View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by HAL-Ecole des Ponts ParisTech

Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension

Maud Mériaux, Serge Piperno

To cite this version:

Maud Mériaux, Serge Piperno. Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension. [Rapport de recherche] RR-4042, INRIA. 2000, pp.40. <inria-00072596>

HAL Id: inria-00072596

https://hal.inria.fr/inria-00072596

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension

Maud Mériaux — Serge Piperno

N° 4042

Novembre 2000

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4042--FR

Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension

Maud Mériaux* , Serge Piperno†

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4042 — Novembre 2000 — 40 pages

Résumé : Le but de ce travail est de présenter des méthodes numériques utilisant des volumes finis sur des maillages variables (mobiles et potentiellement auto-adaptatifs) pour la résolution d'équations hyperboliques linéaires ou non-linéaires en une dimension d'espace. La difficulté pour les maillages raffinés provient du fait que nous devons utiliser un schéma implicite en temps pour des raisons de stabilité. Nous regardons ici un schéma implicite localement. Parallèlement, nous modifions les schémas envisagés afin de les écrire en maillages mobiles à topologie non constante.

Mots-clés : mécanique des fluides, volume fini, formulation ALE, maillage mobile, maillage non structuré, maillage adaptatif, problème de Riemann, schéma mixte implicite/explicite, monotonie, schéma TVD

* Projet CAIMAN, email: Maud.Meriaux@sophia.inria.fr
† Projet CAIMAN, email: Serge.Piperno@sophia.inria.fr

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : 04 92 38 77 77 - International : +33 4 92 38 77 77 — Fax : 04 92 38 77 65 - International : +33 4 92 38 77 65

Finite volume methods on moving grid for one-dimensional scalar hyperbolic equations

Abstract: We present in this report finite volume methods based on variable grids (moving and possibly self-adaptive) for the transient solution of hyperbolic linear or non-linear equations in one space dimension. The stability limitation on the time step linked with adapted meshes is overcome with the use of a possibly locally implicit scheme. At the same time, we modify the finite volume schemes to cope with variable mesh topology.

Key-words: computational fluid dynamics, finite volumes, ALE formulation, moving mesh, unstructured mesh, self-adaptive mesh, Riemann problem, hybrid explicit/implicit scheme, monotonicity, TVD scheme

Table des matières

1 Généralités sur les schémas numériques **5**
1.1 Équations hyperboliques 5
1.2 Formulation en volumes finis 6
1.3 Schémas conservatifs 7
1.4 Précision spatiale des schémas numériques 8
1.5 Stabilité, principe du maximum, monotonie 9

2 La méthode de Godunov en maillage mobile **10**
2.1 Principe général 10
2.2 Conservativité et Consistance 11
2.3 Équation d'advection 12
2.4 Équation de Burgers 13

3 Schéma mixte explicite-implicite **14**
3.1 Équation d'advection 14
3.1.1 Écriture du schéma 14
3.1.2 Résultats numériques 19
3.2 Equation de Burgers 19
3.2.1 Schéma implicite linéarisé 19
3.2.2 Schéma mixte Godunov-Engquist-Osher 23
3.2.3 Schéma mixte Godunov-Roe 24
3.2.4 Résultats numériques 25

4 Schéma à topologie non constante **25**
4.1 Addition de points 26
4.1.1 Équation d'advection 27
4.1.2 Équation de Burgers 32
4.1.3 Résultats numériques 32
4.2 Soustraction de points 32
4.2.1 Équation d'advection 34
4.2.2 Équation de Burgers 38

5 Conclusion **38**

Introduction

L'objet de ce rapport est de présenter une méthode numérique conservative formulée en volumes finis, inspirée de la méthode de Godunov [10] et utilisant un *maillage variable* (mobile et à topologie éventuellement variable) pour la résolution d'équations hyperboliques en une dimension d'espace. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'advection linéaire et à l'équation de Burgers, non linéaire.

Les problèmes concrets en Mécanique des Fluides demandent souvent un maillage très raffiné dans certaines zones. Par exemple, on devra probablement raffiner le maillage près des discontinuités pour le calcul de solutions stationnaires [5], ou près des couches limites et dans les zones importantes de l'écoulement (tourbillons, recirculations, décrochements, rattachements) pour des écoulements instationnaires [3]. Dans certains cas, on se retrouve alors avec des portions de l'espace où le maillage devrait être raffiné, très importantes. Ceci peut alors entraîner un coût de calcul prohibitif. Pour des cas où ces zones sont instationnaires, on pourrait penser à adapter le maillage de manière instationnaire au cours du calcul. Il faut alors le faire bouger le maillage de manière "adéquate" et résoudre dans le même temps les équations initiales en maillages mobiles. Cette deuxième partie, qui demande la reformulation de l'équation de départ, est peu difficile pour des méthodes en volumes finis conservatives [9, 13].

On peut se demander ici quelle nouvelle approche pourrait fournir un gain par rapport aux méthodes déjà existantes d'adaptation de maillage. Fondamentalement, l'adaptation de maillage est performante, même si elle est souvent fondée sur des remaillages intermédiaires avec extrapolation non conservative. Cependant, pour des problèmes où le mouvement de maillage est une nécessité – par exemple, la simulation numérique d'écoulements en domaine déformable – il serait évidemment judicieux de profiter du mouvement du maillage pour l'adapter. On peut noter que jusqu'à maintenant, la littérature sur la simulation numérique des interactions fluide-structure s'appuie très majoritairement sur des maillages mobiles à topologie constante [1, 11, 6, 4], très minoritairement sur de l'adaptation de maillage éventuellement dynamique [12, 2], en tout cas pas sur des méthodes en *maillages variables* comme nous en présentons ici.

Le but fondamental de ce travail est donc l'étude et l'implémentation de méthodes numériques utilisant des maillages mobiles et auto-adaptatifs. Dans cette perspective, nous nous intéressons ici au mouvement, à l'ajout et à la suppression de points du maillage. Nous envisagerons de coupler ces opérations à des critères automatiques d'adaptation instationnaire. Nous nous limiterons donc dans ce rapport à des maillages variables non auto-adaptatifs.

Pour des raisons de simplicité, nous nous plaçons dans le cadre restreint des équations hyperboliques scalaires mono-dimensionnelles. Cependant, nous aurons en permanence le souci de pouvoir étendre simplement les idées proposées en deux et trois dimensions d'espace. Dans cette démarche générale, le premier point examiné dans ce rapport concerne les propriétés classiques de stabilité (principe du maximum, décroissance de la variation totale, stabilité L^2) des schémas en volumes finis que l'on cherche à conserver pour des ajouts/suppressions

de points. Le maillage étant amené à être raffiné localement, on introduit un schéma en temps spatialement variable et localement implicite.

Ce rapport se présente comme suit. Dans un premier temps, nous adaptons un ensemble de notions valables pour des schémas numériques en maillage fixe à des schémas en maillages mobiles.

La deuxième partie est consacrée à l'extension de la méthode de Godunov au maillage mobile ainsi qu'à la résolution numérique de l'équation d'advection et de Burgers à l'aide de cette dernière. Utilisant des maillages raffinés, nous sommes rapidement confrontés aux conditions trop restrictives de stabilité. Afin de les éviter, nous considérons un schéma (localement) implicite en temps, dont l'étude fait l'objet de la troisième partie.

Dans la dernière partie, nous nous intéressons aux schémas envisagés écrits en maillages mobiles à topologie non constante.

1 Généralités sur les schémas numériques

Dans cette section, nous situons le cadre de notre étude. Nous nous intéressons aux équations hyperboliques en une dimension d'espace, linéaires ou non.

1.1 Équations hyperboliques

Pour une fonction scalaire u(x,t) en une dimension, un problème de Cauchy pour une équation hyperbolique sous forme conservative s'écrit :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction de classe C^1 et les indices x et t représentent des dérivations en espace et en temps. u^0 est la donnée initiale.

A priori, la fonction de flux f peut être quelconque. On se limitera néanmoins aux cas où cette fonction est convexe, ce qui simplifie notablement l'expression de la solution exacte des problèmes de Riemann. Nous distinguons entre autres l'équation d'advection :

$$u_t + cu_x = 0, \tag{2}$$

où $f(u) = cu$ est linéaire ($c \in \mathbb{R}$), et l'équation de Burgers :

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \tag{3}$$

où $f(u) = \frac{u^2}{2}$ est non linéaire et strictement convexe. Ces deux équations reproduisent chacune partiellement les différents aspects des équations régissant la mécanique des fluides compressibles non-visqueux.

1.2 Formulation en volumes finis

Nous décrivons ici le cadre général des méthodes de volumes finis pour la résolution numérique de l'équation de conservation (1).

Pour résoudre numériquement (1), on adopte un processus itératif temporel, où l'on cherche à approcher la solution à des instants successifs t^n. On définit alors le pas de temps éventuellement variable $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Le principe de base des méthodes de volumes finis, présenté sur la Figure 1, est de partager à tout instant t le domaine spatial en volumes finis ou cellules (ce principe général est valable en toute dimension) définies en une dimension d'espace comme suit :

$$\mathcal{C}_i(t) = [x_{i-\frac{1}{2}}(t), x_{i+\frac{1}{2}}(t)],$$

dont on notera le point milieu $x_i(t)$. En avançant par pas de temps discrets, on obtient des partitions successives du domaine spatial en volumes finis définis à l'instant t^n suit :

$$\mathcal{C}_i^n \equiv \mathcal{C}_i(t^n) = [x_{i-\frac{1}{2}}(t^n), x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)] \equiv [x^n_{i-\frac{1}{2}}, x^n_{i+\frac{1}{2}}],$$

on notera encore le point milieu $x_i^n \equiv x_i(t^n)$.

On s'intéresse alors aux valeurs moyennes de la fonction inconnue dans ces volumes de contrôle (ce qui, pour une approche en éléments finis, consisterait à considérer que la solution est constante sur ces cellules). Sur la Figure 1, on a représenté les éléments supplémentaires suivants :

- $B_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \bigcup_{t\in[t^n;t^{n+1}]} \{x_{i+\frac{1}{2}}(t)\} \times \{t\}$
- $S_i^{n+\frac{1}{2}} = \bigcup_{t\in[t^n;t^{n+1}]} \mathcal{C}_i(t) \times \{t\}$

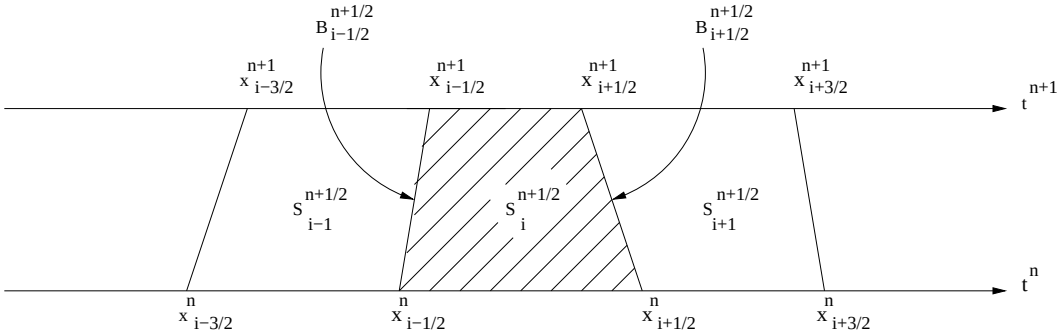

FIG. 1 – *Principe des formulations en volumes finis.*

Plus précisément, les inconnues numériques u_i^n sont supposées représenter des approximations à l'instant t^n de la moyenne de la solution inconnue u sur la cellule $\mathcal{C}_i^n$, soit

$$u_i^n \sim \frac{1}{\Delta x_i^n} \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x,t^n)dx,$$

avec, pour tout i et pour tout n, $\Delta x_i^n = x_{i+\frac{1}{2}}^n - x_{i-\frac{1}{2}}^n > 0$.
Posons

$$\omega_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^n}.$$

$\omega_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ représente la vitesse moyenne entre les instants t^n et t^{n+1} du point $x_{i-\frac{1}{2}}$. Pour plus de lisibilité, nous nous contentons d'écrire S_i, $B_{i-\frac{1}{2}}$ et $\omega_{i-\frac{1}{2}}$ à la place de $S_i^{n+\frac{1}{2}}$, $B_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\omega_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$.
Si nous intégrons l'équation de conservation (1) sur chaque volume S_i, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{S_i}(u_t + f(u)_x)dxdt \overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial S_i}(u.\eta_t^{ext} + f(u).\eta_x^{ext})d\sigma \\
0 &= \int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x,t^{n+1})dx - \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x,t^n)dx \\
&+ \int_{B_{i-\frac{1}{2}}} \left[u(x_{i-\frac{1}{2}}(t),t)\frac{\omega_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\omega_{i-\frac{1}{2}}^2}} + f(u(x_{i-\frac{1}{2}}(t),t))\frac{-1}{\sqrt{1+\omega_{i-\frac{1}{2}}^2}} \right] d\sigma \\
&+ \int_{B_{i+\frac{1}{2}}} \left[u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t)\frac{-\omega_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\omega_{i+\frac{1}{2}}^2}} + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t))\frac{1}{\sqrt{1+\omega_{i+\frac{1}{2}}^2}} \right] d\sigma \ .
\end{aligned}$$

avec

$$t(\sigma) = t^n + \frac{\sigma}{\sqrt{1+\omega_{i\pm\frac{1}{2}}^2}} \ .$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x,t^{n+1})dx - \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x,t^n)dx \\
&- \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[-\omega_{i-\frac{1}{2}} u(x_{i-\frac{1}{2}}(t),t) + f(u(x_{i-\frac{1}{2}}(t),t)) \right] dt \\
&+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[-\omega_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t) + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t)) \right] dt \ .
\end{aligned} \tag{4}$$

1.3 Schémas conservatifs

Nous considérons des schémas dits conservatifs, qui peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} = 0 \ , \tag{5}$$

où les termes $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ sont des flux numériques qui approchent l'intégrale des flux au cours du pas de temps, autrement dit :

$$\Delta t^n \phi_{i+\frac{1}{2}} \sim \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[-\omega_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t) + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t)) \right] dt \ .$$

En général, le flux numérique entre S_i et S_{i+1} est donné par $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})$, où la fonction ϕ est une fonction de flux numérique.

