

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**PROCESOS DE CREACIÓN DE PARTÍCULAS EN
CAMPOS DE FONDO ELECTROMAGNÉTICOS Y
GRAVITATORIOS**

MÁSTER EN FÍSICA Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS

Autor:

Andrés Miguel Cuartero

Director:

Manuel Asorey Carballeira



Universidad Zaragoza

Departamento de Física Teórica

Facultad de Ciencias

Curso 2020/2021

Agradecimientos

Me gustaría agradecer especialmente a Manuel Asorey las fructíferas y esclarecedoras conversaciones mantenidas sobre este trabajo, así como su paciencia y labor como tutor que me ha guiado durante todo este año. Igualmente, también quiero dar las gracias a mis padres, hermanos, amigos y al resto de mi familia, que me han acompañado y apoyado durante todo este año y cuyos ánimos han supuesto un considerable estímulo e impulso para el desarrollo de este trabajo.

Por todo ello, gracias a todos.

Resumen

El origen de la materia que compone el universo es una de las incógnitas que el modelo actual Λ CDM no resuelve completamente. En teoría cuántica de campos hay varios mecanismos de creación de materia a partir de las fluctuaciones del vacío cuántico que podrían explicar el origen de gran parte de la materia del universo. En este trabajo se analizan varios fenómenos que llevan asociados procesos de creación de partículas dentro del marco de la Teoría Cuántica de Campos: unos debidos a la presencia de campos de fondo electromagnéticos (efecto Schwinger) o gravitatorios, y otros debidos a variaciones temporales de las condiciones de contorno de regiones acotadas del espacio que dan lugar a un efecto Casimir dinámico.

Índice

1	Introducción	1
2	Creación de partículas en campos de fondo electromagnéticos: el efecto Schwinger	2
2.1	Aproximación WKB	4
2.2	Método de la transformación de Bogoliubov	6
2.3	Método CWKB	12
2.4	Interpretación de los resultados	15
3	Creación de partículas en campos de fondo gravitatorios: espacio de De Sitter	16
3.1	Fundamentos sobre el espacio-tiempo de De Sitter	16
3.2	Estudio de la producción de partículas	18
3.3	Interpretación de los resultados	23
4	Efecto Casimir dinámico	24
5	Conclusiones	27
A	Efecto Schwinger en un gauge dependiente del espacio	1
B	Funciones especiales	3
B.1	Funciones cilíndricas parabólicas	3
B.2	Funciones de Hankel	4
C	Relación entre el vacío en los estados inicial y final en el efecto Schwinger	4
D	Relación entre el método de la transformación de Bogoliubov y el método CWKB	6
E	Cálculo del coeficiente de reflexión en el sistema de coordenadas (3.12)	7
F	Obtención de la transformación de Bogoliubov en el efecto Casimir dinámico	8

1. Introducción

La inestabilidad del vacío en una teoría cuántica de campos puede dar lugar a procesos de creación de partículas como consecuencia de la presencia de campos electromagnéticos o gravitatorios o de cambios rápidos en el tiempo de la geometría de un objeto. Dado que el vacío es un concepto central en estos procesos de creación de partículas, en primer lugar conviene diferenciar la noción de vacío en la teoría clásica y la teoría cuántica. Clásicamente, el vacío se entiende como la mera ausencia de materia. Sin embargo, en la teoría cuántica el concepto de vacío es mucho más rico, ya que presenta fluctuaciones que no se tienen en el caso clásico y que originan los fenómenos que se van a estudiar en este trabajo. En estos fenómenos, el vacío en un estado inicial no tiene por qué coincidir con el vacío físico del estado final, lo que causa la producción de partículas.

Entre los procesos de creación de partículas en presencia de campos de fondo, destacan el efecto Schwinger, cuando se tiene un campo electromagnético; o la producción cosmológica de partículas en un espacio-tiempo curvo, en el caso de un campo gravitatorio. La denominación de *campo de fondo* se debe a que los campos electromagnéticos y gravitatorios que se consideran se tratan de forma clásica. Estos son los responsables de la inestabilidad del vacío que causa la producción de partículas.

El efecto Schwinger es un fenómeno de creación de pares partícula-antipartícula en presencia de un campo eléctrico suficientemente intenso. Fue predicho por Werner Heisenberg y Hans Euler en 1936 tomando como referencia la teoría de Dirac sobre el positrón y un trabajo previo de Sauter de 1931 [1, 2]. Posteriormente, Schwinger en 1951 lo formalizó en el marco de la electrodinámica cuántica [3]. Debido a que se necesitan campos eléctricos muy intensos, imposibles de generar actualmente, el efecto Schwinger no se ha conseguido observar experimentalmente todavía.

Respecto a la producción cosmológica de partículas, esta es debida a la presencia de un campo de fondo gravitatorio. En este trabajo se estudia este fenómeno en el espacio-tiempo de De Sitter, caso particular de un espacio-tiempo curvo que se utiliza para modelizar un universo en expansión acelerada, con constante cosmológica positiva. Un problema que surge al estudiar la producción de partículas en un espacio-tiempo curvo es que el concepto de vacío pasa a ser ambiguo y esto hace que el número de partículas no esté bien definido [4]. Con el fin de solucionar este problema y obtener un vacío en el que el número de partículas esté bien definido, se aplicará la aproximación WKB.

Por otro lado, en este trabajo también se van a estudiar fenómenos de producción de partículas debidos a cambios rápidos de la geometría (en particular, de la posición de algunas fronteras) [5]. Si bien estos muestran diferencias importantes respecto de los anteriores, todos ellos tienen un origen común en las fluctuaciones cuánticas del vacío. En este grupo de fenómenos se engloba el efecto Casimir dinámico, que se planteó al sugerir que un espejo que experimenta un movimiento relativista podría convertir fotones virtuales en fotones reales, directamente observables [6]. Su denominación se debe a que este fenómeno tiene su origen en las fluctuaciones cuánticas del vacío, en analogía con el efecto Casimir estático estudiado por el físico holandés H.

B. G. Casimir en 1948. El efecto Casimir estático se considera una manifestación de las fluctuaciones cuánticas del vacío que aparecen cuando se introducen fronteras que matemáticamente se manifiestan en unas condiciones de contorno que los campos deben satisfacer. El caso estudiado originalmente por Casimir tenía en cuenta el confinamiento del campo electromagnético entre dos placas perfectamente conductoras y paralelas entre sí [7]. Sin embargo, el propio Casimir no estudió el caso dinámico, que es el que nos interesa en este trabajo.

Para realizar el análisis de estos procesos de creación de partículas, se van a presentar dos métodos. El primero de ellos es el método de la transformación de Bogoliubov, en el que los vacíos del estado inicial y el estado final están relacionados por medio de una transformación lineal cuyos coeficientes nos permitirán calcular magnitudes de interés como el número de partículas creadas [8, 9, 10]. Por otro lado, el segundo método es el método de la aproximación WKB con trayectorias complejas (CWKB), que considera la producción de partículas como un proceso de reflexión en el tiempo y se puede definir así un coeficiente de reflexión a partir del que se calcula la producción de partículas [11, 12].

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2, se describe la metodología necesaria para estudiar los fenómenos de producción de partículas en presencia de campos de fondo y se aplica al efecto Schwinger. Posteriormente, en la sección 3 se analiza la producción cosmológica de partículas en el espacio de De Sitter. A continuación, en la sección 4 se realiza una descripción teórica del efecto Casimir dinámico. Finalmente, en la sección 5 se hace una síntesis de lo expuesto en las secciones anteriores y se comentan las principales conclusiones que pueden extraerse de este trabajo.

Para finalizar este apartado, es conveniente fijar los convenios de notación que se van a seguir en el cuerpo del trabajo. Se utiliza la notación cuadvectorial $v^\mu = (v^0, \mathbf{v})$, donde v^0 representa la componente temporal y \mathbf{v} las componentes espaciales. Se utilizan índices del alfabeto griego para representar las cuatro componentes del cuadvector ($\mu = \{0, 1, 2, 3\}$) e índices del alfabeto latino para denotar únicamente las componentes espaciales ($i = \{1, 2, 3\}$). Para la métrica de Minkowski, se adopta el convenio $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. Respecto al sistema de unidades empleado, salvo que se indique explícitamente el uso de otro sistema de unidades, en todos los cálculos se sigue el sistema natural de unidades, en el que $\hbar = c = 1$.

2. Creación de partículas en campos de fondo electromagnéticos: el efecto Schwinger

En esta sección, se va a describir la metodología que se va a aplicar para estudiar los procesos de creación de partículas que nos interesan en este trabajo. En particular, se presentan dos métodos de cálculo diferentes: por un lado, el método de la transformación de Bogoliubov [8, 9, 10]; y por otro lado, el método de la aproximación WKB con trayectorias complejas (CWKB) [11, 12]. Estos métodos también son aplicables para el caso de producción de partículas en campos gravitatorios. Para describir estos métodos, vamos a mostrar su aplicación al caso concreto del efecto Schwinger. El efecto Schwinger es un proceso de creación de pares partícula-antipartícula en presencia de un campo eléctrico suficientemente intenso. El origen

de este fenómeno está en el hecho de que el vacío se hace inestable como consecuencia de la aplicación del campo eléctrico.

Primero de todo, vamos a introducir dos campos diferentes que conviene diferenciar. Por un lado, consideramos un campo escalar complejo ϕ de masa m , que se tratará de forma cuántica y es el campo del que se va a estudiar la producción de partículas. Además, se aplica un campo eléctrico externo \mathbf{E} que se trata de forma clásica, de manera que actúa como un campo de fondo. Este es el campo responsable de la inestabilidad del vacío que causa la producción de partículas. Se describe el campo electromagnético a través del cuadrivector potencial $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$. En particular, se considera un gauge en el que A_μ es dependiente del tiempo e independiente de las coordenadas espaciales (aunque, como veremos en el anexo A, también se puede considerar un gauge en el que A_μ es independiente del tiempo y dependiente de una coordenada espacial):

$$A_\mu = (0, 0, 0, -E_0 t) \quad (2.1)$$

Así, se tiene un campo eléctrico constante \mathbf{E} de módulo E_0 en el sentido positivo del eje Z :

$$\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Rightarrow \mathbf{E} = (0, 0, E_0) \quad (2.2)$$

Por su parte, la densidad lagrangiana del campo escalar complejo ϕ en ausencia de campo electromagnético en la teoría clásica está dada por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.3)$$

Para adaptar esta densidad lagrangiana a la interacción con el campo electromagnético, simplemente deben reemplazarse las derivadas habituales por derivadas covariantes: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, donde q denota la carga eléctrica. Así, la densidad lagrangiana de ϕ en presencia de un campo electromagnético puede escribirse como:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.4)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la derivada covariante, la densidad lagrangiana toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^* iqA^\mu \phi - iqA_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + q^2 A_\mu \phi^* A^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.5)$$

Si se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange al campo ϕ^* , se obtiene la ecuación para el campo escalar ϕ , que es la ecuación de Klein-Gordon con interacción electromagnética:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (2.6)$$

Puede expresarse el campo ϕ en términos de su transformada de Fourier:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (2.7)$$

Se sustituye ϕ por su transformada de Fourier en la expresión (2.6):

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (\ddot{f}_k + |\mathbf{k}|^2 f_k - iqf_k \partial_z A_z - iqA_z f_k \partial_z + q^2 A_z^2 f_k + m^2 f_k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k = 0 \Rightarrow$$

donde se ha tenido en cuenta que la única componente no nula de A_μ es la correspondiente al eje Z . \ddot{f}_k denota la segunda derivada de f_k respecto al tiempo t . Además, los elementos contravariantes se han convertido en elementos covariantes bajando índices, por medio de $v^\mu = \eta^{\mu\nu} v_\nu$, donde v^μ es un vector contravariante genérico y v_ν su correspondiente covariante. Así, si denotamos $v^\mu = (v_0, \mathbf{v})$, se tendrá $v_\mu = (v_0, -\mathbf{v})$. Para que se verifique la última igualdad, debe anularse el integrando, de forma que, si se sustituye A_z por su valor de acuerdo con la expresión (2.1), se obtiene:

$$\ddot{f}_k(t) + [k_x^2 + k_y^2 + (k_z - qE_0t)^2 + m^2] f_k(t) = 0 \quad (2.8)$$

Se ha obtenido una ecuación diferencial de segundo orden que tiene la forma de la ecuación de un oscilador armónico:

$$\ddot{f}_k(t) + \Omega_k^2(t) f_k(t) = 0 \quad (2.9)$$

La característica especial que presenta esta ecuación respecto a la del oscilador armónico habitual es que la frecuencia $\Omega_k(t)$ depende del tiempo. Esta toma la siguiente expresión:

$$\Omega_k^2(t) = k_x^2 + k_y^2 + (k_z - qE_0t)^2 + m^2 \quad (2.10)$$

Ahora debe resolverse esta ecuación diferencial, para lo que se aplicará la llamada *aproximación WKB*, que se explica a continuación.

2.1. Aproximación WKB

La aproximación WKB representa un método aproximado de resolución de ecuaciones diferenciales lineales en el caso en el que los coeficientes no son constantes. Este método fue desarrollado por Wentzel, Kramers y Brillouin en 1926 [13, 14]. En nuestro caso se tiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden, de tipo oscilador armónico y con una frecuencia Ω_k dependiente del tiempo. Por tanto, (2.9) puede resolverse de forma aproximada utilizando la aproximación WKB.

Si Ω_k fuera independiente de t , la solución general de (2.9) sería una combinación lineal de las soluciones particulares $e^{\pm i\Omega_k t}$: $f_k(t) = Ae^{-i\Omega_k t} + Be^{+i\Omega_k t}$, donde A y B son dos constantes arbitrarias. Sin embargo, en la ecuación que se ha obtenido Ω_k sí depende de t . Por tanto, pueden probarse soluciones particulares de la siguiente forma:

$$f_k(t) = \exp\left(\pm i \int_{t_0}^t (W_k(t') + iV_k(t')) dt'\right) \quad (2.11)$$

siendo el integrando una función compleja cuya parte real está dada por la función real $W_k(t)$ y cuya parte imaginaria es la función real $V_k(t)$. Si se introduce esta expresión en (2.9), se obtiene la siguiente ecuación:

$$-(W_k(t) + iV_k(t))^2 \pm i(\dot{W}_k(t) + i\dot{V}_k(t)) + \Omega_k^2(t) = 0 \quad (2.12)$$

Se puede separar la parte real y la parte imaginaria, obteniendo una ecuación en cada caso. Así, la ecuación resultante de considerar la parte real es:

$$-W_k^2(t) + V_k^2(t) \mp \dot{V}_k(t) + \Omega_k^2(t) = 0 \quad (2.13)$$

mientras que si se considera la parte imaginaria, se tiene:

$$-2iW_k(t)V_k(t) \pm i\dot{W}_k(t) = 0 \quad (2.14)$$

Puede despejarse $V_k(t)$ de (2.14):

$$V_k(t) = \pm \frac{\dot{W}_k(t)}{2W_k(t)} \quad (2.15)$$

Si se introduce esta expresión en (2.13), se obtiene:

$$\Omega_k^2 - W_k^2 = \frac{\ddot{W}_k}{2W_k} - \frac{3}{4} \frac{\dot{W}_k^2}{W_k^2} \quad (2.16)$$

donde se ha omitido la dependencia temporal de Ω_k y W_k por simplicidad en la notación. De esta forma, se puede concluir que (2.11) es una solución particular de (2.9) si se cumple la condición dada por (2.16). Esta se puede expresar de la siguiente manera, si se sustituye $V_k(t)$ por su valor de acuerdo con (2.15):

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \exp\left(\pm i \int_{t_0}^t \left(W_k(t') \pm \frac{i}{2} \frac{\dot{W}_k(t')}{W_k(t')}\right) dt'\right) = \exp\left(\pm i \int_{t_0}^t W_k(t') dt' - \frac{1}{2} \log W_k(t)\right) \\ f_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{W_k(t)}} \exp\left(\pm i \int_{t_0}^t W_k(t') dt'\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

De esta forma, la solución general de la ecuación (2.9) se puede expresar de la siguiente manera siempre y cuando se cumpla la condición (2.16) [9]:

$$f_k(t) = \frac{A_k}{\sqrt{2W_k(t)}} \exp\left(-i \int_{t_0}^t W_k(t') dt'\right) + \frac{B_k}{\sqrt{2W_k(t)}} \exp\left(i \int_{t_0}^t W_k(t') dt'\right) \quad (2.18)$$

donde A_k y B_k son dos constantes arbitrarias. A continuación, debe determinarse la función $W_k(t)$ teniendo en cuenta que se satisface la condición (2.16). A orden cero, los términos de (2.16) que incluyen derivadas de $W_k(t)$ son pequeños comparados con $\Omega_k^2(t)$ y se toma:

$$W_k^{(0)}(t) = \Omega_k(t) \quad (2.19)$$

Los valores de $W_k(t)$ para los sucesivos órdenes pueden calcularse mediante el método de aproximaciones sucesivas de Picard, de forma que para orden n se tiene [10, 15]:

$$W_k^{(n)} = \sqrt{\Omega_k^2 - \left[\frac{\ddot{W}_k^{(n-1)}}{2W_k^{(n-1)}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{W}_k^{(n-1)}}{W_k^{(n-1)}} \right)^2 \right]} \quad (2.20)$$

