



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Cálculo numérico y analítico de trayectorias
balísticas en tiro tenso

*Numerical and analytical computation of flat fire
ballistic trajectories*

Autor

Arturo Diez García

Director

Francisco Alcrudo Sánchez

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
2021

Índice

1. Introducción	4
2. Caracterización de la resistencia de los proyectiles de pequeñas armas	5
2.1 Ley de resistencia aerodinámica.....	5
2.2 Aproximaciones simples	7
2.3 Propiedades de la atmósfera	8
3. Ecuaciones de movimiento y simplificaciones de tiro tenso o rasante	9
3.1 Deducción de las ecuaciones generales de movimiento.....	9
3.2 Simplificación de tiro tenso o rasante	11
4. Soluciones exactas de las ecuaciones de tiro tenso	13
4.1 Coeficiente de Resistencia constante	13
4.2 Coeficiente de Resistencia inversamente proporcional al Mach	14
4.3 Coeficiente de Resistencia inversamente proporcional a la raíz cuadrada del Mach	15
5. Integración numérica de las ecuaciones de movimiento	16
5.1 Descripción del método Runge-Kutta.....	16
5.2 Integración de la trayectoria respecto al tiempo	17
5.3 Integración de la trayectoria respecto a la distancia.....	18
5.4 Estudio de la convergencia del método.....	19
5.5 Metodo iterativo para hacer cero la trayectoria balística	22
5.6 Comparación con programas externos de cálculo de trayectorias	23
5.6.1 Comparación con proyectil Sierra 90 Gr. HP (función G1)	24
6. Correcciones por acción del Viento	26
6.1 Simplificación de tiro tenso o rasante con viento	27
7. Tiro tenso o rasante inclinado	29
8. Aproximación de la resistencia de diversos proyectiles mediante la función inversa de la raíz cuadrada del Mach	31
9. Conclusiones	33
Bibliografía	34
Lista de figuras	35
Lista de tablas	36
Anexos	37

1. Introducción

En este trabajo se aborda el cálculo numérico de la trayectoria de los proyectiles disparados por *pequeñas armas* estabilizados giroscópicamente. Entran dentro de esta categoría los fusiles, rifles, carabinas y demás armas largas rayadas, así como las pistolas o armas cortas. Estas últimas, sin embargo, tienen alcances eficaces tan cortos que el cálculo de su trayectoria no presenta un interés destacado. En cuanto a las armas largas, pueden presentar alcances de varios kilómetros, aunque su efectividad práctica queda reducida a unos centenares de metros llegando en casos particulares al orden del kilómetro. Algunos sistemas de armas especializados pueden tener efectividades de hasta 2 ó, incluso, 3 km, aunque presentan un volumen y peso que prácticamente las excluye de la categoría de pequeñas armas. En todos estos casos es de aplicación la aproximación conocida como de *tiro tenso o rasante*.

Con los alcances mencionados arriba los efectos que afectan principalmente la trayectoria del proyectil son, por este orden, la gravedad, el viento y las condiciones atmosféricas (la densidad del aire). La fuerza de Coriolis, la deriva lateral y la variación de las propiedades del aire con la altura son esenciales en el cálculo de trayectorias de mayor alcance como las de los proyectiles de artillería, pero su efecto es despreciable en las distancias propias de las pequeñas armas.

El cálculo de la trayectoria pasa por la integración de las ecuaciones de movimiento del proyectil. En el caso de tiro tenso esta tarea se puede realizar fácilmente mediante cálculo numérico. La mayor incertidumbre proviene de las características aerodinámicas del proyectil, en concreto de lo que se conoce como su *coeficiente balístico* que es un compendio del coeficiente aerodinámico y de la densidad seccional.

El coeficiente balístico promedio de un proyectil a lo largo de su trayectoria se puede obtener mediante ensayo realizando disparos calibrados. Como dichos ensayos son costosos, se busca la similitud geométrica de cualquier proyectil problema con alguno de los modelos estándar ensayados y así obtener una estimación de su coeficiente balístico. Este procedimiento, algo tedioso, permitió hace más de un siglo hacer una integración general de las ecuaciones de movimiento para cualquier proyectil afín a uno modelo dado conocido como método de Siacci. El cálculo de las trayectorias de pequeñas armas se ha basado en el método de Siacci hasta hace pocos años. Actualmente gracias a la potencia de cálculo disponible se prefiere la integración numérica de las ecuaciones de movimiento, pero todavía haciendo uso del coeficiente balístico. En los últimos años, gracias al uso de medidas de láser Doppler, se ha podido obtener el coeficiente de resistencia en función del número de Mach que permite una caracterización más precisa del comportamiento aerodinámico de un proyectil. Este es el camino que se ha intentado abordar en este trabajo.

2. Caracterización de la resistencia de los proyectiles de pequeñas armas

En este apartado se tratará la caracterización de la resistencia de los proyectiles balísticos. Las fuerzas que gobiernan las trayectorias de pequeñas armas en tiro tenso son las fuerzas gravitacionales y la resistencia aerodinámica. La primera se asume constante e igual a la gravedad local y la segunda depende fundamentalmente de la forma del proyectil y del viento relativo.

2.1 Ley de resistencia aerodinámica

La fuerza aerodinámica de resistencia al avance o de arrastre (drag force) es la fuerza que se opone al avance del proyectil al moverse en un medio viscoso como el aire. Queda caracterizada por la siguiente expresión

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho S C_D V \vec{V}$$

Donde:

\vec{F}_D = *vector fuerza de arrastre (drag force)*

ρ = *densidad del aire*

S = *sección del proyectil*

C_D = *coeficiente de resistencia (adimensional)*

\vec{V} = *vector velocidad del poyectil*

V = *módulo de la velocidad*

El coeficiente de resistencia depende fundamentalmente de la forma del proyectil, del número de Mach y del número de Reynolds. Para el rango de velocidades y tamaños de proyectil de las pequeñas armas, este último parámetro tiene un efecto despreciable.

El número de Mach es la relación entre la velocidad de un proyectil y la velocidad del sonido en el medio en el que este se desplaza, en este caso el aire. Es un número adimensional dado por:

$$M = V/c$$

Donde c es la velocidad del sonido en el aire.

Como ejemplo, la Figura 1 muestra el coeficiente de resistencia en función del número de Mach de un proyectil calibre .30 Ball M2.

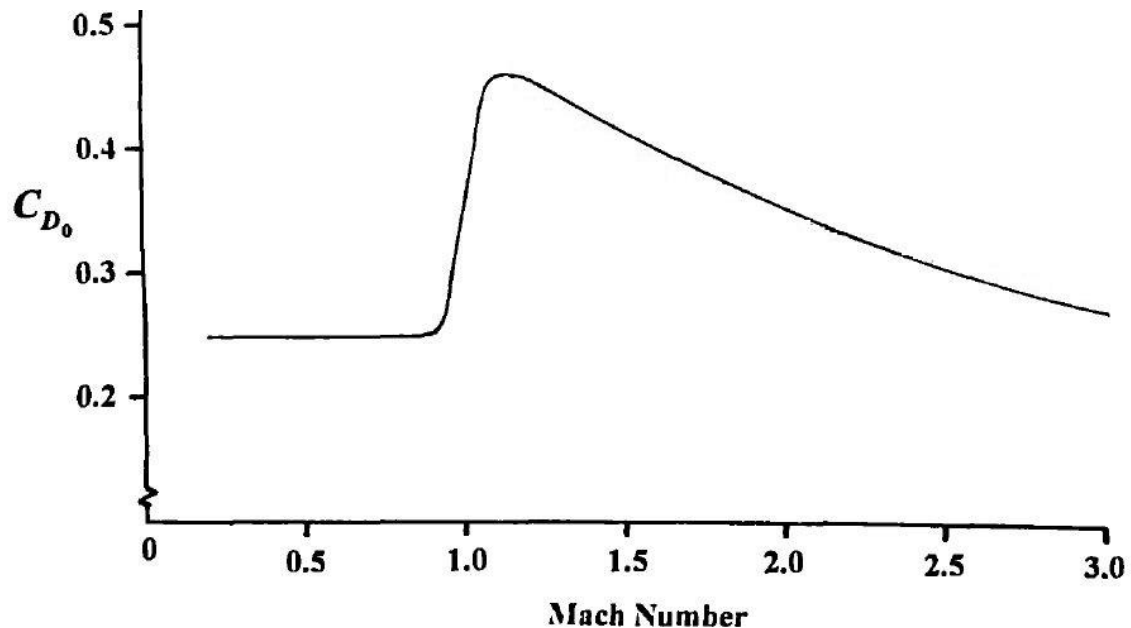


Fig. 1: Función del coeficiente de resistencia, proyectil calibre .30 Ball M2.

Dependiendo del número de Mach se distinguen diferentes regímenes de flujo:

$M < 0.7$ Régimen Subsónico;

$0.7 < M < 1.2$ Régimen Transónico o de transición;

$1.2 < M < 5$ Régimen Supersónico

$M > 5$ Régimen Hipersónico

En balística externa de tiro tenso el régimen fundamental de operación es supersónico.

Existe una colección de proyectiles de referencia cuyo coeficiente de resistencia aerodinámica ha sido determinado en función del número de Mach mediante ensayos normalizados. Dichos proyectiles así como sus coeficientes de resistencia, denominados C_{D_J} , están descritos y tabulados en el Anexo I. El subíndice J hace referencia al proyectil estándar correspondiente.

Puesto que los ensayos para determinar el coeficiente de resistencia de un proyectil son muy caros, los fabricantes intentan referir la resistencia de un proyectil dado con la de proyectiles de referencia normalizados. Para ello introducen el denominado factor de forma.

El factor de forma, i_J , es el cociente del coeficiente de resistencia de un proyectil dado respecto al coeficiente de resistencia del proyectil estándar J promediado en el rango supersónico del número de Mach:

$$i_J = \frac{\overline{C_D}}{C_{D_J}}$$

Si el coeficiente de resistencia de un proyectil es mayor que el del proyectil estándar correspondiente su factor de forma será mayor que uno y viceversa.

Por razones históricas y a efectos prácticos, los fabricantes utilizan una variable llamada coeficiente balístico (ballistic coefficient en inglés) BC_J , que se define como:

$$BC_J = \frac{m}{d^2} \frac{1}{i_J} \text{ [lb/in}^2\text{]}$$

Siempre definida en unidades americanas, siendo m/d^2 la llamada *densidad seccional*, que se suele expresar en las mismas unidades [lb/in²].

Así pues, conociendo el coeficiente balístico dado por los fabricantes y la densidad seccional del proyectil, se puede obtener el factor de forma como:

$$i_J = \frac{m}{d^2} \frac{1}{BC_J} \text{ [adim]}$$

Lo que permite calcular el coeficiente de resistencia del proyectil mediante la función de resistencia del proyectil estándar correspondiente:

$$C_D(M) = i_J \cdot C_{D_J}(M)$$

2.2 Aproximaciones simples

Además de las funciones de resistencia de los proyectiles estándar también existen aproximaciones simples del coeficiente de resistencia que permiten la obtención de soluciones cerradas como veremos más adelante. Las aproximaciones simples más utilizadas del coeficiente de resistencia son:

Coeficiente de resistencia constante: $C_D = K_1$

Coeficiente de resistencia inversamente proporcional al Mach: $C_D = K_2/M$

Coeficiente de resistencia inversamente proporcional a la raíz del Mach: $C_D = K_3/\sqrt{M}$

2.3 Propiedades de la atmósfera

El medio en el que discurren las trayectorias balísticas de pequeñas armas es una delgada capa de la atmósfera de un espesor de unos pocos metros. La propiedad de la atmósfera que influye en la trayectoria es la densidad del aire que depende de la presión, P , y de la temperatura, T , a través de la expresión:

$$\rho = \frac{P}{RT} \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

Donde presión y temperatura se obtienen de los registros meteorológicos locales y la constante de los gases vale:

$$R = 286.9 \frac{N m}{(Kg K)} \quad \gamma = 1.4$$

El efecto de la humedad ambiente puede tenerse en cuenta haciendo correcciones sobre la constante R que no se mencionarán aquí.

Finalmente es necesario calcular la velocidad del sonido en el aire:

$$c = \sqrt{\gamma RT} \text{ [m/s]}$$

Donde $\gamma = 1.4$ es la relación entre los calores específicos del aire que también puede ser objeto de corrección por efecto de la humedad ambiente.

La diferencia de altura entre el punto más alto y el más bajo de una trayectoria de tiro tenso es tan pequeña que no tiene sentido considerar cambios en la magnitud de la aceleración de la gravedad, en la variación de la presión ni en la variación de la temperatura. Tampoco en la velocidad del sonido ya que solo depende de la temperatura. Por tanto, durante el cálculo de una trayectoria se considerarán todas estas variables como parámetros constantes.

3. Ecuaciones de movimiento y simplificaciones de tiro tenso o rasante

3.1 Deducción de las ecuaciones generales de movimiento

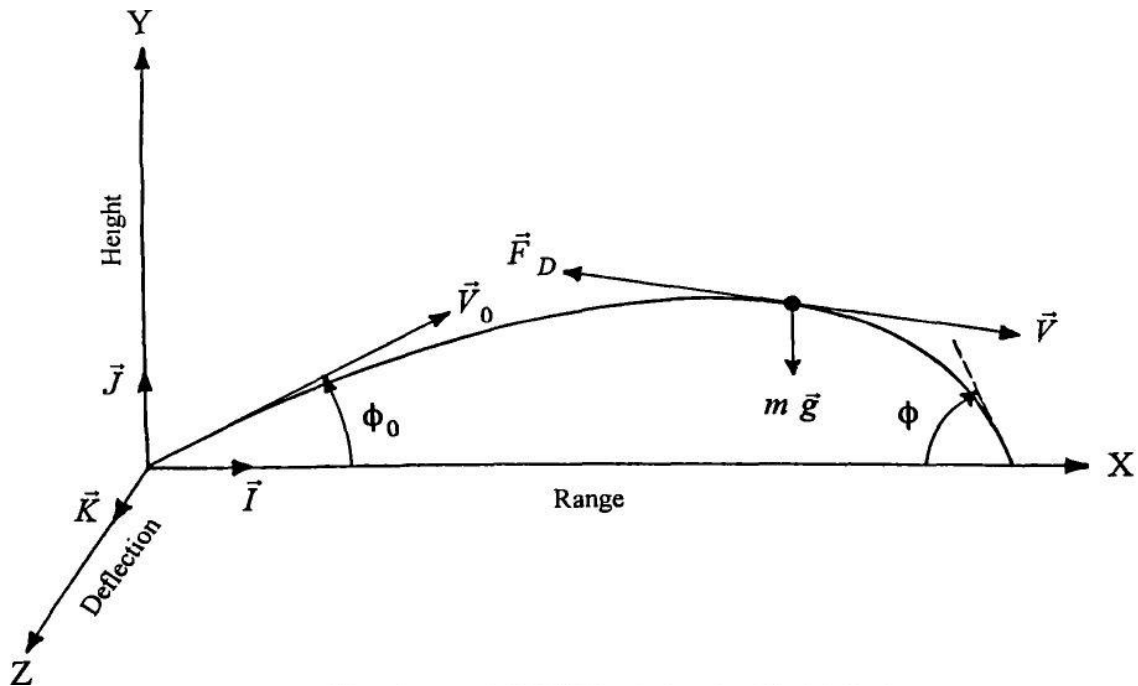


Fig. 2: Sistema de coordenadas de la trayectoria balística.

Para la deducción de las ecuaciones del movimiento de un proyectil con una masa constante [4, cap. 5], partimos de la archiconocida segunda ley de Newton.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Ahora bien aplicando esta segunda ley de Newton al movimiento de un proyectil con masa constante obtenemos la siguiente expresión.

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F} + m \vec{g}$$

Donde:

$m =$ masa del proyectil; $\vec{V} =$ vector velocidad; $t =$ tiempo;

$\frac{d\vec{V}}{dt} =$ vector aceleración; $\vec{g} =$ vector aceleración debido a la gravedad;

$\sum \vec{F} =$ vector sumatorio de fuerzas aerodinámicas.

Como se ha visto anteriormente en este trabajo solo se va a considerar la fuerza aerodinámica de resistencia al avance o de arrastre (drag force). Por tanto, la ecuación de movimiento queda:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{2} \rho S C_D V \vec{V} + m \vec{g}$$

Dividiendo ambos miembros por la masa del proyectil obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\rho S C_D}{2 m} V \vec{V} + \vec{g}$$

Los vectores aceleración, velocidad y aceleración debida a la gravedad se descomponen ahora en sus componentes a lo largo del sistema de coordenadas representado en la Figura 2.

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{V}_x \hat{i} + \dot{V}_y \hat{j} + \dot{V}_z \hat{k}$$

$$\vec{g} = g(-\hat{j})$$

Donde:

$V_x =$ velocidad en el eje X; $V_y =$ velocidad eje Y; $V_z =$ velocidad eje Z

$\dot{V}_x =$ aceleración eje X; $\dot{V}_y =$ aceleración eje Y; $\dot{V}_z =$ aceleración eje Z

$\hat{i} =$ vector unitario eje X; $\hat{j} =$ vector unitario eje Y; $\hat{k} =$ vector unitario eje Z

Dado que el término $\rho S C_D / (2m)$ aparecerá de forma continuada a partir de ahora, es conveniente darle nombre a esta nueva variable:

$$\hat{C}_D^* = \frac{\rho S C_D}{2 m} = \frac{\rho \pi C_D}{8 C}$$

Donde: $C = m/d^2 =$ densidad seccional

Nótese que este nuevo \hat{C}_D^* no es adimensional y sus dimensiones son la inversa de una longitud. Esto simplifica notablemente la ecuación anterior:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\hat{C}_D^* V \vec{V} + \vec{g}$$

En componentes:

$$\dot{V}_x = -\hat{C}_D^* V \vec{V}_x$$

$$\dot{V}_y = -\hat{C}_D^* V \vec{V}_y - g$$

$$\dot{V}_z = -\hat{C}_D^* V \vec{V}_z$$

Siendo: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ el módulo del vector velocidad.

3.2 Simplificación de tiro tenso o rasante

En el caso del tiro tenso o rasante la trayectoria está restringida a las proximidades del eje X, por lo que en estos casos las componentes V_y y V_z de la velocidad serán mucho más pequeñas que la componente V_x .

Además si no hay viento cruzado, V_z es cero y el módulo del vector velocidad se puede expresar en función de V_x y V_y :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_x \sqrt{1 + (V_y/V_x)^2}$$

Expandiendo la expresión anterior en una serie binomial:

$$V = V_x \left(1 + (V_y/V_x)^2\right)^{1/2} = V_x \left[1 + \frac{1}{2}(V_y/V_x)^2 - \frac{1}{8}(V_y/V_x)^4 + \dots\right]$$

En caso de que $|V_y/V_x| < 10^{-1}$ la expresión binomial muestra que V y V_x difieren en menos del 0,5%. Esta se considera como aproximación de tiro tenso, que siendo $V_y/V_x = \tan \phi$, el ángulo formado entre la trayectoria y el eje X, no debe superar 5.7 grados. Una forma sencilla de definir la aproximación de tiro rasante será $V \approx V_x$.

Tras aplicar esta simplificación a las ecuaciones de movimiento se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = -\hat{C}_D^* V_x^2$$

$$\dot{V}_y = \frac{dV_y}{dt} = -\hat{C}_D^* V_x V_y - g$$

Puesto que el tiempo aparece como un parámetro es posible eliminarlo de las ecuaciones y obtenerlas en función de la distancia X. La manera más sencilla de hacerlo es haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dX} \frac{dX}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dX} = V_x V'_x$$

$$\dot{V}_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_y}{dX} \frac{dX}{dt} = V_x \frac{dV_y}{dX} = V_x V'_y$$

Donde:

$$V'_x = \frac{dV_x}{dX} = \text{derivada de la velocidad en el eje X respecto de la posición X}$$

$$V'_y = \frac{dV_y}{dX} = \text{derivada de la velocidad en el eje Y respecto de la posición X}$$

Aplicando este cambio de variable se obtienen las ecuaciones de movimiento de tiro tenso o rasante expresadas con la derivada de la velocidad respecto de la posición X.

$$V'_x = \frac{dV_x}{dX} = -\hat{C}_D^* V_x$$

$$V'_y = \frac{dV_y}{dX} = -\hat{C}_D^* V_y - \frac{g}{V_x}$$

4. Soluciones exactas de las ecuaciones de tiro tenso

Como se comentó en el capítulo 2 existen algunas aproximaciones simples del coeficiente de resistencia que permiten hallar soluciones analíticas exactas de las ecuaciones de tiro tenso. En este capítulo vamos a describir las tres expresiones más simples que permiten obtener tales soluciones [4, pág. 91].

