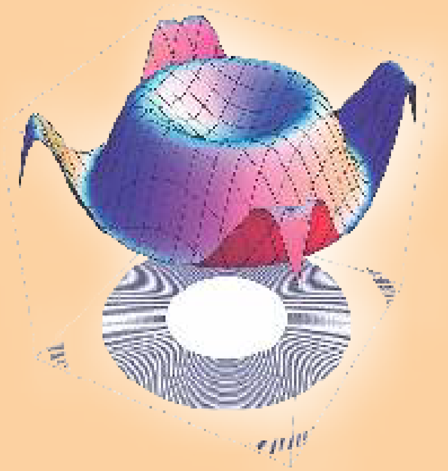
OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA Y DINÁMICA EN ECONOMÍA

colección **textos** colección **textos** colección **textos** colección **textos**

Arsenio Pecha C.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS

Optimización estática y dinámica en economía

Optimización estática y dinámica en economía

Arsenio Pecha C.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

Optimización estática y dinámica en economía

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Primera reimpresión de la segunda edición, 2012
Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-719-099-1

Impresión: Pro-Offset Editorial S.A-
comercial@pro-offset.com
Bogotá, Colombia

Diagramación en LaTeX : Margoth Hernández Quitián sobre originales del autor

Diseño de carátula: Andrea Kratzer

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Pecha Castiblanco, Arsenio, 1959 –
Optimización estática y dinámica en economía / Arsenio Pecha C. – 2^a. ed. – Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2012
vi, 360 p.

ISBN 978-958-719-099-1

1. Optimización matemática 2. Economía matemática

CDD-21 515 / 2012

A Diego Andrés, Santiago Augusto y Camilo José.

Índice

Introducción

> Yo pienso que los modelos, la modelación matemática, es principalmente una herramienta para asegurarse que las conclusiones se deriven de las premisas. Ahora, suena aburrido, pero el proceso es tremendamente útil porque lo forza a uno a: a) articular sus premisas y b) asegurarse de que se pueda ir de las premisas a las conclusiones y revisar, una vez se haya hecho todo esto, que no haya tonterías en el argumento, incluso si este es internamente coherente. Yo pienso que esa es una disciplina muy útil y cuando he hecho modelos formales en mis trabajos, siempre ha sido para aclarar mis ideas y rara vez ocurre que el modelo termine siendo exactamente de la manera en que pensé que iba a ser. Un modelo siempre me enseña algo porque revela ya bien sea la existencia de algo incompleto en mi lógica antes de que lo escribiera, o como sucede frecuentemente, revela un resultado inesperado en el cual no había pensado antes. La última cosa que quiero decir es que la razón por la cual usamos las matemáticas o la modelación matemática es comunmente incomprendida: no es porque seamos inteligentes, es porque no somos lo suficientemente inteligentes. Porque si fueramos lo suficientemente inteligentes, podríamos establecer si el argumento es completo y coherente e internamente consistente y qué más implicaría. Es precisamente porque no podemos hacer todo esto sin plantearlo todo en una ecuación que lo hacemos. *Entrevista de Dani Rodrik para Webpondo, edición abril-junio, 2003, traducción libre.*

El presente texto es el resultado de la depuración, durante varios semestres, de las notas de clase de los cursos de economía matemática y en particular, los primeros siete capítulos, del curso de matemáticas III para la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Se ha querido presentar los temas abandonando la visión hacia la física o la ingeniería, con enfoque y aplicaciones a las ciencias económicas, que sirvan de base a los cursos que requieren las herramientas matemáticas de optimización estática y dinámica aquí presentadas.

Se han desarrollado temas que van un poco más allá de lo básico, sin convertirse en un libro para estudiantes de matemáticas; se pretende seguir la idea de Maurice Allais: "... El rigor debe apuntar hacia la comprensión del alcance de la hipótesis y la interpretación de los resultados. Jamás debe convertirse en un pretexto para hacer matemáticas por sí mismas". Por eso es un tanto informal, no se demuestran todos los teoremas, la teoría se ilustra con ejemplos y al final de cada tema se proponen ejercicios de variada dificultad para ilustrar y mecanizar lo expuesto en cada sección.

En los tres primeros capítulos se presentan las bases sobre conjuntos, topología, funciones, grafos y contornos. El capítulo cuatro está dedicado a la convexidad. En el cinco y el seis se estudian la optimización estática no restringida y restringida, respectivamente, y se exponen los teoremas más importantes sobre optimización estática, base de la microeconomía. Los capítulos siete y ocho construyen las bases en procesos dinámicos discretos y continuos para poder presentar, en el nueve y diez, los métodos básicos de optimización dinámica. En los últimos se tratan los temas básicos de optimización dinámica: cálculo de variaciones, control óptimo y programación dinámica. Aunque éstos no hacen parte del curso de matemáticas III, sí lo son de los de economía matemática, además de servir como referencia en temas de crecimiento económico, macroeconomía y política económica. En la última sección de los capítulos siete, ocho y nueve se presentan tres aplicaciones de la teoría a modelos económicos de mercado, generacionales y de enfoque de la dinámica en economía.

Como es intrínseco a cualquier actividad humana, el texto puede contener errores. Agradezco a los profesores Víctor Ardila, Sergio Monsalve y Jorge David Aponte y a mis estudiantes de semestres anteriores que han tenido la paciencia de leer y corregir versiones preliminares de este texto, como también a quienes me hagan notar los errores que aún queden por corregir.

Arsenio Pecha C.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Lógica

Puesto que los resultados en matemática son de la forma: si hipótesis, entonces tesis (simbólicamente, $H \Rightarrow T$), la lógica matemática es el cimiento de todas las construcciones. En el **cálculo de proposiciones** se estudian **proposiciones** que son enunciados con un valor de verdad, es decir, de ellas se puede determinar si son verdaderas o falsas[1]. Las proposiciones **atómicas** son los enunciados más simples con sentido de veracidad. "Llueve" es una proposición atómica, ya que dependiendo del momento y lugar en el que se diga y de lo que se considere llover, es verdadera o falsa; "buenos días" no es proposición, de ella no se puede determinar su valor de verdad.

Las proposiciones **moleculares** están formadas por proposiciones atómicas y **conectivos** que son las palabras **no**, **y**, **o**, **entonces** y **si y sólo si**. "Si María es alta, rubia y viste bien, entonces llama la atención", es una proposición molecular ya que está compuesta de proposiciones atómicas (María es alta, María es rubia, María viste bien y María llama la atención), conectadas por las palabras **y** y **si entonces**.

Toda proposición se puede simbolizar por una **fórmula proposicional** que está formada por letras que representan las proposiciones atómicas llamadas **letras proposicionales** y los símbolos $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ que representan respectivamente los conectivos binarios (conectan dos proposiciones o fórmulas proposicionales) **o**, **y**, **si entonces** y **si y sólo si**, y el símbolo $\neg$

[1] La lógica difusa considera varios valores de verdad, p.e. se pueden considerar valores entre 0 y 1 donde 0 representa falso, 1 verdadero y 0,8 representa algo más verdadero que falso, etc.

que representa al conectivo unitario **no** (niega una proposición o fórmula proposicional). La fórmula proposicional que simboliza "Si María es alta y rubia, y viste bien, entonces llama la atención" es

$$(p \wedge (q \wedge r)) \Rightarrow s,$$

donde las letras proposicionales tienen el significado: p: María es alta, q: María es rubia, r: María viste bien y s: María llama la atención.

Los valores de verdad para las fórmulas proposicionales se encuentran dando valores de verdad a las letras proposicionales y usando las **tablas de verdad** para las fórmulas básicas: no (negación), o (disyunción), y (conjunción), si ... entonces (implicación):

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V

En la implicación $p \Rightarrow q$, la proposición p se llama el antecedente y q el consecuente. Esta proposición tiene varias formas de enunciarse: si p, entonces q; p sólo si q; p es condición suficiente para q; q es condición necesaria para p. Una forma mnemotécnica para estas equivalencias es: si Juan es bogotano, entonces es colombiano; Juan es bogotano sólo si es colombiano; una condición suficiente para que Juan sea colombiano es que sea bogotano; es necesario que Juan sea colombiano para que sea bogotano; bogotano implica colombiano.

La fórmula $p \Leftrightarrow q$ es la abreviación de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ y simboliza la proposición p si y sólo si q.

Dos fórmulas proposicionales f_1 y f_2 son equivalentes ($f_1 \equiv f_2$) para la lógica, si tienen la misma tabla de verdad. Si las fórmulas son equivalentes, la tabla de $f_1 \Leftrightarrow f_2$ es una tautología, esto es, para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad de las letras proposicionales el resultado de la tabla de verdad es V.

Otro nivel de la lógica es el **cálculo de predicados** (o lógica de primer orden), en el cual, además de los conectivos, se usan **cuantificadores**, **sujetos**, **predicados** y **relaciones**. Los cuantificadores son las palabras "para todo" y "existe" simbolizados por $\forall$ y $\exists$ respectivamente. Sobre los sujetos recae la acción que describe el verbo y se simbolizan usando letras minúsculas.

En la frase "Juan ríe" el sujeto es Juan y se simboliza j: Juan. Lo que se dice de un sujeto es el predicado y se simboliza describiendo la acción en impersonal $R(x)$: x ríe. De esta forma la frase "Juan ríe" queda simbolizada por $R(j)$. Las acciones que involucran a más de un sujeto son relaciones y se simbolizan en forma similar a los predicados. En la frase "el avión va de Bogotá a París"hay tres sujetos a: avión, b: Bogotá y p: París, y una relación $V(x, y, z)$: x va de y a z. La frase se simboliza por $V(a, b, p)$.

Las formas proposicionales básicas del cálculo de predicados son:
Todo A es B (universal positiva)

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \text{: para todo } x\text{; si } x \text{ es } A,\ x \text{ es } B.$$

Algún A es B (particular afirmativa)

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \text{: existe } x \text{ tal que } x \text{ es } A \text{ y } x \text{ es } B.$$

Ningún A es B (universal negativa)

$$\neg\exists x(A(x) \wedge B(x)) \text{: no existe } x \text{ tal que } x \text{ es } A \text{ y es } B.$$

Algún A no es B (particular negativa)

$$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x)) \text{: existe } x \text{ tal que } x \text{ es } A \text{ y no es } B.$$

La negación de las proposiciones cuantificadas obedece las siguientes equivalencias:

$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x(\neg P(x)),$$

no todos satisfacen la propiedad P equivale a que existe alguien que no satisface la propiedad P y

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x(\neg P(x)),$$

no existe alguien que satisfaga la propiedad P equivale a que ninguno satisface la propiedad P. Nótese en particular que la forma universal negativa es la negación de particular afirmativa y la particular negativa es la negación de la universal positiva.

Ejemplos

1. En la frase "El barbero de Sevilla afeita a todo aquel que no se afeita a sí mismo", el sujeto es b: el barbero de Sevilla, la relación $A(x,y)$: x afeita a y y la simbolización:

$$\forall x(\neg A(x,x) \Rightarrow A(b,x)).$$

2. La simbolización de la proposición "Todos los gerentes son profesionales o dueños de empresa" es

$$\forall x(G(x) \Rightarrow (P(x) \vee D(x))).$$

La negación de esta proposición es

$$\exists x(G(x) \wedge (\neg P(x) \wedge \neg D(x))),$$

algún gerente no es profesional ni dueño de la empresa.

Ejercicios

1. Simbolizar los siguientes enunciados en cálculo de proposiciones (usar letras únicamente para las proposiciones atómicas):

   a) Si se aumentan los precios y se mantiene la publicidad, decrece la demanda.

   b) Es necesario mantener los precios y aumentar la publicidad para que crezca la demanda.

   c) Para aumentar la demanda es suficiente con bajar los precios y mejorar la calidad.

2. Simbolizar en cálculo de predicados (identificar los sujetos y definir los predicados) y encontrar la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

   a) Todo gerente exitoso sabe de economía, finanzas y administración.

   b) Algunos gerentes exitosos no han estudiado economía ni administración.

   c) Todo amigo de Juan y Pedro es amigo de María.

   d) Ningún accionista es pobre.

3. Usar las siguientes proposiciones: $B(x, r)$: "la bola con centro en x y radio r", $C(x, z)$: "x está contenido en z", $D(u, v)$: "u es distinto de v" y $P(s, t)$: "s pertenece a t", para simbolizar y encontrar las negaciones de las siguientes proposiciones:

   a) Para todo x que pertenece a A, existe r tal que la bola con centro en x y radio r está contenida en A.

   b) Para todo r existe z que pertenece a la bola con centro en x y radio r, y x es distinto de z.

1.2. Conjuntos

Una de las nociones básicas de la matemática es la de **conjunto**, entendida como una colección o lista de objetos bien definidos llamados elementos. Generalmente estos elementos se escogen con alguna referencia, y la colección de donde se extraen se conoce como conjunto **referencial** o **universal**. Así, cuando nos referimos a los individuos Juan, Pedro y María se acepta como referencia alguna colección que contiene seres humanos. Por costumbre el conjunto referencial se nota con las letras **U** o Ω, se usan letras mayúsculas para notar conjuntos y minúsculas para sus elementos (aunque a veces esto se transgrede cuando se habla de conjuntos que tienen como elementos otros conjuntos, p.e. el conjunto de familias que a su vez están formadas por individuos). Los conjuntos se representan gráficamente en los **diagramas de Venn-Euler**.

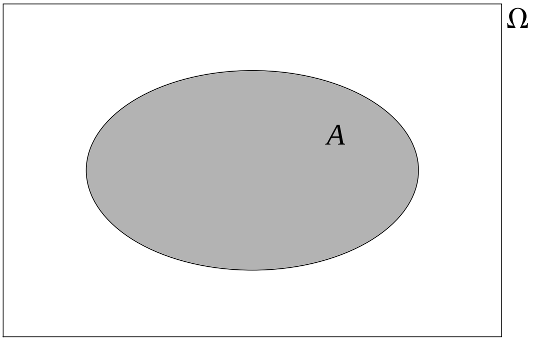


Figura 1.1: Diagrama de Venn-Euler para un conjunto A.

Los conjuntos se pueden definir de dos formas: por **extensión** o por **comprensión**; en la primera se enumeran todos los elementos del conjunto, en la segunda se da la propiedad que satisfacen todos los elementos.
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$A = \{x \mid x \text{ es un número impar entre 0 y 10}\}$.

En general un conjunto se define por comprensión por una expresión de la forma

$$A = \{x \mid x \text{ hace verdadera la proposición } p(x)\}.$$

En forma compacta se escribe $A = \{x \mid p(x)\}$. De esta forma es posible definir el conjunto **vacío** $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$: el conjunto de los elementos distintos de sí mismos; claramente el conjunto vacío no contiene ningún elemento, $\emptyset = \{\}$, ya que ninguno satisface la propiedad $x \neq x$.

Si un elemento x está en un conjunto A, se nota $x \in A$ (x pertenece a A); si no, $x \notin A$ (x no pertenece a A).

Entre los conjuntos se definen las siguientes relaciones:
A es **subconjunto** de B,

$$A \subseteq B,$$

equivale a que todos los elementos de A están en B,

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B),$$

para todo x, si x está en A entonces x está en B. Cuando todos los elementos de A están en B y B contiene algún elemento que no está en A, se dice que A es subconjunto propio de B

$$A \subset B.$$

A es igual a B ($A = B$) si y sólo si A y B tienen los mismos elementos,

$$\forall x\left((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)\right)$$

que equivale a

$$\forall x\left(x \in A \Leftrightarrow x \in B\right),$$

para todo elemento x, x está en A si y sólo si está en B.

Si no existe relación de igualdad ni contenencia entre A y B se dice que A y B son **no comparables** (nc); esto equivale a que A no está contenido en B ni B está contenido en A.

De la definición de contenencia y la tabla de verdad de la implicación se concluye que: para todo conjunto A, $\emptyset \subseteq A$; puesto que la proposición

$(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ es siempre verdadera, el antecedente es falso (el vacío no tiene elementos) y la tabla de la implicación dice que si el antecedente es falso la implicación es verdadera. De la misma forma, es fácil ver que para todo A, $A \subseteq \Omega$.

Con la noción de contenencia a partir de un conjunto A es posible construir otro conjunto que está formado por todos los subconjuntos de él, el conjunto de partes de A o **conjunto potencia** de A,

$$\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos.

Ejemplos

1. Si $A = \{1, 3, 5\}$,
   $\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$.

2. Si $A = \{1, \emptyset, \{5\}\}$, los elementos de A son 1, $\emptyset$, y $\{5\}$. 5 no es elemento de A, ya que no es lo mismo una bolsa con una manzana que la manzana, el corchete en este caso hace las veces de bolsa, los subconjuntos propios de A son $\emptyset$, por ser subconjunto de todo conjunto, y las combinaciones de elementos de A encerradas en corchetes: $\{1\}$, $\{\emptyset\}$, $\{\{5\}\}$, $\{1,\emptyset\}$, $\{1,\{5\}\}$, $\{\emptyset,\{5\}\}$.

3. Los elementos del conjunto $\left\{x \mid 2x^2 + 3x = 0\right\}$ son: 0 y $-\frac{3}{2}$.

Ejercicios

1. Determinar si los siguientes pares de conjuntos son iguales:

   a) $\{(x,y,z) \mid xy = z\}$ y $\left\{(x,y,z) \mid y = \frac{z}{x}\right\}$.
   b) $\left\{(x,y) \mid x \leq y^2\right\}$ y $\{(x,y) \mid \sqrt{x} \leq y\}$.
   c) $\left\{(x,y) \mid x \geq y^2\right\}$ y $\{(x,y) \mid \sqrt{x} \geq y\}$.
   d) $\{(x,y,z) \mid z = \ln(xy)\}$ y $\{(x,y,z) \mid z = \ln x + \ln y\}$.

   Encontrar:

2. Dos elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\left\{(x,y) \mid y = 2x^{1/3} + 5y^{1/2}\right\}$.
   b) $\left\{(x,y,z) \mid z = 10x^{1/2}y^{1/4}\right\}$.

c) $\left\{(x,y) \mid 10x^{1/2}y^{1/4} = 1000\right\}$.

d) $\left\{(x,y,z,w) \mid w < 2xy - x^2 - y^2 - 3z^2\right\}$.

e) $\left\{(x,y,z) \mid 2xy - x^2 - y^2 - 3z^2 \leq 5\right\}$.

f) $\left\{(x,y,z,w) \mid w = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2 + 5z^2}\right\}$.

g) $\left\{(x,y,z) \mid \sqrt[3]{x^2 + 2y^2 + 5z^2} \geq 10\right\}$.

3. El conjunto de partes del conjunto $\{a, b, \{a\}\}$.

4. Los elementos de $\wp\left(\wp\left(\wp\left(\emptyset\right)\right)\right)$.

1.2.1. Álgebra de conjuntos

Las operaciones básicas para los conjuntos son:
El **complemento** del conjunto A:

$$A^c = \{x \mid \neg\,(x \in A)\}$$

los elementos que no están en A (pero están en el conjunto referencial).
La **unión** de los conjuntos A, B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

los elementos que están en alguno de los dos conjuntos.
La **intersección** del conjunto A con el B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

los elementos que están tanto en A como en B. A partir de estas operaciones básicas se definen las operaciones diferencia y diferencia simétrica entre los conjunto A y B: $A - B = A \cap B^c$ y $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

1.2.2. Propiedades del álgebra de conjuntos

Las siguientes propiedades se prueban usando las propiedades de las proposiciones:

Idempotencias.	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Asociativas.	
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Conmutativas.	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributivas.	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidades.	
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Complementos.	
$A \cup A^c = \Omega$	$A \cap A^c = \emptyset$
$\emptyset^c = \Omega$	$\Omega^c = \emptyset$
$(A^c)^c = A$	
Leyes de De Morgan.	
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Usando la definición de contenencia se tiene que si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

Ejemplo

Con la aplicación de estas propiedades es posible probar que $A \cup (A \cap B) = A$.

$$\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap \Omega) \cup (A \cap B) \\
&= (A \cap (B \cup B^c)) \cup (A \cap B) \\
&= ((A \cap B) \cup (A \cap B)) \cup (A \cap B^c) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\
&= A \cap (B \cup B^c) \\
&= A \cap \Omega \\
&= A
\end{aligned}$$

1.2.3. Conjuntos numéricos

De aquí en adelante todos los desarrollos se hacen exclusivamente en los conjuntos numéricos que se definen a continuación.

Los **naturales**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

son los números de contar. Este es un **conjunto infinito** en el sentido de que es posible encontrar una función biyectiva entre él y uno de sus subconjuntos propios (p.e. los números pares), esto se puede ver como que tiene tantos elementos como alguno de sus subconjuntos propios. Un conjunto se dice **contable o enumerable** si se puede poner en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales; por esto el conjunto de los naturales juega un papel importante. Además, es el conjunto básico en la teoría de ecuaciones en diferencias o en recurrencias cuya base es la noción de sucesión. Estas ecuaciones sirven para modelar procesos dinámicos discretos, procesos que tienen cambios en instantes igualmente espaciados del tiempo.

El conjunto de los **enteros**

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ o } (-x) \text{ es natural}\} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

es un conjunto enumerable, una función biyectiva entre los naturales y los enteros es

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{si} \quad n \quad \text{es par} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{si} \quad n \quad \text{es impar} \end{cases}$$

esta asigna a los naturales pares los enteros negativos y a los impares los positivos.

El conjunto de los **racionales**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ y } q \text{ son enteros y } q \neq 0 \right\},$$

que son todos los números que se pueden escribir como una fracción.

A partir de la definición se tiene que un número es racional si posee un período decimal que se repite. Al dividir p entre q, el residuo solamente puede ser 0, 1, 2,..., $q-1$ (de lo contrario la división estará mal efectuada), puesto que la expansión decimal resulta de repetir infinitas veces la división, entonces alguno de los valores entre 0 y $q-1$ se debe repetir, por lo tanto el cociente se repite dando como resultado un periodo. Así, 3,141592141592141592... es racional puesto que 141592 se repite indefinidamente.

El siguiente proceso de diagonalización muestra que el conjunto de los racionales positivos es enumerable:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 1 \arrow[dl] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[dl] & 4 \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
1/2 \arrow[d] & 3/2 \arrow[ur] & 5/2 \arrow[dl] & 7/2 \arrow[ur] & 9/2 \arrow[dl] & \cdots \\
1/3 \arrow[ur] & 2/3 \arrow[dl] & 4/3 \arrow[ur] & 5/3 \arrow[dl] & 7/3 \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
1/4 \arrow[d] & 3/4 \arrow[ur] & 5/4 \arrow[dl] & 7/4 \arrow[ur] & 9/4 \arrow[dl] & \cdots \\
1/5 \arrow[ur] & 2/5 \arrow[dl] & 3/5 \arrow[ur] & 4/5 \arrow[dl] & 6/5 \arrow[ur] & \cdots \\
\vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Los **números reales** son todos los que tienen una expansión decimal infinita. Como los racionales expresados en forma decimal tienen un período que se repite, entonces deben estar contenidos en los reales y éstos contienen además otros números que no tienen período,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

donde I es el conjunto de los números irracionales, todos los no expresables como fracciones o cuya expansión decimal no posee un período que se repite. $\pi = 3,141592652...$ es irracional ya que no existe un período que se repita; otro ejemplo importante de irracional es el número $e = 2,7182818284...$.

El conjunto de los reales es un conjunto no enumerable, esto se prueba usando el proceso de diagonalización de Cantor: Si el conjunto de los reales del intervalo $(0,1)$ fuera un conjunto enumerable, se podrían escribir todos los números en un arreglo de la forma:

$$\begin{array}{l}
0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots \\
0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots \\
0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\
0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

donde cada $a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Si es posible encontrar un número del intervalo que no esté en el arreglo, el conjunto $(0,1)$ no es enumerable. Para mostrar esto, sea

$$0.\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33}\bar{a}_{44}\bar{a}_{55}\ldots$$

con $\bar{a}_{kk}$ diferente de a_{kk}. Este número está en el intervalo $(0,1)$ y difiere de todos los listados, ya que la k-ésima cifra decimal es distinta a la del k-ésimo número de la lista.

Otros axiomas importantes de los números reales son el **principio de tricotomía** y el **principio arquimediano**. El primero dice que un número real solo puede ser positivo, negativo o nulo. Esto es, si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x > 0$, $x < 0$ o $x = 0$ y el segundo asegura que siempre es posible encontrar un número natural mayor a cualquier real dado, es decir, si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Si $[x]$ denota la parte entera de x (el entero mas grande menor o igual a x, esto es, para $m \leq x < m+1$, $[x] = m$), entonces los naturales que validan el principio arquimediano son $n = [x]+1$ o cualquiera mayor ya que $x < [x]+1$.

Los números reales generalmente se asocian con los puntos de una recta infinita y los intervalos, sus subconjuntos más comunes, con segmentos de recta. Para $a < b$:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}: && \text{Intervalo cerrado,}\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}: && \text{Intervalo abierto,}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}: && \text{Intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha,}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}: && \text{Intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha.}
\end{aligned}$$

En adelante, si A es un conjunto de números, A_{++} y A_{+} son el subconjunto de elementos estrictamente positivos y el de elementos no negativos de A respectivamente. Por tanto, $\mathbb{R}_{++}$, $\mathbb{R}_{+}$, $\mathbb{R}_{--}$ $\mathbb{R}_{-}$ son los intervalos infinitos $(0,\infty)$, $[0,\infty)$, $(-\infty,0)$ y $(-\infty,0]$ respectivamente.

Los siguientes teoremas son propiedades que facilitan el análisis del comportamiento topológico de un conjunto de números reales.

Teorema 1.1. *Entre cualquier par de números reales hay un racional.*

Demostración. Sean x y y números reales con

$$x < y,$$

esto es, $0 < y - x$ de donde $0 < \frac{1}{y-x}$. Por el principio arquimediano existe un número natural n, que satiface

$$\frac{1}{y-x} < n, \text{ o en forma equivalente } 1 < ny - nx.$$

Si $m = [nx]$

$$m \leq nx < m + 1,$$

sumando $-m$,

$$0 \leq nx - m < 1 < ny - nx,$$

en particular $nx - m < 1 < ny - nx$; sumando m,

$$nx < m + 1 < ny - nx + m.$$

Como $-nx \leq -m$, $ny - nx \leq ny - m$ y

$$nx < m + 1 < ny - nx + m \leq ny - m + m = ny,$$

en particular $nx < m+1 < ny$ y dividiendo por n,

$$x < \frac{m+1}{n} < y.$$

Como m y n son enteros $\frac{m+1}{n}$ es racional y se tiene el resultado. □

Teorema 1.2. *Entre cualquier par de números racionales hay un irracional.*

Demostración. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ números racionales con

$$\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \text{ y sin perdida de generalidad sea } bd > 0.$$

La primera de estas desigualdades equivale a $0 < \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ de donde $0 < \frac{bd}{ad-bc}$. Por el principio arquimediano, existe un número natural n que satiface

$$\frac{bd}{ad-bc} < n, \text{ o en forma equivalente } 1 < \frac{nad-nbc}{bd}.$$

Puesto que en el intervalo $(0,1)$ existe un irracional I, por ejemplo $0,11010010001\ldots$,

$$0 < I < 1 < \frac{nad-nbc}{bd},$$

al multiplicar por bd en particular se tiene que

$$0 < bdI < nad - nbc,$$

al sumar nbc esta se convierte en

$$nbc < bdI + nbc < nad,$$

y multiplicando por $\frac{1}{nbd}$,

$$\frac{c}{d} < \frac{bdI+nbc}{nbd} < \frac{a}{b}.$$

Para completar la prueba basta ver $\frac{bdI+nbc}{nbd}$ es irracional, si por el contrario

$$\frac{bdI+nbc}{nbd} = \frac{p}{q}$$

al despejar

$$I = \frac{\frac{nbdp}{q} - nbc}{bd} = \frac{nbdp - nbcq}{bdq}$$

lo que contradice que I es irracional. □

La prueba del siguiente teorema es una consecuencia de los teoremas anteriores,

Teorema 1.3. *Entre cualquier par de números reales hay infinitos racionales e irracionales.*

Los teoremas anteriores prueban que cualquier intervalo de números reales es un conjunto no enumerable y contiene infinitos números racionales e irracionales.
El **valor absoluto** de un número real,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

se usa para definir la distancia entre dos números y para abreviar la escritura de algunos intervalos. Sus propiedades son:

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
2. $|ab| = |a|\,|b|$.
3. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

La distancia entre dos números reales a y b es

$$d(a, b) = |a - b|\,,$$

este concepto satisface las propiedades usuales para la distancia que se derivan de la definición y las propiedades del valor absoluto:

1. $d(a, b) \geq 0$ y $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$.
2. $d(a, b) = d(b, a)$.
3. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Ejercicios

1. Probar que cualquier intervalo es un conjunto no enumerable.
2. Probar que entre dos reales hay un irracional (esto concluye la prueba de que cualquier intervalo contiene racionales e irracionales).

Otro conjunto de números que ha alcanzado gran importancia en modelos matemáticos para economía y finanzas es el conjunto de los **reales no estándar**

$$^*\mathbb{R},$$

el cual fuera de los reales contiene los infinitesimales y sus inversos que son infinitos, sin embargo el tipo de aplicaciones en las cuales se utiliza están fuera del alcance de este texto.

El conjunto de los **complejos**

$$\mathbb{C} = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\right\}$$

puede ser asociado a $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

con esta aritmética i está asociado con $(0, 1)$ y cada real $x = x + 0i$ con $(x, 0)$. En $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$: a es la parte real $(a = Re(z))$, b es la parte imaginaria $(b = Im(z))$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo y a θ tal que $\tan\theta = \frac{b}{a}$, con $a \neq 0$, se le conoce como el argumento de z.

1.3. Topología básica de los números reales

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un punto x es un **punto interior** a A si y sólo si existe $r > 0$ tal que el intervalo centrado en x de radio r está contenido en A. El conjunto de todos los puntos interiores de A se nota A° o $Int(A)$ y se le llama el **interior** de A. Simbólicamente:

$$x \in Int(A) \text{ si y sólo si } \exists r > 0, (x - r, x + r) \subseteq A.$$

Un conjunto A es **abierto** si y sólo si todos sus puntos son interiores, es decir,

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0, (x - r, x + r) \subseteq A,$$

alrededor de cada punto se puede encontrar un intervalo abierto contenido en A. Un conjunto que no es abierto satisface la negación de la definición, esto es, existe algún punto en el conjunto para el cual todos los intervalos centrados en él contienen puntos del complemento del conjunto; en otros términos,

$$\exists x \in A,\ \forall r > 0, (x - r, x + r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Un conjunto es **cerrado** si y sólo si su complemento es abierto. Con estas nociones un conjunto de números reales puede ser abierto, cerrado, abierto y cerrado o ni abierto ni cerrado.

Un punto x está en **la frontera** del conjunto A si y sólo si para todo $r > 0$,

$$(x - r, x + r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } (x - r, x + r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Todo intervalo alrededor de x contiene puntos del conjunto y de fuera del conjunto. La frontera del conjunto, $Fr(A)$, es el conjunto de todos los puntos frontera de A.

La **clausura o adherencia** de un conjunto A denotada por $\bar{A}$ o $Cl(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto y el interior es el conjunto abierto más grande contenido en el conjunto, por lo tanto, para cada conjunto A se tienen las contenencias:

$$Int(A) \subseteq A \subseteq Cl(A),$$

en particular si un conjunto A es abierto $Int(A) = A$ y si es cerrado $Cl(A) = A$; y para cualquier conjunto

$$Cl(A) = Int(A) \cup Fr(A).$$

Esto último dice que para cerrar un conjunto se le debe unir su frontera.

Ejemplos

1. El intervalo $I = (a, b)$ es un conjunto abierto. Usando la definición anterior se debe probar que para cada x de I existe un $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq I$.

   Si x es un punto de I, $a < x < b$, y r se toma de la siguiente forma

   $$r = \min\{|x - a|, |x - b|\} = \min\{x - a, b - x\}.$$

   Para demostrar que I es abierto basta probar que $(x - r, x + r) \subseteq I$, para esto se debe ver que todo elemento de $(x - r, x + r)$ está en I. En otras palabras, se debe mostrar que si y está en el intervalo $(x-r, x+r)$, entonces y está en el intervalo (a, b). Sea $y \in (x - r, x + r)$, es decir que $x - r < y < x + r$ (*); como $r \leq x - a$ y $r \leq b - x$, al reemplazar r en la desigualdad (*) por estos últimos valores, esa desigualdad se convierte en

   $$x - (x - a) \leq x - r < y < x + r \leq x + (b - x),$$

   así, $a < y < b$ y queda probado que I es abierto.

2. El conjunto $\emptyset$ es abierto, se dice que satisface la definición en forma vacía (no hay elementos que nieguen la definición); por lo tanto, su complemento, es decir $\mathbb{R}$, es cerrado.

3. $\mathbb{R}$ es abierto puesto que contiene todos los intervalos, por tanto, $\emptyset$ es cerrado.

4. La intersección de dos conjuntos abiertos es uno abierto y la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es uno abierto.

5. La unión de dos cerrados es uno cerrado y la intersección de cualquier colección de cerrados es un conjunto cerrado.

6. La intersección de cualquier colección de conjuntos abiertos no necesariamente es un conjunto abierto ya que por ejemplo la intersección de todos los intervalos de la forma $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ con n entero positivo es
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$
y el conjunto $\{0\}$ es cerrado.

7. $Int(\mathbb{N}) = Int(\mathbb{Z}) = Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Si algún $x \in \mathbb{R}$ fuese interior a cualquiera de estos conjuntos, el conjunto contendría a un intervalo $(x-r, x+r)$ para algún $r > 0$. Pero como cada uno de ellos es un conjunto enumerable no puede contener a un intervalo, que es un conjunto no enumerable.

8. El argumento anterior muestra que el conjunto de puntos interiores a un conjunto enumerable es vacío.

9. $Int(\mathbb{I}) = \emptyset$. Puesto que cualquier intervalo, con más de dos elementos, contiene un racional no existe ningún intervalo $(x-r, x+r)$ contenido en $\mathbb{I}$, por lo que este conjunto no tiene puntos interiores.

10. $Fr(\mathbb{I}) = Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Cada intervalo contiene racionales e irracionales, en particular los intervalos de la forma $(x-r, x+r)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $r > 0$.

Un punto x es de **acumulación** o **punto límite** de un conjunto A si y sólo si para cada $r > 0$,
$$(A - \{x\}) \cap (x-r, x+r) \neq \emptyset.$$

Todo intervalo abierto alrededor de x contiene puntos de A distintos de x. El conjunto de puntos de acumulación de A se nota $Ac(A)$ o A'. Si x es elemento de A pero x no es punto de acumulación de A, se dice que x es un **punto aislado** de A. Esta noción se conecta con las anteriores por medio de la ecuación

$$Cl(A) = A \cup Ac(A),$$

esto es, un conjunto cerrado contiene sus puntos de acumulación.

Una **cota inferior** del conjunto A es un real a tal que $a \leq x$, para todo $x \in A$ y una **cota superior** es un real b tal que $x \leq b$, para todo $x \in A$. La menor de las cotas superiores del conjunto A es el **supremo** del conjunto ($\sup A$) y la mayor de las cotas inferiores es el **ínfimo** del conjunto ($\operatorname{ínf} A$). Si el conjunto no es acotado su ínf o sup pueden ser $-\infty$ o ∞.

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es **acotado** si y sólo si tiene cota superior e inferior, esto equivale a que existe un $M > 0$ tal que

$$A \subseteq [-M, M].$$

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es **compacto** si y sólo si es cerrado y acotado y es **conexo** si no existen B y C abiertos tales que $B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ y $A \subseteq B \cup C$, esto es, el conjunto no está formado por dos o más subconjuntos disjuntos (que no se intersectan) no vacios.

Ejemplos

1. 0 es un punto de acumulación del conjunto

   $$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

   ya que si $r > 0$ el intervalo $(-r, r)$ contiene algún punto del conjunto. Por el principio arquimediano, para $r > 0$ existe n natural tal que $n > \frac{1}{r}$, por lo tanto $0 < \frac{1}{n} < r$; este valor está en el conjunto y en el intervalo $(-r, r)$ y es distinto de 0. A no es abierto ni cerrado, es un conjunto acotado ya que $A \subseteq [-1, 1]$ pero no es compacto, todos sus puntos son aislados, $\operatorname{ínf} A = 0$ y $\sup A = 1$.

2. Todos los elementos del intervalo $I = [a, b]$ son puntos de acumulación de I, por lo tanto I no tiene puntos aislados.

3. Todos los elementos del intervalo $I = [a, b]$ son puntos de acumulación de (a, b).

4. El intervalo $[a, b]$ es cerrado y acotado, por tanto compacto. Pero el intervalo (a, b) no es compacto, ya que no es cerrado.

5. $\inf[a, b] = \inf[a, b) = \inf(a, b] = \inf(a, b) = a$ y $\sup[a, b] = \sup[a, b) = \sup(a, b] = \sup(a, b) = b$.

6. $\{a, b, c, d\}$ es cerrado y acotado, por lo tanto compacto, sus puntos son aislados y es no conexo.

7. Si $B = [2, 3) \cup \{4, 5, 6, 7\}$, entonces $Int\,(B) = (2, 3)$, $Cl\,(B) = [2, 3] \cup \{4, 5, 6, 7\}$, $Ac\,(B) = [2, 3]$, B es no conexo ya que $B \subset (1, 3) \cup (3, 8)$, $B \cap (1, 3) = [2, 3)$ y $B \cap \cup(3, 8) = \{4, 5, 6, 7\}$; y los puntos aislados de B son $\{4, 5, 6, 7\}$.

8. Cualquier intervalo es conexo y la unión de intervalos disjuntos no es conexo.

Ejercicios

1. Determinar si el número 1,101001000100001... es racional.

2. Probar que 0 es el único punto de acumulación del conjunto

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}.$$

3. Determinar si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, abiertos y cerrados o ni abiertos ni cerrados; si son acotados y/o compactos, encontrar interior, frontera, clausura, ínf, sup y el conjunto de sus puntos de acumulación.

   a) $(2, 3)$.
   b) $[2, 3]$.
   c) Los números naturales.
   d) Los números racionales.
   e) $\left\{m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N} \text{ y } n \in \mathbb{Z}_{++}\right\}$.
   f) $\left\{m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}_{++}\right\}$.
   g) Los números irracionales.

4. Probar que efectivamente
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}.$$

5. Determinar si
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]$$
es un conjunto cerrado.

6. Probar que los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.

7. Probar que un conjunto, con sus puntos de acumulación, es cerrado.

8. Probar que la intersección de dos conjuntos abiertos es uno abierto.

9. Probar que la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es uno abierto.

1.4. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto V en el cual se define una operación binaria ($\oplus$) y otra entre los elementos del conjunto y los números reales ($\odot$) (suma y producto por escalar) que cumplen las siguientes propiedades: Para u, v y w en el conjunto V y k y r números reales.

1. $u \oplus v$ es un elemento de V.

2. $u \oplus v = v \oplus u$ (conmutativa).

3. $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ (asociativa).

4. Existe un elemento $\bar{0}$ en V tal que $u \oplus \bar{0} = u$ ($\bar{0}$ es llamado elemento neutro de la operación $\oplus$).

5. Existe un elemento $-u$ tal que $u \oplus (-u) = \bar{0}$ ($-u$ es llamado elemento inverso de u con respecto a la operación $\oplus$).

6. $k \odot u$ es un elemento de V.

7. $(k + r) \odot u = (k \odot u) \oplus (r \odot u)$ (distributiva a la izquierda).

8. $k \odot (u \oplus v) = (k \odot u) \oplus (k \odot v)$ (distributiva a la derecha).
9. $k(r \odot u) = (kr) \odot u$ (asociativa).
10. $1 \odot u = u$ (neutro).

Ejemplos

1. El conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2 \cdots, x_n) \mid x_i \text{ es real para } i = 1, 2, 3 \ldots, n\}$$

junto con las operaciones matriciales de suma y producto por escalar es un espacio vectorial (este espacio equivale a las matrices de tamaño $1 \times n$).

2. $C(\mathbb{R})$: el conjunto de todas las funciones continuas en todos los números reales con la suma de funciones y el producto por escalar es espacio vectorial.

3. Las matrices de tamaño $n \times m$ con la suma y producto por escalar usuales es un espacio vectorial.

4. Las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = 0$, donde A es una matriz de tamaño $n \times m$, con las operaciones usuales de matrices forman un espacio vectorial.

5. Los vectores propios que corresponden a un valor propio forman un espacio vectorial.

1.5. Topología en el espacio

El espacio $\mathbb{R}^n$ está formado por todos los vectores con n componentes reales, es decir,

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \mid x_i \text{ es un número real para } i = 1, 2, 3 \ldots, n\}.$$

$\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los vectores con dos componentes; geométricamente se identifica con los puntos en un plano coordenado ya que sus elementos tienen dos componentes generalmente asociadas con largo y ancho; $\mathbb{R}^3$ se identifica con el espacio, sus elementos tienen 3 componentes que se asocian con largo, ancho y alto. Para $n > 3$ se pierde la intuición geométrica; sin embargo, son usados, p.e. para indicar las posibles cantidades de cada uno de los bienes demandados por un consumidor, o las distintas cantidades de cada uno de los bienes disponibles en un mercado.

Para definir la noción euclidiana de distancia en este espacio inicialmente se define el producto interno entre dos elementos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

a partir de esto se define la **distancia** o **norma** por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

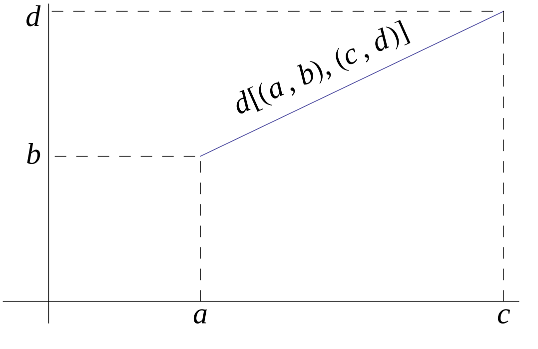


Figura 1.2: Distancia entre dos puntos.

El concepto básico que generaliza la idea de intervalo abierto alrededor de un punto es el de **bola abierta** con centro en $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y radio r dado por

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$$

Este conjunto está formado por los puntos cuya distancia al centro es menor que r, en la recta este conjunto es un intervalo abierto de longitud $2r$ alrededor de a, en el plano es un círculo de radio r, en el espacio es una esfera de radio r, etc.

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si para cada $\mathbf{x}_0$ de A existe un $r > 0$ tal que la bola con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio r está contenida en el conjunto

$$B_r(\mathbf{x}_0) \subset A.$$

De la misma forma se hacen las analogías, usando bolas abiertas, con las definiciones de puntos frontera, de acumulación y las nociones de acotación, compacidad y conexidad dadas anteriormente para subconjuntos de números reales.

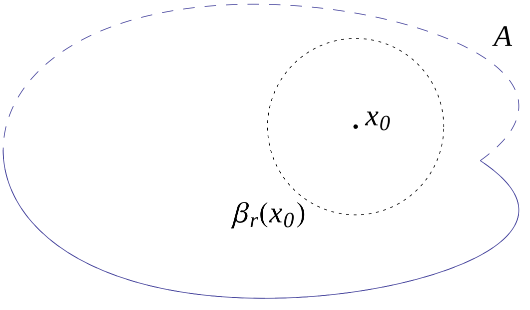


Figura 1.3: $\mathbf{x}_0$ es un punto interior al conjunto A.

Un punto es frontera de un conjunto si y sólo si toda bola centrada en el punto contiene puntos del conjunto y del complemento del conjunto,

$$\mathbf{x} \in Fr(A) \text{ si y sólo si } \forall r > 0, B_r(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset, \text{ y } B_r(\mathbf{x}) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es acotado si y sólo si existe M tal que

$$A \subset B_M(\mathbf{0}).$$

En el plano esto significa que un conjunto es acotado si es posible encontrar una bola de radio M que contenga al conjunto. Esto equivale a que independientemente cada una de las variables involucradas en la definición del conjunto están acotadas. En el plano un conjunto está acotado si y sólo si está contenido en un rectángulo finito, en el espacio si y sólo si está contenido en un paralelepípedo finito.

Todas las nociones topológicas en el conjunto de los números reales tienen su equivalente en $\mathbb{R}^n$ para lo cual basta reemplazar la noción de

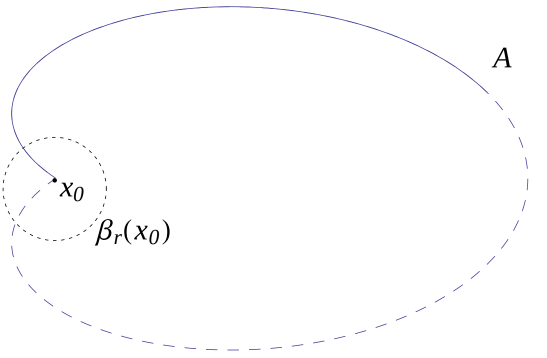


Figura 1.4: $\mathbf{x}_0$ es un punto frontera del conjunto A.

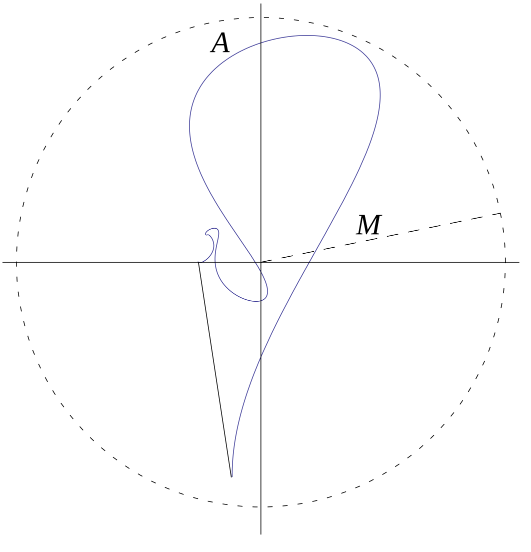


Figura 1.5: El conjunto A es acotado: está contenido en una bola de radio M centrada en el origen.

intervalo abierto por el de bola abierta. $\mathbf{x}$ es punto de acumulación del conjunto A si y sólo si toda bola centrada en $\mathbf{x}$ contiene por lo menos un punto de A distinto de $\mathbf{x}$,

$$\forall r > 0, (B_r(\mathbf{x}) - \{\mathbf{x}\}) \cap A \neq \emptyset$$

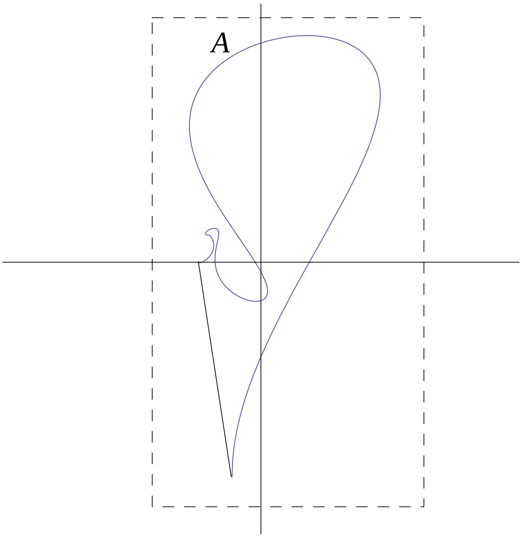


Figura 1.6: El conjunto A es acotado: está contenido en un rectángulo finito.

Las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^n$ son las mismas que para conjuntos de números reales, esto es: la unión de cualquier familia de conjuntos abiertos es uno abierto, la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es uno abierto, la unión de un número finito de conjuntos cerrados es uno cerrado, la intersección de cualquier cantidad de conjuntos cerrados es uno cerrado, la intersección o unión de dos conjuntos compactos es uno compacto, la intersección de un conjunto acotado o compacto con cualquier otro es uno acotado o compacto y la unión de un conjunto no acotado con cualquier otro es uno no acotado.

Ejemplos

1. El conjunto

$$\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, \quad x^2 + z^2 = 1\}$$

es acotado: los valores que pueden tomar las variables x y z están acotados, dado que la suma de sus cuadrados deben ser igual a 1. y es acotada puesto que al despejar y en la ecuación $x + y + z = 1$, $y = 1 - x - z$. El supremo para el conjunto de valores que pueden tomar las variables x y z es 1 y el ínfimo es -1, y el supremo e ínfimo para los valores admisibles para la variable y son 3 y -1 ya que como $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq z \leq 1$, entonces $-2 \leq x + z \leq 2$ de donde, $-2 \leq -(x + z) \leq 2$ sumando 1 se tiene $-1 \leq 1 - (x + z) \leq 3$.

2. La frontera del conjunto

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 \leq z < 4\}$$

es

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 = z \leq 4\} \cup \{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 \leq z = 4\},$$

en cada uno de estos conjuntos una desigualdad se ha cambiado por igualdad y la otra se ha convertido en menor igual. El interior es

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 < z < 4\},$$

en este las desigualdades son estrictas y la clausura es

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 \leq z \leq 4\}.$$

Este conjunto es acotado ya que los valores admisibles para las variables están acotados p.e. por: $-5 \leq x \leq 5$, $-44 \leq y \leq 38$ y $-1 \leq z \leq 15$. Si se quiere acotar por los supremos e ínfimos respectivos: $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq 4$. Como el conjunto es cotado pero no es cerrado, no es compacto.

Ejercicios

1. Graficar el conjunto

$$A = \big((1, 2] \cup \{3, 4\}\big) \times \big(\{1, 2\} \cup [3, 4)\big),$$

encontrar: $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Ac}(A)$ y el conjunto de puntos aislados y determinar si el conjunto es conexo y/o compacto.

2. Graficar cada uno de los siguientes conjuntos, y encontrar su frontera y sus puntos de acumulación:

a) $\left\{(x, y) \mid \left|x^2 + 2x\right| \leq y,\ |x| \leq 1\right\}$.

b) $\left\{(x,y) \mid \left|y^2-y\right| < x,\ |y-2| \le 1\right\}$.

c) $\left\{(x,y) | x^2+xy = y-1\right\}$.

3. Probar que los siguientes conjuntos son compactos y encontrar el sup e ínf del conjunto de valores que pueden tomar cada una de las variables involucradas en cada conjunto:

   a) $\{(x,y) \mid x^2+2xy+2y^2 = 1\}$.

   b) $\{(x,y,z) \mid x+y+z = 25,\ x^2+4z^2 = 16\}$.

   c) $\{(x,y,z,w) \mid x^2+z^2+w^2 = 2,\ y^2+4z^2+9w^2 = 39\}$.

   d) $\{(x,y,z) \mid x+2y+3z = 1,\ 9x^2+16y^2 \le 100\}$.

   e) $\{(x,y,z) \mid y^2-5 \le x \le 0,\ x^2+z^2 = 1\}$.

   f) $\{(x,y) \mid p_x x + p_y y \le I,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ p_x \ge 0,\ p_y \ge 0,\ I \ge 0\}$.