Remarque 1 *Ces schémas sont dits conservatifs car, pour N cellules consécutives, la variation de l'intégrale de u sur les N cellules ne dépend que des flux numériques aux bords. En effet, nous avons :*

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=j_0+1}^{j_0+N} \Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \sum_{j=j_0+1}^{j_0+N} \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi_{j_0+N+\frac{1}{2}} - \phi_{j_0+\frac{1}{2}} = 0 \ .$$

Remarque 2 *On peut remarquer qu'une solution exacte et assez régulière de (1), qui vérifie aussi (4), vérifie une sorte de schéma conservatif exact, puisque*

$$\int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x,t^n)dx = \Delta x_i^n \bar{u}_i^n,$$

où $\bar{u}_i^n$ est la moyenne exacte de u sur $\mathcal{C}_i^n$ à l'instant t^n et

$$\Delta t^n \ \phi_{exact\, i+\frac{1}{2}} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[-\omega_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t) + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t),t)) \right] dt \ .$$

1.4 Précision spatiale des schémas numériques

La précision spatiale des schémas en volumes finis est souvent interprétée en termes d'erreur de troncature (dans une approche vraiment plus proche des différences finies). C'est pourquoi la précision spatiale en volumes finis non uniformes (et a fortiori mobiles ou variables) est moins couramment précisée.

Pour un maillage fixe et uniforme, l'approximation numérique fournie par le schéma spatial est d'autant meilleure que l'erreur de troncature est faible. Celle-ci est donnée par :

$$\epsilon^x = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - (f(u))_x \ .$$

Définition 1 *Le schéma (spatial) est dit* **consistant** *si, pour une solution u suffisamment régulière,*

$$\epsilon^x = O(\Delta x) \quad \textit{quand } \Delta x \to 0 \ .$$

Le schéma conservatif (5) sur un maillage fixe uniforme est consistant si la fonction de flux numérique ϕ vérifie

$$\phi(u,u,0) = f(u) \ .$$

De même, l'approximation spatiale est **d'ordre p** *si*

$$\epsilon^x = O(\Delta x^p) \quad \textit{quand } \Delta x \to 0 \ .$$

Pour un maillage mobile dans le cas général, l'erreur de troncature est donnée par :

$$\epsilon^x = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\bar{\Delta x}} - (f(u) - wu)_x \ ,$$

où $\bar{\Delta x}$ est une mesure du plus grand volume d'une cellule dans le maillage.

Définition 2 *Le schéma (spatial) est dit* **consistant** *si, pour une solution u suffisamment régulière,*

$$\epsilon^x = O(\Delta x) \quad \textit{quand } \Delta x \to 0 \ .$$

Le schéma conservatif (5) sur un maillage mobile est consistant si la fonction de flux numérique ϕ vérifie

$$\phi(u,u,w) = f(u) - wu \ .$$

1.5 Stabilité, principe du maximum, monotonie

Les solutions faibles entropiques bornées de (1) ont de remarquables propriétés [8] :

- aucun maximum ni minimum local n'apparaît;
- la valeur d'un minimum local ne décroît pas, la valeur d'un maximum local ne croît pas;
- la variation totale $TV(u(t))$ est une fonction décroissante de t, où

$$TV(u(t)) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \mid u_x(x,t) \mid \ .$$

Il est alors intéressant d'examiner si la solution numérique u_i^n obtenue avec le schéma (5) possèdent les mêmes propriétés. Il faut alors traduire sous forme discrète les notions de monotonie proposées ci-dessus. Harten [7] a introduit la notion de décroissance de la variation totale (Total Variation Diminishing schemes) suivante :

Définition 3 *Un schéma est dit* **TVD** *(à variation totale décroissante) si et seulement si*

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n),$$

où $TV(u^n)$, la variation totale discrète de u^n, est donnée par

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mid u_i^n - u_{i-1}^n \mid \ .$$

Définition 4 *Un schéma est dit* **vérifier le principe du maximum** *si et seulement si*

$$\forall i, \forall n, \min_i \ (u_i^0) \leq u_i^n \leq \max_i \ (u_i^0) \ .$$

Enfin, introduisons un dernier critère classique de stabilité :

Définition 5 *En notant* $u^n = (u_i^n)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N$, *un schéma numérique* $u^{n+1} = \mathcal{L}(u^n)$ *est dit* **stable** *pour la norme* $\| \quad \|$ *si et seulement si* $\forall u \in \mathbb{R}^N$, $\| \mathcal{L}(u) \| \leq \| u \|$.

Nous utiliserons essentiellement les normes suivantes :

$$\| u^n \|_2 = \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x_j^n | u_j^n |^2 \right)^{1/2}, \quad \| u^n \|_\infty = \sup_{1\leq j\leq N} | u_j^n | ,$$

appelées respectivement normes L^2 et L^∞. Un schéma qui vérifie le principe du maximum nous assure que les valeurs u_i^n restent bornées. Le principe du maximum entraîne donc une propriété de stabilité de type L^∞. De même, un schéma conservatif TVD sera également stable en norme L^∞ (en effet, on voit facilement, au moins pour des problèmes périodiques, que les valeurs prises par u seront majorées et minorées par des bornes dépendant de sa moyenne – constante au cours des itérations – de sa variation totale – majorée par sa valeur initiale – et par le nombre de points).

Dans les sections suivantes, nous étudions l'extension de la méthode de Godunov aux maillages mobiles, et nous verrons sous quelles conditions (notamment sur le pas de temps) les schémas explicites obtenus préservent le principe du maximum, sont TVD et stables au sens de la norme L^2. Nous verrons ensuite des schémas implicites en temps, inconditionnellement stables, qui permettent d'éviter la restriction sur le pas de temps imposée par la limite de stabilité des schémas précédents. Nous finirons par l'étude de ces schémas écrits en topologie non constante.

2 La méthode de Godunov en maillage mobile

Nous commençons cette section par l'adaptation de la méthode de Godunov [10] au maillage mobile. Ensuite, nous présentons cette dernière et discutons de ses propriétés pour la résolution numérique de l'équation d'advection (2) et de l'équation de Burgers (3).

2.1 Principe général

Nous décrivons ici un pas de temps de cette méthode [14].

- on dispose initialement des variables u_i^n données par la méthode des volumes finis; on considère alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \quad pour\ x \in \mathbb{R},\ t \geq t^n, \\ u(x,t^n) = u_i^n \quad si\ x \in \mathcal{C}_i,\ \forall i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6}$$

- en chaque interface, on résout un problème de Riemann local; la donnée initiale de ce problème de Riemann est $u = u_i^n$ si $x < x_{i+\frac{1}{2}}^n$ et $u = u_{i+1}^n$ si $x > x_{i+\frac{1}{2}}^n$. Notons $\hat{u}(x,t^{n+1})$ une solution de (6) obtenue par juxtaposition des solutions exactes des problèmes de Riemann locaux (au moins pour un pas de temps assez petit pour que ces solutions globales n'interfèrent pas).

– afin de récupérer une valeur de la fonction sur chaque cellule $\mathcal{C}_i^{n+1}$, on calcule la moyenne de u sur chaque cellule. On pose alors :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_i^{n+1}} \int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} \hat{u}(x,t^{n+1})dx \ .$$

– rappelons ici que des hypothèses fortes sont supposées vérifiées pour les mesures des volumes finis, ainsi que sur les vitesses de maillage; on suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i,\, \forall n,\, \Delta x_i^n > 0 \ , \\ \forall i,\, \forall n,\, \Delta x_i^{n+1} = \Delta x_i^n + \Delta t^n \ \left(\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}\right) \ , \end{array} \right. \tag{7}$$

la condition Δx_i^{n+1} imposant (par la deuxième équation) une limite conjointe sur le pas de temps Δt^n et les vitesses de maillage $\omega_{i+\frac{1}{2}}$ et $\omega_{i-\frac{1}{2}}$ (surtout lorsqu'elles sont convergentes). On notera ici que la formule donnée ci-dessus pour le calcul de Δx_i^{n+1} d'une part, est équivalente en une dimension d'espace au recalcul à partir des positions des interfaces des volumes finis, et, d'autre part, qu'elle implique qu'un champ constant est conservé. Cette propriété de conservation géométrique [15] est particulièrement importante en plusieurs dimensions d'espace [11, 6].

2.2 Conservativité et Consistance

Lemme 1 *Le schéma de Godunov en maillage mobile est* **conservatif et consistant**. *Le flux numérique entre S_i et S_{i+1} est donné par*

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}),$$

où la fonction de flux numérique ϕ est donnée par

$$\phi(u_G, u_D, \omega) = f(\mathcal{S}_R(\omega; u_G, u_D)) - \omega \mathcal{S}_R(\omega; u_G, u_D), \tag{8}$$

où $\mathcal{S}_R(x/t; u_G, u_D)$ est la valeur en (x,t) de la solution autosimilaire du problème de Riemann dont les états à gauche et à droite sont u_G et u_D.

Démonstration: montrons d'abord que le schéma de Godunov en maillage mobile peut se mettre sous la forme d'un schéma conservatif. Pour ce faire, considérons la donnée initiale u définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x,t^n) = u_i^n \ \text{si}\ x \in \mathcal{C}_i^n \ .$$

Intégrons u la solution faible de (1) construite par la méthode de Godunov sur S_i. D'après (4), nous avons :

$$\begin{array}{l} 0 = \int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x,t^{n+1})dx - \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x,t^n)dx \\ \quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[f\left(\mathcal{S}_R\left(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}(t) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n)}{t-t^n}; u_{i-1}^n, u_i^n\right)\right) - \omega_{i-\frac{1}{2}} \mathcal{S}_R\left(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}(t) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n)}{t-t^n}; u_{i-1}^n, u_i^n\right)\right] dt \\ \quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[f\left(\mathcal{S}_R\left(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}(t) - x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)}{t-t^n}; u_i^n, u_{i+1}^n\right)\right) - \omega_{i+\frac{1}{2}} \mathcal{S}_R\left(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}(t) - x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)}{t-t^n}; u_i^n, u_{i+1}^n\right)\right] dt \ . \end{array}$$

Or u_j^{n+1} est obtenue en faisant la moyenne de u sur $\mathcal{C}_i^{n+1}$. Ainsi

$$\int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x,t^{n+1})dx = \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} \ .$$

D'autre part, u est constante par morceaux sur chacune des cellules $\mathcal{C}_i^n$ à l'instant t^n. Nous avons alors :

$$\int_{\mathcal{C}_i^n} u(x,t^n)dx = \Delta x_i^n u_i^n \ .$$

Enfin, les mouvements des bornes du volume fini considéré sont des mouvements rectilignes au cours du pas de temps. Ainsi, on a :

$$\forall t \in [t^n;t^{n+1}], \quad \frac{x_{i-\frac{1}{2}}(t)-x_{i-\frac{1}{2}}(t^n)}{t-t^n} = \omega_{i-\frac{1}{2}},$$

$$\forall t \in [t^n;t^{n+1}], \quad \frac{x_{i+\frac{1}{2}}(t)-x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)}{t-t^n} = \omega_{i+\frac{1}{2}}.$$

Donc les deux dernières intégrales se simplifient, quand nous remarquons que les solutions des problèmes de Riemann locaux sont autosimilaires. Le schéma de Godunov peut donc s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n \\ &+ \Delta t^n \left(\phi(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac{1}{2}}) \right) . \end{aligned}$$

Nous avons bien démontré que la méthode de Godunov en maillage mobile peut s'écrire comme un schéma conservatif avec la fonction de flux numérique (8).