4.1 Coeficiente de Resistencia constante

Tomando $C_D = K_1$ un valor constante, podemos definir \hat{C}_D^* como:

$$\hat{C}_D^* = \frac{\rho S}{2m} C_D = \frac{\rho S}{2m} K_1 = k_1$$

Lo que permite la cuadratura de las ecuaciones en función de la distancia para obtener [4, pág. 92]:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x0} e^{-k_1 X} \\ t &= \frac{X}{V_{x0}} \left(\frac{V_{x0}}{V_x} - 1 \right) / \ln \left(\frac{V_{x0}}{V_x} \right) \\ \tan \phi &= \tan \phi_0 - \frac{gt}{V_{x0}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{V_{x0}}{V_x} \right) \right] \\ Y &= Y_0 + X \tan \phi_0 - \frac{1}{2} g t^2 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{V_{x0}}{V_x} - 1 \right)^{-1} - \left(\frac{V_{x0}}{V_x} - 1 \right)^{-2} \ln \left(\frac{V_{x0}}{V_x} \right) \right] \end{aligned}$$

A partir de las cuales es fácil calcular la componente Y y el módulo de la velocidad:

$$V_y = V_x \tan \phi \quad V = V_x \cos \phi = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Esta aproximación es útil para el cálculo de trayectorias balísticas de proyectiles subsónicos e hipersónicos que presentan un coeficiente de resistencia aproximadamente constante en ese rango del número de Mach. Sin embargo no lo es tanto en el marco de este trabajo que hace referencia a proyectiles en régimen supersónico característico de las pequeñas armas.

4.2 Coeficiente de Resistencia inversamente proporcional al Mach

Esta aproximación se caracteriza por la expresión siguiente:

$$C_D = \frac{K_2}{M}$$

Siendo K_2 un valor constante.

Aproximando en el número de Mach como: $M \approx V_x/c$. De acuerdo con la hipótesis de tiro tenso. Se tiene:

$$\hat{C}_D^* = \frac{\rho S}{2 m} C_D = \frac{\rho S}{2 m} \frac{K_2}{M} = \frac{\rho S}{2 m} \frac{K_2 c}{V_x}$$

Definiendo una nueva variable k_2 :

$$k_2 = \frac{\rho S}{2 m} K_2 c$$

\hat{C}_D^* se puede expresar como:

$$\hat{C}_D^* = \frac{\rho S}{2 m} \frac{K_2 c}{V_x} = \frac{k_2}{V_x}$$

La integración da como resultado las expresiones siguientes [4, pág. 93]:

$$V_x = V_{x0} - k_2 X$$

$$t = \frac{X}{V_{x0}} \ln \left(\frac{V_{x0}}{V_x} \right) / \left(1 - \frac{V_x}{V_{x0}} \right)$$

$$\tan \phi = \tan \phi_0 - \frac{gt}{V_{x0}} \left[\left(\frac{V_{x0}}{V_x} - 1 \right) / \ln \left(1 - \frac{V_x}{V_{x0}} \right) \right]$$

$$Y = Y_0 + X \tan \phi_0 - \frac{1}{2} g t^2 \left[2 / \ln \left(\frac{V_{x0}}{V_x} \right) \right] \left[1 - \left(1 - \frac{V_x}{V_{x0}} \right) / \ln \left(\frac{V_{x0}}{V_x} \right) \right]$$

$$V_y = V_x \tan \phi \quad V = V_x \cos \phi = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Esta aproximación del coeficiente de resistencia es utilizada en el límite de velocidades altamente supersónicas.

4.3 Coeficiente de Resistencia inversamente proporcional a la raíz cuadrada del Mach

Esta aproximación es la más útil en el marco de este trabajo ya que se adapta especialmente bien al régimen supersónico de proyectiles con una buena aerodinámica como el estándar G7 y similares.

Tomando $C_D = K_3/\sqrt{M}$. Con K_3 un valor constante, \hat{C}_D^* se puede expresar como:

$$\hat{C}_D^* = \frac{\rho S}{2m} C_D = \frac{\rho S}{2m} \frac{K_3}{\sqrt{M}} = \frac{\rho S}{2m} K_3 \sqrt{\frac{c}{V_x}}$$

Agrupando en k_3 :

$$k_3 = \frac{\rho S}{2m} K_3 \sqrt{c}$$

Queda:

$$\hat{C}_D^* = k_3/\sqrt{V_x}$$

Se obtiene como resultado [4, pág. 94]:

$$V_x = \left[\sqrt{V_{x0}} - \frac{1}{2} k_3 X \right]^2$$

$$t = \frac{X}{V_{x0}} \sqrt{\frac{V_{x0}}{V_x}}$$

$$\tan \phi = \tan \phi_0 - \frac{gt}{V_{x0}} \left[\frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{V_{x0}}{V_x}} + \frac{V_{x0}}{V_x} \right) \right]$$

$$Y = Y_0 + X \tan \phi_0 - \frac{1}{2} gt^2 \left[\frac{1}{3} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{V_x}{V_{x0}}} \right) \right]$$

$$V_y = V_x \tan \phi \quad V = V_x \cos \phi = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Esta aproximación del coeficiente de resistencia es la más interesante de las tres porque los coeficientes de resistencia de muchos proyectiles modernos de pequeñas armas siguen una ley aproximadamente inversa a la raíz cuadrada del número de Mach en régimen supersónico.

5. Integración numérica de las ecuaciones de movimiento

Dada la imposibilidad de conseguir una solución exacta para una ley de resistencia general, se pueden aplicar los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma $dy/dx = f(x, y)$. Dentro de la variedad de métodos numéricos disponibles se ha optado por uno de tipo Runge-Kutta.

5.1 Descripción del método Runge-Kutta

El método Runge-Kutta (RK) escogido es uno clásico de cuarto orden por representar un compendio adecuado entre precisión y coste computacional.

Escribiendo la ecuación diferencial en la forma estándar siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

El método Runge-Kutta de cuarto orden se escribe como [5, pág. 746]:

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)h$$

Donde:

$$\vec{k}_1 = \vec{F}(\vec{y}_i)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{F}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_1h\right)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{F}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_2h\right)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{F}(\vec{y}_i + \vec{k}_3h)$$

Donde h es el tamaño del paso.

5.2 Integración de la trayectoria respecto al tiempo

Recordando las ecuaciones de movimiento deducidas en el capítulo 3, las derivadas de las dos componentes de la velocidad respecto al tiempo, es decir, las aceleraciones se escriben:

$$\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = -\hat{C}_D^* V_x^2$$

$$\dot{V}_y = \frac{dV_y}{dt} = -\hat{C}_D^* V_x V_y - g$$

Es necesario conocer también la posición del proyectil a lo largo del tiempo que puede obtenerse de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{dX}{dt} = V_x$$

$$\frac{dY}{dt} = V_y$$

Se observa que ni las derivadas de las velocidades ni las derivadas de las posiciones dependen explícitamente del tiempo, sino que dependen de las propias velocidades. Por tanto, cada una de las ecuaciones no se puede resolver de forma individual, sino que deben ser tratadas conjuntamente. Para ello se reescribe el problema en forma vectorial como sigue:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_D^* V_x^2 \\ -\hat{C}_D^* V_x V_y - g \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

Donde podemos definir los siguientes vectores:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ X \\ Y \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_D^* V_x^2 \\ -\hat{C}_D^* V_x V_y - g \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

Con esta nueva notación el sistema de ecuaciones viene dado por la siguiente forma compacta:

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$$

Siendo los valores iniciales de las variables (a tiempo cero):

$$\begin{bmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \cos \phi_0 \\ V_0 \sin \phi_0 \\ 0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

Donde Y_0 es la posición vertical del cañón respecto a la línea de puntería ($Y_0 \leq 0$) y V_0 la velocidad del proyectil en boca de fuego.

El método Runge-Kutta descrito arriba se aplica directamente a la formulación anterior siendo en este caso h el paso de tiempo escogido.

5.3 Integración de la trayectoria respecto a la distancia

De igual forma, recordando las ecuaciones obtenidas en el capítulo 3, las derivadas de las dos componentes de la velocidad respecto de la posición X son:

$$V'_x = \frac{dV_x}{dX} = -\hat{C}_D^* V_x$$

$$V'_y = \frac{dV_y}{dX} = -\hat{C}_D^* V_y - \frac{g}{V_x}$$

Es necesario conocer tanto la posición Y como el tiempo t . Ambos se obtienen a partir de las ecuaciones diferenciales de las dos componentes de la velocidad, como se muestra a continuación:

$$\frac{dX}{dt} = V_x \rightarrow dt = \frac{dX}{V_x} \rightarrow \frac{dt}{dX} = \frac{1}{V_x}$$

$$\frac{dY}{dt} = V_y \rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{V_y}{V_x}$$

Igualmente se puede reescribir el problema en forma vectorial:

$$\frac{d}{dX} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ Y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_D^* V_x \\ -\hat{C}_D^* V_y - \frac{g}{V_x} \\ V_y/V_x \\ 1/V_x \end{bmatrix}$$

Donde se definen los siguientes vectores:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ Y \\ t \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_D^* V_x \\ -\hat{C}_D^* V_y - \frac{g}{V_x} \\ V_y/V_x \\ 1/V_x \end{bmatrix}$$

Por tanto con la nueva notación, el sistema vectorial puede escribirse de la siguiente forma compacta:

$$\frac{d}{dx} \vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$$

La resolución del método Runge-Kutta de cuarto orden sigue los mismos pasos descritos previamente, pero en este caso el tamaño de paso h se expresa en metros.

En lo referente a los valores iniciales solo es necesario introducir $t_0 = 0$ [s].

5.4 Estudio de la convergencia del método

Una vez escogido y aplicado el método de integración numérica a las ecuaciones de movimiento se debe comprobar si el resultado es satisfactorio. Para ello se recurrirá a un análisis de la convergencia del método, es decir, si la solución obtenida numéricamente se aproxima a la solución exacta de las ecuaciones conforme se reduce el paso de integración. Dado que para trayectorias de tiro tenso se dispone de las soluciones analíticas exactas descritas en el capítulo 4, se utilizarán como soluciones de referencia.

Por su utilidad en algunos casos se ha escogido la solución exacta correspondiente a un coeficiente inversamente proporcional a la raíz cuadrada del Mach (apartado 4.3).

Para llevar a cabo dicho estudio de convergencia se calculará para un caso dado la solución exacta y diversas aproximaciones a la misma mediante el método Runge-Kutta con pasos de integración cada vez más pequeños. Se calcularán a continuación las normas del error asociadas a cada una de las soluciones numéricas verificando a qué ritmo disminuyen conforme el paso de integración se reduce.

La norma infinito del error se define como el máximo error en valor absoluto entre los puntos de la solución numérica y los correspondientes de la solución exacta:

$$\|\overline{err}\|_{\infty} = \max(|err_i|) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Siendo N el número de paso y \overline{err} el vector de errores absolutos.

Mientras que la norma dos se define como:

$$\|\vec{err}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N err_i^2}$$

Se ha escogido implementar este estudio de convergencia para la trayectoria de un proyectil calibre .30 Ball M2. Esta es una de las municiones estándar del ejército americano de 0.308" de diámetro, 150 grain de masa, con una velocidad de 2800 ft/s. Ver Tabla 1 con estos datos expresados en el SI.

Como se muestra en [4, fig. 5.2, pág. 94] vemos que en el rango de número de Mach de 1.3 y 3, el coeficiente de resistencia del proyectil muestra un buen ajuste con la siguiente expresión:

$$C_D = 0.491/\sqrt{Mach}$$

Por lo tanto en este caso: $K_3 = 0.491$

Los parámetros del tiro están contenidos en la Tabla 2 en unidades del sistema internacional (SI):

V_0 (m/s)	d (mm)	m (Kg)	K_3
853.44	7.8232	0.00972	0.491

Tabla 1: Parámetros del proyectil calibre .30 ball M2.

T (°C)	ϕ_0 (°)	Y_0 (m)
20	0.31667	0

Tabla 2: Parámetros de tiro tenso (SI). Proyectil .30 Ball M2.

Se calculará la trayectoria hasta los 1000 metros, distancia mayor a lo normal en este tipo de munición. Alargamos la trayectoria útil para así obtener un mayor abanico de errores y hacer este análisis de convergencia más riguroso.

Como es natural al haber formulado las ecuaciones de movimiento y su integración numérica por Runge-Kutta de dos formas distintas, con las derivadas respecto a la posición X y con las derivadas respecto al tiempo, hay que llevar a cabo este análisis de convergencia para ambas formulaciones.

Se ha integrado la trayectoria con pasos espaciales que van desde un metro hasta 500 metros y con pasos temporales que van desde 2.2 milisegundos hasta 1.1 segundos. Para cada paso de integración se han calculado las dos normas de error definidas anteriormente.

Como ejemplo se muestra en las Figuras 3 y 4 la convergencia de la posición vertical Y y del módulo de la velocidad. En ambas gráficas en escala logarítmica se aprecia una

reducción del error que decrece con la cuarta potencia de la reducción del paso de integración (pendiente -4), lo que corresponde perfectamente con un método de orden cuatro como el empleado. Por otra parte la reducción del error alcanza la precisión de máquina saturando aproximadamente en errores del orden de 10^{-12} . El resultado completo del estudio se muestra en los Anexos II.I y II.II.

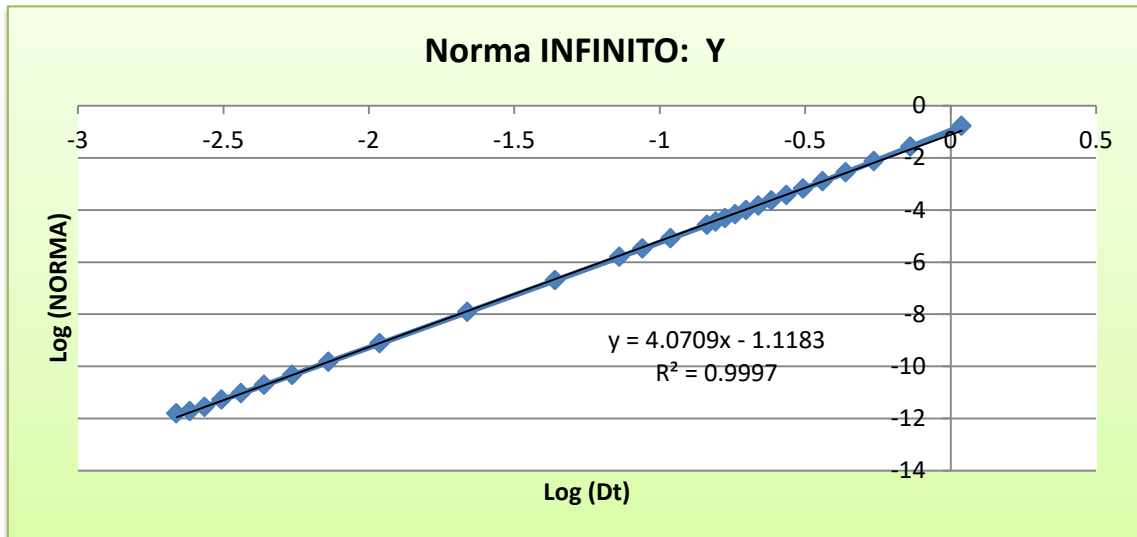


Fig. 3: Gráfica de la norma infinito de la posición Y, Runge-Kutta respecto al tiempo.

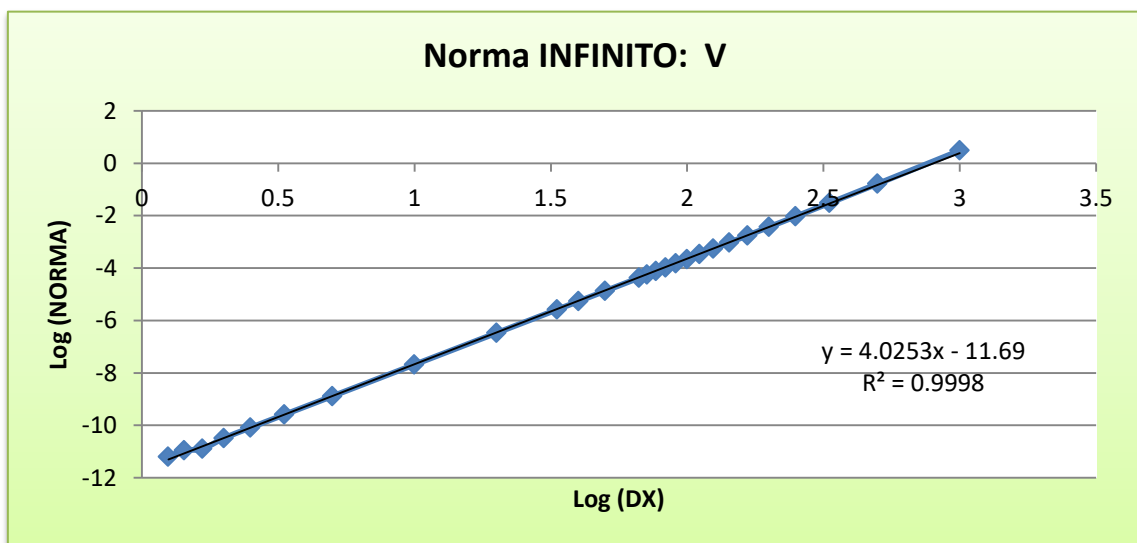


Fig. 4: Gráfica de la norma infinito de la velocidad, Runge-Kutta respecto a la distancia.

5.5 Metodo iterativo para hacer cero la trayectoria balística

Como el eje del cañón está siempre por debajo y forma un ángulo ϕ_0 con la línea de puntería (Figura 5), la trayectoria cruza la línea de puntería ($Y=0$) en dos ocasiones: una cerca de la boca de fuego (denominada cero próximo) y otra a una mayor distancia (denominada cero lejano). Las distancias a las que ello se produce dependen del ángulo de elevación del cañón, ϕ_0 , dicho ángulo es el parámetro que rige la trayectoria pero es tan pequeño que no se emplea habitualmente. En la práctica, la forma de definir el ángulo de elevación es a través del cero lejano. Es decir, se dice que una trayectoria hace cero ($Y=0$) a X metros.

Definida una trayectoria por su "cero" (cero lejano) es necesario calcular el ángulo de elevación (ϕ_0) que cumplirá con dicho requisito.

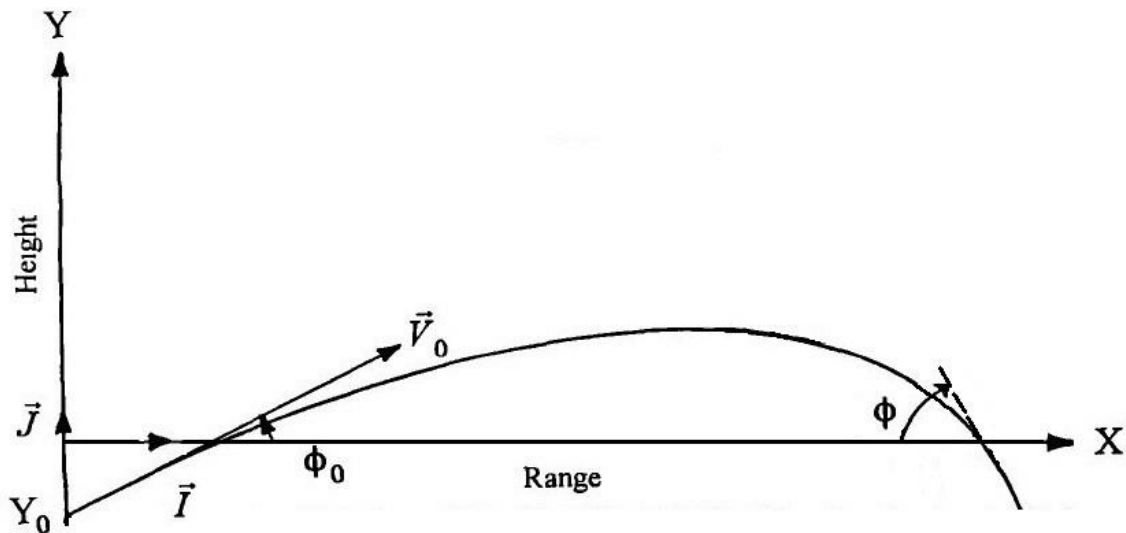


Fig. 5: Sistema de coordenadas de la trayectoria balística para hacer cero.