Quedándonos a orden cero, de acuerdo con (2.19) y (2.16), se tiene que (2.18) es la solución general aproximada de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{f}_k(t) + (\Omega_k^2(t) - Q(t))f_k(t) = 0 \quad (2.21)$$

donde Q está dado por:

$$Q = \frac{3}{4} \frac{\dot{\Omega}_k^2}{\Omega_k^2} - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\Omega}_k}{\Omega_k} \quad (2.22)$$

Comparando la ecuación que se ha obtenido a partir de la aproximación WKB, dada por (2.21), con la ecuación (2.9) que se tenía inicialmente, se deduce que la aproximación WKB es válida si se verifica la siguiente condición:

$$|Q| \ll \Omega_k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q|}{\Omega_k^2} \ll 1 \quad (2.23)$$

2.2. Método de la transformación de Bogoliubov

Se comienza estudiando la producción de partículas propia del efecto Schwinger a través del método de la transformación de Bogoliubov. En primer lugar, se cuantiza el campo escalar $\phi(t, \mathbf{x})$ siguiendo la prescripción de la cuantización canónica. Desde el punto de vista clásico, $\phi(t, \mathbf{x})$ y su momento canónico conjugado $\Pi(t, \mathbf{x}) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\phi) = \partial_t\phi(t, \mathbf{x})$ son funciones. Si se trabaja en la llamada *imagen de Heisenberg*, que es aquella en la que los operadores dependen del tiempo y los vectores que representan un estado cuántico son independientes del tiempo, la cuantización canónica pasa por promover las funciones $\phi(t, \mathbf{x})$ y $\Pi(t, \mathbf{x})$ a operadores que satisfacen las siguientes reglas de conmutación para tiempos iguales [16]:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] = [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{x}')] = 0 \quad (2.24)$$

El campo escalar $\phi(t, \mathbf{x})$, solución de la ecuación de Klein-Gordon con interacción electromagnética, dada por (2.6), se puede desarrollar en modos de la siguiente manera:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + b_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})) \quad (2.25)$$

donde $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = f_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. En esta expresión, $f_{\mathbf{k}}(t)$ viene dada por la ecuación (2.18). Se han utilizado los operadores de creación $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y destrucción $a_{\mathbf{k}}$ asociados a partículas, y sus análogos para antipartículas, $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $b_{\mathbf{k}}$ respectivamente. Estos operadores satisfacen las siguientes reglas de conmutación, que son consecuencia de las reglas de conmutación (2.24) que cumplen los operadores $\phi(t, \mathbf{x})$ y $\Pi(t, \mathbf{x})$:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.26)$$

El siguiente paso consiste en caracterizar los estados cuánticos del sistema que se está considerando. Por simplicidad, se estudia primero el caso libre, en el que no hay campo electromagnético, y luego se presentan las modificaciones que es necesario introducir para adaptarlo al sistema con campo electromagnético. Así, en el caso libre, en la imagen de Heisenberg los estados cuánticos generan un espacio de Fock \mathcal{F} , que se define como el conjunto de espacios de Hilbert correspondientes a cero partículas, una partícula, dos partículas y así sucesivamente [17]: $\mathcal{F} = \{H_0, H_1, \dots, H_N, \dots\}$, siendo H_N el espacio de Hilbert correspondiente a N partículas. Hay un estado de especial relevancia en el espacio de Fock, que es el estado en el que no hay ninguna partícula. Este se denota como $|0\rangle$ y recibe el nombre de vacío. El estado vacío es aniquilado por todos los operadores destrucción $a_{\mathbf{k}}$:

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (2.27)$$

Todos los demás estados cuánticos del espacio de Fock correspondientes a un cierto número de partículas se pueden construir a partir del estado vacío por medio de los operadores creación $a_{\mathbf{k}}^\dagger$. Si se trabaja en la llamada *representación número de partículas* [18], el estado de una partícula viene dado por:

$$|1_{\mathbf{k}}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \quad (2.28)$$

Igualmente, pueden construirse estados de varias partículas de la siguiente manera:

$$|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_j}\rangle = (n_{\mathbf{k}_1}! n_{\mathbf{k}_2}! \dots n_{\mathbf{k}_j}!)^{-1/2} (a_{\mathbf{k}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_1}} (a_{\mathbf{k}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_2}} \dots (a_{\mathbf{k}_j}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_j}} |0\rangle \quad (2.29)$$

donde el factor $(n_{\mathbf{k}_1}!n_{\mathbf{k}_2}!\dots n_{\mathbf{k}_j}!)^{-1/2}$ se introduce para tener estados normalizados. Los operadores de creación y destrucción verifican:

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)_{\mathbf{k}}\rangle, \quad a_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n} |(n-1)_{\mathbf{k}}\rangle \quad (2.30)$$

Cuando se pasa a considerar el caso en el que se tiene campo electromagnético, en general, los operadores de creación y destrucción son diferentes en cada instante de tiempo t . De esta manera, el estado vacío también será distinto en instantes de tiempo diferentes [4]. Podemos considerar el pasado remoto ($t \rightarrow -\infty$), caracterizado por el estado $|\text{in}\rangle$ del espacio de Fock, en el que no hay ninguna partícula ni ninguna antipartícula. Así, este estado constituye el vacío de la teoría cuántica de campos en $t \rightarrow -\infty$. El campo escalar ϕ puede desarrollarse en este instante de tiempo como:

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} u_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} u_{\mathbf{k}}^{\text{in}*}) \quad (2.31)$$

y se tiene que:

$$a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} |\text{in}\rangle = 0, \quad b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} |\text{in}\rangle = 0 \quad (2.32)$$

También puede considerarse el futuro distante ($t \rightarrow +\infty$). En este instante de tiempo, ϕ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} u_{\mathbf{k}}^{\text{out}} + b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} u_{\mathbf{k}}^{\text{out}*}) \quad (2.33)$$

Los operadores destrucción $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ y $b_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ no tienen por qué aniquilar el estado $|\text{in}\rangle$, sino que el vacío que aniquilarán será el correspondiente a $t \rightarrow +\infty$, que se denota como $|\text{out}\rangle$:

$$a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} |\text{out}\rangle = 0, \quad b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} |\text{out}\rangle = 0 \quad (2.34)$$

Los modos $u_{\mathbf{k}}(t)$ y $u_{\mathbf{k}}(t')$ correspondientes a dos instantes de tiempo diferentes $t \neq t'$ pueden relacionarse entre sí a través de una *transformación de Bogoliubov*. Lo mismo puede hacerse para obtener la relación entre los operadores de creación y destrucción en dos instantes de tiempo distintos. La transformación de Bogoliubov es una transformación lineal que relaciona los operadores de creación y destrucción (e, igualmente, los modos) en dos instantes de tiempo diferentes con la condición de que sea una transformación canónica. Es decir, las reglas de conmutación que satisfacen estos operadores en el instante de tiempo t deben ser las mismas que las que satisfacen en el instante de tiempo t' y estar dadas por (2.26). De esta forma, para los modos $u_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ y $u_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$, la transformación de Bogoliubov que los relaciona se puede escribir como:

$$u_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = \alpha_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^{\text{out}} + \beta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^{\text{out}*}, \quad u_{\mathbf{k}}^{\text{in}*} = \beta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^{\text{out}} + \alpha_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^{\text{out}*} \quad (2.35)$$

donde $\alpha_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}}$ reciben el nombre de coeficientes de Bogoliubov. Igualando (2.31) y (2.33) y sustituyendo $u_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ y $u_{\mathbf{k}}^{\text{in}*}$ por sus expresiones en función de $u_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ y $u_{\mathbf{k}}^{\text{out}*}$, de acuerdo con (2.35), se obtiene la transformación de Bogoliubov para los operadores de creación y destrucción:

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} \\ b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} & \beta_{\mathbf{k}}^* \\ \beta_{\mathbf{k}} & \alpha_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \\ b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} \\ b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}}^* & \beta_{\mathbf{k}} \\ \beta_{\mathbf{k}}^* & \alpha_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} \\ b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

A continuación, se impone la condición de que la transformación sea canónica haciendo que las reglas de conmutación para los operadores de creación y destrucción en $t \rightarrow +\infty$ sean las mismas que las que estos verifican en $t \rightarrow -\infty$ y coincidan con (2.26):

$$[a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger}] = a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} - a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} = (\alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})(\alpha_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger} + \beta_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}^{\text{in}}) - (\alpha_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger} + \beta_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}^{\text{in}})(\alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}) =$$

$$= \alpha_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}'}^*[a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger}] - \beta_{\mathbf{k}'}\beta_{\mathbf{k}}^*[b_{\mathbf{k}'}^{\text{in}}, b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}] + \alpha_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}}[a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}, b_{\mathbf{k}}^{\text{in}}] - \alpha_{\mathbf{k}'}^*\beta_{\mathbf{k}}^*[a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger}, b_{\mathbf{k}}^{\text{in}}] = (\alpha_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}'}^* - \beta_{\mathbf{k}'}\beta_{\mathbf{k}}^*)\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

De aquí se ve que si $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, entonces se cumple $[a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger}] = [a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger}] = 0$. Si $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, para que se satisfaga $[a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}, a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}] = [a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}, a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}] = 1$ los módulos de los coeficientes de Bogoliubov deben satisfacer la condición:

$$|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = 1 \quad (2.37)$$

Imponiendo esta condición y realizando un cálculo análogo, se obtiene que el resto de las reglas de conmutación coinciden para los operadores de creación y destrucción en $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow +\infty$, verificándose las reglas de conmutación canónicas dadas por (2.26). Con la transformación de Bogoliubov efectuada, queda claro cómo el vacío $|\text{in}\rangle$ en $t \rightarrow -\infty$ es diferente del vacío $|\text{out}\rangle$ en $t \rightarrow +\infty$, pues:

$$a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}|\text{in}\rangle = (\alpha_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^*b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})|\text{in}\rangle = \beta_{\mathbf{k}}^*b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}|\text{in}\rangle \quad (2.38)$$

Es decir, el vacío $|\text{in}\rangle$ solo es aniquilado por el operador destrucción $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ en el caso particular en el que $\beta_{\mathbf{k}} = 0$. En el caso general, en el que $\beta_{\mathbf{k}}$ no tiene por qué ser nulo, $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ no aniquilará el vacío $|\text{in}\rangle$.

Para calcular el número de partículas creadas, puede introducirse el *operador número de partículas*. Para el caso de partículas, este se define a partir de los operadores de creación y destrucción $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k}}$ de la siguiente manera:

$$\hat{N}_{\mathbf{k}}(t) \equiv a_{\mathbf{k}}^\dagger(t)a_{\mathbf{k}}(t) \quad (2.39)$$

Asimismo, para antipartículas también se puede definir un operador número de manera análoga, reemplazando únicamente $a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \rightarrow b_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$ y $a_{\mathbf{k}}(t) \rightarrow b_{\mathbf{k}}(t)$: $\hat{N}_{\mathbf{k}}(t) \equiv b_{\mathbf{k}}^\dagger(t)b_{\mathbf{k}}(t)$. Así, si se quiere calcular el número de partículas creadas entre $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow +\infty$, debe calcularse el valor esperado del operador $\hat{N}_{\mathbf{k}}(t \rightarrow +\infty) = a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ en el vacío correspondiente a $t \rightarrow -\infty$, dado por $|\text{in}\rangle$. Para calcular dicho valor esperado debe hacerse uso de la transformación de Bogoliubov (2.36) para así pasar de $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$, $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}$ a $a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$, $a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}$:

$$\begin{aligned} \langle \text{in} | \hat{N}_{\mathbf{k}}(t \rightarrow +\infty) | \text{in} \rangle &= \langle \text{in} | a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} | \text{in} \rangle = \langle \text{in} | (\alpha_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} + \beta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}}) (\alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}) | \text{in} \rangle \\ &= \langle \text{in} | (|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \alpha_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} + \beta_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + |\beta_{\mathbf{k}}|^2 b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}) | \text{in} \rangle = |\beta_{\mathbf{k}}|^2 \langle \text{in} | b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} | \text{in} \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \text{in} | \hat{N}_{\mathbf{k}}(t \rightarrow +\infty) | \text{in} \rangle = |\beta_{\mathbf{k}}|^2 (\langle \text{in} | b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} | \text{in} \rangle + \langle \text{in} | \text{in} \rangle) = |\beta_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.40)$$

donde se ha tenido en cuenta que $a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}|\text{in}\rangle = 0$, $\langle \text{in} | a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} = 0$ y $[b_{\mathbf{k}}^{\text{in}}, b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}] = 1$. Usando $b_{\mathbf{k}}^{\text{in}}|\text{in}\rangle = 0$, $\langle \text{in} | b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} = 0$ y $[a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}, a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}] = 1$ y realizando un cálculo análogo para $\hat{N}_{\mathbf{k}}(t \rightarrow +\infty)$, se obtiene:

$$\langle \text{in} | \hat{N}_{\mathbf{k}}(t \rightarrow +\infty) | \text{in} \rangle = \langle \text{in} | b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} | \text{in} \rangle = |\beta_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.41)$$

De esta forma, se tiene que se crea el mismo número de partículas que de antipartículas, lo que es consistente con la idea de que se crean pares partícula-antipartícula. Además, de acuerdo con el resultado obtenido, solo habrá producción de partículas si el coeficiente de Bogoliubov $\beta_{\mathbf{k}}$ es no nulo. Por tanto, para obtener la producción de partículas en el efecto Schwinger deberá calcularse $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$, que es lo siguiente que se va a hacer.

Se denota:

$$\tau = \sqrt{qE_0}t - \frac{k_z}{\sqrt{qE_0}}, \quad \lambda = \frac{k_\perp^2 + m^2}{qE_0} \quad (2.42)$$

donde $k_\perp^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ [8]. De esta manera, si se realiza el cambio de variable $t \rightarrow \tau$, la ecuación (2.9) queda:

$$\frac{d^2 f_k(\tau)}{d\tau^2} + (\tau^2 + \lambda)f_k(\tau) = 0 \quad (2.43)$$

Es una ecuación de tipo oscilador armónico en la que la frecuencia Ω'_k depende de la variable τ . Esta toma la forma:

$$\Omega'_k(\tau) = \sqrt{\tau^2 + \lambda} \quad (2.44)$$

La ecuación (2.43) se puede resolver de forma exacta. Su solución general se expresa de la siguiente manera [19]:

$$f_k(\tau) = A_{1,\mathbf{k}} D_{-(1+i\lambda)/2}[(1+i)\tau] + A_{2,\mathbf{k}} D_{-(1+i\lambda)/2}[-(1+i)\tau] \quad (2.45)$$

donde $A_{1,\mathbf{k}}$ y $A_{2,\mathbf{k}}$ son dos constantes dependientes de las condiciones iniciales y la normalización y $D_\nu(z)$ es una función especial que recibe el nombre de función cilíndrica parabólica de orden ν . En el anexo B.1 se detalla información sobre este tipo de funciones especiales. Para calcular $|\alpha_{\mathbf{k}}|^2$ y $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ en $\tau \rightarrow +\infty$, se comparará la solución exacta que se acaba de obtener para (2.43) con el resultado que se tiene si se aplica la aproximación WKB ya descrita en (2.1) en los límites de tiempo correspondientes a $\tau \rightarrow -\infty$ (equivalente a $t \rightarrow -\infty$) y $\tau \rightarrow +\infty$ (equivalente a $t \rightarrow +\infty$). Si se toma orden cero en la aproximación WKB ($W_k^{(0)}(\tau) = \Omega'_k(\tau)$), entonces (2.18) toma la forma:

$$f_k(\tau) = \frac{A_k}{\sqrt{2\Omega'_k(\tau)}} \exp\left(-i \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau'\right) + \frac{B_k}{\sqrt{2\Omega'_k(\tau)}} \exp\left(+i \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau'\right) \quad (2.46)$$

Puede escogerse el estado inicial de forma que:

$$f_k(\tau \rightarrow -\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega'_k(\tau)}} \exp\left(-i \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau'\right) \quad (2.47)$$

Si se invierte la transformación de Bogoliubov (2.35) y se considera τ genérico, se obtiene:

$$f_k(\tau) = \alpha_{\mathbf{k}}^*(\tau) f_k(\tau \rightarrow -\infty) - \beta_{\mathbf{k}}(\tau) f_k^*(\tau \rightarrow -\infty) \quad (2.48)$$

de forma que utilizando (2.47) se puede escribir:

$$f_k(\tau) = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^*(\tau)}{\sqrt{2\Omega'_k(\tau)}} \exp\left(-i \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau'\right) - \frac{\beta_{\mathbf{k}}(\tau)}{\sqrt{2\Omega'_k(\tau)}} \exp\left(i \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau'\right) \quad (2.49)$$

El estado inicial (2.47) se ha escogido de forma que $\alpha_{\mathbf{k}}(\tau \rightarrow -\infty) = 1$ y $\beta_{\mathbf{k}}(\tau \rightarrow -\infty) = 0$. A continuación, se procede a calcular la fase:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau' &= \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\tau'^2 + \lambda} d\tau' = \left[\frac{\tau' \sqrt{\tau'^2 + \lambda}}{2} + \frac{\lambda}{2} \log\left(\frac{\tau'}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{1 + \frac{\tau'^2}{\lambda}}\right) \right]_{\tau_0}^{\tau} = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\tau}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\lambda}} - \frac{\tau_0}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{1 + \frac{\tau_0^2}{\lambda}} + \log\left(\frac{\tau}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\lambda}}\right) - \log\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{1 + \frac{\tau_0^2}{\lambda}}\right) \right] \quad (2.50) \end{aligned}$$

donde se supone un instante de tiempo inicial que verifica $\tau_0 < 0$ y $|\tau_0|/\sqrt{\lambda} \gg 1$. En los límites $\tau \rightarrow \pm\infty$, se tiene que $|\tau|/\sqrt{\lambda} \gg 1$ y, en este caso, la fase se puede expresar como:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau' = \frac{1}{2}(\tau|\tau| + |\tau_0|^2) + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{|\tau|}{\tau} \log |\tau| + \log |\tau_0| \right) \quad (2.51)$$