La consistance est immédiate puisque $\mathcal{S}_\mathcal{R}(\omega;u,u) = u$ pour tout $\omega,u \in \mathbb{R}$, d'où l'identité de consistance $\phi(u,u,\omega) = f(u) - \omega u$.

Remarque 3 *Nous pouvons remarquer que pour $\omega = 0$ (maillage fixe), nous avons*

$$\phi(u_G,u_D,0) = f\left(\mathcal{S}_\mathcal{R}(0;u_G,u_D)\right) \ .$$

Nous retrouvons donc bien la fonction de flux numérique de la méthode de Godunov en maillage fixe.

2.3 Équation d'advection

Nous nous intéressons ici à l'équation d'advection (2). La méthode de Godunov donne la fonction de flux numérique suivante :

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G,u_D,\omega) = \begin{cases} (c-\omega)u_G & \text{si } \omega < c \\ (c-\omega)u_D & \text{si } \omega > c \\ 0 & \text{si } \omega = c \end{cases} \ . \tag{9}$$

La fonction de flux numérique s'écrit également

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G,u_D,\omega) = (c-\omega)^+ u_G + (c-\omega)^- u_D, \tag{10}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} (c-\omega)^+ = \max(c-\omega,0) \\ (c-\omega)^- = \min(c-\omega,0) \end{array} \right.$$

Le Lemme 4 de la section suivante nous permettra d'établir que sous la condition

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^- \leq 1 \ , \tag{11}$$

le schéma est TVD et préserve le principe du maximum. De plus, le Théorème 3 nous permettra d'établir que, sous une condition similaire, toujours de type CFL, le schéma est stable en norme L^2. On voit bien ici que les conditions de stabilité (propriété TVD ou au sens d'une norme) de type CFL vont se montrer extrêmement restrictives sur le pas de temps Δt^n dès que l'on voudra utiliser des maillages raffinés. Il faudra alors passer à des schémas au moins localement implicites.

2.4 Équation de Burgers

Pour l'équation de Burgers (3), les seules solutions entropiques bornées d'un problème de Riemann sont les suivantes:

$$\text{CHOC} \quad u_G > u_D \ : \ u(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} u_G & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{u_G+u_D}{2} \\ u_D & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{u_G+u_D}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{DÉTENTE} \quad u_G < u_D \ : \ u(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} u_G & \text{si } \frac{x}{t} < u_G \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_G < \frac{x}{t} < u_D \\ u_D & \text{si } \frac{x}{t} > u_D \end{array} \right.$$

Ainsi, la fonction de flux numérique s'écrit pour la méthode de Godunov :

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G,u_D,\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_G^2}{2} - \omega u_G & \text{si } \omega \leq u_G \leq u_D \text{ ou } u_G - \omega \geq |u_D - \omega| \\ \frac{u_D^2}{2} - \omega u_D & \text{si } u_G \leq u_D \leq \omega \text{ ou } |u_G - \omega| \leq -(u_D - \omega) \\ -\frac{\omega^2}{2} & \text{si } u_G \leq \omega \leq u_D \end{array} \right.$$

ou de manière plus compacte

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G,u_D,\omega) = \frac{1}{2} \max\left((u_G-\omega)^{+^2},(u_D-\omega)^{-^2}\right) - \frac{1}{2}\omega^2 \ . \tag{12}$$

3 Schéma mixte explicite-implicite

Comme nous l'avons remarqué précédemment, l'utilisation de maillages raffinés impose des restrictions trop fortes sur le pas de temps pour des schémas explicites. La sévérité de ces conditions de type CFL provient des "plus petites" cellules du maillage. Pour s'affranchir de ces limitations, nous considérons des schémas qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} = 0, \tag{13}$$

où les flux numériques sont donnés par

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}). \tag{14}$$

Dans l'équation précédente, les variables $u_i^{n+\theta_i}$ sont des inconnues dépendant des grandeurs u_i^n et u_i^{n+1}. Par exemple, pour un maillage fixe (et seulement un maillage fixe), on pourra considérer une dépendance du type

$$[\text{maillage fixe}] \quad \theta_i \in [0,1] \ \text{ et } \ u_i^{n+\theta_i} = (1-\theta_i) u_i^n + \theta_i u_i^{n+1}, \ \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Si ($\forall i$, $\theta_i = 0$), nous retrouvons le schéma explicite en temps, qui a fait l'objet de la section précédente. Dès que ($\exists i \ |\theta_i \neq 0$), le schéma est implicite. On voit cependant que, si par exemple un groupe limité de cellules adjacentes présentent un paramètre θ_i non nul, le schéma ainsi défini est implicite seulement localement. Un système linéaire (ou non linéaire) de taille limitée devra alors être résolu.

Dans un premier temps, sur l'exemple de l'équation d'advection (2), nous discutons des propriétés du schéma mixte explicite-implicite adapté à la méthode de Godunov en maillage mobile. Nous nous intéresserons ensuite à l'équation de Burgers (3), qui nous amènera à la construction d'un schéma implicite linéarisé.

3.1 Équation d'advection

3.1.1 Écriture du schéma

D'après (10), le flux numérique du schéma mixte pour la méthode de Godunov en maillage mobile s'écrit de la manière suivante :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ u_i^{n+\theta_i} + (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \ . \tag{16}$$

Avant d'étudier les propriétés de ce schéma, introduisons quelques notations:

$$\forall i, \qquad \Delta x_i^{n+\theta_i} = (1-\theta_i)\Delta x_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1}, \tag{17a}$$

$$\forall i, \qquad \Delta x_i^{n+\theta_i} u_i^{n+\theta_i} = (1-\theta_i)\Delta x_i^n u_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1}. \tag{17b}$$

On comprend bien ici que cette expression est équivalente à (15) seulement lorsque le maillage n'est pas mobile. D'une certaine manière, la pondération par un coefficient θ_i est transformée en une pondération par $(1-\theta_i)\Delta x_i^n)/[(1-\theta_i)\Delta x_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1}]$. Nous déduisons de (13) que

$$\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} = \Delta x_i^n u_i^n - \Delta t^n \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}\right) . \tag{18}$$

Effectuons les opérations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\theta_i) \times (13) + \theta_i \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1}, \\ -\theta_i \times (13) + (1-\theta_i)\Delta x_i^n u_i^n. \end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} & = & \Delta x_i^{n+\theta_i} u_i^{n+\theta_i} - (1-\theta_i)\Delta t^n \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}\right), \\ \Delta x_i^n u_i^n & = & \Delta x_i^{n+\theta_i} u_i^{n+\theta_i} + \theta_i \Delta t^n \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}\right). \end{array} \right.$$

En utilisant (7), nous déduisons que

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^{n+\theta_i} + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \Big[(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left(u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}\right) \\ &\quad + (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left(u_{i-1}^{n+\theta_i-1} - u_i^{n+\theta_i}\right)\Big], \qquad (19a) \\ u_i^n &= u_i^{n+\theta_i} - \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n} \Big[(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left(u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}\right) \\ &\quad + (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left(u_{i-1}^{n+\theta_i-1} - u_i^{n+\theta_i}\right)\Big]. \qquad (19b) \end{aligned}$$

Afin de déterminer u_i^{n+1}, il nous faut connaître les valeurs $u_i^{n+\theta_i}$. Or, d'après la deuxième égalité, nous constatons que $u^{n+\theta} = (u_i^{n+\theta_i})_i$ est solution d'un système linéaire $Au^{n+\theta} = u^n$, dont la matrice A ne dépend que de grandeurs connues au début du pas de temps. On constate également que le système se réduit en fait aux points où $\theta_i \neq 0$. Enfin, on observe que la matrice A est à diagonale strictement dominante. On peut alors utiliser une méthode itérative pour inverser le système, comme par exemple la méthode de Jacobi. Une fois $u^{n+\theta}$ connue, on déterminera u^{n+1} en utilisant (19a) ou la définition de $u_i^{n+\theta_i}$ (17b) pour les points où $\theta_i \neq 0$ seulement.

Avant de présenter quelques exemples numériques, nous étudions quelques propriétés de ce schéma, en particulier le fait qu'il vérifie le principe du maximum, son caractère TVD et sa stabilité (en norme L^2).

Théorème 1 *Sous la condition*

$$\forall i, \ \forall n, \ \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \leq 1, \tag{20}$$

le schéma mixte (13-16-17-7) vérifie le principe du maximum.

Démonstration : nous avons

$$\begin{array}{rcl} u_i^{n+1} & = & \left[1 - \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left((c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^-\right)\right] u_i^{n+\theta_i} \\ & + & \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left(-(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} + (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}\right) . \end{array}$$

Sous la condition (20), nous remarquons que

$$\forall i, \ \forall n, \ u_i^{n+1} \geq \min_i u_i^{n+\theta_i} \quad \text{et} \quad u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^{n+\theta_i}.$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \min u^{n+1} & \geq & \min u^{n+\theta}, \\ \max u^{n+1} & \leq & \max u^{n+\theta}. \end{array} \right.$$

D'autre part, soit i l'indice tel que $\max u^{n+\theta} = u_i^{n+\theta_i}$. En utilisant l'équation (19b) pour cet indice i particulier, nous montrons aisément que $u_i^n \geq \max_i u_i^{n+\theta_i}$, ce qui implique $\max_i u_i^n \geq \max_i u_i^{n+\theta_i}$. Par un raisonnement analogue, nous trouvons $\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$.

En résumé, nous avons les inégalités suivantes

$$\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^n$$

qui concluent la démonstration de ce théorème.

Théorème 2 *Sous la condition*

$$\forall i, \ \forall n, \ \Delta t^n \left[(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \frac{(1-\theta_i)}{\Delta x_i^{n+1}} - (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^- \frac{(1-\theta_{i-1})}{\Delta x_{i-1}^{n+1}}\right] \leq 1, \tag{21}$$

le schéma mixte (13-16-17-7) est TVD.

Démonstration : nous avons successivement, à partir de la forme modifiée (19a), en utilisant des changements d'indice (vers la gauche et vers la droite) puis en utilisant l'hypothèse (21),

$$\begin{array}{l} TV(u^{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mid u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \mid \\ \leq \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left| 1 - \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1-\theta_{i-1})\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^- \right| \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\ \qquad + \frac{(1-\theta_{i-1})\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} (c-\omega_{i-\frac{3}{2}})^+ \left| u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}} \right| \\ \qquad + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[-(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^-\right] \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&TV(u^{n+1}) = \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left| 1 - \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1-\theta_{i-1})\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^- \right| \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&\qquad + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&\qquad + \frac{(1-\theta_{i-1})\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} \left[-(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^- \right] \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \quad := TV(u^{n+\theta}).
\end{aligned}
$$

D'autre part, en utilisant cette fois la forme modifiée (19b), nous avons

$$
\begin{aligned}
TV(u^n) &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mid u_i^n - u_{i-1}^n \mid \\
&\geq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left| 1 + \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - \frac{\theta_{i-1}\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^n}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^- \right| \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&\qquad - \frac{\theta_{i-1}\Delta t^n}{\Delta x_{i-1}^n}(c-\omega_{i-\frac{3}{2}})^+ \left| u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}} \right| \\
&\qquad + \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n}(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| \\
&\geq TV(u^{n+\theta}).
\end{aligned}
$$

Nous avons donc bien démontré que sous la condition (21),

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \ .$$

Remarque 4 *Sous la condition (21), le schéma mixte (13-16-17-7) vérifie le principe du maximum et est TVD.*
Il suffit de démontrer que (21)⇒(20). La condition (21) s'écrit aussi :

$$\Delta t^n |c-\omega_{i-\frac{1}{2}}| \leq \begin{cases} \frac{\Delta x_i^{n+1}}{1-\theta_i} & \text{si } c-\omega_{i-\frac{1}{2}} \geq 0, \\ \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1}}{1-\theta_{i-1}} & \text{si } c-\omega_{i-\frac{1}{2}} \leq 0. \end{cases} \tag{22}$$

Sous la condition (21), il suffit d'examiner les valeurs de

$$T_i = \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right],$$

suivant les signes de $c-\omega_{i-\frac{1}{2}}$ et $c-\omega_{i+\frac{1}{2}}$. On a :

	$c-\omega_{i-\frac{1}{2}} \geq 0$	$c-\omega_{i-\frac{1}{2}} \leq 0$
$c-\omega_{i+\frac{1}{2}} \geq 0$	$T_i = \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}}) \leq 1$	$T_i = 0$
$c-\omega_{i+\frac{1}{2}} \leq 0$	$T_i = (1-\theta_i)\frac{\Delta x_i^{n+1}-\Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} \leq 1$	$T_i = -\frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i+\frac{1}{2}}) \leq 1$

Dans tous les cas, on trouve bien $T_i \leq 1$, ce qui prouve (20).