Para calcular el ángulo ϕ_0 es necesario implementar un método de prueba y error que integre la trayectoria para diferentes ángulos de elevación hasta dar con el que cumple el cero lejano impuesto. Se ha desarrollado un programa que junto a la integración numérica de la trayectoria, calcula el ángulo ϕ_0 necesario para hacer cero a una distancia X mediante el método de la secante. El método de la secante es un método numérico iterativo para buscar el cero de una función, en este caso de la coordenada Y, dependiente de una cierta variable, en este caso del ángulo ϕ_0 .

El método de la secante (Figura 6) se formula de manera general para una función $f(x)$ de igual forma que en [5, pág. 154], esto es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

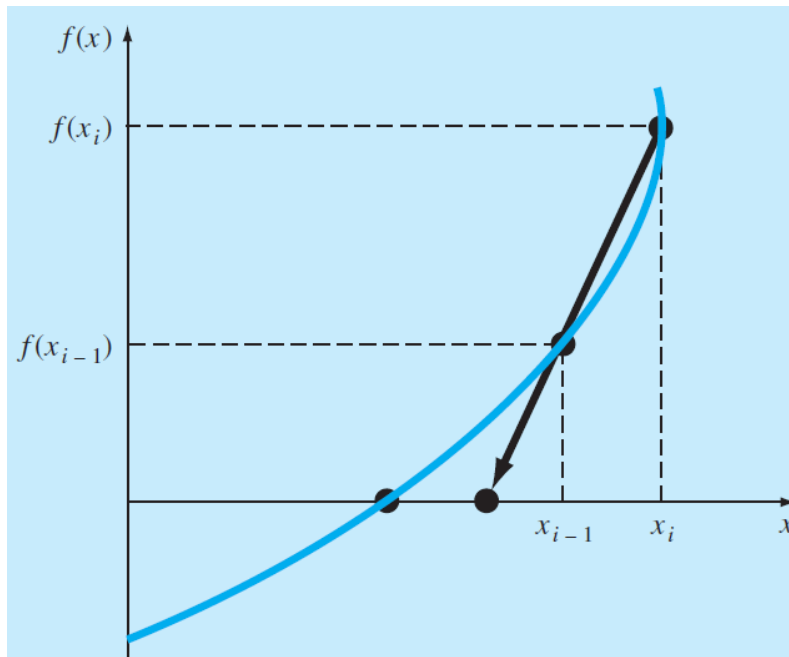


Fig. 6: Representación gráfica del método de la secante.

Aplicado a este caso, la función que buscamos hacer cero será la posición $Y = f(\phi_0)$, que es dependiente del ángulo ϕ_0 . Entonces la fórmula anterior toma la forma:

$$\phi_0^{i+1} = \phi_0^i - \frac{f(\phi_0^i)(\phi_0^{i-1} - \phi_0^i)}{f(\phi_0^{i-1}) - f(\phi_0^i)}$$

Así pues se aplicará este método integrando numéricamente la trayectoria para cada valor de ϕ_0 repetidas veces hasta llegar a la precisión deseada para hacer cero ($Y=0$), por ejemplo: $Y = 0 \pm 1 \text{ mm}$. En la práctica se consigue hacer cero con tolerancia de 0.1 mm en cuatro iteraciones.

El método requiere de dos valores iniciales del ángulo ϕ_0 . En este caso se ha utilizado 0° grados y 5.7 grados como valores iniciales, ya que este es el máximo ángulo por definición de tiro tenso.

5.6 Comparación con programas externos de cálculo de trayectorias

Existen en la actualidad un gran número de programas para el cálculo de trayectorias balísticas, los hay tanto gratuitos como comerciales, incluso algunos desarrollados por los propios fabricantes de cartuchería o de óptica. Existen también versiones implementadas en teléfonos móviles (App's). Aunque su precisión está comprobada con el uso masivo que se ha hecho con ellos, tienen la desventaja de que no ofrecen información sobre los métodos de cálculo utilizados.

En esta sección se muestra la comparación de algunos resultados del método numérico desarrollado en este trabajo frente a los de programas con buena reputación en el cálculo de trayectorias balísticas como son **JBM Ballistics** [3] y **Strellok** [2].

En el caso de Strellok vemos que (al menos la versión gratuita) solo ejecuta cálculos de trayectorias a partir de la función de resistencia estándar G1. Dada su funcionalidad y los parámetros de entrada demandados para el cálculo, podemos deducir que utiliza el método de Siacci. Dicho método es un procedimiento aproximado basado en la integración de la trayectoria universal de un proyectil estándar, por lo que sus resultados no serán tan precisos como los de una integración numérica. Para una mayor profundización sobre el método de Siacci consultar [4, cap. 6].

En cuanto a JBM Ballistics, dada su funcionalidad y parámetros, parece implementar un método numérico de integración. Pero desconocemos las ecuaciones y esquemas utilizados.

5.6.1 Comparación con proyectil Sierra 90 Gr. HP (función G1)

Comenzamos con la comparación de un proyectil regido por la función de resistencia G1, con el que podemos llevar a cabo la comparación con ambos programas. Los parámetros de dicho proyectil obtenidos de [4, pág. 113] junto con los parámetros del tiro se muestran en la Tabla 3:

V_0 (m/s)	d (in)	m (gr)	BC (lb/in²)(G1)
1024	0.277	90	0.207
P (atm)	T (°C)	Distancia del Cero (m)	Y_0 (cm)
1	20	300	-4

Tabla 3: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Sierra 90 Gr. HP.

Con nuestro método numérico calculando la trayectoria hasta los 500 metros de distancia, con un tamaño de paso de 0.4 metros que divide los 500 metros de trayectoria en 1250 partes, se obtienen los siguientes resultados, Tabla 4:

Integración Runge-Kutta respecto a la distancia, $h=0.4$ m						
X (m)	Y (cm)	V (m/s)	V_x (m/s)	V_y (m/s)	Fi (grados)	t (s)
0	-4	1024	1023.998	2.241	0.125	0
100	12.630	862.855	862.855	0.927	0.062	0.106
200	15.928	719.386	719.386	-0.367	-0.029	0.233
300	-3.72E-04	590.699	590.697	-1.670	-0.162	0.387
400	-44.502	478.163	478.154	-3.021	-0.362	0.575
500	-132.548	387.826	387.799	-4.523	-0.668	0.808

Tabla 4: Resumen de Resultados Runge-Kutta; proyectil Sierra 90 Gr. HP (G1).

Los resultados obtenidos con los programas de JBM Ballistics y Strellok son los mostrados en la Tabla 5 y Tabla 6 respectivamente:

Resultados JBM Ballistics			
X (m)	Y (cm)	V (m/s)	t (s)
0	-4	1024	0
100	12.6	863.5	0.106
200	15.9	720.2	0.233
300	0	591.5	0.386
400	-44.4	478.8	0.575
500	-132.2	388.1	0.807

Tabla 5: Resumen de Resultados JBM Ballistics; proyectil Sierra 90 Gr. HP (G1).

Resultados Strelok			
X (m)	Y (cm)	V (m/s)	t (s)
0	-4	1024	0
100	13	857.3	0.11
200	16.4	708.8	0.24
300	0	577.6	0.4
400	-46.3	462.9	0.59
500	-139.4	363.7	0.83

Tabla 6: Resumen de Resultados Strelok; proyectil Sierra 90 Gr. HP (G1).

Comparando nuestros resultados con los anteriores de JBM Ballistics y Strelok, obtenemos los siguientes errores expresados porcentualmente, Tabla 7:

X (m)	Error respecto a JBM Ballistics			Error respecto a Strelok		
	Y	V	t	Y	V	t
0	0%	0%	0%	0%	0%	0%
50	0.059%	0.037%	0.110%	3.333%	0.272%	15.094%
100	0.238%	0.075%	0.417%	2.846%	0.648%	3.235%
150	0.331%	0.102%	0.022%	2.672%	1.075%	1.743%
200	0.177%	0.113%	0.171%	2.877%	1.494%	2.750%
250	0.444%	0.117%	0.111%	3.143%	1.892%	1.180%
300	0%	0.135%	0.218%	0%	2.268%	3.290%
350	0.023%	0.120%	0.007%	3.741%	2.674%	2.850%
400	0.229%	0.133%	0.033%	3.884%	3.297%	2.510%
450	0.200%	0.106%	0.084%	4.365%	4.435%	2.061%
500	0.263%	0.071%	0.149%	4.915%	6.633%	2.626%

Tabla 7: Errores en la comparación con JBM Ballistics y Strelok; Sierra 90 Gr. HP (G1).

Los errores obtenidos en la comparación de resultados con JBM Ballistics son de menos del 0.5%, obteniendo unos resultados altamente similares a los nuestros.

En la comparación con Strelok apreciamos errores algo mayores pese a seguir siendo relativamente bajos. Esto posiblemente se deba a que como mencionamos anteriormente Strelok use un método aproximado, por lo que su precisión es algo menor. Se muestra una exhaustiva comparación de resultados con otros proyectiles en los Anexos III.I y III.II.

6. Correcciones por acción del Viento

La desviación de la trayectoria del proyectil por efecto del viento puede ser importante, especialmente en largas distancias.

Para estudiar la corrección por acción del viento se procede de forma similar a la vista en el apartado 3.1 de este trabajo, donde se han deducido las ecuaciones de movimiento de la trayectoria balística [4, cap. 7]. En este caso el sistema de coordenadas a usar será el mismo que en apartados anteriores solo que añadiendo un vector velocidad del viento, \vec{W} , cuyas componentes podemos ver en la Figura 7.

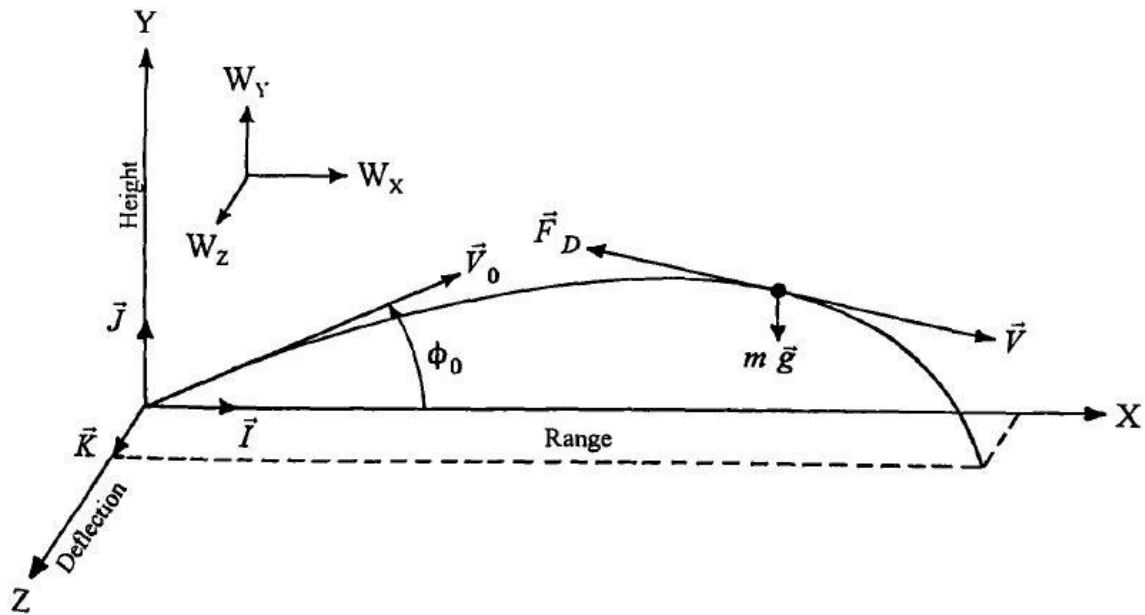


Fig. 7: Sistema de coordenadas de la trayectoria balística con viento

Teniendo en cuenta la velocidad del viento en la deducción de las ecuaciones de movimiento, es necesario trabajar con la velocidad relativa, es decir, de $(\vec{V} - \vec{W})$. La fuerza de resistencia tendrá la dirección y el sentido contrario a dicha velocidad relativa. Un fuerte viento en contra de la dirección de tiro resultará en un alcance menor y viceversa, mientras que un viento cruzado conllevará una desviación lateral.

Sustituyendo en la ecuación de la aceleración del apartado 3.1 la velocidad del proyectil por la velocidad relativa con viento, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\hat{C}_D^* \tilde{V} (\vec{V} - \vec{W}) + \vec{g}$$

Siendo \tilde{V} el módulo de la velocidad relativa respecto al viento, que en el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 7 será:

$$\tilde{V} = |\vec{V} - \vec{W}| = \sqrt{(V_x - W_x)^2 + (V_y - W_y)^2 + (V_z - W_z)^2}$$

Por lo que las ecuaciones cinemáticas de la trayectoria balística con viento serán:

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= -\hat{C}_D^* \tilde{V} (V_x - W_x) \\ \dot{V}_y &= -\hat{C}_D^* \tilde{V} (V_y - W_y) - g \\ \dot{V}_z &= -\hat{C}_D^* \tilde{V} (V_z - W_z)\end{aligned}$$

Ecuaciones a las que de igual manera podemos aplicar una simplificación de tiro tenso o rasante.

6.1 Simplificación de tiro tenso o rasante con viento

Al particularizar estas ecuaciones de movimiento en una trayectoria balística de tiro tenso hay que trabajar con la velocidad relativa, \tilde{V} , y ver cuál es la contribución de las distintas componentes de las velocidades. Para ello expresamos el módulo de la velocidad relativa de la siguiente forma:

$$\tilde{V} = \sqrt{(V_x - W_x)^2 + (V_y - W_y)^2 + (V_z - W_z)^2} = (V_x - W_x) \sqrt{1 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= (V_y - W_y)/(V_x - W_x) \\ \varepsilon_z &= (V_z - W_z)/(V_x - W_x)\end{aligned}$$

Esta expresión del módulo de la velocidad relativa puede ser expandida como una serie binomial como se hizo en el apartado 3:

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= (V_x - W_x)(1 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)^{1/2} \\ \tilde{V} &= (V_x - W_x) \left[1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) - \frac{1}{8}(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

Donde podemos ver que \tilde{V} y $(V_x - W_x)$ van a ser cantidades prácticamente iguales en el caso de una trayectoria balística de tiro tenso, cuando se cumpla que:

$$|W_x| \ll V_x; \quad |W_y| \ll V_x; \quad |W_z| \ll V_x$$

Haciendo que:

$$\varepsilon_y^2 \ll 1 \quad \text{y} \quad \varepsilon_z^2 \ll 1$$

Por lo que en este caso la simplificación de tiro tenso será:

$$\tilde{V} \approx (V_x - W_x)$$

Así pues, aplicando la simplificación de tiro tenso a las ecuaciones cinemáticas de la trayectoria balística con viento, obtenemos las siguientes ecuaciones de la aceleración:

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= \frac{dV_x}{dt} = -\hat{C}_D^* (V_x - W_x)^2 \\ \dot{V}_y &= \frac{dV_y}{dt} = -\hat{C}_D^* (V_x - W_x)(V_y - W_y) - g \\ \dot{V}_z &= \frac{dV_z}{dt} = -\hat{C}_D^* (V_x - W_x)(V_z - W_z)\end{aligned}$$

Podemos ver que la corrección por acción del viento es en definitiva tener en cuenta la velocidad del proyectil junto con la del viento, es decir, la velocidad relativa en cada una de las componentes del sistema de coordenadas.

De la misma forma que vimos en el capítulo 3, mediante un cambio de variable obtenemos las ecuaciones de la velocidad derivadas respecto a la distancia X. Esta vez también aplicamos el cambio de variable también a la componente Z de la velocidad:

$$\dot{V}_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dX} \frac{dX}{dt} = V_x \frac{dV_z}{dX} = V_x V'_z$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned}V'_x &= \frac{dV_x}{dX} = -\hat{C}_D^* \frac{(V_x - W_x)^2}{V_x} \\ V'_y &= \frac{dV_y}{dX} = -\hat{C}_D^* \frac{(V_x - W_x)(V_y - W_y)}{V_x} - \frac{g}{V_x} \\ V'_z &= \frac{dV_z}{dX} = -\hat{C}_D^* \frac{(V_x - W_x)(V_z - W_z)}{V_x}\end{aligned}$$

De igual forma que en el Capítulo 5, podemos programar nuestro método de integración numérica con estas ecuaciones de tiro tenso con la corrección de viento. La diferencia es que ahora añadimos dos nuevas componentes a la forma vectorial del método (la posición Z y su velocidad V_z). De esta forma podemos comparar los resultados de este método con los de programas externos de cálculo de trayectorias como hicimos anteriormente. Los resultados de dicha comparación se encuentran en el Anexo IV. Donde se aprecia un acuerdo excelente.

7. Tiro tenso o rasante inclinado

Una situación particular de bastante interés práctico es la de tiro tenso con una cierta inclinación. Es decir, aquella en que la línea de puntería no es horizontal. Dicho de otro modo, cuando se bate un objetivo que está a una altura mayor o menor que la de la boca de fuego. Tal como muestra la Figura 8.

En este tipo de trayectorias la gravedad no solo actúa en la dirección del eje vertical tradicional, sino que tiene ahora una componente en la dirección de avance del proyectil. Para realizar el cálculo de este tipo de trayectorias es necesario modificar las ecuaciones de movimiento del tiro tenso convencional que se han utilizado hasta el momento.

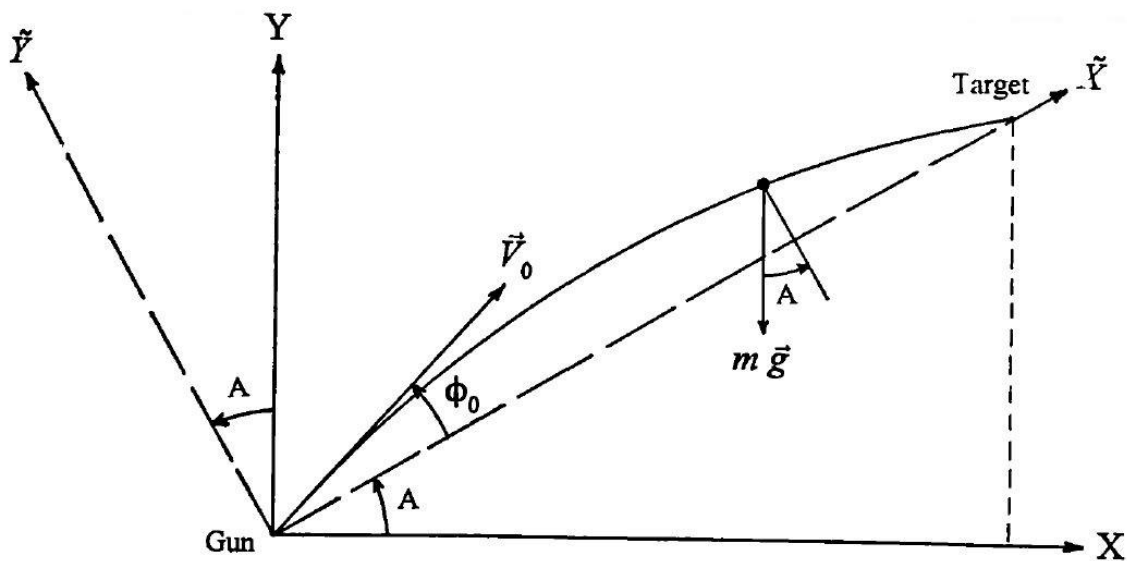


Fig. 8: Sistema de coordenadas del tiro tenso con inclinación positiva.

Para ello definimos un nuevo sistema de ejes girado un ángulo A (llamado ángulo de situación) respecto al anterior.