Así, la función $f_k(\tau)$ en los límites $\tau \rightarrow \pm\infty$ de la aproximación WKB está dada por:

$$f_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{i}{2}(\tau|\tau| + \tau_0^2) \right) |\tau|^{-1/2-i|\tau|\lambda/(2\tau)} |\tau_0|^{-i\lambda/2} \quad (2.52)$$

A continuación, en la solución exacta (2.45) se toman los límites $\tau \rightarrow \pm\infty$. En este caso, es necesario aplicar el comportamiento asintótico de las funciones cilíndricas parabólicas $D_\nu(z)$ en el caso en el que $z \rightarrow \infty$. Este puede consultarse en el anexo B.1. En el límite de valores de τ negativos y grandes ($\tau \rightarrow -\infty$), (2.45) toma la forma:

$$\begin{aligned} f_k(\tau) \simeq & A_{1,\mathbf{k}} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2})} e^{-i\pi(1-i\lambda)/4} (1-i)^{-(1-i\lambda)/2} e^{i\tau_0^2/2} |\tau_0|^{i\lambda/2} \tilde{f}_k(\tau) \\ & + (A_{1,\mathbf{k}} e^{i\pi(1+i\lambda)/2} + A_{2,\mathbf{k}}) \sqrt{2} (1+i)^{-(1+i\lambda)/2} e^{-i\tau_0^2/2} |\tau_0|^{-i\lambda/2} \tilde{f}_k^*(\tau) \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $\tilde{f}_k(\tau)$ está dada por:

$$\tilde{f}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega'_k}} \exp \left(-i \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega'_k(\tau') d\tau' \right) \quad (2.54)$$

Comparando esta expresión con (2.47), se obtienen los valores de las constantes $A_{1,\mathbf{k}}$ y $A_{2,\mathbf{k}}$:

$$A_{1,\mathbf{k}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2})}{2\sqrt{\pi}} e^{i\pi(1-i\lambda)/4} (1-i)^{(1-i\lambda)/2} e^{-i\tau_0^2/2} |\tau_0|^{-i\lambda/2} \quad (2.55)$$

$$A_{2,\mathbf{k}} = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2})}{2\sqrt{\pi}} e^{i\pi(3+i\lambda)/4} (1-i)^{(1-i\lambda)/2} e^{-i\tau_0^2/2} |\tau_0|^{-i\lambda/2} \quad (2.56)$$

Se puede hacer lo mismo en el límite de valores de τ positivos y grandes ($\tau \rightarrow +\infty$). En este caso, (2.45) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} f_k(\tau) = & A_{2,\mathbf{k}} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2})} e^{-i\pi(1-i\lambda)/4} (1-i)^{-(1-i\lambda)/2} e^{i\tau_0^2/2} |\tau_0|^{i\lambda/2} \tilde{f}_k(\tau) \\ & + (A_{2,\mathbf{k}} e^{i\pi(1+i\lambda)/2} + A_{1,\mathbf{k}}) \sqrt{2} (1+i)^{-(1+i\lambda)/2} e^{-i\tau_0^2/2} |\tau_0|^{-i\lambda/2} \tilde{f}_k^*(\tau) \end{aligned} \quad (2.57)$$

De esta expresión, finalmente se obtiene que el valor del módulo al cuadrado de los coeficientes de Bogoliubov para $\tau \rightarrow +\infty$ es:

$$|\alpha_{\mathbf{k}}(\tau \rightarrow +\infty)|^2 = 1 + e^{-\pi\lambda}, \quad |\beta_{\mathbf{k}}(\tau \rightarrow +\infty)|^2 = e^{-\pi\lambda} \quad (2.58)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.40) y (2.41), el número de pares partícula-antipartícula producidos en el modo \mathbf{k} por el efecto Schwinger es:

$$N_{\mathbf{k}} = \exp \left(-\frac{\pi(k_{\perp}^2 + m^2)}{qE_0} \right) \quad (2.59)$$

Para calcular el número total de partículas producidas N , debe integrarse $N_{\mathbf{k}}$ a todos los valores posibles de k_x , k_y y k_z . En el caso de k_x y k_y se integra de $-\infty$ a $+\infty$, mientras que en el caso de k_z , como el campo eléctrico tiene la dirección del eje Z , se integra de 0 a qE_0T , siendo T el tiempo en el que se produce la transición del estado inicial al estado final.

$$N = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \int_0^{qE_0T} \frac{dk_z}{2\pi} \exp\left(-\frac{\pi(k_{\perp}^2 + m^2)}{qE_0}\right) \quad (2.60)$$

Teniendo en cuenta que se tienen integrales gaussianas de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$, la densidad total de partículas producidas es:

$$N = \frac{q^2 E_0^2}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{qE_0}\right) \quad (2.61)$$

Además del número de partículas, también puede calcularse la probabilidad de que no se produzcan partículas en ningún modo o, dicho de otra forma, la probabilidad de que el vacío del estado final $|\text{out}\rangle$ coincida con el vacío inicial, que denotamos como $|\langle \text{in}|\text{out}\rangle|^2$. Para ello, debe relacionarse el estado inicial $|\text{in}\rangle$ con el estado $|\text{out}\rangle$. Este último debe ser aniquilado por los operadores $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ y $b_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$, de acuerdo con (2.34), y además debe estar normalizado. Así, el estado final puede construirse de la forma (en el anexo C se demuestra que se verifican las dos condiciones anteriores):

$$|\text{out}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}\right) |\text{in}\rangle \quad (2.62)$$

Con esto se puede calcular ya la probabilidad de que no se produzcan partículas en ningún modo:

$$\langle \text{in}|\text{out}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \langle \text{in}|\exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}\right) |\text{in}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}}\right)^n \langle \text{in}|(b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle$$

Dado que $\langle \text{in}|b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} = 0$, solo se tiene contribución no nula para $n = 0$:

$$|\langle \text{in}|\text{out}\rangle|^2 = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|^2} = \exp\left(-\sum_{\mathbf{k}} \log(|\alpha_{\mathbf{k}}|^2)\right) = \exp\left(-\sum_{\mathbf{k}} \log(1 + |\beta_{\mathbf{k}}|^2)\right) \quad (2.63)$$

donde se ha utilizado (2.37). Puede convertirse el sumatorio en \mathbf{k} en una integral por medio de la sustitución $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow [V/(2\pi)^3] \int d^3k$ y entonces se tiene:

$$|\langle \text{in}|\text{out}\rangle|^2 = \exp\left(-\frac{V}{(2\pi)^3} \int \log(1 + N_{\mathbf{k}}) d^3k\right) \quad (2.64)$$

Si se emplea el desarrollo en serie de Taylor de la función logaritmo, $\log(1+x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, se puede escribir:

$$|\langle \text{in}|\text{out}\rangle|^2 = \exp\left(-\frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int N_{\mathbf{k}}^n d^3k\right)$$

A continuación, se resuelve la integral que aparece en el argumento de la exponencial tal y como se ha hecho en (2.60):

$$\int N_{\mathbf{k}}^n d^3k = \int \exp\left(-\frac{n\pi(k_{\perp}^2 + m^2)}{qE_0}\right) d^3k = \frac{(qE_0)^2 T}{n} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{qE_0}\right) \quad (2.65)$$

Así, finalmente se tiene que la probabilidad de que no se produzcan partículas en ningún modo \mathbf{k} y, por tanto, de permanecer en el estado vacío inicial es:

$$|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 = \exp \left(-\frac{VT}{(2\pi)^3} (qE_0)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp \left(-\frac{n\pi m^2}{qE_0} \right) \right) \quad (2.66)$$

2.3. Método CWKB

A continuación, se presenta un método alternativo a la transformación de Bogoliubov que permite estudiar el fenómeno de producción de partículas propio del efecto Schwinger. Se trata del método de la aproximación WKB con trayectorias complejas (abreviado usualmente como CWKB), en el que el espacio y el tiempo se describen utilizando números complejos [11].

En el efecto Schwinger, se crean pares partícula-antipartícula a partir del vacío en presencia de un campo electromagnético suficientemente intenso. Si se tiene en cuenta la *prescripción de Feynman-Stueckelberg*, una partícula de energía E moviéndose hacia adelante en el tiempo es equivalente a una antipartícula de carga opuesta y energía $-E$ moviéndose hacia atrás en el tiempo [20]. Esto se fundamenta en el hecho de que la función de onda de una partícula de energía E que se mueve hacia adelante en el tiempo tiene una dependencia con el tiempo y la energía de la forma $\exp(-iEt)$. Si se realizan de forma simultánea las sustituciones $t \rightarrow -t$ y $E \rightarrow -E$, entonces la dependencia de la función de onda sigue siendo la misma: $\exp(-i(-E)(-t)) = \exp(-iEt)$. Así, en este método, si se considera un gauge en el que el potencial electromagnético depende de la coordenada temporal t , la producción de partículas puede considerarse como un proceso de reflexión en el tiempo según la prescripción de Feynman-Stueckelberg.

En este método, se parte de una ecuación de tipo oscilador armónico con frecuencia Ω_k dependiente del tiempo, como la dada por (2.9), que se puede reescribir de la forma (2.43) en términos de la variable τ y el parámetro λ , dados por (2.42). Los puntos de retorno t_c se definen como aquellos puntos que satisfacen la siguiente condición:

$$\Omega_k(t_c) = 0 \quad (2.67)$$

donde t_c es en general un número complejo. En este caso, los puntos de retorno son tiempos, ya que se está considerando un gauge en el que el potencial electromagnético es dependiente de t . Físicamente, los puntos de retorno representan aquellos puntos en los que se produce la reflexión. Este método se fundamenta sobre la aproximación WKB descrita en la sección 2.1, en la que se toma orden cero, de forma que $W_k(t) = W_k^{(0)}(t) = \Omega_k(t)$. Puede denotarse:

$$S(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Omega_k(t') dt' \quad (2.68)$$

Se comienza considerando una onda que se mueve hacia atrás en el tiempo. Si se denota por t_0 el instante de tiempo inicial, la onda en un instante de tiempo $t < t_0$ tiene una dependencia de la forma:

$$\exp \left(i \int_{t_0}^t \Omega_k(t') dt' \right) = \exp(iS(t, t_0)) \quad (2.69)$$

Además, otra onda empieza en t_0 moviéndose hacia atrás en el tiempo y llega al punto de retorno $t_{c,1}$. A continuación, experimenta μ reflexiones entre los puntos de retorno $t_{c,1}$ y $t_{c,2}$,

para finalmente volver hacia t ($t > t_{c,1}, t_{c,2}$). Esta onda tiene una dependencia de la forma:

$$-i \exp\left(i \int_{t_0}^{t_{c,1}} \Omega_k(t') dt'\right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[-i \exp\left(i \int_{t_{c,1}}^{t_{c,2}} \Omega_k(t') dt'\right) \right] \right) \exp\left(-i \int_{t_{c,1}}^t \Omega_k(t') dt'\right) \quad (2.70)$$

donde el primer factor exponencial representa la contribución debida a que la onda evoluciona de t_0 a $t_{c,1}$, el segundo factor da cuenta de las sucesivas reflexiones entre los puntos de retorno $t_{c,1}$ y $t_{c,2}$ y el último factor representa la reflexión que experimenta la onda en $t_{c,1}$ para volver finalmente a t . La expresión anterior puede reescribirse como:

$$-i \frac{\exp(2iS(t_{c,1}, t_0))}{1 + \exp(2iS(t_{c,1}, t_{c,2}))} \exp(-iS(t, t_0)) \quad (2.71)$$

donde se ha tenido en cuenta la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1/(1+x)$. En $t \rightarrow -\infty$ no hay ninguna partícula y la onda se puede escribir como:

$$\psi_{\text{in}} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{\Omega_k(t)}} \exp(iS(t, t_0)) \quad (2.72)$$

Si se tienen en cuenta la contribución inicial sin reflexiones y la contribución con reflexiones, la onda presenta la siguiente dependencia en $t \rightarrow +\infty$:

$$\psi_{\text{in}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\Omega_k(t)}} [\exp(iS(t, t_0)) - iR \exp(-iS(t, t_0))] \quad (2.73)$$

donde R denota el coeficiente de reflexión. Este, de acuerdo con (2.71), está dado por:

$$R = \frac{\exp(2iS(t_{c,1}, t_0))}{1 + \exp(2iS(t_{c,1}, t_{c,2}))} \quad (2.74)$$

Debe resolverse la ecuación (2.43) utilizando la aproximación WKB. Teniendo en cuenta (2.44) y (2.67), se tienen dos puntos de retorno $\tau_{c,1}$ y $\tau_{c,2}$ complejos que están dados por:

$$\tau_{c,1} = -i\sqrt{\lambda}, \quad \tau_{c,2} = +i\sqrt{\lambda} \quad (2.75)$$

Para calcular el coeficiente de reflexión R , es necesario calcular las integrales $S(\tau_{c,1}, \tau_{c,2})$ y $S(\tau_{c,1}, \tau_0)$. Teniendo en cuenta (2.50), se tiene:

$$S(\tau_{c,1}, \tau_{c,2}) = -i\frac{\lambda\pi}{2}, \quad S(\tau_{c,1}, \tau_0) = -i\frac{\lambda\pi}{4} + \delta(\tau_0) \quad (2.76)$$

donde $\delta(\tau_0)$ da lugar a un término de fase en el coeficiente de reflexión y está dado por:

$$\delta(\tau_0) = \frac{\lambda}{2} \log(\sqrt{\lambda}) - \frac{\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 + \lambda}}{2} - \frac{\lambda}{2} \log\left(\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 + \lambda}\right) \quad (2.77)$$

Así, el módulo del coeficiente de reflexión es:

$$|R| = \frac{e^{-\lambda\pi/2}}{1 + e^{-\lambda\pi}} \quad (2.78)$$

A continuación, se calcula la producción de partículas a partir del coeficiente de reflexión. La amplitud para la observación de una partícula escalar en un punto $x_a = (t_a, \mathbf{x}_a)$ y una antipartícula en el punto $x_b = (t_b, \mathbf{x}_b)$ se puede escribir como [11, 21]:

$$A = -\frac{A_0}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\sigma_1^\mu d\sigma_2^\nu u_{\mathbf{k}_1}^*(t_1, \mathbf{x}_1) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_1} G(x_2, x_1) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\nu_2} u_{\mathbf{k}_2}^*(t_2, \mathbf{x}_2) \quad (2.79)$$

donde, tal y como se ha visto en la sección 2.2, $u_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f_{\mathbf{k}}(t)$, siendo $f_{\mathbf{k}}(t)$ la solución exacta de la ecuación (2.9). Además, $d\sigma^\mu$ es el elemento de la hipersuperficie sobre la que se integra y el operador $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ se define como: $a\overleftrightarrow{\partial}_\mu b = a\partial_\mu b - b\partial_\mu a$. $G(x_2, x_1)$ es la función de Green de una partícula que va de x_2 a x_1 . Por su parte, A_0 es la amplitud de probabilidad de que no se cree ninguna partícula. $u_{\mathbf{k}}$ y G dependen de \mathbf{x} a través de factores de fase, de modo que integrando sobre $d^3x_{1,2}$ y $d^3k_{1,2}$, los vectores de onda del par partícula-antipartícula creado quedan fijados, siendo estos opuestos: $-\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. De esta forma, la amplitud de probabilidad A puede escribirse en la forma:

$$A = \int A(\mathbf{k}) d^3k \quad (2.80)$$

donde $A(\mathbf{k})$ es la amplitud de probabilidad para la creación de un par partícula-antipartícula con momentos opuestos \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$. Su módulo verifica [11, 21]:

$$|A(\mathbf{k})|^2 = |A_0|^2 \omega_{\mathbf{k}} = |R|^2 \quad (2.81)$$

De esta expresión se deduce que, como $|A(\mathbf{k})|^2$ es la probabilidad de que se cree un par partícula-antipartícula con vectores de onda \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$ y $|A_0|^2$ da la probabilidad absoluta de que no se cree ninguna partícula en el modo \mathbf{k} , entonces $\omega_{\mathbf{k}}$ representa la probabilidad relativa de que se produzca un par partícula-antipartícula si no hay ninguna partícula en el estado inicial. Teniendo en cuenta esto, la probabilidad de que se produzcan n pares partícula-antipartícula con vectores de ondas \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$ es:

$$P_n(\mathbf{k}) = |A_0|^2 \omega_{\mathbf{k}}^n \quad (2.82)$$

La suma de las probabilidades $P_n(\mathbf{k})$ para todos los valores posibles de n , que van desde 0 hasta ∞ , debe ser uno. Esto nos permite obtener el valor de $|A_0|^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbf{k}) = 1 \Rightarrow |A_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k}}^n = 1 \Rightarrow |A_0|^2 = 1 - \omega_{\mathbf{k}} \quad (2.83)$$

donde se ha utilizado que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$. De acuerdo con esto, la probabilidad absoluta para la creación de un par es:

$$|A(\mathbf{k})|^2 = P_1(\mathbf{k}) = (1 - \omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad |R|^2 = (1 - \omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \quad (2.84)$$