4. Determinar si los siguientes conjuntos son compactos:

   a) $\{(x,y,z) \mid xyz \le 1\}$.

   b) $\{(K,L) \mid K^\alpha L^\beta \ge 1,\ K \ge 0,\ L \ge 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0\}$.

   c) $\{(x,y,z,w) \mid x^2+z^2-w^2 \le 2\}$.

   d) $\{(x,y,z) \mid x-2y+3z \le x^2+y^2-100\}$.

   e) $\{(x,y,z) \mid y^2-5 \le x \le 0,\ x^2+z^2 \ge 1\}$.

   f) $\{(x,y,z) \mid x+y+z = 1,\ |x| \le 1\}$.

   g) $\{(x,y,z) \mid x^2y^2+z^2 \le 1\}$.

5. Encontrar la frontera de los conjuntos:

   a) $\{(x,y,z) \mid 2x+y-z < 1\}$.

   b) $\{(x,y,z) \mid x^2-z^2 \le 2\}$.

   c) $\{(x,y,z) \mid 0 < z < x^2+y^2 \le 2\}$.

6. Encontrar los puntos interiores, frontera y de acumulación de los conjuntos:

   a) $[3,5) \cup \{6,7,8\}$.

   b) $\{(x,y) \mid xy < 1\}$.

   c) $\left\{(x,y,z) \mid y < \frac{1}{x}\right\}$.

   d) $\left\{\left(m+\frac{1}{n}, m-\frac{1}{n}\right) \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}_{++}\right\}$.

e) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{++}\right\} \times [0, 1)$.

7. Mostrar que el conjunto

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + 3xy + y^2 \leq 2\}$$

no es acotado.

8. Probar que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es acotado.

9. Probar que los subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ no tienen puntos de acumulación.

Capítulo 2

Funciones

El análisis matemático es el estudio del comportamiento de las funciones. Para ello generalmente se analizan separadamente las funciones de una y varias variables. Las funciones a su vez son un tipo especial de relaciones que provienen del **producto cartesiano** entre conjuntos.

2.1. Relaciones

Definición 2.1. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos, el **producto cartesiano** de A y B es el conjunto*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\, y \in B\}$$

formado por todos los pares ordenados con la primera componente en A y la segunda en B.

El producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ representa todo el plano, pero no existen restricciones con respecto a las escalas sobre los ejes.

Definición 2.2. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una **relación** R de A en B es un subconjunto de $A \times B$. El **dominio** de R, notado $Dom(R)$, es el conjunto*

$$\{x \mid (x, y) \in R \text{ para algún } y \in B\}$$

*y el **rango** de R, notado $Ran(R)$, es el conjunto*

$$\{y \mid (x, y) \in R \text{ para algún } x \in A\}.$$

Las relaciones y funciones con interpretación económica fuera del dominio y rango en el sentido matemático tienen dominio y rango económico, es decir, los valores para los cuales tienen sentido las variables en su interpretación económica (cantidades, precios, etc.). En esos casos se debe determinar la interpretación de las variables; así por ejemplo, para la demanda de un bien, (p, q), las variables sólo puede tomar valores no negativos; pero, si se acepta que el modelo es la demanda de acciones en un mercado financiero, p y q podrían tomar valores negativos interpretados como préstamos para el caso del precio o emisión de acciones para cantidades demandadas negativas.

2.2. Funciones

Definición 2.3. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una* ***función*** *f de A en B, que se nota*

$$f : A \to B,$$

es un subconjunto de $A \times B$ en el que para cada elemento x de A existe un único y de B tal que (x, y) está en f.

La definición anterior dice que toda función es una relación que tiene como dominio el conjunto A y como rango un subconjunto de B. La notación usual para una pareja que está en la función es $y = f(x)$; de esta forma, una función es una regla que a cada elemento x de un conjunto A (el dominio de la función) le asigna un único elemento y del conjunto B. Así, una función puede ser vista como una forma de transformar elementos, y es la razón para llamar a x variable independiente (se le puede asignar cualquier valor del dominio) y a y variable dependiente (es el valor transformado por la función). Las funciones se clasifican de acuerdo al conjunto de variables A y de valores B en:

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, la función es de variable y valor real o **función real**; a cada elemento x del dominio lo relaciona con un número real

$$y = f(x).$$

- Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, la función es de variable vectorial a valor real conocida como **campo escalar** o **función de varias variables**. Esta función, a cada elemento del dominio de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le asocia un número real

$$y = f(\mathbf{x}) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

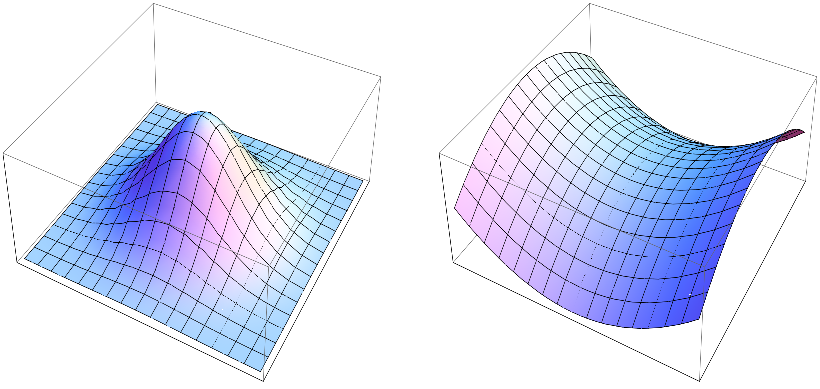


Figura 2.1: Gráficas de las funciones $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ y $g(x,y)=x^2-y^2$.

- Si $A\subseteq\mathbb{R}$ y $B\subseteq\mathbb{R}^m$, la función es de variable real a valor vectorial llamada **curva** en $\mathbb{R}^m$. A cada $t\in A$ la relaciona con un elemento de la forma
$$\mathbf{C}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))\,.$$

- Si $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $B\subseteq\mathbb{R}^m$, la función es de variable y valor vectorial llamada **campo vectorial**. A cada $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in A$ le asocia un elemento
$$\mathbf{y}=\mathbf{F}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),...,f_m(\mathbf{x}))\,.$$

- Como A y B pueden ser cualquier par de conjuntos las **correspondencias reales** son funciones donde $A\subseteq\mathbb{R}$ y B es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Estas asocian a un número real x un conjunto de reales
$$\psi(x)\subseteq B.$$

  Las notaciones para este tipo de funciones son:
$$\psi:A\to\to B,\qquad \text{o}\qquad \psi:A\rightrightarrows B$$

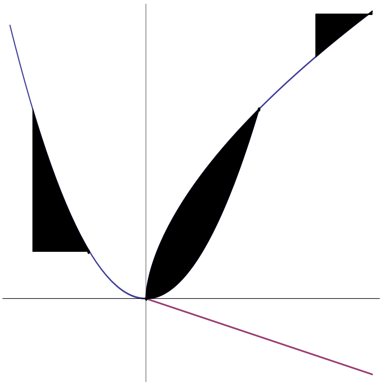


Figura 2.2: Gráfica una de correspondencia que a un número real le asocia un conjunto de reales.

- Funciones donde A es una colección de subconjuntos y $B \subseteq \mathbb{R}$, que a un subconjunto lo relaciona con un número real, son usuales en la teoría de medida y probabilidad. La noción de **precios** es una función de este tipo a cada canasta, conjunto de bienes, le asocia un número no negativo, el precio de la canasta.

Las correspondencias como las gráficas de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se hacen sobre un plano, las gráficas de funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con rango en $\mathbb{R}$ son superficies en el espacio $\mathbb{R}^3$ (en general no fáciles de graficar).

Ejemplos

1. $y = f(x) = x^2 + e^x - \ln(x-1)$ es una función real con dominio $\{x \mid x > 1\}$ y rango $\mathbb{R}$.

2. $z = f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ es un campo escalar con dominio $\mathbb{R}^2$ y rango $\{z \mid z \leq 1\}$.

3. La función $\mathbf{c}(t) = (2t-1, t^2+t)$ con dominio $\mathbb{R}$ y rango $\{(x, y) \mid y = \frac{1}{4}(x+1)(x+3)\}$ es la curva gráfica de la ecuación $y = \frac{1}{4}(x+1)(x+3)$.

4. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 y, x+y, e^x \ln y)$ es un campo vectorial con dominio $\{(x, y) \mid y > 0\}$ y rango $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

5. La gráfica de la correspondencia

$$\psi(x) = \begin{cases} \left[1, \frac{1}{x}\right], & \text{para} \quad 0 < x < 1 \\ \left[\frac{1}{x}, 1\right], & \text{para} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

que a cada x real positivo le asocia un intervalo su es la mostrada en la figura 2.3.

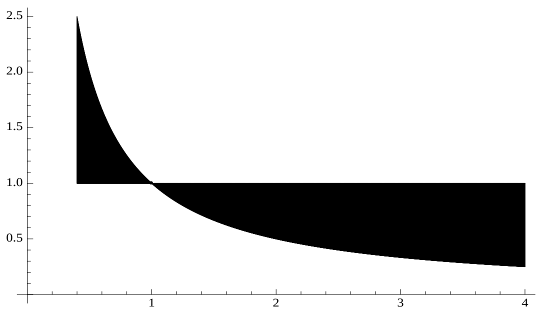


Figura 2.3: Gráficas de la correspondencia $\psi(x)$ en el intervalo $[\frac{2}{5}, 4]$.

2.2.1. Curvas de nivel

Puesto que es difícil o imposible en algunos casos hacer la representación gráfica de funciones definidas en subconjuntos del plano, el análisis de las llamadas curvas de nivel proporciona información sobre el comportamiento de la función. Una **curva de nivel** es una expresión de la forma $f(x, y) = k$ (k constante); esta curva es el resultado de hacer un corte a la superficie a una altura k (en funciones de más de dos variables se habla de superficies de nivel o en general de contornos). Para el caso de una función de producción, una curva de nivel representa todas las combinaciones posibles de insumos que producen una cierta cantidad de producto, llamada **isocuanta**; si la función es de costos sus curvas de nivel se llaman **isocostos** y para una función de utilidad representa las combinaciones de bienes que producen la misma satisfacción, **isoutilidades**.

Sobre las curvas de nivel se calcula la **tasa marginal de sustitución técnica** (TMST) para funciones de producción o **tasa marginal de sustitución entre bienes** para funciones de utilidad que da la variación

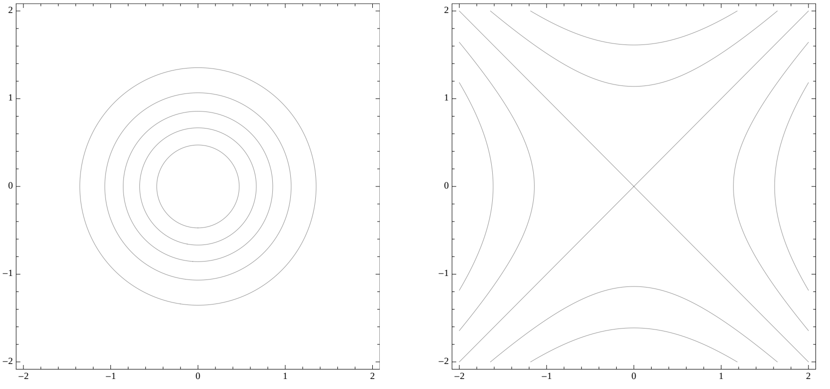


Figura 2.4: Curvas de nivel de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ y $g(x, y) = x^2 - y^2$.

de una variable para compensar un cambio en la otra y seguir sobre la misma curva de nivel, esto es, si (x_0, y_0) está sobre la curva $f(x, y) = k$ y la variable y se incrementa Δy unidades, la TMST(x/y) da el valor de la relación $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ de donde se determina la variación de la otra variable x para que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ siga sobre la curva $f(x, y) = k$.

2.2.2. Funciones homogéneas y homotéticas

Una función es **homogénea de grado** r si

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Cuando una función de producción satisface esta condición para $r < 1$, la función tiene **rendimientos decrecientes a escala**. Esto significa que un incremento en las cantidades de los insumos de producción da como resultado un incremento menor en la cantidad producida. Si se cumple la condición con $r = 1$, la función tiene **rendimientos constantes a escala**, en este caso, un incremento en una proporción de todos los insumos produce un incremento igual en la cantidad producida. De la misma forma se tiene la noción en el caso $r > 1$ que económicamente **representa rendimientos crecientes a escala**, incrementos en las cantidades de todos los insumos producen incrementos mayores en las cantidades de producción.

Si la gráfica de una función homogénea $z = f(x, y)$ de grado r se corta sobre la recta $y = mx$, la curva resultante es:

$$z = f(x, mx) = f(1 \cdot x, m \cdot x) = x^r f(1, m).$$

Esta ecuación representa una recta cuando $r = 1$ y la gráfica $z = f(x, y)$ está generada por rectas que pasan por el origen y sus curvas de nivel se desplazan de manera uniforme. Si $r \neq 1$ la gráfica $z = f(x, y)$ está generada por curvas de la forma $z = x^r f(1, m)$, donde m es constante; esto produce curvas de nivel que se desplazan en forma no uniforme. Si $r > 1$ la distancia entre las curvas de nivel (para valores igualmente espaciados) se reduce y si $r < 1$ la distancia se amplía.

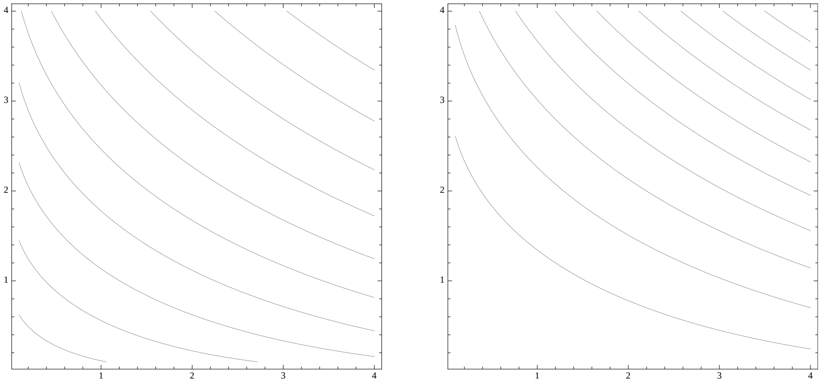


Figura 2.5: Curvas de nivel de una función homogénea de grado 1 y de grado mayor que 1 a alturas iguales. En la primera las curvas se desplazan de manera uniforme; en la segunda están cada vez mas cerca.

Una función es **homotética** si es la composición de una función creciente con una homogénea de grado uno/[1]. Esta definición satisface que para $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en el dominio de una función homotética f se cumple que si $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ y $t > 0$, entonces $f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y})$/[2]. Esto indica que si dos combinaciones de insumos son indiferentes para la producción, también es indiferente si las combinaciones se incrementan en proporciones iguales. De la forma análoga se interpreta para funciones de utilidad, costos, etc .

[1] Otra versión mas general la define como la composición de una función creciente con una homogénea de cualquier grado.

[2] Aunque la versión comunmente aceptada en los textos de economía es la dada inicialmente algunos la han generalizado a esta última.

Ejemplos

1. La función
$$z = f(x,y) = \frac{x+y-1}{x^2+y^2-1}$$
tiene como dominio todos los puntos del plano $\mathbb{R}^2$, salvo aquellos cuyos valores x e y hacen el denominador cero, es decir
$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 1\right\},$$
este conjunto representa todo el plano sin el círculo con centro en el origen y radio uno. Este tipo de función (de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$) le asocia a cada punto de un plano un número real.

2. $f(x,y) = Ax^a y^b$ es homogénea de grado $a+b$ ya que,
$$f(\lambda x, \lambda y) = A(\lambda x)^a(\lambda y)^b = \lambda^{a+b}Ax^a y^b = \lambda^{a+b} f(x,y).$$
En esta función x y y representan las variables, éstas pueden tomar distintos valores que en economía pueden estar determinadas desde dentro del proceso modelado, **variables endógenas**, o desde fuera, **variables exógenas**. A, a y b son los **parámetros** de la función ellos representan constantes que han de ser determinadas en el momento que la función sea usada para un modelo determinado. Esto es, si se quiere usar este tipo de función para modelar la producción de una cierta fábrica se deben calcular los parámetros y mientras se use dentro del proceso productivo los parámetros permanecen constantes; sin embargo, al aplicarla a otro proceso de producción deben calcularse nuevamente. Esta es la razón para considerar que los parámetros son variables constantes: con respecto al universo, la economía, son variables y con respecto a cada mundo, alguno de los procesos modelados, son constantes.

3. La función $f(x) = x^2+1$ para $x \geq 0$ es homotética. Si $g(z) = z^2+1$ y $h(x) = x$, $f(x) = g(h(x))$.

4. Si $g(w) = w^{a+b+c}$ y $h(x,y,z) = x^{\frac{a}{a+b+c}} y^{\frac{b}{a+b+c}} z^{\frac{c}{a+b+c}}$,
$$f(x,y,z) = x^a y^b z^c = g(h(x,y,z)),$$
como h homogénea de grado uno, si $a+b+c > 0$, g es creciente y f es homotética.

5. Si $\sigma > 0$, $f(x,y) = (ax^{-\rho} + by^{-\rho})^{-\frac{\sigma}{\rho}}$ es homotética. $g(z) = z^{\sigma}$ es creciente, $h(x,y) = (ax^{-\rho} + by^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$ es homogénea de grado uno y $f(x,y) = g(h(x,y))$.

Ejercicios

1. Sea $F(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Encontrar:

   a) El dominio de F
   b) $F(-3,4)$.
   c) $F(1,y/x)$.
   d) $F(x/y,1)$.

2. Si $F\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, calcular:

   a) $F(1/2)$.
   b) $F(2)$.
   c) $F(t)$.
   d) $F(x)$.

3. Para cada una de las siguientes funciones:

   a) $F\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = 4x^2 - y^2$.
   b) $F(x-y, 2x+y) = x^2 + 3xy - 5y^2$.
   c) $F(x/y, xy) = 3x^3 + xy^2$.
   d) $F(2x+y, x-3y) = 3x^3 + 3x^2y + xy^2$.

   Determinar:

   a) $F(1,2)$.
   b) $F(2,1)$.
   c) $F(s,t)$.
   d) $F(x,y)$.

4. Sean $F(x,y) = 4x^2 + y^2$ y $G(x,y) = x^2 - 9y^2$. Encontrar expresiones para las siguientes composiciones:

   a) $F(G(x,y), y)$.

   b) $G(x, F(x, y))$.
   c) $F(F(x, y), G(x, y))$.
   d) $G(y^2, x^2)$.
   e) $G(x, y) - G(y, x)$.
   f) $F(x, 2y) - F(y, 2x)$.

5. Encontrar el grado de homogeneidad para cada función:

   a) $F(x, y) = x^3 + 3x^2y + 5xy^2 - 16y^3$.
   b) $F(x, y) = \frac{y}{x^3 - 2y^3}$.
   c) $F(x, y, z) = \frac{x+2y+3z}{\sqrt[3]{3x^2+2y^2+z^2}}$.
   d) $F(x, y) = a^{2x/3y}\sqrt{\frac{bx^3y}{\alpha x+\beta y}}$.
   e) $h(x, y) = 200e^{2x/y}\sqrt{\frac{xy}{2x+3y}}$.

6. Imponer condiciones sobre los parámetros a, b, c y d de la función

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy$$

   para que sea homogénea.

7. Qué condiciones deben cumplir α y β para que

$$Q(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

   sea:

   a) Homogénea de grado 1.
   b) Homogénea de grado menor que 1.
   c) Homogénea de grado mayor que 1.

8. Encontrar condiciones sobre los α's para que la función

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = A\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$$

   sea homogénea de grado 1.

9. Encontrar condiciones para que la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k x_k^{-\rho} \right)^{-\sigma/\rho}$$

sea homogénea de grado 1.

10. Probar que si f es homogénea de grado uno, entonces

$$f(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) = yh\left(\frac{x}{y}\right)$$

para funciones g y h adecuadas.

11. Graficar dos curvas de nivel para cada una de las siguientes funciones:

    a) $f_1(x, y) = 2x + 3y$.
    b) $f_2(x, y) = 2x^2 - y$.
    c) $f_3(x, y) = \text{mín}\{2x, 3y\}$.
    d) $f_4(x, y) = \text{máx}\{2x, 3y\}$.
    e) $f_5(x, y) = \text{mín}\{\text{máx}\{2x, 3y\}, \text{mín}\{3x, 2y\}\}$.
    f) $f_6(x, y) = \text{máx}\{\text{máx}\{2x, 3y\}, \text{mín}\{3x, 2y\}\}$.
    g) $f_7(x, y) = x + y + \text{mín}\{2x, 3y\}$.
    h) $f_8(x, y) = \text{mín}\{y + x, 2x + 3y, x + 3y\}$.
    i) $f_9(x, y) = \text{mín}\{x, 2y\} + \text{mín}\{2x, 3y\}$.

2.2.3. Funciones continuas

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $\mathbf{a} \in Ac(A)$ si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}),$$

esto significa que el valor de $f(\mathbf{x})$ está tan cerca a $f(\mathbf{a})$ como se quiera, si $\mathbf{x}$ se toma suficientemente cerca a $\mathbf{a}$. Formalmente: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que puede depender de ϵ) tal que si $||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$.

La definición generaliza los conceptos de continuidad para funciones reales en la que el significado es que la gráfica de la función no se rompe ya sea porque no está definida en el punto, el valor de la función en el punto difiere del límite o la gráfica tiene un salto en el punto. Una función es continua en un conjunto si lo es en cada punto del conjunto.

Para funciones en varias variables, como en funciones reales, se tiene que la suma, resta, producto y composición de funciones continuas es una función continua y el cociente de funciones continua es una función continua en los puntos donde la función del denominador es no nula. De estos resultados se desprende que los polinomios son continuos en todo el espacio y las funciones racionales lo son en su dominio.

2.3. Derivadas de funciones reales

Una razón para que las derivadas sean de gran utilidad en economía es su relación con el concepto de marginalidad. Este concepto mide el cambio de una variable dependiente, al incrementar la variable independiente correspondiente en una unidad; por ejemplo, el costo marginal es el cambio del costo producido por el incremento de una unidad en la producción, esto es, si q es el nivel de producción, el costo marginal de q unidades es

$$c(q+1) - c(q) = \frac{c(q+1) - c(q)}{1} \approx \frac{c(q+h) - c(q)}{h}$$

los valores del costo marginal y el último incremento se aproximan si h es próximo a 1. Puesto que la mecánica del cálculo de las derivadas es fácil, el concepto económico de marginalidad se asocia al concepto matemático de derivada.

Definición 2.4. *La función $f(x)$ es derivable en $x = a$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, en cuyo caso su valor se denota por $f'(a)$ ó $\frac{df}{dx}(a)$ (la derivada de f en a).

La interpretación geométrica de la derivada, en una variable, proviene de considerar la secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ cuya pendiente es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cuando h se acerca a cero, $a+h$ tiende a a y la recta secante se acerca a la tangente como muestra la figura 2.6. Por lo tanto, si la función es derivable,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

representa la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Esta interpretación es la base de las aplicaciones de la derivada al trazado de gráficas y a la optimización en una variable.

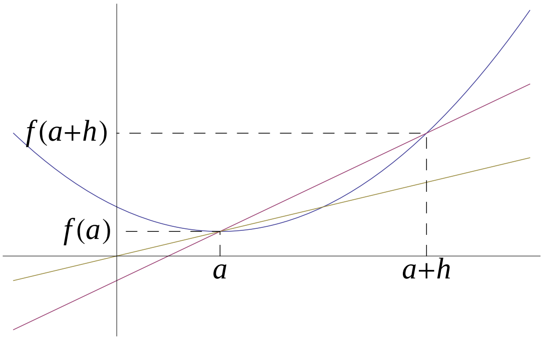


Figura 2.6: Si h está cerca a cero, la secante es próxima a la tangente.

2.3.1. Polinomio de Taylor

Puesto que las funciones más simples de evaluar son los polinomios, en el caso

$$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 24x + 1,$$

el valor del polinomio en a se puede evaluar de la siguiente forma:

$$P(a) = a\,(a\,(a\,(5a + 3) - 12) + 24) + 1$$

esta expresión solamente requiere las operaciones suma y multiplicación. La simplicidad del cálculo justifica la existencia de la aproximación de otro tipo de función por un polinomio. Existen varias formas para la consecución de un polinomio, una de ellas es la de Taylor. El resultado que garantiza la existencia y el tamaño del error en la aproximación por polinomios de Taylor es el siguiente:

Teorema 2.1. *(**Taylor**) Sea $f(x)$ una función derivable $(n+1)$ veces en un intervalo abierto I que contenga a $x = a$. Entonces para cada x de I la función f se puede expresar en la forma*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + E_{n,a}(x)$$

Donde

$$E_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún c entre a y x.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

es el polinomio de Taylor de grado n centrado en a, generado por la función $f(x)$. $E_{n,a}$ representa el error que se comete en la aproximación de la función por el polinomio; este error depende de a y n. Si x está cerca de a el valor de $\mathrm{E}_{n,a}$ está cerca de cero. En economía es común la aproximación de primer grado, es decir,

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

La gráfica de este polinomio es la tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$. Esto es, la aproximación de primer grado de una función está dada por su recta tangente.
El polinomio de segundo grado

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

aproxima la gráfica de la función por una parábola, la gráfica de la función y la parábola coinciden en el punto $(a, f(a))$ y tienen tangentes coincidentes en ese punto (pruébese, como ejercicio, que así ocurre). Lo mismo se cumple para un polinomio de grado k que aproxime la función; los valores del polinomio y función coinciden para $x = a$, lo mismo que las primeras k derivadas de la función y el polinomio en ese punto.

Cuando en este contexto se habla de aproximación, se busca usar un polinomio en lugar de una función no polinómica o en el caso de una función polinómica se busca manejar un polinomio de grado menor. En otros términos, el teorema de Taylor garantiza que localmente cualquier función se comporta como un polinomio.

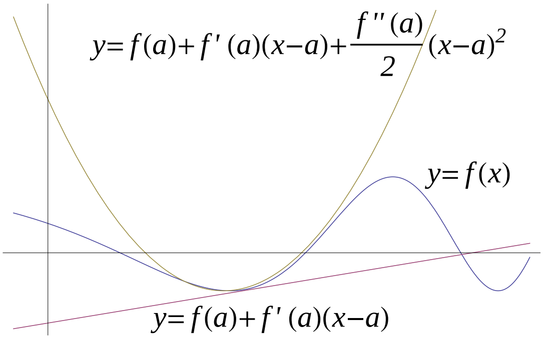


Figura 2.7: Aproximación de una función por su recta tangente y por una parábola.

2.3.2. Diferenciales

Usando diferenciales es posible conseguir "buenas" aproximaciones; el argumento que se usa es el siguiente: Si $\Delta x \approx 0$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

transponiendo términos

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \equiv df(x),$$

si $\Delta x \approx 0$; el incremento de una función es próximo a la diferencial de la función, si el incremento de la variable independiente es próximo a cero. El incremento de la función, Δf, representa el cambio de altura de la recta secante; la diferencial, df, es el cambio sobre la recta tangente a la curva. La diferencial y su aproximación al incremento de una función es la justificación del uso de la derivada en el concepto de marginalidad. Económicamente el concepto de marginalidad es el incremento de una función producido por el incremento de una de sus variables independientes en una unidad, $f(x+1) - f(x)$. Usando la aproximación dada por la diferencial con $\Delta x = 1$, se tiene que $f(x+1) - f(x) \approx f'(x)$.

Ejemplos

1. Sea

$$Q = Q(K, L) = 20K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

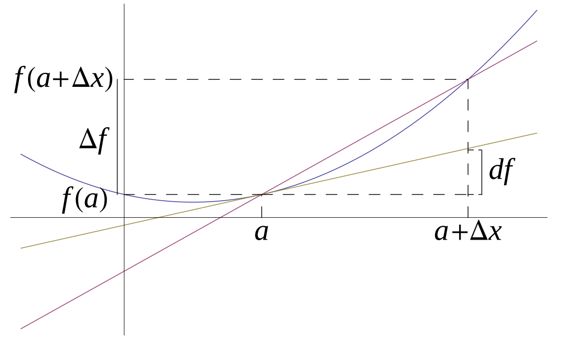


Figura 2.8: Aproximación del incremento de una función por su diferencial.

la función que determina las cantidades producidas de un cierto bien usando K unidades de capital y L unidades de mano de obra, si los niveles de insumos usados actualmente son $K =$1.000.000 y $L = 64$, la cantidad de producto es $Q = 32{,}000$ unidades.

El cambio en la cantidad que producen 100 unidades adicionales de capital se encuentra calculando la producción para $K =$1.000.100 y $L = 64$ que da un incremento de 1,06663 unidades de producto.

El resultado anterior se puede aproximar usando diferenciales en la forma

$$\begin{aligned}\Delta Q &= Q(K+\Delta K, 64) - Q(K, 64) \approx \frac{dQ(K,64)}{dK}\Delta K\\ &= \frac{20}{3}K^{-2/3}64^{2/3}\Delta K = \frac{320}{3}K^{-2/3}\Delta K\end{aligned}$$

Reemplazando K por 1.000.000 y ΔK por 100 se tiene,

$$\begin{aligned}\Delta Q &= Q\,(1.000.100{,}64) - Q\,(1.000.000{,}64) \approx \frac{320}{3}\,(1.000.000)^{-2/3}\,100\\ &= \frac{32}{30}\end{aligned}$$

En este caso el valor real del incremento es 1,06663 y el aproximado usando diferenciales es 1.06666 lo que representa un error de aproximación de 0,00003.

2. Los cambios en los puntos de equilibrio entre curvas de demanda y oferta producidos por las variaciones de precios se pueden analizar con esta teoría.

   Sean $q^d = ap + b$ y $q^o = cp + d$ las funciones de demanda y oferta para un bien, el punto de equilibrio es

$$\bar{p} = \frac{d-b}{a-c}\bar{q} = a\left(\frac{d-b}{a-c}\right) + b = \frac{ad-bc}{a-c}$$

   El cambio del punto de equilibrio producido por un incremento de p_0 unidades en el precio de venta, se encuentra notando que este cambio de precio afecta el parámetro b en ap_0 unidades, es decir, ese parámetro cambia de b a $b + ap_0$. Así, considerando el punto de equilibrio como una función de b, se tiene que

$$\Delta\bar{p} \approx \frac{d\bar{p}}{db}\Delta b = \frac{-1}{a-c}\Delta b$$

$$\Delta\bar{q} \approx \frac{d\bar{q}}{db}\Delta b = \frac{-c}{a-c}\Delta b$$

   después de calcular las derivadas indicadas y reemplazar el valor de Δb se tiene

$$\Delta\bar{p} \approx \frac{-ap_0}{a-c} \qquad \Delta\bar{q} \approx \frac{d\bar{q}}{db}\Delta b = \frac{-acp_0}{a-c}$$

   De la misma forma es posible analizar los cambios producidos por impuestos y subsidios.

Ejercicio

Usar diferenciales para estimar el cambio en el punto de equilibrio de un mercado con oferta y demanda lineales, que produce un impuesto de $\%r$ sobre el precio de venta al consumidor.

2.4. Funciones lineales y formas cuadráticas

En una variable la función más simple de analizar es la función lineal. Para el caso de varias variables, toma la forma

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, ..., x_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k x_k + b \\ &= m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n + b \\ &= (m_1, m_2, ..., m_n) \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) + b \\ &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + b \end{aligned}$$

donde m_i para $i = 1, 2, \cdots, n$ son números reales. En dos variables su gráfica es un plano, en más variables su representación se conoce como hiperplano. Así como en una variable las m's representan las pendientes del hiperplano con respecto a cada variable.

Ejemplo

La empresa W vende su producto en dos mercados y puede discriminar sus precios. Las funciones de demanda son en el primer mercado

$$q_1 = 1.000 - 20p_1$$

y en el segundo

$$q_2 = 200 - 5p_2.$$

Esta empresa incurre en unos costos variables de producción de \$500 por unidad de producto y sus costos fijos son de \$500.000. Los beneficios de la empresa, ingresos menos costos,

$$\Pi = I - CT,$$

dependen de los precios de venta, ya que:

$$I_1 = p_1q_1, \qquad I_2 = p_2q_2,$$

los costos totales son,

$$CT = \text{costos fijos}(CF) + \text{costos variables}(CV),$$

$$CF = 500.000 \quad \text{y} \quad CV = 500(\text{total producido}) = 500(q_1 + q_2).$$

Reemplazando hasta dejar todas las expresiones en términos de los precios, se llega a:

$$\begin{aligned}\Pi(p_1, p_2) = {}& p_1(1.000 - 20p_1) + p_2(200 - 5p_2)\\ & - 500(1200 - 20p_1 - 5p_2) - 500.000.\end{aligned}$$

En este ejemplo, se nota que los demandantes del primer mercado son más susceptibles a los cambios de los precios (esto se nota comparando las pendientes de las curvas de demanda); a su vez, los demandantes del segundo mercado, a precios cero, tienen menores niveles de demanda que los del primer mercado (términos independientes de las ecuaciones de demanda).

En una variable, el comportamiento de la función cuadrática $y = ax^2$ es la base de las aplicaciones de la segunda derivada al trazado de gráficas y al proceso de optimización; en varias variables a este tipo de funciones se las llama formas cuadráticas y son polinomios de segundo grado en varias variables, que tienen la forma

$$\begin{aligned}q(\mathbf{x}) = q(x_1, x_2, ..., x_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2,\end{aligned}$$

donde los a_{ik} son coeficientes reales.

Las formas cuadráticas se pueden reescribir en forma de producto matricial

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de tamaño $n \times n$ que se puede tomar simétrica. Esto es, para referirse a formas cuadráticas se puede de dos maneras: la matricial $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T$ y la polinómica $a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + ... + a_{nn}x_n^2$. Por lo tanto, para identificarlas basta con la matriz asociada A; aunque hay infinitas matrices asociadas, en adelante se usa la matriz simétrica.

El interés al analizar formas cuadráticas está en conseguir resultados que den información local sobre el comportamiento de una función a partir de sus segundas derivadas.

En una variable, el comportamiento de la función cuadrática $y = ax^2$ es la base para la prueba del teorema que conecta las nociones de segunda derivada, convexidad y concavidad. En varias variables este papel lo hacen las formas cuadráticas

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T,$$

que deben inicialmente ser clasificadas para luego relacionar esa clasificación con ciertos comportamientos.

Definición 2.5. *Una forma cuadrática* $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T$ *es:*

1. ***Definida positiva*** *si* $q(\boldsymbol{x}) > 0$ *para todo* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$*,*

2. ***Semidefinida positiva*** *si* $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ *para todo* $\boldsymbol{x}$*,*

3. ***Definida negativa*** *si* $q(\boldsymbol{x}) < 0$ *para todo* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ *y*

4. ***Semidefinida negativa*** *si* $q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *para todo* $\boldsymbol{x}$*.*

*Si una forma cuadrática no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa, se llama **no definida**.*

Nótese que las formas definidas son también semidefinidas, esto es, las formas cuadráticas definidas son un subconjunto de las semidefinidas.

Ejemplos

1. La forma

$$q_1(x, y, z) = 4x^2 + 4xy + 3y^2 + z^2 = (2x + y)^2 + 2y^2 + z^2$$

   es cero si y sólo si $x = y = z = 0$; para cualquier otro valor es positiva. Por lo tanto, es definida positiva.

2. La forma $q_2(x, y, z, w) = 4x^2 + 4xy + 3y^2 + z^2$ es cero si y sólo si $x = y = z = 0$ sin importar el valor que tome w. Por lo tanto, es semidefinida positiva.

3. $q_3(x, y, z) = 4x^2 - 4xy + y^2 + z^2 = (2x - y)^2 + z^2$ es no negativa. Pero además de $x = y = z = 0$ existen otros valores que la hacen cero, por ejemplo $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$. Por lo tanto, es semidefinida positiva.

La clasificación de las formas cuadráticas usando la definición anterior es, en general, un excelente ejercicio de factorización. Para trasladar el problema a criterios matriciales simples es necesaria la siguiente

Definición 2.6. *Sea A una matriz $n \times n$. El **menor principal** de A de orden r es el determinante*

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

*Un **menor principal primario** de A de orden r es un determinante de la forma*

$$P_r = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}_{r \times r}$$

Un menor principal primario es el determinante de la submatriz de tamaño $r \times r$ que resulta de eliminar $n - r$ filas y columnas correspondientes (con igual índice) de A. Por ejemplo, los menores principales primarios de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 8 & 5 \\ -3 & 7 & 1 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Estos determinantes están formados por dos entradas de la diagonal principal de la matriz y las entradas simétricas a esas entradas; de la misma forma se encuentran los menores principales primarios de orden 3.

Teorema 2.2. *La forma cuadrática $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T$, donde A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, es:*

1. *Definida positiva si y sólo si $M_r > 0$ para $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.*
2. *Semidefinida positiva si y sólo si $P_r \geq 0$ para $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.*
3. *Definida negativa si y sólo si $(-1)^r M_r > 0$ para $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.*
4. *Semidefinida negativa si y sólo si $(-1)^r P_r \geq 0$ para $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Una forma cuadrática es definida positiva si y sólo si todas las entradas de la diagonal principal de su matriz de representación son positivas y todos los menores principales son positivos. Es definida negativa si y sólo si todas las entradas de la diagonal principal son negativas y los menores principales tienen signos intercalados: el de orden 2 positivo, el de orden 3 negativo, etc. De la misma forma se determina si la forma es semidefinida pero examinando los menores principales primarios: para que sea semidefinida positiva las entradas en la diagonal son no negativas y todos sus menores primarios de la matriz deben ser no negativos; para que sea semidefinida negativa las entradas de la diagonal de la matriz deben ser no positivas, los menores primarios de orden 2 deben ser no negativos, los de orden 3 no positivos, etc.

También se pueden usar valores propios para clasificar formas cuadráticas (ver, por ejemplo, [B y S]). La forma cuadrática es definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son positivos; la forma cuadrática es semidefinida positiva si y sólo si son no negativos; la forma es definida negativa si y sólo si son negativos, etc. Sin embargo, este procedimiento puede ser difícil ya que encontrar los valores propios implica solucionar una ecuación de grado igual al orden de la matriz de representación, problema que en general no siempre es posible solucionar analíticamente.

Ejemplos

1. La matriz de la forma $q_1(x, y, z) = 4x^2 + 4xy + 3y^2 + z^2$ es

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Sus menores principales son

$$4, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8$$

   que son todos positivos. Lo que indica que q_1 es definida positiva.

2. La matriz de $q_2(x, y, z) = 4x^2 - 4xy + y^2 + z^2$ es

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus menores principales son

$$4, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que son no negativos, así que q_2 no es definida positiva ni negativa, por lo tanto se deben examinar los menores principales primarios para determinar si la forma cuadrática es semidefinida positiva o negativa. Los menores primarios de primer orden son:

$$4, \quad 1 \quad \text{y} \quad 1$$

Los de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Y el único de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los menores primarios son no negativos, por lo tanto la forma es semidefinida positiva.

3. La forma $q_3(x, y, z) = 4x^2 - 3xy - 5y^2 + 2xz + 4z^2$ es no definida ya que en la diagonal de su matriz de representación

$$\begin{pmatrix} 4 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

hay números positivos y negativos.

Ejercicios

Clasificar las siguientes formas cuadráticas en definidas positivas, negativas, semidefinidas positivas, negativas o no definidas.

1. $q_1(x, y) = x^2 + y^2 + xy$.

2. $q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy$.
3. $q_3(x, y) = xy$.
4. $q_4(x, y, z, w) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2yz + 2z^2 - 4zw + 4w^2$.
5. $q_5(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3xz$.
6. $q_6(x, y, z) = -(x - 2y)^2 - (3x - 2z)^2 - (y - 2z)^2$.
7. $q_7(x, y, z) = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 3xz + 6yz - 9z^2$.
8. $q_8(x, y, z) = -x^2 + 2xy + y^2 - yz$.

2.5. Derivadas parciales

Para una función de varias variables $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ el concepto de marginalidad se extiende a cada una de las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, éste mide el cambio de la variable dependiente y si una de sus variables independientes se incrementa. Lo mismo que en el caso de una variable es posible justificar la aproximación del comportamiento marginal de y con respecto a x_i por la derivada parcial de f con respecto a x_i definida por:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{h}.$$

Para funciones de producción en dos variables, p.e. capital y trabajo, estas derivadas miden las productividades marginales del capital y el trabajo. El cálculo de este tipo de derivadas no involucra reglas nuevas, solamente se deben manejar las variables con respecto a las que no se deriva como constantes. Las notaciones usuales para la derivada de la función f con respecto a la i-ésima variable son: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$,$D_i f$ y f_{x_i}.

Las notaciones $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, f_{ik}, $D_{ik}f$, denotan la segunda derivada parcial de f con respecto a x_i y a x_k. El proceso de cálculo se efectúa derivando primero con respecto a la variable x_k y luego el resultado con respecto a la variable x_i, es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$.

Ejemplo

Si

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz + yz^2 + xy^2z^3,$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z + y^2 z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + z + z^2 + 2xyz^3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = y + x + 2yz + 3xy^2 z^2$.

Al vector formado por las derivadas parciales de una función f de varias variables, se lo conoce como el **gradiente** de la función y se usa la siguiente notación:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

El gradiente para la función del ejemplo anterior es

$$\nabla f(x, y, z) = \left(y + z + y^2 z^3, x + z + z^2 + 2xyz^3, y + x + 2yz + 3xy^2 z^2 \right)$$

2.5.1. Reglas de la cadena

Para funciones de varias variables existen dos versiones de la regla de la cadena. Una para el caso en que $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ donde cada una de las variables x_i es a su vez función de otra variable t, esto es, $x_i = x_i(t)$ para $i = 1, 2, ..., n$. En este caso, al hacer la composición w resulta ser una función únicamente de la variable t y se tiene la siguiente regla para encontrar su derivada:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Usando gradiente,

$$\frac{dy}{dt} = \nabla f(g(t)) \left(g'(t)\right)^T = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$$

donde $g(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ y $g'(t) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)$.

La otra regla de la cadena se aplica cuando cada variable x_i es a su vez función de varias variables, $x_i = x_i(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m)$ para $i = 1, 2, ..., n$, al hacer la composición y es una función de las m variables $t_1, t_2, t_3, ..., t_m$, en este caso las derivadas parciales se calculan por medio de

$$\frac{\partial y}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t_k} + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}.$$

Nótese el contraste en las dos fórmulas, en la primera se usan d para denotar derivadas en una variable, en la segunda todas son ∂ ya que allí solamente hay derivadas parciales.

Teorema 2.3. ***(Euler)*** *Una función f es homogénea de grado p si y sólo si*

$$pf(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Demostración. Si f es homogénea de grado p, $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, derivando la ecuación anterior con respecto a λ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} D_k f(\lambda\mathbf{x})\frac{d(\lambda x_k)}{d\lambda} = \sum_{k=1}^{n} x_k D_k f(\lambda\mathbf{x}) = p\lambda^{p-1} f(\mathbf{x}),$$

haciendo $\lambda = 1$ se tiene el resultado.

Por otra parte, si f satisface la ecuación

$$pf(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(*)$$

y g está definida por

$$g(t) = t^{-p} f(t\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$$

para $t > 0$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$g'(t) = -pt^{-p-1} f(t\mathbf{x}) + t^{-p}\sum_{k=1}^{n} x_k D_k f(t\mathbf{x})$$

Usando la ecuación(*) de la forma

$$pf(t\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} (tx_k) D_k f(t\mathbf{x})$$

en $g'(t)$,

$$g'(t) = -pt^{-p-1} f(t\mathbf{x}) + t^{-p-1} pf(t\mathbf{x}) = 0$$

en consecuencia g es constante y como $g(1) = 0$, $g(t) = 0$ para todo t. Así,

$$f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x})$$

□

La versión de este teorema en una función de producción con rendimientos constantes a escala dice que la suma de las cantidades de cada insumo por sus productividades marginales es la producción total.

Ejercicios

1. Encontrar el grado de homogeneidad para cada función y calcular en cada caso $xF_x + yF_y$:

   a) $F(x,y) = x^3 + 3x^2y + 5xy^2 - 16y^3$.

   b) $F(x,y) = \frac{y}{x^3-2y^3}$.

   c) $F(x,y) = a^{2x/3y}\sqrt{\frac{bx^3y}{\alpha x+\beta y}}$.

2. Calcular el grado de homogeneidad de la función

$$F(x,y,z) = \frac{x+2y+3z}{\sqrt[3]{3x^2+2y^2+z^2}}$$

   y $xF_x + yF_y + zF_z$.

3. Probar que si

$$f(x,y) = \left(\frac{ax^{\alpha}y^{\beta}}{cx^{\delta}+dy^{\rho}}\right)^{\gamma},$$

   entonces

$$\frac{1}{\delta}\frac{xf_x}{f} + \frac{1}{\rho}\frac{yf_y}{f} = \gamma\left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\rho} - 1\right).$$

4. Probar que si una función es homogénea de grado r, sus derivadas parciales son homogéneas de grado $r-1$.

5. Sea

$$C^*(p_1,p_2,p_3,q) = q\left[A\left(p_1^{\beta}p_2^{1-\beta}\right)^{\alpha} + Bp_3^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

   una función de costo que depende de los precios (p_1, p_2, p_3) de tres insumos y la cantidad, q, que se produce. Calcular y simplificar todas las derivadas parciales de C^* y $p_1C^*_{p_1} + p_2C^*_{p_2} + p_3C^*_{p_3}$.

6. Usar el teorema de Euler para probar que si f es una función de dos variables homogénea de grado 1,

$$f_{xx} = -\frac{y}{x}f_{xy}.$$

2.5.2. Polinomio de Taylor en varias variables

La siguiente extensión del teorema de Taylor es la herramienta fundamental en la consecución de las condiciones para encontrar y clasificar los óptimos en funciones de varias variables, en el análisis del equilibrio dinámico en casos no lineales y en general en todo tipo de aproximaciones de funciones no polinómicas.

Teorema 2.4. ***(Taylor)*** *Sea $f(\boldsymbol{x})$, con $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, una función que posee $m+1$ derivadas continuas en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al punto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, entonces*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) =& f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{2\partial x_i \partial x_k}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_k - a_k) \\ & + \cdots + \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{k_1! \cdots k_m! \partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_m}}(\boldsymbol{a})(x_{k_1} - a_{k_1}) \cdots \\ & (x_{k_m} - a_{k_m}) + E_{m,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} E_{m,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = & \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f}{k_1! \cdots k_{m+1}! \partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_{m+1}}}(\boldsymbol{c})(x_{k_1} - a_{k_1}) \cdots \\ & \left(x_{k_{m+1}} - a_{k_{m+1}}\right) \end{aligned}$$

para algún $\boldsymbol{c} \in \beta_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|}(\boldsymbol{a})$.

Como en el caso de una variable E es el error y el resto de la expresión es el polinomio de Taylor de orden m alrededor de $\mathbf{a}$ en varias variables. La prueba de este teorema se hace aplicando el teorema en una variable a la función $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})$ en $t = 0$.

El polinomio de primer grado se puede escribir en forma compacta como

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + E_{1,\mathbf{a}}(\mathbf{x})$$

este desarrollo se usará para conseguir condiciones sobre el comportamiento del plano tangente a la gráfica de una función en los puntos óptimos y en la linealización de sistemas dinámicos no lineales.

2.5.3. La matriz hessiana

Usando el gradiente $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$ para simplificar la notación, el desarrollo de Taylor de primer orden con error alrededor de $\mathbf{a}$ es:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{c})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

El último término de esta expresión representa el error cometido en la aproximación, el $\mathbf{c}$ está entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{a}$. Este error es una forma cuadrática en $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ y la matriz asociada se conoce como **hessiana** de la función f en el punto $\mathbf{c}$

$$H_f(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{c}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{c}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{c}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{c}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz está compuesta de las segundas derivadas parciales de f calculadas en $\mathbf{c}$. Si se usa la representación matricial el desarrollo de Tayor se reduce a

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) H_f(\mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T.$$

Nótese que la expresión de la derecha es una función lineal más una forma cuadrática en $\mathbf{x} - \mathbf{a}$.

Ejercicios

1. Probar que el gradiente de una función lineal de varias variables

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n + b \\ &= (m_1, m_2, \ldots, m_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) + b \\ &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + b \end{aligned}$$

es el vector $\nabla L(\mathbf{x}) = \mathbf{m}$.

2. Probar que el gradiente de una forma cuadrática en n variables,

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&= \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{x}A\mathbf{x}^T
\end{aligned}$$

es el vector $\nabla q(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}A$.

3. Probar que si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$ es una forma cuadrática, entonces $H_q = 2A$.

4. Encontrar aproximaciones de primer orden y los errores correspondientes para cada una de las funciones en los puntos indicados:

   a) $w = -x - xy - xyz$ en el punto $(1, 1, 1)$.
   b) $w = e^{x^3+2y^2+3z}$ en el punto $(0, 0, 0)$.

2.5.4. Diferencial en varias variables

Las aproximaciones en varias variables, usando diferenciales, se hacen en la forma:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \\
&= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1}\Delta x_1 \\
&+ \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_2}\Delta x_2 \\
&+ \cdots + \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{\Delta x_n}\Delta x_n \\
&\approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \\
&= \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

La última expresión es llamada la **diferencial total** de f.

Ejemplo

Sea

$$Q = Q(K, L) = 200K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$$

la función que determina las cantidades producidas de un cierto bien usando K unidades de capital y L unidades de mano de obra, si los niveles de insumos usados actualmente son $K = 400$ y $L = 8$, la cantidad de producto es Q =8.000 unidades.

El cambio en la cantidad que producen 5 unidades adicionales de capital y 2 de mano de obra se encuentra calculando la producción para $K = 405$ y $L = 10$ que da un incremento de 671.4 unidades de producto.El valor usando diferenciales es

$$\begin{aligned}
\Delta Q &= Q(K + \Delta K, L + \Delta L) - Q(K, L) \\
&\approx \frac{\partial Q(K, L)}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q(K, L)}{\partial L}\Delta L \\
&= \frac{200}{2}K^{-1/2}L^{1/3}\Delta K + \frac{200}{3}K^{1/2}L^{-2/3}\Delta L.
\end{aligned}$$

Reemplazando K por 400, ΔK por 5, L por 8 y ΔL por 2 se tiene,

$$\begin{aligned}
\Delta Q &= Q\,(405, 10) - Q\,(400, 8) \\
&\approx 100(400)^{-1/2}(8)^{1/3}5 + \frac{200}{3}(400)^{1/2}(8)^{-2/3}2 \\
&= \frac{1.000}{20} + \frac{8.000}{12} = 50 + \frac{2.000}{3} = 716,6
\end{aligned}$$

Con un error de aproximación de 45,2.