Remarque 5 *Si $\theta_i = 0$ pour tout i, les deux conditions (21) et (20) sont équivalentes à la condition de stabilité sur le schéma explicite (11) de la section précédente. Les problèmes de stabilité liés aux mailles les plus petites pourront bien être évités en prenant $\theta_i = 1$ sur ces cellules.*

Théorème 3 *Sous la condition*

$$\forall i,\ \forall n,\quad \begin{cases} 2\Delta t^n \left|c-\omega_{i-\frac{1}{2}}\right| \left(\frac{(1-\theta_{i-1})^2}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} - \frac{\theta_{i-1}^2}{\Delta x_{i-1}^n}\right) \leq 1 & si\ c-\omega_{i-\frac{1}{2}} \leq 0, \\ 2\Delta t^n \left|c-\omega_{i-\frac{1}{2}}\right| \left(\frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n}\right) \leq 1 & si\ c-\omega_{i-\frac{1}{2}} \geq 0, \end{cases} \tag{23}$$

et en supposant que les volumes des cellules sont uniformément minorés au cours des itérations, i.e. $\exists K \mid (\forall i,\ \forall n,\ K < \Delta x_i^n)$, **le schéma mixte (13-16-17-7) est stable en norme L^2.**

Démonstration : on utilise une forme quadratique définie positive de type énergie comme fonction de Lyapunov. Plus précisément, on définit une énergie discrète $E^n = \sum_i \Delta x_i^n {u_i^n}^2$, qui est équivalente à la norme L^2 sous l'hypothèse de minoration uniforme sur les volumes des cellules. Nous allons montrer que sous la condition (23), $\Delta E = E^{n+1} - E^n \leq 0$. Nous en déduirons que $(\forall n,\ E^n \leq E^0)$, donc que $(\forall n,\ ||u^n||_2 \leq \sqrt{E^0/K})$.
Nous déduisons de (19a-19b) l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta E \ = \sum_i \ & \left(\Delta x_i^{n+1} - \Delta x_i^n\right) {u_i^{n+\theta_i}}^2 \\ & +2\Delta t^n u_i^{n+\theta_i} \Big[(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^-(u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}) \\ & \qquad +(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i})\Big] \\ & +\Delta t^{n^2} \left(\frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n}\right) \Big[(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^-(u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}) \\ & \qquad +(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i})\Big]^2 . \end{aligned}$$

D'après (7), $\Delta x_i^{n+1} - \Delta x_i^n = \Delta t^n \left((c-\omega_{i-\frac{1}{2}}) - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})\right)$. Or, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_i \left[(c-\omega_{i-\frac{1}{2}}) - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})\right] {u_i^{n+\theta_i}}^2 \ &= \ \sum_i (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})({u_i^{n+\theta_i}}^2 - {u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}}^2) \\ &= \ \sum_i \ (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+({u_i^{n+\theta_i}}^2 - {u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}}^2) \\ &\qquad + (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^-({u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}}^2 - {u_i^{n+\theta_i}}^2). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc} \qquad \Delta E \;=\; \sum_i \;& \Delta t^n (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left(-{u_i^{n+\theta_i}}^2 - {u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}}^2 + 2u_i^{n+\theta_i} u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}\right) \\
& + \Delta t^n (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left({u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}}^2 + {u_i^{n+\theta_i}}^2 - 2u_i^{n+\theta_i} u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}\right) \\
& + \Delta t^{n^2} \left(\frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n}\right) \Big[+(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i}) \\
& \qquad\qquad + (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i})\Big]^2 \;,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{et} \qquad \Delta E \;=\; \sum_i \;& -\Delta t^n \left|c-\omega_{i-\frac{1}{2}}\right| \left(u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}\right)^2 \\
& + \Delta t^{n^2} \left(\frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n}\right) \Big[(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}) \\
& \qquad\qquad + (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i})\Big]^2 \;.
\end{aligned}
$$

Il suit de cette égalité que

$$
\begin{aligned}
\Delta E \leq \;& \sum_i -\Delta t^n \left|c-\omega_{i-\frac{1}{2}}\right| \left(u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}\right)^2 \\
& + 2\Delta t^{n^2} \left(\frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n}\right) \Big[(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^{-2} (u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}})^2 \\
& \qquad\qquad + (c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^{+2} (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i})^2\Big] \;.
\end{aligned}
$$

Sous la condition (23), nous avons $\Delta E \leq 0$, ce qui conclue la démonstration.

3.1.2 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques élémentaires. Nous cherchons ici à montrer que le schéma localement implicite présenter fonctionne correctement. Par exemple, sur l'équation d'advection avec $c = 1$, on a convecté un front de type Heavyside situé en $x = -1$ à $t = 0$ jusqu'à $t = 2$. La maillage est extrêmement raffiné autour du point $x = 0$, et on a représenté la taille de maille en fonction de x sur la Figure 2. Le pas de temps est fixé de telle sorte que 20% des cellules (celles dont les tailles sont les plus petites) sont traitées avec $\theta_i = 1$, tandis que les autres sont avancées en temps avec un schéma explicite. Pour les cellules les plus petites, on a pris un nombre de Courant localement égal à 30. On voit sur la Figure 3 le schéma obtenu est effectivement TVD. Néanmoins, les discontinuités de traitement (on passe brutalement de $\theta_i = 0$ à $\theta_i = 1$) provoque des discontinuités de diffusion numérique et d'allure de la solution.

3.2 Equation de Burgers

3.2.1 Schéma implicite linéarisé

Si nous appliquons le schéma (13)-(14) muni de la fonction de flux numérique de Godunov (12) à l'équation de Burgers, nous sommes confrontés à la résolution d'un système non linéaire. Afin de revenir à un système linéaire, nous cherchons à construire un

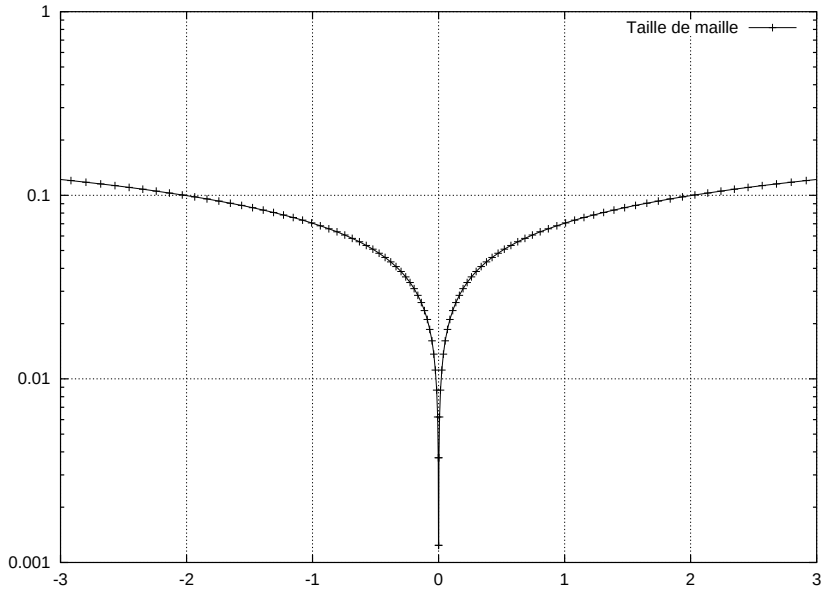

FIG. 2 – *Taille locale de maille.*

schéma implicite linéarisé. Pour ce faire, nous remplaçons dans (13) le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}})$ par

$$\begin{aligned}\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \quad &+ \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ &+ \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n),\end{aligned}$$

où $\phi'_u(u,v,\omega)$ et $\phi'_v(u,v,\omega)$ désignent respectivement les dérivées par rapport à u et v de $\phi(u,v,\omega)$ (ou des approximations de ces dérivées). Nous obtenons les itérations en temps suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} \quad = \quad & \Delta x_i^n u_i^n \; + \; \Delta t^n \Big(\phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ & + \phi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-1}^n) \\ & + \Big[\phi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \; \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \Big] (u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ & - \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n) \Big) \; .\end{aligned} \tag{24}$$

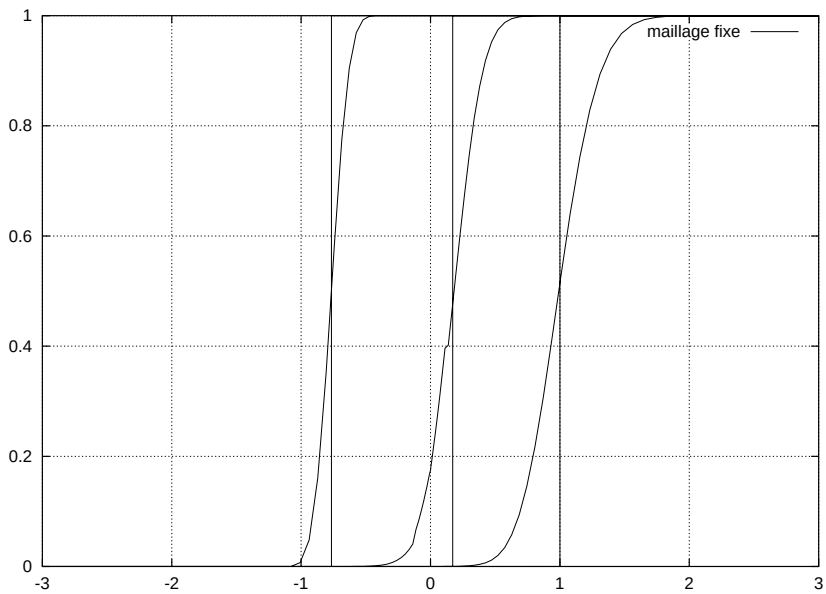

FIG. 3 – *Solutions à $t = 1$ et $t = 2$ en maillage fixe du schéma localement implicite.*

Cette équation peut également se mettre sous une forme proche de (19b) :

$$\begin{aligned} u_i^n \;=\; & u_i^{n+\theta_i} + \tfrac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n}\Big(\phi(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac12}) - \phi(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac12}) \\ & + \phi'_u(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac12})(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-1}^n) \\ & + \Big[\phi'_v(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac12}) - \phi'_u(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac12})\Big](u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ & - \phi'_v(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac12})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n) \\ & + (\omega_{i-\frac12} - \omega_{i+\frac12})u_i^{n+\theta_i}\Big) \;. \end{aligned} \tag{25}$$

Posons $\delta_i = u_i^{n+1} - u_i^n$. En utilisant l'identité $\Delta x_i^{n+\theta_i}(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) = \theta_i \Delta x_i^{n+1}(u_i^{n+1} - u_i^n)$, on montre que le vecteur $\delta = (\delta_i)_i$ est solution du système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_i^{n+1}\delta_i - \Delta t^n \Big(\phi'_u(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac12})\theta_{i-1}\Delta x_{i-1}^{n+1}\delta_{i-1} \\ \qquad\qquad - \phi'_v(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac12})\theta_{i+1}\Delta x_{i+1}^{n+1}\delta_{i+1} \\ \qquad\qquad + \Big[\phi'_v(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac12}) - \phi'_u(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac12})\Big]\theta_i\Delta x_i^{n+1}\delta_i\Big) = b_i, \\ \text{où} \quad b_i = (\Delta x_i^n - \Delta x_i^{n+1})u_i^n + \Delta t^n\Big(\phi(u_{i-1}^n,u_i^n,\omega_{i-\frac12}) - \phi(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac12})\Big) \end{array} \right. \tag{26}$$

On s'interroge encore sur la convergence d'une méthode de relaxation comme la méthode de Jacobi pour la résolution du système linéaire obtenu. Curieusement, si l'on utilise un

critère classique de dominance diagonale par ligne, la condition obtenue est inexploitable. Rappelons les deux lemmes suivants, le premier étant un résultats très classique et le second étant moins connu.

Lemme 2 *Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice réelle à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire telle que*

$$\forall i = 1,\ldots,N,\ \ |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|. \tag{27}$$

Soit D la diagonale de A. Alors une méthode de Jacobi converge pour la résolution d'un système linéaire de type $Ax = b$, i.e. le rayon spectral de la matrice $\mathbb{I} - D^{-1}A$ est strictement inférieur à 1.

Démonstration : une itération de Jacobi s'écrit $Dx^{k+1} + (A - D)x^k = b$, soit en fonction de l'erreur $\varepsilon^k = x^k - A^{-1}b$, $\varepsilon^{k+1} = -D^{-1}(A - D)\varepsilon^k$, ce qui explique l'équivalence entre la convergence de la méthode de Jacobi et l'inéquation sur le rayon spectral de la matrice $\mathbb{I} - D^{-1}A$. Or on a :

$$\forall i,\ \varepsilon_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j\neq i} a_{ij}\varepsilon_j^k,\ \text{ d'où }\ \forall i,\ |\varepsilon_i^{k+1}| = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{ij}||\varepsilon_j^k|.$$

On en déduit alors

$$\max_i |\varepsilon_i^{k+1}| \leq M \max_i |\varepsilon_i^k|,\ \text{ avec }\ M = \max_i \frac{\sum_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

ce qui prouve que la méthode de Jacobi converge.