El número medio de pares con vector de ondas \mathbf{k} está dado por:

$$N_{\mathbf{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}}^n = (1 - \omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \sum_{n=0}^{\infty} n \omega_{\mathbf{k}}^{n-1} \quad (2.85)$$

$$\Rightarrow N_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{1 - \omega_{\mathbf{k}}} \quad (2.86)$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \omega_{\mathbf{k}}^{n-1} = \frac{d}{d\omega_{\mathbf{k}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k}}^n \right) = \frac{d}{d\omega_{\mathbf{k}}} \left(\frac{1}{1 - \omega_{\mathbf{k}}} \right) = \frac{1}{(1 - \omega_{\mathbf{k}})^2} \quad (2.87)$$

Recordando el resultado obtenido para el módulo del coeficiente de reflexión en (2.78) y utilizando (2.84), se tiene la igualdad:

$$|R|^2 = (1 - \omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-\lambda\pi}}{(1 + e^{-\lambda\pi})^2} = (1 - \omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \quad (2.88)$$

Una solución de esta ecuación es:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{1 + e^{\lambda\pi}}, \quad 1 - \omega_{\mathbf{k}} = \frac{e^{\lambda\pi}}{1 + e^{\lambda\pi}} \quad (2.89)$$

y, por tanto, el número medio de pares creados con vector de ondas \mathbf{k} está dado por:

$$N_{\mathbf{k}} = \exp(-\lambda\pi) \quad \Rightarrow \quad N_{\mathbf{k}} = \exp\left(-\frac{\pi(k_{\perp}^2 + m^2)}{qE_0}\right) \quad (2.90)$$

que coincide con el resultado obtenido aplicando el método de la transformación de Bogoliubov, dado por (2.59). También puede calcularse la probabilidad de que no se cree ninguna partícula en ningún modo o, dicho de otra forma, la probabilidad de que, partiendo de un estado inicial $|\text{in}\rangle$ vacío, se permanezca en este en el estado final $|\text{out}\rangle$. Como $|A_0(\mathbf{k})|^2$ da la probabilidad de que no se cree ninguna partícula en el modo \mathbf{k} , para calcular la probabilidad de que no se cree ninguna partícula en ningún modo simplemente deberá multiplicarse esta probabilidad para todos los valores posibles de \mathbf{k} . Utilizando (2.83), (2.89) y (2.90), se tiene:

$$|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 = \prod_{\mathbf{k}} |A_0(\mathbf{k})|^2 = \exp\left(-\sum_{\mathbf{k}} \log(1 + N_{\mathbf{k}})\right) \quad (2.91)$$

que coincide con la expresión (2.63) obtenida utilizando el método de la transformación de Bogoliubov. Es relevante destacar que la ecuación (2.88) también admite la solución matemática:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{e^{\lambda\pi}}{1 + e^{\lambda\pi}}, \quad 1 - \omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{1 + e^{\lambda\pi}} \quad (2.92)$$

Con esta elección el número de partículas en un modo \mathbf{k} estaría dado por: $N_{\mathbf{k}} = \exp(\pi(k_{\perp}^2 + m^2)/(qE_0))$. En una situación sin campo eléctrico, no puede tenerse inestabilidad del vacío y la probabilidad de que en el estado final se siga en el vacío inicial debería ser 1. En este caso, se tiene que en el límite $E_0 \rightarrow 0$, $N(\mathbf{k}) \rightarrow +\infty$ y, por tanto, $|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 \rightarrow 0$, lo que carece de sentido físico. En cambio, con la solución para $\omega_{\mathbf{k}}$ dada por (2.89), en el límite $E_0 \rightarrow 0$ se tiene $N(\mathbf{k}) \rightarrow 0$, de modo que $|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 \rightarrow 1$, como se espera. Así, matemáticamente las dos soluciones (2.89) y (2.92) son posibles, pero solo la primera de ellas tiene sentido físico.

2.4. Interpretación de los resultados

El número de partículas producidas en un modo \mathbf{k} presenta un decaimiento exponencial con el cuadrado de k_{\perp} , así como con el cuadrado de la masa. De esta forma, la producción de partículas estará muy suprimida para los modos grandes, con k_x y k_y grandes. Lo mismo ocurrirá en el caso de masas grandes: en el límite $m \rightarrow \infty$, la producción de partículas se hace nula. La interpretación física de este resultado se basa en el hecho de que el campo debe suministrar una energía igual a $2mc^2$ para que se produzca el par partícula-antipartícula. Así, en el caso en el que $m \rightarrow \infty$ se requeriría que el campo eléctrico proporcionara una energía infinitamente grande, lo que físicamente no es posible.

Respecto al resultado obtenido para $|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2$, dado por la expresión (2.66), se tiene que si no hay campo eléctrico ($E_0 = 0$), la probabilidad de que no se produzcan partículas en ningún modo \mathbf{k} es 1 y, de este modo, el estado final $|\text{out}\rangle$ coincide con el estado vacío inicial. Por tanto, para que tenga lugar la producción de partículas se necesita un campo eléctrico E_0 no nulo.

Además, según el resultado obtenido se tiene que E_0 debe tener un valor suficientemente grande para que la producción de partículas sea apreciable. De esta manera, se puede definir un valor crítico E_c para la magnitud del campo eléctrico, de forma que la producción de pares partícula-antipartícula solo es apreciable si $E_0 \gg E_c$. El valor E_c se obtiene imponiendo que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica qE_0 en una escala de longitud caracterizada por la longitud de onda Compton, $\lambda_c = \hbar/(mc)$, sea igual a la energía en reposo de las partículas producidas. Así, E_c está dado por:

$$E_c = \frac{m^2 c^3}{q \hbar} \quad (2.93)$$

donde se han recuperado las constantes fundamentales \hbar y c para expresar la solución en el Sistema Internacional de unidades.

Para concluir esta parte, es importante destacar que los resultados obtenidos coinciden con los obtenidos originariamente por J. Schwinger en 1951 [3], así como con los de otros autores como J. Martin [8] y S. Biswas, A. Shaw y B. Modak [11]. Asimismo, aunque los cálculos presentados aquí se han realizado considerando campos escalares y, en consecuencia, los resultados obtenidos son aplicables solo a bosones, en 1951 Schwinger realizó el cálculo originariamente para fermiones y obtuvo un valor para la probabilidad $|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2$ que tiene la misma dependencia que el obtenido aquí para bosones [3]. Así, en el caso en el que se considera la producción de pares electrón-positrón ($m = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C) a partir del vacío en presencia de un campo eléctrico externo, utilizando (2.93) se tiene que el valor crítico del campo eléctrico es $E_c = 1,32 \cdot 10^{18}$ V/m. Se trata de un valor de campo eléctrico muy elevado e imposible de conseguir con la tecnología actual en un laboratorio, ni siquiera utilizando los láseres más potentes disponibles. Esto ha influido en el hecho de que el efecto Schwinger no se haya podido observar aún de forma experimental.

3. Creación de partículas en campos de fondo gravitatorios: espacio de De Sitter

A continuación, se pasa a estudiar los procesos de creación de partículas en el caso cosmológico, cuando se tiene un campo de fondo gravitatorio. Se considera un espacio-tiempo de De Sitter, que es un espacio-tiempo curvo que constituye un modelo matemático compatible con la expansión acelerada del universo. Primero, se introducen unas consideraciones generales sobre el espacio-tiempo de De Sitter que es preciso conocer y, a continuación, se pasa a calcular la producción de partículas aplicando los métodos ya explicados para el efecto Schwinger.

3.1. Fundamentos sobre el espacio-tiempo de De Sitter

El espacio-tiempo de De Sitter en 3 + 1 dimensiones se define como el conjunto de puntos $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ en el espacio de Minkowski de cinco dimensiones:

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 \quad (3.1)$$

que satisfacen la siguiente ecuación correspondiente a un hiperboloide:

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2 \quad (3.2)$$

donde α es un parámetro que caracteriza la escala de longitud. De acuerdo con esta expresión, el grupo de simetría del espacio-tiempo de De Sitter de 4 dimensiones es el grupo $SO(1, 4)$, que recibe el nombre de *grupo de De Sitter* y es el grupo de Lorentz del espacio de Minkowski de 5 dimensiones. Está caracterizado por 10 parámetros, pues existen 10 vectores de Killing¹. Estos pueden ser rotaciones en el espacio de 4 dimensiones o boosts, cuyos generadores están dados respectivamente por:

$$z_i \frac{\partial}{\partial z_j} - z_j \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{y} \quad z_i \frac{\partial}{\partial z_0} + z_0 \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.3)$$

En un espacio-tiempo de 4 dimensiones, el máximo número posible de isometrías es 10. Aquellos espacios de 4 dimensiones en los que el número de simetrías es 10 reciben el nombre de *espacios máximamente simétricos*. De esta forma, el espacio-tiempo de De Sitter constituye un espacio máximamente simétrico. El tensor de curvatura de Riemann-Christoffel se define como:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (3.4)$$

Como el espacio de De Sitter es un espacio máximamente simétrico, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ se puede escribir de forma proporcional a $(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})$ y la curvatura escalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ es constante y mayor que 0 [22, 23]. El espacio de De Sitter es una solución de vacío de las ecuaciones del campo de Einstein, que se escriben como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento, que se anula cuando se estudian soluciones de vacío, y Λ es la constante cosmológica. En el caso en el que $T_{\mu\nu} = 0$, si se contraen los índices μ y ν en las ecuaciones del campo de Einstein, se obtiene $R = 4\Lambda$, de forma que el espacio de De Sitter se caracteriza por una constante cosmológica positiva, $\Lambda > 0$. Teniendo en cuenta que en el espacio de De Sitter $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = (1/\alpha^2)(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})$, se puede calcular el tensor de Ricci ($R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$) y la curvatura escalar ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$):

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{\alpha^2}g_{\mu\nu}, \quad R = \frac{12}{\alpha^2} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta estas últimas expresiones e introduciéndolas en (3.5) en el caso de solución de vacío, se obtiene la siguiente relación entre α y Λ : $\alpha^2 = \frac{3}{\Lambda}$. Además, si se tiene en cuenta la primera ecuación de Friedmann, que en el caso del espacio-tiempo de De Sitter toma la forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} \quad (3.7)$$

se tiene que $\alpha = \frac{1}{H}$. En la primera ecuación de Friedmann a es el factor de escala, y $H = \dot{a}/a$ se denomina parámetro de Hubble. Así, en el espacio-tiempo de De Sitter, la curvatura escalar está dada por:

$$R = 12H^2 \quad (3.8)$$

A continuación, se pasa a describir las parametrizaciones del espacio de De Sitter que se van a utilizar posteriormente. Se pueden considerar las coordenadas (t, \mathbf{x}) , definidas a través de:

$$z_0 = H^{-1} \sinh(Ht) + \frac{1}{2}H e^{Ht} |\mathbf{x}|^2, \quad z_4 = H^{-1} \cosh(Ht) - \frac{1}{2}H e^{Ht} |\mathbf{x}|^2, \quad z_i = e^{Ht} x_i \quad (3.9)$$

¹Los vectores de Killing ξ^μ son aquellos que verifican la ecuación de Killing, que toma la forma: $\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu = 0$, donde ∇_μ denota el operador derivada covariante.

donde $i = 1, 2, 3$ y $-\infty < t, x_i < \infty$. Esta parametrización describe la mitad del espacio-tiempo de De Sitter, con $z_0 + z_4 > 0$. En este caso, la métrica se expresa como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \text{con } a(t) = H^{-1} \exp(Ht) \quad (3.10)$$

Otro sistema de coordenadas que se utilizará para parametrizar el espacio de De Sitter es el descrito por $(t, \chi, \theta, \varphi)$:

$$z_0 = H^{-1} \sinh(Ht), \quad z_1 = H^{-1} \cosh(Ht) \cos \chi, \quad z_2 = H^{-1} \cosh(Ht) \sin \chi \cos \theta \quad (3.11)$$

$$z_3 = H^{-1} \cosh(Ht) \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad z_4 = H^{-1} \cosh(Ht) \sin \chi \sin \theta \sin \varphi$$

donde $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, de forma que esta parametrización cubre todo el espacio de De Sitter. En este caso, la métrica se expresa:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad \text{con } a(t) = H^{-1} \cosh(Ht) \quad (3.12)$$

3.2. Estudio de la producción de partículas

A continuación, se estudian los procesos de creación de partículas en el espacio-tiempo de De Sitter. Cada uno de los sistemas de coordenadas (3.10) y (3.12) está caracterizado por un tensor métrico $g_{\mu\nu}$, de forma que la métrica se escribe como: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Como el universo actual no se puede considerar en su totalidad un universo de De Sitter, se estudiará la producción de partículas en ambos sistemas de coordenadas. En lugar de trabajar con el tiempo normal t , se puede introducir el tiempo conforme η , que se define como:

$$\eta = \int a^{-1}(t) dt \quad (3.13)$$

Para el sistema de coordenadas (3.10), se tiene:

$$\eta = -\exp(-Ht) \Rightarrow a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \Rightarrow ds^2 = \frac{1}{H^2 \eta^2} (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \quad (3.14)$$

mientras que para el sistema de coordenadas (3.12), queda:

$$\eta = 2 \tan^{-1}[\exp(Ht)] \Rightarrow a(\eta) = \frac{1}{H \sin \eta} \quad (3.15)$$

$$ds^2 = \frac{1}{H^2 \sin^2 \eta} [d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (3.16)$$

Se considera un campo escalar real $\phi(t, \mathbf{x})$ de masa m . La densidad lagrangiana del campo escalar real en el espacio-tiempo de Minkowski debe adaptarse al caso de un espacio-tiempo curvo. Para ello, hay que tener en cuenta que un espacio-tiempo curvo está caracterizado por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Además, puede tenerse un acoplamiento entre el campo escalar real y el campo gravitatorio, lo que produce un término adicional de la forma $\xi R\phi$, siendo R la curvatura escalar y ξ una constante que habitualmente toma los valores $\xi = 0$ (acoplamiento mínimo) o $\xi = 1/6$ (acoplamiento conforme). Así, puede escribirse [4]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - (m^2 + \xi R) \phi^2] \quad (3.17)$$

donde $g = |\det g_{\mu\nu}|$. La teoría es invariante conforme si $m = 0$ y $\xi = 1/6$. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, que debe modificarse reemplazando las derivadas habituales por derivadas covariantes ($\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$), se obtiene la ecuación para el campo ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \Rightarrow (\square + m^2 + \xi R)\phi = 0 \quad (3.18)$$

donde el operador d'Alembertiano en un espacio-tiempo curvo toma la forma: $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. De esta forma, se tiene que:

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \quad (3.19)$$

Antes de calcular la producción de partículas que tiene lugar en el espacio-tiempo de De Sitter, hay que tener en cuenta que en un espacio-tiempo curvo hay una ambigüedad en la definición del vacío, pues el comportamiento asintótico de los modos en los que se puede desarrollar el campo escalar ϕ generalmente no se puede reducir al que se tendría en un espacio-tiempo de Minkowski. El número de partículas se define con respecto a un estado vacío a partir del cual se construye el espacio de Fock, tal y como se ha descrito en la sección 2.2. Por tanto, si hay una ambigüedad en la definición del concepto de vacío, el número de partículas no está bien definido. Una posible solución pasa por aplicar un método en el que los modos en los que puede desarrollarse el campo ϕ , que verifica la ecuación (3.18), son los más próximos al espacio-tiempo de Minkowski en el caso asintótico. Así, estos modos definen en un espacio-tiempo curvo el análogo a un estado vacío.