Ejercicios

1. Considérese el modelo macroeconómico $Y = C + I + G$, $C = C(Y, T, r)$, $I = I(Y, r)$ donde Y es renta nacional, C el consumo, I inversión, G el gasto público, T ingreso por impuestos, r tasa de interés, C y I son diferenciables, con $C_Y > 0$, $C_T < 0$, $C_r < 0$, $I_Y > 0$, $I_r < 0$ y $C_Y + I_Y < 1$.

   a) Interpretar económicamente las condiciones sobre C e I.

   b) Diferenciar el sistema y expresar dY en términos de dT, dG y dr. ¿Qué pasa con Y si T crece? ¿Qué pasa si G decrece?

2. Estimar, usando diferenciales, el cambio en el punto de equilibrio de un mercado de un bien que tiene oferta y demanda lineales, $q^o = ap + b$ y $q^d = cp + d$, producido por:

   a) Un incremento de \$1.000 en el precio de venta al consumidor.

   b) Un impuesto del 16 % sobre el precio de venta al consumidor. Si $a = 20$, b =-20.000, $c = -15$ y d =100.000.

   c) Encontrar el punto de equilibrio para este caso.

   d) Analizar el cambio del punto de equilibrio si el precio al consumidor se incrementa en \$200.

   e) ¿Cuál es el cambio que resulta de imponer un 16 % de impuesto sobre el precio al consumidor?

   f) Diseñar un mecanismo para incrementar la cantidad de equilibrio en 10 %.

3. Usar diferenciales para estimar el cambio en el precio y la cantidad de equilibrio en un mercado que tiene demanda $q = ap^2 + bp + c$ y oferta $q = \alpha p + \beta$.

   a) Producido por un subsidio al productor del 10 % del precio de venta.

   b) Un aumento de \$1 sobre el precio de venta al consumidor.

   c) Un aumento de $\$k$ sobre el precio de venta al consumidor.

   d) Un impuesto del 10 % sobre el precio de venta al consumidor.

   e) Un impuesto del r % sobre el precio de venta al consumidor.

   f) Aplicar los resultados a un caso particular.

2.6. Funciones especiales

Puesto que el comportamiento de funciones de varias variables, como en funciones reales, está basado en las aproximaciones lineales y cuadráticas que garantiza el teorema de Taylor y dado que las funciones más usadas para modelos en economía son variaciones de estos tipos de aproximaciones (próxima sección); se muestran algunas de ellas, sus propiedades y gráficas.

Si un proceso productivo que usa n insumos está modelado por una función f y para la producción es **esencial** el i-ésimo insumo, la función debe satisfacer

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = 0.$$

El grado de **sustitución** o **complementación** entre las variables x y y de una función $f(x,y)$ se mide por la elasticidad de sustitución

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta\,\%(x/y)}{\Delta\,\%TMS(x/y)},$$

donde, $TMS(x/y)$ es la tasa marginal de sustitución, aproximación usando diferenciales de la $TS(x/y)$ tasa de sustitución de x por y. La $TS(x/y)$ es la relación entre los incrementos de x y y sobre la misma curva de nivel de la función $f(x,y)$, esto es, determina el cambio del valor de una variable para compensar una variación de la otra y permanecer sobre la misma curva de nivel.

Economicamente la TS para una función de producción determina como se deben ajustar las cantidades de insumos para que la producción permanezca fija, así si los insumos son horas hombre y maquinaria la TS indica como se debe compensar en horas hombre las variaciones en cantidad de maquinaria o viceversa.

Si se usan diferenciales la elasticidad de sustitución se aproxima por

$$\sigma_{ij} \approx \frac{d(x/y)}{x/y}\frac{f_y(x,y)/f_x(x,y)}{d\left[f_y(x,y)/f_x(x,y)\right]}.$$

Para funciones de producción, si este valor es cero los insumos son estrictamente complementarios y a mayor valor existe más sustitución entre ellos; en funciones de utilidad se tiene una interpretación similar con respecto a los bienes de consumo. Geométricamente la elasticidad mide la curvatura de las curvas de nivel de la función: a mayor elasticidad las curvas de nivel son mas rectas y a menor las curvas tienden a ser de la forma de ángulo recto ($\llcorner$).

Los modelos más simples son los lineales, **funciones lineales**, estos representan procesos para los cuales las variables independientes son perfectamente sustitutas y no son esenciales:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + b \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + b, \end{aligned}$$

donde, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2.6.1. Cobb-Douglas (CD)

Este tipo de función tiene la forma,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = A\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

con $A > 0$. Es de las funciones de varias variables más comunmente aplicadas en economía. Los valores de f pueden representar la cantidad producida cuando se usan x_k unidades del k-ésimo insumo; niveles de utilidad si x_k representa unidades de consumo de ciertos bienes, costos de producción cuando x_k representa el precio de un insumo de producción, gasto cuando x_k es el precio del k-ésimo bien consumido, etc. Para este tipo de interpretación el dominio debe ser $\mathbb{R}^n_+$.

En la función CD todas las variables satisfacen la propiedad de esencialidad. La función es homogénea de grado $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$, esto es, una función tipo CD es homogénea de grado la suma de los exponentes de cada variable. El comportamiento marginal de la función se deduce de las derivada parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}\cdots x_n^{\alpha_n} = \alpha_i\frac{Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_i^{\alpha_i}\cdots x_n^{\alpha_n}}{x_i} = \alpha_i\frac{f}{x_i},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_i(\alpha_i-1)x_i^{\alpha_i-2}\cdots x_n^{\alpha_n} = \alpha_i(\alpha_i-1)\frac{f}{x_i^2}.$$

Si la función y sus variables representan cantidades, para que los valores marginales sean positivos $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$ y para que los valores marginales sean decrecientes, $\alpha_i \leq 1$ para $i = 1, 2, ..., n$, estas son las condiciones neoclásicas usuales. Usando diferenciales, la aproximación de la elasticidad de la función con respecto a la variable i-ésima es,

$$\epsilon_{fx_i} = \frac{\Delta\,\%f}{\Delta\,\%x_i} = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \frac{\Delta f}{\Delta x_i}\frac{x_i}{f} \approx \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f} = \alpha_i\frac{f}{x_i}\frac{x_i}{f} = \alpha_i,$$

esto es, los exponentes representan las elasticidades de la función con respecto a cada variable.

Para el caso de una función de producción que use dos insumos: capital y trabajo, la CD es

$$Q\,(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

Para esta función

$$Q_K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \alpha\frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = \alpha\frac{Q}{K}$$

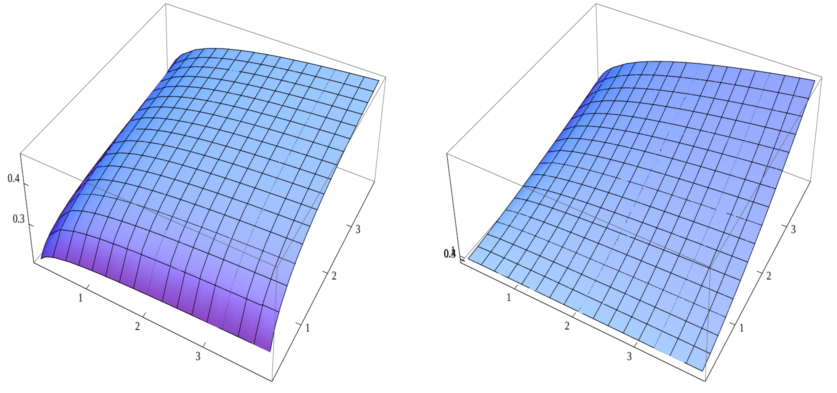


Figura 2.9: Graficas de las funciones elasticidad de sustitución constante (CES) $Q(K,L) = \left(2K^{-1/3} + 3L^{-1/3}\right)^{-2/3}$ y de la Cobb-Douglas $Q(K,L) = 2K^{1/3}L^{4/3}$.

el producto marginal del capital es proporción fija de la relación producto capital. De forma análoga, el producto marginal de una función tipo CD con respecto a cada insumo es proporción fija de la relación producto insumo.

Ejercicios

1. Comprobar la deducción de las derivadas para la función CD.

2. Probar que la elasticidad de sustitución entre cualquier par de variables para la CD es uno.

3. Probar que para la función $F(x,y) = g(h(x,y))$ con h homogénea de grado uno, la elasticidad de sustitución está dada por:

$$\sigma_{xy} = \frac{h_x h_y}{h h_{xy}}.$$

2.6.2. Elasticidad de Sustitución Constante (CES)

Menos popular que la CD, tienen la forma

$$f(\mathbf{x}) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^{-\rho}\right]^{-\sigma/\rho} = \left[a_1 x_1^{-\rho} + a_2 x_2^{-\rho} + \cdots + a_n x_n^{-\rho}\right]^{-\sigma/\rho},$$

con $a_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$ y dominio $\mathbb{R}^n_+$. Como la CD las n variables pueden representar insumos de producción, precios o cantidades consumidas de ciertos bienes y f la cantidad producida, el costo, gasto, la utilidad directa o indirecta. La CES es homogénea de grado σ y sus variables no satisfacen la condición de esencialidad.

Para encontrar el comportamiento marginal de la función en el caso de dos variables se deriva implícitamente la ecuación,

$$f^{-\rho/\sigma} = ax^{-\rho} + by^{-\rho},$$

con respecto a la variable x

$$-\frac{\rho}{\sigma} f^{-\frac{\rho}{\sigma}-1} f_x = -\rho a x^{-\rho-1}.$$

Simplificando y transponiendo hasta despejar la derivada parcial,

$$f_x = a\sigma \frac{f^{\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho+1}}.$$

De aquí,para que la función tenga valores marginales positivos, σ debe ser positivo. Derivando y simplificando,

$$\begin{aligned} f_{xx} &= a\sigma \frac{(\frac{\rho}{\sigma}+1) f^{\frac{\rho}{\sigma}} f_x x^{\rho+1} - f^{\frac{\rho}{\sigma}+1}(\rho+1)x^{\rho}}{x^{2\rho+2}} \\ &= \frac{a\sigma f^{\frac{\rho}{\sigma}} x^{\rho}}{x^{2\rho+2}} \left[\left(\frac{\rho}{\sigma} + 1 \right) f_x x - f(\rho+1) \right] \\ &= \frac{a\sigma f^{\frac{\rho}{\sigma}}}{x^{\rho+2}} \left[\frac{\rho+\sigma}{\sigma} a\sigma \frac{f^{\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho+1}} x - f(\rho+1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a\sigma f^{\frac{\rho}{\sigma}}}{x^{\rho+2}} \left[(\rho+\sigma) a \frac{f^{\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho}} - f(\rho+1) \right] \\ &= \frac{a\sigma f^{2\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho+2}} \left[(\rho+\sigma) a x^{-\rho} - f^{-\frac{\rho}{\sigma}}(\rho+1) \right] \\ &= \frac{a\sigma f^{2\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho+2}} \left[(\rho+\sigma) a x^{-\rho} - (\rho+1) \left(a x^{-\rho} + b y^{-\rho} \right) \right] \\ &= \frac{a\sigma f^{2\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho+2}} \left[(\rho+\sigma-\rho-1) a x^{-\rho} - (\rho+1) b y^{-\rho} \right] \\ &= \frac{a\sigma f^{2\frac{\rho}{\sigma}+1}}{x^{\rho+2}} \left[(\sigma-1) a x^{-\rho} - (\rho+1) b y^{-\rho} \right]. \end{aligned}$$

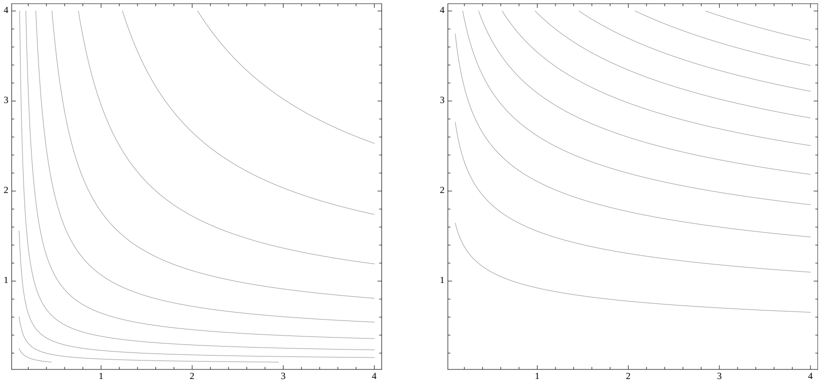


Figura 2.10: Curvas de nivel de $Q(K,L) = \left(2K^{-1/3} + 3L^{-1/3}\right)^{-2/3}$ y $Q(K,L) = 2K^{1/3}L^{4/3}$.

Esta última expresión debe ser negativa, para que los rendimientos marginales de la función sean decrecientes, por esto: $\sigma \leq 1$ y $\rho > -1$.
Es posible construir funciones tipo CES con un continuo de variables (funcionales) en la forma

$$f(\mathbf{x}) = \left[\int_{\alpha}^{\beta} a(w)\big(x(w)\big)^{-\rho} dw\right]^{-\sigma/\rho},$$

estas modelan procesos que tienen un continuo de bienes o insumos: la utilidad que produce consumir una bebida, el uso de un insumo de producción liquido. Este tipo de funciones han sido usadas en modelos de economía urbana como casos límite de producción sobre una ciudad lineal.

Ejercicios

1. Encontrar la elasticidad de la función CES con respecto a la variable x.

2. Probar que para la CES la elasticidad de sustitución es constante y calcularla.

2.6.3. Leontieff

Este tipo de función sirve como modelo para las cantidades producidas de un bien que requiera insumos estrictamente complementarios, p.e. la producción de ropa que requiere tela, hilo, botones y mano de obra; si alguno de los insumos falta no se puede producir: si para hacer una camisa se necesita 1,2 metros de tela, 10 metros de hilo, 10 botones y dos horas de mano de obra y hay disponibles 250 metros de tela, 11.342 metros de hilo, 2.753 botones y 41,5 horas de mano de obra, entonces se pueden hacer

$$\text{mín}\left\{\left[\frac{250}{1{,}2}\right], \left[\frac{11.342}{10}\right], \left[\frac{2.753}{10}\right], \left[\frac{41{,}5}{2}\right]\right\}$$

camisas (los paréntesis $[\cdot]$ representan la parte entera).

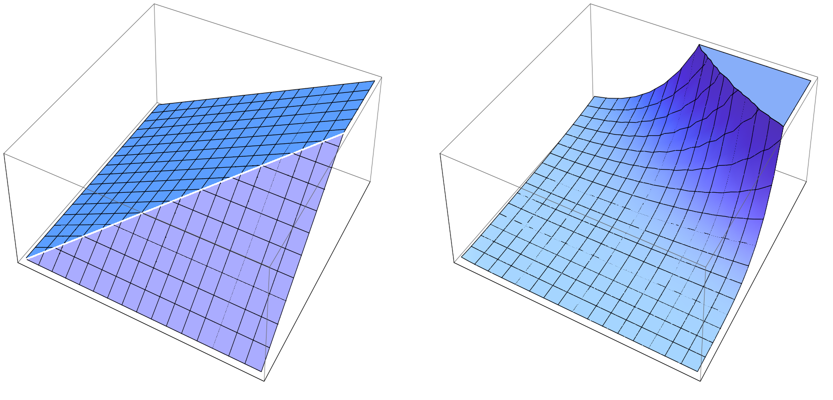


Figura 2.11: La función de Leontieff $f(x, y) = \text{mín}\{ax, by\}$ y la translogarítmica.

La función en varias variables es

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{mín}\{a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n\},$$

ésta satisface la propiedad de esencialidad en cada variable y representa procesos en los cuales las variables son complementarias estrictas. Entre las funciones Leontieff y lineal, en la primera las variables modelan complementarios estrictos con elasticidad nula y en la segunda sustitutos perfectos con elasticidad infinita, existen funciones tipo CES con cualquier grado de sustituibilidad entre sus variables.

A partir de estos tipos básicos se crean funciones con elasicidad y complementariedades a gusto de quien hace el modelo. Algunos de estos tipos son:

$$f(x,y,z) = Ax^\alpha \left(ay^{-\rho} + bz^{-\rho}\right)^{-\frac{\beta}{\rho}}$$

en esta x y y, y x y z tienen elasticidad unitaria y entre y y z elasticidad $\frac{1}{1+\rho}$. En

$$f(x,y,z) = \left(ax^\alpha y^\beta + bz^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\sigma}{\alpha+\beta}}$$

la elasticidad entre x y y es unitaria y entre x y z, y y y z es $\frac{1}{1-\alpha-\beta}$. Para

$$f(x,y,z) = Ax^\alpha \left(\text{mín}\{ay, bz\}\right)^\beta$$

y y z son complementarias y x y y, y x y z tienen elasticidad unitaria.

Fuera de los tipos descritos existen funciones con elasticidad variable (VES), en estas la elasticidad depende de los valores de las variables.

Ejercicios

Encontrar funciones con variables x, y y z (una para cada caso) tales que:

1. x y y sean sustitutas perfectas; x, z y y, z sean complementarias estrictas.
2. x y y sean esenciales; x, z y y, z sean complementarias estrictas.
3. La elasticidad de sustitución entre x y y es α y entre x, z y y, z es β.

2.6.4. Translogarítmica

Tomando logarítmo a la función CD, ésta se reduce a:

$$\ln f(\mathbf{x}) = \ln A + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln x_k,$$

esta expresión puede considerarse como una función lineal de logarítmos. Una generalización de esta expresión es la función

$$\ln f(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \ln x_i \ln x_k$$

conocida como translogarítmica, esta es una función lineal más una forma cuadrática en logarítmos. Como se muestra en la próxima sección esta función produce mejores aproximaciones que la CD.

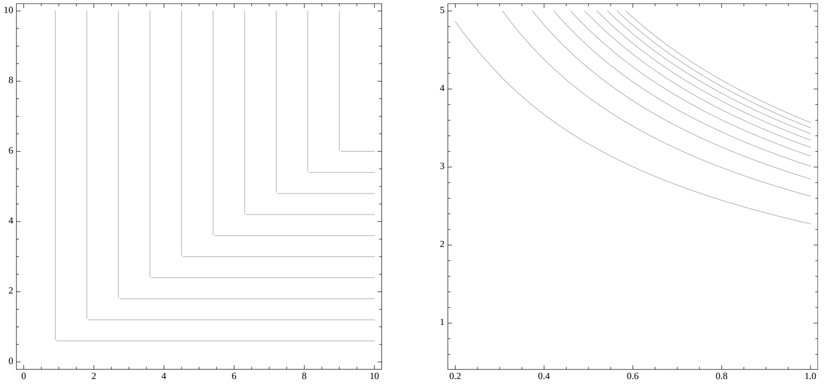


Figura 2.12: Curvas de nivel de una función tipo Leontieff y de una translogarítmica.

Ejercicios

1. Encontrar el dominio e imponer condiciones sobre los parámetros para que la función **cuasilineal**:

$$f(x,y) = ax + \ln y^b$$

   sirva de modelo a procesos económicos. Encontrar la elasticidad de la función con respecto a cada variable y las elasticidades parciales de sustitución.

2. Para cada una de las siguientes funciones de producción con elasticidad de sustitución variable, VES:

   - $Q(K,L) = \left(\frac{AK^\alpha L^\beta}{BK^\alpha + CL^\alpha}\right)^{1/\alpha}$ que se puede considerar como el cociente de una Cobb-Douglas y una CES.
   - $Q(K,L) = Ae^{\delta K/L} K^\alpha L^\beta$.
   - $Q(K,L) = Ae^{\delta K + \sigma L} K^\alpha L^\beta$.
   - $Q(K,L) = AK^{\alpha(1-\delta\rho)}\,[L + (\rho-1)K]^{\alpha\delta\rho}/$[3].
   - $Q(K,L) = \left(aK^{-\alpha} + bL^{-\beta}\right)^{-1/\rho}$.

[3]Revankar, Nagesh S. (1971). "A class of variable elasticity of substitution production functions", *Econometrica*, Vol. 39, No. 1, enero.

a) Determinar el tipo de rendimientos a escala (que debe depender de los parámetros involucrados).

b) ¿Bajo qué condiciones, si las hay, las funciones tienen rendimientos constantes a escala?

c) Calcular la productividad marginal del trabajo en función de los niveles de producción, capital y trabajo.

d) Comprobar que estas funciones son tipo VES.

3. Interpretar el grado de homogeneidad para el logaritmo de una función y encontrar condiciones para que la translogarítmica sea homogénea.

4. Una compañía tiene un contrato para suministrar 36.500 unidades de su producción este año. El costo de almacenamiento anual es de 10 u.m. por unidad; el contrato permite la escasez con un costo por unidad faltante de 15 u.m. y la iniciación de una partida de producción cuesta 15.000 u.m. Si las órdenes de producción se cumplen sin demora y la demanda sigue una tasa constante, determinar el costo promedio como una función de la frecuencia de producción y de la cantidad producida en cada partida de producción.

5. Dada la función de producción $Q(L,K)$, las isocuantas son expresiones de la forma $Q(L,K) = c$ (donde c es una constante); sobre ella están localizadas las distintas combinaciones de capital y trabajo con las que se pueden elaborar c de unidades de producto. Trazar las gráficas de las isocuantas de la función

$$Q\left(L,K\right) = 5L^{1/3}K^{1/3}$$

para $c = 1, 2, 3$.

6. Una curva de nivel (isocuanta), para la función de producción $Q = Q(L,K)$, está representada por la expresión $Q(L,K) = c$, donde c es una constante, sobre ella están las distintas combinaciones de L (capital) y K (trabajo) necesarias para producir una cantidad c. En esta curva, bajo ciertas condiciones sobre Q, L es una función de $K, L = L(K)$. Usar la regla de la cadena en la ecuación $Q(L,K) = c$ para calcular $\frac{dL}{dK}$, la tasa marginal de sustitución técnica del trabajo por el capital. Aplicar los resultados a las funciones:

a) $Q(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$.

b) $Q(L,K) = (\alpha L^\rho + \beta K^\rho)^{1/\rho}$

7. $\bar{C}$ representa el costo promedio de una firma que usa dos insumos de producción, K y L, a precios r y w respectivamente y tiene una producción de $Q = Q(K,L)$ unidades.

   a) Calcular las derivadas parciales de primer orden de $\bar{C}$.

   b) Determinar las condiciones bajo las cuales las derivadas parciales de primer orden son cero.

   c) Encontrar las derivadas parciales de segundo orden de $\bar{C}$.

   d) Aplicar los resultados a la función $\bar{C}(K,L) = \frac{rK+wL}{AK^\alpha L^{1-\alpha}}$ donde la función de producción es Cobb-Douglas con rendimientos constantes.

8. $\Pi(K,L) = pQ(K,L) - (rK + wL)$ representa el beneficio a corto plazo de la firma del ejercicio anterior.

   a) Calcular las derivadas parciales de primer orden de Π.

   b) Determinar las condiciones bajo las cuales las derivadas parciales de primer orden son cero.

   c) Encontrar las derivadas parciales de segundo orden de Π.

   d) ¿Existe algún parecido entre las partes *b)* de este ejercicio y del anterior?

9. Calcular las derivadas parciales de la función translogarítmica:

$$\ln y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \ln x_i \ln x_k.$$

   con respecto a x_k y escribirla en términos de la función y x_k; esta derivada representa la productividad marginal del k-ésimo insumo y al escribirla en términos de la función y la variable se está expresando esa productividad marginal como función del nivel de producción y las cantidades de insumos.

10. Para la función de producción

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k x_k^{-\rho_k}\right)^{-\sigma/\rho}$$

que generaliza la CES[4]: (si los ρ_k son todos iguales a ρ esta función se reduce a la CES).

a) Imponer restricciones sobre los parámetros para que la función tenga rendimientos crecientes.

b) Encontrar el producto marginal con respecto al k-ésimo insumo en función de las cantidades de producto e insumos.

11. Para la función

$$y = f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k x_k^{-\rho_k} \right)^{-1/\rho}$$

probar que:

a) $f_k = \delta_k \frac{\rho_k}{\rho} \frac{y^{1+\rho}}{(x_k)^{1+\rho_k}}$.

b) $f_{ks} = \delta_k \frac{1+\rho}{y} f_k f_s$, si $k \neq s$.

c) $f_{kk} = f_k \left(\frac{1+\rho}{y} f_k - \frac{1+\rho_k}{x_k} \right)$.

2.7. Una generalización del teorema de Taylor

La función Cobb-Douglas (CD) generalizada

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = A \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$$

es una buena herramienta en la estimación de funciones de producción. Sin embargo, esta forma funcional impone restricciones importantes y poco realistas al proceso modelado, una de ellas es que la elasticidad de sustitución (ES) entre factores, definida por:

$$\sigma_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_j}}{x_i x_k} \frac{\hat{H}_{ik}}{\left| \hat{H}_f \right|},$$

[4]Guilkey, David K. y C. A. Knox Lovell (1980). "On the flexibility of the translog approximation", *International Economic Review*, Vol. 21, No. 1, febrero.

donde,

$$\hat{H}_f = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_n} \\ f_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n} & f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

es la matriz hessiana orlada de f; $\hat{H}_{ik}$ es el cofactor correspondiente a las derivadas con respecto a las variables ik de f en $\hat{H}$, f_{x_j} representa la derivada parcial de f con respecto a x_j y $\left|\hat{H}_f\right|$ es el determinante de $\hat{H}_f$, es siempre uno. Esta ES mide el efecto en la cantidad demandada del i-ésimo insumo debida al cambio en el precio del j-ésimo (Allen). Hicks define otra, la elasticidad de complementariedad relacionada con las funciones duales (Ver capítulo 6), que mide el efecto en el precio de un factor, producido por el cambio en la cantidad demandada de otro. La definición implica que si la función es doblemente diferenciable, la ES es simétrica [S y K].

Puesto que la función CD tiene ES unitaria para cualquier par de factores, en esta tecnología los factores son sustitutos; este hecho deja por fuera otro tipo de interacción entre factores de producción. Como respuesta a estos limitantes surgió la función CES (elasticidad de sustitución constante),

$$y = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{-\rho}\right)^{-\frac{\sigma}{\rho}}$$

que permite que la ES entre pares de factores difiera de la unidad. En esta forma funcional las elasticidades de sustitución son idénticas para cualquier par de factores. Uzawa[U] prueba que la CES generalizada es la única forma funcional para la cual se cumple esta condición.

La solución total a los problemas de restricción requiere formas funcionales para la función de producción que sean lo suficientemente simples como para permitir una fácil estimación y no impongan excesivas restricciones sobre los parámetros económicos. La función CES es un paso a la solución, aunque todavía es demasiado restrictiva.

Otras formas funcionales permiten elasticidades distintas entre algunos pares de factores, aunque aun constantes. Uzawa[U], McFadden[McF] y Sato[Sa] estudian algunas de estas formas funcionales, ellas son composiciones de las funciones CES y CB en la forma

$$f\left(g_1\left(\mathbf{x}_1\right), g_2\left(\mathbf{x}_2\right), \ldots, g_s\left(\mathbf{x}_s\right)\right)$$

donde los vectores de $\mathbf{x}$ representan una partición de los n insumos. En este tipo de funciones los insumos se dividen en familias con comportamiento similar. Guilkey y Lovell[G y L] determinan que para la función

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{-\rho_k} \right)^{-\frac{1}{\rho}},$$

que generaliza la CES, la ES es variable y está dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{(1+\rho_i)(1+\rho_j)} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \rho_k x_k^{-\rho_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \rho_k}{1+\rho_k} x_k^{-\rho_k}},$$

Fuera de las construcciones mostradas hasta aquí, hay otras como la de Revankar[R], en las que se presentan otras generalizaciones de la CES y la CD en dos variables con ES no simétrica.

El desarrollo de un nuevo tipo de funciones, la de Diewer y la translogarítmica, fue considerado por los economistas como la solución apropiada a los problemas planteados: no imponer restricciones al proceso modelado ni a la ES entre los factores y así mismo facilitar la estimación. Dichas soluciones no dan formas funcionales sino que hacen un desarrollo para toda función.

El resultado fundamental para el desarrollo en funciones CD, CES, translogarítmicas y de Diewert, es la generalización de la fórmula de Taylor a la composición de funciones que describe el siguiente

Teorema 2.5. *Sean f una función dos veces derivable en una vecindad de a, y g una función dos veces derivable en vecindades de a y $f(a)$, con $g'(a)$ y $g''(a)$ distintas de cero. Si se define el error $E_2(x)$ de aproximación de la función $(g \circ f)(x)$ (g compuesta de f calculada en x) por el polinomio de segundo grado*

$$(g \circ f)(a) + \frac{d(g \circ f)}{dg}(a)(g(x) - g(a)) + \frac{1}{2} \frac{d^2(g \circ f)}{d^2 g}(a)(g(x) - g(a))^2$$

por la ecuación:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) &+ \frac{d(g \circ f)}{dg}(a)(g(x) - g(a)) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2(g \circ f)}{d^2 g}(a)(g(x) - g(a))^2 + E_2(x),\end{aligned}$$

donde

$$\frac{d(g\circ f)}{dg}(a)=\frac{(g\circ f)'(a)}{g'(a)}$$

y

$$\frac{d^2(g\circ f)}{d^2g}(a)=\frac{1}{g'(a)}\frac{d\left(\frac{(f\circ g)'(x)}{g'(x)}\right)}{dx}(a)$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a}\frac{E_2(x)}{(g(x)-g(a)^2)}=0\qquad (^*).$$

Demostración. De la definición de $E_2(x)$, se nota que (*) equivale a probar que

$$\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)-\frac{d(g\circ f)}{dg}(a)(g(x)-g(a))}{(g(x)-g(a))^2}=\frac{1}{2}\frac{d^2(g\circ f)}{d^2g}(a).$$

Para lo cual se aplica la regla de L'Hôpital y se reemplaza la definición de $\frac{d(g\circ f)}{dg}$ en el límite,

$$\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)'(x)-\frac{d(g\circ f)}{dg}(a)g'(x)}{2(g(x)-g(a))g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)'(x)-\frac{(g\circ f)'(a)}{g'(a)}g'(x)}{2(g(x)-g(a))g'(x)}$$

Al simplificar y aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital en el último límite, se obtiene

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)'(x)g'(a)-(g\circ f)'(a)g'(x)}{2(g(x)-g(a))g'(x)g'(a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)''(x)g'(a)-(g\circ f)'(a)g''(x)}{2g'(a)\left[g''(x)(g(x)-g(a))+(g'(x))^2\right]}\end{aligned}$$

Escribiendo en términos de la segunda derivada de la función $g\circ f$ con respecto a la función g,

$$\frac{1}{2g'(a)}\frac{d}{dx}\left(\frac{(g\circ f)'}{g'}\right)(a)=\frac{1}{2}\frac{d^2(g\circ f)}{d^2g}(a)$$

Lo que prueba el resultado. □

El teorema anterior no sólo es susceptible de generalizar en el grado del polinomio (orden de derivabilidad de las funciones), sino también a varias variables.

Teorema 2.6. *Si las funciones f y g tienen derivadas de orden n en el sentido*

$$\frac{d^{n+1}(g \circ f)}{dg^{n+1}}(a) = \frac{1}{g^n(a)} \frac{d\left(\frac{(g \circ f)^n(x)}{g^n(x)}\right)}{dx}(a)$$

entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) &+ \frac{d(g \circ f)}{dg}(a)\,(g(x) - g(a)) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d^2(g \circ f)}{dg^2}(a)\,(g(x) - g(a))^2 \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n(g \circ f)}{dg^n}(a)\,(g(x) - g(a))^n + E_n(x),\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{x \to a} \frac{E_n(x)}{(g(x) - g(a))^n} = 0.$$

Demostración. La prueba de este resultado se hace por inducción matemática. □

En el caso de que g sea la función logarítmica y $f(a) > 0$, la expresión anterior se transforma en:

$$\ln(f(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!} \ln^k(x) + E_n(x)$$

así cualquier función positiva se puede representar por medio de un polinomio en logaritmos.

En varias variables la forma que toma el desarrollo de orden 2, donde f debe ser una función de n variables y g una función de una variable, es:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\mathbf{x}) = (g \circ f)(\mathbf{a}) &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial g_i}(\mathbf{a})\,(g(x_i - g(a_i)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial g_i \partial g_j}(\mathbf{a})\,(g(x_i - g(a_i))\,(g(x_j - g(a_j)) + E_2(x).\end{aligned}$$

La conclusión del teorema en varias variables establece que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{E_2(\mathbf{x})}{\|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a}))\|^2} = 0$$

aquí las barras indican la norma en $\mathbb{R}^n$.

Las restricciones que se deben imponer a las funciones f y g son del mismo tipo que las impuestas al caso de una variable (f debe ser una función dos veces diferenciable en una vecindad de $\mathbf{a}$ y g una función dos veces derivable en vecindades de a_i y $f(\mathbf{a})$, con $g'(a_i)$ y $g''(a_i)$ no nulas para todo $i = 1, 2, \ldots n$; las derivadas parciales con respecto a g_i significan derivar con las definiciones del teorema anterior con respecto a g calculada en la i-ésima componente de $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial g_i}(\mathbf{a}) = \frac{\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i}(a_i)}$$

Como en el caso de una variable, la conclusión que se deriva se interpreta como que el error $E_2(\mathbf{x})$ cometido en la aproximación es pequeño cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{a}$. Esta es la razón para que generalmente se use el polinomio sin el error como una buena aproximación al valor de la función $g \circ f$ en cercanías del vector $\mathbf{a}$. El teorema garantiza que si la distancia entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$ es pequeña, el error cometido en la aproximación también lo es.[5]

Si g es la función logarítmica y $\mathbf{a}$ tiene todas sus componentes positivas, se obtiene la aproximación al logaritmo de una función mediante un polinomio en el logaritmo de sus variables en la forma clásica de la función translogarítmica:

$$\ln f(\mathbf{x}) \approx a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ln x_i \ln x_j$$

En este caso el teorema asegura que este desarrollo vale en una vecindad del vector $\mathbf{a}$, en este sentido se dice que la aproximación es local. Para esta función Guilkey y Lovell[G y L] encuentran que la ES es:

$$\sigma_{ij} = \frac{a_{ij} + m_i m_j}{m_i m_j},$$

donde

$$m_i = a_i + 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ln(x_j) + 2a_{ii} \ln(x_i).$$

De la expansión se deduce que la translogarítmica, más que una forma funcional, es un desarrollo de Taylor generalizado, aplicable a cualquier función

[5]El resultado hace que la función sea localmente igual al polinomio.

que satisfaga las hipótesis del resultado anterior. Por lo tanto, estos polinomios en logaritmos no tienen propiedades específicas, sino que pueden ser impuestas a sus parámetros para que la función resultante cumpla con las especificaciones que se requiera ([B y C]). De esta forma, se pueden imponer condiciones sobre los parámetros de la translogarítmica para lograr rendimientos constantes a escala, cambio técnico neutral de Hicks, monotonicidad y otras restricciones. Del teorema expuesto se deduce que existe más de una representación en polinomios de funciones; la escogencia de alguna de ellas depende del proceso a modelar y determina a su vez las propiedades que las funciones involucradas deben satisfacer.

Ejercicios

1. Probar, usando diferenciales, que la elasticidad de sustitución para una función $f(x, y)$ definida por

$$\sigma_{xy} = \frac{\Delta \,\%\left(\frac{x}{y}\right)}{\Delta \,\% TMST\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\Delta \,\%\left(\frac{x}{y}\right)}{\Delta \,\%\left(-\frac{f_y}{f_x}\right)},$$

   se puede aproximar por

$$\sigma_{xy} \approx \frac{xf_x + yf_y}{xy} \frac{\hat{H}_{xy}}{\left|\hat{H}_f\right|}.$$

2. Mostrar que las siguientes funciones son aproximaciones de primer orden en el sentido del teorema anterior:

   a) $f(\mathbf{x}) = A \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$ (CD).

   b) $f(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ (CES).

   c) $f(\mathbf{x}) = \left(\alpha + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^{1/2} x_j^{1/2}\right)^2$ (Una versión de la función de Diewer).

Capítulo 3

Grafos y contornos

Las definiciones básicas de conjuntos abiertos, cerrados, compactos, convexos (como otras) no son en general fáciles de manejar. Por ejemplo, determinar si el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 4,\ |x| + y \leq 5\right\}$$

es abierto y convexo con sólo las definiciones, puede convertirse en un difícil problema algebraico. Las nociones de grafos y contornos y los resultados que conectan el comportamiento de éstos y las funciones que los determinan simplifican la solución de problemas de este tipo. En el caso anterior las propiedades del conjunto A están determinadas por el comportamiento de las funciones $f(x, y) = x^2 - y$ y $g(x, y) = |x| + y$ usadas para definirlo.

3.1. Grafos

Definición 3.1. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
*El **grafo** de f es el conjunto:*

$$G_f = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid f(\boldsymbol{x}) = y\},$$

*el **epígrafo, grafo superior o supergrafo** de f es el conjunto*

$$GS_f = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid f(\boldsymbol{x}) \leq y\}$$

*y el **hipógrafo, grafo inferior o subgrafo** de f es*

$$GI_f = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid f(\boldsymbol{x}) \geq y\}.$$

Con esta definición el grafo superior y el grafo inferior contienen al grafo, y si la función f está definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces los conjuntos G_f, GS_f y GI_f son subconjuntos de $A \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. De esta forma los grafos superior e inferior, y el grafo de una función definida en los números reales, es un subconjunto de puntos del plano. El grafo es el conjunto de puntos que forman su gráfica, el grafo superior es la porción del plano formada por la gráfica y los puntos que están encima de la gráfica y el inferior la gráfica y el conjunto de puntos bajo la gráfica.

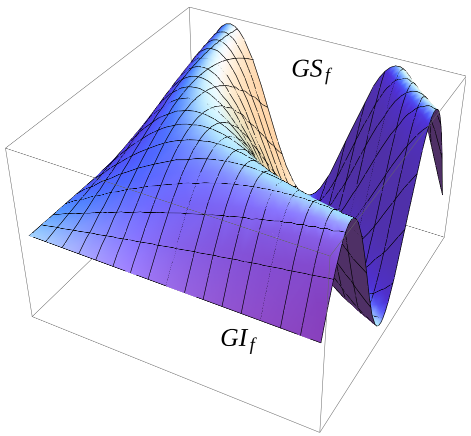


Figura 3.1: El grafo es la superficie formada por los puntos que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$, el epígrafo o grafo superior de f es el grafo junto con el conjunto de todos los puntos que están encima de la gráfica, y el hipógrafo o grafo inferior es el grafo junto con el conjunto de los puntos bajo la gráfica.

Teorema 3.1. *Si f es una función continua definida en un conjunto cerrado, entonces G_f, GS_f y GI_f son conjuntos cerrados.*

Demostración. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y A cerrado. Probar que GS_f es cerrado equivale a mostrar que su complemento, GS_f^c, es abierto. Sea $(\mathbf{a}, b) \in G_f^c$ esto significa que $f(\mathbf{a}) > b$. La aplicación del teorema del valor medio para funciones continuas a f alrededor de $\mathbf{a}$ garantiza que existe $\delta > 0$ tal que para $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{a}) \cap A$, $f(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{a}) + b\right)$. Sean $r = \text{mín}\left\{\delta, \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{a}) + b\right)\right\}$ y $(\mathbf{x}, y) \in B_r(\mathbf{a}, b)$, de aquí, $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \subseteq B_\delta(\mathbf{a})$ y $y \in (b-r, b+r)$, entonces $f(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{a}) + b\right)$ y $y < b+r < b+\frac{1}{2}\left(f(\mathbf{a}) - b\right) =$

$\frac{1}{2}(f(\mathbf{a})+b)$, de donde $y < f(\mathbf{x})$, lo que implica que $(\mathbf{x}, y) \in G_f^c$, de esta forma GS_f^c es abierto y GS_f es cerrado. Las otras partes se dejan como ejercicio al lector. □

Ejemplos

1. El conjunto $\left\{(x,y,z) \mid x^2+xy+5y^2 \leq z\right\}$ es un conjunto cerrado ya que el conjunto es el grafo superior de la función $h(x,y)=x^2+xy+5y^2$ que es continua y está definida para todo x, y, esto es, su dominio es $\mathbb{R}^2$ que es cerrado.

2. El conjunto $\left\{(x,y) \mid y \geq x^2\right\}$ es cerrado ya que la función $g(x)=x^2$ es continua en $\mathbb{R}$ y el conjunto es el grafo superior de g.

3. El conjunto $\left\{(x,y,z) \mid z \leq 2x+5y-4x^2+xy-y^2\right\}$ es el grafo inferior de la función continua $f(x,y)=2x+5y-4x^2+xy-y^2$, por lo tanto es un conjunto cerrado.

4. El conjunto $\left\{(x,y,z) \mid z > 2x+5y-4x^2+xy-y^2\right\}$ es el complemento del grafo inferior de la función $f(x,y)=2x+5y-4x^2+xy-y^2$ que es una función continua en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto el conjunto es abierto (su complemento es cerrado).

5. Muchos conjuntos se pueden interpretar como grafos, supergrafos y subgrafos de funciones adecuadas. El conjunto

$$\left\{(x,y,z) \mid y^2+x < yz \leq x+y^2+z^2\right\}$$

es igual a:

$$\begin{aligned}
&\left\{(x,y,z) \mid y^2+x-yz < 0 \leq x+y^2+z^2-yz\right\}\\
&=\left\{(x,y,z) \mid y^2-yz < -x \leq y^2+z^2-yz\right\}\\
&=\left\{(x,y,z) \mid yz-y^2 > x \geq yz-y^2-z^2\right\}\\
&=\left\{(x,y,z) \mid yz-y^2 > x\right\} \cap \left\{(x,y,z) \mid x \geq yz-y^2-z^2\right\}\\
&=\left(\left\{(x,y,z) \mid yz-y^2 \geq x\right\} - \left\{(x,y,z) \mid yz-y^2 = x\right\}\right)\\
&\qquad \cap \left\{(x,y,z) \mid x \geq yz-y^2-z^2\right\}\\
&=(GI_h - G_h) \cap GS_k
\end{aligned}$$

donde las funciones h y k están definidas por $h(y,z)=yz-y^2$ y $k(y,z)=yz-y^2-z^2$. Aquí las funciones se han tomado en las variables

y y z porque el conjunto permite “despejar” (dejar sola) la variable x en medio de las desigualdades.

6. El ejemplo anterior permite una interpretación del conjunto en términos de grafos; otros, como el siguiente, permiten varias interpretaciones.

$$\left\{(x,y,z,w) \mid x+w^2 < y+z^3 \leq x+z^2+w^3\right\}$$

Una forma de interpretarlo es “despejar” la variable y en medio de las desigualdades:

$$\begin{aligned}
&\left\{(x,y,z,w) \mid x+w^2-z^3 < y \leq x+z^2+w^3-z^3\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,w) \mid x+w^2-z^3 < y\right\}\\
&\qquad \cap \left\{(x,y,z.w) \mid y \leq x+z^2+w^3-z^3\right\}\\
&= \left(\left\{(x,y,z,w) \mid x+w^2-z^3 \leq y\right\}\right.\\
&\qquad \left.- \left\{(x,y,z,w) \mid x+w^2-z^3 = y\right\}\right) \cap GI_G\\
&= (GS_F - G_F) \cap GI_G
\end{aligned}$$

donde las funciones F y G están definidas por $F(x,z,w) = x+w^2-z^3$ y $G(x,z,w) = x+z^2+w^3-z^3$.

Otra interpretación es “despejar” la variable x en medio de las desigualdades:

$$\begin{aligned}
&\left\{(x,y,z,w) \mid w^2-z^3-y < -x \leq z^2+w^3-z^3-y\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,w) \mid y+z^3-w^2 > x \geq y+z^3-z^2-w^3\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,w) \mid y+z^3-w^2 > x\right\}\\
&\qquad \cap \left\{(x,y,z,w) \mid x \geq y+z^3-z^2-w^3\right\}\\
&= (GI_f - G_f) \cap GS_g.
\end{aligned}$$

Con $f(y,z,w) = y+z^3-w^2$ y $g(y,z,w) = y+z^3-z^2-w^3$.

Ejercicios

1. Sean

$$A = \left\{(x,y) \mid \left|y^2-y\right| \leq x,\ |y+2| \leq 1\right\}.$$

$$B = \left\{(x,y) \mid \left|x^2+x\right| \leq y-1,\ |x| \leq 1\right\}.$$

a) Graficar, encontrar los puntos de acumulación y la frontera de cada conjunto.
b) Determinar si cada conjunto es compacto.
c) Describir cada conjunto en términos de grafos, supergrafos y subgrafos.

2. Sean
$$g(x) = x - x^2, \qquad f(x) = x + 5.$$
Graficar los siguientes conjuntos y determinar si son cerrados, acotados y compactos.

a) $GS_g \cap GI_f$.
b) $GI_g \cap GS_f$.

3. Sean
$$g(x,y) = x^2 + x - y, \qquad f(x,y) = x - y.$$
Determinar si los siguientes conjuntos son cerrados y/o acotados.

a) $GS_g \cap GI_f$.
b) $GI_g \cap GS_f$.

4. Sean
$$g(x,y,z) = x + 3y - 3x^2 - z^2, \qquad f(x,y,z) = x - 2y + z^2.$$
Determinar si los siguientes conjuntos son cerrados, acotados y compactos.

a) $GS_g \cap GI_f$.
b) $GI_g \cap GS_f$.

5. Interpretar los siguientes conjuntos como grafos y determinar si son cerrados y/o acotados:
$$A = \left\{(K,L) \mid 5K^{0,2}L^{0,5} \geq 200,\ 0 \leq K \leq 50\right\},$$
$$B = \left\{(x,y,z) \mid 5x^2 + 3y^2 \leq 2z\right\},$$
$$C = \{(x,y) \mid P_x x + P_y y \leq I,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
$$D = \{(K,L) \mid \text{mín}\{2K, 3L\} \geq 6\},$$
$$E = \left\{(K,L) \mid 5K^{-1,2} + 3L^{-1,2} = 500,\ K > 0,\ L > 0\right\},$$
$$F = \left\{(x,y) \mid x^2 - 9y^2 = 9\right\}.$$

6. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que:

    a) Si A es compacto y f es continua, entonces G_f es compacto.

    b) GS_f y GI_f son conjuntos no acotados (por lo tanto no compactos).

7. Probar que el grafo y el grafo inferior de una función continua definida en un conjunto cerrado son conjuntos cerrados.

8. Encontrar una función discontinua para la cual su grafo superior sea cerrado.

3.2. Contornos

Otros conceptos que ayudan a determinar el comportamiento de funciones y conjuntos son los contornos.

Definición 3.2. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y k un número real. El **contorno** de f a nivel k es el conjunto*

$$C_f(k) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = k\}.$$

*(Nótese que éste es un conjunto de nivel, para funciones de dos variables es una curva de nivel); el **contorno superior** de f a nivel k es*

$$CS_f(k) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \geq k\}$$

y

$$CI_f(k) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \leq k\}$$

*es el **contorno inferior** de f a nivel k.*

Estos conjuntos están formados por las proyecciones de la gráfica de la función al dominio (por lo tanto son subconjuntos del dominio de la función): el contorno es la proyección de los puntos de la función que se encuentran a altura k, el contorno superior es la proyección de los puntos que se encuentran a altura mayor o igual que k y el inferior es el de los puntos que se encuentran a altura menor o igual que k.

Como en los grafos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Si f es una función continua definida en un conjunto cerrado, entonces $C_f(k)$, $CS_f(k)$ y $CI_f(k)$ son conjuntos cerrados.*

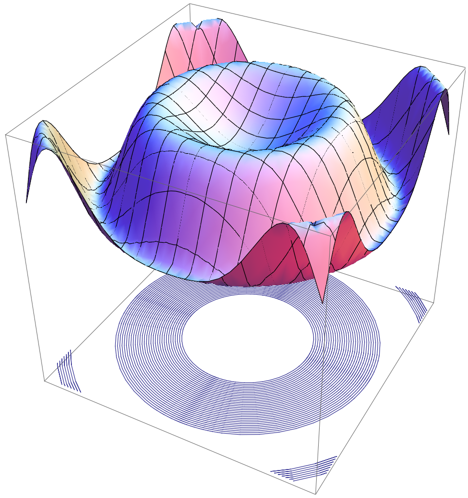


Figura 3.2: La gráfica de la función f se corta a altura k y se proyecta al plano xy. El contorno superior de f a nivel k corresponde a la región gris y el contorno inferior de f a nivel k a la región blanca.

Demostración. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y A cerrado. Para probar que $CS_f(k)$ es cerrado se tienen los siguientes casos:

1. $k > f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, en este caso $CS_f(k) = \emptyset$ que es un conjunto cerrado.

2. $k < f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, entonces $CS_f(k) = A$ que es cerrado.

3. k está en el rango de f, en este caso basta ver que $D = CI_f(k) - C_f(k)$ es abierto. Sea $\mathbf{z} \in D$, entonces $f(\mathbf{z}) < k$. Por el teorema del valor medio para funciones continuas, existe $r > 0$ tal que para toda $\mathbf{x}$ en $B_r(\mathbf{z}) \cap A$, $f(\mathbf{x}) < k$; lo que prueba el resultado.

□

Los otros casos se dejan como ejercicio para el lector.

Ejemplos

1. Si $f(x) = x^3 - x$, $C_f(0) = \{-1, 0, 1\}$, $CS_f(0) = [-1, 0] \cup [1, \infty)$.

2. El conjunto $\left\{(x,y) : x^2+xy+5y^2 \le 3\right\}$ es el contorno inferior a nivel 3 de la función $f(x,y) = x^2+xy+5y^2$.