Como se puede apreciar en la Figura 8, en este nuevo sistema de coordenadas compuesto por los ejes \tilde{X} e \tilde{Y} la aceleración de la gravedad tiene proyección sobre ambos ejes.

Partiendo de la formulación general de las ecuaciones cinemáticas de cualquier proyectil sometido solo a fuerzas gravitacionales y aerodinámicas, deducidas en el capítulo 3. Podemos aplicar esta en el sistema de coordenadas inclinado.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\hat{C}_D^* V \vec{V} + \vec{g}$$

Descomponiendo la ecuación de la aceleración en los ejes inclinados obtenemos:

$$\dot{V}_x = \frac{d\tilde{V}_x}{dt} = -\hat{C}_D^* V \tilde{V}_x - g \sin A$$

$$\dot{V}_y = \frac{d\tilde{V}_y}{dt} = -\hat{C}_D^* V \tilde{V}_y - g \cos A$$

Donde:

$$V = \sqrt{\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_y^2}$$

Ahora a partir de estas ecuaciones y siendo aplicable la simplificación de tiro tenso o rasante, dado que la condición para dicha simplificación viene dada porque si $|\tilde{V}_y/\tilde{V}_x| < 10^{-1}$; entonces V y \tilde{V}_x difieren en menos del 0.5%.

Como vimos en el capítulo 3, sabiendo que $\tilde{V}_y/\tilde{V}_x = \tan \phi$; y que por definición matemáticamente estricta en un tiro tenso los ángulos de salida y de caída deben ser menores de 5.7 grados sobre el eje inclinado \tilde{X} , sabemos que esta condición se cumplirá. De forma que podemos aplicar la simplificación $V \approx \tilde{V}_x$ quedando las ecuaciones de la aceleración del tiro tenso inclinado de la siguiente forma:

$$\dot{V}_x = \frac{d\tilde{V}_x}{dt} = -\hat{C}_D^* \tilde{V}_x^2 - g \sin A$$

$$\dot{V}_y = \frac{d\tilde{V}_y}{dt} = -\hat{C}_D^* \tilde{V}_x \tilde{V}_y - g \cos A$$

De igual forma que se hizo en el capítulo 3, se puede llevar a cabo el siguiente cambio de variable:

$$V_x = \frac{d\tilde{V}_x}{dt} = \frac{d\tilde{V}_x}{d\tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{V}_x \frac{d\tilde{V}_x}{d\tilde{X}} = \tilde{V}_x V_x'$$

$$V_y = \frac{d\tilde{V}_y}{dt} = \frac{d\tilde{V}_y}{d\tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{V}_x \frac{d\tilde{V}_y}{d\tilde{X}} = \tilde{V}_x V_y'$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento conteniendo la derivada de la velocidad respecto de la posición \tilde{X} , a las que se puede aplicar igualmente le método numérico de integración desarrollado en las secciones anteriores:

$$V_x' = \frac{d\tilde{V}_x}{d\tilde{X}} = -\hat{C}_D^* \tilde{V}_x - \frac{g}{\tilde{V}_x} \sin A$$

$$V_y' = \frac{d\tilde{V}_y}{d\tilde{X}} = -\hat{C}_D^* \tilde{V}_y - \frac{g}{\tilde{V}_x} \cos A$$

Se ha realizado una comparación de los resultados obtenidos frente a los del programa JBM Ballistics obteniéndose una concordancia excelente como se muestra en Anexo V.

8. Aproximación de la resistencia de diversos proyectiles mediante la función inversa de la raíz cuadrada del Mach

En este apartado se propone comprobar la viabilidad de utilizar las soluciones exactas disponibles mediante la aproximación simple del coeficiente de resistencia inversamente proporcional a la raíz cuadrada del Mach ($C_D = K_3/\sqrt{M}$). La ventaja de esta estrategia es la enorme sencillez de cálculo al disponerse de soluciones cerradas en forma algebraica.

Para ello se ha decidido proceder ajustando la constante K_3 para conseguir la mejor aproximación a la curva de resistencia de un proyectil estándar G7. Se ha escogido esta función porque aproxima de forma razonablemente buena la curva de resistencia de proyectiles modernos con buena aerodinámica.

$$C_{D7} \approx \frac{K_3}{\sqrt{M}}$$

Se busca tener un buen ajuste en el rango del número de Mach que nos interesa en las trayectorias balísticas de tiro tenso, comprendido entre 1.2 y 2.5.

Obtenemos así un valor de la constante: $K_3 = 0.4226$

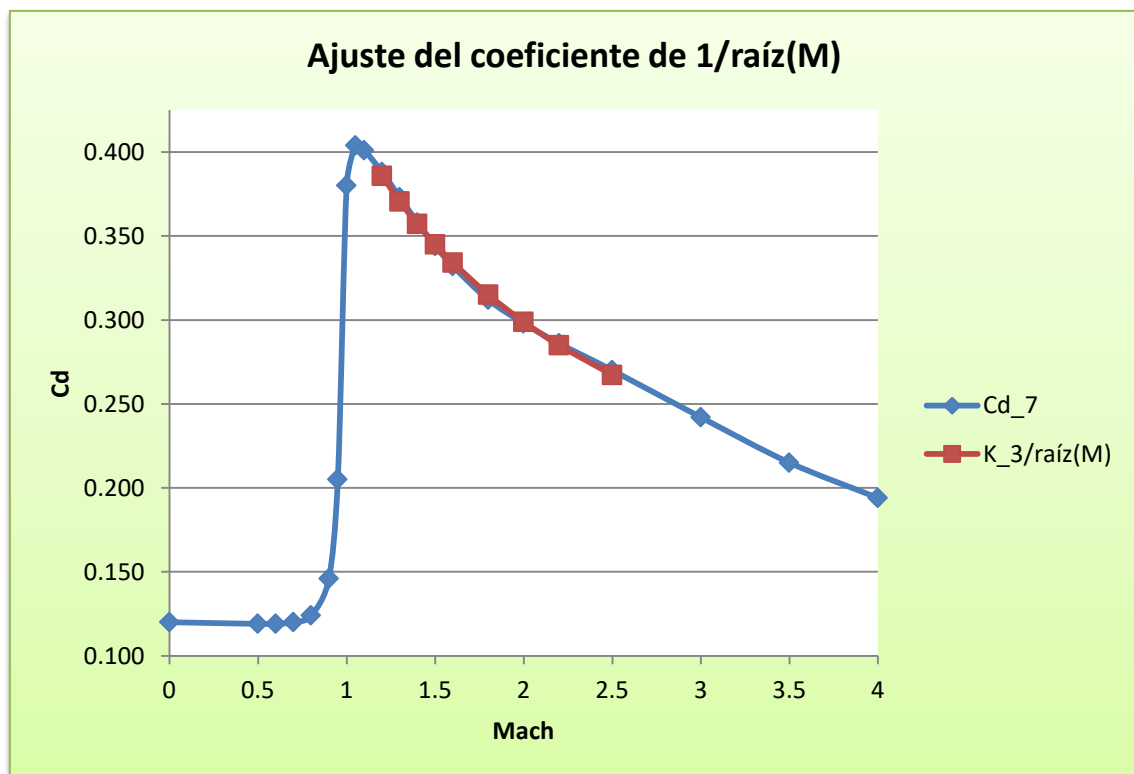


Fig. 9: Ajuste de K_3 para la función de resistencia G7. $K_3=0.4226$.

Para obtener el valor del coeficiente K_3^p de un proyectil p , haremos uso de su factor de forma relativo al proyectil tipo G7, i_7^p .

$$C_D^p = C_{D7} \cdot i_7^p \approx \frac{K_3}{\sqrt{M}} \cdot i_7^p = \frac{K_3^p}{\sqrt{M}}$$

De esta forma se obtiene la constante del proyectil p (K_3^p) y se puede implementar fácilmente la solución exacta de esta aproximación, siendo:

$$K_3^p = K_3 \cdot i_7^p$$

Una vez conocida la K_3^p podemos aplicar las formulas cerradas de la trayectoria, obtenidas en el Apartado 4.3 sin más que definir k_3 como:

$$k_3 = \frac{\rho S}{2m} K_3^p \sqrt{c}$$

La corrección debida a viento cruzado constante puede incorporarse también según la fórmula [4 pág. 159]:

$$Z = W_z \left(t - \frac{X}{V_{x0}} \right)$$

$$V_z = W_z \left(1 - \frac{V_x}{V_{x0}} \right)$$

Para estudiar la validez de esta aproximación, en el Anexo VI se ha realizado una comparación con los resultados obtenidos mediante integración numérica.

En dicho Anexo, podemos apreciar que en la comparación de errores con el método de integración numérica siendo un método muy preciso, prácticamente la totalidad de los mismo son inferiores al 1%, lo que supone unos errores muy bajos. Por lo que concluimos que este cálculo aproximado es suficientemente válido, siendo un método interesante para el cálculo de trayectorias con muy reducidos costes computacionales ya que son resultados obtenidos mediante fórmulas cerradas.

9. Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido la obtención de un programa propio de cálculo de trayectorias balísticas en tiro tenso. Para ello se han expuesto las leyes de resistencia en este tipo de trayectorias junto con los proyectiles estándar utilizados para caracterizar dicha resistencia, se han deducido las ecuaciones de movimiento del proyectil bajo efectos aerodinámicos y gravitacionales así como los efectos de las condiciones atmosféricas y se han mostrado las soluciones exactas de dichas ecuaciones de movimiento para distintas aproximaciones de las leyes de resistencia.

Tras esto se ha elegido e implementado un método de integración numérica para las ecuaciones de movimiento que ha sido programado en C/C++. A continuación se ha implementado un método numérico iterativo para “hacer cero” la trayectoria, así como la aplicación del método de integración numérica para otros casos como el tiro tenso inclinado y el tiro tenso con la corrección por viento y se han realizado múltiples simulaciones de distintas trayectorias. Se han comparado los resultados con dos conocidos programas de cálculo de trayectorias, como son, JBM Ballistics y Strelok.

Finalmente se ha propuesto un método para calcular la trayectoria de proyectiles modernos esbeltos mediante la aproximación de su coeficiente de resistencia aerodinámico por la función inversa de la raíz cuadrada del número de Mach. Ello permite aplicar fórmulas algebraicas cerradas para la trayectoria. Este método se ha mostrado suficientemente preciso en los ensayos realizados comparándolo con la integración numérica.

De manera resumida se puede afirmar lo siguiente:

- Se ha establecido la convergencia del método numérico desarrollado haciendo uso de la solución exacta correspondiente a una aproximación simplificada de las leyes de resistencia, consiguiéndose alcanzar precisión de máquina.
- Las comparaciones de resultados obtenidos por integración numérica con los ofrecidos por los programas externos de cálculo de trayectorias muestran un acuerdo excelente.
- La aproximación simple mediante las fórmulas cerradas correspondiente a la ley de resistencia aerodinámica inversa con la raíz cuadrada del número de Mach parece una solución suficientemente precisa y económica, al menos para proyectiles con buena aerodinámica asimilable a la del proyectil estándar tipo 7.

Bibliografía

- [1] Berger Bullets. (2020). *2020 Berger Bullet Quick Reference Sheet*.
<https://www.bergerbullets.com/pdf/Quick-Reference-Sheets.pdf>
- [2] Igor Borisov (2013). *Strelok. Ballistic calculator (2.4.8)* [Aplicación móvil]. Google Play. <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.borisov.strelok&hl=es&gl=US>
- [3] JBM Ballistics, LLC. (10/09/2021). *JBM Ballistics calculator*.
<https://www.jbmballistics.com/>
- [4] R.L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics*, 2 ed. Schiffer Publishing Ltd, 1998
- [5] S.C. Chapra y R.P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*, 6 ed. McGraw Hill 2011

Lista de figuras

Fig. 1: Función del coeficiente de resistencia, proyectil calibre .30 Ball M2.....	6
Fig. 2: Sistema de coordenadas de la trayectoria balística	9
Fig. 3: Gráfica de la norma infinito de la posición Y, Runge-Kutta respecto al tiempo..	21
Fig. 4: Gráfica de la norma infinito de la velocidad, Runge-Kutta respecto a la distancia	21
Fig. 5: Sistema de coordenadas de la trayectoria balística para hacer cero	22
Fig. 6: Representación gráfica del método de la secante	23
Fig. 7: Sistema de coordenadas de la trayectoria balística con viento	26
Fig. 8: Sistema de coordenadas del tiro tenso con inclinación positiva.....	29
Fig. 9: Ajuste de K_3 para la función de resistencia G7. $K_3=0.4226$	31
Fig. 10: Proyectil tipo 1 (G1), dimensiones en calibres	37
Fig. 11: Proyectil tipo 2 (G2), dimensiones en calibres	37
Fig. 12: Proyectil tipo 5 (G5), dimensiones en calibres	37
Fig. 13: Proyectil tipo 6 (G6), dimensiones en calibres	38
Fig. 14: Proyectil tipo 7 (G7), dimensiones en calibres	38
Fig. 15: Proyectil tipo 8 (G8), dimensiones en calibres	38
Fig. 16: Proyectil tipo esfera (GS), dimensiones en calibres	39
Fig. 17: Proyectil tipo GL, dimensiones en calibres	39
Fig. 18-a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma infinito, Runge-Kutta respecto al tiempo.....	42
Fig. 19-a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma dos, Runge-Kutta respecto al tiempo.....	44
Fig. 20- a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma infinito, Runge-Kutta respecto a la distancia	47
Fig. 21- a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma dos, Runge-Kutta respecto a la distancia	49

Lista de tablas

Tabla 1: Parámetros del proyectil calibre .30 ball M2.....	20
Tabla 2: Parámetros de tiro tenso (SI). Proyectil .30 Ball M2	20
Tabla 3: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Sierra 90 Gr. HP.....	24
Tabla 4: Resumen de Resultados Runge-Kutta; proyectil Sierra 90 Gr. HP (G1).....	24
Tabla 5: Resumen de Resultados JBM Ballistics; proyectil Sierra 90 Gr. HP (G1)	25
Tabla 6: Resumen de Resultados Strelak; proyectil Sierra 90 Gr. HP (G1).....	25
Tabla 7: Errores en la comparación con JBM Ballistics y Strelak; Sierra 90 Gr. HP (G1) 25	
Tabla 8: Coeficientes de resistencia estándares frente al número de Mach	39
Tabla 9: Resumen Norma Infinito, método Runge-Kutta respecto al tiempo	40
Tabla 10: Resumen Norma 2, método Runge-Kutta respecto al tiempo	40
Tabla 11: Resumen Norma Infinito, método Runge-Kutta respecto a la distancia.....	45
Tabla 12: Resumen Norma 2, método Runge-Kutta respecto a la distancia	45
Tabla 13: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Proyectil 7.62mm M80	50
Tabla 14: Resultados Runge-Kutta. Proyectil 7.62mm M80.....	50
Tabla 15: Resultados y comparación con JBM Ballistics. Proyectil 7.62mm M80.....	51
Tabla 16: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Proyectil .30 Ball M2.....	52
Tabla 17: Resultados Runge-Kutta. Proyectil .30Ball M2	52
Tabla 18: Resultados y comparación con JBM Ballistics. Proyectil .30 Ball M2	52
Tabla 19: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Proyectil Hybrid OTM Tactical	53
Tabla 20: Resultados Runge-Kutta. Proyectil Hybrid OTM Tactical	53
Tabla 21: Resultados y comparación con JBM Ballistics. Proyectil Hybrid OTM Tactical	54
Tabla 22: Parámetros del proyectil y del tiro tenso inclinado. Proyectil .30 Ball M2	55
Tabla 23: Resultados Runge-Kutta tiro inclinado. Proyectil .30Ball M2.....	55
Tabla 24: Resultados y comparación con JBM Ballistics; tiro inclinado. Proyectil .30 Ball M2.....	55
Tabla 25: Parámetros del proyectil y tiro tenso con viento cruzado. Proyectil 7.62mm M80.....	56
Tabla 26: Resultados Runge-Kutta con viento cruzado. Proyectil 7.62mm M80.....	56
Tabla 27: Resultados de la trayectoria aproximada; $K_3=0.4226$. Proyectil 7.62mm M80	57
Tabla 28: Comparación con la solución numérica; $K_3=0.4226$. Proyectil 7.62mm M80	57

Anexos

I Projectiles and standard resistance coefficients

A continuación presentamos como referencia los distintos proyectiles estándar en balística [4, cap. 1]. Empezando con el proyectil tipo 1 (G1), Figura 10; es uno de los proyectiles más antiguos existentes, su forma se caracteriza por una base plana y una ojiva de 2 calibres.

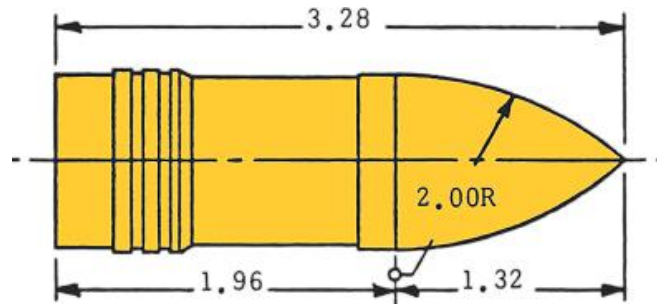


Fig. 10: Proyectil tipo 1 (G1), dimensiones en calibres.

El proyectil tipo 2 (G2), Figura 11; es un proyectil característico debido a que su ojiva toma una forma cónica, lo que es poco común en proyectiles de pequeñas armas.

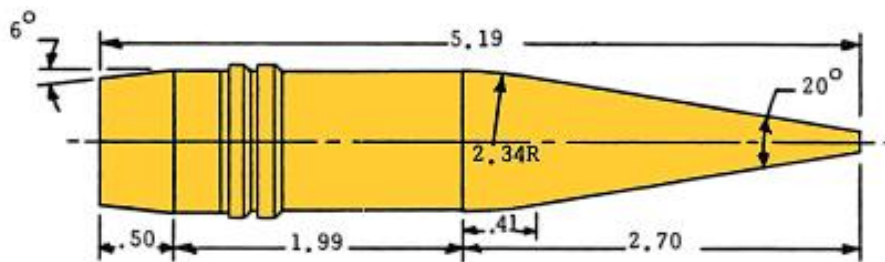


Fig. 11: Proyectil tipo 2 (G2), dimensiones en calibres.

El proyectil tipo 5 (G5), Figura 12; se caracteriza por su cola de 7.5 grados ($7^{\circ}30'$) y su ojiva de calibre 6.19.

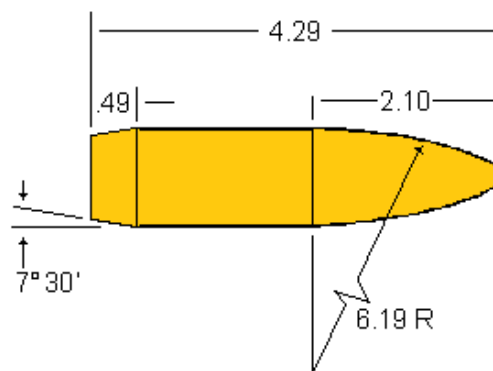


Fig. 12: Proyectil tipo 5 (G5), dimensiones en calibres.

En el caso del proyectil tipo 6 (G6), Figura 13; lo que lo caracteriza es su base plana y su ojiva de calibre 6.99.

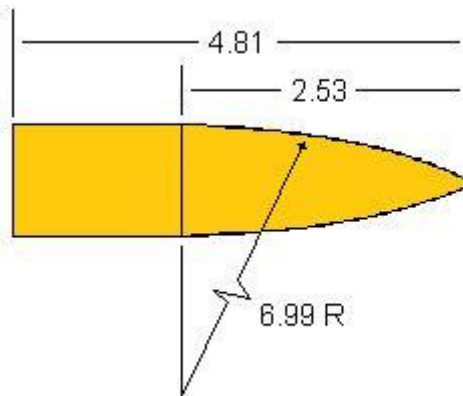


Fig. 13: Proyectil tipo 6 (G6), dimensiones en calibres.

El proyectil tipo 7 (G7), Figura 14; es uno de los proyectiles tipo más usados dado su parecido a los proyectiles modernos. Este se caracteriza por su cola de 7.5 grados y su ojiva de calibre 10.