El campo $\phi(\eta, \mathbf{x})$ se puede cuantizar y desarrollar en modos de forma similar a como se ha visto para el efecto Schwinger en (2.25):

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{a(\eta)} (a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(\eta, \mathbf{x})) \quad (3.20)$$

donde la separación de las variables espaciales respecto de las variables temporales $u_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) = f_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ es posible porque a depende solo de η . Introduciendo (3.20) en la ecuación (3.18), se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $f_k(\eta)$:

$$\frac{d^2 f_k(\eta)}{d\eta^2} + \Omega_k^2(\eta) f_k(\eta) = 0 \quad (3.21)$$

Igual que ocurría en el efecto Schwinger (ecuación (2.9)), se ha obtenido una ecuación diferencial de segundo orden de tipo oscilador armónico con frecuencia Ω_k dependiente del tiempo conforme η . El cambio que se tiene ahora es que la dependencia de la frecuencia es distinta:

$$\Omega_k^2(\eta) = k^2 + a^2(\eta) \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] \quad (3.22)$$

Recordando lo explicado en la sección 2.1, la ecuación (3.21) posee soluciones de tipo WKB, siendo la aproximación WKB válida si $a(\eta)$ varía suficientemente despacio. A continuación, se aplica el método CWKB descrito para el efecto Schwinger en la sección 2.3, que considera la producción de partículas como un proceso de reflexión en el tiempo [12]. Si se considera la parametrización del espacio de De Sitter dada por (3.10), Ω_k toma la forma:

$$\Omega_k(\eta) = \sqrt{k^2 + \frac{1}{\eta^2} M^2}, \quad \text{con } M = \frac{1}{H} \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

donde se ha redefinido una nueva constante M que depende de la masa m , de la constante de acoplamiento ξ y de la curvatura escalar R . En este caso, el vacío se define a partir de soluciones de (3.21), que para $\eta \rightarrow \infty$, según la aproximación WKB, toman la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_k(\eta)}} [\exp(iS(\eta, \eta_0)) - iR \exp(-iS(\eta, \eta_0))] \quad (3.24)$$

donde se ha recordado la expresión (2.73). En este caso, los puntos de retorno $\eta_{c,1}$ y $\eta_{c,2}$ son:

$$\Omega_k(\eta_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{c,1} = -i\frac{M}{k}, \quad \eta_{c,2} = i\frac{M}{k} \quad (3.25)$$

De acuerdo con (2.74), el coeficiente de reflexión está dado por:

$$R = \frac{\exp[2iS(\eta_{c,1}, \eta_0)]}{1 + \exp[2iS(\eta_{c,1}, \eta_{c,2})]} \quad (3.26)$$

Ahora, recordando (2.68), se calcula $S(\eta_{c,1}, \eta_{c,2})$ y $S(\eta_{c,1}, \eta_0)$:

$$S(\eta_{c,1}, \eta_{c,2}) = -iM\pi, \quad S(\eta_{c,1}, \eta_0) = -iM\frac{\pi}{2} + \delta(\eta_0) \quad (3.27)$$

donde $\delta(\eta_0)$ da lugar a un término de fase en el coeficiente de reflexión y está dado por:

$$\delta(\eta_0) = -\sqrt{k^2\eta_0^2 + M^2} + M \log \left(\frac{M}{k\eta_0} + \sqrt{1 + \frac{M^2}{k^2\eta_0^2}} \right) \quad (3.28)$$

De esta forma, el módulo del coeficiente de reflexión es:

$$|R| = \frac{\exp(\pi M)}{1 + \exp(2\pi M)} \quad (3.29)$$

En el anexo E se demuestra que utilizando la parametrización (3.12) el resultado que se obtiene es el mismo. De acuerdo con (2.84), la probabilidad relativa $\omega_{\mathbf{k}}$ de que se cree un par de partículas en un modo \mathbf{k} es:

$$|R|^2 = \omega_{\mathbf{k}}(1 - \omega_{\mathbf{k}}) \quad \Rightarrow \quad \omega_{\mathbf{k}} = \frac{\exp(-2\pi M)}{1 + \exp(-2\pi M)}, \quad 1 - \omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{1 + \exp(-2\pi M)} \quad (3.30)$$

Aplicando (2.85) y (2.86), el número medio de pares creados en un espacio-tiempo de De Sitter como consecuencia de un campo de fondo gravitatorio es:

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{1 - \omega_{\mathbf{k}}} \quad \Rightarrow \quad N_{\mathbf{k}} = \exp(-2\pi M) \quad (3.31)$$

Recordando que el valor de M está dado por (3.23) y que en el espacio-tiempo de De Sitter $R = 12H^2$, $N_{\mathbf{k}}$ toma la forma:

$$N_{\mathbf{k}} = \exp \left(-2\pi \left[\frac{m^2}{H^2} + 12 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} \right) \quad (3.32)$$

Igual que se ha hecho para el efecto Schwinger, también puede calcularse la probabilidad de que no se creen partículas en ningún modo. Si se denota por $|A_0(\mathbf{k})|^2$ la probabilidad de que no se cree ninguna partícula en el modo \mathbf{k} , la probabilidad de que no se cree ninguna partícula en ningún modo será:

$$|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 = \prod_{\mathbf{k}} |A_0(\mathbf{k})|^2 = \prod_{\mathbf{k}} (1 - \omega_{\mathbf{k}}) = \exp \left(- \sum_{\mathbf{k}} \log[1 + \exp(-2\pi M)] \right) \quad (3.33)$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (2.91) y (3.30). De acuerdo con (3.30), $1 - \omega_{\mathbf{k}}$ es independiente de \mathbf{k} , por lo que el sumatorio en \mathbf{k} diverge. Si se toma $\mathbf{k} = (k, l, m)$, se puede eliminar la divergencia fijando un corte $k = N$ y haciendo que este pueda variar [12, 24]:

$$\Delta \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k \sum_{m=-l}^{+l} 1 = (N+1)^2 \Delta N \rightarrow e^{3 \log N} \frac{\Delta N}{N}, \quad \text{conforme } N \rightarrow \infty \quad (3.34)$$

donde se ha usado que, para $N \rightarrow \infty$, entonces $(N+1)^2 \sim N^2$. Para el sistema de coordenadas dado por (3.12), el momento físico de un estado con número cuántico N es [12, 24]:

$$k_{\text{físico}} \rightarrow \frac{N}{H^{-1} \cosh(Ht)} \quad \text{conforme } N \rightarrow \infty \quad (3.35)$$

Si se fija $k_{\text{físico}}$, ΔN puede relacionarse con el tiempo total transcurrido en la evolución del estado inicial al estado final:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta(\cosh Ht)}{\cosh Ht} \rightarrow H \Delta t \quad (3.36)$$

que equivale a $\log N \rightarrow Ht$ conforme N y t se hacen grandes. El volumen cuatridimensional ΔV_4 en un intervalo de tiempo Δt está dado por [12, 24]:

$$\Delta V_4 = \frac{2\pi^2}{H^3} \cosh^3(Ht) \Delta t \rightarrow \frac{\pi^2}{4H^4} e^{3Ht} H \Delta t \rightarrow \frac{\pi^2}{4H^4} e^{3 \log N} \frac{\Delta N}{N} = \frac{\pi^2}{4H^4} \left(\sum_{\mathbf{k}} 1 \right) \quad (3.37)$$

donde se ha considerado el límite de N y t grandes. De esta forma, se ha eliminado la divergencia del sumatorio en \mathbf{k} y la probabilidad $|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2$ es:

$$|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 = \exp(-\Gamma V_4), \quad \text{con } \Gamma = \frac{4H^4}{\pi^2} \log[1 + \exp(-2\pi M)] \quad (3.38)$$

donde Γ denota el ritmo de creación de partículas. Asimismo, tras haber resuelto la divergencia del sumatorio en \mathbf{k} , también se puede calcular el número total de pares creados sumando $N_{\mathbf{k}}$ para todos los modos \mathbf{k} y utilizando (3.37):

$$\sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} = \exp(-2\pi M) \left(\sum_{\mathbf{k}} 1 \right) = \frac{4H^4}{\pi^2} V_4 \exp(-2\pi M) \quad (3.39)$$

donde $N_{\mathbf{k}} = \exp(-2\pi M)$ se puede sacar fuera del sumatorio porque es independiente de \mathbf{k} .

Para finalizar el estudio de la producción de partículas, se puede calcular lo que ocurre en el caso en el que el campo ϕ se encuentra en un cierto instante en el vacío conforme. En este caso, se aplicará el método de la transformación de Bogoliubov descrito en la sección 2.2. Una transformación conforme de la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ se define como aquella que presenta la forma:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (3.40)$$

donde x denota un punto del espacio de cuatro dimensiones y $\Omega(x)$ es una función real, finita, continua y que no se anula. De esta expresión, se observa que si se efectúa una transformación conforme sobre el espacio-tiempo de Minkowski escogiendo adecuadamente el valor de $\Omega(x)$, se obtiene la métrica de De Sitter propia de las parametrizaciones (3.14) y (3.16), de modo que si $g_{\mu\nu}$ denota el tensor métrico del espacio de De Sitter, entonces $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$. En el caso de

(3.14), $\Omega^2(x) = 1/(H^2\eta^2)$; y en el de (3.16), $\Omega^2(x) = 1/(H^2 \sin^2 \eta)$. Así, se dice que el espacio de De Sitter es conforme respecto del espacio de Minkowski en los dos sistemas de coordenadas considerados. Para que la ecuación (3.18) que verifica el campo ϕ sea invariante conforme, se requiere que la masa sea nula ($m = 0$) y que $\xi = 1/6$:

$$\left(\square + \frac{1}{6}R\right)\phi = 0 \quad (3.41)$$

Bajo la transformación conforme $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2}g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, la ecuación del campo ϕ transforma de la siguiente manera cuando se aplica una transformación conforme:

$$\left(\square + \frac{1}{6}R\right)\phi \rightarrow \left(\bar{\square} + \frac{1}{6}\bar{R}\right)\bar{\phi} = \Omega^3\left(\square + \frac{1}{6}R\right)\phi \quad (3.42)$$

donde $\square\bar{\phi} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu(\Omega\phi)$ y $\bar{\phi}(x) = \Omega(x)\phi(x)$. \bar{R} y $\bar{\phi}$ denotan la curvatura escalar y el operador campo en el espacio de Minkowski. Así, $\bar{R} = 0$ y se tiene la ecuación: $\square\bar{\phi} = 0$. La solución de esta ecuación se puede expresar desarrollando el campo $\bar{\phi}$ en modos $\bar{u}_{\mathbf{k}}$ de la siguiente manera:

$$\bar{\phi}(x) = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}\bar{u}_{\mathbf{k}}(x) + a_{\mathbf{k}}^\dagger\bar{u}_{\mathbf{k}}^*(x)), \quad \text{con } \bar{u}_{\mathbf{k}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}}e^{-ik\cdot x} \quad (3.43)$$

Teniendo en cuenta que $\phi = \Omega^{-1}\bar{\phi}$, la descomposición en modos del campo ϕ se puede escribir como:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\Omega^{-1}(x)\sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}\bar{u}_{\mathbf{k}}(x) + a_{\mathbf{k}}^\dagger\bar{u}_{\mathbf{k}}^*(x)) \quad (3.44)$$

El estado vacío asociado a estos modos, que es destruido cuando se actúa sobre él con el operador $a_{\mathbf{k}}$, se denomina *vacío conforme*. Teniendo en cuenta todo esto, se procede a estudiar si en este caso especial de simetría conforme se producen o no partículas. Se resuelve de forma exacta la ecuación (3.21). La solución normalizada es:

$$f_k(\eta) = \frac{1}{2}(\pi\eta)^{1/2}H_\nu^{(2)}(k\eta) \quad (3.45)$$

donde $H_\nu(k\eta)$ es una función de Hankel de segundo tipo (en el anexo B.2 se aporta más información sobre este tipo de funciones especiales). Se ha tenido en cuenta que una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1-2\alpha}{z}\frac{du}{dz} + \left(\beta^2 - \frac{\alpha^2 - \nu^2}{z^2}\right)u = 0 \quad (3.46)$$

tiene como solución la función $u = z^\alpha Z_\nu(\beta z)$ [19], donde $Z_\nu(z)$ puede ser las funciones de Bessel $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ o combinaciones lineales de ellas como las funciones de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$. La ecuación (3.21) es un caso particular de (3.46) con $\alpha = 1/2$, $\beta = k$, $z = \eta$ y $\nu^2 = 1/4 - M^2 = 9/4 - (m^2 + \xi R)/H^2$.

Igual que se ha hecho para el efecto Schwinger, se pueden calcular las soluciones de (3.21) según la aproximación WKB y compararlas con la solución exacta para obtener el coeficiente de Bogoliubov $\beta_{\mathbf{k}}$ a partir del cual se calcula el número de pares de partículas producidos. Teniendo en cuenta la aproximación WKB, (3.21) presenta soluciones de la forma:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2W_k}}\exp\left(-i\int^\eta W_k(\eta')d\eta'\right) \quad (3.47)$$

donde $W_k(\eta) = W_k^{(0)}(\eta) = \Omega_k(\eta)$ si se considera orden 0 en la aproximación WKB. Se calcula la integral de $\Omega_k(\eta)$:

$$\int^\eta W_k(\eta') d\eta' = \int^\eta \Omega_k(\eta') d\eta' = \sqrt{k^2 \eta^2 + M^2} - M \log \left(\frac{M}{k\eta} + \sqrt{1 + \frac{M^2}{k^2 \eta^2}} \right) \quad (3.48)$$

En el caso asintótico $\eta \rightarrow \infty$, el valor de la integral anterior es $k\eta$ y se puede definir un vacío adiabático en el que $f_k(\eta)$ toma la forma:

$$f_k(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2k}} \exp(-ik\eta) \quad (3.49)$$

Utilizando la expresión asintótica de $H_\nu^{(2)}(k\eta)$ para $\eta \rightarrow \pm\infty$ (ver anexo B.2) y considerando el caso en el que la ecuación (3.18) es invariante conforme ($m = 0$, $\xi = 1/6$), se tiene que la solución exacta (3.45) se puede expresar en los casos asintóticos $\eta \rightarrow \pm\infty$ de la siguiente manera:

$$f_k(\eta) \simeq \frac{1}{2}(\pi\eta)^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} e^{-ik\eta} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \exp(-ik\eta) \quad (3.50)$$

Así, se tiene que en este caso particular con simetría conforme la solución exacta (3.45) coincide con la solución (3.50) obtenida mediante la aproximación WKB en los casos asintóticos $\eta \rightarrow \pm\infty$. De esta forma, no hay mezcla entre los modos de frecuencia positiva y frecuencia negativa y, por tanto, el coeficiente de Bogoliubov $\beta_{\mathbf{k}}$ es nulo y no se producen partículas.

3.3. Interpretación de los resultados

A la vista de los resultados obtenidos, de acuerdo con la expresión (3.32), el número medio de pares creados $N_{\mathbf{k}}$ en un modo \mathbf{k} presenta un decaimiento de tipo exponencial con la masa m . Además, otro aspecto relevante es que el resultado es independiente del modo \mathbf{k} . De acuerdo con esta expresión, la producción de partículas estará muy suprimida para valores grandes de la masa. En el límite $m \rightarrow \infty$, $N_{\mathbf{k}}$ se anula, lo que significa que no se pueden generar partículas de masa infinita, ya que en ese caso se requeriría que el campo gravitatorio proporcionara una energía infinita. Respecto al número total de partículas creadas, que se ha obtenido sumando $N_{\mathbf{k}}$ para todos los modos \mathbf{k} , el resultado final coincide con $N_{\mathbf{k}}$ reescalado con la constante $4H^4/\pi^2$ y el volumen cuadridimensional V_4 .

Por su parte, la probabilidad $|\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2$ de que no se cree ninguna partícula en ningún modo presenta un decaimiento de tipo exponencial con el ritmo de creación de partículas Γ . Este disminuye conforme aumenta el valor de la constante M dada por (3.23), haciéndose nulo en el límite $M \rightarrow \infty$ y siendo máximo para $M = 0$, caso en el que vale:

$$\Gamma = \frac{4H^4}{\pi^2} \log 2 \quad (3.51)$$

En el caso particular en el que $m \gg H$, la constante M es muy grande y se tiene que el ritmo de creación de partículas decae de forma exponencial con M :

$$\log[1 + \exp(-2\pi M)] \simeq \exp(-2\pi M) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \simeq \frac{4H^4}{\pi^2} \exp(-2\pi M) \quad (3.52)$$

Finalmente, respecto al caso en el que el campo se encuentra en un cierto instante en el vacío conforme, se ha obtenido que no hay producción de partículas. Esto concuerda con el

resultado obtenido por L. Parker en 1968 [25], basado en el hecho de que un campo que satisface una ecuación que presenta invariancia conforme en un espacio-tiempo conforme respecto al de Minkowski y que se encuentra en un cierto instante de tiempo en el vacío conforme, permanecerá en este vacío durante todo el tiempo y no habrá producción de partículas.

4. Efecto Casimir dinámico

En esta sección se describe de forma teórica el efecto Casimir dinámico. Se pretende ver que, además de la producción de partículas en presencia de campos de fondo electromagnéticos o gravitatorios, también puede existir una producción de partículas relacionada con las fluctuaciones del vacío cuántico como respuesta a la rápida variación de la geometría de un objeto, o más específicamente, de la posición de algunas de sus fronteras. Para la descripción teórica que se va a realizar, se aplica un modelo que caracteriza superficies estáticas a través de propiedades materiales dependientes del tiempo [26, 27]. Este modelo toma como base el enfoque perturbativo de Ford-Vilenkin [28], y además hace uso de la transformación de Bogoliubov descrita en la sección 2.2. Se calculan magnitudes como la distribución espectral de partículas creadas, el número total de partículas creadas y el ritmo de producción de partículas.