3. El conjunto del ejemplo 5 de la sección anterior

$$\left\{(x,y,z) \mid y^2+x < yz \le x+y^2+z^2\right\}$$

puede ser interpretado como contornos; para esto basta restar yz a todos los términos de las desigualdades para convertirlo en

$$\begin{aligned}
&\left\{(x,y,z) \mid y^2+x-yz < 0 \le x+y^2+z^2-yz\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \mid y^2+x-yz < 0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \mid 0 \le x+y^2+z^2-yz\right\} \\
&= \left(\left\{(x,y,z) \mid y^2+x-yz \le 0\right\} - \left\{(x,y,z) \mid y^2+x-yz = 0\right\}\right) \\
&\qquad \cap \left\{(x,y,z) \mid 0 \le x+y^2+z^2-yz\right\} \\
&= (CI_f(0) - C_f(0)) \cap CS_g(0),
\end{aligned}$$

donde $f(x,y,z) = y^2+x-yz$ y $g(x,y,z) = x+y^2+z^2-yz$.

Ejercicios

1. Sean

$$A = \left\{(x,y) \mid \left|y^2-y\right| \le x,\ |y+2| \le 1\right\}.$$
$$B = \left\{(x,y) \mid \left|x^2+x\right| \le y-1,\ |x| \le 1\right\}.$$

Describir cada conjunto en términos de contornos.

2. Sean

$$g(x) = x - x^2, \qquad f(x) = x+5.$$

Graficar los siguientes conjuntos y determinar si son cerrados, acotados y compactos.

   a) $CS_g(0) \cap CI_f(5)$.
   b) $CI_g(5) \cap CS_f(0)$.

3. Sean

$$g(x,y) = x^2+x-y, \qquad f(x,y) = x-y.$$

Graficar los siguientes conjuntos y determinar si son cerrados y/o acotados.

a) $CS_g(1) \cap CI_f(2)$.
b) $CI_g(1) \cap CS_f(2)$.

4. Sean
$$g(x,y,z) = x + 3y - 3x^2 - z^2, \qquad f(x,y,z) = x - 2y + z^2.$$
Determinar si los siguientes conjuntos son cerrados, acotados y compactos.

a) $CS_g(0) \cap CI_f(0)$.
b) $CI_g(0) \cap CS_f(0)$.

5. Interpretar los siguientes conjuntos como contornos:
$$\begin{aligned}
A &= \left\{(K,L) \mid 5K^{0,2}L^{0,5} \geq 200,\ 0 \leq K \leq 50\right\},\\
B &= \left\{(x,y,z) \mid 5x^2 + 3y^2 \leq 2z\right\},\\
C &= \{(x,y) \mid P_x x + P_y y \leq I,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},\\
D &= \{(K,L) \mid \text{mín}\{2K, 3L\} \geq 6\},\\
E &= \left\{(K,L) \mid 5K^{-1,2} + 3L^{-1,2} = 500,\ K > 0,\ L > 0\right\},\\
F &= \left\{(x,y) \mid x^2 - 9y^2 = 9\right\}.
\end{aligned}$$

6. Sean
$$f(x,y) = x^2 + xy + y + 5, \quad g(x,y,z) = z - y - xz.$$
escribir el conjunto
$$A = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + xy \leq z - y - 5 \leq xz\right\}$$
en términos de los grafos y/o contornos de f y g.

7. Terminar la prueba del último teorema de esta sección.

8. Encontrar una función discontinua que tenga todos sus contornos superiores cerrados. Una función que tenga todos sus contornos superiores cerrados se llama **semicontinua superiormente**.

9. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que si A es compacto y f es continua, entonces los contornos de f son compactos.

10. Probar que si q es una forma cuadrática definida positiva y $k > 0$, entonces $CI_q(k)$ es acotado.

Capítulo 4

Convexidad

La importancia de la convexidad en optimización radica en qué criterios necesarios para encontrar los óptimos de una función se convierten en suficientes. Si se conoce, p.e., que una función es convexa en un conjunto convexo A y tiene un punto crítico interior a A, entonces en ese punto tiene un mínimo y sus máximos los tomará sobre la frontera del conjunto; así, una condición necesaria se convierte en suficiente. Además de las aplicaciones en optimización, en economía la convexidad da consistencia a la construcción de algunas teorías: en la del consumidor el conjunto de canastas de bienes elegibles debe ser convexo; si es posible elegir un par de canastas, debe ser posible elegir cualquier canasta que contenga cantidades de bienes entre esas dos; en la del productor el conjunto de cantidades producidas es convexo así como también las cantidades de insumos de producción, si un fabricante puede producir dos cantidades de un bien, puede producir cualquier cantidad entre esas dos.

4.1. Conjuntos convexos

Un **conjunto convexo** es aquel en el que al unir cualquier par de puntos por un segmento de recta, éste queda totalmente contenido en el conjunto. Un conjunto es **estrictamente convexo** si el segmento salvo los puntos extremos está contenido en el interior del conjunto y un conjunto es **no convexo** si es posible encontrar un par de puntos del conjunto tales que algún punto del segmento que los une no está contenido en el conjunto. Usando la interpretación geométrica de la suma de vectores, la formalización de esta noción es:

Definición 4.1. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si para cada par de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ y $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y} \in A.$$

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrictamente convexo si para cada par de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ y $\lambda \in (0,1)$,

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y} \in int(A).$$

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son dos elementos (vectores) en $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es el vector que une los extremos de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en la dirección de $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$, y

$$\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y},$$

con λ en el intervalo $[0,1]$, es el segmento de recta que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ partiendo de $\mathbf{y}$ (cuando $\lambda = 0$) y finalizando en $\mathbf{x}$ (cuando $\lambda = 1$); la expresión $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ se llama una **combinación convexa** de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Así, la definición de conjunto convexo es la formalización de la noción intuitiva: un conjunto es convexo cuando al conectar cualquier par de puntos del conjunto por un segmento de recta, éste queda totalmente contenido en el conjunto. Nótese que esta definición puede ser generalizada a subconjuntos de espacios vectoriales, para lo cual basta usar las operaciones definidas en el espacio.

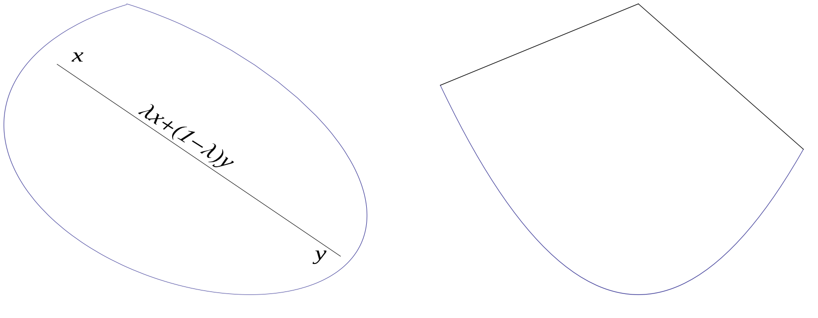


Figura 4.1: En un conjunto convexo estricto los segmentos de recta que unen dos puntos del conjunto, salvo los puntos, están en el interior del conjunto. En un conjunto convexo esos segmentos están en el conjunto (pueden coincidir con las fronteras planas).

Un conjunto A es no convexo si existen un par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ tales que al unirlos por un segmento de recta, éste no queda totalmente contenida en el conjunto, esto es, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\, \mathbf{y} \notin A.$$

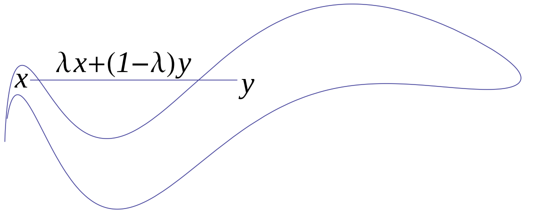


Figura 4.2: Conjunto no convexo: algún segmento de recta que conecta dos puntos del conjunto no está totalmente contenido en el conjunto.

En los reales los conjuntos convexos son los intervalos, en el plano y el espacio son conjuntos sin "entradas" como muestra la figura 4.1.

Ejemplos

1. Sean (x, y) y (s, t) elementos de $\left\{(x, y) \mid x^2 + x \le y\right\}$ por la definición del conjunto

$$x^2 + x \le y \quad \text{y} \quad s^2 + s \le t.$$

Probar que $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(s, t)$ está en el conjunto, para $0 \le \lambda \le 1$, equivale a que $(\lambda x + (1 - \lambda)s, \lambda y + (1 - \lambda)t)$ satisface la condición que define al conjunto, es decir:

$$[\lambda x + (1 - \lambda)s]^2 + \lambda x + (1 - \lambda)s \le \lambda y + (1 - \lambda)t.$$

Desarrollando el término de la izquierda de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
&[\lambda x + (1 - \lambda)s]^2 + \lambda x + (1 - \lambda)s \\
&= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xs + (1 - \lambda)^2 s^2 + \lambda x + (1 - \lambda)s
\end{aligned}$$

haciendo uso de la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\lambda^2x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xs + (1-\lambda)^2s^2 + \lambda x + (1-\lambda)s \\
&\leq \lambda^2x^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2+s^2) + (1-\lambda)^2s^2 + \lambda x + (1-\lambda)s \\
&= \lambda^2x^2 + \lambda x^2 - \lambda^2x^2 + \lambda s^2 - \lambda^2s^2 + (1-2\lambda+\lambda^2)s^2 \\
&\qquad + \lambda x + (1-\lambda)s \\
&= \lambda x^2 + (1-\lambda)s^2 + \lambda x + (1-\lambda)s \\
&= \lambda\left(x^2+x\right) + (1-\lambda)\left(s^2+s\right) \\
&\leq \lambda y + (1-\lambda)t.
\end{aligned}$$

que prueba que el conjunto es convexo.

2. Para probar que el conjunto $\{(x,y) \mid x^2 + x \leq y\}$ es estrictamente convexo, sean (x,y) y (s,t) dos elementos distintos del conjunto y $0 < \lambda < 1$. $(x,y) \neq (s,t)$ si y sólo si $x \neq s$, o $x = s$ y $y \neq t$.

   a) Si $x \neq s$, $2xs < x^2 + s^2$ que reemplazado en la prueba del ejemplo anterior muestra que
   $$[\lambda x + (1-\lambda)s]^2 + \lambda x + (1-\lambda)s < \lambda y + (1-\lambda)t,$$
   esto es $\lambda(x,y) + (1-\lambda)(s,t)$ está en el interior del conjunto.

   b) Si $x = s$ y $y \neq t$, se puede suponer sin perder generalidad que $y < t$. Como (x,y) y (x,t) son elementos del conjunto, basta ver que $\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x,t) = (x, \lambda y + (1-\lambda)t)$ es punto interior lo que se sigue de la desigualdad $\lambda y + (1-\lambda)t < t$ y el ejemplo anterior.

3. El conjunto $\{(x,y) \mid x^2 + x = y\}$ no es convexo porque $(0,0)$ y $(1,2)$ son elementos del conjunto, pero $\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(1,2) = (\frac{1}{2}, 1)$ no es elemento del conjunto ya que $\left[\frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$. Nótese que los puntos en la frontera o cerca de ella son los candidatos naturales para probar que un conjunto no es convexo.

Teorema 4.1. *Sean A y B subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$, entonces*

$$A\cap B, \quad A+B = \{u+v \mid u \in A, \quad v \in B\}, \quad kA = \{ku \mid u \in A\} \quad y \quad A\times B$$

son conjuntos convexos

Demostración. Sean u y v elementos de $A \cap B$, u y v son elementos tanto de A como de B. Si A y B son conjuntos convexos, $\lambda u + (1-\lambda)v$ estará en A y en B para cada $\lambda \in [0,1]$; por lo tanto, $\lambda u + (1-\lambda)v \in A \cap B$. En conclusión, si A y B son conjuntos convexos, entonces $A \cap B$ es un conjunto convexo.

El resto de la prueba se deja como ejercicio. □

Ejercicios

1. Probar que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es convexo si y sólo si es un intervalo.

2. Terminar la prueba del teorema anterior.

3. Encontrar conjuntos para mostrar que en general la unión de dos conjuntos convexos no es uno convexo.

4. Probar usando la definición que el conjunto

$$\left\{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 \leq xy + 5\right\}$$

es convexo.

5. Hacer los ajustes necesarios al ejercicio anterior para probar que el conjunto es estrictamente convexo.

6. Determinar si el conjunto

$$\left\{(x,y) \mid x^3 + 3y \leq xy\right\}$$

es convexo.

4.2. Funciones convexas y cóncavas

Geométricamente, una **función convexa** con dominio en un conjunto convexo es aquella en la cual la recta secante que une los puntos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ y $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$ está sobre la gráfica de la función entre esos puntos, y es **cóncava** si la secante está bajo la gráfica de la función entre esos puntos. Como en el caso de conjuntos convexos, no es difícil probar que la siguiente definición formaliza la noción intuitiva.

Definición 4.2. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \to \mathbb{R}$; f es convexa si y sólo si para todo $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de A y $\lambda \in [0,1]$,*

$$f\left(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y}\right) \leq \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\, f(\boldsymbol{y})$$

y f es cóncava si

$$f\left(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y}\right) \geq \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\, f(\boldsymbol{y}).$$

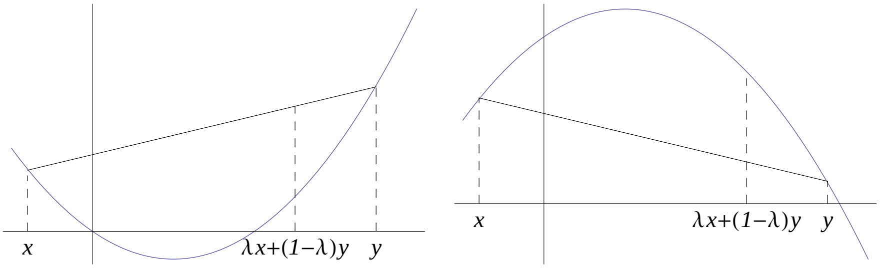


Figura 4.3: Funciones estrictamente convexa y estrictamente cóncava.

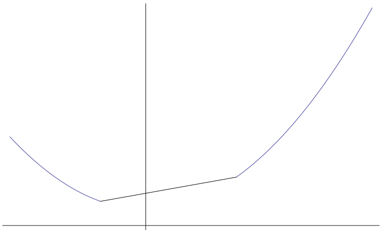


Figura 4.4: Función convexa pero no estrictamente convexa.

Si en la definición anterior la desigualdad se satisface en forma estricta para $0 < \lambda < 1$ y valores de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ distintos, se dice que la función es **estrictamente**
convexa o **estrictamente cóncava** según sea el caso. Nótese que para determinar si una función es convexa o cóncava se debe encontrar el signo de

$$\lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\, f(\mathbf{y}) - f\left(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y}\right)$$

esta expresión es:

- No negativa si y sólo si la función es convexa,
- No positiva si y sólo si la función es cóncava,
- Positiva para $0 < \lambda < 1$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ si y sólo si la función es estrictamente convexa,
- Negativa para $0 < \lambda < 1$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ si y sólo si la función es estrictamente cóncava.

Ejemplos

1. Para determinar el comportamiento de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con respecto a convexidad y concavidad se examina el signo de
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$
para todo x, y reales y λ entre 0 y 1. Reemplazando el valor de la función, el signo de la expresión anterior equivale al signo de
$$\begin{gathered}\lambda(ax^2+bx+c)+(1-\lambda)(ay^2+by+c)\\ -\left[a(\lambda x+(1-\lambda)y)^2+b(\lambda x+(1-\lambda)y)+c\right]\end{gathered}$$
desarrollando,
$$\begin{aligned}&= a\lambda x^2 + b\lambda x + \lambda c + a(1-\lambda)y^2 + b(1-\lambda)y + c(1-\lambda)\\ &- a(\lambda^2x^2 + 2\lambda x(1-\lambda)y + (1-\lambda)^2y^2) - b\lambda x - b(1-\lambda)y - c\end{aligned}$$
simplificando los términos comunes,
$$= \lambda ax^2 + a(1-\lambda)y^2 - a(\lambda^2x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2y^2)$$
al factorizar y simplificar se obtiene sucesivamente
$$\begin{aligned}&= a\left[\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - (1-\lambda)^2y^2)\right]\\ &= a\left[(\lambda-\lambda^2)x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy + \left((1-\lambda)-(1-\lambda)^2\right)y^2\right]\\ &= a(\lambda-\lambda^2)\left[x^2 - 2xy + y^2\right]\\ &= a\lambda(1-\lambda)(x-y)^2\end{aligned}$$
ya que $(1-\lambda)-(1-\lambda)^2 = \lambda - \lambda^2$. Esta última expresión es claramente mayor o igual a cero si y sólo si $a > 0$, ya que $0 \leq \lambda \leq 1$, por lo que $0 \leq 1-\lambda$ y todo cuadrado es no negativo. Por lo tanto, la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es estrictamente convexa si y sólo si $a > 0$ y es estrictamente cóncava si y sólo si $a < 0$.

2. Si g es convexa,

$$g(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda) g(\mathbf{y})$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en el dominio de g y $0 \leq \lambda \leq 1$. Si f es creciente y está definida en un conjunto convexo que contiene el rango de g,

$$f[g(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})] \leq f[\lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda) g(\mathbf{y})].$$

Si, además, f es convexa,

$$f[\lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda) g(\mathbf{y})] \leq \lambda f[g(\mathbf{x})] + (1-\lambda) f[g(\mathbf{y})].$$

Conectando las desigualdades anteriores,

$$f[g(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})] \leq \lambda f[g(\mathbf{x})] + (1-\lambda) f[g(\mathbf{y})].$$

Esto es, si f y g son convexas y f es creciente, entonces la función compuesta $f \circ g$ es convexa.

Las propiedades operacionales sobre funciones convexas y cóncavas se dan en el siguiente

Teorema 4.2. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos convexos, $f : B \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{B}$:*

1. *Si f y g son funciones convexas (cóncavas), entonces $f+g$ es una función convexa (cóncava).*

2. *Si f es una función convexa (cóncava) y $k > 0$, entonces kf es una función convexa (cóncava).*

3. *Si f es una función convexa (cóncava) y $k < 0$, entonces kf es una función cóncava (convexa).*

4. *Sea f es una función de variable y valor real. Las propiedades con respecto a composición se resumen en la siguiente tabla:*

$\circ$	*g convexa*	*g cóncava*
f convexa creciente	*convexa*	
f cóncava creciente		*cóncava*
f convexa decreciente		*convexa*
f cóncava decreciente	*cóncava*	

Demostración. Se deja como ejercicio. Las partes sobre composición que faltan por probar son idénticas al ejemplo 2 anterior. $\square$

Ejercicios

1. Usar la definición para probar que las siguientes funciones son convexas:

   a) $f(t) = |t|$

   b) $g(x, y) = 4x^2 - 3xy + 5y^2$.

2. Probar que la función lineal en n variables

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k + b = m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n + b = \mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + b$$

   se puede considerar convexa o cóncava.

3. Terminar la prueba del teorema anterior.

4. Encontrar un ejemplo de funciones f convexa y decreciente y g convexa tales que $f \circ g$ sea convexa y un ejemplo para las que $f \circ g$ sea cóncava.

5. Probar que si f es homogénea de grado uno, entonces f es convexa si y sólo si $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (f es **subaditiva**) y f es cóncava si y sólo si $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (f es **superaditiva**).

Teorema 4.3. *La forma cuadrática $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T$ es:*

1. *Estrictamente convexa si y sólo si es definida positiva.*

2. *Convexa si y sólo si es semidefinida positiva.*

3. *Estrictamente cóncava si y sólo si es definida negativa.*

4. *Cóncava si y sólo si es semidefinida negativa.*

Demostración. La convexidad o concavidad de q está determinada por el signo de

$$\lambda q(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) q(\mathbf{y}) - q\left(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}\right).$$

La expresión anterior en términos matriciales es

$$\lambda \mathbf{x} A \mathbf{x}^T + (1 - \lambda)\mathbf{y} A \mathbf{y}^T - \left(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}\right) A \left(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}\right)^T$$

Desarrollando y factorizando se obtiene sucesivamente

$$\begin{aligned}
&\lambda\mathbf{x}A\mathbf{x}^T + (1-\lambda)\mathbf{y}A\mathbf{y}^T - (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\, A\left(\lambda\mathbf{x}^T + (1-\lambda)\mathbf{y}^T\right)\\
&= \lambda\mathbf{x}A\mathbf{x}^T + (1-\lambda)\mathbf{y}A\mathbf{y}^T - \lambda^2\mathbf{x}A\mathbf{x}^T - \lambda(1-\lambda)\mathbf{x}A\mathbf{y}^T\\
&\qquad - \lambda(1-\lambda)\mathbf{y}A\mathbf{x}^T - (1-\lambda)^2\mathbf{y}A\mathbf{y}^T\\
&= (\lambda-\lambda^2)\mathbf{x}A\mathbf{x}^T - \lambda(1-\lambda)\mathbf{x}A\mathbf{y}^T - \lambda(1-\lambda)\mathbf{y}A\mathbf{x}^T\\
&\qquad + \left[(1-\lambda) - (1-\lambda)^2\right]\mathbf{y}A\mathbf{y}^T\\
&= \lambda(1-\lambda)\left[\mathbf{x}A\mathbf{x}^T - \mathbf{x}A\mathbf{y}^T - \mathbf{y}A\mathbf{x}^T + \mathbf{y}A\mathbf{y}^T\right]\\
&= \lambda(1-\lambda)\left[\mathbf{x}A\left(\mathbf{x}^T - \mathbf{y}^T\right) - \mathbf{y}A\left(\mathbf{x}^T - \mathbf{y}^T\right)\right]\\
&= \lambda(1-\lambda)\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)A\left(\mathbf{x}^T - \mathbf{y}^T\right) = \lambda(1-\lambda)\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)A\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)^T\\
&= \lambda(1-\lambda)q\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right).
\end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. □

Ejemplo

Para analizar la convexidad o concavidad de la función

$$F(x,y) = \left(2x^2 - 3xy + 5y^2\right)^3 + x^2 + 4y^2 + 2x - 5y + 3$$

esta se puede descomponer en:

$$H(x,y) = \left(2x^2 - 3xy + 5y^2\right)^3$$

que a su vez es la composición de las funciones:

$$f(t) = t^3 \quad \mathbf{y} \quad g(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2.$$

La función f es creciente y convexa para $t \geq 0$ y la función g es una forma cuadrática definida positiva, por tanto, estrictamente convexa; por una propiedad de composición anterior, H es convexa.

$$G(x,y) = x^2 + 4y^2$$

es una forma cuadrática definida positiva, lo que la hace convexa, y

$$L(x,y) = 2x - 5y + 3$$

es lineal, por lo que se puede considerar convexa. Como la suma de funciones convexas es convexa y

$$F(x,y) = H(x,y) + G(x,y) + L(x,y)$$

entonces F es convexa.

El siguiente teorema es una herramienta de gran ayuda para determinar el comportamiento, con respecto a convexidad, de conjuntos a partir de la convexidad o concavidad de las funciones y viceversa.

Teorema 4.4. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces*

1. *f es convexa si y sólo si GS_f es convexo.*
2. *f es cóncava si y sólo si GI_f es convexo.*
3. *Si f es convexa $CI_f(k)$ es un conjunto convexo.*
4. *Si f es cóncava $CS_f(k)$ es un conjunto convexo.*
5. *f es lineal si y sólo si todos sus grafos y contornos son convexos.*

Demostración. Sean $(\mathbf{x}, y)$, $(\mathbf{u}, v)$ en el grafo superior de f. Por definición,

$$f(\mathbf{x}) \leq y \quad \text{y} \quad f(\mathbf{u}) \leq v.$$

Si f es convexa,

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{u}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{u}) \leq \lambda y + (1-\lambda)v,$$

puesto que $0 \leq \lambda \leq 1$. De lo anterior se concluye que si f es convexa, su grafo superior es convexo ya que la última igualdad implica que

$$\lambda(\mathbf{x}, y) + (1-\lambda)(\mathbf{u}, v) = (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{u}, \lambda y + (1-\lambda)v)$$

está en GS_f.

Por otra parte, si GS_f es convexo y $(\mathbf{x}, y)$, $(\mathbf{u}, v)$ están en $G_f \subset GS_f$,

$$f(\mathbf{x}) = y \quad \text{y} \quad f(\mathbf{u}) = v,$$

entonces para $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda(\mathbf{x}, y) + (1-\lambda)(\mathbf{u}, v) = (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{u}, \lambda y + (1-\lambda)v)$$

es un elemento de GS_f, puesto que este conjunto es convexo, lo cual implica que

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{u}) \leq \lambda y + (1-\lambda)v = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{u})$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$. Es decir, f es convexa. Esto prueba la primera parte del teorema.

Si f es convexa y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in CI_f(k)$ por definición de contorno: $f(\mathbf{x}) \leq k$ y $f(\mathbf{y}) \leq k$ por la convexidad de f,

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}) \leq \lambda k + (1-\lambda)k = k.$$

Lo que prueba que $CI_f(k)$ es un conjunto convexo, esto es, la tercera parte del teorema. □

El teorema también es aplicable a los grafos y contornos sin la frontera.

Ejemplos

1. El conjunto $\left\{(x, y, z) \mid x^2 + xy + 5y^2 \leq z\right\}$ es un conjunto convexo ya que la función $h(x, y) = x^2 + xy + 5y^2$ es convexa, es una forma cuadrática definida positiva, y el conjunto es su grafo superior.

2. El conjunto $\left\{(x, y) \mid y \geq x^2\right\}$ es convexo ya que la función $g(x) = x^2$ es convexa y el conjunto es el grafo superior de g.

3. El conjunto $\left\{(x, y, z) \mid z \leq 2x + 5y - 4x^2 + xy - y^2\right\}$ es convexo ya que es el grafo inferior de la función $f(x, y) = 2x + 5y - 4x^2 + xy - y^2$ que es una función cóncava; es la suma de una función lineal (que se puede considerar cóncava) y una forma cuadrática definida negativa (que es cóncava).

4. Si f y g son funciones convexas y
$$M(\mathbf{x}) = \text{máx}\{f(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{x})\},$$
el conjunto
$$GS_M = \{(\mathbf{x}, y) \mid \text{máx}\{f(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{x})\} \leq y\}$$
es convexo puesto que $\text{máx}\{f(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{x})\} \leq y$ equivale a que $f(\mathbf{x}) \leq y$ y $g(\mathbf{x}) \leq y$, por lo tanto
$$\begin{aligned}&\{(\mathbf{x}, y) \mid \text{máx}\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} \leq y\}\\ &= \{(\mathbf{x}, y) \mid f(\mathbf{x}) \leq y\} \cap \{(\mathbf{x}, y) \mid g(\mathbf{x}) \leq y\}\end{aligned}$$
y cada uno de estos conjuntos son los grafos superiores de funciones convexas, por lo tanto son convexos, y como la intersección de conjuntos convexos es convexa, el conjunto GS_M es convexo. Esto prueba (por aplicación del teorema anterior) que la función M es una función convexa.

5. El conjunto $\{(x, y) : x^2 + xy + 5y^2 \leq 3\}$ es convexo ya que es el contorno inferior a nivel 3 de la función $f(x, y) = x^2 + xy + 5y^2$, que es convexa ya que es forma cuadrática definida positiva.

Ejercicios

1. Terminar la prueba del teorema anterior.

2. Probar que si f y g son cóncavas, la función

$$m(\mathbf{x}) = \text{mín}\{f(\mathbf{x}),\, g(\mathbf{x})\}$$

es cóncava.

3. Probar que una función derivable f es convexa en el intervalo I si y sólo si para cada s y t en I

$$f(s) \geq f(t) + f'(t)(s - t).$$

Ayuda: usar la definición de convexidad en la forma

$$f(t + \lambda(s - t)) - f(t) \leq \lambda(f(s) - f(t))$$

dividir por $\lambda(s - t)$ y hacer $\lambda \to 0$.

4. Probar que una función diferenciable f es convexa en el conjunto convexo A si y sólo si para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en A

$$f(\mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v}) + \nabla f(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Ayuda: hacer $g(t) = f(\mathbf{v} + t(\mathbf{u} - \mathbf{v}))$ y usar el ejercicio anterior.

4.2.1. Segunda derivada y convexidad

El desarrollo de Taylor de primer orden con error para una función $g(x)$ que sea dos veces derivable alrededor de un punto $x = a$ es

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + \frac{g''(c)}{2}(x - a)^2$$

para algún c entre x y a. Desarrollando la expresión anterior

$$g(x) = \frac{g''(c)}{2}x^2 + (g'(a) - ag''(c))x + \left(\frac{a^2 g''(c)}{2} - ag(a)\right)$$

para x cercano de a y c entre x y a, esta igualdad dice que, cerca de $x = a$, la función $g(x)$ se comporta como un polinomio cuadrático. Lo anterior prueba que si el coeficiente de x^2 es positivo, el polinomio es convexo, y si el coeficiente es negativo, el polinomio es una función cóncava. Por lo tanto queda probado el

Teorema 4.5. *Si $g(x)$ es dos veces derivable y $g''(x)$ es positiva (negativa) en un intervalo I abierto, entonces g es convexa (cóncava) en I.*

Ejemplo

La función
$$f(t) = e^t$$
es una función convexa y creciente ya que su primera y segunda derivadas son positivas. La forma cuadrática
$$q(x, y) = 5x^2 - xy + y^2$$
es definida positiva, por tanto convexa. Por la tabla de composición
$$F(x, y) = f(q(x, y)) = e^{5x^2 - xy + y^2}$$
es convexa. La función
$$g(t) = \ln t$$
es creciente y cóncava, su derivada es positiva y su segunda derivada es negativa, y la función
$$L(x, y) = 2x + y - 5$$
es lineal por lo que se puede considerar cóncava. Nuevamente por composición
$$G(x, y) = g(L(x, y)) = \ln(2x + y - 5)$$
es cóncava y $-3G$ es convexa. De lo anterior se concluye que
$$H(x, y) = F(x, y) - G(x, y) = e^{5x^2 - xy + y^2} - \ln(2x + y - 5)^3$$
es convexa.

El siguiente teorema, que generaliza a varias variables y cuya demostración se basa en el teorema de Taylor, da las condiciones diferenciales suficientes para determinar la convexidad o cóncavidad de una función,

Teorema 4.6. *Si la matriz hessiana $H_f(\boldsymbol{x})$ de f es semidefinida positiva (negativa) para todo $\boldsymbol{x}$ en un conjunto abierto y convexo A, entonces f es convexa (cóncava) en A.*

Ejemplos

1. Para determinar las condiciones sobre ρ para que la función

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{-\rho}, \quad x_k > 0, \alpha_k \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n$$

sea convexa o cóncava; basta examinar la derivada segunda de la función $h(z) = z^{-\rho}$ para $z > 0$. Como $h'(z) = -\rho z^{-\rho-1}$ y $h''(z) = -\rho(-\rho - 1)z^{-\rho-2} = \rho(\rho + 1)z^{-\rho-2}$. Esta derivada segunda es positiva si $\rho(\rho + 1) > 0$ y negativa si $\rho(\rho + 1) < 0$, por lo tanto la función g es convexa si $\rho \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ y es cóncava si $\rho \in (-1, 0)$.

2. La función $f(t) = t^{-\sigma/\rho}$, para $t > 0$, tiene como derivadas

$$f'(t) = -\frac{\sigma}{\rho} t^{-\sigma/\rho-1} \quad \text{y} \quad f''(t) = \frac{\sigma(\sigma + \rho)}{\rho^2} t^{-\sigma/\rho-2}.$$

Si $\frac{\sigma}{\rho} < 0$ la función es creciente y si $\sigma(\sigma + \rho) > 0$ la función es convexa.

3. Las derivadas de segundo orden de la función $T(x, y) = x^2 + xy^3$ son: $T_{xx} = 2$, $T_{xy} = 3y^2$ y $T_{yy} = 6xy$. Su hessiana

$$H_T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}$$

es definida positiva si $xy > 0$ y $12xy - 9y^4 > 0$, sin embargo la función sólo puede ser convexa en un conjunto convexo y el conjunto definido por esas desigualdades no es convexo, así que T es convexa en cualquier subconjunto convexo de

$$A = \{(x, y) \mid xy > 0, \quad 12xy - 9y^4 > 0\}.$$

Los conjuntos convexos más grandes contenidos en A son:

$$\left\{(x, y) \mid x, y > 0, \quad 4x - 3y^3 > 0\right\}$$

y

$$\left\{(x, y) \mid x, y < 0, \quad 4x - 3y^3 > 0\right\}.$$

4. El conjunto
$$W = \left\{(x,y) \mid \frac{x-y+5}{2x^2+y^2+1} > 1\right\}$$
es convexo porque la desigualdad que lo define $\frac{x-y+5}{2x^2+y^2+1} > 1$ equivale a $x - y + 5 > 2x^2 + y^2 + 1$ por lo tanto,
$$W = \{(x,y) \mid 5 > 2x^2 + y^2 - x + y + 1\}$$
esto es, $W = CI_{2x^2+y^2-x+y}(5) - C_{2x^2+y^2-x+y}(5)$. Puesto que la función $s(x,y) = 2x^2 + y^2 - x + y + 1$ es convexa, el conjunto W es convexo ya que es el contorno inferior de s a nivel 5.

Ejercicio

Encontrar condiciones sobre ρ y σ para que la función CES
$$F(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{-\rho}\right)^{-\sigma/\rho}$$
con $x_k > 0$, $\alpha_k \geq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, sea convexa o cóncava. Basta tener en cuenta que esta función es la composición de las funciones f y g de los ejemplos 1 y 2 anteriores.

4.2.2. La función CD

La matriz hessiana para la función CD
$$f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}, \quad \text{con} \quad x > 0, \quad y > 0 \quad \text{y} \quad A > 0,$$
es,
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\alpha-1)f(x,y)}{x^2} & \frac{\alpha\beta f(x,y)}{xy} \\ \frac{\alpha\beta f(x,y)}{xy} & \frac{\beta(\beta-1)f(x,y)}{y^2} \end{pmatrix}.$$
Esta matriz es semidefinida positiva para todo (x,y) si y sólo si
$$\alpha(\alpha-1) > 0, \quad \beta(\beta-1) > 0, \quad \text{y} \quad |H_f(x,y)| \geq 0,$$
desarrollando el determinante de la matriz hessiana,
$$|H_f(x,y)| = \frac{\alpha\beta f^2(x,y)}{x^2y^2}(1 - \alpha - \beta) \geq 0,$$

de donde se concluye que la función f es convexa si y sólo si

$$\alpha < 0 \quad \text{ó} \quad \alpha > 1, \quad \beta < 0 \quad \text{ó} \quad \beta > 1, \quad \text{y} \quad \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0.$$

Y f es cóncava si y sólo si la matriz hessiana es semidefinida negativa para todo (x, y) que equivale a

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad \text{y} \quad \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0.$$

como $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ la última condición se reduce a $\alpha + \beta \leq 1$.

La función

$$f(x, y, z) = Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}, \quad \text{con} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0 \quad \text{y} \quad A > 0,$$

es convexa si y sólo si α, β y γ están fuera del intervalo $[0, 1]$ y satisfacen:

$$\alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0, \quad \text{y} \quad \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma-1) \geq 0;$$

y es cóncava si y sólo si:

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \gamma < 1 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 1.$$

Estas condiciones para la función en n variables,

$$f(\mathbf{x}) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

donde, $A > 0$ y $x_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$; son:

- f es convexa si y sólo si $\alpha_i \notin [0, 1]$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y

  $$(-1)^{k+1}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_k} - 1) \geq 0$$

  para $k = 2, 3, \ldots, n$.

- f es cóncava si y sólo si $0 < \alpha_i < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq 1.$$

Por lo tanto, una función tipo Cobb-Douglas bajo las condiciones neoclásicas usuales es cóncava si y sólo si es homogénea de grado menor o igual a uno.

Ejemplos

1. $f(x,y,z) = x^{1/2}y^2z^{1/3}$ con $x,y,z \geq 0$, no es convexa ni cóncava.

2. $g(x,y,z) = x^{1/2}y^{1/4}z^{1/5}$ con $x,y,z \geq 0$, es cóncava.

3. $h(x,y,z) = x^{-2}y^4z^{-1}$ con $x,y,z > 0$, es convexa.

Ejercicios

1. Describir cada uno de los siguientes conjuntos en términos de grafos y contornos de funciones adecuadas y determinar si los conjuntos son convexos:

   a) $A = \Big\{(x,y) | \left|y^2 - y\right| \leq x,\ |y+2| \leq 1\Big\}$.
   b) $B = \Big\{(x,y) \mid |2x+y| \leq \sqrt{10+8xy}\Big\}$.
   c) $C = \left\{(x,y) \mid \frac{3x+y}{xy-x^2-3y^2-1} \geq 1\right\}$.

2. Sean
$$f(x,y) = x^2 + xy + y + 5, \quad g(x,y,z) = z - xz - y.$$
   interpretar el conjunto
$$A = \Big\{(x,y,z) \mid x^2 + xy \leq z - y - 5 \leq xz\Big\}$$
   en términos de los grafos y/o contornos de f y g y determinar si el conjunto es convexo.

3. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son convexos:

   a) $A = \{(x,y) \mid 5x^2 + 3y^2 \leq 2y\}$.
   b) $B = \{(K,L) \mid 5K^{0,2}L^{0,5} \geq 200,\ K \geq 0,\ L \geq 0\}$.
   c) $C = \{(K,L) \mid \text{mín}\{2K, 3L\} \geq 6\}$.
   d) $D = \{(x,y) \mid P_x x + P_y y \leq I,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
   e) $E = \{(x,y) \mid x^2 - 9y^2 = 9\}$.
   f) $F = \{(K,L) \mid \big(K^{-1,2} + L^{-1,2}\big)^{-0,8} \geq 1,\ K > 0,\ L > 0\}$.
   g) $G = \{(x,y) \mid 2\sqrt{x^2+y^2} \leq x - y + 1\}$.
   h) $H = \Big\{(x,y,z) \mid |2x+z| \leq \sqrt{5y+8xz}\Big\}$.

4. Determinar si cada función es convexa o cóncava sobre la región indicada.

   a) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$ para $x + y + z > 0$.
   b) $f(x, y) = \ln(xy) - x + y$ para $x > 0$, $y > 0$.
   c) $f(x, y) = (x + y)e^{x+y}$ para $x + y > 0$.
   d) $f(x, y, z) = (xyz)^2$ para todo x, y, z.
   e) $f(x, y) = x^2(y^2 + 4)$ para $x^2 + y^2 \leq 4$.

5. Encontrar el mayor conjunto convexo donde cada una de las siguientes funciones son convexas y el mayor conjunto convexo donde son cóncavas:

   a) $f(x, y) = \sqrt{x^{-2} + y^{-2}}$.
   b) $f(x, y) = (2x + y)e^{x-y}$.
   c) $f(x, y) = \left(x^{-2} + y^{-2}\right)^3$.
   d) $f(x, y) = x^2(y^2 + 4)$.
   e) $f(x, y) = x^3 - xy + 3y^3 + 4$.

6. Sean

$$g(x, y, z) = x + 3y - 3x^2 - z^2, \qquad f(x, y, z) = x - 2y + z^2.$$

   Determinar si los siguientes conjuntos son o no convexos.

   a) $GS_g \cap GI_f$.
   b) $GI_g \cap GS_f$.

7. Sea

$$g(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2 + 5z^2}.$$

   Determinar si los siguientes conjuntos son convexos:

   a) $\{(x, y, z, w) \mid w = g(x, y, z)\}$.
   b) $\{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 1000\}$.

8. Sea

$$g(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

   a) Probar que si f es cóncava entonces g es cóncava.

b) Determinar si f convexa implica g convexa.

9. Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, S es convexo. Definida por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}},$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores fijos tales que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

a) Encontrar la matriz hessiana de f.

b) Determinar si la función es cóncava o convexa.

Teorema 4.7. *Si una función f es convexa en un intervalo abierto I, entonces es continua en I.*

Demostración. Sean $x < y < z$ elementos del intervalo, entonces existe $0 < \lambda < 1$ tal que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$, como f es convexa,

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z),$$

restando $f(x)$ a cada término de la desigualdad,

$$f(y) - f(x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z) - f(x) = (1 - \lambda)[f(z) - f(x)],$$

multiplicando por $1/(y - x)$ ésta se convierte en

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{(1 - \lambda)\,(f(z) - f(x))}{y - x} = \frac{(1 - \lambda)\,(f(z) - f(x))}{(\lambda x + (1 - \lambda)z) - x}$$

$$= \frac{(1 - \lambda)\,(f(z) - f(x))}{(1 - \lambda)(z - x)} = \frac{(f(z) - f(x))}{(z - x)},$$

esto es, la pendiente de la secante de la recta que pasa por $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ es menor que la que pasa por $(x, f(x))$, $(z, f(z))$. Con un argumento similar se prueba que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{(f(z) - f(y))}{(z - y)}$$

la pendiente de la secante de la recta que pasa por $(x, f(x))$, $(z, f(z))$ es menor que la que pasa por $(y, f(y))$, $(z, f(z))$.

Sea a un punto del intervalo, como éste es abierto existen c y d en I tales que $c < a < d$. Si se quiere mostrar que f es continua en a se debe ver que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para esto considérese inicialmente $c < a < x < d$, y sean m_c, m_x y m_d las pendientes de las rectas que pasan por los puntos $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$, $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$, y $(a, f(a))$ y $(d, f(d))$. La prueba anterior muestra que la relación entre estas pendientes es

$$m_c \leq m_x = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq m_d.$$

Multiplicando la igualdad por $x - a > 0$,

$$(x - a)m_c \leq f(x) - f(a) \leq (x - a)m_d,$$

o equivalentemente,

$$f(a) + (x - a)m_c \leq f(x) \leq f(a) + (x - a)m_d$$

de donde por la aplicación del teorema del emparedado/[1] se concluye que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

De manera análoga se prueba que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

lo que concluye la prueba. □

4.3. Funciones cuasiconvexas y cuasicóncavas

Además de las funciones convexas y cóncavas, las cuasiconvexa y cuasicóncava juegan un papel importante en optimización por dos buenas razones: son menos restrictivas que las convexas y las cóncavas y mantienen algunas de las buenas propiedades de aquéllas. Una función convexa sobre un conjunto convexo tiene mínimo interior y máximos en la frontera del conjunto, lo mismo ocurre si la función es cuasiconvexa, la unicidad del mínimo está garantizada si la función es estrictamente convexa o cuasiconvexa. Resultados similares se tienen para funciones cóncavas y cuasicóncavas.

[1] Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x, entonces $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

Definición 4.3. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \to \mathbb{R}$; f es cuasiconvexa si para todo $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de A y $\lambda \in [0,1]$,*

$$f\left(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y}\right) \leq \text{máx}\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}$$

y f es cuasicóncava si

$$f\left(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y}\right) \geq \text{mín}\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}$$

Con esta definición toda función convexa es cuasiconvexa y toda función cóncava es cuasicóncava. Como en el caso de funciones cóncavas y convexas; para que la definición tenga sentido el dominio debe ser un conjunto convexo y de la misma forma que allí si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\lambda \neq 0, 1$ y las desigualdades estrictas, entonces la función es estrictamente cuasiconvexa o estrictamente cuasicóncava, según sea el caso.

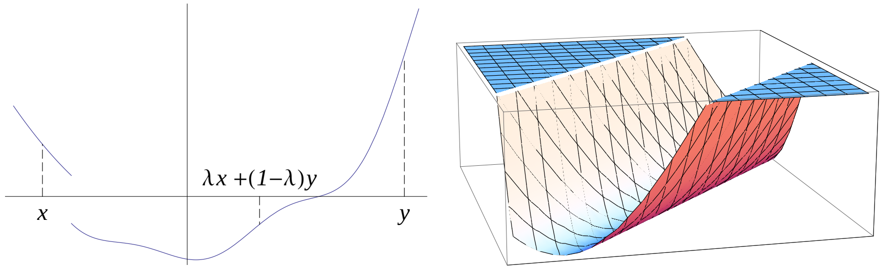


Figura 4.5: Funciones estrictamente cuasiconvexa en una variable y cuasiconvexa en dos variables.

Ejemplo

Cualquier función monótona es cuasiconvexa o cuasicóncava. Si h es monótona creciente, sin pérdida de generalidad sean $x \leq y$ para $0 \leq \lambda \leq 1$, $x \leq \lambda x + (1-\lambda)y \leq y$ como h es creciente,

$$\begin{aligned} \text{mín}\{h(x), h(y)\} = h(x) &\leq h(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq h(y) = \text{máx}\{h(x), h(y)\}. \end{aligned}$$

De la primera parte de la desigualdad se concluye que h es cuasicóncava y de la segunda que es cuasiconvexa. Un razonamiento similar prueba el resultado para funciones decrecientes.

Las propiedades operacionales para funciones cuasiconvexas y cuasicóncavas están dadas por el

Teorema 4.8. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$:*

1. *Si f es una función cuasiconvexa y $k > 0$, entonces kf es una función cuasiconvexa.*

2. *Si f es una función cuasicóncava y $k > 0$, entonces kf es una función cuasiconcava.*

3. *Sea f una función de variable y valor real. La propiedades con respecto a composición se resumen en la siguiente tabla:*

$\circ$	*g cuasiconvexa*	*g cuasicóncava*
f creciente	*cuasiconvexa*	*cuasicóncava*
f decreciente	*cuasicóncava*	*cuasiconvexa*

Demostración. Se deja como ejercicio □

Ejemplos

1. Es de notar que la suma de funciones cuasi convexas (cuasicóncavas) no es cuasi convexas (cuasicóncavas). Para ver esto sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x$ ambas pueden considerarse cuasiconvexas o cuasicóncavas, sin embargo $(f + g)(x) = x^3 - x$ no es ni cuasiconvexa ni cuasicóncava.

2. Como $f(t) = 3t^5 + t^3 + 3t - 4$ es creciente y $g(x, y) = x^2 - 2y + 3$ es convexa por tanto cuasiconvexa, entonces

$$F(x, y) = 3(x^2 - 2y + 3)^5 + (x^2 - 2y + 3)^3 + 3(x^2 - 2y + 3) - 4$$

   es cuasiconvexa, ya que es igual a $f(g(x, y))$.

3. $H(x, y, z) = \sqrt[3]{4x^{-2} + 2y^{-3} + 7z^{-1}}$ definida en $\mathbb{R}^3_{++}$ es cuasiconvexa; ya que es la composición de las funciones $h(t) = t^{1/3}$ y $k(x, y, z) = 4x^{-2} + 2y^{-3} + 7z^{-1}$, con dominio $\mathbb{R}^3_{++}$. h es creciente y k es convexa lo que la hace cuasiconvexa.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ cuasiconvexa, homogénea de grado uno y sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n_{++}$, $\mathbf{u} = \frac{1}{f(\mathbf{x})}\mathbf{x}$ y $\mathbf{v} = \frac{1}{f(\mathbf{y})}\mathbf{y}$. Entonces $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = 1$ y como f es cuasiconvexa $f(\lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) \leq \max\{f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\} = 1$. En

particular con $\lambda = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}$,

$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}) &= f\left(\frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}\mathbf{u} + \left(1 - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}\right)\mathbf{v}\right)\\
&= f\left(\frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}\frac{1}{f(\mathbf{x})}\mathbf{x} + \left(1 - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}\right)\frac{1}{f(\mathbf{y})}\mathbf{y}\right)\\
&= f\left(\frac{1}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}\mathbf{x} + \frac{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}\frac{1}{f(\mathbf{y})}\mathbf{y}\right)\\
&= f\left(\frac{1}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right)\\
&= \frac{1}{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}f\left(\mathbf{x}+\mathbf{y}\right) \leq 1
\end{aligned}$$

de donde

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{y}\right) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

y por el ejercicio 5 de la sección 4.2 se tiene que la función es convexa. De forma similar se tiene el resultado para funciones cuasicóncavas.

Así como existen equivalencias entre la convexidad o concavidad de una función y la convexidad de sus grafos superiores o inferiores, tambien existen equivalencias entre la cuasiconvexidad o cuasiconcavidad de una función y la convexidad de sus contornos éstas están dadas en el

Teorema 4.9. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $f : A \to \mathbb{R}$ y k en el rango de f. Entonces*

1. *f es cuasiconvexa si y sólo si $CI_f(k)$ es convexo.*
2. *f es cuasicóncava si y sólo si $CS_f(k)$ es convexo.*

Demostración. Sean f tal que para todo k, en el rango de f, el conjunto

$$CI_f(k) = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq k\}$$

es convexo, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en el dominio de la función y sin pérdida de generalidad supóngase que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$. Como los contornos inferiores son convexos y $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ están en el contorno inferior de f a nivel $f(\mathbf{y})$, entonces $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ está en el contorno inferior de f a nivel $f(\mathbf{y})$, lo que implica

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{y}) \leq \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$, esto es f es cuasiconvexa. Lo que prueba una parte de la equivalencia de la primera parte del teorema.

Si para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en el dominio de f y $0 \leq \lambda \leq 1$ se cumple que $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \text{máx}\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$. Sean k en el rango de f y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $CI_f(k)$, por definición $f(\mathbf{u}) \leq k$ y $f(\mathbf{v}) \leq k$, usando la desigualdad que satisface f,

$$f(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}) \leq \text{máx}\{f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\} \leq \text{máx}\{k, k\} = k$$

lo que prueba que $\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}$ está en $CI_f(k)$, esto es, $CI_f(k)$ es convexo. $\square$

El teorema anterior se puede extender a funciones estrictamente cuasiconvexas y cuasicóncavas: una función es estrictamente cuasiconvexa si y sólo si sus contornos inferiores son estrictamente convexos y una función es estrictamente cuasicóncava si y sólo si sus contornos superiores son estrictamente convexos.

Ejemplos

1. La función Cobb Douglas $F(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$ con $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \geq 0$ y $y \geq 0$ es cóncava si y sólo si $\alpha+\beta \leq 1$ en otro caso es cuasicóncava ya que

$$\begin{aligned} CS_F(k) &= \left\{(x,y) \mid Ax^\alpha y^\beta \geq k\right\} \\ &= \left\{(x,y) \mid \left(x^\alpha y^\beta\right)^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}} \geq \left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \mid x^{\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}} y^{\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}} \geq \left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}}\right\} \\ &= CS_G\left[\left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}}\right] \end{aligned}$$

donde

$$G(x,y) = x^{\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}} y^{\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}}.$$

Esta función es cóncava ya que $\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} + \frac{\beta}{1+\alpha+\beta} < 1$ por lo tanto sus contornos superiores son convexos, $CS_G\left[\left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}}\right] = CS_F(k)$, y por la aplicación del teorema anterior F es cuasicóncava.

2. La función $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+3y^2}$ es cuasiconvexa ya que su contorno inferior a nivel k es:

$$A = \left\{(x,y) \mid \sqrt[3]{x^2+3y^2} \leq k\right\}$$

este conjunto es equivalente a:

$$B = \left\{(x,y) \mid x^2+3y^2 \leq k^3\right\}$$

que es el contorno inferior de la función $g(x,y) = x^2+3y^2$ a altura k^3. Como la función g es convexa sus contornos inferiores son convexos, por lo tanto el conjunto B es convexo, pero como éste es igual al conjunto A, entonces A es un conjunto convexo lo que implica que la función f es cuasiconvexa.