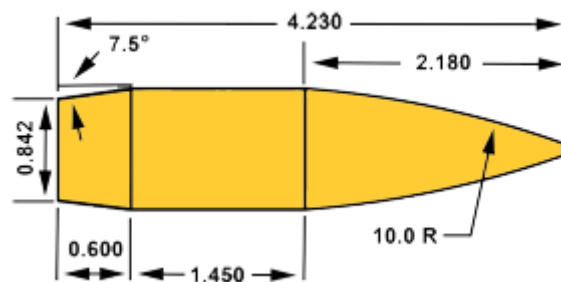


Fig. 14: Proyectil tipo 7 (G7), dimensiones en calibres.

El proyectil tipo 8 (G8), Figura 15; caracterizado por su base plana y una ojiva de calibre 10.

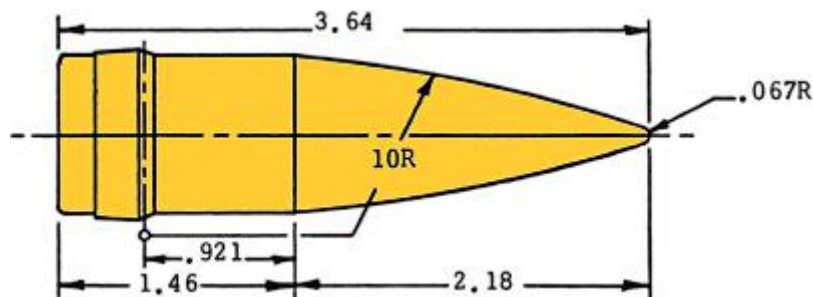
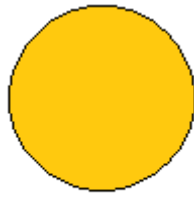


Fig. 15: Proyectil tipo 8 (G8), dimensiones en calibres

El proyectil tipo esfera (GS), Figura 16; es una esfera de calibre 9/16".



9/16" Sphere

Fig. 16: Proyecto tipo esfera (GS), dimensiones en calibres.

El proyectil GL, Figura 17; es un proyectil romo de ojiva de radio calibre 0.5 usado para representar proyectiles usados a finales de siglo XIX y principios del XX.

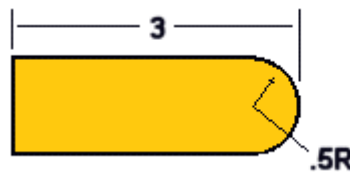


Fig. 17: Proyecto tipo GL, dimensiones en calibres.

Finalmente, la Tabla 8 presenta los coeficientes de resistencia en función del número de Mach de los distintos proyectiles estándar [McCoy, pág 112]:

<i>Mach</i>	C_{DING}	C_{D1}	C_{D2}	C_{D5}	C_{D6}	C_{D7}	C_{D8}	C_{DSP}
0	0.228	0.263	0.23	0.171	0.262	0.12	0.211	0.466
0.5	0.228	0.203	0.198	0.16	0.216	0.119	0.21	0.497
0.6	0.228	0.203	0.183	0.153	0.213	0.119	0.21	0.526
0.7	0.228	0.217	0.17	0.147	0.212	0.12	0.21	0.592
0.8	0.26	0.255	0.167	0.149	0.215	0.124	0.21	0.661
0.9	0.317	0.342	0.183	0.182	0.23	0.146	0.211	0.737
0.95	0.373	0.408	0.259	0.241	0.273	0.205	0.257	0.776
1	0.435	0.481	0.398	0.338	0.36	0.38	0.407	0.814
1.05	0.503	0.543	0.41	0.403	0.426	0.404	0.448	0.851
1.1	0.576	0.588	0.411	0.42	0.447	0.401	0.448	0.887
1.2	0.628	0.639	0.402	0.434	0.448	0.388	0.435	0.951
1.3	0.642	0.659	0.39	0.439	0.439	0.373	0.421	0.991
1.4	0.642	0.663	0.376	0.441	0.428	0.358	0.406	1.0030
1.5	0.642	0.657	0.359	0.439	0.416	0.344	0.392	1.0080
1.6	0.642	0.647	0.343	0.433	0.404	0.332	0.378	1.0090
1.8	0.621	0.621	0.315	0.412	0.379	0.312	0.352	1.0070
2	0.602	0.593	0.293	0.386	0.352	0.298	0.329	1.0010
2.2	0.585	0.569	0.277	0.363	0.325	0.286	0.308	0.994
2.5	0.558	0.54	0.257	0.335	0.288	0.27	0.28	0.981
3	0.514	0.513	0.231	0.3	0.241	0.242	0.243	0.961
3.5	0.479	0.504	0.209	0.275	0.209	0.215	0.215	0.943
4	0.451	0.501	0.191	0.255	0.187	0.194	0.195	0.928

Tabla 8: Coeficientes de resistencia estándares frente al número de Mach.

II.I Convergencia del método Runge-Kutta respecto al Tiempo

Vemos la tabla resumen de la norma infinito del error absoluto para cada parámetro, Tabla 9:

Nº Intervalos	Paso (s)	Log(Paso)	Log (Norma INFINITO del error)					
			Y	V	Vx	Vy	Fi	X
2	1.0924	0.0384	-0.775	0.101	0.101	-0.950	-1.883	0.981
4	0.5462	-0.2627	-2.133	-0.867	-0.867	-2.545	-3.609	-0.373
6	0.3641	-0.4388	-2.899	-1.585	-1.585	-3.385	-4.157	-1.136
8	0.2731	-0.5637	-3.432	-2.102	-2.102	-3.948	-4.619	-1.667
10	0.2185	-0.6606	-3.840	-2.496	-2.496	-4.376	-4.990	-2.073
20	0.1092	-0.9616	-5.085	-3.723	-3.723	-5.663	-6.174	-3.316
30	0.0728	-1.1377	-5.804	-4.435	-4.435	-6.394	-6.875	-4.034
50	0.0437	-1.3596	-6.705	-5.330	-5.330	-7.304	-7.782	-4.932
100	0.0218	-1.6606	-7.917	-6.539	-6.539	-8.525	-8.973	-6.144
200	0.0109	-1.9616	-9.124	-7.746	-7.746	-9.737	-10.171	-7.352
400	0.0055	-2.2627	-10.333	-8.952	-8.952	-10.947	-11.368	-8.558
500	0.0044	-2.3596	-10.719	-9.339	-9.339	-11.336	-11.756	-8.946
800	0.0027	-2.5637	-11.564	-10.152	-10.152	-12.204	-12.509	-9.751
900	0.0024	-2.6148	-11.728	-10.356	-10.357	-12.334	-12.806	-9.970
1000	0.0022	-2.6606	-11.809	-10.518	-10.518	-12.346	-13.297	-10.137

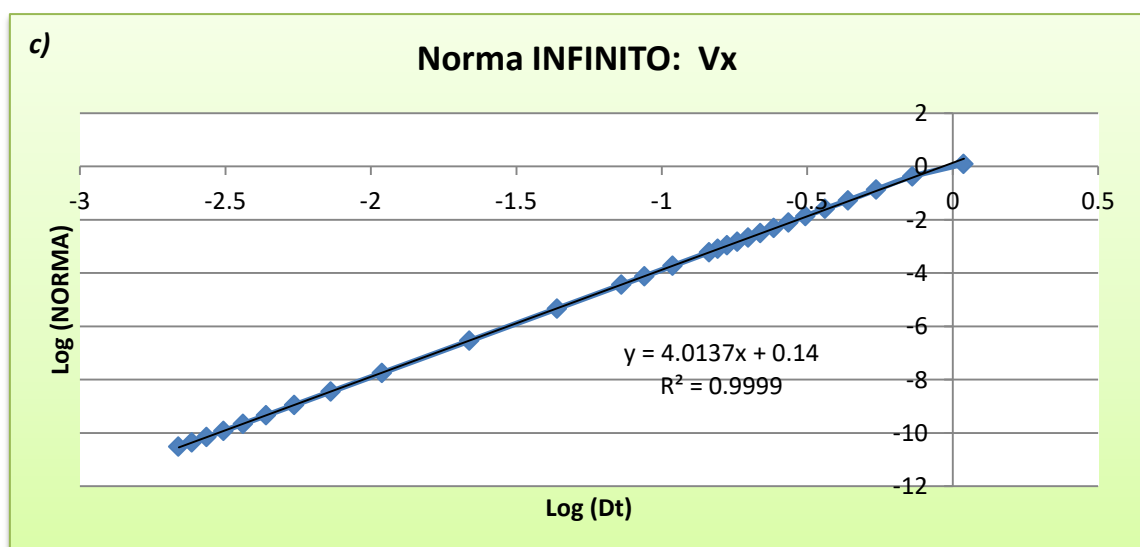
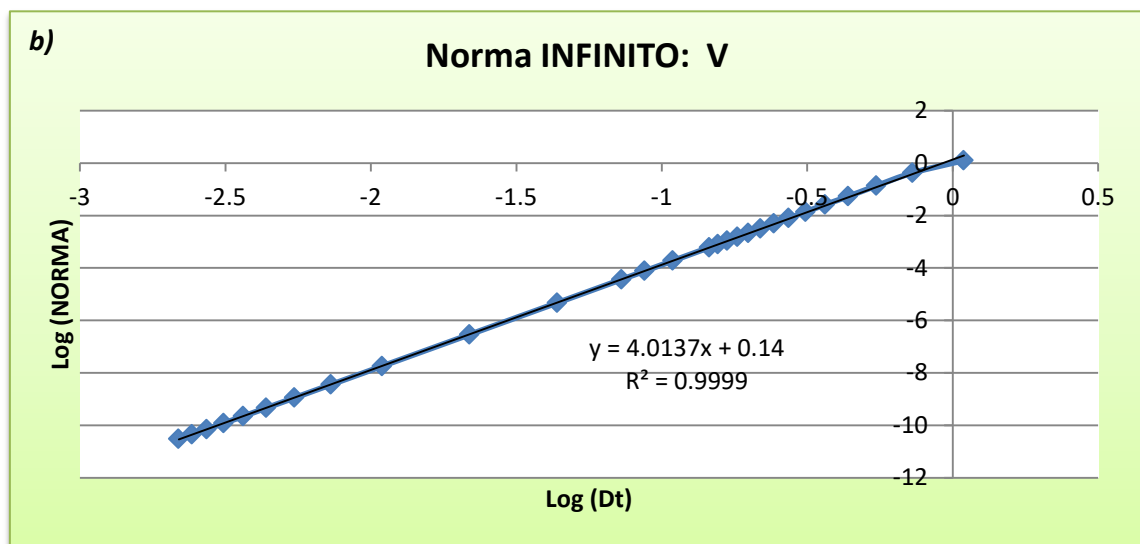
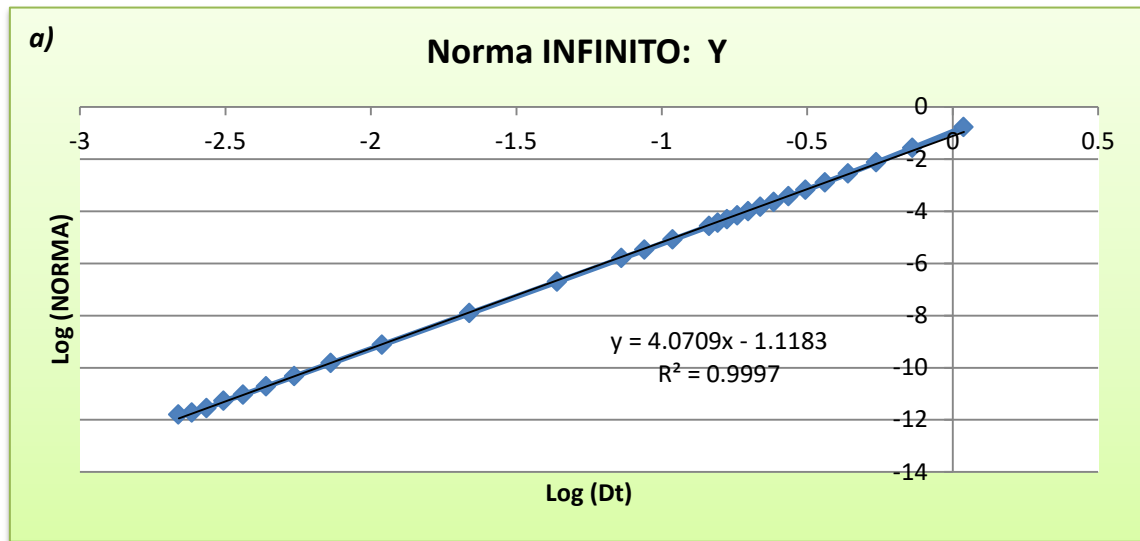
Tabla 9: Resumen Norma Infinito, método Runge-Kutta respecto al tiempo.

Vemos la tabla resumen de la norma dos del error absoluto para cada parámetro, Tabla 10:

Nº Intervalos	Paso (s)	Log(Paso)	Log (Norma DOS del error)					
			Y	V	Vx	Vy	Fi	X
2	1.0924	0.0384	-0.731	0.178	0.177	-0.843	-1.754	1.125
4	0.5462	-0.2627	-1.940	-0.661	-0.661	-2.294	-3.452	-0.098
6	0.3641	-0.4388	-2.621	-1.293	-1.293	-3.055	-4.070	-0.782
8	0.2731	-0.5637	-3.092	-1.745	-1.745	-3.567	-4.504	-1.255
10	0.2185	-0.6606	-3.453	-2.095	-2.095	-3.951	-4.843	-1.616
20	0.1092	-0.9616	-4.551	-3.173	-3.173	-5.097	-5.903	-2.714
30	0.0728	-1.1377	-5.182	-3.799	-3.799	-5.744	-6.523	-3.345
50	0.0437	-1.3596	-5.978	-4.584	-4.584	-6.550	-7.332	-4.138
100	0.0218	-1.6606	-7.037	-5.642	-5.642	-7.621	-8.374	-5.199
200	0.0109	-1.9616	-8.094	-6.698	-6.698	-8.683	-9.423	-6.256
400	0.0055	-2.2627	-9.149	-7.753	-7.753	-9.742	-10.470	-7.311
500	0.0044	-2.3596	-9.489	-8.091	-8.091	-10.082	-10.803	-7.650
800	0.0027	-2.5637	-10.224	-8.797	-8.797	-10.859	-11.421	-8.354
900	0.0024	-2.6148	-10.376	-8.990	-8.990	-10.956	-11.735	-8.549
1000	0.0022	-2.6606	-10.488	-9.154	-9.154	-11.040	-12.360	-8.723

Tabla 10: Resumen Norma 2, método Runge-Kutta respecto al tiempo.

Representando el logaritmo decimal del paso frente al logaritmo decimal de la norma para cada parámetro, obtenemos las siguientes gráficas, Figuras 18 y 19:



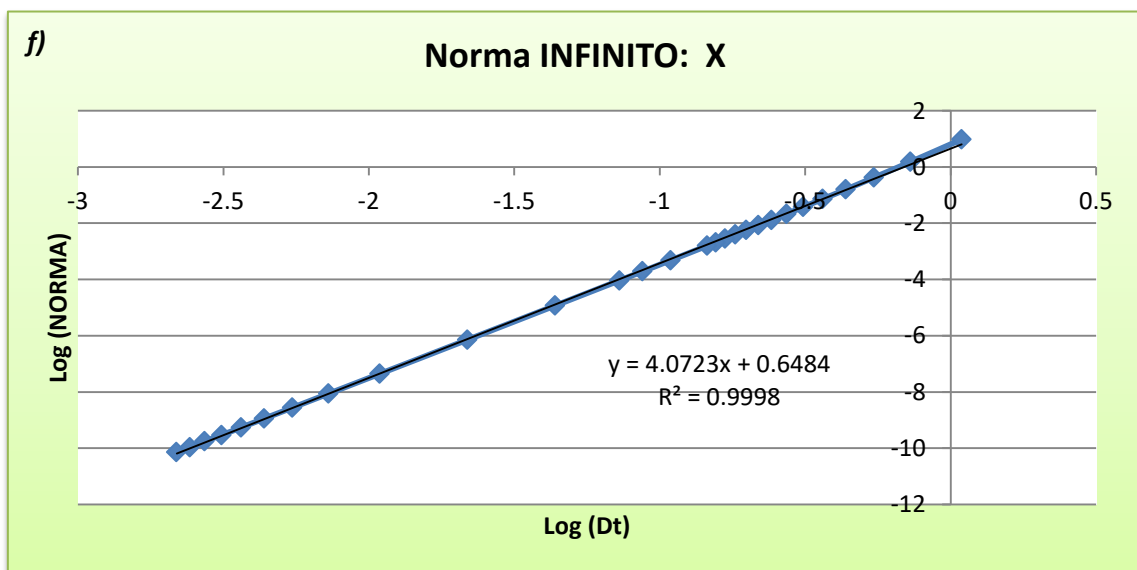
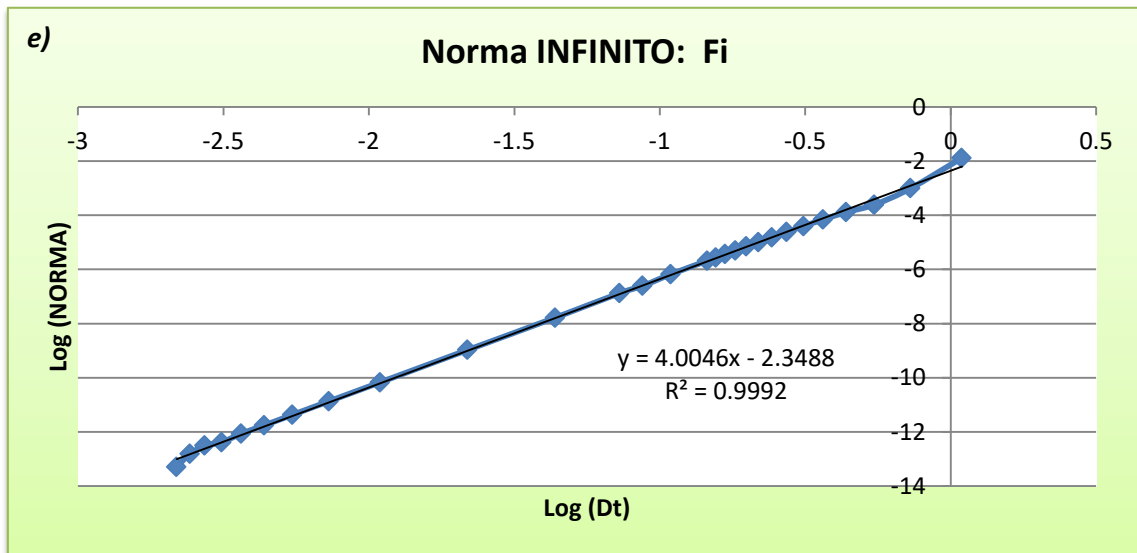
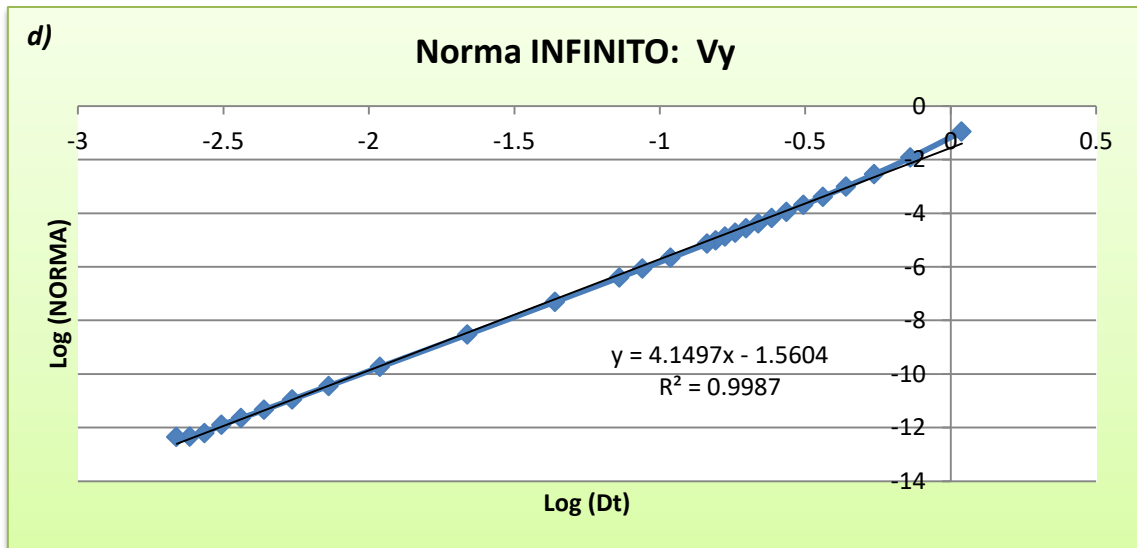
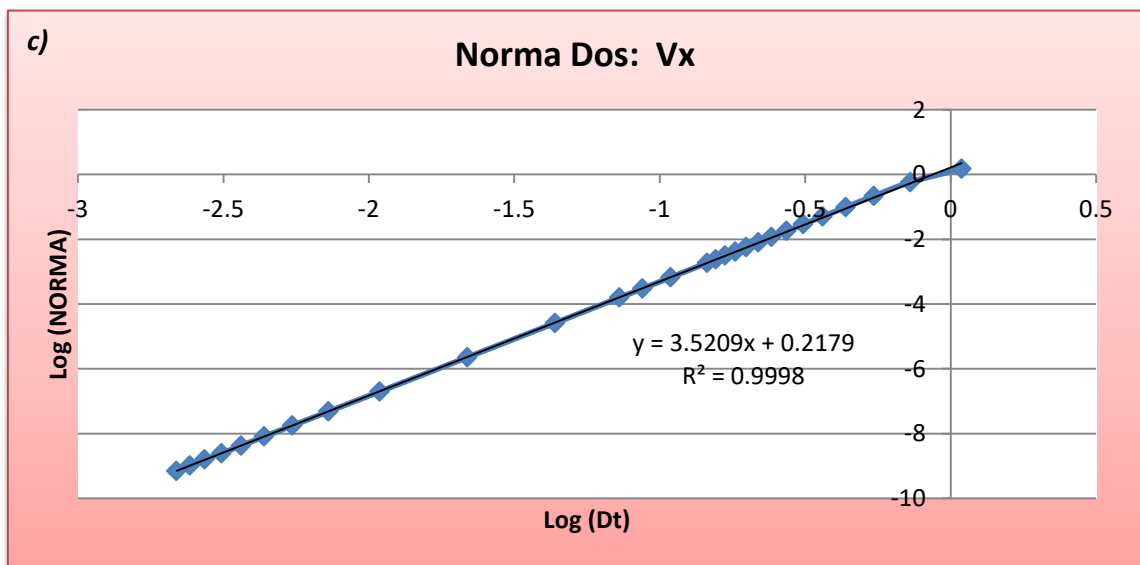
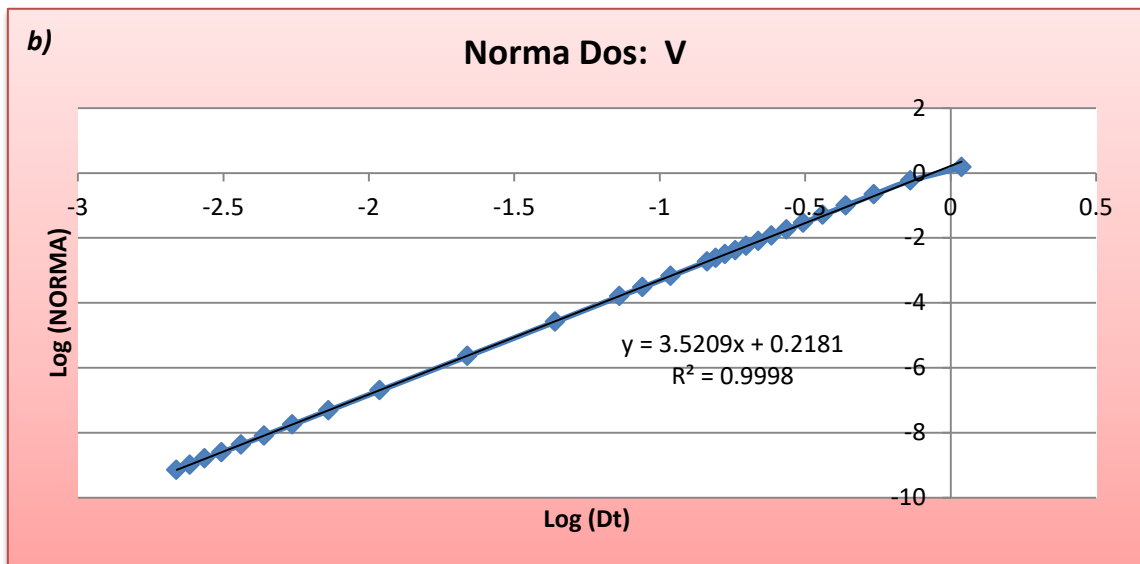
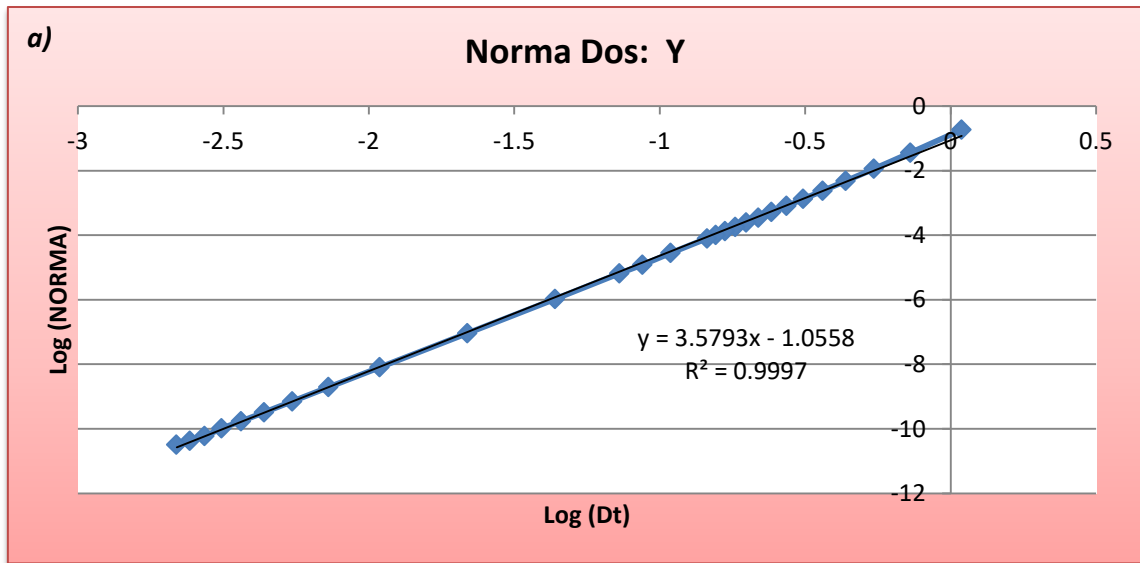


Fig. 18-a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma infinito, Runge-Kutta respecto al tiempo.



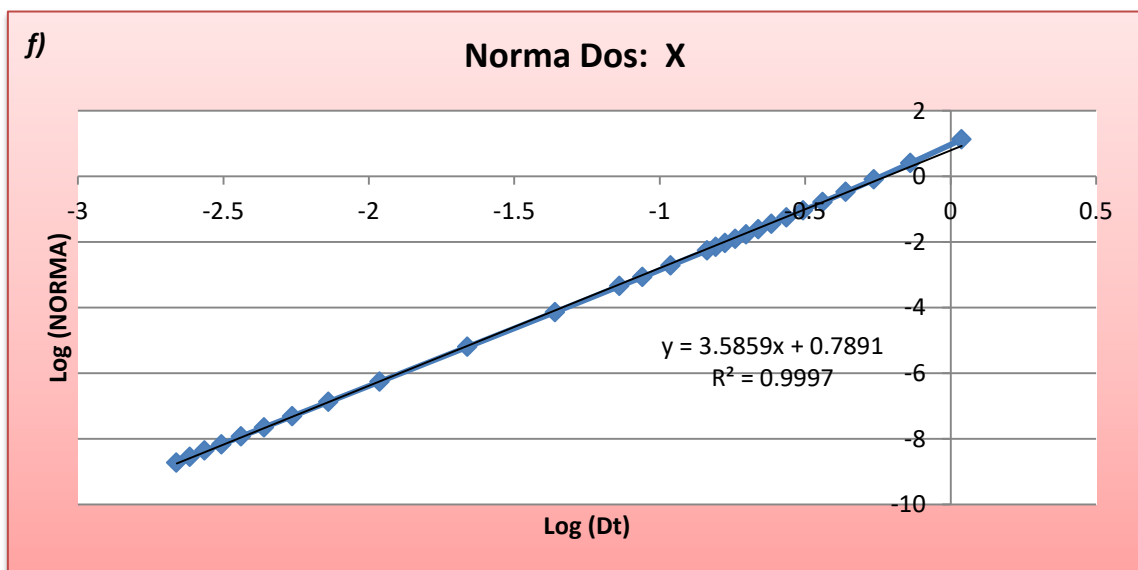
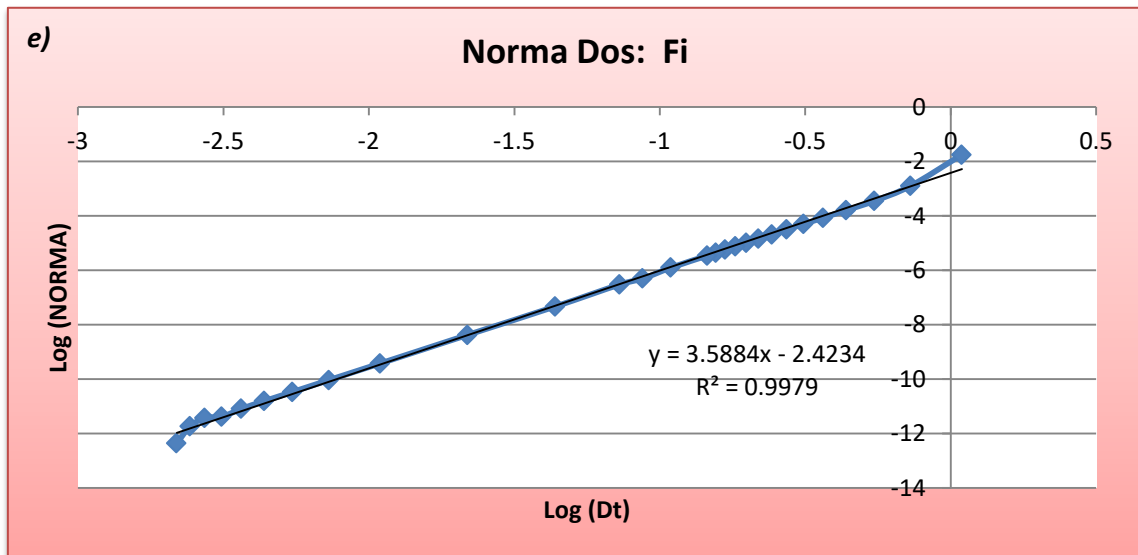
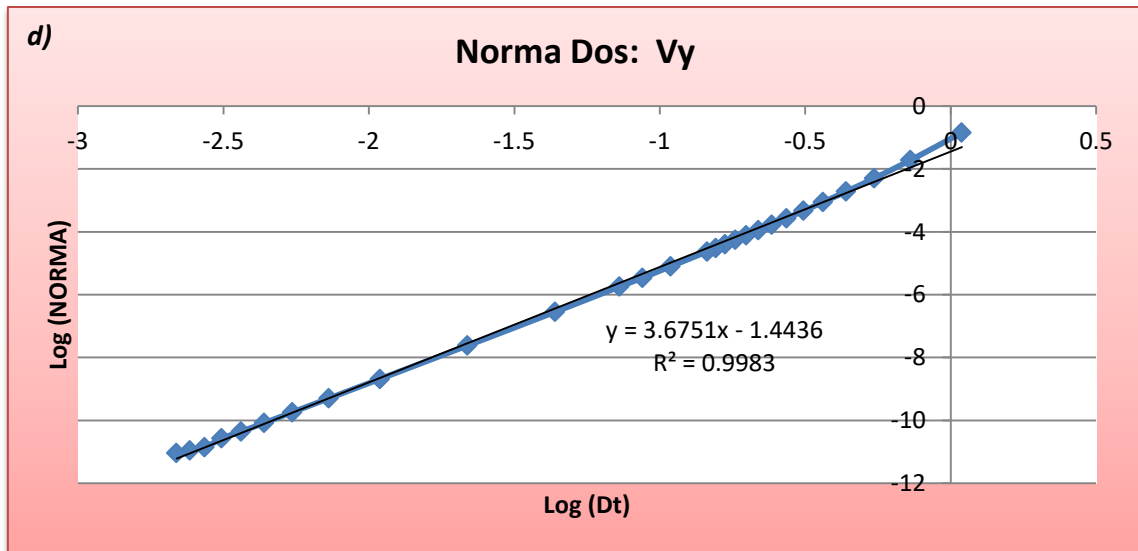


Fig. 19-a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma dos, Runge-Kutta respecto al tiempo.

II.II Convergencia del método Runge-Kutta respecto a la Distancia

De igual forma, la tabla resumen de la norma infinito del error absoluto de los parámetros calculados, Tabla 11:

Nº Intervalos	Paso (m)	Log(Paso)	Log(Norma INFINITO del error)					
			Y	V	Vx	Vy	Fi	t
2	500	2.6990	-1.274	-0.781	-0.794	-0.990	-1.657	-2.162
4	250	2.3979	-2.436	-2.030	-2.044	-2.206	-2.871	-3.400
6	166.667	2.2219	-3.157	-2.753	-2.766	-2.925	-3.589	-4.122
8	125	2.0969	-3.672	-3.262	-3.276	-3.435	-4.099	-4.631
10	100	2	-4.072	-3.656	-3.670	-3.830	-4.494	-5.025
20	50	1.6990	-5.307	-4.873	-4.887	-5.050	-5.714	-6.244
30	33.333	1.5229	-6.024	-5.582	-5.596	-5.760	-6.424	-6.953
50	20	1.3010	-6.922	-6.473	-6.487	-6.653	-7.317	-7.845
100	10	1	-8.135	-7.680	-7.693	-7.861	-8.525	-9.052
200	5	0.6990	-9.343	-8.885	-8.899	-9.067	-9.731	-10.258
400	2.5	0.3979	-10.550	-10.090	-10.104	-10.272	-10.936	-11.463
500	2	0.3010	-10.939	-10.485	-10.499	-10.659	-11.323	-11.849
800	1.25	0.0969	-11.732	-11.192	-11.202	-11.481	-12.155	-12.683
900	1.111	0.0458	-12.490	-11.394	-11.394	-11.623	-12.223	-12.699
1000	1	0	-12.071	-11.394	-11.394	-11.877	-12.569	-13.117

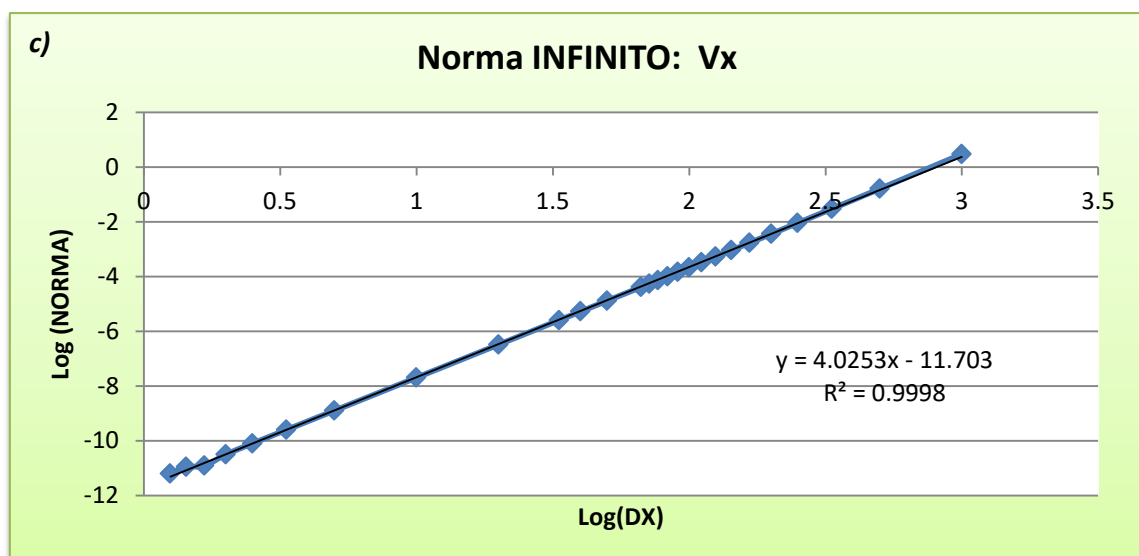
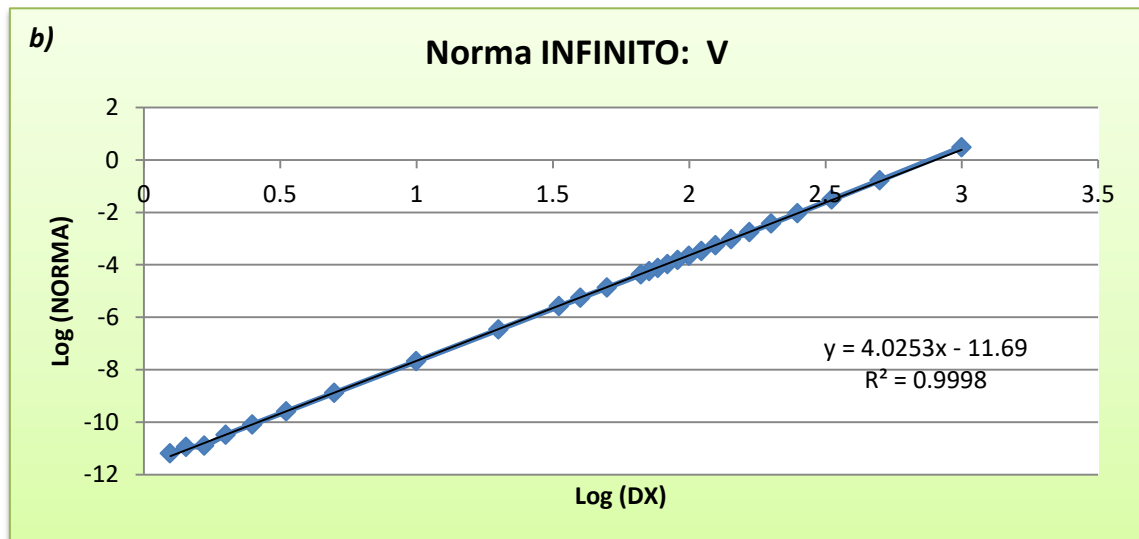
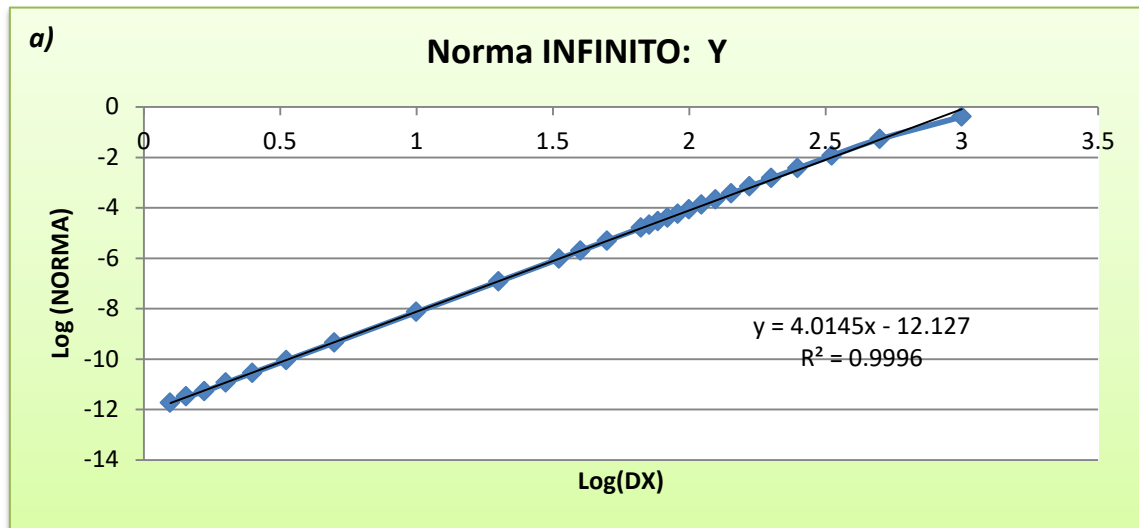
Tabla 11: Resumen Norma Infinito, método Runge-Kutta respecto a la distancia.