Se considera un campo escalar $\phi(t, x)$ sin masa que satisface las condiciones de contorno de Robin impuestas en un espejo estático en $1 + 1$ dimensiones. Las condiciones de contorno de Robin para el campo ϕ se definen como:

$$\phi|_{\text{frontera}} = \gamma_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\text{frontera}} \quad (4.1)$$

γ_0 es una constante que se denomina parámetro de Robin independiente del tiempo y que, a la vista de esta expresión, tiene dimensiones de longitud. Este parámetro nos proporciona un rango continuo de condiciones de contorno que va desde las condiciones de contorno de Dirichlet ($\gamma_0 \rightarrow 0$) hasta las de Neumann ($\gamma_0 \rightarrow \infty$). Si en su lugar se considera un parámetro de Robin dependiente del tiempo $\gamma(t)$, se obtiene un modelo que permite simular superficies en movimiento [26, 27]. Así, las condiciones de contorno de Robin dependientes del tiempo, si se imponen en $x = 0$, se expresan como:

$$\phi(t, 0) = \gamma(t) \left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.2)$$

El enfoque perturbativo de Ford-Vilenkin consiste en suponer que la dependencia temporal de $\gamma(t)$ se debe a pequeñas desviaciones temporales $\delta\gamma(t)$ respecto de una constante positiva γ_0 [28]:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \delta\gamma(t), \quad \text{máx} |\delta\gamma(t)| \ll \gamma_0 \quad (\gamma_0 > 0) \quad (4.3)$$

$\delta\gamma(t)$ es una función de t que se anula para $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow +\infty$ y que se supone conocida. Asimismo, el enfoque perturbativo que se ha aplicado a $\gamma(t)$ puede trasladarse al campo $\phi(t, x)$, de modo que se tiene:

$$\phi(t, x) = \phi_0(t, x) + \delta\phi(t, x) \quad (4.4)$$

donde ϕ_0 satisface la ecuación de Klein-Gordon, $\partial^2 \phi_0 = 0$, y las condiciones de contorno de Robin independientes del tiempo, $\phi(t, 0) = \gamma_0 [\partial \phi_0(t, x) / \partial x]_{x=0}$. La transformada de Fourier $\Phi_0(\omega, x)$ del campo $\phi_0(t, x)$ en la región $x > 0$ está dada por:

$$\Phi_0(\omega, x) = \sqrt{\frac{4\pi}{|\omega|(1 + \gamma_0^2 \omega^2)}} [\sin(\omega x) + \gamma_0 \omega \cos(\omega x)] [\Theta(\omega) a(\omega) - \Theta(-\omega) a^\dagger(-\omega)] \quad (4.5)$$

El operador de destrucción del estado final, $a_{\text{out}}(\omega)$, está relacionado con los operadores de creación y destrucción del estado inicial, $a_{\text{in}}^\dagger(\omega)$, a través de la siguiente expresión, que tiene la forma de una transformación de Bogoliubov (para ver el cálculo detallado, se puede consultar el anexo F):

$$a_{\text{out}}(\omega) = a_{\text{in}}(\omega) - 2i\sqrt{\frac{\omega}{1+\gamma_0^2\omega^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{1+\gamma_0^2\omega'^2}} [\Theta(\omega')a_{\text{in}}(\omega') - \Theta(-\omega')a_{\text{in}}^\dagger(-\omega')] \delta\Gamma(\omega - \omega') \quad (4.6)$$

donde $\delta\Gamma(\omega)$ se define como la transformada de Fourier de $\delta\gamma(t)$. Como $\delta\gamma(t)$ se supone conocida, $\delta\Gamma(\omega)$ también es una función conocida. Si se toma el hermítico conjugado de esta expresión, se tiene una relación similar para el operador de creación del estado final, $a_{\text{out}}^\dagger(\omega)$.

Esto nos permite calcular la distribución espectral de las partículas creadas, que es el número de partículas creadas con frecuencia entre ω y $\omega + d\omega$ por unidad de frecuencia. Para ello, se toma el valor medio del operador número en el estado $|0_{\text{in}}\rangle$, dado por $\hat{N} = a^\dagger a$, en el que se toman los operadores de creación y destrucción del estado final, $a_{\text{out}}^\dagger(\omega)$ y $a_{\text{out}}(\omega)$. Hay que tener en cuenta que, a la vista de (4.6), el estado $|0_{\text{in}}\rangle$ es un estado vacío solo respecto de los operadores del estado inicial, pero no respecto de los del estado final:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle 0_{\text{in}} | a_{\text{out}}^\dagger(\omega) a_{\text{out}}(\omega) | 0_{\text{in}} \rangle d\omega \quad (4.7)$$

Sustituyendo el valor de $a_{\text{out}}^\dagger(\omega)$ y $a_{\text{out}}(\omega)$ de acuerdo con la ecuación (4.6), se obtiene la expresión general para la distribución espectral de partículas creadas:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\omega}{1+\gamma_0^2\omega^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\omega'}{1+\gamma_0^2\omega'^2} |\delta\Gamma(\omega - \omega')|^2 \Theta(\omega') \quad (4.8)$$

donde se ha utilizado la regla de conmutación para los operadores de creación y destrucción, $[a_{\text{in}}(\omega), a_{\text{in}}^\dagger(\omega')] = 2\pi\delta(\omega - \omega')$, y se ha aplicado que $a_{\text{in}}(\omega) |0_{\text{in}}\rangle = 0$. A continuación, puede calcularse la distribución espectral de partículas creadas para el caso particular en el que la parte dependiente del tiempo del parámetro de Robin, $\delta\gamma(t)$, muestra un comportamiento oscilatorio con una frecuencia dominante ω_0 :

$$\delta\gamma(t) = \epsilon_0 \cos(\omega_0 t) e^{-|t|/\tau} \quad (4.9)$$

con $\omega_0\tau \gg 1$. La transformada de Fourier de $\delta\gamma(t)$, dada por $\delta\Gamma(\omega)$, puede aproximarse por dos deltas de Dirac en el caso en el que $\omega_0\tau \gg 1$:

$$|\delta\Gamma(\omega)|^2 \simeq \frac{\pi}{2} \epsilon_0^2 \tau [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (4.10)$$

Así, la distribución espectral de partículas producidas que se obtiene para este caso particular es:

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \left(\frac{\epsilon_0^2 \tau}{2\pi} \right) \frac{\omega(\omega_0 - \omega)}{(1+\gamma_0^2\omega^2)[1+\gamma_0^2(\omega_0 - \omega)^2]} \Theta(\omega_0 - \omega) \quad (4.11)$$

Este resultado concuerda con el obtenido por los autores que se han tomado como referencia en el cálculo realizado [26, 27]. En la figura 1 se muestra una representación gráfica de la distribución espectral de partículas producidas en función del cociente ω/ω_0 para distintos valores del parámetro γ_0 . De acuerdo con esta gráfica $dN(\omega)/d\omega$ se anula para $\omega > \omega_0$, por lo que no se crean partículas para frecuencias superiores a ω_0 . Además, el espectro es invariante

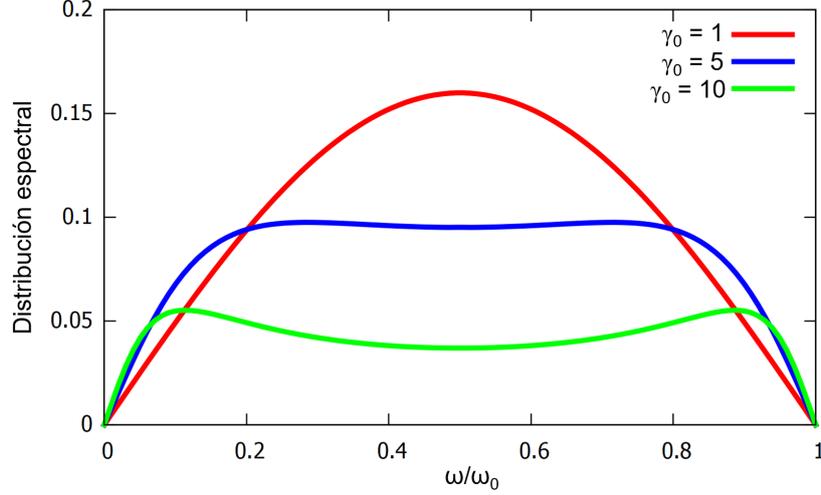


Figura 1: Distribución espectral de las partículas creadas, $[(2\pi)/(\epsilon_0^2\tau)]dN/d\omega$, como función de ω/ω_0 para tres valores diferentes de γ_0 , tomando $\omega_0 = 1$. La curva roja corresponde a $\gamma_0 = 1$. La curva azul corresponde a $\gamma_0 = 5$ y se representa $20[(2\pi)/(\epsilon_0^2\tau)]dN/d\omega$ para comparar fácilmente los espectros. La curva verde corresponde a $\gamma_0 = 10$ y se representa $100[(2\pi)/(\epsilon_0^2\tau)]dN/d\omega$.

bajo la sustitución $\omega \rightarrow \omega_0 - \omega$, teniéndose simetría de reflexión en torno a $\omega/\omega_0 = 0,5$, lo que significa que las partículas se crean por pares, con frecuencias ω y $\omega_0 - \omega$. Otro aspecto importante es que si $\epsilon_0 \rightarrow 0$, caso para el que se tienen condiciones de contorno de Robin con un parámetro independiente del tiempo γ_0 , el espectro de partículas creadas se hace cero. Este resultado sugiere que solo hay producción de partículas si las condiciones de contorno son dependientes del tiempo. El espectro de partículas producidas también se anula en el límite $\gamma_0 \rightarrow \infty$, correspondiente a condiciones de contorno de Neumann.

Para concluir esta parte de descripción teórica, puede calcularse también el número total de partículas creadas. Para ello, simplemente debe integrarse en frecuencia la distribución espectral ya calculada:

$$N = \int_0^\infty \frac{dN(\omega)}{d\omega} d\omega = \left(\frac{\epsilon_0^2\tau}{2\pi}\right) \int_0^\infty \frac{\omega(\omega_0 - \omega)\Theta(\omega_0 - \omega)}{(1 + \gamma_0^2\omega^2)[1 + \gamma_0^2(\omega_0 - \omega)^2]} d\omega \quad (4.12)$$

El resultado que se obtiene es:

$$N = \left(\frac{\epsilon_0^2\omega_0^3\tau}{2\pi}\right) \frac{(2 + \gamma_0^2\omega_0^2) \log(1 + \gamma_0^2\omega_0^2) - 2\gamma_0\omega_0 \arctan(\gamma_0\omega_0)}{\gamma_0^4\omega_0^4(4 + \gamma_0^2\omega_0^2)} \quad (4.13)$$

En consecuencia, el ritmo de producción de partículas o número total de partículas producidas por unidad de tiempo, $R = N/\tau$, es:

$$R = \left(\frac{\epsilon_0^2\omega_0^3}{2\pi}\right) \frac{(2 + \gamma_0^2\omega_0^2) \log(1 + \gamma_0^2\omega_0^2) - 2\gamma_0\omega_0 \arctan(\gamma_0\omega_0)}{\gamma_0^4\omega_0^4(4 + \gamma_0^2\omega_0^2)} \quad (4.14)$$

Puede estudiarse esta expresión en los casos en los que $\gamma_0\omega_0$ es muy grande o muy pequeño:

- Si $\gamma_0\omega_0 \ll 1$, entonces:

$$R \simeq \left(\frac{\epsilon_0^2\omega_0^3}{12\pi}\right) \quad (4.15)$$

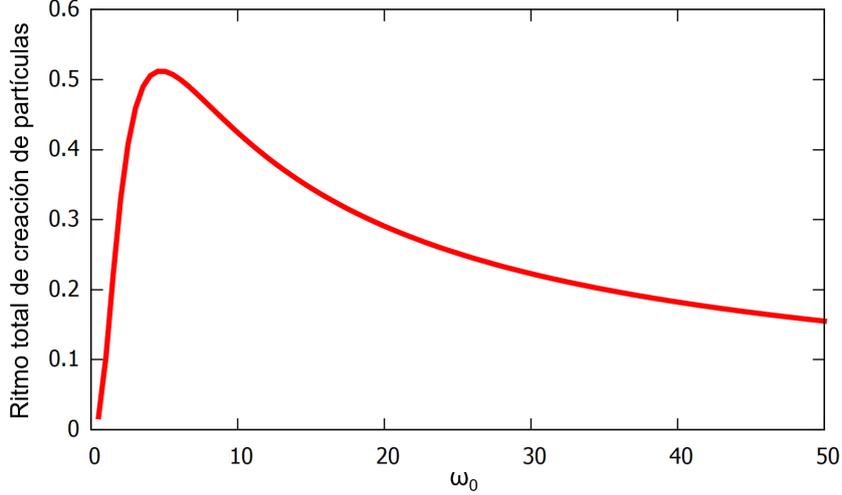


Figura 2: Representación de $(2\pi/\epsilon_0^2)R$ frente a ω_0 , tomando $\gamma_0 = 1$.

- Si $\gamma_0\omega_0 \gg 1$, se tiene:

$$R \simeq \left(\frac{\epsilon_0^2 \omega_0^3}{2\pi} \right) \frac{2 \ln(\gamma_0 \omega_0)}{(\gamma_0 \omega_0)^4} \quad (4.16)$$

En la figura 2 se representa el ritmo total de creación de partículas R frente a ω_0 . Se observa que R empieza creciendo con ω_0 hasta alcanzar un máximo para un cierto valor de ω_0 . Para valores de ω_0 superiores, R decrece hasta hacerse cero cuando $\omega_0 \rightarrow \infty$.

5. Conclusiones

A lo largo del trabajo, en el marco de Teoría Cuántica de Campos, se han descrito diferentes procesos de creación de partículas, ya sea en presencia de campos de fondo electromagnéticos (efecto Schwinger), gravitatorios (producción cosmológica de partículas en un universo de De Sitter) o por variación rápida en el tiempo de las condiciones de contorno (efecto Casimir dinámico).

En el efecto Schwinger, se ha obtenido que se producen pares partícula-antipartícula cuando se aplica un campo eléctrico externo. Sin campo eléctrico no hay producción de partículas. Además, esta solo resulta apreciable cuando el valor del campo eléctrico está por encima de un valor crítico. Este valor suele ser muy grande y ello dificulta la observación experimental de este efecto. Respecto al caso cosmológico, la presencia de un campo gravitatorio ocasiona la producción de pares de partículas en un espacio-tiempo de De Sitter. Un caso especial es aquel en el que se toma el límite en el que se tiene invariancia conforme ($m = 0, \xi = 1/6$) y el campo se encuentra en un cierto instante de tiempo en el vacío conforme. Como el espacio de De Sitter se relaciona con el espacio de Minkowski a través de una transformación conforme, se obtiene que no hay producción de partículas, lo que concuerda con el importante resultado obtenido previamente por L. Parker [25]. Tanto en el caso del efecto Schwinger como en el de un universo de De Sitter, se ha obtenido que el número de pares de partículas producidas muestra un decaimiento exponencial con su masa. Si se analiza el número de pares producidos en un cierto modo \mathbf{k} , en el caso del efecto Schwinger se ha obtenido que este está muy suprimido para valores grandes de \mathbf{k} , presentando un decaimiento de tipo exponencial. En cambio, en la producción de partículas

en un universo de De Sitter, este es independiente de \mathbf{k} .

En el caso del efecto Casimir dinámico, las condiciones de contorno dependientes del tiempo permiten modelizar una situación análoga a una superficie en movimiento. El resultado obtenido es que no hay creación de partículas para frecuencias superiores a ω_0 y que el espectro es simétrico respecto de $\omega_0/2$, lo que significa que las partículas se crean por pares, con frecuencias ω y $\omega_0 - \omega$. Además, también se obtiene que cuando las condiciones de contorno de Robin se hacen independientes del tiempo ($\epsilon_0 \rightarrow 0$) no hay creación de partículas. Esto sugiere que es la variación en el tiempo de las condiciones de contorno lo que causa la producción de partículas. El efecto Casimir dinámico se consiguió observar experimentalmente por primera vez en el año 2011 utilizando un montaje que constaba de una línea de transmisión y un SQUID [29]. Los resultados experimentales concuerdan con la predicción teórica de que se trata de un proceso de dos fotones como consecuencia de la simetría del espectro.

Los tres fenómenos analizados poseen la característica común de que la producción de partículas se origina por las fluctuaciones del vacío cuántico, que hacen que este sea inestable. Así, se parte de un estado vacío inicial en el que no hay ninguna partícula. El vacío físico del estado final, en general, no es el mismo que el del estado inicial. Este es el motivo que en el método de la transformación de Bogoliubov lleva a la necesidad de relacionar los operadores de creación y destrucción en estos dos instantes de tiempo diferentes a través de una transformación lineal. De acuerdo con los resultados obtenidos, solo se producen partículas en los casos en los que el vacío del estado inicial es diferente del vacío del estado final. Si ambos coinciden, entonces no se producen partículas. Sin embargo, el efecto Casimir dinámico presenta una importante diferencia respecto al efecto Schwinger o la producción de partículas en un universo de De Sitter. Esta se basa en el hecho de que, en el efecto Casimir dinámico, la producción de partículas no se origina en presencia de un campo de fondo, sino que es la consecuencia de la rápida variación en el tiempo de las condiciones de contorno. En cambio, en el efecto Schwinger o en el universo de De Sitter, la producción de partículas se debe a la presencia de los campos de fondo eléctrico y gravitatorio, respectivamente, que suministran la energía necesaria para la creación de partículas.

También pueden compararse entre sí los dos métodos aplicados para analizar los fenómenos de producción de partículas de este trabajo. Mientras en el método de la transformación de Bogoliubov ha sido necesario calcular las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales tipo oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, para así poder relacionarlas con las soluciones obtenidas con la aproximación WKB en el estado inicial y el estado final, en el método CWKB no se necesita conocer la solución exacta, pues partiendo de las soluciones tipo WKB se puede calcular el coeficiente de reflexión y, a partir de este, se calculan las demás magnitudes relevantes.

Finalmente, se puede afirmar que con la descripción de estos tres fenómenos de producción de partículas se pone de manifiesto la relevancia de las fluctuaciones del vacío cuántico. Estos resultados teóricos, además de poseer una enorme relevancia en diferentes ramas de la Física Teórica como la electrodinámica, la cosmología o la física de partículas, también entrañan un estímulo para el desarrollo posterior de experimentos que posibiliten la observación de este tipo de fenómenos.