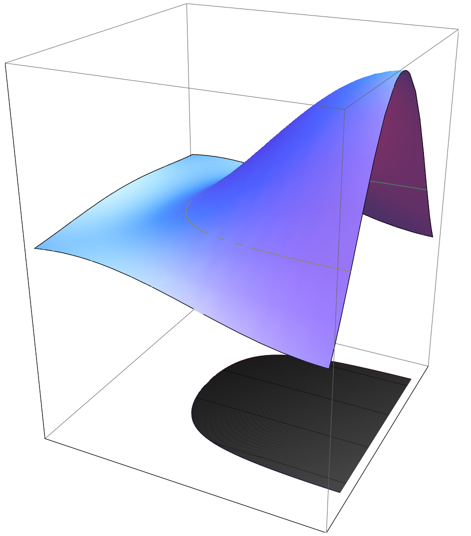


Figura 4.6: Una función es cuasicóncava si y sólo si sus contornos superiores (región negra) son convexos.

Como en el caso de convexidad y concavidad existe un criterio diferencial para determinar si una función es cuasiconvexa o cuasicóncava, éste involucra la matriz hessiana orlada de la función:

$$\hat{H}_f = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

el criterio está dado por el

Teorema 4.10. *Si todos los menores principales de orden mayor o igual a dos de la matriz hessiana orlada $\hat{H}(\boldsymbol{x})$ de f son negativos para todo $\boldsymbol{x}$ en un conjunto abierto y convexo A, entonces f es cuasiconvexa en A. Y si los menores principales de orden mayor o igual a dos de la matriz hessiana orlada tienen signos alternados, entonces la función es cuasicóncava.*

Cuando la función es de dos variables el resultado se reduce a calcular el determinante de la matriz hessiana orlada, si su valor es negativo la función es cuasiconvexa y si es positivo la función es cuasicóncava.

Ejemplos

1. El determinante de la hessiana orlada de la función

$$f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$$

es

$$\left|\hat{H}_f\right| = \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha f}{x} & \frac{\beta f}{y} \\ \frac{\alpha f}{x} & \frac{\alpha(\alpha-1)f}{x^2} & \frac{\alpha\beta f}{xy} \\ \frac{\beta f}{y} & \frac{\alpha\beta f}{xy} & \frac{\beta(\beta-1)f}{y^2} \end{vmatrix}$$

sacando factores comunes f, $\frac{f}{x}$ y $\frac{f}{y}$ de la primera, segunda y tercera filas respectivamente, el determinante equivale a

$$\frac{f^3}{xy}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} & \frac{\beta}{y} \\ \alpha & \frac{\alpha(\alpha-1)}{x} & \frac{\alpha\beta}{y} \\ \beta & \frac{\alpha\beta}{x} & \frac{\beta(\beta-1)}{y} \end{vmatrix}$$

factorizando $\frac{\alpha}{x}$ y $\frac{\beta}{y}$ de la segunda y tercera columnas,

$$\frac{\alpha\beta f^3}{x^2y^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha-1 & \alpha \\ \beta & \beta & \beta-1 \end{vmatrix}$$

desarrollando por los cofactores de la primera fila,

$$\frac{\alpha\beta f^3}{x^2y^2}\left((-1)\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\\ \beta & \beta-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha & \alpha-1\\ \beta & \beta\end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{\alpha\beta f^3}{x^2y^2}\left((-1)(\alpha(\beta-1)-\alpha\beta)+(\alpha\beta-(\alpha-1)\beta)\right)=\frac{\alpha\beta f^3}{x^2y^2}(\alpha+\beta).$$

Como bajo las condiciones neoclásicas usuales $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ la función en esas aplicaciones es siempre cuasicóncava.

2. La suma de funciones cuasiconvexas o cuasicóncavas no necesariamente es cuasiconvexa o cuasicóncava, para ver esto sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x$ estas funciones son cuasiconvexas o cuasicóncavas ya que son monótonas, pero $h(x) = x^3 - x$ no es cuasiconvexa ni cuasicóncava. Los contornos superior e inferior a nivel 0 de h son: $[-1, 0]\cup[1,\infty)$ y $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$ respectivamente y ninguno de estos conjuntos es convexo.

3. Si f es creciente y g es cuasiconvexa, $h(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ es cuasiconvexa. Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ tales que
$$g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{y}).$$
Como g es cuasiconvexa, para $0 \leq \lambda \leq 1$,
$$g(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \text{máx}\{g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\} = g(\mathbf{y})$$
y como f es creciente,
$$f\left(g(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\right) \leq f(g(\mathbf{y})) = \text{máx}\{f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y}))\},$$
esto es, h es cuasiconvexa.

4. La función
$$H(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 - xy + y^2 + 5z^2 - x - 4}$$
es cuasiconvexa ya que $H = f \circ g$ donde
$$f(t) = \sqrt[3]{t} \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + 5z^2 - x - 4.$$
La función f es creciente y g es la suma de una forma cuadrática definida positiva y una función lineal, ambas convexas, lo que la hace convexa y por lo tanto cuasiconvexa.

5. Sean g una función convexa positiva en un conjunto convexo A, entonces para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en A y λ en $[0,1]$,

$$g\left(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\right) \leq \lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})$$

al transponer los términos en esta desigualdad

$$\frac{1}{g(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})} \geq \frac{1}{\lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})}.$$

Si f es una función cóncava no negativa en A,

$$f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})$$

multiplicando término a término las desigualdades anteriores

$$\frac{f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})}{g(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})} \geq \frac{\lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})}.$$

Sea $h=\frac{f}{g}$ y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $CS_h(k)$, entonces

$$h(\mathbf{x})=\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\geq k, \qquad h(\mathbf{y})=\frac{f(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})}\geq k$$

de donde,

$$f(\mathbf{x})\geq kg(\mathbf{x}), \qquad f(\mathbf{y})\geq kg(\mathbf{y})$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
h(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) &= \frac{f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})}{g(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})} \geq \frac{\lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})}\\
&\geq \frac{\lambda kg(\mathbf{x})+k(1-\lambda)g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})}\\
&= \frac{k[\lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})]}{\lambda g(\mathbf{x})+(1-\lambda)g(\mathbf{y})}=k
\end{aligned}$$

lo que prueba que $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\in CS_h(k)$ por lo tanto $CS_h(k)$ es convexo que equivale a que h es cuasicóncava. Esto es, el cociente de una función cóncava no negativa con una convexa positiva es una función cuasicóncava.

Un desarrollo análogo al anterior muestra que el cociente de una función convexa no negativa con una cóncava positiva es una función cuasiconvexa.

6. Sean f una función cuasicóncava definida en un conjunto convexo A. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en A y λ en $(0,1)$, sin pérdida de generalidad, sea $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$ de donde,

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = f(\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \geq f(\mathbf{y})$$

de aquí

$$f(\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y})) - f(\mathbf{y}) \geq 0,$$

al multiplicar por $\frac{1}{\lambda}$

$$\frac{f(\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y})) - f(\mathbf{y})}{\lambda} \geq 0.$$

Al hacer $\lambda \to 0$ y aplicar los ejercicios 3 y 4 de la página 100

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y})) - f(\mathbf{y})}{\lambda} = \nabla f(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \geq 0.$$

Ejercicios

1. Clasificar las siguientes funciones en convexas, cóncavas, cuasiconvexas o cuasicóncavas:

   a) $Q(K,L) = 5K^{0,2}L^{0,5}$, $K \geq 0$, $L \geq 0$,
   b) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 - 2y$,
   c) $s(x,y,z) = y^2 - \sqrt[4]{xz}$, $x \geq 0$, $z \geq 0$,
   d) $F(K,L) = \text{máx}\{2K, 3L\}$,
   e) $H(K,L) = \left(5K^{-1,2} + 3L^{-1,2}\right)^{-0,8}$, $K > 0$, $L > 0$,
   f) $g(x,y) = x^2 - 9y^2$,
   g) $h(x,y,z) = e^x - \ln yz$, $y > 0$, $z > 0$,
   h) $G(x,y) = P_x x + P_y y$.

2. Sean

$$g(x,y,z) = x + 3y - 3x^2 - z^2, \qquad f(x,y,z) = x - 2y + z^2.$$

   Determinar si los siguientes conjuntos son o no convexos.

   a) $CS_g(1) \cap CI_f(1)$.
   b) $CI_g(1) \cap CS_f(1)$.

3. Encontrar dos funciones cuasiconvexas (cuasicóncava) cuya suma sea cuasiconvexa (cuasicóncava).

4. Encontrar dos funciones cuasiconvexas (cuasicóncava) cuya suma sea cuasicóncava (cuasiconvexa).

5. Probar que si f es decreciente y g es cuasiconvexa (cuasicóncava), $f \circ g$ es cuasicóncava (cuasiconvexa).

6. Probar que una forma cuadrática no definida no es cuasiconvexa ni cuasicóncava.

7. Determinar si la función

$$F(x, y) = \sqrt[3]{5x^2 + 3y^2}$$

es convexa, cóncava, cuasiconvexa o cuasicóncava.

8. Probar que la función

$$H(x, y, z) = \sqrt[3]{xy - 3x^2 - 4y^2 - z^2 + y - z}$$

es cuasicóncava.

9. Sea:

$$f(x, y) = \left(x^{-3} + y^{-3}\right)^r$$

con $x, y > 0$. Encontrar, si existe, el valor de r para que la función sea: convexa, cóncava, cuasiconvexa pero no convexa y cuasicóncava pero no cóncava.

10. Determinar si la función tipo CES

$$F(x, y) = \frac{2}{\sqrt[4]{2x^{-3} + 5y^{-3}}}$$

con $x, y > 0$, es convexa, cóncava, cuasiconvexa o cuasicóncava.

11. Encontrar, si existen, los valores de r para los que las funciones

$$F(x, y, z) = x^r y^{-1} z^3 \qquad G(x, y, z) = x^r y^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{3}{4}}$$

con $x, y, z > 0$, son:

a) cuasiconvexas,

b) cuasicóncavas.

12. Encontrar condiciones suficientes sobre f y g para que

a) f/g sea cuasiconvexa.

b) fg sea cuasiconvexa.

c) fg sea cuasicóncava.

4.3.1. La función CES

Por comodidad con el manejo de las derivadas se considera la función en la forma

$$f(x,y) = (ax^r + by^r)^{1/s}$$

esta función está definida en $\mathbb{R}^2_{++}$. El cálculo de las derivadas para esta función se escribe en la forma

$$f^s = ax^r + by^r$$

Derivando implícitamente,

$$sf^{s-1}f_x = arx^{r-1}$$

de donde,

$$f_x = \frac{ar}{s}x^{r-1}f^{1-s}$$

y por simetría,

$$f_y = \frac{br}{s}y^{r-1}f^{1-s}.$$

Derivando f_x con respecto a y,

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{ar}{s}x^{r-1}(1-s)f^{-s}f_y = \frac{ar}{s}x^{r-1}(1-s)f^{-s}\frac{br}{s}y^{r-1}f^{1-s} \\ &= \frac{abr^2(1-s)}{s^2}(xy)^{r-1}f^{1-2s}, \end{aligned}$$

Derivando f_x con respecto a x,

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{ar}{s}\left[(r-1)x^{r-2}f^{1-s} + x^{r-1}(1-s)f^{-s}f_x\right] \\
&= \frac{ar}{s}x^{r-2}\left[(r-1)f^{1-s} + x(1-s)f^{-s}\frac{ar}{s}x^{r-1}f^{1-s}\right] \\
&= \frac{ar}{s}x^{r-2}f^{1-2s}\left[(r-1)f^{s} + \frac{ar(1-s)}{s}x^{r}\right] \\
&= \frac{ar}{s^2}x^{r-2}f^{1-2s}\left[s(r-1)(ax^r + by^r) + ar(1-s)x^r\right] \\
&= \frac{ar}{s^2}x^{r-2}f^{1-2s}\left[a(r-s)x^r + bs(r-1)y^r\right].
\end{aligned}$$

Nuevamente por simetría,

$$f_{yy} = \frac{br}{s^2}y^{r-2}f^{1-2s}\left[b(r-s)y^r + as(r-1)x^r\right].$$

Usando estos resultados para construir la matriz hessiana,

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{arx^{r-2}f^{1-2s}[a(r-s)x^r+bs(r-1)y^r]}{s^2} & \frac{abr^2(1-s)(xy)^{r-1}f^{1-2s}}{s^2} \\ \frac{abr^2(1-s)(xy)^{r-1}f^{1-2s}}{s^2} & \frac{bry^{r-2}f^{1-2s}[b(r-s)y^r+as(r-1)x^r]}{s^2} \end{pmatrix}$$

Para determinar si la función es convexa o cóncava se deben analizar los menores de esta matriz, en particular se debe calcular su determinante,

$$\begin{aligned}
&|H_f|\\
=&\frac{abr^2(xy)^{r-2}f^{2-4s}}{s^4}\begin{vmatrix} a(r-s)x^r+bs(r-1)y^r & br(1-s)xy^{r-1}\\ ar(1-s)x^{r-1}y & b(r-s)y^r+as(r-1)x^r\end{vmatrix}\\
=&\frac{abr^2(xy)^{r-2}f^{2-4s}}{s^4}\left[(a(r-s)x^r+bs(r-1)y^r)\,(b(r-s)y^r+as(r-1)x^r)\right.\\
&\qquad\left.-abr^2(1-s)^2(xy)^r\right]\\
=&\frac{abr^2(xy)^{r-2}f^{2-4s}}{s^4}\left[ab(xy)^r\left((r-s)^2+s^2(r-1)^2-r^2(1-s)^2\right)\right.\\
&\qquad\left.+s(r-s)(r-1)\left(a^2x^{2r}+b^2y^{2r}\right)\right]\\
=&\frac{abr^2(xy)^{r-2}f^{2-4s}}{s^4}\left[2s(r-s)(r-1)ab(xy)^r+s(r-s)(r-1)\right.\\
&\qquad\left.\left(a^2x^{2r}+b^2y^{2r}\right)\right]\\
=&\frac{abr^2s(r-s)(r-1)(xy)^{r-2}f^{2-4s}}{s^4}\left[a^2x^{2r}+2ab(xy)^r+b^2y^{2r}\right]\\
=&\frac{abr^2s(r-s)(r-1)(xy)^{r-2}f^{2-4s}}{s^4}\left[ax^r+by^r\right]^2\\
=&\frac{abr^2s(r-s)(r-1)(xy)^{r-2}f^{2-2s}}{s^4}.
\end{aligned}$$

La función es convexa si y sólo si su matriz hessiana es semidefinida positiva para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}$; para que esto se cumpla los coeficientes de x^r y y^r en la diagonal de la matriz y el determinante deben ser no negativos y esto se cumple si y sólo si

$$r-s\geq 0,\quad s(r-1)\geq 0\quad \text{y}\quad s(r-s)(r-1)\geq 0.$$

Con las dos primeras condiciones los términos de la diagonal de la hessiana son no negativos y con el último el determinante es no negativo. Como las condiciones anteriores equivalen a $r\geq s$, $s\geq 0$ y $r\geq 1$, o $r\geq s$, $s\leq 0$ y $r\leq 1$; entonces la función es convexa si y sólo si $r\geq 1$ y $r\geq s\geq 0$, o $s\leq r\leq 1$ y $s\leq 0$.

La función es cóncava si y sólo si la matriz hessiana es semidefinida negativa en $\mathbb{R}^2_{++}$, esto es, los términos de la diagonal son no positivos y su determinante es no negativo, lo que equivale a

$$r-s\leq 0,\quad s(r-1)\leq 0\quad \text{y}\quad s(r-s)(r-1)\geq 0.$$

Lo que después de un análisis similar determina que la función es cóncava si y sólo si $r \leq 1$, $r \leq s$ y $s \geq 0$.

Para hacer el análisis de cuasiconvexidad o cuasiconcavidad se debe calcular el determinante de la matriz hessiana orlada,

$$
\begin{aligned}
&\left|\hat{H}_f\right| \\
&= \begin{vmatrix} 0 & \frac{arx^{r-1}f^{1-s}}{s} & \frac{bry^{r-1}f^{1-s}}{s} \\ \frac{arx^{r-1}f^{1-s}}{s} & \frac{arx^{r-2}f^{1-2s}[a(r-s)x^r+bs(r-1)y^r]}{s^2} & \frac{abr^2(1-s)(xy)^{r-1}f^{1-2s}}{s^2} \\ \frac{bry^{r-1}f^{1-s}}{s} & \frac{abr^2(1-s)(xy)^{r-1}f^{1-2s}}{s^2} & \frac{bry^{r-2}f^{1-2s}[b(r-s)y^r+as(r-1)x^r]}{s^2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{abr^3(xy)^{r-2}f^{3-3s}}{s^3} \begin{vmatrix} 0 & ax^{r-1} & by^{r-1} \\ x & \frac{f^{-s}[a(r-s)x^r+bs(r-1)y^r]}{s} & \frac{br(1-s)xy^{r-1}f^{-s}}{s} \\ y & \frac{ar(1-s)x^{r-1}yf^{-s}}{s} & \frac{f^{-s}[b(r-s)y^r+as(r-1)x^r]}{s} \end{vmatrix} \\
&= \frac{abr^3(xy)^{r-2}f^{3-4s}}{s^4}\left[2abr(1-s)(xy)^r - by^r\left(a(r-s)x^r + bs(r-1)y^r\right)\right. \\
&\qquad \left. -ax^r\left(b(r-s)y^r + as(r-1)x^r\right)\right] \\
&= \frac{abr^3(xy)^{r-2}f^{3-4s}}{s^4}\left[-a^2s(r-1)x^{2r} - 2abs(r-1)(xy)^r - b^2s(r-1)y^{2r}\right] \\
&= -\frac{abr^3s(r-1)(xy)^{r-2}f^{3-4s}}{s^4}\left[a^2x^{2r} + 2ab(xy)^r + b^2y^{2r}\right] \\
&= -\frac{abr^3s(r-1)(xy)^{r-2}f^{3-4s}}{s^4}\left[ax^r + by^r\right]^2 \\
&= -\frac{abr^3s(r-1)(xy)^{r-2}f^{3-2s}}{s^4}.
\end{aligned}
$$

La función es cuasiconvexa si la última expresión es negativa en $\mathbb{R}^2_{++}$ y cuasicóncava si es positiva; para esto basta determinar el signo de

$$rs(1-r),$$

de donde se concluye que:

1. f es cuasiconvexa cuando:

   a) $r < 0$ y $s > 0$,

   b) $0 < r < 1$ y $s < 0$, ó

   c) $r > 1$ y $s > 0$;

2. f es cuasicóncava cuando:

a) $r < 0$ y $s < 0$,

b) $0 < r < 1$ y $s > 0$, ó

c) $r > 1$ y $s < 0$.

Ejercicios

1. Probar que la función

$$f(x,y) = e^{xy-x^2-y^2} + \left(2x^2 - 2xy + 2y^2 + 1\right)^{-3}$$

es cuasicóncava.

2. Comparar los resultados de esta sección, sobre el comportamiento de la CES, y los obtenidos por medio de composición.

3. Probar que si f y g son funciones cóncavas no negativas sobre un subconjunto A convexo de $\mathbb{R}^n_{++}$ y α, β son números positivos, entonces

$$h(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}))^{\alpha}\,(g(\mathbf{x}))^{\beta}$$

es cuasicóncava en A.

4. Encontrar las condiciones más generales sobre los parámetros para que cada una de las siguientes funciones, con dominio $\mathbb{R}^3_{++}$,

- $f(x,y,z) = x^{\alpha}\,(y^{\rho} + z^{\rho})^{\frac{\beta}{\rho}}$
- $g(x,y,z) = \left(x^{\alpha}y^{\beta} + z^{\alpha+\beta}\right)^{\rho}$
- $h(x,y,z) = (\text{mín}\{x,y\})^{\alpha}\,z^{\beta}$
- $k(x,y,z) = ((\text{mín}\{x,y\})^{\rho} + z^{\rho})^{\sigma}$
- $F(x,y,z) = \left[x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma}\right]^{\rho}$
- $G(x,y,z) = \left[x^{\alpha}y^{\beta} + z^{\gamma}\right]^{\rho}$

sea:

a) Convexa.

b) Cóncava.

c) Cuasiconvexa.

d) Cuasicóncava.

Capítulo 5

Optimización no restringida

Las aplicaciones más importantes de las derivadas en una variable son el trazado de gráficas, y en varias variables la búsqueda de puntos óptimos, máximos y mínimos, para problemas restringidos y no restringidos.

En este capítulo se desarrolla la teoría para encontrar los óptimos (máximos y mínimos) de una función. Si el proceso de optimización se efectúa sobre todo el dominio de la función, se habla de optimización no restringida, y si se hace sobre un subconjunto del dominio, llamado conjunto de restricciones, la optimización es restringida.

5.1. Argumento maximizador y minimizador

Sean f una función con dominio sobre el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y valores en los números reales, $D \subseteq A$ el **conjunto de restricciones**. Los problemas de optimización buscan los valores donde la función f, llamada **función objetivo**, alcanza sus valores máximo y mínimo, esto es,

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{x}) \text{ sujeto a que } \mathbf{x} \in D$$

y

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) \text{ sujeto a que } \mathbf{x} \in D$$

O en forma breve,

$$\text{máx}\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\} \text{ y } \min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\}$$

El conjunto de puntos de D donde la función alcanza su máximo se conoce como conjunto de maximizadores de f sobre D y se nota

$$\arg\max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\} = \{\mathbf{x}^* \in D \mid f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in D\}$$

es decir, los argumentos que maximizan la función sobre el conjunto D. De la misma forma se define

$$\arg\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\} = \{\mathbf{x}_* \in D \mid f(\mathbf{x}_*) \leq f(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in D\}.$$

Existen versiones de los conceptos anteriores cuando la función objetivo y el conjunto de restricciones depende de los valores de un vector de parámetros Θ en la forma,

$$\arg\max\{f(\mathbf{x},\Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\} \quad \text{o} \quad \arg\max_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x},\Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\},$$

en la segunda son explícitas las variables.

Ejemplos de aplicación se encuentran en la teoría del productor y el consumidor: Si $Q(K, L)$ es la cantidad producida al usar cantidades K, L de dos insumos a precios unitarios r, w respectivamente y el productor está interesado en minimizar el costo variable total de producir por lo menos q unidades, se debe solucionar el problema

$$\min rK + wL \text{ sujeto a } Q(K, L) \geq q.$$

El vector de variables, el de parámetros, el conjunto de restricciones y la función objetivo son

$$\mathbf{x} = (K, L), \quad \Theta = (r, w, q)\,, \quad D(\Theta) = \{(K, L) \mid Q(K, L) \geq q\}$$
$$\text{y } f(\mathbf{x}, \Theta) = rK + wL.$$

Las demandas condicionadas son

$$\{(K^*(\Theta), L^*(\Theta))\} = \arg\min\{f(\mathbf{x},\Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}$$

y la función de costo es

$$C^*(\Theta) = \min\{f(\mathbf{x},\Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}.$$

Para el problema de maximizar el beneficio del productor el problema a solucionar es

$$\max \Pi(K, L) = PQ(K, L) - rK - wL \text{ sujeto a } K \geq 0,\ L \geq 0,$$

el vector de variables, el de parámetros, el conjunto de restricciones y la función objetivo son

$$\Theta = \{P, r, w\}, \quad D(\Theta) = \mathbb{R}^2_+ \quad \text{y} \quad f(\mathbf{x}, \Theta) = \Pi(K, L).$$

Las demandas del productor son

$$\left\{\left(\hat{K}(\Theta), \hat{L}(\Theta)\right)\right\} = \arg\text{máx}\{f(\mathbf{x}, \Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}$$

y la función de beneficio es

$$\Pi^*(\Theta) = \text{máx}\{f(\mathbf{x}, \Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}.$$

Si $U(x, y)$ es la utilidad que produce el consumo de cantidades x, y dos bienes a precios p_x, p_y respectivamente y el consumidor está interesado en minimizar el gasto de recibir por lo menos un nivel de utilidad u, debe solucionar el problema

$$\text{mín}\, p_x x + p_y y \text{ sujeto a } U(x, y) \geq u$$

el vector de parámetros, el conjunto de restricciones y la función objetivo son

$$\Theta = (p_x, p_y, u)\,, \quad D(\Theta) = \{(x, y) \mid U(x, y) \geq u\}, \quad f(\mathbf{x}, \Theta) = p_x x + p_y y.$$

Las demandas hicksianas son

$$\left\{\left(x^h(\Theta), y^h(\Theta)\right)\right\} = \arg\text{mín}\{f(\mathbf{x}, \Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}$$

y la función de gasto es

$$e(\Theta) = \text{mín}\{f(\mathbf{x}, \Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\};$$

para el problema de maximizar la utilidad con una restricción presupuestal el problema a solucionar es

$$\text{máx}\, U(x, y) \text{ sujeto a } p_x x + p_y y \leq m,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$$

el vector de parámetros, el conjunto de restricciones y la función objetivo son

$$\mathbf{x} = (x, y), \quad \Theta = (p_x, p_y, m)\,, \quad D(\Theta) = \{(x, y) \mid p_x x + p_y y \leq m\}$$

$$\text{y } f(\mathbf{x}, \Theta) = U(x, y).$$

Las demandas marshallianas son

$$\left\{\left(x^M(\Theta), y^M(\Theta)\right)\right\} = \arg\max\{f(\mathbf{x}, \Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}$$

y la función de utilidad indirecta es

$$V(\Theta) = \max\{f(\mathbf{x}, \Theta) \mid \mathbf{x} \in D(\Theta)\}.$$

Definición 5.1. *Sea f una función y D un conjunto contenido en el dominio de f. La función tiene un **máximo global**, o absoluto, en el punto $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \in D$) sobre el conjunto D, si $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ de D.*

De manera análoga se define mínimo global, para lo cual basta invertir la desigualdad: $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de D.

Definición 5.2. *Sean f una función y D un conjunto contenido en el dominio de la función. La función tiene un **máximo local** en el punto $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \in D$), si existe $r > 0$ tal que $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ en el conjunto $B_r(a) \cap D$.*

Esta última definición dice que en una vecindad de $\mathbf{a}$ el máximo valor que alcanza la función f es $f(\mathbf{a})$; esto es, si $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{a}$, el valor de la función en $\mathbf{x}$ es menor o igual al valor de la función en $\mathbf{a}$. Aquellos puntos candidatos a ser máximos o mínimos se les conoce como **puntos críticos**, en una variable son los puntos donde la derivada de la función es nula o no existe.

Ejemplos

1. La función

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) - 2 - 3\frac{25}{36} = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{12}$$

tiene un mínimo global en $x = -\frac{5}{6}$ ya que para todo x real,

$$f(x) \geq f\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{49}{12}.$$

$$\arg\max\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \emptyset, \quad \text{y} \quad \arg\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{-\frac{5}{6}\right\}.$$

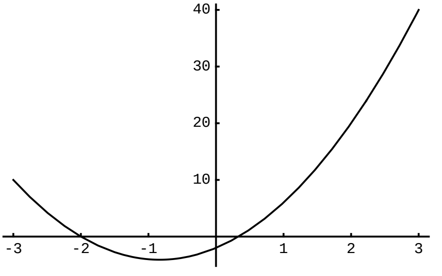


Figura 5.1: $y = 3x^2 + 5x - 2$.

2. Sea $g(x) = 3x + 2$; sobre los números reales la función no alcanza máximo ni mínimo. Sobre el intervalo $[-2, 5]$ la función tiene máximo en $x = 5$ y mínimo en $x = -2$, por lo tanto,

$$\arg\max\{g(x) \mid x \in [-2, 5]\} = \{5\},$$

$$\arg\min\{g(x) \mid x \in [-2, 5]\} = \{-2\}.$$

y

$$\max\{g(x) \mid x \in [-2, 5]\} = 17, \qquad \min\{g(x) \mid x \in [-2, 5]\} = -4.$$

3. La función lineal $g(x) = 3x + 2$ tiene máximo y mínimo en $x = b$ y $x = a$, respectivamente, sobre el intervalo $[a, b]$

$$\arg\max\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = \{b\}, \qquad \arg\min\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = \{a\}.$$

y

$$\max\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = 3b + 2, \qquad \min\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = 3a + 2.$$

4. Para

$$h(x) = \begin{cases} -5, & \text{si } x \leq -2, \\ 3x + 2, & \text{si } -2 < x \leq 5, \\ 17, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

sobre el intervalo $[a, b]$ pueden suceder varias posibilidades:

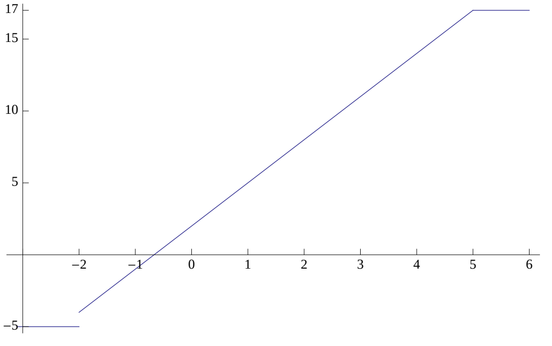


Figura 5.2: $y = h(x)$.

a) Si $b \leq -2$, la función es constante en el intervalo $[a, b]$, por lo tanto,

$$\arg\max\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = \arg\min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = [a, b].$$

y

$$\max\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = \min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = -5.$$

b) Si $a < -2 \leq b < 5$, la función es constante en $[a, -2]$ y toma su valor mínimo en todo el intervalo. En $(-2, b)$ la función es creciente y alcanza su máximo en $x = b$; así,

$$\begin{aligned}
&\arg\max\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = \{b\}, \\
&\arg\min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = [a, -2], \\
&\max\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = 3b + 2, \quad \text{y} \\
&\min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = -5.
\end{aligned}$$

c) Si $-2 \leq a \leq 5 < b$, la función es creciente en el intervalo $[a, 5]$ con valor mínimo en $x = a$ y es constante en $[5, b]$ donde alcanza su valor máximo; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\arg\max\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = (5, b], \\
&\arg\min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = \{a\}, \\
&\max\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = 17, \quad \text{y} \\
&\min\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = 3a + 2.
\end{aligned}$$

d) Si $a > 5$, la función es constante en el intervalo $[a, b]$, por lo que

$$\arg\max\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = \arg\min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = [a, b].$$

y

$$\max\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = \min\{h(x) \mid x \in [a, b]\} = 17.$$

5.

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2, \\ 2x^2 + 4x + 3, & \text{si } -2 < x \leq 1, \\ 10, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La derivada de la función es:

$$k'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2 \text{ o } x > 1, \\ 4x + 4, & \text{si } -2 < x < 1, \end{cases}$$

Esta función no es derivable en $x = 1$ y $x = -2$. Los puntos críticos de la función son

$$PC = (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \cup \{-1\}$$

La función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$, en este intervalo k' es positiva, decreciente en $(-2, -1)$, ahí k' es negativa, y constante en $(-\infty, -2] \cup (1, \infty)$, en estos puntos la derivada de k es cero. La segunda derivada de la función es

$$k''(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2 \text{ o } x > 1, \\ 4, & \text{si } -2 < x < 1, \end{cases}$$

La segunda derivada no existe en $x = 1$ y $x = -2$. Los posibles puntos de inflexión son

$$PPI = (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$$

de los cuales los únicos que se pueden considerar puntos de inflexión son $x = 1$ y $x = -2$, ya que la función es convexa en el intervalo $(-2, 1)$, pues en este intervalo k'' es positiva. En $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ la función se puede considerar convexa o cóncava; si se considera cóncava entonces $x = 1$ y $x = -2$ son puntos de inflexión.

Para determinar los conjuntos $\arg\max$, $\arg\min$ y los valores del máximo y mínimo de esta función sobre el conjunto $A = [a, b]$, se deben analizar varios casos:

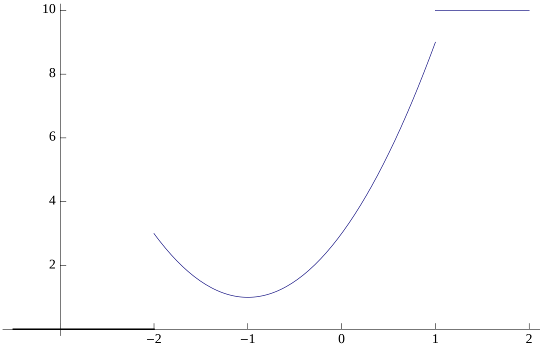


Figura 5.3: $y = k(x)$.

1. Si $b \leq -2$, la función es constante en A,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = [a,b]$ y
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 0$.
2. Si $a \leq -2 < b < 0$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \emptyset$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = [a,-2]$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\}$ no existe y
   $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 0$.
3. Si $a \leq -2$ y $0 \leq b \leq 1$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{b\}$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = [a,-2]$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2b^2 + 4b + 3$ y
   $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 0$.
4. Si $a \leq -2$ y $b > 1$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = (1,b]$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = [a,-2]$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 10$ y $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 0$.
5. Si $-2 < a < b < -1$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{a\}$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{b\}$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2a^2 + 4a + 3$ y
   $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2b^2 + 4b + 3$.
6. Si $-2 < a < -1$, $-1 \leq b \leq 1$ y $|a+1| \geq |b+1|$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{a\}$,

$\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{-1\}$,
$\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2a^2 + 4a + 3$ y
$\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 1$.

7. Si $-2 < a < -1$, $-1 \leq b \leq 1$ y $|a+1| \leq |b+1|$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{b\}$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{-1\}$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2b^2 + 4b + 3$ y
   $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 1$.
8. Si $-2 < a < -1$ y $b > 1$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = (1,b]$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{-1\}$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 10$ y
   $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 1$.
9. Si $-1 \leq a < b \leq 1$,
   $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{b\}$,
   $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{a\}$,
   $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2b^2 + 4b + 3$ y
   $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2a^2 + 4a + 3$.
10. Si $-1 < a \leq 1$ y $b > 1$,
    $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = (1,b]$,
    $\arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \{a\}$,
    $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 10$ y
    $\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 2a^2 + 4a + 3$.
11. Si $a > 1$, la función es constante en A:
    $\arg\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \arg\min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = [a,b]$ y
    $\max\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = \min\{k(x) \mid x \in [a,b]\} = 10$.

Ejercicio

Determinar

$$\arg\max\{f(x) \mid x \in I\}, \quad \arg\min\{f(x) \mid x \in I\},$$

$$\max\{f(x) \mid x \in I\}, \quad \text{y} \quad \min\{f(x) \mid x \in I\}$$

para:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si el conjunto I es:

1. $(-3, 1]$.

2. $[-1, 3)$.

3. $[a, b]$ donde $-2 < a < 0 < b < 1$.

5.2. Derivadas direccionales

En esta sección se encuentran las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una función en varias variables para que alcance un extremo en algún punto. Aquí, como en una variable, el conocimiento de la convexidad de una función sobre un conjunto cerrado y la existencia de un punto crítico interior al conjunto implican que la función tiene un mínimo en ese punto y los máximos sobre la frontera del conjunto. La convexidad o concavidad convierten ciertas condiciones necesarias en suficientes.

La versión en varias variables del teorema que da las condiciones necesarias para la existencia de un extremo, necesita de la noción de diferenciabilidad dada por la siguiente

Definición 5.3. *Una función f definida en un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en un punto $\boldsymbol{a}$ de A si*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| E_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

para todo $\boldsymbol{x}$ en alguna bola $B_r(\boldsymbol{a})$, donde $\nabla f\,(\boldsymbol{a})$ es el vector gradiente y

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} E_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0.$$

En dos variables esto significa que la superficie $z = f(x, y)$ tiene plano tangente en el punto $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) = (a, b, f(a, b))$ y que cerca de este punto la función se puede aproximar por el plano tangente:

$$z = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

El error cometido en la aproximación es $||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| E_{(a,b)}(x - a, y - b)$ que depende de (a, b) y (x, y).

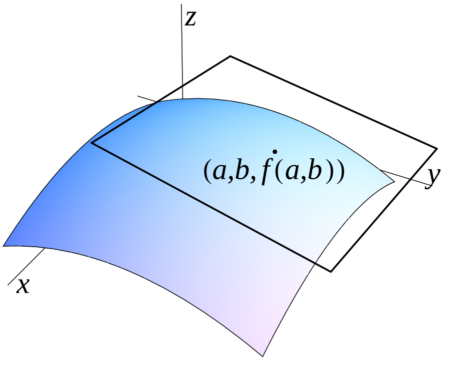


Figura 5.4: Aproximación de la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ por el plano tangente a la superfice en el punto.

Definición 5.4. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $\boldsymbol{x}_0$ un elemento de A y $\boldsymbol{v}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. La función f es derivable en el punto $\boldsymbol{x}_0$ en la dirección del vector v si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$$

*existe. El valor de este límite se llama **derivada direccional** y se nota $\frac{\partial f}{\partial v}(\boldsymbol{x}_0)$ o $f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{v})$.*

Para funciones de dos variables esta derivada mide la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $\mathbf{x}_0$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$. Cuando la dirección $\mathbf{v}$ es la de un eje coordenado, es la conocida derivada parcial de la función con respecto a la variable que corresponde al eje.

5.3. Máximos y mínimos en varias variables

Si se hace $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \frac{1}{||\mathbf{u}||}\mathbf{u}$ en la definición de diferenciabilidad, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{a} + ||\mathbf{u}||\mathbf{v}$ y

$$f(\mathbf{a} + ||\mathbf{u}||\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot ||\mathbf{u}||\mathbf{v} + ||\mathbf{u}||E_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$$

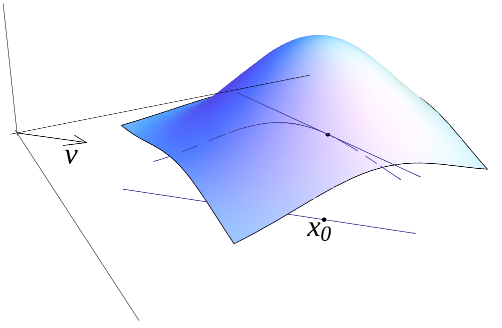


Figura 5.5: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ es la pendiente de la tangente a la superficie $z = f(\mathbf{x})$ en el punto $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

después de transponer $f(\mathbf{a})$,

$$f(\mathbf{a} + ||\mathbf{u}||\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot ||\mathbf{u}||\mathbf{v} + ||\mathbf{u}||E_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$$

multiplicando por $\frac{1}{||\mathbf{u}||}$,

$$\frac{f(\mathbf{a} + ||\mathbf{u}||\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{||\mathbf{u}||} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + E_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$$

Si $||\mathbf{u}||$ tiende a cero,

$$\lim_{||\mathbf{u}|| \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + ||\mathbf{u}||\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{||\mathbf{u}||} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + \lim_{||\mathbf{u}|| \to 0} E_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}).$$

Lo que prueba que si una función en varias variables es diferenciable en un punto, entonces en ese punto existen las derivadas direccionales en cualquier dirección, y además que

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

esto es, la derivada direccional de la función es el producto interno entre el vector gradiente de la función calculado en el punto y el vector dirección. Usando el coseno del ángulo formado por dos vectores se tiene,

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = ||\nabla f(\mathbf{x})|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cos\theta.$$

Esta expresión tiene su valor máximo si la dirección forma un ángulo de 0 radianes con el vector gradiente; por esta razón se tiene el siguiente

Teorema 5.1. *Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $\boldsymbol{x}$ de A, la dirección en la que la función crece lo máximo posible es la dirección del vector gradiente y en la que decrece lo máximo es la dirección opuesta al gradiente.*

La esencia del teorema anterior está en que dice cómo ir a los máximos y los mínimos. Nótese que este teorema también sirve como prueba de las condiciones necesarias de primer orden, ya que si se está en el máximo o mínimo, no existe dirección hacia donde mejorar el valor de la función. Ahora bien, esto sólo ocurre si el gradiente de la función es cero; las **condiciones necesarias** están dadas en el siguiente corolario:

Corolario 5.1. *Si una función f tiene un máximo o un mínimo en $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, todas las derivadas direccionales de f en $\boldsymbol{a}$ son cero. Esto es $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$, y por tanto $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$.*

En dos variables, el resultado dice que el plano tangente en los máximos y mínimos debe ser paralelo al plano xy.

Como en el caso de una variable, los puntos críticos de una función en varias variables están donde las derivadas parciales sean todas cero o no existan. Si la función tiene valores extremos, los toma en el conjunto de puntos críticos.

Ejemplos

1. Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = (x-1)^2\left(y^2+y\right)+x^2$ son:

$$f_x = 2(x-1)\left(y^2+y\right)+2x, \qquad f_y = (x-1)^2(2y+1)$$

y los puntos críticos están donde

$$\begin{aligned} 2(x-1)\left(y^2+y\right)+2x &= 0 \\ (x-1)^2(2y+1) &= 0. \end{aligned}$$

La segunda ecuación es cero si y sólo si $x = 1$ ó $y = -1/2$. $x = 1$ no produce solución ya que al ser reemplazado en la primera ecuación lleva a $x = 0$, lo que es imposible (x no puede tomar dos valores simultáneamente). Al reemplazar $y = -1/2$ en la primera ecuación

$$2(x-1)(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})+2x = -\frac{1}{2}(x-1)+2x = \frac{3}{2}x+\frac{1}{2} = 0$$

y despejando, $x = -1/3$. Así la función solamente tiene un punto crítico: $(x, y) = (-1/3, -1/2)$.

2. Para una firma que usa dos insumos K, L a precios r, w por unidad respectivamente, el costo promedio es

$$\bar{C} = \frac{rK + wL}{Q(K, L)},$$

donde $Q = Q(K, L)$ es la función de producción. Las condiciones que se deben satisfacer para minimizar el costo promedio son:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial K} = \frac{rQ(K, L) - (rK + wL)Q_K(K, L)}{(Q(K, L))^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial L} = \frac{wQ(K, L) - (rK + wL)Q_L(K, L)}{(Q(K, L))^2} = 0$$

estas ecuaciones equivalen a

$$rQ(K, L) - (rK + wL)Q_K(K, L) = 0,$$

$$wQ(K, L) - (rK + wL)Q_L(K, L) = 0.$$

luego de transponer los términos negativos,

$$rQ(K, L) = (rK + wL)Q_K(K, L),$$

$$wQ(K, L) = (rK + wL)Q_L(K, L)$$

al hacer el cociente entre estas dos expresiones y simplificar,

$$\frac{r}{w} = \frac{Q_K(K, L)}{Q_L(K, L)}.$$

Las cantidades de insumos que el productor debe usar para minimizar su costo promedio son aquellas para las cuales la relación entre las productividades marginales es igual a la relación entre los precios de los insumos de producción.

3. Si el productor vende su producto a P por unidad, los beneficios están dados por

$$\Pi(K, L) = PQ(K, L) - (rK + wL).$$

Si la función $Q(K,L)$ es homogénea de grado uno (tiene rendimientos constantes a escala), $Q(\lambda K,\lambda L)=\lambda Q(K,L)$, la función de beneficio es homogénea de grado uno:

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda K,\lambda L) &= PQ(\lambda K,\lambda L)-(r\lambda K+w\lambda L)\\ &= P\lambda Q(K,L)-(r\lambda K+w\lambda L)=\lambda\Pi(K,L).\end{aligned}$$

Si además, existe una combinación de insumos (K_0,L_0) para la que $\Pi(K_0,L_0)>0$, es posible alcanzar cualquier nivel de beneficio ya que,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Pi(\lambda K_0,\lambda L_0)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Pi(K_0,L_0)=\infty.$$

En este caso el argumento maximizador es vacio.

4. Si la función de produccion no es homogénea de grado uno y los beneficios están dados por

$$\Pi(K,L)=PQ(K,L)-(rK+wL).$$

La combinación de insumos que produce el mayor beneficio son las soluciones del sistema de ecuaciones,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial K}=PQ_K(K,L)-r=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial L}=PQ_L(K,L)-w=0.$$

Este sistema equivale a

$$PQ_K(K,L)=r,\qquad PQ_L(K,L)=w,$$

el valor de la productividad marginal de cada insumo de producción debe ser igual a su precio. Haciendo nuevamente el cociente entre las dos ecuaciones,

$$\frac{r}{w}=\frac{Q_K(K,L)}{Q_L(K,L)},$$

esto es, las condiciones necesarias (de primer orden) para minimizar el costo promedio y para maximizar el beneficio en el corto plazo son las mismas.

Ejercicio

¿Cuál es el precio de venta por unidad producida para maximizar el beneficio?

Definición 5.5. *Si* $\boldsymbol{a}$ *es un punto crítico de* f *pero* f *no tiene un máximo ni un mínimo en* $\boldsymbol{a}$*, se dice que* f *tiene un* ***punto de silla*** *en* $\boldsymbol{a}$*.*

La prueba del teorema que da las condiciones suficientes para encontrar los óptimos de una función en varias variables está basada en el teorema 7 del capítulo anterior, que a su vez depende del desarrollo de Taylor:

Teorema 5.2. *Si* $\boldsymbol{a}$ *es un punto crítico de* f *y*

1. $H(\boldsymbol{a})$ *es definida positiva, entonces* f *tiene un mínimo en* $\boldsymbol{a}$*.*
2. $H(\boldsymbol{a})$ *es definida negativa, entonces* f *tiene un máximo en* $\boldsymbol{a}$*.*
3. $H(\boldsymbol{a})$ *es no definida, entonces* f *tiene un punto de silla en* $\boldsymbol{a}$*.*
4. $H(\boldsymbol{a})$ *es semidefinida, el criterio no decide.*

La última parte del teorema dice que cuando $H(\mathbf{a})$ es semidefinida, la aproximación por una forma cuadrática es localmente "muy plana", y a partir de la matriz hessiana no se pueden sacar conclusiones sobre el comportamiento del punto crítico.

Ejemplos

1. El único punto crítico de $f(x,y) = (x-1)^2\left(y^2+y\right)+x^2$ es $(-1/3,-1/2)$. Las segundas derivadas parciales de f son

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\left(y^2+y\right)+2 = 2\left(y^2+y+1\right), \\ f_{yx} &= f_{xy} = 2\left(x-1\right)\left(2y+1\right), \\ f_{yy} &= 2\left(x-1\right)^2. \end{aligned}$$

$$H\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 2\left(y^2+y+1\right) & 2\left(x-1\right)\left(2y+1\right) \\ 2(x-1)(2y+1) & 2(x-1)^2 \end{pmatrix}$$

y

$$H\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{32}{9} \end{pmatrix}$$

Como los menores principales de esta matriz son positivos, en el punto $(-1/3,-1/2)$ la función tiene un mínimo local.

2. Las derivadas parciales de la función $f(x,y) = \left(1 - x^2 - y^2\right)^{2/3} + 1$ son

$$f_x = \frac{-4x}{3\left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/3}} \quad \text{y} \quad f_y = \frac{-4y}{3\left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/3}}.$$

Los puntos críticos son los que hacen cero estas derivadas y también aquellos para los cuales las derivadas no están definidas:

$$PC = \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Las segundas derivadas son

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{-4\left(3 - x^2 - 3y^2\right)}{9\left(1 - x^2 - y^2\right)^{4/3}}, \\ f_{xy} = f_{yx} &= \frac{-8xy}{9\left(1 - x^2 - y^2\right)^{4/3}}, \\ f_{yy} &= \frac{-4\left(3 - 3x^2 - y^2\right)}{9\left(1 - x^2 - y^2\right)^{4/3}} \end{aligned}$$

La matriz hessiana solamente sirve para determinar el comportamiento del punto $(0,0)$ ya que las segundas derivadas no están definidas en los otros puntos críticos. La matriz

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

es definida negativa, de donde la función tiene un máximo local en el punto $(0,0)$.

Para clasificar los otros puntos se debe examinar la función cerca de cada punto. Para esto basta observar que si (x^*, y^*) es un punto crítico para el que $(x^*)^2 + (y^*)^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= \left(1 - (x^*)^2 - (y^*)^2\right)^{2/3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ &\leq \left(1 - x^2 - y^2\right)^{2/3} + 1 = f(x,y) \end{aligned}$$

para todo (x,y). De lo anterior se concluye que la función tiene mínimos globales en todos los puntos que satisfacen la condición: $x^2 + y^2 = 1$, es decir,

$$\arg\min\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

y

$$\min\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = 1.$$

3. En los ejemplos de la sección anterior se encontraron las condiciones necesarias para maximizar el beneficio de una empresa que usa insumos K y L a precios r y w respectivamente y vende cada unidad de su producto a P,

$$\Pi(K, L) = PQ(K, L) - (rK + wL).$$

Las condiciones suficientes para que el punto crítico sea argumento maximizador, la matriz hessiana de la función Π debe ser definida negativa, como

$$\begin{aligned} H_\Pi &= \begin{pmatrix} \Pi_{KK} & \Pi_{KL} \\ \Pi_{LK} & \Pi_{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ_{KK} & PQ_{KL} \\ PQ_{LK} & PQ_{LL} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} Q_{KK} & Q_{KL} \\ Q_{LK} & Q_{LL} \end{pmatrix} = PH_Q, \end{aligned}$$

las condiciones suficientes se cumplen si la función de producción es cóncava.