Lemme 3 *Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice réelle à diagonale strictement dominante par colonnes, c'est-à-dire telle que*

$$\forall j = 1,\ldots,N,\ \ |a_{jj}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|. \tag{28}$$

Soit D la diagonale de A. Alors une méthode de Jacobi converge pour la résolution d'un système linéaire de type $Ax = b$, i.e. le rayon spectral de la matrice $\mathbb{I} - D^{-1}A$ est strictement inférieur à 1.

Démonstration : la matrice A^t, transposée de A, est à diagonale strictement dominante par lignes. Le lemme précédent montre que $\rho(\mathbb{I} - D^{-1}A^t) < 1$. Comme le rayon spectral d'une matrice est égal à celui de sa transposée, on a aussi $\rho(\mathbb{I} - AD^{-1}) < 1$, puisque D est diagonale.

Une itération de Jacobi pour la résolution d'un système $Ax = b$ s'écrit comme précédemment en fonction de l'erreur $\varepsilon^{k+1} = -D^{-1}(A - D)\varepsilon^k$. Considérons la nouvelle variable $\mu^k = D\varepsilon^k$. On a $\mu^{k+1} = -(A - D)D^{-1}\mu^k = (\mathbb{I} - AD^{-1})\mu^k$. Comme $\rho(\mathbb{I} - AD^{-1}) < 1$, la méthode de Jacobi converge.

Comme on l'a vu plus haut, c'est ce dernier lemme qui est facilement exploitable pour trouver une condition suffisante de convergence de la méthode de Jacobi pour le système (26). On trouve en effet que la méthode de Jacobi converge si, $\forall i$,

$$\begin{aligned} &\left|1-\theta_i\Delta t^n\left(\phi'_v(u^n_{i-1},u^n_i,\omega_{i-\frac{1}{2}})-\phi'_u(u^n_i,u^n_{i+1},\omega_{i+\frac{1}{2}})\right)\right| \\ &> \theta_i\Delta t^n\left(\left|\phi'_u(u^n_{i-1},u^n_i,\omega_{i-\frac{1}{2}})\right|+\left|\phi'_v(u^n_i,u^n_{i+1},\omega_{i+\frac{1}{2}})\right|\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Nous reviendrons sur cette condition. On peut noter dès maintenant que cette condition est automatiquement vérifiée si on a de manière générale $\phi'_u(u,v,\omega)\geq 0$ et $\phi'_v(u,v,\omega)\leq 0$, ce qui est la cas pour l'équation d'advection. De toute façon, avant d'appliquer le schéma (24), il faut s'assurer que la fonction de flux numérique choisie est dérivable, ce qui n'est pas le cas du flux de Godunov (12). Une idée est d'approcher la dérivée de ces flux par la dérivée d'autres flux cette fois dérivables. Afin d'y parvenir, nous adaptons ici les schémas de Engquist-Osher et de Roe [16] aux maillages mobiles.

3.2.2 Schéma mixte Godunov-Engquist-Osher

La méthode de Godunov consiste à prendre comme fonction de flux numérique

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G,u_D,\omega)=f(\mathcal{S}_R(\omega;u_G,u_D))-\omega\mathcal{S}_R(\omega;u_G,u_D)$$

où $\mathcal{S}_R(\omega;u_G,u_D)$ est la valeur en $x/t=\omega$ de la solution exacte du problème de Riemann dont les états à gauche et à droite sont u_G et u_D. La méthode de Engquist-Osher consiste à choisir comme fonction de flux numérique

$$\phi_{\text{EO}}(u_G,u_D,\omega)=f(w(\omega;u_G,u_D))-\omega w(\omega;u_G,u_D)$$

où $w(\omega;u_G,u_D)$ est une approximation de la solution exacte $\mathcal{S}_R(\omega;u_G,u_D)$ du problème de Riemann donnée par

$$w(\omega;u_G,u_D)=\begin{cases} u_G & \text{si } \omega\leq u_G \\ \omega & \text{si } \min(u_G,u_D)\leq\omega\leq\max(u_G,u_D) \\ u_D & \text{si } \omega\geq u_D \end{cases}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\phi_{\text{EO}}(u_G,u_D,\omega)=\frac{1}{2}(u_G-\omega)^{+^2}+\frac{1}{2}(u_D-\omega)^{-^2}-\frac{1}{2}\omega^2\ . \tag{30}$$

Nous déduisons de cette expression que $\frac{\partial\phi_{\text{EO}}}{\partial u_G}=(u_G-\omega)^+$, $\frac{\partial\phi_{\text{EO}}}{\partial u_D}=(u_D-\omega)^-$. La fonction de flux numérique de Engquist-Osher est donc dérivable. Nous proposons donc le schéma (13) avec comme flux numérique

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}}=\phi_{\text{Godunov}}(u^n_i,u^n_{i+1},\omega_{i+\frac{1}{2}})\ &+\ \frac{\partial\phi_{\text{EO}}}{\partial u}(u^n_i,u^n_{i+1},\omega_{i+\frac{1}{2}})(u^{n+\theta_i}_i-u^n_i) \\ &+\ \frac{\partial\phi_{\text{EO}}}{\partial v}(u^n_i,u^n_{i+1},\omega_{i+\frac{1}{2}})(u^{n+\theta_{i+1}}_{i+1}-u^n_{i+1}). \end{aligned} \tag{31}$$

Remarque 6 *Comme on a $\frac{\partial\phi_{\text{EO}}}{\partial u_G}\geq 0$ et $\frac{\partial\phi_{\text{EO}}}{\partial u_D}\leq 0$, la condition (29) est automatiquement vérifiée et la méthode de Jacobi converge.*

3.2.3 Schéma mixte Godunov-Roe

La méthode de Roe consiste à prendre comme fonction de flux numérique

$$\phi_{\mathrm{R}}(u_G,u_D,\omega) = f(w(\omega;u_G,u_D)) - \omega w(\omega;u_G,u_D),$$

où $w(\omega;u_G,u_D)$ est la solution exacte du problème de Riemann approché linéarisé

$$u_t + \widetilde{A}\,(u_G,u_D)\,u_x = 0,$$

avec $\widetilde{A}\,(u_G,u_D)$ une jacobienne approchée vérifiant $\widetilde{A}\,(u_G,u_D)\,.\,(u_D - u_G) = f(u_D) - f(u_G)$. Pour l'équation de Burgers (3), on a $\widetilde{A}\,(u_G,u_D) = (u_G + u_D)/2 := u_M$. Ainsi, nous obtenons

$$w(\omega;u_G,u_D) = \begin{cases} u_G & \text{si } \omega \leq u_M, \\ u_D & \text{si } \omega \geq u_M. \end{cases}$$

La fonction de flux numérique s'écrit alors

$$\phi_{\mathrm{R}}(u_G,u_D,\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_G^2 - \omega u_G & \text{si } \omega \leq u_M, \\ \frac{1}{2}u_D^2 - \omega u_D & \text{si } \omega \geq u_M. \end{cases} \tag{32}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{R}}(u_G,u_D,\omega) = \; & \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(u_G-\omega)^2\right. \\ + \; & \left.\tfrac{1}{2}(u_D-\omega)^2\right) - \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{u_G+u_D}{2} - \omega\right|(u_D - u_G) - \tfrac{\omega^2}{2}\,. \end{aligned}$$

Il apparaît clairement que cette fonction de flux numérique n'est pas dérivable. Comme pour les schémas en maillage fixe, nous avons alors recours à la fonction de flux numérique de Roe corrigée

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{R}}^c(u_G,u_D,\omega) = \; & \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(u_G-\omega)^2\right. \\ + \; & \left.\tfrac{1}{2}(u_D-\omega)^2\right) - \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{u_G+u_D}{2} - \omega\right|_\epsilon (u_D - u_G) - \tfrac{\omega^2}{2} \end{aligned} \tag{33}$$

avec

$$|x|_\epsilon = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \epsilon, \\ \frac{\epsilon^2 + x^2}{2\epsilon} & \text{si } |x| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Nous considérerons alors le schéma (13) avec comme flux numérique

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\mathrm{Godunov}}(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac{1}{2}}) \; + \; & \tfrac{\partial \phi_{\mathrm{R}}^c}{\partial u}(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ + \; & \tfrac{\partial \phi_{\mathrm{R}}^c}{\partial v}(u_i^n,u_{i+1}^n,\omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n). \end{aligned} \tag{34}$$

Remarque 7 *Comme les inégalités $\frac{\partial \phi_{\mathrm{R}}}{\partial u_G} \geq 0$ et $\frac{\partial \phi_{\mathrm{R}}}{\partial u_D} \leq 0$ ne sont pas nécessairement vérifiées, on ne peut conclure de manière générale sur la convergence de la méthode de Jacobi.*

3.2.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques toujours élémentaires. Pour l'équation de Burgers, nous montrons le bon comportement de notre schéma localement implicite (avec itérations de Jacobi pour la résolution du système linéaire) sur le cas d'un choc ($u_g = 1$, $u_d = 0$) et pour le maillage de la Figure 2 supposé fixe. On voit sur le résultat présenté en Figure 4 que le schéma est effectivement TVD. On note aussi que la diffusion numérique senble plus faible dans la zone où le maillage est fin. On a représenté

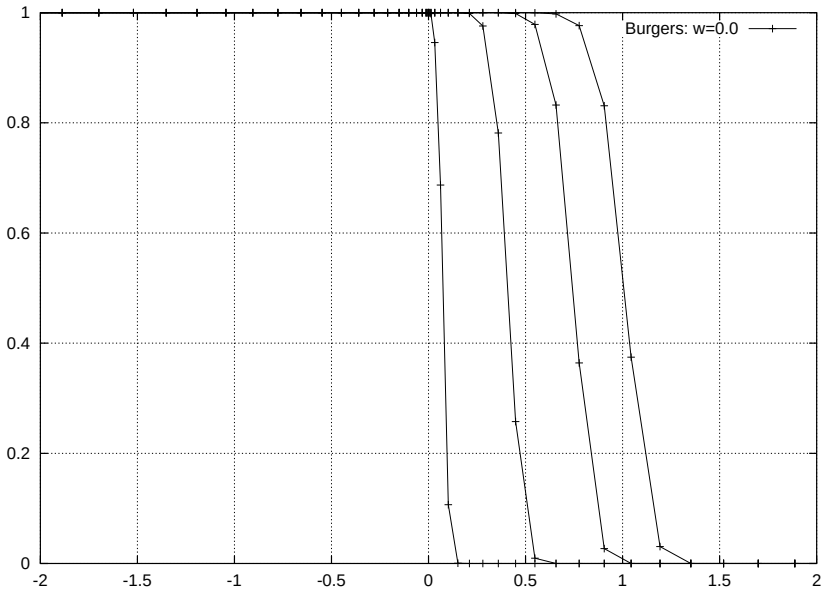

FIG. 4 – *maille.*

sur la Figure 5 la solution obtenue à $t = 0.1$ pour un maillage se deplaçant uniformément vers la droite à la vitesse du choc. On voit que la solution obtenue est très peu diffusée, puisque le choc doit être stationnaire dans ce référentiel. On souhaite obtenir ce même genre d'amélioration pour des solutions quelconques de l'équation de Burgers.

4 Schéma à topologie non constante

Jusqu'à présent, le déplacement du maillage était considéré comme une donnée. Nous aimerions par la suite qu'il se déplace et s'adapte de manière automatique. Dans cette perspective d'auto-adaptation, nous nous intéressons ici à des modifications de la topologie. L'ajout de points correspond à une volonté de raffiner localement le maillage. La suppression

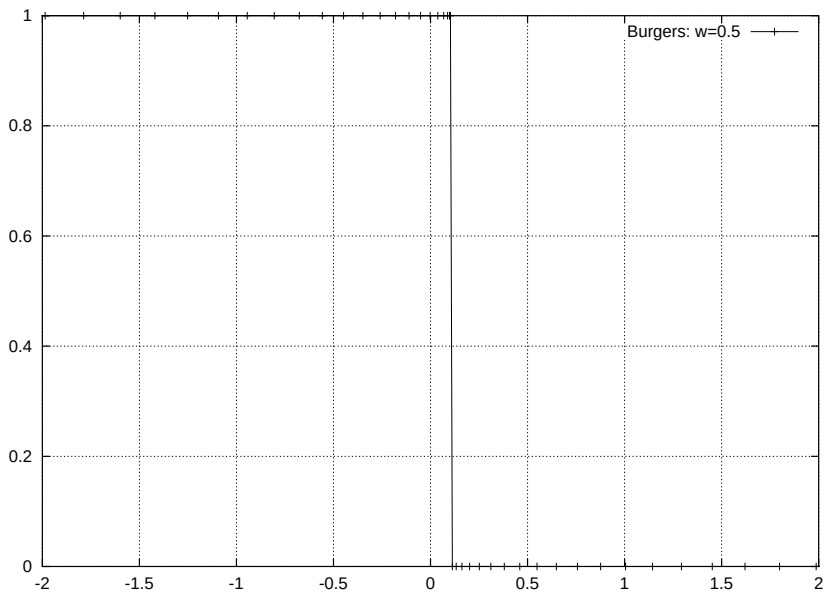

FIG. 5 – *implicite.*

permet, elle, de réduire le nombre de points inutiles. Pour chacune des situations, nous adaptons les schémas étudiés précédemment et examinons leurs propriétés.