Referencias

- [1] W. Heisenberg and H. Euler. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. *Zeitschrift für Physik* **98**, 11-12, 714-732 (1936).
- [2] F. Sauter. On the behavior of an electron in a homogeneous electric field in Dirac's relativistic theory. *Zeitschrift für Physik* **69**, 742 (1931).
- [3] J. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.* **82**, 5, 664 (1951).
- [4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. Quantum fields in curved space. Cambridge University Press (1984).
- [5] V. V. Dodonov. Current status of the dynamical Casimir effect. *Physica Scripta* **82**, 3, 038105 (2010).
- [6] G. Moore. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. *J. Math. Phys.* **11**, 2679-2691 (1970).
- [7] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Front. Phys.* **60**, 61-63 (1948).
- [8] J. Martin. Inflationary perturbations: the cosmological Schwinger effect. *Inflationary Cosmology*, 193-241 (2008).
- [9] S. Hashiba, Y. Yamada and J. I. Yokoyama. Particle production induced by vacuum decay in real time dynamics. *Phys. Rev. D* **103**, 4, 045006 (2021).
- [10] R. Dabrowski and G. V. Dunne. Superadiabatic particle number in Schwinger and de Sitter particle production. *Phys. Rev. D* **90**, 2, 025021.
- [11] S. Biswas, A. Shaw and B. Modak. Schwinger's result on particle production from complex paths WKB approximation. *International Journal of Modern Physics A* **15**, 23, 3717-3731 (2000).
- [12] S. Biswas, J. Guha and N. G. Sarkar. Particle production in de Sitter space. *Classical and Quantum Gravity* **12**, 7, 1591 (1995).
- [13] G. Wentzel. Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik* **38**, 6, 518-529 (1926).
- [14] H. A. Kramers. Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. *Zeitschrift für Physik* **39**, 10, 828-840 (1926).
- [15] R. F. Curtain and A. J. Pritchard. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. Academic Press (1977).
- [16] M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press (2005).
- [17] G. Stefanucci and R. Van Leeuwen. *Nonequilibrium Many Body Theory of Quantum Systems: a Modern Introduction*. Cambridge University Press (2013).

- [18] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media (2013).
- [19] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press (2014).
- [20] M. Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press (2013).
- [21] A. O. Barut and I. H. Duru. Pair production in an electric field in a time-dependent gauge. *Physical Review D* **41**, 4, 1312 (1990).
- [22] A. Zee. *Einstein gravity in a nutshell*. Princeton University Press (2013).
- [23] J. B. Griffiths and J. Podolsky. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press (2009).
- [24] E. Mottola. Particle creation in de Sitter space. *Phys. Rev. D* **31**, 4, 754 (1985).
- [25] L. Parker. Particle creation in expanding universes. *Phys. Rev. Lett.* **21**, 8, 562 (1968).
- [26] H. O. Silva and C. Farina. Simple model for the dynamical Casimir effect for a static mirror with time-dependent properties. *Phys. Rev. D* **84**, 4, 045003 (2011).
- [27] C. Farina, H. O. Silva, A. L. Rego and T. D. Alves. Time-dependent Robin boundary conditions in the dynamical Casimir effect. *International Journal of Modern Physics: Conference Series* **14**, 306-315. World Scientific Publishing Company (2012).
- [28] L. H. Ford and A. Vilenkin. Quantum radiation by moving mirrors. *Phys. Rev. D* **25**, 2569 (1982).
- [29] C. M. Wilson *et al.* Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit. *Nature* **479**, 7373, 376-379 (2011).
- [30] F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press (2010).
- [31] N. M. Temme. Numerical and asymptotic aspects of parabolic cylinder functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **121**, 1-2, 221-246.
- [32] B. Mintz, C. Farina, P. A. Maia Nieto and R.B. Rodrigues. Particle creation by a moving boundary with Robin boundary condition. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39**, 36, 11325 (2006).

TRABAJO FIN DE MÁSTER

PROCESOS DE CREACIÓN DE PARTÍCULAS EN
CAMPOS DE FONDO ELECTROMAGNÉTICOS Y
GRAVITATORIOS (ANEXOS)

MÁSTER EN FÍSICA Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS

Autor:

Andrés Miguel Cuartero

Director:

Manuel Asorey Carballeira



Universidad Zaragoza

Departamento de Física Teórica

Facultad de Ciencias

Curso 2020/2021

A. Efecto Schwinger en un gauge dependiente del espacio

Los cálculos que se han presentado en el cuerpo del trabajo para el efecto Schwinger se han realizado considerando un gauge dependiente de la coordenada temporal t , de la forma $A'_\mu = (0, 0, 0, -E_0 t)$, que equivale a un campo eléctrico \mathbf{E} constante de módulo E_0 en el sentido positivo del eje Z , $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$. Sin embargo, podemos plantearnos qué ocurre en el caso en el que se considera un gauge en el que el potencial electromagnético depende de una coordenada espacial [11]. Así, en este anexo se va a presentar el cálculo realizado en el cuerpo del trabajo para el efecto Schwinger, pero aplicado al caso en el que el potencial electromagnético A_μ depende de la coordenada espacial z :

$$A_\mu = (E_0 z, 0, 0, 0) \quad (\text{A.1})$$

Los potenciales A_μ y A'_μ se pueden relacionar por medio de una transformación gauge:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (\text{A.2})$$

donde Λ es una función dada por:

$$\Lambda = -E_0 z t \quad (\text{A.3})$$

Igual que se ha hecho cuando se ha estudiado el efecto Schwinger en el caso de un gauge en el que el potencial electromagnético depende de la coordenada temporal, se considera un campo escalar complejo ϕ de masa m . Este verifica la ecuación de Klein-Gordon con interacción electromagnética (2.6):

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ denota el operador derivada covariante. Puede expresarse el campo ϕ en términos de su transformada de Fourier:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f_k(z) e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)} d\omega dk_x dk_y \quad (\text{A.5})$$

Se sustituye ϕ por su transformada de Fourier en la ecuación (A.4):

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f_k(z) e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)} d\omega dk_x dk_y \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Se desarrolla el miembro de la izquierda en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} & \int d\omega dk_x dk_y (\partial_\mu \partial^\mu + iq\partial_\mu A^\mu + iqA_\mu \partial^\mu - q^2 A_\mu A^\mu + m^2) f_k(z) e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)} = 0 \\ \Rightarrow & \int d\omega dk_x dk_y \left[-\omega^2 + (k_x^2 + k_y^2) - \frac{d^2}{dz^2} + iq\partial_0 A^0 + qA_0 \omega - q^2 A_0^2 + m^2 \right] f_k(z) e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)} = 0 \end{aligned}$$

Esta integral se anula si el integrando es nulo, de forma que se tiene:

$$\frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} + [(\omega - qE_0 z)^2 - k_x^2 - k_y^2 - m^2] f_k(z) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Se ha obtenido así una ecuación diferencial de segundo orden que tiene la forma de la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia Ω_k dependiente de la coordenada z :

$$\frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} + \Omega_k^2(z) f_k(z) = 0 \quad (\text{A.8})$$

donde $\Omega_k(z)$ está dada por:

$$\Omega_k^2(z) = (\omega - qE_0z)^2 - k_x^2 - k_y^2 - m^2 \quad (\text{A.9})$$

Se trata así de una ecuación que tiene forma similar, aunque no igual, a (2.9). Para resolverla, se define:

$$\rho = \sqrt{qE_0}z - \frac{\omega}{\sqrt{qE_0}}, \quad \lambda = \frac{k_{\perp}^2 + m^2}{qE_0} \quad (\text{A.10})$$

donde $k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$. Reexpresando la ecuación (A.8) en función de ρ y λ , se obtiene:

$$\frac{d^2 f_k(\rho)}{d\rho^2} + (\rho^2 - \lambda)f_k(\rho) = 0 \quad (\text{A.11})$$

En este caso, se va a aplicar el método CWKB descrito en la sección 2.3. Los puntos de retorno ρ_1 y ρ_2 , que son aquellos que verifican la ecuación $\Omega(z) = 0$, están dados por:

$$\rho_1 = +\sqrt{\lambda}, \quad \rho_2 = -\sqrt{\lambda} \quad (\text{A.12})$$

El coeficiente de reflexión se puede calcular a partir de:

$$R = \frac{\exp(2iS(\rho_1, \rho_0))}{1 + \exp(2iS(\rho_1, \rho_2))} \quad (\text{A.13})$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión (2.74) y ρ_0 denota el valor inicial de ρ . $S(\rho, \rho_0)$ está dado por:

$$\begin{aligned} S(\rho, \rho_0) = \int_{\rho_0}^{\rho} (\rho^2 - \lambda)^{1/2} d\rho = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - \lambda}}{2} - \frac{\lambda}{2} \log(\rho + \sqrt{\rho^2 - \lambda}) \\ - \frac{\rho_0\sqrt{\rho_0^2 - \lambda}}{2} + \frac{\lambda}{2} \log\left(\rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 - \lambda}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De esta forma, se tiene:

$$S(\rho_1, \rho_2) = -i\frac{\lambda\pi}{2} \quad (\text{A.15})$$

$$S(\rho_1, \rho_0) = -i\frac{\lambda\pi}{4} + \delta(\rho_0) \quad (\text{A.16})$$

donde $\delta(\rho_0)$ da lugar a un término de fase en el coeficiente de reflexión que no influye a la hora de calcular el módulo del coeficiente de reflexión. Así, el coeficiente de reflexión está dado por:

$$R = \frac{e^{\lambda\pi/2}}{1 + e^{\lambda\pi}} e^{2i\delta(\rho_0)} \quad (\text{A.17})$$

y su módulo es:

$$|R| = \frac{e^{-\lambda\pi/2}}{1 + e^{-\lambda\pi}} \quad (\text{A.18})$$

Así, el módulo del coeficiente de reflexión que se ha obtenido aquí coincide con el que se obtuvo para un gauge en el que el potencial electromagnético es dependiente del tiempo, dado por la expresión (2.78). En conclusión, las expresiones calculadas en ese caso para el número de pares creados y la probabilidad de que no se cree ninguna partícula también serán válidas aquí, obteniéndose el mismo resultado.

B. Funciones especiales

En este anexo se describen las funciones especiales que aparecen en los cálculos de este trabajo. Asimismo, se comentan algunas de sus propiedades y se muestran sus expresiones en los casos asintóticos.

B.1. Funciones cilíndricas parabólicas

Las funciones cilíndricas parabólicas son soluciones de la ecuación diferencial [30]:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + (az^2 + bz + c)f = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde z es una variable compleja. Esta ecuación puede convertirse en las tres formas estándar dadas por:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \left(\frac{1}{4}z^2 + a\right)f = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{1}{4}z^2 - a\right)f = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right)f = 0 \quad (\text{B.4})$$

La ecuación (B.2) tiene un par de soluciones independientes dado por las funciones $U(a, z)$ y $V(a, z)$; (B.3) tiene como soluciones las funciones $W(a, \pm x)$, donde x denota una variable real; y (B.4) tiene como solución las funciones $D_\nu(\pm z)$. $U(a, z)$, $V(a, z)$ y $W(a, z)$ son las llamadas *funciones cilíndricas parabólicas de Weber*. $D_\nu(z)$ es una forma alternativa de denotar:

$$D_\nu(z) = U\left(-\frac{1}{2} - \nu, z\right) \quad (\text{B.5})$$

Las expresiones que relacionan $U(a, -z)$ y $V(a, -z)$ con $U(a, z)$ y $V(a, z)$ son, respectivamente:

$$U(a, -z) = -\sin(\pi a)U(a, z) + \frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{2} + a)}V(a, z) \quad (\text{B.6})$$

$$V(a, -z) = \frac{\cos(\pi a)}{\Gamma(\frac{1}{2} - a)}U(a, z) + \sin(\pi a)V(a, z) \quad (\text{B.7})$$

El comportamiento asintótico de las funciones $U(a, z)$ y $V(a, z)$ para valores grandes y positivos de z y $z \gg |a|$ está dado por [31]:

$$U(a, z) \simeq e^{-(1/4)z^2} z^{-a-(1/2)} [1 + \mathcal{O}(z^{-2})] \quad (\text{B.8})$$

$$V(a, z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{(1/4)z^2} z^{a-(1/2)} [1 + \mathcal{O}(z^{-2})] \quad (\text{B.9})$$

B.2. Funciones de Hankel

Se tienen funciones de Hankel de primer tipo $H_\nu^{(1)}$ y de segundo tipo $H_\nu^{(2)}$, que se definen como:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad (\text{B.10})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \quad (\text{B.11})$$

donde $J_\nu(z)$ y $Y_\nu(z)$ denotan las funciones de Bessel de primer tipo y de segundo tipo, respectivamente, z es un número complejo y ν es un parámetro real o complejo denominado orden. $J_\nu(z)$ y $Y_\nu(z)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel, que es una ecuación diferencial de segundo orden que tiene la forma:

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - \nu^2)f = 0 \quad (\text{B.12})$$

Asimismo, las funciones de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$ constituyen también dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel, motivo por el que se conocen como funciones de Bessel de tercer tipo. $J_\alpha(z)$ se puede expresar en forma de desarrollo en serie en torno a $z = 0$ de la siguiente forma [30]:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k + \nu} \quad (\text{B.13})$$

donde Γ es la función gamma. $Y_\nu(z)$ se puede expresar como:

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{B.14})$$

Cuando $z \rightarrow \infty$, las funciones de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$ se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$H_\nu(z)^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \quad (\text{B.15})$$

$$H_\nu(z)^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \quad (\text{B.16})$$

C. Relación entre el vacío en los estados inicial y final en el efecto Schwinger

En este anexo se demuestra que si el vacío del estado final se construye de la forma dada por (2.62):

$$|\text{out}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}\right) |\text{in}\rangle \quad (\text{C.1})$$

entonces este es aniquilado por los operadores $a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ y $b_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$, de acuerdo con (2.34), y además está normalizado.

Comprobamos que se verifica (2.34):

$$\alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} |\text{out}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|} \exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{p}}^*}{\alpha_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger}\right) |\text{in}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{p}}^*/\alpha_{\mathbf{p}})^n}{n!} (b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{k}}^*/\alpha_{\mathbf{k}})^n}{n!} (b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{k}}^*/\alpha_{\mathbf{k}})^n}{n!} (b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n [(a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + n(a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^{n-1}] = \\
&= -\beta_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{k}}^*/\alpha_{\mathbf{k}})^{n-1}}{(n-1)!} (b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^{n-1} (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^{n-1} |\text{in}\rangle = -\beta_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} |\text{out}\rangle \\
&\Rightarrow (\alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}) |\text{out}\rangle = a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} |\text{out}\rangle = 0
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el desarrollo en serie de Taylor de la exponencial, la transformación de Bogoliubov (2.36) y se ha tenido en cuenta que el único momento que contribuye es $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, ya que si $\mathbf{p} \neq \mathbf{k}$, $a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ y $a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger}$ conmutan y, por tanto, $a_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ puede desplazarse a la derecha para aniquilar el estado $|\text{in}\rangle$. Además, se ha aplicado la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^\dagger)^n &= a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-1} + (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-1} = a_{\mathbf{k}}^\dagger (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-2} + (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-2}) + (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-1} = \\
&= (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^2 a_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-2} + 2(a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-1} = (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^n a_{\mathbf{k}} + n(a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n-1}
\end{aligned}$$

De forma análoga, se obtiene que se verifica $b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} |\text{out}\rangle = 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} |\text{out}\rangle &= \alpha_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|} \exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{p}}^*}{\alpha_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger}\right) |\text{in}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{p}}^*/\alpha_{\mathbf{p}})^n}{n!} (b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle = \\
&= b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{k}}^*/\alpha_{\mathbf{k}})^n}{n!} (b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{k}}^*/\alpha_{\mathbf{k}})^n}{n!} [(b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + n(b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^{n-1}] (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle = \\
&= -\beta_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta_{\mathbf{k}}^*/\alpha_{\mathbf{k}})^{n-1}}{(n-1)!} (b_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^{n-1} (a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger})^{n-1} |\text{in}\rangle = -\beta_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} |\text{out}\rangle \\
&\Rightarrow (\alpha_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}) |\text{out}\rangle = b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} |\text{out}\rangle = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el estado (2.62) cumple (2.34). Se comprueba ahora que es también un estado normalizado:

$$\begin{aligned}
\langle \text{out} | \text{out} \rangle &= \left(\prod_{\mathbf{q}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{q}}|} \langle \text{in} | \exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{q}}}{\alpha_{\mathbf{q}}^*} a_{\mathbf{q}}^{\text{in}} b_{\mathbf{q}}^{\text{in}}\right) \right) \left(\prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|} \exp\left(-\frac{\beta_{\mathbf{p}}^*}{\alpha_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger}\right) |\text{in}\rangle \right) = \\
&= \prod_{\mathbf{p}} \prod_{\mathbf{q}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}| |\alpha_{\mathbf{q}}|} \sum_{n,m} \frac{1}{n! m!} \left(-\frac{\beta_{\mathbf{q}}}{\alpha_{\mathbf{q}}^*}\right)^m \left(-\frac{\beta_{\mathbf{p}}^*}{\alpha_{\mathbf{p}}}\right)^n \langle \text{in} | (a_{\mathbf{q}}^{\text{in}})^m (b_{\mathbf{q}}^{\text{in}})^m (b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n | \text{in} \rangle
\end{aligned}$$

Las contribuciones no nulas son aquellas en las que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ y, además, el número de operadores de creación y de operadores de destrucción es el mismo ($n = m$). Así, se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \text{out} | \text{out} \rangle &= \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2}\right)^n \langle \text{in} | (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}})^n (b_{\mathbf{p}}^{\text{in}})^n (b_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n | \text{in} \rangle \\
\langle \text{out} | \text{out} \rangle &= \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2} \langle \text{in} | \text{in} \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2 - 1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2}\right)^n = \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2}\right)} = 1
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la expresión (2.37) y la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ y se ha tenido en cuenta que el estado $|\text{in}\rangle$ está normalizado: $\langle \text{in} | \text{in} \rangle = 1$. Además, se ha aplicado la siguiente propiedad:

$$(a_{\mathbf{p}}^{\text{in}})^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n |\text{in}\rangle = (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}})^{n-1} [(a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + n(a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^{n-1}] |\text{in}\rangle = (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}})^{n-1} n(a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^{n-1} |\text{in}\rangle = n! |\text{in}\rangle$$

Así, se tiene que el estado (2.62) verifica (2.34) y además está normalizado.