4. Si la empresa produce con tecnología CES,

$$Q(K, L) = \left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{-\frac{\sigma}{\rho}},$$

derivando implícitamente la ecuación:

$$Q^{-\frac{\rho}{\sigma}} = aK^{-\rho} + bL^{-\rho},$$

se tiene

$$-\frac{\rho}{\sigma} Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1} Q_K = -\rho a K^{-\rho-1}, \qquad -\frac{\rho}{\sigma} Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1} Q_L = -\rho b L^{-\rho-1},$$

simplificando y transponiendo términos,

$$Q_K = \frac{a\sigma K^{-\rho-1}}{Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1}} \qquad Q_L = \frac{b\sigma L^{-\rho-1}}{Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1}}.$$

Reemplazando en el cociente de las condiciones necesarias,

$$\frac{r}{w} = \frac{\frac{a\sigma K^{-\rho-1}}{Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1}}}{\frac{b\sigma L^{-\rho-1}}{Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1}}} = \frac{aK^{-\rho-1}}{bL^{-\rho-1}},$$

o en forma equivalente,

$$\frac{br}{aw} = \left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho-1} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\rho+1},$$

despejando la fracción L/K,

$$\frac{L}{K} = \left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{1}{\rho+1}},$$

de donde

$$L = \left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} K \quad \text{o} \quad K = \left(\frac{aw}{br}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} L.$$

Al reemplazar esta expresión en la condición $PQ_L(K, L) = w$,

$$\begin{aligned}
PQ_L &= \frac{Pb\sigma L^{-\rho-1}}{Q^{-\frac{\rho}{\sigma}-1}} = \frac{Pb\sigma\left[\left(aK^{-\rho}+bL^{-\rho}\right)^{-\frac{\sigma}{\rho}}\right]^{\frac{\rho}{\sigma}+1}}{L^{\rho+1}} \\
&= \frac{Pb\sigma\left(aK^{-\rho}+bL^{-\rho}\right)^{-\frac{\sigma}{\rho}-1}}{L^{\rho+1}} = \frac{Pb\sigma}{\left(aK^{-\rho}+bL^{-\rho}\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} L^{\rho+1}} \\
&= \frac{Pb\sigma}{\left(a\left[\left(\frac{aw}{br}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} L\right]^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} L^{\rho+1}} \\
&= \frac{Pb\sigma}{\left(a\left(\frac{aw}{br}\right)^{\frac{-\rho}{\rho+1}} L^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} L^{\rho+1}} \\
&= \frac{Pb\sigma}{\left(a\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} L^{-\rho-\sigma} L^{\rho+1}} \\
&= \frac{Pb\sigma}{\left(a\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} L^{1-\sigma}} = w.
\end{aligned}$$

Despejando L en la última igualdad,

$$L^{1-\sigma} = \frac{Pb\sigma}{\left(a\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w}$$

o

$$\hat{L} = \hat{L}(P, r, w) = \left[\frac{Pb\sigma}{\left(a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

y al reemplazar en K,

$$\begin{aligned} \hat{K} = \hat{K}(P, r, w) &= \left(\frac{aw}{br} \right)^{\frac{1}{\rho+1}} \hat{L} \\ &= \left(\frac{aw}{br} \right)^{\frac{1}{\rho+1}} \left[\frac{Pb\sigma}{\left(a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}. \end{aligned}$$

$\hat{K}$ y $\hat{L}$ son las **funciones de demanda de factores** de la empresa, ellas determinan las cantidades de factores que se han de usar para maximizar el beneficio. Nótese que esas demandas están en función de los precios (precios de los insumos de producción y precio de venta del producto). Si se reemplazan esas funciones en Q, se encuentra la **función de oferta** de la empresa, esto es, las cantidades que se deben producir para maximizar el beneficio:

$$\begin{aligned} Q^* = Q^*(P, r, w) = Q(\hat{K}, \hat{L}) &= \left(a \left(\hat{K} \right)^{-\rho} + b \left(\hat{L} \right)^{-\rho} \right)^{-\frac{\sigma}{\rho}} \\ &= \left[a \left(\frac{aw}{br} \right)^{\frac{-\rho}{\rho+1}} \left(\frac{Pb\sigma}{\left(a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w} \right)^{\frac{-\rho}{1-\sigma}} \right. \\ &\qquad \left. + b \left(\frac{Pb\sigma}{\left(a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w} \right)^{\frac{-\rho}{1-\sigma}} \right]^{-\frac{\sigma}{\rho}} \\ &= \left[a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right]^{-\frac{\sigma}{\rho}} \left[\frac{Pb\sigma}{\left(a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\ &= \left[a \left(\frac{br}{aw} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b \right]^{\frac{\sigma(\rho+1)}{\rho(\sigma-1)}} \left[\frac{Pb\sigma}{w} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}. \end{aligned}$$

La **función de beneficio** de la empresa es el valor óptimo de Π, esto es,

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \Pi^*(P,r,w) = PQ^* - (rK^* + wL^*)\\ &= P\left[a\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b\right]^{\frac{\sigma(\rho+1)}{\rho(\sigma-1)}}\left[\frac{Pb\sigma}{w}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} - \left(r\left(\frac{aw}{br}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} + w\right)\\ &\qquad \left[\frac{Pb\sigma}{\left(a\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b\right)^{\frac{\sigma}{\rho}+1} w}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.\end{aligned}$$

Examinando separadamente los términos de la expresión anterior,

$$\begin{aligned}a\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b &= a^{\frac{1}{\rho+1}} b^{\frac{\rho}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} w^{\frac{-\rho}{\rho+1}} + b\\ &= b^{\frac{\rho}{\rho+1}} w^{\frac{-\rho}{\rho+1}}\left(a^{\frac{1}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b^{\frac{1}{\rho+1}} w^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}r\left(\frac{br}{aw}\right)^{\frac{-1}{\rho+1}} + w &= a^{\frac{1}{\rho+1}} b^{\frac{-\rho}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} w^{\frac{1}{\rho+1}} + w\\ &= b^{\frac{-1}{\rho+1}} w^{\frac{1}{\rho+1}}\left(a^{\frac{1}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b^{\frac{1}{\rho+1}} w^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right).\end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en Π^*,

$$\begin{aligned}\Pi^* = P&\left[\left(\frac{b}{w}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\left(a^{\frac{1}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b^{\frac{1}{\rho+1}} w^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)\right]^{\frac{\sigma(\rho+1)}{\rho(\sigma-1)}}\left[\frac{Pb\sigma}{w}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\\ &- \left(\frac{b}{w}\right)^{\frac{-1}{\rho+1}}\left(a^{\frac{1}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b^{\frac{1}{\rho+1}} w^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)\\ &\left[\frac{Pb\sigma}{\left(\left(\frac{b}{w}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\left(a^{\frac{1}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b^{\frac{1}{\rho+1}} w^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)\right)^{1+\sigma/\rho} w}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}\\ = &\left(\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} - \sigma^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) P^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(a^{\frac{1}{\rho+1}} r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + b^{\frac{1}{\rho+1}} w^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)^{\frac{\sigma(\rho+1)}{\rho(\sigma-1)}}.\end{aligned}$$

Esta función es tipo CES en los precios de los insumos; esto muestra un comportamiento dual entre la función de producción y la función de beneficio de la empresa. Si Q es CES en cantidades de insumos de producción, entonces Π^* es CES en los precios de esos insumos.

Ejercicios

1. Encontrar y clasificar los extremos (máximos, mínimos y puntos de silla) de las funciones

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.

   b) $f(x,y) = \left(x^2 + 3y^2 - 1\right)^3 - 10$.

   c) $f(x,y) = (2x + 3y - 12)^3 - 5$.

   d) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$.

   e) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$.

   f) $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$.

   g) $f(x,y) = (a-x)(a-y)(x+y-a)$.

   h) $f(x,y) = (x-a)(y-b)(x+y-c)$.

   i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 4$.

   j) $f(x,y,z) = 1 + x^3 + xz + yz^2$.

   k) $f(x,y,z) = 4x^2 + 4xy^3 + 3y^2 - z^3 + z^2$.

   l) $f(x,y,z) = 2x^2y - 4x^2 - y^2 + yz - z^3 - z^2$.

   m) $f(x,y,z) = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + 2y^2 - 8xz + z^2$.

   n) $f(x,y,z) = e^{-x^2} + e^{-y^2} + z^2$.

   ñ) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + 4x + 4y + 32z + 1$.

   o) $f(x,y,z) = ax^3 + axy - bx^2 + 2y^2 - cxz + z^2$.

   p) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 9xy - 9xz + 27x$.

   q) $f(x,y,z) = z^2(2y-4) - x^2(x+1) + (x-y)y$.

   r) $f(x,y,z) = 2x^3 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz + yz + z - 1$.

   s) $f(x,y,z,u) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{u}{z} + \frac{1}{u}$.

   t) $f(x,y,z) = (x+y-2)(x+y-3) + z^2$

2. Considerar una firma que usa dos insumos K, L a precios r, w por unidad respectivamente, tiene costo promedio $\bar{C}(K,L) = \frac{rK+wL}{Q(K,L)}$, donde $Q = Q(K,L)$ es la función de producción.

a) Mostrar que las condiciones de segundo orden para minimizar $\bar{C}$ son las mismas que para la maximización del beneficio a corto plazo. (Ayuda: tenga en cuenta que en el corto plazo el precio de venta de la producción es constante.)

b) Probar que $\hat{K}Q_K^* + \hat{K}Q_L^* = Q^*$. ¿Por qué esta ecuación no es el teorema de Euler aplicado a Q? (Si lo fuera, toda función de producción tendría rendimientos constantes a escala).

c) Solucionar el problema si se produce con tecnología CD y CES.

3. Una compañía tiene un contrato para suministrar 36.500 unidades de su producción este año. El costo de almacenamiento anual es de 10 u.m. por unidad; el contrato permite la escasez con un costo por unidad faltante de 15 u.m. La iniciación de una partida de producción cuesta 15.000 u.m. Si las órdenes de producción se cumplen sin demora y la demanda sigue una tasa constante, determinar el costo promedio como una función de la frecuencia de producción y de la cantidad producida en cada partida de producción, y a partir de ella encontrar el costo promedio mínimo.

4. Probar que la matriz hessiana de $f(x, y) = ax^2 + by^4$ es semidefinida en el punto crítico (0,0) y que si:

   a) $a = b = 1$, la función tiene un mínimo.

   b) $a = b = -1$, la función tiene un máximo.

   c) $a = -1$ y $b = 1$, la función tiene un punto de silla.

5. Analizar el comportamiento de los puntos críticos de la función $f(x, y) = \left(y - ax^2\right)\left(y - bx^2\right)$, con $b > a > 0$.

6. Un productor que vende en dos mercados tiene demandas $q_1 = b - ap_1$ y $q_2 = \beta - \alpha p_2$ por su producto. Si c son los costos variables unitarios, encontrar:

   a) Los precios que maximizan el beneficio.

   b) El cambio en el beneficio que produce una prohibición a la discriminación de precios.

   c) Las condiciones sobre las funciones de demanda para que el precio no discriminado (maximizador del beneficio) sea el promedio de los precios discriminados (que maximizan el beneficio). Interpretar los resultados.

7. Encontrar las funciones de beneficio, oferta y demanda de un productor que usa tecnología CD y probar que la función de beneficio de la empresa es CD en los precios de los insumos. Esto muestra la dualidad existente entre producción y beneficio cuando la tecnología es CD.

8. Probar que una función estrictamente cuasicóncava (cuasiconvexa) solo puede tener un máximo (mínimo) sobre un conjunto convexo. Ayuda: Supóngase que el máximo (mínimo) no es único y considérese el valor de la función en las combinaciones convexas de de ellos.

Capítulo 6

Optimización restringida

En este capítulo se encuentran las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los óptimos de una función $f(\mathbf{x})$ sobre un conjunto de restricciones de la forma

$$A \cap \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } i = 1, 2, ..., m; h_k(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ para } k = 1, 2, ..., p\},$$

donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es el dominio de f y h_k y g_i son funciones reales con dominio en $\mathbb{R}^n$. Una **solución factible** es un punto que satisfaga las restricciones, esto es, un elemento del conjunto de restricciones. El problema busca el valor óptimo de la función f sobre el conjunto de soluciones factibles.

En el capítulo anterior se definió el concepto de derivada direccional para una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de varias variables, en un punto $\mathbf{a}$ de A, en la dirección del vector unitario $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$. Usando la función $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ para t variable real se tiene que si g es derivable en $t = 0$,

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

es la derivada direccional de f en el punto $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{v}$,

$$g'(0) = f'(\mathbf{a}; \mathbf{v}).$$

En dos variables, $f'((a, b); (\alpha, \beta))$ es la pendiente de la recta tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ en la dirección del vector (α, β).

Usando la regla de la cadena para calcular la derivada de g

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{df(\mathbf{a}+t\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt}f(a_1+tv_1, a_2+tv_2, \cdots, a_n+tv_n) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}+t\mathbf{v})v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}+t\mathbf{v})v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}+t\mathbf{v})v_n \\
&= \nabla f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Y si $t=0$,

$$g'(0) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v},$$

esto es, la derivada direccional de la función en un punto $\mathbf{a}$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es el producto interno entre el vector gradiente de la función calculado en el punto y el vector dirección. Esta es otra manera de ver las derivadas direccionales base de la conclusión del teorema 5.1 que es de los mas importantes en optimización.

6.1. Restricciones de igualdad

En esta sección se encuentran las condiciones que satisfacen los óptimos de una función $f(\mathbf{x})$ sobre un conjunto de la forma

$$A \cap \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } i = 1, 2, ..., m\}.$$

El problema

$$\begin{aligned}
&\text{Mínimo de } x^2 + (y-1)^2 \\
&\quad\text{sujeto a } 2x^2 + y = -4
\end{aligned}$$

se puede convertir en uno de una variable (despejando y en la restricción y reemplazándola en la función objetivo): minimizar la función

$$f(x) = x^2 + \left(-2x^2 - 4 - 1\right)^2 = 4x^4 + 21x^2 + 25.$$

La solución se encuentra con los métodos expuestos en el capítulo de aplicaciones de la derivada a la optimización en una variable. Su derivada

$$f'(x) = 16x^3 + 42x = 2x\left(8x^2 + 21\right)$$

es cero cuando $x=0$. Además, $f''(x) = 48x^2 + 42$ y $f''(0) = 42 > 0$, lo que indica que f tiene un mínimo en $x=0$; por lo tanto:

$$\arg\min\left\{f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \mid 2x^2 + y = -4\right\} = \{(0,-4)\}$$

y

$$\text{mín}\left\{f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \mid 2x^2 + y = -4\right\} = 25.$$

En problemas más complejos no siempre es posible hacer un reemplazo en la forma anterior, ya sea por el número de variables involucradas o por la dificultad o imposibilidad de eliminar variables mediante el despeje en las restricciones. Un resultado que da condiciones necesarias para solucionar este tipo de problemas es el teorema de Lagrange, la base de su razonamiento es el teorema anterior y el comportamiento del gradiente sobre los contornos.

6.1.1. Condiciones necesarias

En el capítulo 2 se definieron los contornos definidos por

$$C_f(k) = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = k\},$$

en dos variables éstos están formados por todos los puntos del plano que satisfacen una ecuación de la forma $f(x,y) =$ constante, donde f es una función de dos variables; esto es,

$$\{(x,y) \mid f(x,y) = c\}.$$

Los contornos para funciones de tres o más variables también se conocen como **conjuntos de nivel**. Cuando la función es de dos variables el contorno forma una curva de nivel, cuando es de tres variables forma una **superficie de nivel**, etc.

Sean $\mathbf{a}$ un elemento de $C_f(k)$ y $r(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ una función tal que $r(t) \in C_f(k)$ para todo t en un intervalo I y de forma que $r(t_0) = \mathbf{a}$ para algún $t_0 \in I$. En particular se tiene que

$$f(r(t)) = f\left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right) = k$$

Usando la regla de la cadena para encontrar la derivada de esta función, se obtiene que

$$\frac{df(r(t))}{dt} = \nabla f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \cdot (x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)) = 0.$$

Y haciendo $t = t_0$,

$$\nabla f(x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)) \cdot (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \cdots, x_n'(t_0)) =$$

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \cdots, x_n'(t_0)) = 0.$$

Como r es arbitraria, lo anterior prueba que $\nabla f(\mathbf{a})$ es normal a $C_f(k)$. En otros términos, para una función diferenciable los vectores tangentes a la superficie de nivel son perpendiculares al gradiente. Con este resultado y el teorema 5.1 es posible describir la solución geométrica del problema

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & f(x,y,z) \\ \text{sujeto a } & g(x,y,z) = 0 \\ & h(x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que las restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$ describen dos superficies en el espacio tridimensional. Una solución factible para este problema es un punto de coordenadas (x,y,z) que satisface las restricciones; en este caso, el conjunto de todas ellas forma una curva C (la intersección de las dos superficies que forman las restricciones). Para encontrar el máximo de f se examina la superficie $f(x,y,z) = k$ para distintos valores de k hasta encontrar el más grande. Si para k_M la función f toma un valor máximo local en un punto $P = (x^*, y^*, z^*)$, la superficie $f = k_M$ y la curva C deben ser tangentes; si no fuera así, f podría seguir creciendo al moverse en la dirección del gradiente.

Puesto que el gradiente de las restricciones es normal a cada superficie de nivel y por lo tanto a la curva C, y el gradiente de f en P es normal a la superficie $f(x,y,z) = k_M$, entonces en ese punto el gradiente de f debe ser combinación lineal de los gradientes de g y h.

$$\nabla f(x^*, y^*, z^*) = \lambda_1 \nabla g(x^*, y^*, z^*) + \lambda_2 \nabla h(x^*, y^*, z^*)$$

El argumento anterior da las condiciones necesarias para la solución de este tipo de problemas y se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 6.1. ***(Lagrange)*** *Si f tiene un extremo local en $\boldsymbol{a}$ sobre el conjunto*

$$A \cap \{\boldsymbol{x} \mid g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \ \textit{para} \ i = 1, 2, ..., m\},$$

donde A es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y las funciones f y g_i para $i = 1, 2, \ldots, m$ son diferenciables en A, y si la matriz

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} (\boldsymbol{a}) \right)_{m \times n}$$

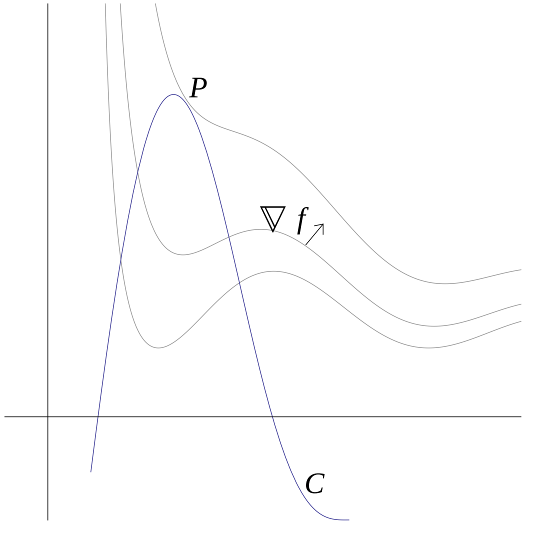


Figura 6.1: Las curvas de nivel de f se mueven en dirección del gradiente hasta alcanzar el último punto P sobre la curva C.

tiene rango m, entonces existen λ_1, λ_2,...,λ_m (llamados ***multiplicadores de Lagrange****) tales que*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{a}).$$

La condición del teorema se puede transformar en

$$\nabla f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a}) = 0$$

que a su vez equivale a que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = 0, \text{ para } k = 1, 2, ..., n.$$

La forma mnemotécnica de usar el teorema anterior es construir la función **lagrangiana** o lagrangiano para el problema

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ...x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, ...x_n).$$

Con esta función auxiliar un problema restringido se puede ver como no restringido ya que sus condiciones de primer orden equivalen a las condiciones necesarias que dan el teorema anterior. Éstas proporcionan un sistema de $n+m$ ecuaciones con $n+m$ incógnitas, resultante de igualar a cero todas las derivadas parciales (con respecto a las x y a las λ) del lagrangiano. Entre las soluciones de este sistema están los puntos que solucionan el problema restringido. La aplicación del teorema implica no solamente la consecución de los valores de las variables sino también la de los multiplicadores que satisfacen el sistema de ecuaciones resultante. La condición de que matriz $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{m\times n}$ tenga rango m es conocida como **cualificación de restricciones**, si esta condición no se cumple el teorema no es aplicable. La cualificación garantiza que el espacio vectorial generado por los gradientes de las restricciones tenga dimensión m y pueda generar el gradiente de la función objetivo en el punto que soluciona el problema.

El lagrangiano también se puede tomar en la forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{x};\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k g_k(\mathbf{x}).$$

las condiciones necesarias producen los mismos valores para las variables del problema, pero los multiplicadores tienen signos opuestos a los que se encuentran usando signo negativo entre la función objetivo y la combinación de restricciones, esto hace que se deba tener especial cuidado al hacer uso del valor de los multiplicadores. Los valores de las variables solución del sistema, que dan las condiciones necesarias del problema, no se afectan porque las restricciones al estar igualadas a cero no se alteran al ser multiplicadas por menos uno.

Ejemplos

1. Para encontrar los puntos donde la función

   $$f(x,y) = xy - x - 2y - 1 \text{ sujeta a } x - 2y = 0$$

   tiene sus puntos óptimos, se igualan a cero las derivadas parciales de su lagrangiano

   $$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - x - 2y - 1 + \lambda(x - 2y)$$

   que son:

   $$\mathcal{L}_x = y - 1 + \lambda, \qquad \mathcal{L}_y = x - 2 - 2\lambda \qquad \mathcal{L}_\lambda = x - 2y$$

Lo que produce el sistema

$$\begin{cases} y - 1 + \lambda & = 0 \\ x - 2 - 2\lambda & = 0 \\ x - 2y & = 0 \end{cases}$$

Nótese que la última ecuación es la restricción del problema original, en ella $x = 2y$. En la primera $y = 1 - \lambda$, reemplazando estos valores en la segunda $2y - 2 - 2\lambda = 2(1-\lambda) - 2 - 2\lambda = -4\lambda = 0$ de donde $\lambda = 0$, $y = 1$, $x = 2$. Hasta aquí falta determinar si este punto es un máximo o un mínimo.

2. El lagrangiano para encontrar los óptimos de la función

$$f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 \text{ sujeta a } x^2 + z^2 + w^2 = 4, \quad y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9$$

es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, z, w, \lambda_1, \lambda_2) =& x^2 + y^2 + \lambda_1 \left(x^2 + z^2 + w^2 - 4\right) \\ &+ \lambda_2 \left(y^2 + 2z^2 + 3w^2 - 9\right) \end{aligned}$$

sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= 2x + 2x\lambda_1, & \mathcal{L}_y &= 2y + 2y\lambda_2, \\ \mathcal{L}_z &= 2z\lambda_1 + 4z\lambda_2, & \mathcal{L}_w &= 2w\lambda_1 + 6w\lambda_2, \\ \mathcal{L}_{\lambda_1} &= x^2 + z^2 + w^2 - 4, & \mathcal{L}_{\lambda_2} &= y^2 + 2z^2 + 3w^2 - 9. \end{aligned}$$

Al igualar a cero estas derivadas se encuentran los sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda_1 = 0 \\ 2y + 2y\lambda_2 = 0 \\ 2z\lambda_1 + 4z\lambda_2 = 0 \\ 2w\lambda_1 + 6w\lambda_2 = 0 \\ x^2 + z^2 + w^2 = 4 \\ y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x(1 + \lambda_1) = 0 \\ 2y(1 + \lambda_2) = 0 \\ 2z(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \\ 2w(\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0 \\ x^2 + z^2 + w^2 = 4 \\ y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_1 = -1 \\ y = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_2 = -1 \\ z = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ w = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ x^2 + z^2 + w^2 = 4 \\ y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9 \end{cases}$$

Cada una de las cuatro primeras ecuaciones del último sistema se satisfacen si se cumple alguna de las dos condiciones. Los puntos que ellas proporcionan deben ser examinados para determinar si satisfacen las dos últimas ecuaciones: puesto que x, z y w no pueden ser simultáneamente cero y y, z y w tampoco se pueden anular simultáneamente, entonces entre x, z y w alguna por lo menos debe ser no nula, lo mismo que entre y, z y w. Se debe examinar cada una de las posibilidades y reemplazarlas en las últimas dos ecuaciones:

1. $x \neq 0$, $\lambda_1 = -1$, $y \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $z = 0$ y $w = 0$. Las últimas ecuaciones son $x^2 = 4$, $y^2 = 9$ de donde $x = \pm 2$ y $y = \pm 3$. Esto produce las cuatro soluciones $(\pm 2, \pm 3, 0, 0)$
2. $x \neq 0$, $\lambda_1 = -1$, $y = 0$, $z \neq 0$, $\lambda_2 = 1/2$, y $w = 0$. Las ecuaciones $x^2 + z^2 = 4$, $2z^2 = 9$ no tienen solución.
3. $x \neq 0$, $\lambda_1 = -1$, $y = 0$, $z = 0$, $w \neq 0$, y $\lambda_2 = 1/3$. Las ecuaciones $x^2 + w^2 = 4$, $3w^2 = 9$ tienen como solución $x = \pm 1$ y $w = \pm\sqrt{3}$. Las cuatro soluciones del sistema son: $(\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3})$
4. $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$, $w = 0$. Las ecuaciones $z^2 = 4$, $2z^2 = 9$ no tienen solución.
5. $x = 0$, $y \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $z \neq 0$, $\lambda_1 = 2$ y $w = 0$. Las últimas ecuaciones son $z^2 = 4$, $y^2 + 2z^2 = 9$, de donde $z = \pm 2$ y $y = \pm 1$. Las soluciones son $(0, \pm 1, \pm 2, 0)$
6. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w \neq 0$. Las ecuaciones $w^2 = 4$, $3w^2 = 9$ no tienen solución.
7. $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$, $w \neq 0$, y $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Las ecuaciones $z^2 + w^2 = 4$, $2z^2 + 3w^2 = 9$ tienen como solución $z = \pm\sqrt{3}$ y $w = \pm 1$. Esto produce nuevamente cuatro soluciones para el sistema $(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1)$
8. $x = 0$, $y \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $z = 0$, $w \neq 0$, y $\lambda_1 = 3$. Las ecuaciones $w^2 = 4$, $y^2 + 3w^2 = 9$ no tienen solución.

3. Para encontrar el costo mínimo de producir q unidades usando insumos K y L a precios r y w por unidad, respectivamente, por medio de una función tipo Cobb-Douglas se debe solucionar el problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } C(K,L) &= rK + wL \\ \text{sujeto a } Q(K,L) &= AK^{\alpha}L^{\beta} = q. \end{aligned}$$

El lagrangiano para este problema es:

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda) = rK + wL + \lambda(q - AK^{\alpha}L^{\beta})$$

las derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

Los valores que solucionan el problema satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} r = \lambda A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} \\ w = \lambda A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} \\ q = AK^{\alpha}L^{\beta} \end{cases}$$

Haciendo el cociente de la primera ecuación sobre la segunda

$$\frac{r}{w} = \frac{\lambda A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{\lambda A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}} = \frac{\alpha L}{\beta K}$$

despejando,

$$K = \frac{\alpha w L}{\beta r}$$

reemplazando en la última ecuación del sistema,

$$q = A\left(\frac{\alpha w L}{\beta r}\right)^{\alpha} L^{\beta} = A\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\alpha} L^{\alpha+\beta}$$

transponiendo términos,

$$L^{\alpha+\beta} = \frac{q}{A}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\alpha}$$

de donde los valores de la solución del problema son:

$$
\begin{aligned}
L^* &= L^*(r,w,q) = \left[\frac{q}{A}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \\
K^* &= K^*(r,w,q) = \frac{\alpha w}{\beta r}\left[\frac{q}{A}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \frac{\alpha w}{\beta r}\left[\frac{q}{A}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
&= \left[\frac{q}{A}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} = \left[\frac{q}{A}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{-\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.
\end{aligned}
$$

Éstas son las **funciones de demanda condicionada de factores** y representan las cantidades de insumos que se deben elegir para minimizar los costos. La **función de costo** se encuentra reemplazando estos valores en la función objetivo:

$$
\begin{aligned}
C^* &= r\left[\frac{q}{A}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{-\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w\left[\frac{q}{A}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[r\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} + w\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[r^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}
\end{aligned}
$$

esta última expresión es una función Cobb-Douglas en los precios de los insumos K y L. Esto indica que si la función de producción es Cobb-Douglas, la función de costo óptimo también debe ser de ese tipo. Nótese que la función de producción es homogénea de cualquier grado (no se han impuesto restricciones sobre los parámetros) y la función de costo es homogénea de grado 1 en los precios de los insumos.

Si en particular la función de producción tiene rendimientos constantes a escala ($\alpha + \beta = 1$), la función de costo es

$$C^* = C^*(r, w, q) = \frac{1}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \left(\frac{q}{A}\right) r^\alpha w^\beta$$

cuyas elasticidades son

$$\begin{aligned}
\epsilon_{rC^*} &= \frac{\partial C^*}{\partial r}\frac{r}{C^*} = \frac{\alpha}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\left(\frac{q}{A}\right) r^{\alpha-1} w^\beta \frac{r}{C^*} = \frac{\alpha C^*}{r}\frac{r}{C^*} = \alpha, \\
\epsilon_{wC^*} &= \frac{\partial C^*}{\partial w}\frac{w}{C^*} = \frac{\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\left(\frac{q}{A}\right) r^{\alpha} w^{\beta-1} \frac{w}{C^*} = \frac{\alpha C^*}{w}\frac{w}{C^*} = \beta
\end{aligned}$$

que coinciden con las elasticidades de la función de producción con respecto a las cantidades de insumos,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{KQ} &= \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = A\alpha K^{\alpha-1}L^\beta \frac{K}{Q} = \alpha \frac{Q}{K}\frac{K}{Q} = \alpha, \\
\epsilon_{LQ} &= \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} \frac{L}{Q} = \alpha \frac{Q}{L}\frac{L}{Q} = \beta.
\end{aligned}$$

4. Las **funciones de demanda hicksianas**

$$x^h(p_x, p_y, u), \quad y^h(p_x, p_y, u)$$

determinan las cantidades de bienes que debe demandar un consumidor si quiere minimizar el gasto y satifacer un cierto nivel de utilidad u; estas funciones se encuentran como solución del problema:

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \text{ sujeto a } U(x, y) = u.$$

x, y representan las cantidades y p_x y p_y los precios. El valor óptimo de la función objetivo es la **función de gasto**,

$$e(p_x, p_y, u) = p_x x^h + p_y y^h.$$

En particular, si la función de utilidad es tipo CES se debe solucionar el problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } G(x, y) = p_x x + p_y y \\
&\text{sujeto a} \quad U(x, y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{\sigma}{\rho}} = u.
\end{aligned}$$

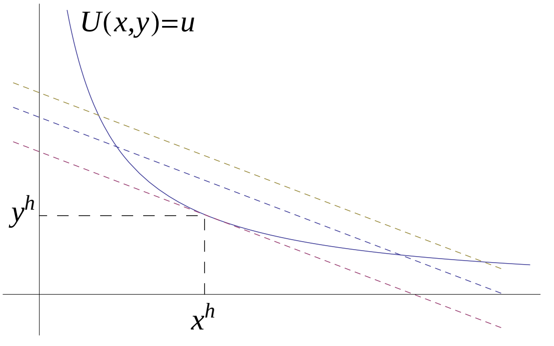


Figura 6.2: Las curvas de nivel de $p_x x + p_y y$ se mueven en dirección contraria a la del gradiente hasta alcanzar el último punto sobre la curva $U(x, y) = u$.

La restricción de este problema equivale a

$$ax^\rho + by^\rho = u^{\frac{\rho}{\sigma}},$$

y el problema a resolver equivale a

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \quad \text{sujeto a} \quad ax^\rho + by^\rho = u^{\frac{\rho}{\sigma}}.$$

su lagrangiano es

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y y + \lambda \left(u^{\frac{\rho}{\sigma}} - ax^\rho - by^\rho \right)$$

sus derivadas parciales,

$$\mathcal{L}_x = p_x - \lambda a \rho x^{\rho-1}$$
$$\mathcal{L}_y = p_y - \lambda b \rho y^{\rho-1},$$

las condiciones necesarias,

$$p_x = \lambda a \rho x^{\rho-1}$$
$$p_y = \lambda b \rho y^{\rho-1},$$

haciendo el cociente de las ecuaciones,

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\lambda a \rho x^{\rho-1}}{\lambda b \rho y^{\rho-1}} = \frac{a x^{\rho-1}}{b y^{\rho-1}} = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{y} \right)^{\rho-1},$$

transponiendo términos a fin de despejar una variable,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\rho-1} = \frac{bp_x}{ap_y}, \quad \frac{x}{y} = \left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \text{ o } \quad x = \left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} y.$$

Reemplazando en la restricción a fin de despejar el valor de y,

$$\begin{aligned} ax^\rho + by^\rho &= a\left[\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} y\right]^\rho + by^\rho = a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} y^\rho + by^\rho \\ &= \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right] y^\rho = u^{\frac{\rho}{\sigma}}. \end{aligned}$$

De aquí,

$$y^\rho = \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right]^{-1} u^{\frac{\rho}{\sigma}} \quad \text{o} \quad y^h = \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right]^{\frac{-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}}$$

Reemplazando para encontrar el valor de x,

$$x^h = \left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right]^{\frac{-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Para encontrar la **función de gasto** se reemplazan los valores encontrados en la función objetivo:

$$\begin{aligned} e &= e(p_x, p_y, u) = G(x^h, y^h) \\ &= p_x \left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right]^{\frac{-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\quad + p_y \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right]^{\frac{-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= \left[p_x \left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} + p_y\right] \left[a\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b\right]^{\frac{-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

El primero de estos factores equivale a

$$\left(\frac{b}{p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(a^{\frac{-1}{\rho-1}} p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b^{\frac{-1}{\rho-1}} p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)$$

y el segundo,

$$\left(\frac{b}{p_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \left(a^{\frac{-1}{\rho-1}} p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b^{\frac{-1}{\rho-1}} p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right).$$

Así,

$$\begin{aligned} e = {} & \left(\frac{b}{p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(a^{\frac{-1}{\rho-1}} p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b^{\frac{-1}{\rho-1}} p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right) \\ & \qquad \left[\left(\frac{b}{p_y}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \left(a^{\frac{-1}{\rho-1}} p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b^{\frac{-1}{\rho-1}} p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)\right]^{\frac{-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}} \\ = {} & \left(a^{\frac{-1}{\rho-1}} p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + b^{\frac{-1}{\rho-1}} p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} u^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Esta función es tipo CES en los precios, esto es, existe un comportamiento dual entre la utilidad y el gasto.

Los ejemplos anteriores ilustran la dualidad existente entre producción y costo, y utilidad y gasto para funciones tipo CES y CD. En el capítulo anterior se mostró, para el caso CES, la dualidad entre beneficio y producción; queda por probar qué costos y gastos CES o CD determinan producción y utilidad CES o CD, respectivamente.

6.1.2. Condiciones suficientes

Las condiciones suficientes para problemas de optimización con restricciones de igualdad están dadas por la **hessiana orlada del problema** o hessiana del lagrangiano, formada por las segundas derivadas parciales del lagrangiano con respecto a las variables del problema y los multiplicadores. Esta matriz se puede escribir en cualquiera de las formas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} & \vdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & \vdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} & \vdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

La submatriz de ceros resulta de las derivadas parciales de segundo orden del lagrangiano con respecto a los multiplicadores.

Los determinantes de orden $k \times k$ que se obtienen de ella eliminando filas y columnas correspondientes (si se elimina la fila p se elimina la columna p) sin que se afecte la submatriz de ceros se llaman **menores principales orlados** de orden k ($MPOk$). A partir de estos $MPOk$ se consiguen las condiciones suficientes dadas por el siguiente teorema:

Teorema 6.2. *Si los $MPOk$ evaluados en un punto que cumple las condiciones necesarias tienen signo $(-1)^{k-m}$ para $k = 2m+1, 2m+2, ..., n+m$, la función tiene un máximo en ese punto. Y si los $MPOk$ evaluados en un punto que cumple las condiciones necesarias tienen signo $(-1)^m$ para $k = 2m+1, 2m+2, ..., n+m$, la función tiene un mínimo en ese punto.*

Para problemas en dos variables con una restricción,

$$f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = 0,$$

la hessiana orlada, $\hat{H}$, es cualquiera de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} + \lambda g_{xx} & f_{xy} + \lambda g_{xy} \\ g_y & f_{yx} + \lambda g_{yx} & f_{yy} + \lambda g_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} f_{xx} + \lambda g_{xx} & f_{xy} + \lambda g_{xy} & g_x \\ f_{yx} + \lambda g_{yx} & f_{yy} + \lambda g_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $m = 1$, $n = 2$, k solamente puede ser 3 y $k - m = 2$. Para determinar si en un punto que satisface las condiciones de primer orden la función tiene un máximo o un mínimo, se debe encontrar el determinante de la matriz hessiana en el punto crítico. Si $|\hat{H}| > 0$ la función tiene un máximo y si $|\hat{H}| < 0$ la función tiene un mínimo.

Ejemplos

1. Para clasificar el punto crítico de

$$f(x, y) = xy - x - 2y - 1 \text{ sujeta a } x - 2y = 0,$$

encontrado anteriormente, se calculan las derivadas de segundo orden del lagrangiano: $\mathcal{L}_{xx} = 0$, $\mathcal{L}_{xy} = 1$, $\mathcal{L}_{x\lambda} = 1$, $\mathcal{L}_{yy} = 0$, $\mathcal{L}_{y\lambda} = -2$, $\mathcal{L}_{\lambda\lambda} = 0$, $m = 1$ y $n = 2$. Así:

$$|\hat{H}(2, 1, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Por lo tanto,

$$\arg\min\{f(x,y) = xy - x - 2y - 1 \mid x - 2y = 0\} = \{(2,1)\}$$

y

$$\text{mín}\{f(x,y) = xy - x - 2y - 1 \mid x - 2y = 0\} = -3.$$

2. En la solución del problema

$$\text{Minimizar } C(K,L) = rK + wL \quad \text{sujeto a} \quad Q(K,L) = q.$$

Las segundas derivadas del lagrangiano

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda) = rK + wL + \lambda(q - Q(K,L))$$

son:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{KK} = -\lambda Q_{KK}, & \mathcal{L}_{KL} = -\lambda Q_{KL}, & \mathcal{L}_{LK} = -\lambda Q_{LK}, \\ \mathcal{L}_{LL} = -\lambda Q_{LL}, & \mathcal{L}_{K\lambda} = -Q_K, & \mathcal{L}_{L\lambda} = -Q_L \end{array}$$

El determinante de la matriz hessiana del problema,

$$\begin{aligned} \left|\hat{H}_{\mathcal{L}}(K,L,\lambda)\right| &= \begin{vmatrix} 0 & -Q_K & -Q_L \\ -Q_K & -\lambda Q_{KK} & -\lambda Q_{KL} \\ -Q_L & -\lambda Q_{LK} & -\lambda Q_{LL} \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} 0 & Q_K & Q_L \\ Q_K & Q_{KK} & Q_{KL} \\ Q_L & Q_{LK} & Q_{LL} \end{vmatrix} = -\lambda \left|\hat{H}_Q(K,L)\right| \end{aligned}$$

Para que el punto, (K^*, L^*, λ^*), que satisface el teorema de Lagrange sea un mínimo el valor del determinante $\left|\hat{H}_{\mathcal{L}}(K^*, L^*, \lambda^*)\right|$ debe ser negativo lo que equivale a que $\left|\hat{H}_Q(K^*, L^*)\right|$ es positivo ya que q, K^* y L^* representan cantidades de producto e insumos respectivamente, y en las condiciones necesarias se tiene que $\lambda > 0$. Para que esta última condición se cumpla basta con que la función Q sea cuasicóncava, de esta forma los valores que satisfacen las condiciones necesarias del teorema de Lagrange son los argumentos minimizadores del problema.

3. Las **funciones de demanda marshallianas**

$$x^M(p_x, p_y, m), \quad y^M(p_x, p_y, m)$$

determinan las cantidades de bienes que debe demandar un consumidor si quiere maximizar su utilidad dada una restricción presupuestal; esas funciones son la solución del problema:

$$\text{Maximizar } U(x,y) \text{ sujeto a } p_x x + p_y y = m.$$

x, y representan las cantidades, p_x y p_y los precios, U la función de utilidad y m el ingreso disponible. El valor de U óptimo se conoce como **función de utilidad indirecta** y se nota

$$V(p_x, p_y, m) = U(x^M, y^M).$$

Para el problema

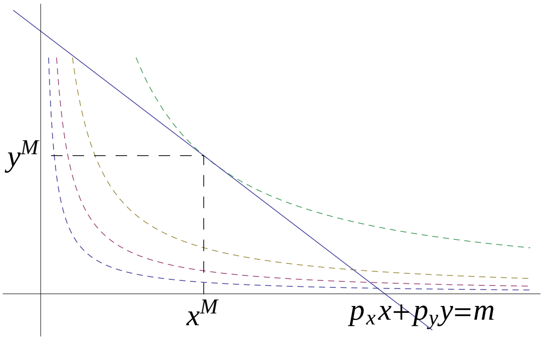


Figura 6.3: Las curvas de nivel de U se mueven en dirección del gradiente hasta alcanzar el último punto sobre la curva $p_x x + p_y y = m$.

$$\text{Maximizar } U(x,y) \quad \text{sujeto a} \quad p_x x + p_y y = m$$

Las segundas derivadas del lagrangiano

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = U(x,y) + \lambda(m - p_x x - p_y y)$$

son:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{xx} = U_{xx}, && \mathcal{L}_{xy} = U_{xy}, && \mathcal{L}_{yx} = U_{yx}, \\ &\mathcal{L}_{yy} = U_{yy}, && \mathcal{L}_{x\lambda} = -p_x, && \mathcal{L}_{y\lambda} = -p_y \end{aligned}$$

El determinante de la matriz hessiana del problema,

$$\begin{aligned}
\left|\hat{H}_{\mathcal{L}}\left(x,y,\lambda\right)\right| &= \begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -p_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} \\
&= p_x p_y U_{yx} + p_x p_y U_{xy} - p_y^2 U_{xx} - p_x^2 U_{yy} \\
&= \begin{pmatrix} p_y & p_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & -U_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_y \\ p_x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $\left|\hat{H}_{\mathcal{L}}\left(x^M, y^M, \lambda^M\right)\right| > 0$ el punto, $\left(x^M, y^M, \lambda^M\right)$, que satisface el teorema de Lagrange es un argumento maximizador. Pero esta condición, según las igualdades anteriores, equivale a que la forma cuadrática (en los precios) $p_x p_y U_{yx} + p_x p_y U_{xy} - p_y^2 U_{xx} - p_x^2 U_{yy}$ sea definida positiva que equivale a que la matriz

$$\begin{pmatrix} -U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & -U_{yy} \end{pmatrix}$$

sea definida positiva, esto es, la matriz hessiana de U es definida negativa que equivale a U cóncava. En conclusión si U es cóncava el punto que satisface el teorema de Lagrange es argumento maximizador.

Para la clasificación de los puntos críticos en algunos problemas, como el del ejemplo 2 anterior, es posible usar el siguiente

Teorema 6.3. ***(Weierstrass)*** *Sea f una función real continua en un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ compacto; entonces existen $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en A tales que*

$$f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{b}) \text{ para todo } x \in A.$$

El teorema garantiza que una función continua definida sobre un conjunto cerrado y acotado alcanza sus extremos (máximo y mínimo).

Ejemplo

En el problema

$$f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 \text{ sujeta a } x^2 + z^2 + w^2 = 4, \quad y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9$$

el conjunto de restricciones es compacto ya que es cerrado y los valores de las variables están acotados:

$$-2 \leq x \leq 2, \quad -3 \leq y \leq 3, \quad -2 \leq z \leq 2 \quad \text{y} \quad -\sqrt{3} \leq w \leq \sqrt{3}.$$

La función objetivo $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2$ es continua. Por lo tanto, la función tiene extremos en el conjunto definido por las restricciones; puesto que el teorema de Lagrange generó 16 puntos críticos, en alguno de ellos debe estar el máximo y el mínimo. Al reemplazar cada uno de los puntos en la función objetivo: $f(\pm 2, \pm 3, 0, 0) = 13$, $f(\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3}) = 1$, $f(0, \pm 1, \pm 2, 0) = 1$ y $f(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1) = 0$. De donde se encuentra que

$$\begin{aligned}\arg\max &\left\{x^2 + y^2 \mid x^2 + z^2 + w^2 = 4, \quad y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9\right\}\\ &= \{(\pm 2, \pm 3, 0, 0)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg\min &\left\{x^2 + y^2 \mid x^2 + z^2 + w^2 = 4, \quad y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9\right\}\\ &= \{(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1)\},\end{aligned}$$

$$\text{máx}\left\{x^2 + y^2 \mid x^2 + z^2 + w^2 = 4, \quad y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9\right\} = 13$$

y

$$\text{mín}\left\{x^2 + y^2 \mid x^2 + z^2 + w^2 = 4, \quad y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9\right\} = 0$$

Para este caso, la aplicación del teorema de Weierstrass, en vez del examen de la matriz hessiana orlada, simplifica el proceso de clasificación de los puntos críticos. Sin embargo, clasificar los otros puntos en máximos o mínimos locales requiere la matriz hessiana orlada.

Ejercicios

1. Encontrar y clasificar los extremos (máximos y mínimos) de las funciones, sujeto a las restricciones dadas:

   a) xy^2 sujeto a $x + 2y = 2$.

   b) $x^3 + 2xy + x^2$ sujeto a $x + y = 0$.

   c) $x + y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

   d) $x - y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   e) x^2y sujeto a $3x^2 + 3y^2 + 6y = 5$.

   f) z sujeto a $x^2 + y^2 = 2$, $x + y + z = 0$.

   g) $x^2 + (y - 1)^2$ sujeto a $2x^2 + y + 4 = 0$.

   h) $x^2 + y^2$ sujeto a $x^2 + z^2 + w^2 = 4$, $y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9$.

   i) $x - y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $2x - 3y + 4z = 1$.

j) $x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$ sujeto a $x + y + z = 1$, $2x - y - z = 5$.

k) $x + y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

l) xyz sujeto a $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$.

m) $x^2 + 2y - z^2$ sujeto a $2x - y = 0$, $x + z = 6$.

n) $x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $x^2 - y^2 = 1$.

2. Solucionar el problema:

$$\text{Minimizar } x^2 + y^2 \text{ sujeto a } (x-1)^3 - y^2 = 0$$

geométricamente. Mostrar que el teorema de Lagrange no se puede aplicar a este caso. ¿Por qué?

3. Encontrar los puntos que satisfacen las condiciones necesarias para la solución del problema:

$$\text{Máximo de } \mathbf{a}\mathbf{x}^T + \frac{1}{2}\mathbf{x}D\mathbf{x}^T \text{ sujeto a } A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}$$

como una función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, A y D. $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$ son vectores $1 \times n$, $\mathbf{b}$ es un vector $m \times 1$, A y D son matrices $m \times n$ y $n \times n$ respectivamente.

4. El modelo

$$z = \alpha Q_1(L_1, K_1) + \beta Q_2(L_2, K_2) \text{ sujeto a } L_1 + L_2 = L, \quad K_1 + K_2 = K$$

representa el valor total de producción de dos bienes sujeta a restricciones de capital y trabajo. K y L son las cantidades de insumos disponibles y los subíndices representan las partes de cada insumo usadas en cada producto. Usar las condiciones de primer orden para encontrar la forma de repartir los recursos disponibles, capital y trabajo, para maximizar el valor total de producción en función de α, β, K y L si las funciones de producción son:

a) CES.

b) Cobb-Douglas.

5. Encontrar las funciones de demanda marshallianas del consumidor y la utilidad indirecta para cada una de las siguientes funciones de utilidad:

a) $U(x, y) = xy$.

b) $U(x, y) = x^a y^b$.

c) $U(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$.

d) $U(x, y) = (x^a + y^a)^{b/a}$.

e) $U(x, y) = ax + \ln y^b$.

6. Encontrar las funciones de demanda hicksiana y la función de gasto asociada a cada una de las funciones de utilidad del ejercicio anterior.

6.2. Restricciones de desigualdad

En la sección anterior se encontraron las condiciones para solucionar problemas con restricciones de igualdad. Ese tipo de restricciones para dos variables representa una curva en el plano y para tres variables una superficie en el espacio. Una restricción de desigualdad en dos variables, $g(x, y) \leq 0$, representa una porción del plano limitada por la curva $g(x, y) = 0$. Un punto para el que $g(a, b) < 0$ se llama **interior** a la restricción y si $g(a, b) = 0$, el punto es **frontera**. De la misma forma, los puntos que satisfacen la restricción $g(x, y, z) \leq 0$ generan una porción del espacio tridimensional limitada por una superficie. El conjunto de puntos factibles está formado por los puntos que satisfacen todas las restricciones, en este caso es la intersección de las regiones determinadas por cada una de las restricciones. Cuando un punto factible satisface la igualdad en una restricción, se dice que la restricción está **activa**; en caso contrario, la restricción está **inactiva**.

El hecho de que una restricción esté o no activa en la solución de un problema juega un papel importante, si por ejemplo se está solucionando un problema de maximización del beneficio de una empresa que tiene restricciones de mano de obra, espacio de bodega disponible y maquinaria y en la solución la única restricción activa es la de bodega, entonces eso indica que la manera de mejorar los beneficios de la empresa es ampliando la bodega. Si en la solución hay dos restricciones activas, por ejemplo, el espacio para almacenamiento y la mano de obra, para mejorar el valor objetivo es necesario relajar las restricciones activas, esto es, ampliando la bodega y aumentando la mano de obra. Si para el caso la solución es interior (ninguna restricción está activa), es posible reducir las restricciones y seguir manteniendo el valor de la función objetivo. El comportamiento de las soluciones se enmarca en el llamado **análisis de sensibilidad** donde se determinan las variables y variaciones que afectan las soluciones de un problema de optimización; para hacer este tipo de análisis existen una gran cantidad de herramientas computacionales, tal vez la más accesible es Solver de Excel, en la cual es posible solucionar problemas de optimización restringida y hacer el análisis de sensibilidad con base en la solución allí encontrada.

En la solución de problemas restringidos basta considerar sólo uno de los tipos de problema, ya sea el de maximización o el de minimización, pues

$$\text{Mínimo de } f = -\text{Máximo de } (-f).$$

Por esta razón aquí solamente se examinan problemas de maximización. Además de los resultados que dan los teoremas, el comportamiento de la función objetivo y las restricciones ayudan en la solución de este tipo de problemas. Así por ejemplo, una función objetivo convexa con un punto crítico interior y un conjunto factible convexo tiene mínimo en el punto y máximo en la frontera.

Algunos problemas en dos variables se pueden solucionar gráficamente; para esto se localiza la región definida por las restricciones (conjunto de puntos factibles). Para determinar los puntos donde la función objetivo alcanza sus óptimos se examina el comportamiento de su gradiente. Si el gradiente es cero en puntos interiores, el comportamiento de su hessiana determina el comportamiento de la función objetivo en ellos. Si el gradiente no es cero en los puntos interiores, su dirección indica hacia dónde moverse para alcanzar los óptimos (que se alcanzarán en puntos frontera). El máximo se encuentra en el punto del conjunto de puntos factibles más alejado del origen siguiendo la dirección del gradiente, y el mínimo en el punto más alejado en contra de la misma dirección.

Ejemplo

Para encontrar los óptimos de

$$f(x, y) = x + y \text{ sujeto a } x^2 + y^2 \leq 4, \quad y^2 \leq x, \quad x \geq 0 \quad y \geq 0,$$

el gradiente de f es $(1, 1)$, la región definida por las restricciones es convexa, ya que las funciones $g(x, y) = x^2 + y^2$ y $h(x, y) = y^2 - x$ son convexas y las restricciones son contornos inferiores. Así, el mínimo de la función está en $(0, 0)$ y el máximo en $\left((\sqrt{17} - 1)/2, \sqrt{(\sqrt{17} - 1)/2}\right)$ que son los puntos más alejados del conjunto en contra y a favor del vector gradiente de la función $(1, 1)$.