4.1 Addition de points

Pour simplifier notre étude, nous nous situons dans le cadre précis de la Figure 6, où M nouveaux volumes finis $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}},\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}]$ pour $j = 1,\ldots,M$, sont créés à partir du point $x_{\frac{1}{2}}$, interface entre les deux cellules $[x_{-\frac{1}{2}},x_{\frac{1}{2}}]$ et $[x_{\frac{1}{2}},x_{\frac{3}{2}}]$.
Introduisons quelques notations. Posons $\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} = (\bar{x}_{j+\frac{1}{2}} - x^n_{\frac{1}{2}})/\Delta t^n$, $\Delta\bar{x}_j = \bar{x}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{x}_{j-\frac{1}{2}}$ pour $\forall\ j = 1,\ldots,M$, et notons $\bar{u}_j$ l'approximation de u sur $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}},\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}]$ pour $j = 1,\ldots,M$. D'autre part, nous supposons que $\bar{\omega}_{\frac{1}{2}} \leq \bar{\omega}_{\frac{3}{2}} \leq \ldots \leq \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}$ et $\forall i,\ \ \Delta x_i^{n+1} > 0$. Nous avons les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta\bar{x}_j & = & \Delta t^n \left[\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}\right] \quad \forall j = 1 \text{ à } M, \\ \Delta x_i^{n+1} & = & \Delta x_i^n + \Delta t^n \left[\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}\right] \quad i \notin \{0,1\} \\ \Delta x_0^{n+1} & = & \Delta x_0^n + \Delta t^n \left[\bar{\omega}_{\frac{1}{2}} - \omega_{-\frac{1}{2}}\right] \\ \Delta x_1^{n+1} & = & \Delta x_1^n + \Delta t^n \left[\omega_{\frac{3}{2}} - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}\right] \end{array}\right. . \tag{35}$$

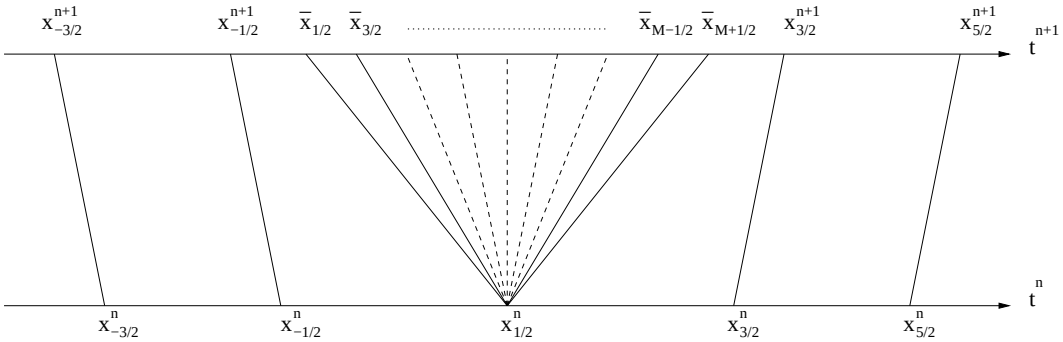

FIG. 6 – *Addition de points dans le maillage.*

L'adaptation du schéma conservatif (13)-(14)-(17) au maillage à topologie non constante est encore un schéma conservatif de la forme :

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0,\ i \notin \{0,1\} \quad (36a)$$

$$\frac{\Delta x_0^{n+1} u_0^{n+1} - \Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) - \phi(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^{n+\theta_0}, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (36b)$$

$$\frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \phi(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (36c)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_j \bar{u}_j}{\Delta t^n} + \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})\ \forall j = 1, \ldots, M, \quad (36d)$$

Comme dans la section précédente, nous voudrions savoir sous quelles conditions le schéma (36) muni du flux de Godunov vérifie le principe du maximum, est TVD, etc... Sur l'exemple de l'équation d'advection, nous formulons ces conditions. Pour l'équation de Burgers, nous nous contentons de présenter le schéma implicite linéarisé correspondant à (36).

4.1.1 Équation d'advection

Nous rappelons que pour l'équation d'advection, la fonction de flux numérique de Godunov est donnée par $\phi_{\text{Godunov}}(u_G, u_D, \omega) = (c-\omega)^+ u_G + (c-\omega)^- u_D$.

Théorème 4 *Sous les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{(1-\theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}} \left[(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^+ - (c-\bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- \right] & \leq 1, \\ \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}} \left[(c-\bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ - (c-\omega_{\frac{3}{2}})^- \right] & \leq 1, \\ \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] & \leq 1,\ \forall i \notin \{0,1\}, \end{array} \right. \quad (37)$$

le schéma en maillage mobile avec ajout de points (36)-(16)-(17) vérifie le principe du maximum.

Démonstration : nous voulons montrer que

$$\min\{u_i^n,\, i\in\mathbb{Z}\} \leq \begin{array}{l} \min\left\{\{u_i^{n+1},\, i\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{\bar u_j,\, 1\leq j\leq M\}\right\}, \\ \max\left\{\{u_i^{n+1},\, i\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{\bar u_j,\, 1\leq j\leq M\}\right\} \end{array} \leq \min\{u_i^n,\, i\in\mathbb{Z}\}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du Théorème 1, nous arrivons à montrer que, sous les trois conditions données dans le théorème,

$$\min_{i\in\mathbb{Z}} u_i^n \leq \min_{i\in\mathbb{Z}} u_i^{n+\theta_i} \leq \max_{i\in\mathbb{Z}} u_i^{n+\theta_i} \leq \max_{i\in\mathbb{Z}} u_i^n.$$

Il nous reste à montrer que

$$\min_{i\in\mathbb{Z}} u_i^n \leq \min_{1\leq j\leq M} \bar u_j \leq \max_{1\leq j\leq M} \bar u_j \leq \max_{i\in\mathbb{Z}} u_i^n\ .$$

Or $\forall j = 1,\ldots,M$, nous avons

$$\bar u_j = \frac{\left[(c-\bar\omega_{j-\frac12})^+ - (c-\bar\omega_{j+\frac12})^+\right] u_0^{n+\theta_0} + \left[(c-\bar\omega_{j-\frac12})^- - (c-\bar\omega_{j+\frac12})^-\right] u_1^{n+\theta_1}}{(c-\bar\omega_{j-\frac12}) - (c-\bar\omega_{j+\frac12})}$$

Comme $\bar\omega_{j-\frac12} < \bar\omega_{j+\frac12}$ (et comme les fonctions $x\to x^+$ et $x\to x^-$ sont croissantes), on a

$$\bar u_j = \frac{\alpha u_0^{n+\theta_0} + \beta u_1^{n+\theta_1}}{\alpha+\beta}, \quad \text{avec } \alpha+\beta>0,\ \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,$$

ce qui entraîne $\min_{i\in\{0,1\}} u_i^{n+\theta_i} \leq \bar u_j \leq \max_{i\in\{0,1\}} u_i^{n+\theta_i}$, et permet de conclure.

Théorème 5 *Sous les conditions*

$$\left\{\begin{array}{lll} (i)\ \forall i\neq 0, & \Delta t^n\left[(c-\omega_{i+\frac12})^+\frac{(1-\theta_{i+1})}{\Delta x_i^{n+1}} - (c-\omega_{i+\frac12})^-\frac{(1-\theta_i)}{\Delta x_i^{n+1}}\right] & \leq 1, \\ (ii) & -\Delta t^n (c-\bar\omega_{\frac12})^-\frac{(1-\theta_0)}{\Delta x_0^{n+1}} & \leq 1, \\ (iii) & \Delta t^n (c-\bar\omega_{M+\frac12})^+\frac{(1-\theta_1)}{\Delta x_1^{n+1}} & \leq 1, \end{array}\right. \tag{38}$$

le schéma en maillage mobile avec ajout de points (36)-(16)-(17) est TVD.
Démonstration : nous voulons montrer que $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$. Calculons $TV(u^{n+1})$:

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |\, u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\,| \\ &= \sum_{i=-\infty}^{i=-1} |\, u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\,| \ + \ |\, u_0^{n+1} - \bar u_1\,| \ + \ \sum_{j=1}^{M-1} |\, \bar u_{j+1} - \bar u_j\,| \\ &\quad + \ |\, u_1^{n+1} - \bar u_M\,| \ + \ \sum_{i=1}^{i=+\infty} |\, u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\,| \end{aligned}$$

D'après la démonstration du théorème 21 et sous l'hypothèse (i), nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=-\infty}^{i=-2} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \\
&\quad \sum_{i=-\infty}^{i=-2} \left[1 - \frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\
&\quad + \sum_{i=-\infty}^{i=-1} \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[-(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \mid u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \mid \\
&\quad + \sum_{i=-\infty}^{i=-3} \frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ \mid u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \mid .
\end{aligned}$$

Nous déduisons de cette inégalité

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=-\infty}^{i=-2} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \\
&\quad \sum_{i=-\infty}^{i=-3} \mid u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \mid + \left(1 - \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ \right) \mid u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}} \mid \\
&\qquad + \tfrac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} \left[-(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \right] \mid u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \mid .
\end{aligned}$$

Nous montrons de même que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{i=+\infty} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \\
&\quad \sum_{i=3}^{i=+\infty} \mid u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \mid + \left(1 + \frac{(1-\theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}} (c - \omega_{\frac{5}{2}})^- \right) \mid u_3^{n+\theta_3} - u_2^{n+\theta_2} \mid \\
&\qquad + \tfrac{(1-\theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}} (c - \omega_{\frac{3}{2}})^+ \mid u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1} \mid .
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\frac{\sum_{j=1}^{M-1} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j|}{|u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}|} = \sum_{j=1}^{M-1} \left| \frac{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{3}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{3}{2}})} - \frac{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})} \right| .$$

Tous les termes de la somme de droite étant positifs, nous obtenons

$$\frac{\sum_{j=1}^{M-1} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j|}{u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}|} = \frac{(c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})} - \frac{(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})} .$$

L'hypothèse (i) pour $i=-1$ et $i=1$ implique les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}|u_0^{n+1}-u_{-1}^{n+1}| \leq & \left(1-\tfrac{(1-\theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c-\omega_{-\frac12})^+\tfrac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c-\omega_{-\frac12})^-\right)|u_0^{n+\theta_0}-u_{-1}^{n+\theta_{-1}}| \\ & -\tfrac{(1-\theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c-\bar\omega_{\frac12})^- \mid u_0^{n+\theta_0}-u_1^{n+\theta_1}\mid \\ & +\tfrac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c-\omega_{-\frac32})^+ \mid u_{-1}^{n+\theta_{-1}}-u_{-2}^{n+\theta_{-2}}\mid ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|u_2^{n+1}-u_1^{n+1}| \leq & \left(1-\tfrac{(1-\theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}}(c-\omega_{\frac32})^+\tfrac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac32})^-\right)\mid u_2^{n+\theta_2}-u_1^{n+\theta_1}\mid \\ & +\tfrac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\bar\omega_{M+\frac12})^+ \mid u_0^{n+\theta_0}-u_1^{n+\theta_1}\mid \\ & -\tfrac{(1-\theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}}(c-\omega_{\frac52})^- \mid u_2^{n+\theta_2}-u_3^{n+\theta_3}\mid .\end{aligned}$$

Enfin, nous avons aussi :

$$\begin{aligned}|u_0^{n+1}-\bar u_1| \quad \leq \quad & \left|\tfrac{(1-\theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c-\bar\omega_{\frac12})^- + \tfrac{\Delta t^n}{\Delta\bar x_1}\left((c-\bar\omega_{\frac12})^- - (c-\bar\omega_{\frac32})^-\right)\right| \\ & \times|u_0^{n+\theta_0}-u_1^{n+\theta_1}| + \tfrac{(1-\theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c-\omega_{-\frac12})^+|u_0^{n+\theta_0}-u_{-1}^{n+\theta_{-1}}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|u_1^{n+1}-\bar u_M| \quad \leq \quad & \left|\tfrac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\bar\omega_{M+\frac12})^+ - \tfrac{\Delta t^n}{\Delta\bar x_M}\left((c-\bar\omega_{M-\frac12})^+ - (c-\bar\omega_{M+\frac12})^+\right)\right| \\ & \times|u_0^{n+\theta_0}-u_1^{n+\theta_1}| - \tfrac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac32})^-|u_1^{n+\theta_1}-u_2^{n+\theta_2}|.\end{aligned}$$

