un coefficient d'absorption permettant d'atténuer les ondes réfléchies aux bords du domaine.

On introduit au bord du domaine une zone absorbante ou PML comme décrit sur la figure 3.8.

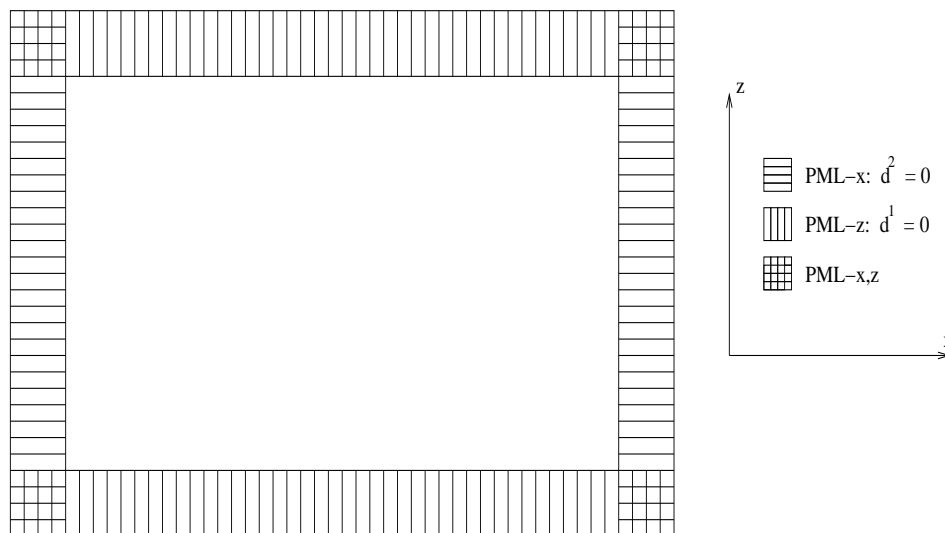


FIG. 3.8 – zone PML

Dans notre cas, prenons par exemple l'équation (1.11) qui s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial (T + T')}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

On décompose alors v_x sous la forme :

$$v_x = (v_x)^x + (v_x)^z$$

et on cherche à résoudre dans la zone PML le système :

$$\rho \left(\frac{\partial (v_x)^x}{\partial t} + d^1(x) (v_x)^x \right) = \frac{\partial (T + T')}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial (v_x)^z}{\partial t} + d^2(z) (v_x)^z \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (3.11)$$

où $d^1(x)$ et $d^2(z)$ représentent respectivement les coefficients d'absorption suivant la direction x et z .

Dans la zone non PML, on a $d^1 = d^2 = 0$. Dans la zone PML, on prend $d^1 > 0$ et $d^2 = 0$ dans la direction x (zones hachurées horizontalement), et $d^2 > 0$ et $d^1 = 0$ dans la direction z (zones hachurées verticalement); et donc $d^1 > 0$ et $d^2 > 0$ dans les quatres coins (zones doublement hachurées). Le traitement se fait sur les quadrangles Q du maillage et le schéma numérique couramment utilisé s'écrit (pour $d^1 > 0$ et $d^2 = 0$ par exemple) :

$$(v_x)^x_Q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\rho - \frac{1}{2} \Delta t d^1(x)}{\rho + \frac{1}{2} \Delta t d^1(x)} (v_x)^x_Q^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{(\rho + \frac{1}{2} \Delta t d^1(x)) \mathcal{A}(Q)} \sum_{Q' \in V(Q)} \Phi_x \left((T + T')_Q^n, (T + T')_{Q'}^n \right)$$

où $\mathcal{A}(Q)$ est l'aire du quadrangle Q et $V(Q)$ est l'ensemble des quadrangles voisins à Q .

Pour réduire au maximum les réflexions, on cherche en plus une solution qui décroît exponentiellement en temps, c'est à dire on cherche une solution qui s'écrit sous la forme :

$$\omega = a e^{-d^1 t} + b$$

avec $d^1 > 0$ et ω vérifie l'équation (3.10).