A continuación vemos la tabla resumen de la norma dos del error absoluto para cada parámetro, Tabla 12:

Nº Intervalos	Paso (m)	Log(Paso)	Log(Norma DOS del error)					
			Y	V	Vx	Vy	Fi	t
2	500	2.6990	-1.270	-0.763	-0.775	-0.986	-1.656	-2.158
4	250	2.3979	-2.412	-1.955	-1.965	-2.177	-2.857	-3.372
6	166.667	2.2219	-3.104	-2.626	-2.635	-2.863	-3.554	-4.061
8	125	2.0969	-3.590	-3.092	-3.100	-3.341	-4.039	-4.539
10	100	2	-3.962	-3.449	-3.457	-3.706	-4.410	-4.904
20	50	1.6990	-5.090	-4.539	-4.546	-4.816	-5.534	-6.013
30	33.333	1.5229	-5.734	-5.168	-5.175	-5.453	-6.175	-6.649
50	20	1.3010	-6.533	-5.954	-5.961	-6.245	-6.972	-7.441
100	10	1	-7.604	-7.016	-7.022	-7.312	-8.041	-8.506
200	5	0.6990	-8.667	-8.073	-8.079	-8.371	-9.103	-9.566
400	2.5	0.3979	-9.725	-9.127	-9.134	-9.428	-10.161	-10.623
500	2	0.3010	-10.066	-9.478	-9.484	-9.768	-10.500	-10.961
800	1.25	0.0969	-10.761	-10.018	-10.022	-10.490	-11.234	-11.693
900	1.111	0.0458	-11.399	-10.143	-10.139	-10.588	-11.265	-11.669
1000	1	0	-11.054	-10.048	-10.050	-10.842	-11.610	-12.090

Tabla 12: Resumen Norma 2, método Runge-Kutta respecto a la distancia.

Representando el logaritmo decimal del paso frente al logaritmo decimal de la norma para cada parámetro, obtenemos las siguientes gráficas, Figuras 20 y 21:



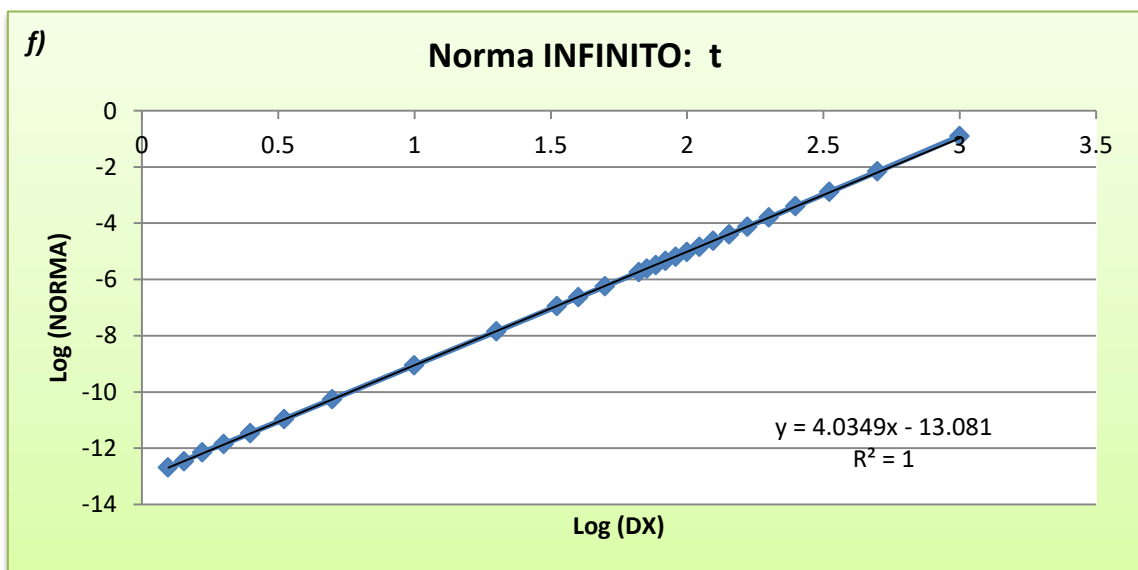
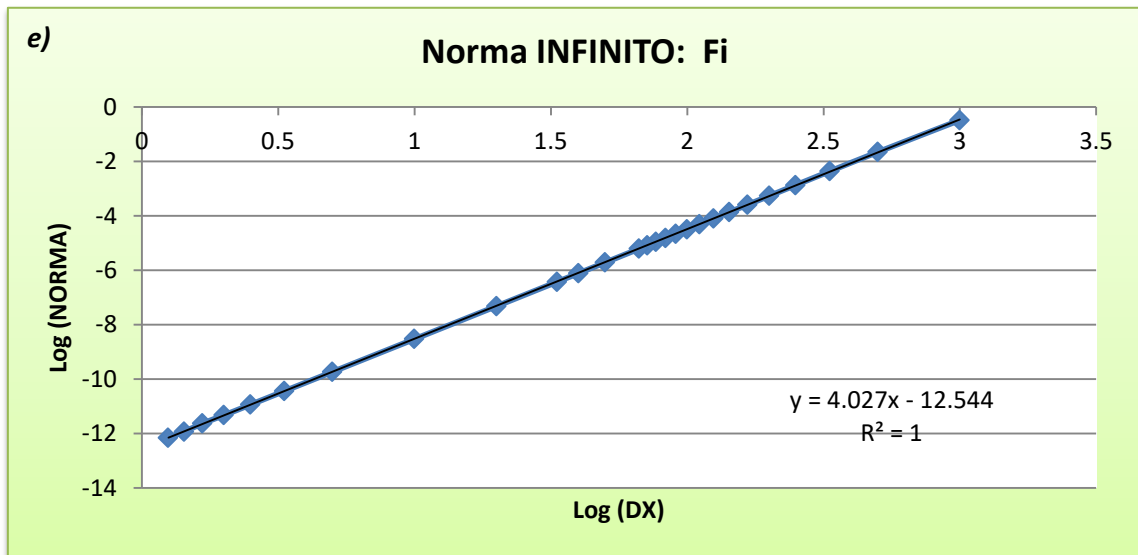
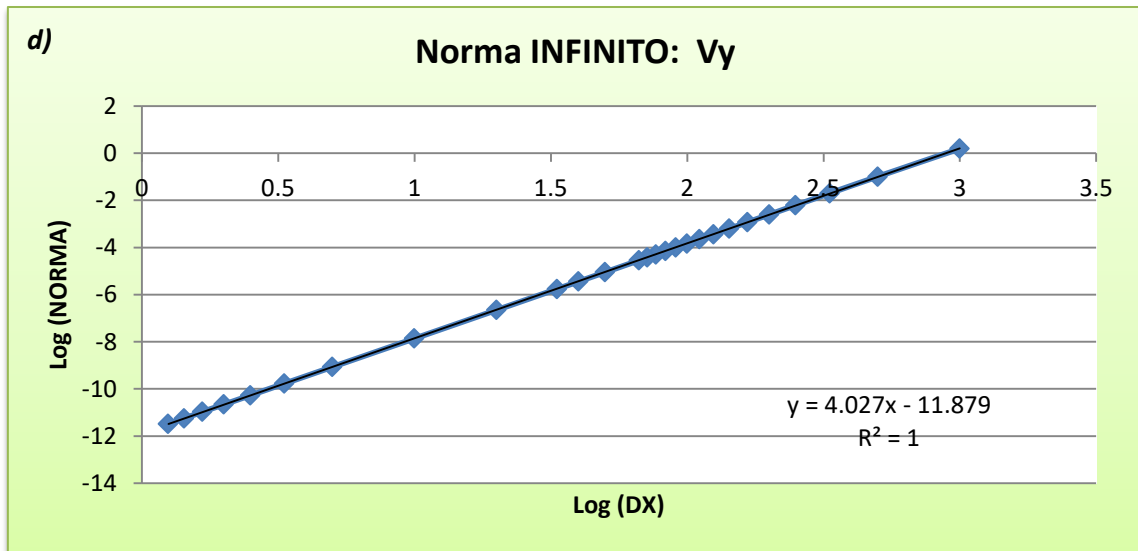
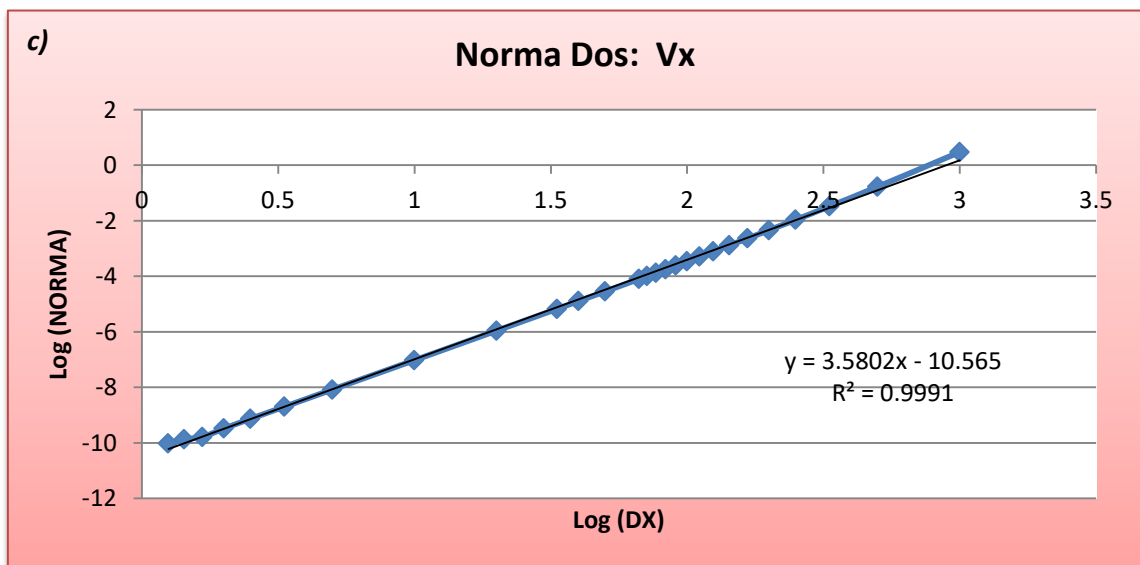
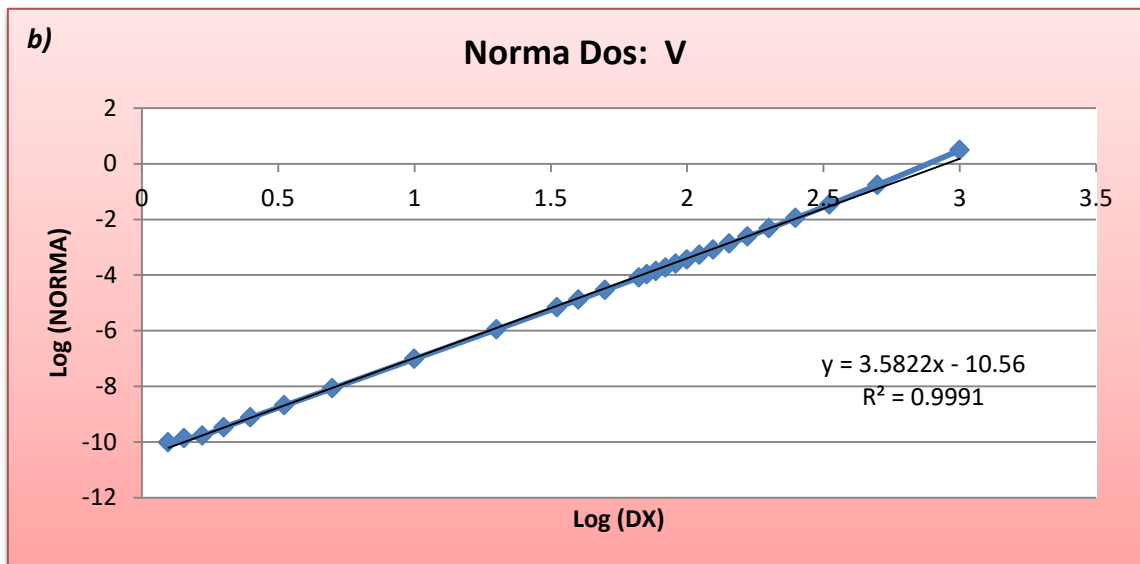
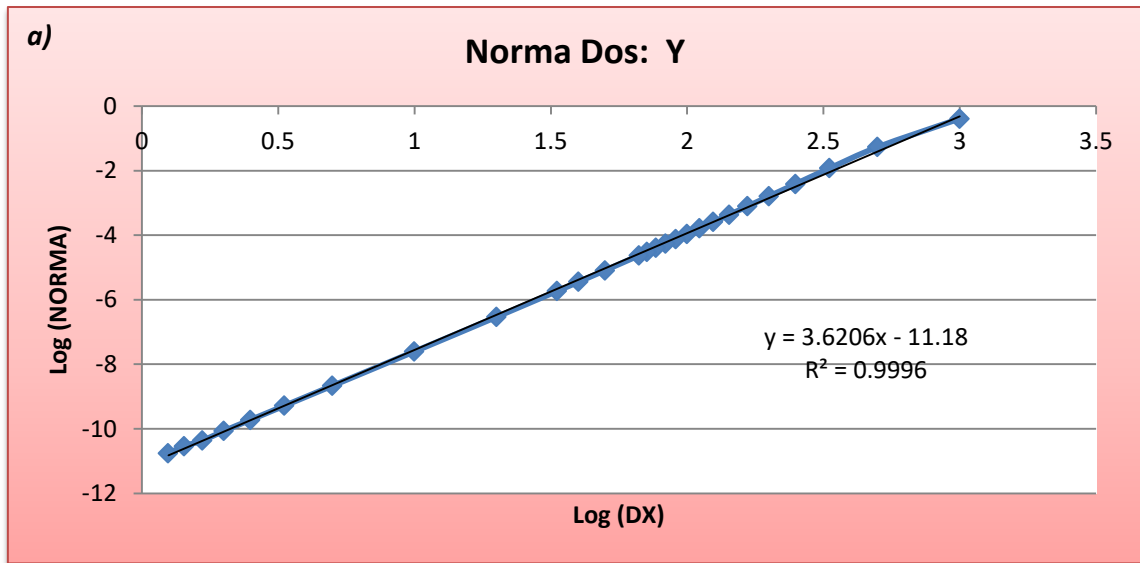


Fig. 20- a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma infinito, Runge-Kutta respecto a la distancia.



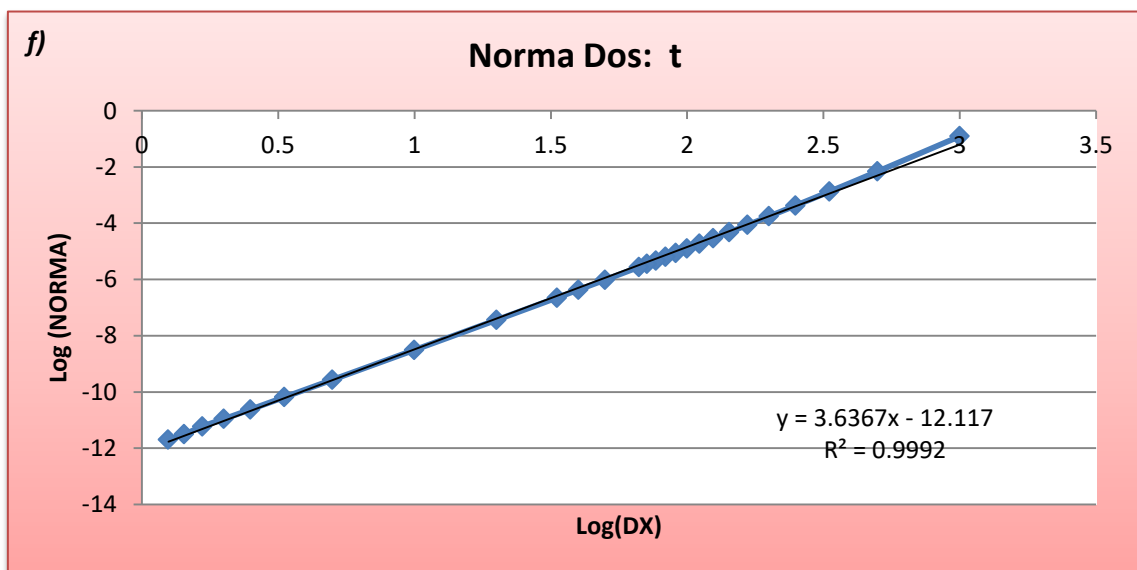
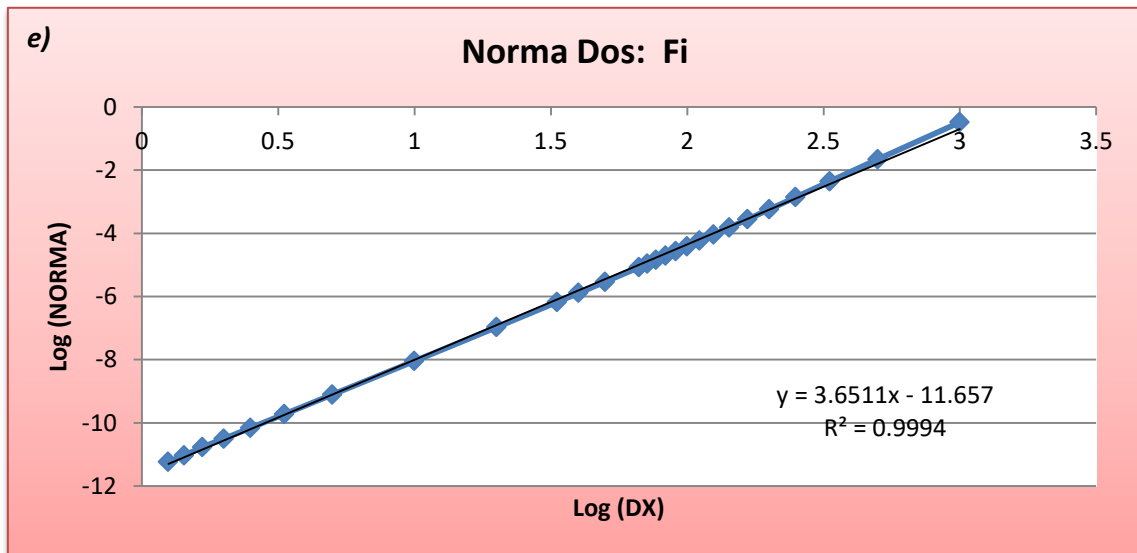
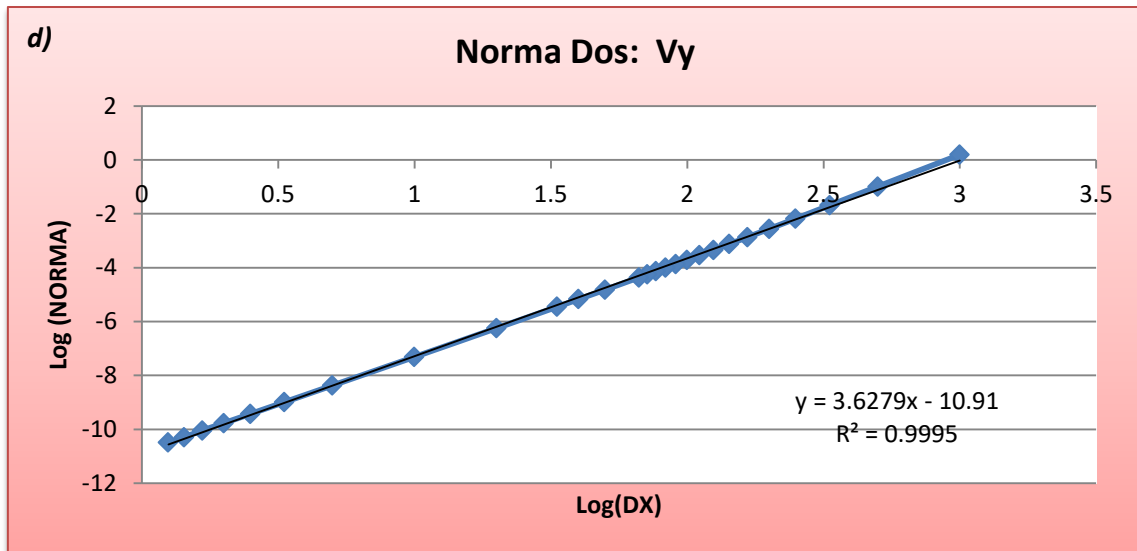


Fig. 21- a,b,c,d,e,f: Gráficas de la norma dos, Runge-Kutta respecto a la distancia.