Como en el caso de restricciones de igualdad, las condiciones necesarias para encontrar las soluciones del problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a } & g_1(\mathbf{x}) \geq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) \geq 0 \\ & \cdots \\ & g_m(\mathbf{x}) \geq 0 \end{aligned}$$

están dadas en el siguiente teorema:

Teorema 6.4. ***(Karush-Kuhn-Tucker)*** *Sean f y g_k, para $k = 1, 2, \ldots, m$, funciones diferenciables en un conjunto abierto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{a}$ es es el máximo de la función f sobre el conjunto*

$$A \cap \{\boldsymbol{x} \mid g_k(\boldsymbol{x}) \leq 0 \text{ para } k = 1, 2, ..., m\},$$

$I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ es el conjunto de las restricciones activas en $\boldsymbol{a}$ y la matriz $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\#(I)\times n}$ tiene rango $\#(I)$. Entonces existen reales μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_m tales que

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nabla g_i(\boldsymbol{a})$$

y

$$\mu_k \geq 0 \quad y \quad \mu_k g_k(\boldsymbol{a}) = 0, \quad para \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

La matriz $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\#(I)\times n}$ está formada por los gradientes de las funciones g_i para $i \in I$, esto es, las funciones que definen los contornos que forman las restricciones activas en el punto que soluciona el problema. Las últimas condiciones del teorema se llaman **condiciones de holgura complementaria** con ellas se determinan las restricciones activas: si un multiplicador es positivo, la restricción correspondiente está activa.

Nuevamente el lagrangiano del problema:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = f(x_1, x_2, ...x_n) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(x_1, x_2, ...x_n)$$

resume el resultado del teorema en la forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = 0 \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mu_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(\mathbf{a}) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, m \text{ con } \mu_k \geq 0, \text{ y } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(\mathbf{a}) \leq 0.$$

Si las restriciones del problema son no negativas (de forma ≥ 0) el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = f(x_1, x_2, ...x_n) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(x_1, x_2, ...x_n)$$

y las condiciones de holgura complementaria se transforman en

$$\mu_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(\mathbf{a}) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, m \text{ con } \mu_k \geq 0, \text{ y } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(\mathbf{a}) \geq 0.$$

El teorema de Karush-Kuhn-Tucker, como el de Lagrange, da condiciones necesarias para la solución de problemas de optimización restringida. Por esta razón, la aplicación de esos teoremas puede producir varios puntos críticos; determinar cuál es la solución requiere la aplicación de condiciones de segundo orden; sin embargo, cuando la función objetivo es convexa o cuasiconvexa y las restricciones forman un conjunto convexo, las condiciones de minimización se convierten en suficientes, y lo mismo ocurre para problemas que tienen funciones objetivo cóncavas o cuasicóncavas en problemas de maximización. Para la formalización de estos resultados ver, por ejemplo, Sundaram[Su].

Ejemplos

1. Para aplicar el teorema al problema

$$\text{Mínimo de } f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\text{sujeto a } \left(y - x^2 - 10\right)^3 \leq 0, \ x \geq 2 \text{ y } y \geq 0,$$

éste se convierte a maximización: cambiando el signo a la función objetivo, multiplicando la primera restricción por -1 y tomando la segunda restricción en la forma equivalente $x - 2 \geq 0$ (el teorema solamente aplica para este tipo de desigualdades).

$$-\text{Máximo de } -f(x, y) = -x^2 - y^2$$
$$\text{sujeto a} - \left(y - x^2 - 10\right)^3 \geq 0, \ x - 2 \geq 0 \text{ y } y \geq 0.$$

El lagrangiano para este problema,

$$\mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -x^2 - y^2 - \mu_1 \left(y - x^2 - 10\right)^3 + \mu_2 (x-2) + \mu_3 y,$$

tiene como derivadas parciales:

$$\mathcal{L}_x = -2x + 6x\mu_1 \left(y - x^2 - 10\right)^2 + \mu_2, \qquad L_{\mu_2} = x - 2,$$
$$\mathcal{L}_y = -2y - 3\mu_1 \left(y - x^2 - 10\right)^2 + \mu_3, \qquad \mathcal{L}_{\mu_1} = -\left(y - x^2 - 10\right)^3,$$
$$\mathcal{L}_{\mu_3} = y.$$

Las condiciones de primer orden producen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2x + 6x\mu_1 \left(y - x^2 - 10\right)^2 + \mu_2 = 0 \\ -2y - 3\mu_1 \left(y - x^2 - 10\right)^2 + \mu_3 = 0 \\ \mu_1 \left(y - x^2 - 10\right)^3 = 0 \\ \mu_2 (x - 2) = 0 \\ \mu_3 y = 0 \end{cases}$$

Las últimas tres ecuaciones equivalen a $\mu_1 = 0$ o $y = x^2 + 10$, $\mu_2 = 0$ o $x = 2$, y $\mu_3 = 0$ o $y = 0$. Para encontrar la solución se deben analizar 8 combinaciones: $\mu_1 = 0$, $\mu_1 > 0$; y $\mu_2 = 0$, $\mu_2 > 0$, y $\mu_3 = 0$, $\mu_3 > 0$, que se pueden visualizar en la tabla

μ_1	0	0	0	+	0	+	+	+
μ_2	0	0	+	0	+	0	+	+
μ_3	0	+	0	0	+	+	0	+

De las cuales si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, la primera ecuación se reduce a $x = 0$, pero ésta no satisface la primera restricción. Por lo tanto, se desechan las dos primeras combinaciones de la tabla. Las seis combinaciones restantes son:

- Si $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 = 0$; $x = 2$. Reemplazando en la segunda ecuación $-2y = 0$, de donde $y = 0$, y de la primera ecuación $\mu_2 = 2x = 4$
- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ y $\mu_3 = 0$; $y = x^2 + 10$. Reemplazando en la primera ecuación $x = 0$ que no es factible (no satisface la segunda restricción).

- Si $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 > 0$; $x = 2$, $y = 0$. La primera ecuación se reduce a $\mu_2 = 2x = 4$ y la segunda a $\mu_3 = 2y = 0$, contrario al hecho que $\mu_3 > 0$. Por lo tanto, esta combinación no genera solución.
- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ y $\mu_3 > 0$; $y = x^2 + 10$ y $y = 0$ que es imposible para cualquier y.
- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 = 0$; $y = x^2 + 10$, $x = 2$. De donde $y = 14$ y la segunda ecuación se reduce a $\mu_3 = 2y = 28$ en contra de $\mu_3 = 0$.
- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 > 0$; $y = x^2 + 10$, $x = 2$, $y = 0$. Imposible para cualquier y.

Por lo tanto, la solución del problema es: $x = 2$, $y = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 4$ y $\mu_3 = 0$, resultado de la primera combinación examinada anteriormente.

2. Encontrar el costo mínimo de producir q unidades usando como insumos capital K y trabajo L mediante una función de producción Leontief, es decir, encontrar:

$$\begin{aligned} &\text{Mínimo de } C(K, L) = rK + wL \\ &\text{sujeto a } \min\{aK, bL\} = q. \end{aligned}$$

El problema se lleva a la forma:

$$\begin{aligned} -\text{Máximo de } & -C(K, L) = -rK - wL \\ \text{sujeto a } & aK \geq q, \quad bL \geq q, \quad K \geq 0, \quad L \geq 0. \end{aligned}$$

Su lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -rK - wL + \mu_1(aK - q) + \mu_2(bL - q) + \mu_3 K + \mu_4 L.$$

Sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = -r + a\mu_1 + \mu_3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -w + b\mu_2 + \mu_4,$$

y los puntos que satisfacen las condiciones necesarias son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} -r + a\mu_1 + \mu_3 = 0 \\ -w + b\mu_2 + \mu_4 = 0 \\ \mu_1(aK - q) = 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad aK - q \geq 0 \\ \mu_2(bL - q) = 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad bL - q \geq 0 \\ \mu_3 K = 0, \quad \mu_3 \geq 0, \quad K \geq 0 \\ \mu_4 L = 0, \quad \mu_4 \geq 0, \quad L \geq 0 \end{cases}$$

Puesto que K y L no pueden ser cero, la función tiene insumos esenciales para la producción (si alguno es cero no se puede producir), entonces $\mu_3 = \mu_4 = 0$. Reemplazando estos valores en las dos primeras restricciones y despejando, $\mu_1 = \frac{r}{a}$ y $\mu_2 = \frac{w}{b}$. De la tercera y cuarta ecuaciones, $K^* = \frac{q}{a}$ y $L^* = \frac{q}{b}$. El costo óptimo es el valor de la función objetivo calculada en K^* y L^*,

$$C^* = C^*(r, w, q) = r\frac{q}{a} + w\frac{q}{b} = q\left(\frac{r}{a} + \frac{w}{b}\right)$$

Esta función es lineal en los precios de los insumos.

3. Para minimizar el costo de producir por lo menos q unidades usando dos insumos K y L mediante una función de producción lineal, se debe solucionar el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } C(K, L) = rK + wL \\ &\text{sujeto a } aK + bL \geq q, \quad K \geq 0, \quad L \geq 0. \end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L}(K, L, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -(rK + wL) + \mu_1(aK + bL - q) + \mu_2 K + \mu_3 L$$

sus derivadas son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = -r + a\mu_1 + \mu_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -w + b\mu_1 + \mu_3.$$

La solución del problema satisface las condiciones:

$$\begin{cases} -r + a\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ -w + b\mu_1 + \mu_3 = 0 \\ \mu_1(aK + bL - q) = 0, \ \mu_1 \geq 0, \ aK + bL - q \geq 0 \\ \mu_2 K = 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad K \geq 0 \\ \mu_3 L = 0, \quad \mu_3 \geq 0, \quad L \geq 0 \end{cases}$$

Como en el primer ejemplo de esta sección, la tabla

μ_1	0	0	0	+	0	+	+	+
μ_2	0	0	+	0	+	0	+	+
μ_3	0	+	0	0	+	+	0	+

ayuda a determinar la solución.

μ_1 y μ_2 no pueden ser simultáneamente cero porque al reemplazar en la primera ecuación del sistema, el único valor de r que la soluciona es $r = 0$ y r es exógeno al problema con valor, en general, no nulo. De la misma forma μ_1 y μ_3 no pueden ser nulos a la vez porque la segunda ecuación sólo se satisface si $w = 0$ y w es exógeno y distinto de cero; esto elimina las posibilidades 1, 2 y 3 de la tabla.

- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ y $\mu_3 = 0$; $\mu_1 = \frac{r}{a}$ en la primera ecuación, $\mu_1 = \frac{w}{b}$ en la segunda y $aK + bL = q$ en la tercera. Esta combinación es solución solamente cuando $\frac{r}{a} = \frac{w}{b}$. Si se cumple esta relación, la función de costo es

$$C = rK + wL = \frac{aw}{b}K + wL = \frac{w}{b}(aK + bL)$$

  esto indica que las curvas de indiferencia del costo y la restricción son rectas paralelas, lo que equivale a que la pendiente de la isocosto $(-\frac{r}{w})$ es igual a la pendiente de la isocuanta $(-\frac{a}{b})$. La solución es cualquier punto sobre esa recta, para cada $0 \leq K^* \leq \frac{q}{a}$, el valor de L^* está dado por la ecuación $L^* = \frac{q-aK^*}{b}$ y en este caso el costo óptimo es

$$\begin{aligned} C^* = C^*(r, w, q) &= \frac{w}{b}(aK^* + bL^*) = \frac{w}{b}\left(aK^* + b\frac{q - aK^*}{b}\right) \\ &= \frac{w}{b}(aK^* + q - aK^*) = q\frac{w}{b} \end{aligned}$$

- Si $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 > 0$; $K = L = 0$, que no satisface la restricción de producción.

- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ y $\mu_3 > 0$; $\mu_1 = \frac{r}{a}$ en la primera condición, $\mu_3 = w - b\frac{r}{a}$ en la segunda, $L^* = 0$ en la última y $K^* = \frac{q}{a}$ en la tercera. Para que esta combinación sea solución es necesario que $w - b\frac{r}{a} > 0$ (los multiplicadores son no negativos) o $\frac{w}{r} > \frac{b}{a}$; esto indica que la pendiente del isocosto es mayor que la pendiente de la isocuanta.
  El costo óptimo es

$$C^* = C^*(r, w, q) = q\frac{r}{a}$$

- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 = 0$; $K^* = 0$, $L^* = \frac{q}{b}$, $\mu_1 = \frac{w}{b}$, $\mu_2 = r - a\frac{w}{b}$. Como en el caso anterior, para que esta combinación sea solución se necesita que $r - a\frac{w}{b} > 0$; esto equivale a que la pendiente de la curva de indiferencia del costo (isocosto) es menor a la pendiente de la restricción $aK + bL = q$ (isocuanta). En este caso,

$$C^* = C^*(r, w, q) = q\frac{w}{b}$$

- Si $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 > 0$; $K = L = 0$, que no satisface la condición $aK + bL = q$.

En resumen las demandas condicionadas del productor son:

$$K^* = K^*(r, w, q) = \begin{cases} \in [0, \frac{q}{a}], & \text{si } \frac{r}{a} = \frac{w}{b} \\ \frac{q}{a}, & \text{si } \frac{w}{b} > \frac{r}{a} \\ 0, & \text{si } \frac{w}{b} < \frac{r}{a} \end{cases}$$

$$L^* = L^*(r, w, q) = \begin{cases} \frac{q - aK^*}{b}, & \text{si } \frac{r}{a} = \frac{w}{b} \\ 0, & \text{si } \frac{w}{b} > \frac{r}{a} \\ \frac{q}{b}, & \text{si } \frac{w}{b} < \frac{r}{a} \end{cases}$$

y los valores para el costo óptimo se resumen en

$$\begin{aligned} C^* = C^*(r, w, q) = rK^* + wL^* &= \begin{cases} q\frac{w}{b}, & \text{si } \frac{r}{a} = \frac{w}{b} \\ q\frac{r}{a}, & \text{si } \frac{w}{b} > \frac{r}{a} \\ q\frac{w}{b}, & \text{si } \frac{w}{b} < \frac{r}{a} \end{cases} \\ &= q \text{ mín}\left\{\frac{r}{a}, \frac{w}{b}\right\}. \end{aligned}$$

Que es una función de tipo Leontieff en los precios de los insumos.

4. Para solucionar el problema de minimizar el gasto al consumir dos bienes x y y a precios p_x y p_y respectivamente, cuando se quiere alcanzar una utilidad u y la función es $U(x, y) = \text{máx}\{ax, by\}$, se debe solucionar el problema:

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \quad \text{sujeto a } \text{máx}\{ax, by\} = u, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Este problema se replantea en la forma:

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \quad \text{sujeto a } ax \leq u, \quad by \leq u, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

su lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = -p_x x - p_y y + \mu_1(u - ax) + \mu_2(u - by) + \mu_3 x + \mu_4 y.$$

Las condiciones de primer orden son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} -p_x - a\mu_1 + \mu_3 = 0 \\ -p_y - b\mu_2 + \mu_4 = 0 \\ \mu_1(u - ax) = 0, \ \ \mu_1 \geq 0, \ \ u - ax \geq 0 \\ \mu_2(u - by) = 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad u - by \geq 0 \\ \mu_3 x = 0, \quad \mu_3 \geq 0, \quad x \geq 0 \\ \mu_4 y = 0, \quad \mu_4 \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

En este sistema μ_3 y μ_4 son distintos de cero ya que si alguno es cero $-p_x - a\mu_1 = 0$ ó $-p_y - b\mu_2 = 0$, que es imposible porque los precios, los coeficientes a y b y los multiplicadores son no negativos. De las últimas condiciones, $x = y = 0$, que no es una solución factible cuando $u > 0$ por lo tanto el teorema de Karush-Kuhn-Tucker no produce solución en este caso.

5. Para encontrar los costos asociados a la función de producción

$$Q(K, L, T) = AK^{\alpha} \left(\text{mín}\{aL, bT\}\right)^{\beta}$$

se debe solucionar el problema

$$\text{Minimizar } rK + wL + sT \quad \text{sujeto a } AK^{\alpha} \left(\text{mín}\{aL, bT\}\right)^{\beta} = q.$$

Para aplicar el teorema la restricción del problema se transforma sucesivamente en

$$\left(\text{mín}\{aL, bT\}\right)^{\beta} = \frac{q}{AK^{\alpha}}$$

al elevar a potencia $\frac{1}{\beta}$,

$$\text{mín}\{aL, bT\} = \left(\frac{q}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

esta equivale al par de desigualdades

$$aL \geq \left(\frac{q}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad \text{y} \qquad bT \geq \left(\frac{q}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

elevando a potencia β

$$(aL)^\beta \geq \frac{q}{AK^\alpha} \qquad \text{y} \qquad (bT)^\beta \geq \frac{q}{AK^\alpha}$$

y transponiendo

$$AK^\alpha (aL)^\beta \geq q \qquad \text{y} \qquad AK^\alpha (bT)^\beta \geq q.$$

Por lo que el problema a resolver es

$$\begin{aligned} -\text{Maximizar } & -rK - wL - sT \\ \text{sujeto a } & AK^\alpha (aL)^\beta \geq q, \quad AK^\alpha (bT)^\beta \geq q \end{aligned}$$

su lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(K, L, T, \mu_1, \mu_2) = {} & -rK - wL - sT + \mu_1 \left(AK^\alpha (aL)^\beta - q \right) \\ & + \mu_2 \left(AK^\alpha (bT)^\beta - q \right). \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias son

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= -r + \mu_1 \alpha A K^{\alpha-1} (aL)^\beta + \mu_2 \alpha A K^{\alpha-1} (bT)^\beta = 0 \\ \mathcal{L}_L &= -w + \mu_1 a \beta A K^\alpha (aL)^{\beta-1} = 0 \\ \mathcal{L}_Y &= -s + \mu_2 b \beta A K^\alpha (bT)^{\beta-1} = 0 \end{aligned}$$

y las condiciones de holgura complementaria son

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(AK^\alpha (aL)^\beta - q \right) &= 0 \\ \mu_2 \left(AK^\alpha (bT)^\beta - q \right) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que los multiplicadores no pueden ser nulos ya que los precios de los factores de producción son exógenos, el sistema a resolver es

$$\begin{cases} -r + \mu_1 \alpha A K^{\alpha-1} (aL)^\beta + \mu_2 \alpha A K^{\alpha-1} (bT)^\beta = 0 \\ -w + \mu_1 a \beta A K^\alpha (aL)^{\beta-1} = 0 \\ -s + \mu_2 b \beta A K^\alpha (bT)^{\beta-1} = 0 \\ AK^\alpha (aL)^\beta - q = 0 \\ AK^\alpha (bT)^\beta - q = 0 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} \mu_1 \alpha AK^{\alpha-1}(aL)^\beta + \mu_2 \alpha AK^{\alpha-1}(bT)^\beta = r \\ \mu_1 a\beta AK^\alpha (aL)^{\beta-1} = w \\ \mu_2 b\beta AK^\alpha (bT)^{\beta-1} = s \\ AK^\alpha (aL)^\beta = q \\ AK^\alpha (bT)^\beta = q. \end{cases}$$

El cociente de las dos últimas ecuaciones da

$$\frac{(aL)^\beta}{(bT)^\beta} = 1$$

de donde $aL = bT$. El cociente de la segunda y tercera da

$$\frac{\mu_1 a(aL)^{\beta-1}}{\mu_2 b(bT)^{\beta-1}} = \frac{w}{s}$$

usando la relación anterior

$$\left(\frac{aL}{bT}\right)^{\beta-1} = 1 = \frac{\mu_2 bw}{\mu_1 as}$$

o $\mu_1 as = \mu_2 bw$. Despejando en la última ecuación

$$(bT)^\beta = (aL)^\beta = \frac{q}{AK^\alpha}$$

que equivale a

$$bT = aL = \left(\frac{q}{AK^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

En la tercera

$$\mu_2 = \frac{s}{b\beta AK^\alpha (bT)^{\beta-1}} = \frac{s}{b\beta AK^\alpha}\left(\frac{AK^\alpha}{q}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} = \frac{s}{b\beta \left(AK^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}} q^{\frac{\beta-1}{\beta}}}$$

y de forma análoga, usando la segunda ecuaión,

$$\mu_1 = \frac{w}{a\beta \left(AK^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}} q^{\frac{\beta-1}{\beta}}}.$$

Al reemplaza lo anterior en la primera ecuación

$$
\begin{aligned}
r &= \mu_1 \alpha A K^{\alpha-1}(aL)^{\beta} + \mu_2 \alpha A K^{\alpha-1}(bT)^{\beta} \\
&= (\mu_1 + \mu_2)\, \alpha A K^{\alpha-1}(aL)^{\beta} \\
&= \left(\frac{w}{a\beta \left(AK^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} q^{\frac{\beta-1}{\beta}}} + \frac{s}{b\beta \left(AK^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} q^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \right) \alpha A K^{\alpha-1} \frac{q}{AK^{\alpha}} \\
&= \left(\frac{w}{a} + \frac{s}{b} \right) \frac{\alpha A K^{\alpha-1}}{\beta \left(AK^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} q^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \frac{q}{AK^{\alpha}} = \left(\frac{w}{a} + \frac{s}{b} \right) \frac{\alpha q^{\frac{1}{\beta}}}{\beta A^{\frac{1}{\beta}} K^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}}
\end{aligned}
$$

de donde

$$
K^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = \left(\frac{w}{a} + \frac{s}{b} \right) \frac{\alpha}{r\beta} \left(\frac{q}{A} \right)^{\frac{1}{\beta}}
$$

despejando K

$$
K^{*} = \left[\left(\frac{w}{a} + \frac{s}{b} \right) \frac{\alpha}{r\beta} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{q}{A} \right)^{\alpha+\beta}.
$$

Puesto que L, T, μ_1 y μ_2 están en función de K basta reemplazar en la ecuación correspondiente para encontrar sus valores.

La función de costo es

$$
\begin{aligned}
C^* &= C*(r,w,s,q) = rK^* + wL^* + sT^* \\
&= rK^* + w\frac{1}{a}\left(\frac{q}{A(K^*)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} + s\frac{1}{b}\left(\frac{q}{A(K^*)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= (K^*)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\left[r(K^*)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} + \frac{w}{a}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \frac{s}{b}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right] \\
&= (K^*)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\left[r\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right)\frac{\alpha}{r\beta}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \frac{w}{a}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \frac{s}{b}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right] \\
&= \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}}(K^*)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\left[\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right)\frac{\alpha}{\beta} + \frac{w}{a} + \frac{s}{b}\right] \\
&= \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}}(K^*)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right) \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left\{\left[\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right)\frac{\alpha}{r\beta}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{q}{A}\right)^{\alpha+\beta}\right\}^{-\frac{\alpha}{\beta}}\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right) \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1-\alpha(\alpha+\beta)}{\beta}}\left(\frac{r\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right)^{1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1-\alpha(\alpha+\beta)}{\beta}} r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w}{a}+\frac{s}{b}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.
\end{aligned}
$$

De los ejemplos 2 y 3 anteriores se nota nuevamente la dualidad que existe entre las funciones de producción (restricciones) y el costo (objetivo) óptimo: a una función de producción lineal en las cantidades de insumos le corresponde una función de costo óptimo Leontieff en los precios de los insumos, y a una función de producción tipo Leontieff en las cantidades de insumos le corresponde una función de costo óptimo lineal en los precios de los insumos.

El último ejemplo ilustra la dualidad en un caso mas general. En él la función de producción es una Cobb-Douglas compuesta una Leontieff, en cantidades, el costo asociado es una función tipo Cobb-Douglas compuesta una lineal, en los precios correspondientes .

Ejercicios

1. Encontrar los extremos de las funciones sujeto a las restricciones dadas:

a) Máximo de $-x^2 - y^2 + 2xy + 10$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 9$, $x + y \leq 1$.

b) Máximo de $x + y$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 4$, $y^2 \geq x$.

c) Máximo de $-x^2 - 3y^2 + 3xy + x + y$ sujeto a $2x + y \leq 2$, $-x + y + 1 \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

d) Mínimo de $x^2 - y$ sujeto a $(y - x^2 - 10)^3 \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

e) Mínimo de $x + y + z$ sujeto a $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

f) Mínimo de $x + z$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \geq 2x + y + 3z \geq 2$.

g) Óptimos de $x^2 + 2y^2$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 1$, $2y \leq 1 + x$, $x + 2y \leq 1$.

h) Óptimos de $xy + z$ sujeto a $7x + 2y \geq 14$, $2x + 7y \geq 14$, $x + y + z \leq 12$.

i) Óptimos de $xy + x + y$ sujeto a $2x + 3y \leq 12$, $3x + 2y \geq 6$ y $x - y \leq 6$.

j) Óptimos de $x^2 + y^2$ sujeto a $xy \leq 1$, $x + y \leq 4$.

k) Óptimos de xy^2 sujeto a $x^2 + y^2 + w^2 \leq 16$, $y^2 + 4z^2 + 9w^2 \leq 36$.

l) Óptimos de xy sujeto a $y \leq 4 - x^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

2. Resolver los problemas del ejercicio anterior usando la herramienta Solver de Excel, y comparar con las soluciones encontradas manualmente.

3. Minimizar el costo de producir q unidades usando como insumos capital K, trabajo L y tecnología T mediante la función de producción

$$Q(K, L, T) = \text{mín}\{aK, AL^{\alpha}T^{\beta}\},$$

es decir, solucionar el problema

$$\text{Minimizar } C(K, L, T) = rK + wL + sT \text{ sujeta a } \text{mín}\{aK, AL^{\alpha}T^{\beta}\} = q.$$

4. Minimizar el costo de producir q unidades usando como insumos capital K, trabajo L y tecnología T mediante la función de producción

$$Q(K, L, T) = \text{mín}\left\{aK, (aL^{\rho} + bT^{\rho})^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\},$$

es decir, solucionar el problema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } C(K, L, T) = rK + wL + sT \\ &\text{sujeta a } \text{mín}\left\{aK, (aL^{\rho} + bT^{\rho})^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\} = q. \end{aligned}$$

5. Combinar los teoremas de Lagrange y Karush-Kuhn-Tucker para solucionar los problemas:

   a) Mínimo de $x - y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $2x - 3y + 4z = 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

   b) Mínimo de $x - y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $2x - 3y + 4z \leq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

6. Encontrar las cantidades q_1 y q_2 que deben ser producidas por una empresa en dos períodos para maximizar el beneficio, si los costos variables unitarios asociados son c_1 y c_2 respectivamente, el costo de capacidad instalada es C por unidad de producto, es decir, si se quiere producir q unidades el costo de instalación de la planta es Cq y los ingresos son $\ln(q_1 q_2)$.

6.3. Relación entre las funciones del consumidor

En teoría del consumidor existe una relación importante entre las funciones de demanda marshallianas y hicksianas y entre las funciones de gasto y utilidad indirecta; estas relaciones se encuentran al solucionar uno de los siguientes problemas:

$$\text{Maximizar } U(x,y) \text{ sujeto a } p_x x + p_y y = m \tag{6.1}$$

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \text{ sujeto a } U(x,y) = u \tag{6.2}$$

y usar el valor de la solución como restricción del otro y observar que los valores obtenidos como solución deben coincidir (figura 6.4). Al solucionar (6.1) se encuentran las funciones de demanda marshallianas y la función de utilidad indirecta, esto es, los valores de las variables que solucionan el problema son: $x^M(p_x, p_y, m)$ y $y^M(p_x, p_y, m)$ y el valor óptimo es $V(p_x, p_y, m)$; si el último valor se usa en la restricción de (6.2), éste se transforma en

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \text{ sujeto a } U(x,y) = V(p_x, p_y, m).$$

Los valores de las variables de la solución son:

$$x^h(p_x, p_y, V(p_x, p_y, m)) \quad \text{y} \quad y^h(p_x, p_y, V(p_x, p_y, m)),$$

y el valor óptimo es

$$e(p_x, p_y, V(p_x, p_y, m)).$$

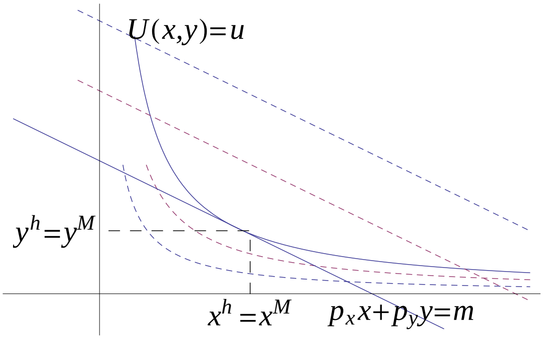


Figura 6.4: Si la solución de uno de los problemas (6.1) y (6.2) se toma como restricción del otro, las soluciones coinciden.

Puesto que las soluciones por ambos caminos deben ser las mismas, se deben cumplir las siguientes igualdades:

$$x^h\left(p_x, p_y, V\left(p_x, p_y, m\right)\right) = x^M\left(p_x, p_y, m\right),$$

$$y^h\left(p_x, p_y, V\left(p_x, p_y, m\right)\right) = y^M\left(p_x, p_y, m\right),$$

$$e\left(p_x, p_y, V\left(p_x, p_y, m\right)\right) = m.$$

De la misma forma, si se soluciona (6.2) los valores de las variables son: $x^h\left(p_x, p_y, u\right)$ y $y^h\left(p_x, p_y, u\right)$ y el valor óptimo es la función de gasto $e\left(p_x, p_y, u\right)$. Usando este valor en la restricción de (6.1), éste se transforma en

$$\text{Maximizar } U(x, y) \text{ sujeto a } p_x x + p_y y = e\left(p_x, p_y, u\right),$$

el valor de las variables en la solución son:

$$x^M\left(p_x, p_y, e\left(p_x, p_y, u\right)\right) \quad \text{y} \quad y^M\left(p_x, p_y, e\left(p_x, p_y, u\right)\right),$$

y el valor objetivo óptimo es

$$V\left(p_x, p_y, e\left(p_x, p_y, u\right)\right).$$

Nuevamente las soluciones deben ser iguales, por lo tanto,

$$x^M\left(p_x, p_y, e\left(p_x, p_y, u\right)\right) = x^h\left(p_x, p_y, u\right),$$

$$y^M\left(p_x, p_y, e\left(p_x, p_y, u\right)\right) = y^h\left(p_x, p_y, u\right),$$
$$V\left(p_x, p_y, e\left(p_x, p_y, u\right)\right) = u.$$

Estas igualdades permiten conocer el gasto a partir de la utilidad indirecta y las demandas hicksianas a partir de las demandas marshallianas o, en forma recíproca, conocer la demanda indirecta a partir del gasto y las demandas marshallianas a partir de las hicksianas. La interrelación entre todas estas funciones, así como las encontradas en la teoría del productor, son parte del tema de la siguiente sección.

6.4. Teorema de la envolvente

El resultado más importante del análisis de sensibilidad es el teorema de la envolvente, que determina cómo encontrar los cambios del valor óptimo de una función cuando alguno de los parámetros involucrados en el problema varían. En el caso de un problema con restricciones de igualdad, el cual se soluciona con la ayuda de la función lagrangiana, el teorema garantiza que este cambio es igual a la derivada de la lagrangiana con respecto a ese parámetro.

Al solucionar un problema de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Máximo de } & f(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_m) \\ \text{sujeto a } & g(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_m) = 0, \end{aligned}$$

donde las x son variables y las a son parámetros, la solución determina los valores óptimos de cada variable como una función de las a,

$$x_k^* = x_{ik}^*(a_1, a_2, ..., a_m) \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Al reemplazar estos valores en la función objetivo se encuentra el valor óptimo de la función,

$$f^* = f^*(\mathbf{a}) = f(x_1^*(a_1, a_2, ..., a_m), x_2^*(a_1, a_2, ..., a_m), ..., x_n^*(a_1, a_2, ..., a_m)).$$

Si se quiere evaluar el cambio de este valor óptimo debido al cambio de uno de los a, se debería solucionar otro problema del mismo tipo; sin embargo, el teorema de la envolvente garantiza que esto no es necesario y asegura que basta derivar parcialmente el lagrangiano con respecto al parámetro que cambia sin considerar que las variables en el óptimo son funciones implícitas de los parámetros.

Teorema 6.5. ***(Envolvente)*** *Sea*

$$f^*(\boldsymbol{a}) = f(x_1^*(\boldsymbol{a}), x_2^*(\boldsymbol{a}), ..., x_n^*(\boldsymbol{a}); a_1, a_2, ..., a_m)$$

el valor de la función objetivo para el problema

$$\begin{aligned} \textit{Máximo de } f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) &= f(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_m) \\ \textit{sujeta a } g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) &= g(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_m) = 0, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{a}$ *es un vector de parámetros y* $\boldsymbol{x}$ *es el vector de variables de decisión, entonces*

$$\frac{\partial f^*}{\partial a_k} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_k}\right|_{(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*; a_1, a_2, ..., a_m)}.$$

Demostración. La prueba requiere la regla de la cadena y las condiciones de primer orden. Si el vector $\mathbf{x}^*(\mathbf{a}) = (x_1^*(\mathbf{a}), x_2^*(\mathbf{a}), ..., x_n^*(\mathbf{a}))$ soluciona el problema,

$$\text{Máximo de } f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \text{ sujeto a } g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$$

en particular satisface la restricción

$$g(x^*(\mathbf{a}), \mathbf{a}) = 0,$$

derivando parcialmente esta igualdad con respecto a a_k,

$$\sum_{i=1}^{n} g_{x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial a_k} + g_{a_k} = 0 \tag{6.3}$$

Por otra parte, usando la regla de la cadena para derivar la ecuación

$$f^*(\mathbf{a}) = f(x_1^*(\mathbf{a}), x_2^*(\mathbf{a}), ..., x_n^*(\mathbf{a}))$$

con respecto a a_k,

$$\frac{\partial f^*}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial a_k} + f_{a_k} \tag{6.4}$$

multiplicando (6.3) por λ y sumando a (6.4) se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial a_k} &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial a_k} + f_{a_k} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} g_{x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial a_k} + g_{a_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_{x_i} + \lambda g_{x_i}) \frac{\partial x_i^*}{\partial a_k} + f_{a_k} + \lambda g_{a_k} \end{aligned}$$

Puesto que el punto óptimo satisface las condiciones de primer orden,

$$f_{x_i} + \lambda g_{x_i} = 0$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$.

$$\frac{\partial f^*}{\partial a_k} = f_{a_k} + \lambda g_{a_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_k}.$$

$\square$

El teorema anterior tiene una amplia gama de aplicaciones económicas en la teoría del productor y el consumidor.

Ejemplos

1. Minimizar los costos de un productor sujetos a su restricción de producción,

$$\text{Mínimo de } C(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ sujeto a } Q(\mathbf{x}) = q.$$

La solución a este problema da las cantidades óptimas de factores que el productor debe usar como funciones de los precios de los insumos y la cantidad a producir (funciones de demanda condicionada de factores),

$$x_k^* = x_k^*(\mathbf{p}, q) = x_k^*(p_1, p_2, ..., p_n, q) \text{ para } k = 1, 2, ..., n,$$

y el costo mínimo,

$$C^* = C^*(\mathbf{p}, q) = C(x_1^*(\mathbf{p}, q), x_2^*(\mathbf{p}, q), ..., x_n^*(\mathbf{p}, q)).$$

El teorema de la envolvente aplicado al lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda(q - Q(\mathbf{x}))$$

al derivar con respecto al precio del i-ésimo insumo,

$$\frac{\partial C^*(\mathbf{p}, q)}{\partial p_i} = x_i^*(\mathbf{p}, q)$$

conocido como el **lema de Shephard**. Y al derivar con respecto a la cantidad,

$$\frac{\partial C^*(\mathbf{p},q)}{\partial q}=\lambda^*(\mathbf{p},q)$$

Reemplazando estas expresiones en C^*,

$$C^*(\mathbf{p},q)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^*(\mathbf{p},q)=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial C^*(\mathbf{p},q)}{\partial p_i}$$

esto es, según el teorema de Euler, C^* es homogénea de grado uno en los precios de los insumos. El lema de Shephard muestra que la función de costos es creciente con respecto a todas sus variables y con las propiedades de homogeneidad del costo que las funciones de demandas condicionadas son homogéneas de grado cero en los precios de los insumos.

A partir de la definición es fácil probar que la función de costos es cóncava en precios: para el caso de dos insumos sean K_1^*, L_1^* las demandas condicionadas correspondientes a los niveles de precios r_1, w_1; K_2^*, L_2^* a los niveles de precios r_2, w_2 y K_3^*, L_3^* a los niveles de precios $\lambda r_1+(1-\lambda)r_2$, $\lambda w_1+(1-\lambda)w_2$. Esto significa que para cualquier combinación factible K y L,

$$\begin{aligned}C^*(r_1,w_1,q)&=r_1K_1^*+w_1L_1^*\le r_1K+w_1L,\\ C^*(r_2,w_2,q)&=r_2K_2^*+w_2L_2^*\le r_2K+w_2L.\end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned}C^*(r_1,w_1,q)&\le r_1K_3^*+w_1L_3^*,\\ C^*(r_2,w_2,q)&\le r_2K_3^*+w_2L_3^*,\end{aligned}$$

multiplicando la primera de estas desigualdades por λ, la segunda por $(1-\lambda)$ y sumando

$$\begin{aligned}&\lambda C^*(r_1,w_1,q)+(1-\lambda)C^*(r_2,w_2,q)\\ &\qquad\le[(\lambda r_1+(1-\lambda)r_2]K_3^*+[\lambda w_1+(1-\lambda)w_2]L_3^*\\ &\qquad=C^*(\lambda r_1+(1-\lambda)r_2,\lambda w_1+(1-\lambda)w_2,q).\end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que el óptimo satisface las condiciones de primer orden,

$$p_i=\lambda^*\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\mathbf{p},q)\ \text{para}\ i=1,2,\ldots,n$$

multiplicando la ecuación anterior por x_i^*

$$x_i^* p_i = \lambda^* x_i^* \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\mathbf{p}, q) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

sumando entre 1 y n,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i = \lambda^* \sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\mathbf{p}, q)$$

Si la función Q tiene rendimientos constantes, por el teorema de Euler, la ecuación anterior se convierte en

$$C^*(\mathbf{p}, q) = \lambda^*(\mathbf{p}, q) \cdot q$$

en este caso se tiene que

$$\frac{C^*(\mathbf{p}, q)}{q} = \lambda^*(\mathbf{p}, q)$$

esto es, el costo marginal y el costo promedio son iguales a λ^*, por lo tanto λ^* es constante y el costo C^* es lineal en q. En resumen, si la función de producción tiene rendimientos constantes a escala, el multiplicador de Lagrange es constante y C^* es lineal en q.

Puesto que los problemas de minimización del costo para el productor y del gasto para el consumidor son idénticos, todas las deducciones sobre el comportamiento del costo y las funciones de demanda condicionada de factores tienen su equivalente en el gasto y las demandas hicksianas.

2. Para maximizar el beneficio del productor

$$\Pi(\mathbf{x}) = PQ(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{6.5}$$

donde P es el precio del producto, Q la función de producción y p_k es el costo del k-ésimo insumo de producción existen dos caminos: uno es el expuesto en el capítulo anterior, el otro consiste en usar la función de costos y solucionar el problema

$$\text{Máximo de } \Pi(q) = Pq - C^*(\mathbf{p}, q). \tag{6.6}$$

La solución del primero (6.5) proporciona las cantidades de insumos que el productor debe usar (funciones de demanda de factores),

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_k(P, \mathbf{p}) = \widehat{x}_k(P, p_1, p_2, ..., p_n) \text{ para } k = 1, 2, ..., n,$$

y la cantidad que debe ofrecer (función de oferta del productor),

$$Q^*(P, \mathbf{p}) = Q(\widehat{x}_1(P, \mathbf{p}), \widehat{x}_2(P, \mathbf{p}), ..., \widehat{x}_n(P, \mathbf{p}))$$

en función del precio de venta y los costos de los insumos. La solucón del segundo (6.6) genera las cantidades ofrecidas $q = Q^*(P, \mathbf{p})$.

Aplicando el teorema de la envolvente al lagrangiano del problema (6.5), que para este caso coincide con la función objetivo, se tiene el **lema de Hotelling**,

$$\frac{\partial \Pi^*(P, \mathbf{p})}{\partial P} = Q^*(P, \mathbf{p}), \quad \frac{\partial \Pi^*(P, \mathbf{p})}{\partial p_i} = -\widehat{x}_i(P, \mathbf{p}).$$

En consecuencia la función de beneficio es creciente en el precio de venta y decreciente en los precios de los insumos. Reemplazando en Π^*,

$$\Pi^*(P, \mathbf{p}) = P\frac{\partial \Pi^*(P, \mathbf{p})}{\partial P} + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \Pi^*(P, \mathbf{p})}{\partial p_i}$$

esto, según el teorema de Euler, muestra que Π^* es homogénea de grado uno en todas sus variables, $(P, \mathbf{p})$ y que las funciones de demanda de factores y de oferta son homogéneas de grado cero. Para determinar las funciones de demanda de factores en el problema (6.6) se calcula la función de beneficio y se usa el lema de Hotelling.

Sean $\widehat{K}_1$, $\widehat{L}_1$ las demandas de factores correspondientes a la combinación de precios P_1, r_1, w_1; $\widehat{K}_2$, $\widehat{L}_2$ las correspondientes a P_2, r_2, w_2 y $\widehat{K}_3$, $\widehat{L}_3$ correspondientes a $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$, $\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2$, $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2$. Esto significa que

$$\begin{aligned}
\Pi^*(P_1, r_1, w_1) &= P_1 Q\left(\widehat{K}_1, \widehat{L}_1\right) - \left(r_1\widehat{K}_1 + w_1\widehat{L}_1\right) \\
&\geq P_1 Q(K, L) - (r_1 K + w_1 L), \\
\Pi^*(P_2, r_2, w_2) &= P_2 Q\left(\widehat{K}_2, \widehat{L}_2\right) - \left(r_2\widehat{K}_2 + w_2\widehat{L}_2\right) \\
&\geq P_2 Q(K, L) - (r_2 K + w_2 L).
\end{aligned}$$

para cualquier K y L. En particular

$$\Pi^*(P_1, r_1, w_1) \geq P_1 Q\left(\widehat{K}_3, \widehat{L}_3\right) - \left(r_1\widehat{K}_3 + w_1\widehat{L}_3\right),$$
$$\Pi^*(P_2, r_2, w_2) \geq P_2 Q\left(\widehat{K}_3, \widehat{L}_3\right) - \left(r_2\widehat{K}_3 + w_2\widehat{L}_3\right),$$

multiplicando la primera de estas desigualdades por λ, la segunda por $(1-\lambda)$ y sumando

$$\begin{aligned}
&\lambda\Pi^*(P_1, r_1, w_1) + (1-\lambda)\Pi^*(P_2, r_2, w_2)\\
&\geq [\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2]\, Q\left(\widehat{K}_3, \widehat{L}_3\right)\\
&- \left[(\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)\widehat{K}_3 + (\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2)\widehat{L}_3\right],\\
&= \Pi^*\left(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2, \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2, \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2\right).
\end{aligned}$$

Lo que prueba que la función de beneficio es convexa en precios.

3. Maximizar la utilidad del consumidor sujeto a una restricción presupuestal,

$$\text{Maximizar } U(\mathbf{x}) \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m$$

donde p_k es el precio del k-ésimo bien de consumo x_k y m es la cantidad de dinero disponible. La solución da las cantidades de bienes óptimas de consumo como funciones de los precios y la cantidad de dinero disponible (funciones de demanda marshallianas),

$$x_k^M = x_k^M(\mathbf{p}, m) = x_k^M(p_1, p_2, ..., p_n, m) \text{ para } k = 1, 2, ..., n,$$

y la utilidad máxima (función de utilidad indirecta),

$$V = V(\mathbf{p}, m) = U(x_1^M(\mathbf{p}, m), x_2^M(\mathbf{p}, m), ..., x_n^M(\mathbf{p}, m)).$$

El teorema de la envolvente aplicado al lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = U(\mathbf{x}) + \lambda\left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right),$$

al derivar con respecto a los precios de los bienes de consumo, produce:

$$\frac{\partial V}{\partial p_k} = -\lambda x_k^M$$

y al derivar con respecto al ingreso disponible

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda.$$

De estas ecuaciones se concluye que la función de utilidad indirecta es creciente en el ingreso y decreciente en los precios de los bienes de consumo.

Si se hace el cociente de las igualdades anteriores se llega a la **identidad de Roy**,

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial p_k}(\mathbf{p}, m)}{\frac{\partial V}{\partial m}(\mathbf{p}, m)} = -x_k^M(\mathbf{p}, m).$$

Al reemplazar las derivadas parciales de V para aplicar el teorema de Euler y usar la restricción del problema,

$$\frac{\partial V}{\partial m}m + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial V}{\partial p_k} = \lambda m - \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda x_i = \lambda \left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right) = 0 = 0 \cdot V$$

muestra que la función de utilidad indirecta es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, m)$, en consecuencia λ es homogénea de grado menos uno y las funciones de demanda marshallianas son homogéneas de grado cero. La función V es, además, cuasiconvexa en $\mathbf{p}$ y cóncava m: sean

$$A_1 = \{(x, y) \mid p_x^1 x + p_y^1 y \leq m\}, \qquad A_2 = \{(x, y) \mid p_x^2 x + p_y^2 y \leq m\},$$

y

$$A_3 = \{(x, y) \mid \left[\lambda p_x^1 + (1-\lambda)p_x^2\right] x + \left[\lambda p_y^1 + (1-\lambda)p_y^2\right] y \leq m\}.$$

$A_3 \subseteq A_1 \cup A_2$ ya que si (x, y) es elemento de A_3 pero no es elemento de A_1 ni de A_2, $p_x^1 x + p_y^1 y > m$ y $p_x^2 x + p_y^2 y > m$. Multiplicando la primera de estas desigualdades por λ, la segunda por $(1-\lambda)$ y sumando, $\left[\lambda p_x^1 + (1-\lambda)p_x^2\right] x + \left[\lambda p_y^1 + (1-\lambda)p_y^2\right] y > m$ en contra de $(x, y) \in A_3$.

Para probar que V es cuasiconvexa en (p_x, p_y) basta con probar que sus contornos inferiores son convexos, esto es,

$$CI_V(k) = \{(p_x, p_y) \mid V(p_x, p_y, m) \leq k\}$$

para cada $k \geq 0$ es convexo. Sean (p_x^1, p_y^1) y (p_x^2, p_y^2) en $CI_V(k)$, esto es, $V(p_x^1, p_y^1, m) \leq k$ y $V(p_x^2, p_y^2, m) \leq k$ estos son los valores máximos de la función $U(x,y)$ sobre los conjuntos A_1 y A_2 respectivamente. Como $A_3 \subseteq A_1 \cup A_2$,

$$V(\lambda p_x^1 + (1-\lambda)p_x^2, \lambda p_y^1 + (1-\lambda)p_y^2, m) \leq k.$$

Lo que prueba el resultado.

Para mostrar que la función es cóncava se usan los conjuntos

$$B_1 = \{(x,y) \mid p_x x + p_y y \leq m_1\}, \qquad B_2 = \{(x,y) \mid p_x x + p_y y \leq m_2\}$$

y

$$B_3 = \{(x,y) \mid p_x x + p_y y \leq \lambda m_1 + (1-\lambda)m_2\},$$

un proceso similar prueba que $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$ y que la función es cóncava en m.

4. Si la función de utilidad indirecta por el consumo de tres bienes a precios p_x, p_y y p_z con un ingreso m es

$$V(p_x, p_y, p_z, m) = \frac{m^\rho}{\left(a p_x^\alpha p_z^\beta + b p_y^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\rho}{\alpha+\beta}}}$$

con a, b, ρ y σ positivos. Usando las igualdades de la sección anterior,

$$u = V\left(p_x, p_y, p_z, e(p_x, p_y, p_z, u)\right) = \frac{e^\rho}{\left(a p_x^\alpha p_z^\beta + b p_y^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\rho}{\alpha+\beta}}},$$

despejando e,

$$e\left(p_x, p_y, p_z, u\right) = u^{1/\rho}\left(a p_x^\alpha p_z^\beta + b p_y^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Aplicando el lema de Shephard:

$$\begin{aligned}
e_{p_x} &= \frac{u^{1/\rho}}{\alpha+\beta}\left(a p_x^\alpha p_z^\beta + b p_y^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} a\alpha p_x^{\alpha-1} p_z^\beta = x^h, \\
e_{p_z} &= \frac{u^{1/\rho}}{\alpha+\beta}\left(a p_x^\alpha p_z^\beta + b p_y^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} a\beta p_x^{\alpha} p_z^{\beta-1} = z^h, \\
e_{p_y} &= \frac{u^{1/\rho}}{\alpha+\beta}\left(a p_x^\alpha p_z^\beta + b p_y^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} b(\alpha+\beta) p_y^{\alpha+\beta-1} = y^h.
\end{aligned}$$

Para encontrar la función de utilidad, en este sistema de ecuaciones se despeja u en términos de x^h, y^h y z^h sin que aparezca ningún precio. Haciendo el cociente entre x^h y z^h,

$$\frac{x^h}{z^h} = \frac{\alpha p_z}{\beta p_x} \text{ o } p_z = \frac{\beta x^h}{\alpha z^h} p_x.$$

En el cociente entre y^h y z^h se reemplaza esta última relación

$$\begin{aligned}\frac{y^h}{z^h} &= \frac{b(\alpha+\beta)p_y^{\alpha+\beta-1}}{a\beta p_x^{\alpha} p_z^{\beta-1}} = \frac{b(\alpha+\beta)p_y^{\alpha+\beta-1}}{a\beta p_x^{\alpha}\left[\frac{\beta x^h}{\alpha z^h}p_x\right]^{\beta-1}} \\ &= \frac{b(\alpha+\beta)p_y^{\alpha+\beta-1}\left(\alpha z^h\right)^{\beta-1}}{a\beta p_x^{\alpha+\beta-1}\left(\beta x^h\right)^{\beta-1}}\end{aligned}$$

y se despeja p_y

$$p_y = \left(\frac{a\beta\left(\beta x^h\right)^{\beta-1} y^h}{b(\alpha+\beta)\left(\alpha z^h\right)^{\beta-1} z^h}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} p_x$$

Reemplazando p_y y p_z en x^h, sin tomar en cuenta las h por simplicidad,

$$\begin{aligned}x = \frac{u^{1/\rho}}{\alpha+\beta}&\left\{a p_x^{\alpha}\left(\frac{\beta x}{\alpha z}p_x\right)^{\beta}\right. \\ &\left.+b\left[\left(\frac{a\beta\left(\beta x\right)^{\beta-1} y}{b(\alpha+\beta)\left(\alpha z\right)^{\beta-1} z}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} p_x\right]^{\alpha+\beta}\right\}^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} \\ &a\alpha p_x^{\alpha-1}\left(\frac{\beta x}{\alpha z}p_x\right)^{\beta} \\ = \frac{a\alpha u^{1/\rho}}{\alpha+\beta}&\left[a\left(\frac{\beta x}{\alpha z}\right)^{\beta} + b\left(\frac{a\beta\left(\beta x\right)^{\beta-1} y}{b(\alpha+\beta)\left(\alpha z\right)^{\beta-1} z}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \\ &\left(\frac{\beta x}{\alpha z}\right)^{\beta}\end{aligned}$$

Despejando u,

$$u = \left(\frac{\alpha+\beta}{a\alpha}x\right)^{\rho}\left[a\left(\frac{\beta x}{\alpha z}\right)^{\beta} + b\left(\frac{a\beta\,(\beta x)^{\beta-1}\,y}{b(\alpha+\beta)\,(\alpha z)^{\beta-1}\,z}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]^{\rho\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}}$$
$$\left(\frac{\alpha z}{\beta x}\right)^{\beta\rho}$$
$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta\rho}\left(\frac{\alpha+\beta}{a\alpha}\right)^{\rho}$$
$$\left[a\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta} x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} z^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} + b\left(\frac{a\beta^{\beta}}{b(\alpha+\beta)\alpha^{\beta-1}}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} y^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]^{\rho\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}}$$

Esta última expresión es la función de utilidad. Es de notar que como la función de gasto es una CES compuesta de una CD en precios, la función de utilidad tiene la misma forma en cantidades.