D. Relación entre el método de la transformación de Bogoliubov y el método CWKB

En este anexo se tiene como objetivo determinar la relación entre el método de la transformación de Bogoliubov descrito en la sección 2.2 y el método CWKB descrito en 2.3. En el primer caso, las cantidades relevantes para determinar la producción de partículas son los coeficientes de Bogoliubov $\alpha_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}}$, que caracterizan la transformación de Bogoliubov que relaciona los estados inicial y final. En el segundo caso, en el que la producción de partículas se estudia como un proceso de reflexión, la cantidad relevante es el coeficiente de reflexión R . Así, se pretende obtener la relación entre R y los coeficientes de Bogoliubov $\alpha_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}}$ [11].

Se parte de un estado inicial $|0_{\text{in}}\rangle$, correspondiente a $t \rightarrow -\infty$, que se trata de un estado vacío, en el que no hay ninguna partícula. Si se crea un par partícula-antipartícula, el estado que caracteriza esta situación es $b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} |0_{\text{out}}\rangle$, donde $|0_{\text{out}}\rangle$ denota el vacío físico de este nuevo estado y los operadores $b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}$ y $a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger}$ se deben a que se crea una antipartícula y una partícula, respectivamente. La probabilidad de que se forme un par partícula-antipartícula está dada por $|\langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} | 0_{\text{in}} \rangle|^2$. Recordamos la transformación de Bogoliubov que relaciona los operadores de creación y destrucción en los instantes inicial y final, dada por (2,36), que si se invierte se tiene:

$$b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = -\beta_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} + \alpha_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} \quad \Rightarrow \quad b_{\mathbf{k}}^{\text{out}} = \frac{1}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} \quad (\text{D.1})$$

Así, se procede a calcular $\langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} | 0_{\text{in}} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} | 0_{\text{in}} \rangle &= \langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} \left(\frac{1}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} \right) | 0_{\text{in}} \rangle = \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} \langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} | 0_{\text{in}} \rangle = \\ &= \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} \langle 0_{\text{out}} | (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger}) | 0_{\text{in}} \rangle = \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}^*} \langle 0_{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $b_{\mathbf{k}}^{\text{in}} | 0_{\text{in}} \rangle = 0$, la relación de conmutación $[a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}}, a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ y $\langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} = 0$. La probabilidad relativa $\omega_{\mathbf{k}}$ de que se produzca un par de partículas si no hay partículas presentes en el estado inicial es:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{|\langle 0_{\text{out}} | a_{\mathbf{k}'}^{\text{out}\dagger} b_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} | 0_{\text{in}} \rangle|^2}{|\langle 0_{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle|^2} = \left| \frac{\beta_{\mathbf{k}}}{\alpha_{\mathbf{k}}} \right|^2 \quad (\text{D.2})$$

Si se recuerda la expresión (2.84), que relaciona el coeficiente de reflexión R y la probabilidad relativa $\omega_{\mathbf{k}}$ de que se cree un par partícula-antipartícula, se tiene la siguiente relación entre $|R|$ y los módulos de los coeficientes de Bogoliubov, $|\alpha_{\mathbf{k}}|^2$ y $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$:

$$|R|^2 = \omega_{\mathbf{k}}(1 - \omega_{\mathbf{k}}) = \left| \frac{\beta_{\mathbf{k}}}{\alpha_{\mathbf{k}}} \right|^2 \frac{1}{|\alpha_{\mathbf{k}}|^2} \quad \Rightarrow \quad |R|^2 = \frac{|\beta_{\mathbf{k}}|^2}{(|\alpha_{\mathbf{k}}|^2)^2} \quad (\text{D.3})$$

Además, se ve que si en esta ecuación se introducen las expresiones determinadas para $|\alpha_{\mathbf{k}}|^2$ y $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ a través del método de la transformación de Bogoliubov en el caso del efecto Schwinger, dadas por (2.58), el valor de $|R|$ que se obtiene coincide con el determinado a través del método CWKB, dado por (2.78). Así:

$$|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 = 1 + e^{-\pi\lambda}, \quad |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = e^{-\pi\lambda} \quad \Rightarrow \quad |R|^2 = \frac{e^{-\pi\lambda}}{(1 + e^{-\pi\lambda})^2} \quad (\text{D.4})$$

De esta forma, se ha encontrado la relación entre el coeficiente de reflexión R y los coeficientes de Bogoliubov $\alpha_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}}$ y se puede concluir que, si bien el método de la transformación de Bogoliubov y el método CWKB son diferentes entre sí, se puede relacionar el uno con el otro.

E. Cálculo del coeficiente de reflexión en el sistema de coordenadas (3.12)

En este anexo se demuestra que si se considera la parametrización del espacio-tiempo de De Sitter dada por (3.12), se obtiene también el resultado (3.29). Teniendo en cuenta la expresión (3.26), el coeficiente de reflexión en este caso se calcula como:

$$R = \frac{\exp[2iS(\eta_{c,1}, \eta_0)]}{1 + \exp[2iS(\eta_{c,1}, \eta_{c,2})]} \quad (\text{E.1})$$

donde $S(\eta, \eta_0)$ es la siguiente integral:

$$S(\eta, \eta_0) = \int_{\eta_0}^{\eta} \Omega_k(\eta) d\eta \quad (\text{E.2})$$

y los puntos de retorno $\eta_{c,1}$ y $\eta_{c,2}$ en este caso están dados por:

$$\Omega_k(\eta_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \eta_{c,1} = -i \frac{M}{k}, \quad \sin \eta_{c,2} = i \frac{M}{k} \quad (\text{E.3})$$

En este caso, se tiene:

$$\Omega_k(\eta) = \sqrt{k^2 + \frac{1}{\sin^2 \eta} M^2} \quad (\text{E.4})$$

que puede reexpresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Omega_k(\eta) &= \sqrt{k^2 + \frac{1}{\sin^2 \eta} M^2} = \frac{M}{\sin \eta} \sqrt{1 + \frac{k^2}{M^2} \sin^2 \eta} = \frac{1}{[1 + (k^2/M^2) \sin^2 \eta]^{1/2}} \left(\frac{M}{\sin \eta} + \frac{k^2}{M} \sin \eta \right) = \\ &= M \frac{1}{\sin \eta [1 + (k^2/M^2) \sin^2 \eta]^{1/2}} + \frac{k^2}{M} \frac{\sin \eta}{[1 + (k^2/M^2) \sin^2 \eta]^{1/2}} \end{aligned}$$

De esta forma, las integrales que se tienen pueden dividirse en dos contribuciones:

$$I = \int \sqrt{k^2 + \frac{1}{\sin^2 \eta} M^2} d\eta = I_1 + I_2 \quad (\text{E.5})$$

donde I_1 e I_2 están dadas por:

$$I_1 = \int M \frac{1}{\sin \eta [1 + (k^2/M^2) \sin^2 \eta]^{1/2}} d\eta \quad (\text{E.6})$$

$$I_2 = \int \frac{k^2}{M} \frac{\sin \eta}{[1 + (k^2/M^2) \sin^2 \eta]^{1/2}} d\eta \quad (\text{E.7})$$

Las soluciones de estas integrales son:

$$I_1 = -M \log \left(\frac{\cot \eta + [(k^2/M^2) + (1/\sin^2 \eta)]^{1/2}}{[1 + (k^2/M^2)]^{1/2}} \right) \quad (\text{E.8})$$

$$I_2 = -k \arcsin \left(\frac{k/M}{[1 + (k^2/M^2)]^{1/2}} \cos \eta \right) \quad (\text{E.9})$$

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, finalmente se obtiene:

$$S(\eta_{c,1}, \eta_{c,2}) = -iM\pi \quad (\text{E.10})$$

$$S(\eta_{c,1}, \eta_0) = -iM\frac{\pi}{2} + \delta(\eta_0) \quad (\text{E.11})$$

donde $\delta(\eta_0)$ solo afectará a la fase del coeficiente de reflexión y está dado por:

$$\delta(\eta_0) = -k\frac{\pi}{2} + M \log \left(\frac{\cot \eta_0 + [(k^2/M^2) + (1/\sin^2 \eta_0)]^{1/2}}{[1 + (k^2/M^2)]^{1/2}} \right) + k \arcsin \left(\frac{k/M}{[1 + (k^2/M^2)]^{1/2}} \cos \eta_0 \right)$$

Así, finalmente el módulo del coeficiente de reflexión es:

$$|R| = \frac{\exp(\pi M)}{1 + \exp(2\pi M)} \quad (\text{E.12})$$

que coincide con el resultado (3.29) obtenido para la parametrización del espacio-tiempo de De Sitter dada por (3.10).

F. Obtención de la transformación de Bogoliubov en el efecto Casimir dinámico

Se dedica este anexo a explicar cómo se calcula la expresión (4.6). Se aplica el enfoque perturbativo de Ford-Vilenkin [28], por el que se consideran pequeñas desviaciones temporales $\delta\gamma(t)$ respecto de una constante positiva γ_0 :

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \delta\gamma(t), \quad \text{máx} |\delta(t)| \ll \gamma_0 \quad (\gamma_0 > 0) \quad (\text{F.1})$$

donde $\delta\gamma(t)$ es una función de t que se anula para $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow +\infty$ y que se supone conocida. Introduciendo esta expresión en la condición de contorno (4.2), se obtiene:

$$\gamma_0 \left[\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \phi(t, 0) + \delta\gamma(t) \left[\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad (\text{F.2})$$

Asimismo, el enfoque perturbativo que se ha aplicado a $\gamma(t)$ puede trasladarse al campo $\phi(t, x)$ [28]:

$$\phi(t, x) = \phi_0(t, x) + \delta\phi(t, x) \quad (\text{F.3})$$

donde ϕ_0 satisface la ecuación de Klein-Gordon, $\partial^2 \phi_0 = 0$, y las condiciones de contorno de Robin independientes del tiempo:

$$\gamma_0 \left[\frac{\partial \phi_0(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \phi_0(t, 0) = 0 \quad (\text{F.4})$$

Dado que ϕ y ϕ_0 satisfacen la ecuación de Klein-Gordon, $\delta\phi$ también la verifica: $\partial^2 \delta\phi = 0$. Sustituyendo (F.3) en (F.2) y utilizando (F.4), se obtiene:

$$\gamma_0 \left[\frac{\partial \delta\phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \delta\phi(t, 0) = -\delta\gamma(t) \left[\frac{\partial \phi_0(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (\text{F.5})$$

donde se ha despreciado el término de segundo orden. Resulta útil trabajar en el dominio de frecuencias, de modo que se puede realizar la transformada de Fourier:

$$\Phi(\omega, x) = \int dt \phi(t, x) e^{i\omega t}; \quad \Phi_0(\omega, x) = \int dt \phi_0(t, x) e^{i\omega t} \quad (\text{F.6})$$

$$\delta\Phi(\omega, x) = \int dt \delta\phi(t, x) e^{i\omega t}; \quad \delta\Gamma(\omega) = \int dt \delta\gamma(t) e^{i\omega t} \quad (\text{F.7})$$

Así, aplicando (F.6) se tiene que la transformada de Fourier $\Phi_0(\omega, x)$ en la región $x > 0$ está dada por:

$$\Phi_0(\omega, x) = \sqrt{\frac{4\pi}{|\omega|(1 + \gamma_0^2 \omega^2)}} [\sin(\omega x) + \gamma_0 \omega \cos(\omega x)] [\Theta(\omega) a(\omega) - \Theta(-\omega) a^\dagger(-\omega)] \quad (\text{F.8})$$

donde $\Theta(\omega)$ es la función escalón de Heaviside, que vale 1 si $\omega \geq 0$ y 0 si $\omega < 0$. $a^\dagger(\omega)$ y $a(\omega)$ son los operadores de creación y destrucción estándar en el dominio de frecuencias. Estos satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[a(\omega), a(\omega')] = [a^\dagger(\omega), a^\dagger(\omega')] = 0; \quad [a(\omega), a^\dagger(\omega')] = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (\text{F.9})$$

Si en la ecuación de Klein-Gordon se expresa $\delta\phi(t, x)$ en términos de su transformada de Fourier $\delta\Phi(\omega, x)$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$(\partial_x^2 + \omega^2) \delta\Phi(\omega, x) = 0 \quad (\text{F.10})$$

Teniendo en cuenta la expresión (F.5) y escribiendo $\delta\phi(t, x)$ en términos de $\delta\Phi(\omega, x)$, se tiene que $\delta\Phi(\omega, x)$ verifica:

$$\gamma_0 \left[\frac{\partial \delta\Phi(\omega, x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \delta\Phi(\omega, 0) = - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi_0(\omega', x)}{\partial x} \right]_{x=0} \delta\Gamma(\omega - \omega') \quad (\text{F.11})$$

La solución de la ecuación (F.10) debe ser tal que $\phi(t, x)$ viaje hacia la derecha, ya que $\delta\phi(t, x)$ debe describir una contribución que proviene del espejo y no una que va hacia él. La solución buscada puede escribirse en términos de funciones de Green [26, 32]. Así, se introducen funciones de Green que satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \right) G(\omega, x, x') = \delta(x - x') \quad (\text{F.12})$$

Por el teorema de Green, se tiene que:

$$\delta\Phi(\omega, x) = -\delta\Phi(\omega, 0) \left[\frac{\partial}{\partial x} G(\omega, x, x') \right]_{x=0} + G(\omega, 0, x') \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta\Phi(\omega, x) \right]_{x=0} \quad (\text{F.13})$$

A continuación, puede elegirse una función de Green $G_R(\omega, x, x')$ que sea solución de la ecuación (F.11) y satisfaga la condición de Robin independiente del tiempo en $x = 0$. Teniendo en cuenta además la ecuación (F.3), se obtiene:

$$\Phi(\omega, x) = \Phi_0(\omega, x) + G_R(\omega, 0, x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta\Phi(\omega, 0) - \frac{\delta\Phi(\omega, 0)}{\gamma_0} \right] \quad (\text{F.14})$$

Si se quiere calcular el campo $\Phi_{\text{in}}(\omega, x)$ en el estado inicial, que en el dominio temporal verifica:

$$\phi_{\text{in}}(t, x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) \quad (\text{F.15})$$

la función G_R en la ecuación (F.14) debe reemplazarse por la función de Green retardada, $G_R^{\text{ret}}(\omega, 0, x)$, que satisface la condición de contorno de Robin independiente del tiempo en $x = 0$:

$$G_R^{\text{ret}}(\omega, 0, x) = \left(\frac{\gamma_0}{1 - i\gamma_0\omega} \right) e^{i\omega x} \quad (\text{F.16})$$

De manera similar, si quiere calcularse el campo $\Phi_{\text{out}}(\omega, x)$ en el estado final, que en el dominio temporal verifica:

$$\phi_{\text{out}}(t, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) \quad (\text{F.17})$$

la función G_R en la ecuación (F.14) debe sustituirse por la función de Green avanzada $G_R^{\text{adv}}(0, x, \omega)$, que está dada por:

$$G_R^{\text{adv}}(\omega, 0, x) = \left(\frac{\gamma_0}{1 + i\gamma_0\omega} \right) e^{-i\omega x} \quad (\text{F.18})$$

A partir de esto, se obtiene la siguiente relación entre el campo en el estado final $\Phi_{\text{out}}(\omega, x)$ y el campo en el estado inicial $\Phi_{\text{in}}(\omega, x)$:

$$\Phi_{\text{out}}(\omega, x) = \Phi_{\text{in}}(\omega, x) + \frac{1}{\gamma_0} [G_R^{\text{ret}}(\omega, 0, x) - G_R^{\text{adv}}(\omega, 0, x)] \left(\gamma_0 \left[\frac{\partial \delta \Phi(\omega, x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \delta \Phi(\omega, 0) \right) \quad (\text{F.19})$$

Introduciendo las expresiones (F.8), (F.11), (F.16) y (F.18) en esta última ecuación, se obtiene la relación entre el operador destrucción del estado final, a_{out} , y los operadores de creación y destrucción del estado inicial, a_{in}^\dagger y a_{in} , que tiene la forma de una transformación de Bogoliubov:

$$a_{\text{out}}(\omega) = a_{\text{in}}(\omega) - 2i \sqrt{\frac{\omega}{1 + \gamma_0^2 \omega^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{1 + \gamma_0^2 \omega'^2}} [\Theta(\omega') a_{\text{in}}(\omega') - \Theta(-\omega') a_{\text{in}}^\dagger(-\omega')] \delta\Gamma(\omega - \omega') \quad (\text{F.20})$$