En faisant la somme de tous les termes, nous trouvons

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left|u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}-u_i^{n+\theta_i}\right| + \left|u_0^{n+\theta_0}-u_1^{n+\theta_1}\right| X$$

$$\begin{aligned}\text{avec}\quad & X = |A|-A+|B|-B \\ & A = \tfrac{(1-\theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c-\bar\omega_{\frac12}) + \tfrac{\Delta t^n}{\Delta\bar x_1}\left((c-\bar\omega_{\frac12})^- - (c-\bar\omega_{\frac32})^-\right) \\ & B = \tfrac{\Delta t^n}{\Delta\bar x_M}\left((c-\bar\omega_{M-\frac12})^+ - (c-\bar\omega_{M+\frac12})^+\right) - \tfrac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\bar\omega_{M+\frac12}).\end{aligned}$$

Des hypothèses (ii) et (iii) nous déduisons que $A\geq 0$ et $B\geq 0$. Nous trouvons donc

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left|u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}-u_i^{n+\theta_i}\right| .$$

Il nous reste à montrer

$$TV(u^n) \geq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left|u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}-u_i^{n+\theta_i}\right| . \tag{39}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} TV(u^n) &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |u_i^n - u_{i-1}^n| \\ &= \sum_{i=-\infty}^{i=-2} \mid u_{i+1}^n - u_i^n \mid \; + \; \sum_{i=2}^{i=+\infty} \mid u_{i+1}^n - u_i^n \mid \\ &\quad + \; \mid u_0^n - u_{-1}^n \mid \; + \; \mid u_1^n - u_0^n \mid \; + \; \mid u_2^n - u_1^n \mid . \end{aligned}$$

Des expressions des u_i^n en fonction des $u_i^{n+\theta_i}$ pour tout i, nous déduisons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |u_{i+1}^n - u_i^n| \geq \; & \left[1 + \tfrac{\theta_{i+1}\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n}(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ - \tfrac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n}(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^-\right] |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\ & - \tfrac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n}(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ |u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}| \\ & + \tfrac{\theta_{i+1}\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n}(c - \omega_{i+\frac{3}{2}})^- |u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}|, \; \forall i \notin \{-1,0,1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_2^n - u_1^n| \geq \; & \left[1 + \tfrac{\theta_2 \Delta t^n}{\Delta x_2^n}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^+ - \tfrac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^-\right] |u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}| \\ & - \tfrac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}(c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ |u_1^{n+\theta_1} - u_0^{n+\theta_0}| + \tfrac{\theta_2 \Delta t^n}{\Delta x_2^n}(c - \omega_{\frac{5}{2}})^- |u_3^{n+\theta_3} - u_2^{n+\theta_2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_0^n - u_{-1}^n| \geq \; & \left[1 + \tfrac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ - \tfrac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^-\right] |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}| \\ & - \tfrac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n}(c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ |u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}}| \\ & + \tfrac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n}(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- |u_1^{n+\theta_1} - u_0^{n+\theta_0}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_1^n - u_0^n| \geq \; & \left[1 + \tfrac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}(c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ - \tfrac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n}(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^-\right] |u_1^{n+\theta_1} - u_0^{n+\theta_0}| \\ & - \tfrac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}| \\ & + \tfrac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^- |u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}| \end{aligned}$$

En additionnant toutes ces inégalités, nous trouvons (39), ce qui conclue la démonstration.

Remarque 8 *Sous les conditions (38), le schéma de Godunov en maillage mobile à topologie non constante est TVD et vérifie le principe du maximum.*
Comme pour la Remarque 4, il suffit de démontrer que (38)⇒(37). Cette démonstration est tout-à-fait similaire et est laissée au lecteur.

4.1.2 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (36) sur l'exemple de l'équation de Burgers, qui consiste à considérer les itérations de la forme :

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall i \notin \{0,1\},$$

$$\frac{\Delta x_0^{n+1} u_0^{n+1} - \Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^{n+\theta_0}, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0,$$

$$\frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) - \mathcal{F}(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}) = 0,$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_j \bar{u}_j}{\Delta t^n} + \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) \ \forall j = 1, \ldots, M,$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n),$$

où ϕ est la fonction de flux numérique de Godunov (12) et la fonction ψ est la fonction de flux numérique soit de Engquist-Osher (30), soit de Roe corrigée (32).

4.1.3 Résultats numériques

On a représenté sur la Figure 7 les solutions obtenues pour l'équation d'advection avec $c = 0.2$, pour une donnée initiale de type front en $x = 0$, pour le schéma localement implicite, avec un maillage uniforme fixe et avec une addition de 5 points à des vitesses proches de c. On voit que l'addition de points se passe sans problème. Les différences de diffusion numérique apparaissent clairement : une plus grande diffusion derrière la discontinuité (où la maillage est de plus fixe) et une bien plus faible diffusion devant la discontinuité (où la vitesse des mailles est proche de c).

4.2 Soustraction de points

Nous nous situons dans le cadre de la Figure 8 : les points-interfaces $x^n_{-\frac{1}{2}}$ et $x^n_{\frac{1}{2}}$ se rejoignent à l'instant t^{n+1} pour n'en former qu'un seul, ce qui implique la suppression de la cellule $\mathcal{C}_0 = [x^n_{-\frac{1}{2}}, x^n_{\frac{1}{2}}]$.

Le schéma (13)-(14) nous donne une contrainte forte sur les vitesses des points convergents, à savoir $\omega_{-\frac{1}{2}} - \omega_{\frac{1}{2}} = \Delta x_0^n / \Delta t^n > 0$. Nous considérons le schéma suivant pour un pas de temps :

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \ \forall i \notin \{-1,0,1\} \quad (40a)$$

$$\frac{\Delta x_{-1}^{n+1} u_{-1}^{n+1} - \Delta x_{-1}^n u_{-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) - \phi(u_{-2}^{n+\theta_{-2}}, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, \omega_{-\frac{3}{2}}) = 0, \quad (40b)$$

$$\frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \phi(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) = 0, \quad (40c)$$

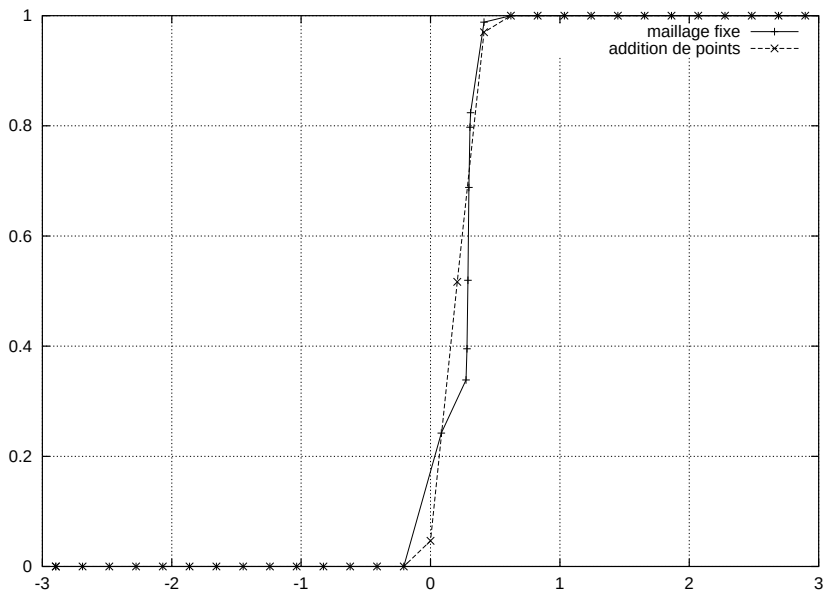

FIG. 7 – .

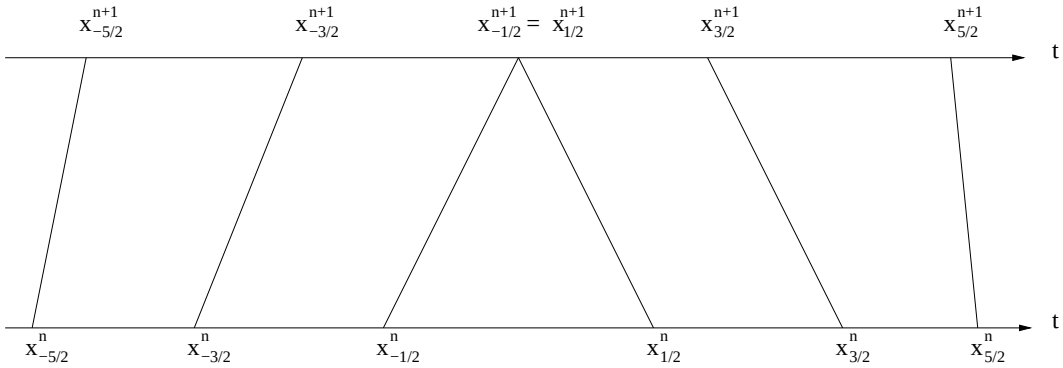

FIG. 8 – *Suppression d'un point du maillage.*

avec $\theta_i \in [0,1]$, $\Delta x_i^{n+\theta_i}$ et $u_i^{n+\theta_i}$ définis par (17) pour $i \neq 0$, et on définit en outre $\Delta x_0^{n+1} = 0$ (ce qui implique de les conventions naturelles $\Delta x_0^{n+\theta_0} = (1-\theta_0)\Delta x_0^n$ et $u_0^{n+\theta_0} = u_0^n$) et u_0^* est choisi tel que

$$-\frac{\Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \phi(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) - \phi(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0,$$

ce qui implique que la valeur fictive u_0^* peut être interprétée comme une valeur de u_0^{n+1} et que le schéma garde sa forme générale, y compris pour la cellule qui disparaît au cours du pas de temps. Comme dans la sous-section concernant l'addition de points, nous discutons des propriétés de ce schéma muni du flux numérique de Godunov sur l'équation d'advection et présentons le schéma implicite linéarisé correspondant pour l'équation de Burgers.

4.2.1 Équation d'advection

Théorème 6 *Sous la condition*

$$\forall i \neq 0,\ \left[(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^-\right] \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \leq 1, \tag{41}$$

le schéma en maillage mobile avec soustraction de point (40)-(16)-(17) vérifie le principe du maximum.

Démonstration: pour $i \leq -2$ et $i \geq 2$, nous retrouvons (19). De plus, nous avons aussi

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{-1}^{n+1} & = & u_{-1}^{n+\theta_{-1}} + \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} \left[(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- \left(u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_0^*\right)\right. \\ & & \left. +(c-\omega_{-\frac{3}{2}})^+ \left(u_{-2}^{n+\theta_{-2}} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right)\right], \\ u_{-1}^{n} & = & u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - \frac{\theta_{-1}\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n}} \left[(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- \left(u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_0^*\right)\right. \\ & & \left. +(c-\omega_{-\frac{3}{2}})^+ \left(u_{-2}^{n+\theta_{-2}} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right)\right], \end{array}\right. \tag{42}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{1}^{n+1} & = & u_{1}^{n+\theta_{1}} + \frac{(1-\theta_{1})\Delta t^n}{\Delta x_{1}^{n+1}} \left[(c-\omega_{\frac{3}{2}})^- \left(u_{1}^{n+\theta_{1}} - u_2^{n+\theta_2}\right)\right. \\ & & \left. +(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \left(u_0^* - u_1^{n+\theta_1}\right)\right], \\ u_{1}^{n} & = & u_{1}^{n+\theta_{1}} - \frac{\theta_{1}\Delta t^n}{\Delta x_{1}^{n}} \left[(c-\omega_{\frac{3}{2}})^- \left(u_{1}^{n+\theta_{1}} - u_2^{n+\theta_2}\right)\right. \\ & & \left. +(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \left(u_0^* - u_1^{n+\theta_1}\right)\right]. \end{array}\right. \tag{43}$$

Comme dans la démonstration du Théorème 1, nous montrons simplement que, sous la condition (41) pour $i \leq -2$ et $i \geq 2$, nous avons :

$$\min_{i\neq 0} u_i^{n+\theta_i} \leq \min_{i\neq -1,1} u_i^{n+1} \leq \max_{i\neq -1,1} u_i^{n+1} \leq \max_{i\neq 0} u_i^{n+\theta_i}.$$

Sous la même hypothèse pour $i=-1$ et $i=1$, nous obtenons :

$$\min_{i\neq 0}\left(u_i^{n+\theta_i}, u_0^*\right) \leq u_{-1}^{n+1}, u_1^{n+1} \leq \max_{i\neq 0}\left(u_i^{n+\theta_i}, u_0^*\right).$$

En résumé, nous avons

$$(41) \ \Rightarrow\ \left(\min_{i\neq 0}\left(u_i^{n+\theta_i}, u_0^*\right) \leq \min_{i\neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i\neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i\neq 0}\left(u_i^{n+\theta_i}, u_0^*\right)\right).$$

En outre, $\omega_{-\frac{1}{2}} > \omega_{\frac{1}{2}}$. Nous distinguons alors trois cas possibles pour u_0^* :

- $c \leq \omega_{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow u_0^* = \frac{(\omega_{\frac{1}{2}}-c)u_1^{n+\theta_1}+(\omega_{-\frac{1}{2}}-\omega_{\frac{1}{2}})u_0^n}{\omega_{-\frac{1}{2}}-c} \quad \Rightarrow u_0^* \in \left(u_0^n, u_1^{n+\theta_1}\right)$,
- $c \geq \omega_{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow u_0^* = \frac{(c-\omega_{-\frac{1}{2}})u_{-1}^{n+\theta_{-1}}+(\omega_{-\frac{1}{2}}-\omega_{\frac{1}{2}})u_0^n}{c-\omega_{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow u_0^* \in \left(u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right)$,
- $\omega_{\frac{1}{2}} \leq c \leq \omega_{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow u_0^* = u_0^n$.