III.I Comparación con programas externos: proyectil 7.62 mm M80 (función G7)

Este proyectil se aproxima a una función de resistencia G7, por lo que no es posible compararlo con el programa Strelok que solo utiliza la función G1. Los parámetros de dicho proyectil mostrados en [4, pág. 113] junto a los parámetros del tiro tenso expresados en la Tabla 13:

V_0 (m/s)	d (in)	m (gr)	BC (lb/in ²)(G7)
856	0.308	147	0.200
P (atm)	T (°C)	Distancia del Cero (m)	Y_0 (cm)
1	20	300	-4

Tabla 13: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Proyectil 7.62mm M80.

Los resultados de nuestro método numérico calculando la trayectoria con un tamaño de paso de 0.4 metros, son los mostrados en la Tabla 14:

<i>Integración Runge-Kutta respecto a la distancia, h=0.4 m</i>						
X (m)	Y (cm)	V (m/s)	V_x (m/s)	V_y (m/s)	F_i (grados)	t (s)
0	-4	856	855.997	2.207	0.148	0
50	7.168	817.541	817.539	1.535	0.108	0.060
100	14.665	780.035	780.034	0.865	0.064	0.122
150	18.128	743.526	743.526	0.196	0.015	0.188
200	17.153	707.996	707.996	-0.473	-0.038	0.257
250	11.282	673.462	673.461	-1.143	-0.097	0.329
300	-4.30E-04	639.887	639.884	-1.814	-0.162	0.406
350	-17.277	607.281	607.276	-2.488	-0.235	0.486
400	-41.209	575.494	575.485	-3.166	-0.315	0.570
450	-72.554	544.532	544.518	-3.847	-0.405	0.660
500	-112.178	514.369	514.349	-4.535	-0.505	0.754
550	-161.082	484.957	484.928	-5.229	-0.618	0.854
600	-220.429	456.296	456.258	-5.931	-0.745	0.961

Tabla 14: Resultados Runge-Kutta. Proyectil 7.62mm M80.

Los resultados y la comparación de errores con JBM Ballistics aparecen reflejados en la Tabla 15:

Resultados JBM Ballistics				Error respecto a JBM Ballistics		
<i>X (m)</i>	<i>Y (cm)</i>	<i>V (m/s)</i>	<i>t(s)</i>	<i>Y</i>	<i>V</i>	<i>t</i>
0	-4	856	0	0%	0%	0%
50	7.2	817.6	0.06	0.444%	0.007%	0.384%
100	14.7	780.1	0.122	0.240%	0.008%	0.314%
150	18.1	743.5	0.188	0.157%	0.003%	0.020%
200	17.2	708	0.257	0.273%	0.001%	0.018%
250	11.3	673.5	0.329	0.160%	0.006%	0.111%
300	0	640	0.406	0%	0.018%	0.116%
350	-17.3	607.4	0.486	0.134%	0.020%	0.053%
400	-41.2	575.8	0.57	0.023%	0.053%	0.056%
450	-72.5	544.9	0.66	0.074%	0.068%	0.055%
500	-112.1	514.7	0.754	0.070%	0.064%	0.016%
550	-161	485.3	0.854	0.051%	0.071%	0.027%
600	-220.3	456.6	0.96	0.059%	0.067%	0.055%

Tabla 15: Resultados y comparación con JBM Ballistics. Proyectoil 7.62mm M80.

III.II Comparación con programas externos: proyectil .30 Ball M2 (función G8)

En este caso el proyectil se asemeja a la función G8, por lo que tampoco será posible hacer la comparación de resultados con Strelak. Los parámetros del proyectil mostrados en [4, pág. 113] y los parámetros del tiro son los mostrados en la Tabla 16:

V_0 (m/s)	d (in)	m (gr)	BC (lb/in ²)(G8)
853.44	0.308	150	0.210
P (atm)	T (°C)	Distancia del Cero (m)	Y_0 (cm)
1	20	600	0

Tabla 16: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Proyectil .30 Ball M2.

Resultados del método numérico calculando la trayectoria con un tamaño de paso de 0.4 metros, son los mostrados en la Tabla 17:

<i>Integración Runge-Kutta respecto a la distancia, h=0.4 m</i>						
X (m)	Y (cm)	V (m/s)	V_x (m/s)	V_y (m/s)	Fi (grados)	t (s)
0	0	853.44	853.423	5.413	0.363	0
100	56.266	777.313	777.304	3.781	0.279	0.123
200	96.233	703.218	703.215	2.158	0.176	0.258
300	116.273	631.555	631.554	0.543	0.049	0.408
400	111.593	562.771	562.770	-1.070	-0.109	0.576
500	75.757	497.326	497.319	-2.690	-0.310	0.765
600	-1.51E-03	435.809	435.787	-4.332	-0.570	0.980

Tabla 17: Resultados Runge-Kutta. Proyectil .30Ball M2.

Los resultados y comparación de errores con JBM Ballistics son los mostrados en la Tabla 18:

<i>Resultados JBM Ballistics</i>				<i>Error respecto a JBM Ballistics</i>		
X (m)	Y (cm)	V (m/s)	t (s)	Y	V	t
0	0	853.44	0	0%	0%	0%
100	56.1	777.4	0.123	0.236%	0.011%	0.199%
200	96.3	703.3	0.258	0.034%	0.012%	0.004%
300	116.1	631.8	0.408	0.168%	0.039%	0.005%
400	111.5	563.1	0.576	0.078%	0.058%	0.046%
500	75.7	497.7	0.765	0.086%	0.075%	0.033%
600	0.0	436.2	0.979	0%	0.090%	0.057%

Tabla 18: Resultados y comparación con JBM Ballistics. Proyectil .30 Ball M2.

IV. Comparación con programas externos con Viento: Proyectil 338 Cal 300 gr Hybrid OTM Tactical (función G7)

Para esta comparación con la corrección de viento se ha decidido usar un proyectil del fabricante Berger, dicho proyectil se aproxima con la función de resistencia G7 por lo que se comparará con el programa JBM Ballistics.

Los parámetros del proyectil [1] junto con los del tiro tenso se muestran en la Tabla 19:

V_0 (m/s)	d (in)	m (gr)	BC (lb/in ²)(G7)
950	0.338	300	0.421
P (atm)	T (°C)	ϕ_0 (grados)	Y_0 (cm)
1	20	0.185	-4

Tabla 19: Parámetros del proyectil y del tiro tenso. Proyectil Hybrid OTM Tactical.

Para la corrección de viento se utiliza un viento cruzado a 90 grados (hacia la derecha de la línea de visión) de 5 m/s.

En este caso se calculará la trayectoria hasta los 1500 metros de distancia, ya que debido a la buena aerodinámica del proyectil a dicha distancia todavía estará en un régimen de velocidad supersónico.

Los resultados del método numérico calculando la trayectoria con un tamaño de paso de 0.5 metros, son los mostrados en la Tabla 20:

Integración Numérica Runge-Kutta respecto a la distancia, $h=0.5m$								
X (m)	Y (cm)	Z (cm)	V (m/s)	t (s)	V_x (m/s)	V_y (m/s)	V_z (m/s)	Fi (grados)
0	-4	0	950	0	949.995	3.060	0	0.185
100	22.623	1.096	911.609	0.107	911.607	1.904	0.202	0.120
200	37.436	4.483	873.902	0.219	873.902	0.749	0.400	0.049
300	39.399	10.315	836.947	0.336	836.947	-0.405	0.595	-0.028
400	27.351	18.757	800.826	0.459	800.824	-1.559	0.785	-0.112
500	-1.24E-03	29.983	765.587	0.586	765.582	-2.716	0.971	-0.203
600	-44.099	44.177	731.251	0.720	731.239	-3.875	1.151	-0.304
700	-106.553	61.544	697.799	0.860	697.780	-5.039	1.327	-0.414
800	-189.166	82.301	665.247	1.007	665.216	-6.210	1.499	-0.535
900	-293.961	106.692	633.559	1.161	633.514	-7.388	1.666	-0.668
1000	-423.215	134.979	602.741	1.323	602.677	-8.577	1.828	-0.815
1100	-579.498	167.463	572.647	1.493	572.560	-9.776	1.987	-0.978
1200	-765.729	204.488	543.308	1.672	543.193	-10.988	2.141	-1.159
1300	-985.237	246.432	514.692	1.861	514.541	-12.214	2.292	-1.360
1400	-1241.830	293.726	486.759	2.061	486.567	-13.456	2.439	-1.584
1500	-1539.910	346.863	459.510	2.273	459.267	-14.717	2.583	-1.835

Tabla 20: Resultados Runge-Kutta. Proyectil Hybrid OTM Tactical.

Los resultados y comparación de errores con JBM Ballistics son expresados a continuación en la Tabla 21:

Resultados JBM Ballistics					Error respecto a JBM Ballistics			
X (m)	Y (cm)	Z (cm)	V (m/s)	t (s)	Y	Z	V	t
0	-4	0	950	0	0%	0%	0%	0%
100	22.6	1.1	911.6	0.107	0.101%	0.356%	0.001%	0.426%
200	37.4	4.5	873.9	0.219	0.097%	0.383%	0.000%	0.225%
300	39.4	10.3	837	0.336	0.003%	0.147%	0.006%	0.125%
400	27.3	18.7	800.9	0.459	0.186%	0.305%	0.009%	0.094%
500	0	30	765.7	0.586	0%	0.058%	0.015%	0.048%
600	-44.1	44.2	731.3	0.72	0.003%	0.052%	0.007%	0.009%
700	-106.5	61.5	697.9	0.86	0.050%	0.071%	0.014%	0.008%
800	-189.1	82.3	665.3	1.007	0.035%	0.001%	0.008%	0.029%
900	-293.9	106.6	633.7	1.161	0.021%	0.086%	0.022%	0.021%
1000	-423.1	134.9	603	1.322	0.027%	0.059%	0.043%	0.045%
1100	-579.4	167.3	573	1.493	0.017%	0.097%	0.062%	0.011%
1200	-765.5	204.3	543.7	1.672	0.030%	0.092%	0.072%	0.008%
1300	-984.9	246.2	515.1	1.861	0.034%	0.094%	0.079%	0.016%
1400	-1241.3	293.4	487.1	2.061	0.043%	0.111%	0.070%	0.007%
1500	-1539.1	346.5	459.9	2.272	0.053%	0.105%	0.085%	0.030%

Tabla 21: Resultados y comparación con JBM Ballistics. Proyectoil Hybrid OTM Tactical.

Como podemos ver en la comparación sigue habiendo muy buenos resultados ya que se obtienen diferencias de menos de un 0.5%. De forma que seguimos comprobando la validez de nuestro método de integración numérica.

V. Comparación con programas externos, tiro inclinado: Proyectil .30 Ball M2 (función G8)

En el caso de la comparación del tiro tenso inclinado, se utilizará el proyectil .30Ball M2 semejante a la función de resistencia G8, por lo que haremos dicha comparación con el programa JBM Ballistics. Este proyectil es el utilizado en una comparación anterior, los parámetros del proyectil junto con los parámetros del tiro tenso son los mostrados en la Tabla 22:

V_0 (m/s)	d (in)	m (gr)	BC (lb/in ²)(G8)
853.44	0.308	150	0.210
P (atm)	T (°C)	ϕ_0 (grados)	Y_0 (cm)
1	20	0.363	0

Tabla 22: Parámetros del proyectil y del tiro tenso inclinado. Proyectil .30 Ball M2.

En este caso de tiro tenso inclinado se utilizará una inclinación positiva de 30 grados sobre la horizontal ($A = 30^\circ$). De forma que este ángulo es el formado entre los nuevos ejes inclinados (\tilde{X} e \tilde{Y}) con la horizontal y la vertical respectivamente.

Los resultados del cálculo de trayectoria de tiro tenso inclinado con el método numérico, de tamaño de paso de 0.4 metros, son los mostrados en la Tabla 23:

<i>Integración Runge-Kutta respecto a la distancia, $h=0.4$ m</i>						
\tilde{X} (m)	\tilde{Y} (cm)	\tilde{V} (m/s)	\tilde{V}_x (m/s)	\tilde{V}_y (m/s)	Fi (grados)	t (s)
0	0	853.440	853.423	5.413	0.363	0
100	57.244	776.719	776.709	3.934	0.290	0.123
200	100.390	701.988	701.984	2.465	0.201	0.258
300	126.251	629.646	629.645	1.002	0.091	0.409
400	130.588	560.137	560.137	-0.458	-0.047	0.577
500	107.667	493.926	493.923	-1.924	-0.223	0.767
600	49.600	431.606	431.593	-3.409	-0.453	0.984

Tabla 23: Resultados Runge-Kutta tiro inclinado. Proyectil .30Ball M2.

Los resultados y comparación de errores con JBM Ballistics para el tiro tenso inclinado son los mostrados en la Tabla 24:

<i>Resultados JBM Ballistics</i>				<i>Error respecto a JBM Ballistics</i>		
\tilde{X} (m)	\tilde{Y} (cm)	\tilde{V} (m/s)	t (s)	\tilde{Y}	\tilde{V}	t
0	0	853.44	0	0%	0%	0%
100	57.404	777.8	0.123	0.000%	0.139%	0.162%
200	100.838	703.8	0.258	0.000%	0.257%	0.079%
300	127	632	0.408	0.000%	0.372%	0.145%
400	131.572	562.9	0.575	0.001%	0.491%	0.339%
500	109.474	496.9	0.764	0.003%	0.599%	0.399%
600	52.578	434.8	0.98	0.007%	0.735%	0.371%

Tabla 24: Resultados y comparación con JBM Ballistics; tiro inclinado. Proyectil .30 Ball M2.

VI. Comparación de la trayectoria aproximada mediante un valor ajustado del coeficiente de $1/\sqrt{M}$ frente a la solución obtenida numéricamente con la función de resistencia (G7)

Para estimar la validez de esta aproximación se ha realizado una comparación con los resultados obtenidos mediante integración numérica, utilizando el proyectil 7.62 mm M80 cuya función de resistencia se aproxima bastante a la función G7. Los parámetros del proyectil obtenidos de [4, pág. 113] junto a los parámetros del tiro se muestran en la Tabla 25. Se ha tomado un viento cruzado positivo (hacia la derecha de la línea de visión) de 5 m/s:

V_0 (m/s)	d (in)	m (gr)	BC (lb/in ²)(G7)	W_z (m/s)
856	0.308	147	0.200	5
P (atm)	T (°C)	ϕ_0 (grados)	Y_0 (cm)	
1	20	0.148	-4	

Tabla 25: Parámetros del proyectil y tiro tenso con viento cruzado. Proyectil 7.62mm M80.

Los resultados del método numérico calculando la trayectoria con un tamaño de paso de 0.4 metros se muestran en la Tabla 26:

Integración Runge-Kutta respecto a la distancia, $h=0.4$ m								
X (m)	Y (cm)	Z (cm)	V (m/s)	V_x (m/s)	V_y (m/s)	V_z (m/s)	Fi (grados)	t (s)
0	-4	0	856	855.997	2.207	0	0.148	0
50	7.168	0.679	817.541	817.539	1.535	0.225	0.108	0.060
100	14.665	2.780	780.035	780.034	0.865	0.444	0.064	0.122
150	18.128	6.402	743.526	743.526	0.196	0.657	0.015	0.188
200	17.153	11.654	707.996	707.996	-0.473	0.864	-0.038	0.257
250	11.282	18.653	673.463	673.461	-1.143	1.066	-0.097	0.329
300	-6.14E-04	27.531	639.888	639.884	-1.814	1.262	-0.162	0.406
350	-17.277	38.431	607.283	607.276	-2.488	1.453	-0.235	0.486
400	-41.210	51.514	575.496	575.485	-3.166	1.639	-0.315	0.570
450	-72.554	66.968	544.535	544.518	-3.848	1.819	-0.405	0.660
500	-112.178	85.001	514.373	514.349	-4.535	1.996	-0.505	0.754
550	-161.083	105.852	484.961	484.928	-5.229	2.167	-0.618	0.854
600	-220.429	129.795	456.302	456.258	-5.931	2.335	-0.745	0.961

Tabla 26: Resultados Runge-Kutta con viento cruzado. Proyectil 7.62mm M80.

Por otro lado los resultados de la aproximación simple con el ajuste del coeficiente $K_3^p = 0.4677$ para la función de resistencia G7 son los mostrados en la Tabla 27:

Trayectoria aproximada mediante el coeficiente; $K_3=0.4226$								
X (m)	Y (cm)	Z (cm)	V (m/s)	Vx (m/s)	Vy (m/s)	Vz (m/s)	Fi (grados)	t (s)
0	-4	0	856	855.997	2.207	0	0.148	0
50	7.169	0.672	817.908	817.906	1.536	0.222	0.108	0.060
100	14.669	2.753	780.683	780.682	0.867	0.440	0.064	0.122
150	18.143	6.343	744.325	744.325	0.198	0.652	0.015	0.188
200	17.188	11.555	708.836	708.835	-0.470	0.860	-0.038	0.257
250	11.348	18.513	674.213	674.212	-1.139	1.062	-0.097	0.329
300	1.09E-01	27.352	640.459	640.455	-1.810	1.259	-0.162	0.405
350	-17.114	38.224	607.573	607.566	-2.482	1.451	-0.234	0.485
400	-40.986	51.295	575.554	575.543	-3.159	1.638	-0.314	0.570
450	-72.269	66.753	544.404	544.387	-3.840	1.820	-0.404	0.659
500	-111.836	84.803	514.123	514.099	-4.527	1.997	-0.505	0.754
550	-160.692	105.681	484.710	484.677	-5.222	2.169	-0.617	0.854
600	-219.999	129.646	456.166	456.122	-5.927	2.336	-0.744	0.960

Tabla 27: Resultados de la trayectoria aproximada; $K_3=0.4226$. proyectil 7.62mm M80.

Finalmente se muestra el error en tanto por ciento entre la trayectoria aproximada y el cálculo numérico en la Tabla 28:

Error respecto a la solución numérica; $K_3=0.4226$								
X (m)	Y	Z	V	Vx	Vy	Vz	Fi	t
0	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
50	0.007%	1.006%	0.045%	0.045%	0.062%	0.954%	0.017%	0.023%
100	0.030%	0.977%	0.083%	0.083%	0.203%	0.853%	0.119%	0.044%
150	0.082%	0.919%	0.107%	0.107%	1.233%	0.711%	1.124%	0.063%
200	0.203%	0.843%	0.119%	0.119%	0.643%	0.567%	0.761%	0.076%
250	0.586%	0.752%	0.111%	0.111%	0.330%	0.411%	0.441%	0.085%
300	0%	0.650%	0.089%	0.089%	0.256%	0.264%	0.345%	0.088%
350	0.944%	0.538%	0.048%	0.048%	0.234%	0.116%	0.282%	0.085%
400	0.541%	0.425%	0.010%	0.010%	0.214%	0.021%	0.224%	0.077%
450	0.392%	0.322%	0.024%	0.024%	0.195%	0.042%	0.171%	0.065%
500	0.305%	0.233%	0.049%	0.049%	0.171%	0.073%	0.122%	0.052%
550	0.243%	0.162%	0.052%	0.052%	0.133%	0.068%	0.081%	0.040%
600	0.195%	0.115%	0.030%	0.030%	0.082%	0.034%	0.052%	0.031%

Tabla 28: Comparación con la solución numérica; $K_3=0.4226$. proyectil 7.62mm M80.