La solution discrétisée s'écrit :

$$\omega^{n-\frac{1}{2}} = a e^{-d^1 (n-\frac{1}{2}) \Delta t} + b$$

et $\omega^{n-\frac{1}{2}}$ vérifie

$$\partial_t \omega^{n-\frac{1}{2}} + d^1 \omega^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho \mathcal{A}(Q)} \sum \Phi_x.$$

Or

$$\partial_t \omega^{n-\frac{1}{2}} = -a d^1 e^{-d^1 (n-\frac{1}{2}) \Delta t}$$

donc

$$\begin{aligned} \partial_t \omega^{n-\frac{1}{2}} + d^1 \omega^{n-\frac{1}{2}} &= -a d^1 e^{-d^1 (n-\frac{1}{2}) \Delta t} + d^1 a e^{-d^1 (n-\frac{1}{2}) \Delta t} + b d^1 \\ &= b d^1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$b = \frac{1}{\rho d^1 \mathcal{A}(Q)} \sum \Phi_x.$$

et

$$a = e^{d^1 (n-\frac{1}{2}) \Delta t} \left(\omega^{n-\frac{1}{2}} - b \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \omega^{n+\frac{1}{2}} &= a e^{-d^1 (n+\frac{1}{2}) \Delta t} + b \\ &= e^{d^1 (n-\frac{1}{2}) \Delta t} \left(\omega^{n-\frac{1}{2}} - b \right) e^{-d^1 (n+\frac{1}{2}) \Delta t} + b \\ &= e^{-d^1 \Delta t} \omega^{n-\frac{1}{2}} + \left(1 - e^{-d^1 \Delta t} \right) b \end{aligned}$$

On obtient finalement le schéma numérique suivant :

$$\omega^{n+\frac{1}{2}} = e^{-d^1 \Delta t} \omega^{n-\frac{1}{2}} + \left(1 - e^{-d^1 \Delta t}\right) \frac{1}{\rho d^1 \mathcal{A}(Q)} \sum \Phi_x$$

ou encore en remplaçant ω par $(v_x)^x$

$$\rho (v_x)_Q^{x, n+\frac{1}{2}} = \rho e^{-d^1 \Delta t} (v_x)_Q^{x, n-\frac{1}{2}} + \left(1 - e^{-d^1 \Delta t}\right) \frac{\Delta t}{d^1 \mathcal{A}(Q)} \sum_{Q' \in V(Q)} \Phi_x \left((T + T')_Q^n, (T + T')_{Q'}^n \right).$$

v_x est alors donné dans cette zone par :

$$(v_x)_Q^{n+\frac{1}{2}} = (v_x)_Q^{x, n+\frac{1}{2}} + (v_x)_Q^{z, n+\frac{1}{2}}.$$

Le traitement des autres composantes de la solution se fait de manière analogue.

Annexe C

Le tenseur de contraintes τ étant symétrique, on préfère le représenter parfois par un vecteur, qu'on notera aussi τ .

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

On définit également le tenseur de déformation ε comme suit :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad \text{et}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

ε étant aussi symétrique, on le représente par un vecteur, noté aussi ε .

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Par les équations (1.3)-(1.4), on retrouve la loi de Hooke généralisée :

$$\varepsilon = C \tau$$

avec

$$C = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda + \mu)} & -\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} & 0 \\ -\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} & \frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

- [1] F. Collino & C. Tsogka, *Application of the Perfectly Matched Absorbing Layer Model to the Linear Elastodynamic Problem in Anisotropic Heterogeneous Media*, Geophysics, **66**, No. 1, 294-307, 2001.
- [2] V.M. Cruz-Atienza & J. Virieux, *Dynamic Rupture Simulation of Non-planar Faults with a Finite Difference Approach*, à paraître dans Geophys. J. Int.
- [3] M. Remaki, *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell stationnaires en milieu hétérogène*, thèse de doctorat, 1999.
- [4] E.H. Saenger, N. Gold & S.A. Shapiro, *Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid*, Wave Motion, **31**, 77-92, 2000.
- [5] S. Stein & M. Wysession, *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*, Blackwell Publishing Ltd, 2003.
- [6] J. Virieux, *P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method*, Geophysics, **51**, 889-901, 1986.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399