Dans tous les cas : $\min\left(u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_1^{n+\theta_1}\right) \leq u_0^* \leq \max\left(u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_1^{n+\theta_1}\right)$. Donc

$$(41) \;\Rightarrow\; \left(\min_i u_i^{n+\theta_i} \leq \min_{i\neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i\neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^{n+\theta_i}\right).$$

D'autre part, considérons i l'indice qui minimise $u_i^{n+\theta_i}$.

- Si $i \neq -1,0,1$ alors $u_i^n \leq u_i^{n+\theta_i}$. Donc $u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$ et $\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$;
- Si $i = -1$ alors $u_{-2}^{n+\theta_{-2}} \geq u_{-1}^{n+\theta_{-1}}$ et $u_0^* \geq u_{-1}^{n+\theta_{-1}}$. Donc $u_{-1}^n \leq u_{-1}^{n+\theta_{-1}} = \min_i u_i^{n+\theta_i}$;
- Si $i = 1$ alors $u_2^{n+\theta_2} \geq u_1^{n+\theta_1}$ et $u_0^* \geq u_1^{n+\theta_1}$. Donc $u_1^n \leq u_1^{n+\theta_1} = \min_i u_i^{n+\theta_i}$;
- Si $i = 0$ alors $\min_i u_i^n \leq u_0^n = \min_i u_i^{n+\theta_i}$.

Dans tous les cas, $\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$. Par un raisonnement analogue, nous trouvons $\max_i u_i^n \geq \min_i u_i^{n+\theta_i}$. Finalement, nous déduisons des inégalités ci-dessus

$$\min_i u_i^n \leq \min_{i\neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i\neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^n,$$

ce qui termine la démonstration.

Théorème 7 *Sous les conditions*

$$\left\{\begin{array}{lll} (i) & \forall i \notin \{0,-1\} & 1 - \frac{1-\theta_{i+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}}\Delta t^n (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{1-\theta_i}{\Delta x_i^{n+1}}\Delta t^n (c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \geq 0, \\ (ii) & & 1 - \frac{1-\theta_1}{\Delta x_1^{n+1}}\Delta t^n (c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \geq 0, \\ (iii) & & 1 + \frac{1-\theta_{-1}}{\Delta x_{-1}^{n+1}}\Delta t^n (c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- \geq 0, \end{array}\right. \quad (44)$$

le schéma en maillage mobile avec soustraction de point (40)-(16)-(17) est TVD.

Démonstration : en utilisant les égalités (19) pour $i \notin \{-1,0,1\}$ et (42)-(43), et en appliquant le même raisonnement que pour la démonstration du Théorème 2, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&TV(u^{n+1}) \leq \\
&\left(\sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty}\right) \left| 1 - \frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}}(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right| \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| \\
&+ \left(\sum_{i=-\infty}^{-3} + \sum_{i=1}^{+\infty}\right) \left(-\frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}}(c-\omega_{i+\frac{3}{2}})^- \right) \left| u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right| \\
&+ \left(\sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=2}^{+\infty}\right) \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c-\omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&+ \left(-\frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- \right) \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| + \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| \\
&+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_1^{n+\theta_1} - u_0^*) + \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) \right| \\
&+ \left(-\frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac{3}{2}})^- \right) \left| u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1} \right| \\
&+ \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} + (c-\omega_{-\frac{3}{2}})^+ \left| u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}} \right| .
\end{aligned}
$$

Grâce à l'hypothèse (i), nous déduisons:

$$
\begin{aligned}
&TV(u^{n+1}) \leq \left(\sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty}\right) \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| \\
&+ \left(-\frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- \right) \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| + \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| \\
&+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_1^{n+\theta_1} - u_0^*) + \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) \right|
\end{aligned}
$$

De plus, en remarquant que $u_1^{n+\theta_1} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} = u_1^{n+\theta_1} - u_0^* + u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}$ et en utilisant les conditions suivantes (ii) et (iii), nous trouvons :

$$
TV(u^{n+1}) \leq \left(\sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty}\right) \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| + \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| + \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| .
$$

Similairement, en utilisant les différentes valeurs de u_i^n données en (19) pour $i \notin \{-1,0,1\}$ et en (42)-(43), nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
&TV(u^n) \geq \\
&\left(\sum_{i=-\infty}^{-1} + \sum_{i=2}^{+\infty}\right) \left|u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}\right| \\
&+ \frac{\theta_{-1}\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n}(c-\omega_{-\frac{3}{2}})^+ \left|u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}}\right| - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}(c-\omega_{\frac{3}{2}})^- \left|u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}\right| \\
&+ \frac{\theta_{-1}\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n}(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^- \left|u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right| - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}(c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \left|u_1^{n+\theta_1} - u_0^*\right| \\
&+ \left|\left(u_1^{n+\theta_1} - u_0^n\right) - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n}\left[-(c-\omega_{\frac{3}{2}})^- \left(u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}\right) + (c-\omega_{\frac{1}{2}})^+ \left(u_0^* - u_1^{n+\theta_1}\right)\right]\right| \\
&+ \left|u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} + \frac{\theta_{-1}\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n}\left[-(c-\omega_{-\frac{1}{2}})^-(u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) + (c-\omega_{\frac{3}{2}})^+(u_{-2}^{n+\theta_{-2}} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}})\right]\right| .
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
TV(u^n) \geq \left(\sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty}\right) \left|u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}\right| + \left|u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right| + \left|u_1^{n+\theta_1} - u_0^n\right| .
$$

Pour conclure la démonstration, il nous suffit donc de prouver que

$$
\left|u_1^{n+\theta_1} - u_0^*\right| + \left|u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right| \leq \left|u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right| + \left|u_1^{n+\theta_1} - u_0^n\right| . \tag{45}
$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, nous distinguons trois cas :

- si $\omega_{\frac{1}{2}} \leq c \leq \omega_{-\frac{1}{2}}$, nous avons $u_0^* = u_0^n$. L'inégalité (45) est donc vérifiée.
- si $c < \omega_{\frac{1}{2}}$ alors $u_0^* \in \left(u_0^n, u_1^{n+\theta_1}\right)$. Ainsi, $\left|u_1^{n+\theta_1} - u_0^n\right| = \left|u_1^{n+\theta_1} - u_0^*\right| + |u_0^* - u_0^n|$. Comme $\left|u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right| \geq \left|u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right| - |u_0^* - u_0^n|$, on a (45).
- si $c > \omega_{-\frac{1}{2}}$, alors $u_0^* \in \left(u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}\right)$. On montre comme ci-dessus que (45) est encore vraie.

Remarque 9 *Sous la condition (44), le schéma en maillage mobile avec soustraction de point (40)-(16)-(17) vérifie le principe du maximum et est TVD.*

Comme pour les Remarques 4 et 8, il suffit de démontrer que (44)⇒(41). Cette démonstration est tout-à-fait similaire et est laissée au lecteur.

4.2.2 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (40) sur l'exemple de l'équation de Burgers, qui consiste à considérer les itérations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall i \notin \{-1,0,1\}, \\
\frac{\Delta x_{-1}^{n+1} u_{-1}^{n+1} - \Delta x_{-1}^n u_{-1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{-2}^{n+\theta_{-2}}, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, \omega_{-\frac{3}{2}}) = 0, \\
\frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) - \mathcal{F}(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) = 0, \\
\text{avec } u_0^* \text{ tel que } \quad -\frac{\Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0.
\end{array}\right.$$

On utilise les linéarisation suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\
\qquad\qquad + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\
\qquad\qquad + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \ \forall i \notin \{-1,0\} \\
\mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) = \phi(u_{-1}^n, u_0^n, \omega_{-\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_{-1}^n, u_0^n, \omega_{-\frac{1}{2}})(u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-1}^n) \\
\qquad\qquad + \psi'_v(u_{-1}^n, u_0^n, \omega_{-\frac{1}{2}})(u_0^* - u_0^n), \\
\mathcal{F}(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) = \phi(u_0^n, u_1^n, \omega_{\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_0^n, u_1^n, \omega_{\frac{1}{2}})(u_0^* - u_0^n) \\
\qquad\qquad + \psi'_v(u_0^n, u_1^n, \omega_{\frac{1}{2}})(u_1^{n+\theta_1} - u_1^n),
\end{array}\right.$$

où ϕ est la fonction de flux numérique de Godunov (12) et la fonction ψ est la fonction de flux numérique soit de Engquist-Osher (30), soit de Roe corrigée (32).

5 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons présenté une méthode de volumes finis fondée sur des maillages variables, c'est-à-dire mobiles à topologie non constante (nous avons considéré des additions et soustractions de points). Dans le but d'adapter cette méthode numérique à des maillages localement raffinés et adaptés, nous avons introduit un schéma en temps mixte explicite/implicite, qui, tout en étant seulement localement implicite, conserve les propriétés attendues des méthodes plus classiques en volumes finis : principe du maximum vérifié, caractère TVD et stabilité. Nous avons présentés quelques résultats numériques élémentaires et limités, puisque nous ne disposons pas encore d'une gestion automatique des ajouts et suppressions de points.

Il nous reste à poursuivre l'implémentation de ces méthodes d'abord en une dimension d'espace. Nous devrons les intégrer dans un code de volumes finis où le maillage s'adapte automatiquement et simplement. On pourrait envisager de faire disparaître et apparaître des points en fonction du gradient local, ou des critères couramment utilisés en adaptation de maillage. Ainsi, une première étape consistera en l'obtention d'un code en maillages variables en une dimension d'espace pour les équations d'advection et de Burgers. Par la suite, ces idées seront étendues aux dimensions supérieures.

Références

[1] J.T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA J.*, 28:1381–1388, August 1990.

[2] F. Blom. *Investigations on Computational Fluid-Structure Interaction.* Génie mécanique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1998. Thèse No. 1865.

[3] M. J. Castro-Díaz, H. Bourouchaki, P.-L. George, F. Hecht, and B. Mohammadi. Anisotropic adaptive mesh generation in two dimensions for cfd. In J.-A. Désidéri, P. Le Tallec, E. Oñate, J. Périaux, and E. Stein, editors, *Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, pages 181–186, Paris, France, September 9-13 1996. John Wiley & Sons.

[4] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 163:231–245, 1998.

[5] M. Fortin, M.-G. Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, and W.G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation: Theory, validation and applications. In J.-A. Désidéri, P. Le Tallec, E. Oñate, J. Périaux, and E. Stein, editors, *Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, pages 174–180, Paris, France, September 9-13 1996. John Wiley & Sons.

[6] H. Guillard and C. Farhat. On the significance of the gcl for flow computations on moving meshes. In *AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, January 11-14 1999. AIAA paper 99-0793.

[7] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357–393, 1983.

[8] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2(29):297–322, 1976.

[9] A. Harten and J.M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 50:235–269, 1983.

[10] B. Larrouturou. *Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur.* Ecole Polytechnique, 1995.

[11] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134:71–90, 1996.

[12] R. Lohner. An adaptive finite element solver for transient problems with moving bodies. *Comput. & Structures*, 30(1/2):303–317, 1988.

[13] B. N'Konga and H. Guillard. Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113:183–204, 1994.

[14] S. Piperno, N. Glinsky-Olivier, and R. Rivière. Initiation à la simulation numérique d'écoulements compressibles. Cours de la Semaine européenne, ENPC, ParisTech, November 1998.

[15] P.D. Thomas and C.K. Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA J.*, 17:1030–1037, October 1979.

[16] B. Van Leer. On the relation between the upwind-differencing schemes of godunov, engquist-osher and roe. Technical Report 81-11, ICASE, March 1981.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399