Para encontrar las funciones de demanda marshallianas existen dos caminos: usar las demandas hicksianas y las identidades de la sección anterior o usar la identidad de Roy.

5. Si el costo de producir q unidades cuando se usan insumos K, L y T a precios r, w y s respectivamente es

$$C^*(r,w,s,q) = qr^{\alpha}\left(w^{\rho}+s^{\rho}\right)^{\frac{1-\alpha}{\rho}}$$

y se quieren encontrar las funciones de: demanda de factores, demanda condicionadas, producción y beneficio.

Para las demandas condicionadas se usa el lema de Shephard:

$$\begin{aligned}
C_r^* &= q\alpha r^{\alpha-1}\left(w^{\rho}+s^{\rho}\right)^{\frac{1-\alpha}{\rho}} = K^*(r,w,s,q)\\
C_w^* &= \frac{(1-\alpha)qr^{\alpha}}{\rho}\left(w^{\rho}+s^{\rho}\right)^{\frac{1-\alpha-\rho}{\rho}}\rho w^{\rho-1}\\
&= (1-\alpha)qr^{\alpha}\left(w^{\rho}+s^{\rho}\right)^{\frac{1-\alpha-\rho}{\rho}} w^{\rho-1} = L^*(r,w,s,q)\\
C_s^* &= \frac{(1-\alpha)qr^{\alpha}}{\rho}\left(w^{\rho}+s^{\rho}\right)^{\frac{1-\alpha-\rho}{\rho}}\rho s^{\rho-1}\\
&= (1-\alpha)qr^{\alpha}\left(w^{\rho}+s^{\rho}\right)^{\frac{1-\alpha-\rho}{\rho}} s^{\rho-1} = T^*(r,w,s,q)
\end{aligned}$$

si en este sistema se despeja q, en términos de K, L y T, encontramos la función de producción. Haciendo el cociente entre L y T sin asteriscos,

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{w}{s}\right)^{\rho-1} \quad \text{o} \quad w = \left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} s,$$

y entre K y T

$$\frac{K}{T} = \frac{q\alpha r^{\alpha-1}\left(w^\rho + s^\rho\right)^{\frac{1-\alpha}{\rho}}}{(1-\alpha)qr^\alpha\left(w^\rho + s^\rho\right)^{\frac{1-\alpha-\rho}{\rho}} s^{\rho-1}} = \frac{\alpha\left(w^\rho + s^\rho\right)}{(1-\alpha)rs^{\rho-1}}$$

despejando r

$$r = \frac{\alpha\left(w^\rho + s^\rho\right)T}{(1-\alpha)s^{\rho-1}K} = \frac{\alpha\left[\left(\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} s\right)^\rho + s^\rho\right]T}{(1-\alpha)s^{\rho-1}K} = \frac{\alpha\left[\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]sT}{(1-\alpha)K}$$

reemplazando en K^*

$$\begin{aligned}
K &= q\alpha r^{\alpha-1}\left(w^\rho + s^\rho\right)^{\frac{1-\alpha}{\rho}} \\
&= q\alpha\left[\frac{\alpha\left(\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right)sT}{(1-\alpha)K}\right]^{\alpha-1}\left[\left(\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} s\right)^\rho + s^\rho\right]^{\frac{1-\alpha}{\rho}} \\
&= q\alpha\left[\frac{\alpha\left(\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right)T}{(1-\alpha)K}\right]^{\alpha-1}\left[\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1-\alpha}{\rho}} \\
&= q\alpha\left[\frac{\alpha T}{(1-\alpha)K}\right]^{\alpha-1}\left[\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1-\alpha}{\rho}+\alpha-1}
\end{aligned}$$

despejando q se encuentra la función de producción

$$
\begin{aligned}
q = Q(K, L, T) &= \frac{K}{\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)K}{\alpha T}\right]^{\alpha-1}\left[\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}+1\right]^{1-\alpha-\frac{1-\alpha}{\rho}} \\
&= \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}K^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}T^{\alpha-1}}\left[\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}+1\right]^{(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} \\
&= \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}K^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\left\{T^{\frac{\rho}{\rho-1}}\left[\left(\frac{L}{T}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}+1\right]\right\}^{(1-\alpha)\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)} \\
&= \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}}K^{\alpha}\left[L^{\frac{\rho}{\rho-1}}+T^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{(1-\alpha)(\rho-1)}{\rho}}
\end{aligned}
$$

A partir de esta se encuentra el beneficio y las demandas de factores.

Ejercicios

1. Solucionar el problema:

$$\text{Mínimo de } xy^2 \text{ sujeto a } x + 2y = 2.$$

A partir de la solución encontrada y con el uso de diferenciales y alguna forma adecuada del teorema de la envolvente, hallar una aproximación a la solución de cada uno de los siguientes problemas. Comparar esta aproximación con la solución de cada variación del problema; esta solución se puede encontrar usando el teorema de Lagrange, la herramienta Solver de Excel o cualquier otro programa que solucione problemas de optimización no lineal:

   a) Mínimo de xy^2 sujeto a $x + 2y = 3$.
   b) Mínimo de xy^2 sujeto a $x + y = 2$.
   c) Mínimo de $2xy^2$ sujeto a $x + 2y = 2$.
   d) Mínimo de xy^2 sujeto a $-x + 2y = 2$.

2. Hacer lo mismo que el ejercicio anterior, esto es, encontrar la solución de

$$\text{Óptimos de } x - y + z \text{ sujeto a } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad 2x - 3y + 4z = 1$$

y a partir de ésta aproximar las soluciones de:

a) Óptimos de $x + y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $2x - 3y + 4z = 1$.

b) Óptimos de $x + y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $2x - 3y + 2z = 1$.

c) Óptimos de $x+y+z$ sujeto a $x^2+y^2+2z^2 = 4$, $2x-3y+3z = -1$.

d) Óptimos de $x+y+2z$ sujeto a $x^2+y^2+2z^2 = 4$, $2x-2y+4z = 1$.

3. Sea
$$f^*(a,k) = \text{máx}\{f(x,y,a) \mid g(x,y) = k\}$$
donde x y y son variables y a y k son parámetros. Probar:

a) $f_a^* = f_a$.

b) $f_k^* = \lambda^*$.

c) $f_{xa}\frac{\partial x^*}{\partial k} + f_{ya}\frac{\partial y^*}{\partial k} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial a}$.

4. Si
$$f^*(a,b) = \text{máx}\{f(x,y) + h(x,a) \mid g(x,y,b) = 0\}.$$
Probar:

a) $f_a^* = h_a(x^*, a)$.

b) $f_b^* = \lambda^* g_b(x^*, y^*, b)$.

c) $h_{xa}\left(\frac{\partial x^*}{\partial b}\right) = \lambda^*\left[g_{xb}\left(\frac{\partial x^*}{\partial a}\right) + g_{yb}\left(\frac{\partial y^*}{\partial a}\right)\right] + g_b\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial a}\right)$.

5. Sea
$$f^*(k) = \text{máx}\{f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid g(x_1, x_2, ..., x_n) = k\}.$$
Probar que si f y g son funciones homogéneas del mismo grado, entonces $f^*(k)$ es lineal en k, es decir, $f^*(k) = ak$, donde a es una constante, y concluir que el multiplicador de Lagrange para el problema es constante.

6. Encontrar las funciones de demandas condicionadas y los costos óptimos, si la función de producción es:

a) $Q(K,L) = 2K + 3L$.

b) $Q(K,L) = 200K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{3}}$.

c) $Q(K,L) = \text{mín}\{2K, 3L\}$.

d) $Q(K,L,T) = AK^\alpha\left(aL^{-\rho} + bT^{-\rho}\right)^{-\beta/\rho}$.

e) $Q(K,L,T) = \text{mín}\{aK, AL^\alpha T^\beta\}$.

7. Encontrar las funciones de demandas hicksianas y de gasto, si la función de utilidad es
$$U(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}.$$
Ayuda: los contornos superiores de esta función no son convexos.

8. Encontrar las funciones de demandas hicksianas, marshallianas, de gasto y utilidad indirecta, si la función de utilidad es:

   a) $U(x,y) = \text{mín}\{ax + by, cx + dy\}$, con $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
   b) $U(x,y) = a\ln(x - x_0) + b\ln(y - y_0)$, con $x > x_0$ y $y > y_0$.
   c) $U(x,y) = (x-a)^\alpha (y-b)^\beta$ con $x > a$ y $y > b$.
   d) $U(x,y,z) = A\left(\text{mín}\{ax, by\}\right)^\alpha z^\beta$.
   e) $U(x,y,z) = Ax + (ay^\rho + bz^\rho)^{1/\rho}$.
   f) $U(x,y,z) = [(\text{mín}\{ax, by\})^\rho + bz^\rho]^{1/\rho}$.
   g) $U(x,y,z) = \left[Ax^\alpha y^\beta + bz^{\alpha+\beta}\right]^\rho$.

9. Encontrar las funciones de demanda de factores, demanda condicionada de factores, costo, oferta y producción, si la función de beneficio es:

   a) $\Pi^*(P,r,w) = \frac{P^2}{100\sqrt{rw}}$.
   b) $\Pi^*(P,r,w,s) = \frac{P^3(r+s)}{rws}$.
   c) $\Pi^*(P,r,w,s) = P^{1-\alpha}\left(r^\alpha + w^\beta s^{\alpha-\beta}\right)$.

   Donde P es el precio de venta y r, w y s son los precios de los insumos.

10. Encontrar las funciones de demanda condicionada y la producción asociadas con cada una de las siguientes funciones de costo:

    a) $C^*(r,w,q) = \sqrt{rwe^q}$.
    b) $C^*(r,w,q) = q\sqrt{r^2 + w^2}$.
    c) $C^*(r,w,q) = w\left(1 + q + \ln\left(\frac{r}{w}\right)\right)$.
    d) $C^*(r,w,q) = q(ar + bw)$.
    e) $C^*(r,w,q) = Aqr^\alpha w^{1-\alpha}$.
    f) $C^*(r,w,q) = q\left(ar^\rho + bw^\rho\right)^{1/\rho}$.

11. Determinar, si es posible, la función de producción asociada a
$$C^*(r,w,q) = q\,\text{máx}\{ar, bw\}.$$

12. Encontrar condiciones sobre los parámetros para que las siguientes sean funciones de gasto y determinar las funciones de demanda hicksianas, marshallianas, utilidad indirecta y utilidad asociadas con cada una:

    a) $e\left(p_x, p_y, u\right) = u\frac{Ap_x^\alpha p_y^\beta}{p_x^\gamma + p_y^\gamma}$.
    b) $e(p_x, p_y, u) = u \,\text{mín}\{ap_x, bp_y\}$.
    c) $e(p_x, p_y, p_z, u) = Aup_x^\alpha \left(ap_y^\rho + bp_z^\rho\right)^\beta$.
    d) $e(p_x, p_y, p_z, u) = u\left[ap_x + (bp_y^\rho + cp_z^\rho)^\sigma\right]$.
    e) $e(p_x, p_y, p_z, u) = u\left(ap_x^\alpha p_y^\beta + bp_z^\rho\right)^\sigma$.

13. Para cada una de las siguientes funciones de utilidad indirecta

    a) $V(p_x, p_y, m) = m\left(\frac{a}{p_x} + \frac{b}{p_y}\right)$.
    b) $V(p_x, p_y, m) = \sqrt{\frac{m(ap_x + bp_y)}{cp_xp_y}}$.
    c) $V(p_x, p_y, m) = \ln m - \frac{1}{r}\ln\left(p_x^r + p_y^r\right)$.
    d) $V(p_x, p_y, m) = \frac{m}{ap_x + b\sqrt{p_xp_y} + cp_y}$.

    Encontrar: $x^M(p_x, p_y, m)$, $e(p_x, p_y, u)$ y $U(x, y)$.

14. Sea
$$V(p_x, p_y, m) = \frac{bm + ap_x}{bp_y} + k.$$
    Encontrar, si existen:

    a) Las condiciones sobre los parámetros para que ésta sea una función de utilidad indirecta genuina.
    b) $x^M(p_x, p_y, m)$.
    c) $e(p_x, p_y, u)$.
    d) $U(x, y)$.

15. Usar el teorema de la envolvente para probar que la elasticidad de sustitución σ_{KL} para una función de produccień $Q(K.L)$ se puede expresar en términos de la función de costos en la forma,
$$\sigma_{KL} = \frac{C^*C^*_{rw}}{C^*_rC^*_w},$$
    donde, r y w son los precios de los insumos K y L respectivamente.

6.5. Ecuación de Slutsky

El análisis de la elección óptima del consumidor tiene en cuenta los precios de los bienes de consumo y la cantidad de dinero disponible para su adquisición; por esto las variaciones en alguno de los precios o del ingreso determinarán variaciones en las elecciones del consumidor.

Es natural pensar que ante el aumento en los precios de un bien, las cantidades consumidas se deben reducir; sin embargo, Slutsky encontró que esta visión es demasiado simplista y que el consumidor responde de una manera más compleja. La ecuación de Slutsky analiza la respuesta de los consumidores ante el cambio en el precio de alguno de los bienes consumidos. Esa ecuación es la herramienta para explicar cómo el consumidor debe tomar decisiones acerca de las variaciones en su ingreso y su consumo para compensar un cambio de precios y mantener una utilidad.

Por simplicidad y sin pérdida de generalidades supongamos que el consumidor elige las cantidades de dos bienes x e y y que dispone de un ingreso m. En el momento que el consumidor hace su elección debe resolver el problema(6.1). La solución de este problema proporciona las demandas marshallianas:

$$x^M = x^M(p_x, p_y, m), \quad y^M = y^M(p_x, p_y, m).$$

y la utilidad indirecta:

$$V = V(p_x, p_y, m) = U(x^M, y^M).$$

Si el precio del bien x cambia a p'_x y el consumidor no quiere (o no puede) cambiar su nivel de ingreso, deberá solucionar el problema:

$$\text{Maximizar } U(x, y) \text{ sujeto a } p'_x x + p_y y = m.$$

Esto le proporciona las nuevas funciones de demanda:

$$x^{M'} = x^{M'}(p_x^{'}, p_y, m), \quad y^{M'} = y^{M'}(p_x^{'}, p_y, m).$$

De esta forma no sólo cambian las funciones de demanda sino también su nivel de satisfacción a $V' = V(p_x^{'}, p_y, m)$. Estas nuevas cantidades pueden ser determinadas usando el teorema de la envolvente en la solución del problema (6.1). Usando diferenciales y el teorema de la envolvente, la variación de la utilidad está dada por

$$\begin{aligned}\Delta V = V' - V \approx \frac{\partial V}{\partial p_x}\Delta p_x = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}\right|_M \Delta p_x \\ = -\lambda^M(p_x, p_y, m)x^M(p_x, p_y, m)(p_x - p_x)\end{aligned}$$

Así la nueva demanda se obtiene al despejar $U^{M'}$ en la ecuación anterior:

$$V(p_x, p_y, m) = V(p_x, p_y, m) - \lambda^M(p_x, p_y, m)x^M(p_x, p_y, m)(p_x - p_x)$$

Para que no haya variaciones en la utilidad, el último producto debe ser cero. Puesto que hay cambio de precios, el último término es no nulo; el multiplicador y la demanda en general son distintos de cero; el multiplicador porque representa la variación de la utilidad ante cambios en la capacidad adquisitiva (ingreso) y la demanda porque no se está analizando un caso particular.

De la misma forma se determinan las variaciones en las cantidades demandadas. Usando diferenciales y el lema de Roy, la variación en las cantidades del bien x es

$$\Delta x^M = x^M - x^M \approx \frac{\partial x^M}{\partial p_x}\Delta p_x = -\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p_x}/\frac{\partial V}{\partial m}\right)}{\partial p_x}(p_x^{'} - p_x)$$

despejando

$$x^{M'}(p_x^{'}, p_y, m) = x^M(p_x, p_y, m) - \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p_x}/\frac{\partial V}{\partial m}\right)}{\partial p_x}(p_x^{'} - p_x)$$

Después de desarrollar las derivadas segundas de la función de utilidad,

$$x^{M'}(p_x^{'}, p_y, m) = x^M(p_x, p_y, I) - (p_x^{'} - p_x)\frac{\frac{\partial V}{\partial m}\frac{\partial^2 V}{\partial p_x^2} - \frac{\partial V}{\partial p_x}\frac{\partial^2 V}{\partial p_x \partial m}}{\frac{\partial V}{\partial m}}$$

de forma análoga se encuentra la demanda de $y^{M'}$.

En conclusión, si el consumidor no cambia su gasto, no sólo se verán afectadas sus demandas por cada uno de los bienes sino también la utilidad alcanzada.

Si el consumidor no quiere cambiar su nivel de utilidad, dada por la solución del problema (6.1) ante un cambio de precio del bien x, la restricción presupuestaria sufre un cambio de pendiente esto se ve reflejado en un giro sobre su intersección con respecto al eje y. La nueva curva presupuestaria no es tangente a la curva de indiferencia, por lo tanto, no determina un nuevo nivel de consumo óptimo y debe ajustarse el nivel de gasto (ingreso) para hacer que vuelva a ser tangente a la curva de indiferencia de la utilidad y de esta forma producir las nuevas demandas óptimas. Para esto necesita resolver el problema

$$\text{Minimizar } p_x' x + p_y y \text{ sujeto a } U(x, y) = V. \tag{6.7}$$

La solución de este problema proporciona las demandas $x^h = x^h(p_x, p_y, V)$, $y^h = y^h(p_x, p_y, V)$ y la cantidad de gasto (nuevo ingreso) necesario para conservar el viejo nivel de utilidad V.

El gasto necesario para conservar el nivel de utilidad es el resultado de reemplazar las cantidades demandadas en la función objetivo que da el nuevo valor del gasto

$$e = e(p_x, p_y, V) = p'_x x^h(p_x, p_y, V) + p_y y^h(p_x, p_y, V).$$

El cambio en el ingreso y los cambios en las cantidades demandadas se determinan a partir de las soluciones de los problemas (6.1) y (**??**), esto es, $e - I$, $x^{M'} - x^M$ e $y^{M'} - y^M$. Gráficamente, al cambiar el precio la curva presupuestal cambia su pendiente girando sobre el eje y puesto que se hizo una variación del precio del bien x; si no se altera el gasto, se debe mover la curva de utilidad hasta alcanzar la nueva curva presupuestaria como en la figura 6.5. Si se quiere conservar el nivel de utilidad se debe mover la curva presupuestaria (línea punteada) hasta alcanzar la vieja curva de indiferencia de la utilidad.

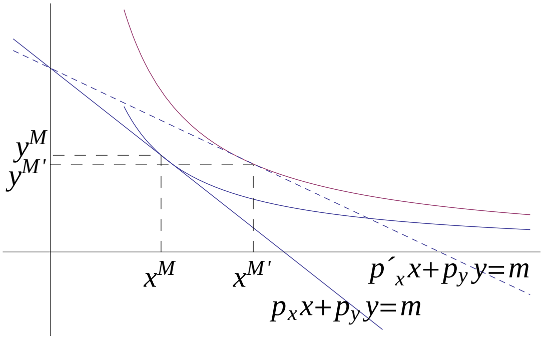


Figura 6.5: Si el precio del bien x cambia de p_x a p'_x, las cantidades demandadas cambian de x^M, y^M a $x^{M'}$, $y^{M'}$.

Las ecuaciones que relacionan los cambios producidos están dadas por la ecuación de Slutsky que se puede determinar a partir de la solución de los problemas (6.1) y el siguiente:

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \text{ sujeto a } U(x, y) = V. \tag{6.8}$$

Puesto que en la solución del problema (6.1) la curva presupuestal debe ser tangente a la curva de indiferencia de la utilidad (moviendo la curva de la utilidad), en el problema (6.8) se debe tener la misma condición (moviendo la curva de indiferencia presupuestal); los niveles de utilidad producidos por el problema (6.1) usado como restricción en el problema (6.8) son iguales; la solución de estos dos problemas determina las cantidades demandadas iguales relacionadas por las ecuaciones

$$x^h(p_x, p_y, V) = x^M(p_x, p_y, e(p_x, p_y, V))$$

$$y^h(p_x, p_y, V) = y^M(p_x, p_y, e(p_x, p_y, V))$$

derivando la primera de éstas con respecto al precio p_x se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^h}{\partial p_x} &= \frac{\partial x^M}{\partial p_x} + \frac{\partial x^M}{\partial p_y}\frac{\partial p_y}{\partial p_x} + \frac{\partial x^M}{\partial M}\frac{\partial e}{\partial p_x} \\ &= \frac{\partial x^M}{\partial p_x} + \frac{\partial x^M}{\partial M}\frac{\partial e}{\partial p_x} \qquad (*)\end{aligned}$$

Para determinar el comportamiento de $\frac{\partial e}{\partial p_x}$ se aplica el teorema de la envolvente a la solución del problema:

$$\text{Minimizar } p_x x + p_y y \text{ sujeto a } U(x, y) = u$$

esto produce

$$\frac{\partial e}{\partial p_x} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x}\right|_* = x^h = x^M$$

reemplazando en la ecuación (*) se encuentra la ecuación de Slutsky,

$$\frac{\partial x^h}{\partial p_x} = \frac{\partial x^M}{\partial p_x} + x^M \frac{\partial x^M}{\partial M}$$

Despejando,

$$\frac{\partial x^M}{\partial p_x} = \frac{\partial x^h}{\partial p_x} - x^M \frac{\partial x^M}{\partial M}$$

La ecuación se compone del efecto sustitución donde se mantiene un ingreso constante cambiando el precio de p_x y el efecto renta, en la cual el precio se mantiene constante variando la renta.

6.6. Algunas funciones y sus duales

El estudio de funciones de producción se ha limitado al estudio de funciones diferenciables, salvo la función de Leontieff. El tipo de función que se quiere, además de no presentar simetría en la ES, debe ser capaz de modelar los cambios tecnológicos producidos por la llegada de un nuevo tipo de insumo de producción.

El estudio de la conexión entre las funciones de costos y producción, dada por la teoría de dualidad, determina la tecnología a partir del comportamiento de los costos. Por este método a partir de la forma y propiedades del costo se derivan la forma y propiedades de la producción. Así, la incidencia de un insumo en la producción se deriva del efecto de su precio en el costo. Por otra parte, esta teoría permite calcular la ES mediante la aplicación del lema de Shephard ([U]) que la transforma en

$$\sigma_{ij} = \frac{C^* C^*_{ij}}{C^*_i C^*_j}$$

La conexión entre una función y su dual viene dada por la solución de un problema restringido de la forma

$$\text{Mínimo de } f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad \text{sujeto a} \quad h_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \quad g_k(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq \mathbf{0}.$$

donde $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, p$; $\mathbf{x}$ representa las variables y $\mathbf{a}$ los parámetros.

En el caso de costo y producción el problema es

$$\text{Mínimo de } C(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{sujeto a} \quad f(\mathbf{x}) = y$$

El punto de equilibrio proporciona las cantidades óptimas de insumos en función de los parámetros (precios de los insumos), $x_i^* = x_i^* (\mathbf{p}, y)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, que al ser reemplazados en la función objetivo determinan el costo óptimo

$$C^* = C^* (\mathbf{p}, y) = C (\mathbf{x}^* (\mathbf{p}, y))$$

conocido como función indirecta de costos o dual. En este proceso cada función de producción $f(\mathbf{x})$ está asociada con una de costos dependiente de los precios de los insumos (los p) y la cantidad producida (y), $C^* = C^* (\mathbf{p}, y)$. La solución del problema anterior implica la consecución de los valores de las x^* como función de los precios y la cantidad a producir, $x_i^* =$

$x_i^*(\mathbf{p}, y)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$; éstas representan las demandas de insumos por parte del productor.

En el caso de una función de producción tipo CD el problema anterior es:

$$\text{Mínimo de } C(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ sujeto a } y = a \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

las demandas por insumos:

$$x_k^* = \frac{\alpha_k}{p_k} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

y los costos:

$$C^* = C(x^*(\mathbf{p}, y)) = A \left(y \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}}$$

Esto prueba que el dual de una función de producción CD en las cantidades de insumos es CD en los precios, de la misma forma el dual de una función CES en las cantidades de insumos es CES en los precios. Los resultados son susceptibles de generalizar a las funciones encontradas por Uzawa, McFadden y Sato ([U], [McF] y [Sa]), es decir, si la tecnología de producción es CES en familias de insumos y éstas a su vez son CD en las cantidades, el costo deberá ser CES en las familias de los precios y éstas CD en los precios. Puesto que la simetría de la ES, para funciones doblemente diferenciables, se deriva de la propia definición. A partir de las funciones conocidas, es posible construir formas funcionales que simulen una producción que cambia la tecnología al ingresar un nuevo insumo al proceso productivo y de paso eliminan la doble diferenciabilidad. Para esto, sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ vectores independientes de insumos y considérense los problemas:

$$\begin{aligned} &\text{Mínimo de } C_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i && \text{Mínimo de } C_2(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{m} p'_j u_j \\ &\text{sujeto a } f(\mathbf{x}) \geq y && \text{sujeto a } g(\mathbf{u}) \geq y \\ &\mathbf{x} \geq 0 && \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

sus lagrangianos son

$$L_1(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda (y - f(\mathbf{x})) \text{ y } L_2(\mathbf{u}, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} p'_j u_j + \mu (y - g(\mathbf{u}))$$

respectivamente y las condiciones de primer orden:

$$\begin{array}{ll}
x_k\left(p_k-\lambda f_k(\mathbf{x})\right)=0, & u_r\left(p'_r-\mu g_r(\mathbf{u})\right)=0\\
\lambda\left(y-f(\mathbf{x})\right)=0, & \mu\left(y-g(\mathbf{u})\right)=0\\
\mathbf{x}\geq 0 & \mathbf{u}\geq 0\\
\lambda\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,n; & \mu\geq 0 \text{ para } r=1,2,\ldots,m.
\end{array}$$

Por otra parte, para el problema

$$\begin{gathered}
\text{Mínimo de } C(\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+\sum_{j=1}^{m}p'_ju_j\\
\text{sujeto a } \min\{f(\mathbf{x}),g(\mathbf{u})\}=y,\quad \mathbf{x}\geq 0,\quad \mathbf{u}\geq 0
\end{gathered}$$

equivale a

$$\begin{gathered}
\text{Mínimo de } C(\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+\sum_{j=1}^{m}p'_ju_j\\
\text{sujeto a } f(\mathbf{x})\geq y\quad g(\mathbf{u})\geq y,\quad \mathbf{x}\geq 0,\quad \mathbf{u}\geq 0
\end{gathered}$$

que produce las condiciones de primer orden,

$$\begin{array}{lr}
x_k\left(p_k-\lambda f_k(\mathbf{x})\right)=0, & \lambda\left(y-f(\mathbf{x})\right)=0,\\
u_r\left(p'_r-\mu g_r(\mathbf{u})\right)=0, & \mu\left(y-g(\mathbf{u})\right)=0,\\
\mathbf{x}\geq 0,\ \lambda\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,n & \mathbf{u}\geq 0,\ \mu\geq 0 \text{ y } r=1,2,\ldots,m.
\end{array}$$

La solución económica debe ser un punto esquina de las restricciones. Allí estas condiciones equivalen a las condiciones de primer orden de la minimización de los costos C_1 y C_2. Por lo tanto, las demandas de factores encontrados para C_1^* y C_2^* (conjuntamente), y C^* son iguales. Así, por el comportamiento de la función de Leontief, C^* es la suma de C_1^* y C_2^*.

Aunque el resultado solamente es aplicable a los tipos de producción con insumos fuertemente separables, este tipo de función sirve de modelo para producciones en las que la llegada de un nuevo insumo cambia el tipo de tecnología; para esto basta adecuar las variables involucradas.

Si las funciones de producción en el problema de encontrar C^* son CD,

$$C^*\left(\mathbf{x}(\mathbf{p},y),\mathbf{u}(\mathbf{p}',y)\right)=A\left(y\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}}+B\left(y\prod_{j=1}^{m}(p')_j^{\beta_j}\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\beta_k}}$$

y la ES entre insumos **x** o **u** depende de todos los precios, en contra del supuesto implícito en la función sobre intensidad de uso de los factores. Este resultado que generaliza el encontrado por Blackorby y Russell ([B y R]) indica que la ES entre factores x puede variar aun si los precios de los factores involucrados permanecen constantes y solamente varían los precios de la otra familia. Puesto que la ES aun en el caso anterior resulta simétrica, ya que la función C^* es doblemente diferenciable. Se examina una función definida a trozos, a partir de la CD; ésta modela un cambio estructural con los mismos insumos,

$$f(K,L) = \begin{cases} AK^{\alpha}L^{\beta}, & \text{si } K \geq \left[\frac{B}{A}L^{\sigma-\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \\ BK^{\sigma}L^{\delta}, & \text{si} K \leq \left[\frac{B}{A}L^{\sigma-\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \end{cases}$$

cuya dual[1]

$$C(p,p',y) = \begin{cases} a\left(yp^{\alpha}(p')^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, & \text{si } \left(\frac{y}{A}\right)^{(\alpha+\beta)-(\delta+\sigma)} \geq \left(\frac{B}{A}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta p}{\alpha p'}\right)^{\alpha\sigma-\beta\delta} \\ b\left(yp^{\sigma}(p')^{\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma+\delta}}, & \text{si } \left(\frac{y}{B}\right)^{(\alpha+\beta)-(\delta+\sigma)} \leq \left(\frac{B}{A}\right)^{\sigma+\delta}\left(\frac{\beta p}{\alpha p'}\right)^{\alpha\sigma-\beta\delta} \end{cases}$$

es en general no diferenciable y su ES es no simétrica.

La solución que proponen Blackorby y Russell ([B y R]) al comportamiento de la ES es cambiar el concepto de elasticidad y usar el de Robinson-Morishima (ESM): el cambio producido en la relación de las cantidades de factores dividido por el cambio producido en la tasa marginal de sustitución,

$$\sigma_{ik}^{M} = \frac{\partial \log\left(x_k/x_i\right)}{\partial \log\left(f_k/f_i\right)} = \frac{f_{x_k}}{x_i}\frac{F_{ik}}{|F|} - \frac{f_{x_k}}{x_k}\frac{F_{kk}}{|F|}$$

esta definición, en general asimétrica[2], es más adecuada, según [B y R], para medir los cambios en las cantidades demandadas determinadas por cambios de los precios.

Aplicando el lema de Shephard se tiene la expresión

$$\sigma_{ik}^{M} = \frac{p_k C_{ik}^*}{C_i^*} - \frac{p_k C_{kk}^*}{C_k^*}$$

[1]Las condiciones de la definición se determinan a partir de la intersección de las funciones componentes.

[2]En [K] se prueba que una función tiene ESM simétrica si y sólo si es una transformación monótona de la CES.

y a partir de ella las ESM para la función del problema (**??**) anterior son

$$\sigma^M_{x_iu_k} = 1 - \frac{\beta_k}{\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j} \qquad \sigma^M_{u_kx_i} = 1 - \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i}$$

mientras que $\sigma_{x_iu_k} = \sigma_{u_kx_i} = 0$; las cantidades demandadas de los factores de una familia no se ven afectadas por los cambios en los precios de la otra. Este hecho ignora que puede ser posible cambiar la dependencia de factores ya que la producción, que inicialmente usa sólo una familia, podría sustituir todos sus factores a la otra familia.

A partir de estos resultados se deben analizar funciones que permitan sustitución parcial entre insumos, p.e. $f(K, L, T) = \text{máx}\left\{AK^\alpha L^\beta, BK^\sigma T^\delta\right\}$; en este caso se escoge entre dos tecnologías que usan un insumo común, y generalizar el estudio a otros tipos de funciones.

Ejercicio

Probar que si la tecnología de producción es CES en familias de insumos y éstas a su vez son CD en las cantidades, el costo deberá ser CES en las familias de los precios y éstas CD en los precios.

6.7. Separación

Un resultado útil en la prueba de algunos resultados en la teoría económica es el teorema que garantiza que dos conjuntos convexos disyuntos se pueden separar por un hiperplano. En $\mathbb{R}^2$ el teorema dice que los conjuntos se pueden separar por una recta, en $\mathbb{R}^3$ los conjuntos están separados por un plano, para dimensiones mayores a tres lo están por hiperplanos.

El siguiente teorema prueba que se puede separar un punto de un conjunto convexo y compacto,

Teorema 6.6. *Sean A un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{u}$ un punto en el complemento de A ($\boldsymbol{u} \notin A$). Entonces existe un hiperplano que separa el punto $\boldsymbol{u}$ del conjunto A.*

Demostración. Sea $D_A(\mathbf{x}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{x}||$ la distancia de un punto $\mathbf{x} \in A$ a $\mathbf{u}$, como el conjunto A es compacto el teorema de Weierstrass garantiza que la función D_A toma su mínimo en algún punto de A. Sea

$$\mathbf{a} = \arg\text{mín}\{D_A(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}.$$

El hiperplano buscado pasa por el punto $\mathbf{a}$ y es perpendicular al segmento de recta que une $\mathbf{u}$ y $\mathbf{a}$. Esto es,

$$H = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}\}$$

H es el contorno a nivel $(\mathbf{a}-\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a}$ de la función

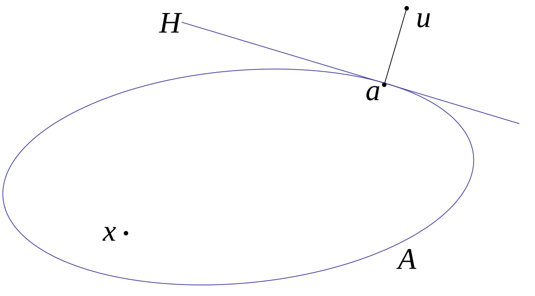


Figura 6.6: El punto $\mathbf{u}$ y el conjunto A están en lados opuestos del hiperplano H.

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x},$$

esto es,

$$H = C_{L(\mathbf{x})}((\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}).$$

Basta probar que $\mathbf{u}$ y los elementos de A están en lados opuestos de H.

Como A es convexo y $D_A(\mathbf{a}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{a}|| \leq D_A(\mathbf{w}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{w}||$ para $\mathbf{w} \in A$, entonces si $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{a}$ con $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}-\mathbf{a}||^2 - ||\mathbf{u}-\mathbf{z}||^2 &= ||\mathbf{u}-\mathbf{a}||^2 - ||\mathbf{u}-[\lambda\mathbf{w}+(1-\lambda)\mathbf{a}]||^2 \\ &= ||\mathbf{u}-\mathbf{a}||^2 - ||(\mathbf{u}-\mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{w}-\mathbf{a})]||^2 \\ &= 2\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{w}-\mathbf{a}) - \lambda^2||\mathbf{w}-\mathbf{a}||^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Simplificando λ en la última desigualdad,

$$2(\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{w}-\mathbf{a}) - \lambda||\mathbf{w}-\mathbf{a}||^2 \leq 0,$$

o en forma equivalente para $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} &2(\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{w}-\mathbf{a}) - \lambda||\mathbf{w}-\mathbf{a}||^2 \\ &\qquad = 2\left[(\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} - (\mathbf{u}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}\right] - \lambda||\mathbf{w}-\mathbf{a}||^2 \\ &\qquad = 2\left[L(\mathbf{w}) - L(\mathbf{a})\right] - \lambda||\mathbf{w}-\mathbf{a}||^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Puesto que esta condición se cumple para cualquier λ suficientemente cerca a cero, entonces

$$2\,[L(\mathbf{w}) - L(\mathbf{a})] \leq 0,$$

simplificando y transponiendo,

$$L(\mathbf{w}) \leq L(\mathbf{a}).$$

Por otra parte como $\mathbf{u} \notin A$ y A es compacto,

$$\begin{aligned} 0 < ||\mathbf{u} - \mathbf{a}||^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{a}) = (\mathbf{u} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \\ &= L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de las desigualdades anteriores se tiene

$$L(\mathbf{w}) \leq L(\mathbf{a}) < L(\mathbf{a}).$$

$\square$

Para probar que dos conjuntos disyuntos convexos compactos se pueden separar basta aplicar el teorema anterior a un conjunto y un punto del otro.

Capítulo 7

Dinámica discreta

En este capítulo se estudian modelos que involucran variables dependientes del tiempo y de valores de la misma variable en periodos anteriores, conocidas como **variables autorregresivas**, y sistemas de variables que interdependen en el tiempo que vistas en términos vectoriales se denominan **vectores autorregresivos**.

El cómo los demandantes responden a los precios en una economía discreta (los precios solamente cambian en ciertos intervalos de tiempo) depende de cómo fluye la información y de quién modela el fenómeno. Si la información fluye instantáneamente y la cantidad demandada en el momento t solamente depende del precio en t, entonces la demanda es una función continua, $D_t = D(p_t)$. Si depende únicamente de las expectativas de los precios en $t-1$ y los precios en t, la demanda es discreta, $D_t = D(p_t, p_{t-1})$. De la misma forma, los productores determinan las cantidades ofrecidas para bienes que se producen instantáneamente, o la cantidad ofrecida depende de los precios en t, $t-1$, etc. Así se encuentran, por ejemplo, las cantidades producidas por el sector agrícola que están determinadas por los precios del periodo anterior. Si además las cantidades son funciones lineales de los precios, entonces $D_t = ap_t + b$ y $O_t = cp_t + d$ con valores adecuados para los coeficientes

El proceso de ajuste de los precios y las cantidades genera el llamado "proceso de la telaraña" para un precio y cantidad iniciales p_0 y q_0. Si hay un exceso de demanda en el primer periodo, los precios tenderán a subir. Al incrementarse los precios, en el próximo periodo los oferentes estarán dispuestos a incrementar la cantidad ofrecida, lo que produce a su vez un exceso de oferta, forzando los precios a bajar, y así sucesivamente. Este proceso, dependiendo de las curvas de oferta y demanda, converge a algún precio y cantidad de equilibrio, diverge o se queda en un ciclo. En este capítulo se estudiará bajo qué condiciones este tipo de modelos convergen y qué significa converger. Lo mismo se hace para modelos continuos en el siguiente capítulo.

7.1. Sucesiones

Definición 7.1. *Una **sucesión** de números reales es una función cuyo dominio es un conjunto infinito de naturales o enteros y su recorrido es un subconjunto de números reales. Se usa la notación x_t para describir los valores de la sucesión, $f(t) = x_t$.*

$$f(t) = x_t : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Generalmente se considera que las sucesiones tienen como dominio el conjunto de los naturales pero también pueden definirse en subconjuntos de los enteros. Cuando se aplican al comportamiento de una variable de estado en el tiempo, t se considera como la variable tiempo y x_t el valor de la variable de estado en el momento t. Se usa la notación $\{x_t\}_{\mathbb{N}}$, o más simplemente $\{x_t\}$, para denotar los valores de la sucesión.

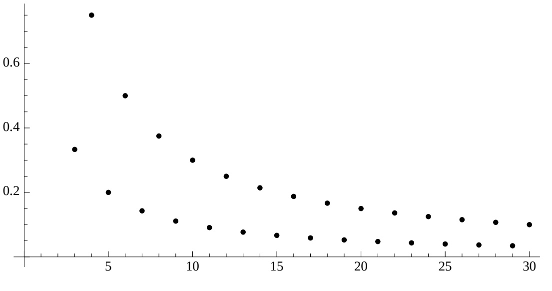


Figura 7.1: Los primeros términos de la sucesión $\left\{\frac{2+(-1)^t}{t}\right\}$.

Ejemplos

1. La sucesión $\{x_t\} = \left\{(t-100)^2\right\}$ es la versión discreta de la función continua $f(t) = (t-100)^2$.

2. Los valores de $\{x_t\} = \left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^t\right\}$ son $\{1, -1/3, 1/9, -1/27, \ldots\}$.

3. Para $\{x_t\} = \left\{t^{1/t}\right\}$ los valores son $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, ...\right\}$.

Los anteriores ejemplos muestran definiciones explícitas de sucesiones (si se conoce el valor de t al reemplazar en la fórmula se consigue el valor de x_t); pero fuera de éstas existen formas implícitas para definirlas, comúnmente se denominan **ecuaciones de recurrencia o en diferencias**; su forma general es

$$x_{t+k} = f(t, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+k-1})$$

donde f define alguna función (campo escalar) y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son valores conocidos (valores iniciales).

Ejemplos

1. $x_{t+1} = 2x_t^2 + 1$, $x_1 = 1$. Los términos de la sucesión son $\{1, 3, 19, ...\}$, en esta forma implícita para calcular x_t debemos de antemano conocer el valor de x_{t-1} (recurrencia de orden 1).

2. $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, $x_0 = x_1 = 1$, sucesión de Fibonacci; los términos de la sucesión son $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$; para calcular un término se deben conocer los valores de los dos inmediatamente anteriores (recurrencia de orden dos). De la misma forma se puede definir recurrencia de cualquier orden.

3. $\begin{cases} x_{2t} = tx_t + t + 1 \\ x_{2t+1} = tx_t + t, \end{cases}$
   con $x_1 = 1$ (recurrencia de orden variable).

4. $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$ (recurrencia de orden 1), ecuación logística. Esta sucesión fue una de las bases de la teoría del caos.

5. Si se hace una inversión de \$$c$ a una tasa constante del $r\,\%$ por periodo, la expresión que determina el capital acumulado en el periodo t es

   $$C_t = C_{t-1} + rC_{t-1} = (1 + r)C_{t-1}, \quad \text{con} \quad C_0 = c.$$

   El valor explícito de C_t es el capital alcanzado por la inversión después de t periodos.

Las sucesiones se pueden clasificar según el comportamiento de sus términos. La sucesión $\{x_t\}$ es **creciente** si y sólo si

$$x_{t+1} \geq x_t \text{ para todo } t.$$

Si $f(x)$ es una función creciente para todo x y $x_t = f(t)$ para todo t entero positivo (x_t es la restricción de una función de variable continua), entonces $\{x_n\}$ es una sucesión creciente. De forma análoga se define sucesión **decreciente** cambiando $\geq$ por $\leq$. Una sucesión creciente o decreciente se llama **monótona**.

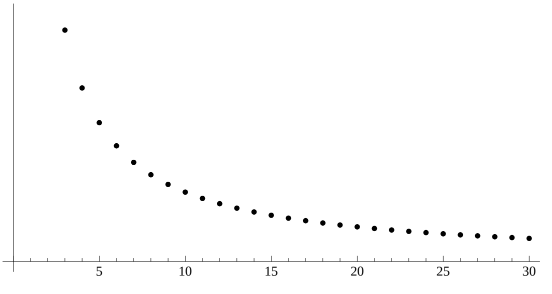


Figura 7.2: Gráfico de una sucesión decreciente.

Ejemplo

Con esta definición la sucesión $x_t = t^2$ es monótona creciente ya que

$$x_{t+1} = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1 > t^2 = x_t.$$

De otra forma, la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Para $x > 0$, $f'(x) > 0$ y como $x_t = f(t)$, $\{x_t\}$ es una sucesión creciente.

Si al comparar tres términos consecutivos de una sucesión, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, éstos se comportan de alguna de las siguientes formas:

$$x_{t+2} > x_{t+1} \text{ y } x_{t+1} < x_t, \quad \text{o} \quad x_{t+2} < x_{t+1} \text{ y } x_{t+1} > x_t \text{ para todo } t,$$

la sucesión es **oscilante**.

Existe un criterio de clasificación de sucesiones oscilantes que tiene en cuenta la distancia entre sus términos consecutivos:

Si

$$|x_{t+2} - x_{t+1}| = |x_{t+1} - x_t| \text{ para todo } t,$$

(la distancia entre dos términos consecutivos permanece constante), la sucesión es **oscilante regular**.

Si

$$|x_{t+2} - x_{t+1}| < |x_{t+1} - x_t| \text{ para todo } t,$$

(la distancia entre dos términos consecutivos decrece), la sucesión es **oscilante amortiguada**.

Y si

$$|x_{t+2} - x_{t+1}| > |x_{t+1} - x_t| \text{ para todo } t,$$

(la distancia entre dos términos consecutivos se incrementa), la sucesión es **oscilante explosiva**.

Otras clasificaciones útiles son:

Una sucesión es **acotada superiormente** si existe $M > 0$, llamado cota superior, tal que

$$x_t < M \text{ para todo } t$$

(si todos los valores de la sucesión son menores que algún número real M). Nótese que todo número mayor que M es una cota superior. De forma análoga se define acotada inferiormente.

Una sucesión es **acotada** si lo es superior e inferiormente, es decir, si existe un $M > 0$ tal que

$$|x_t| < M \text{ para todo } t$$

(esto significa que todos los puntos de la sucesión están entre los valores $y = M$, y $y = -M$).

Ejemplos

1. $\left\{\frac{2+(-1)^t}{t}\right\}$, representada en la figura 7.1, es oscilante amortiguada y acotada.

2. La sucesión $\{x_t\} = \{(-1)^t 2^t\}$ es oscilante explosiva y no es acotada.

3. La sucesión $\{x_t\} = \{(-1)^t 3^{-t}\}$ es oscilante amortiguada y acotada.

4. La sucesión $\{x_t\} = \{(-1)^t\}$ es oscilante regular y acotada.

5. En general la sucesión $\{r^t\}$ es: creciente, si $r > 1$; constante, si $r = 1$ o $r = 0$; decreciente, si $0 < r < 1$; oscilante regular, si $r = -1$; oscilante amortiguada, si $-1 < r < 0$, y oscilante explosiva, si $r < -1$.

Definición 7.2. *Una sucesión* $\{x_t\}$ ***converge*** *a* L *si y sólo si*

$$\lim_{t\to\infty} x_t = L,$$

es decir si para todo $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *(que depende de* ϵ*) tal que para todo* $t > N$*,* $|x_t - L| < \epsilon$*.*

Aquí se puede observar que todas las propiedades sobre límites que se cumplen para funciones, se cumplen para sucesiones y que, en particular, si una sucesión corresponde a la versión discreta de una función continua de la que se conoce el límite a infinito, la sucesión convergerá a ese mismo límite. Uno de los resultados más importantes en la teoría de sucesiones es:

Teorema 7.1. *Una sucesión monótona acotada es convergente.*

Ejemplos

1. La sucesión $\{x_t\} = \{r^t\}$ converge a cero si $-1 < r < 1$, y converge a 1 si $r = 1$. En cualquier otro caso la sucesión es divergente.

2. Sea $S_0 = 1$, $S_{t+1} = S_t + r^{t+1}$, esta sucesión representa la suma de los t primeros términos de la sucesión del ejemplo anterior,

$$S_t = 1 + r + r^2 + ... + r^t, \tag{7.1}$$

para encontrar la forma explícita de esta sucesión se multiplica cada uno de los términos de la ecuación (7.1) por r.

$$rS_t = r + r^2 + ... + r^t + r^{t+1}$$

al restar esta última ecuación de (7.1) se tiene que

$$S_t - rS_t = (1 - r)S_t = 1 - r^{t+1}.$$

Si $r \neq 1$,

$$S_t = \frac{1 - r^{t+1}}{1 - r}$$

y si $r = 1$, $S_t = t + 1$, por lo tanto esta sucesión converge a $\frac{1}{1-r}$ si y sólo si $-1 < r < 1$.

3. Para un mercado de un bien en el que las cantidades demandadas y ofrecidas dependen del nivel de precios en cada periodo,

$$D_t = D(p_t) = a - bp_t, \qquad O_t = O(p_t) = \beta p_t - \alpha,$$

y en el que el precio se ajusta en cada periodo de acuerdo con el exceso de demanda en el periodo anterior,

$$p_{t+1} - p_t = \theta[D_t - O_t] = \theta[a - bp_t - (\beta p_t - \alpha)],$$

donde θ es un parámetro de ajuste. Si se quiere encontrar el comportamiento de los precios en cada momento del tiempo, se debe encontrar p_t en forma explícita en la siguiente ecuación de recurrencia,

$$p_{t+1} = p_t + \theta[a - bp_t - (\beta p_t - \alpha)] = [1 - \theta(b + \beta)]p_t + \theta[a + \alpha],$$

en forma simplificada

$$p_{t+1} = Ap_t + B$$

con A y B constantes adecuadas. Puesto que la recursión se satisface para los precios en todos los periodos, al iterar el proceso hacia atrás se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
p_t &= Ap_{t-1} + B = A(Ap_{t-2} + B) + B \\
&= A^2 p_{t-2} + AB + B = A^2(Ap_{t-3} + B) + AB + B \\
&= A^3 p_{t-3} + A^2 B + AB + B = A^3(Ap_{t-4} + B) + A^2 B + AB + B \\
&= A^4 p_{t-4} + A^3 B + A^2 B + AB + B \\
&= ... \\
&= A^k p_{t-k} + A^{k-1} B + A^{k-2} B + ... + AB + B,
\end{aligned}$$

si $k = t$ en la última expresión y se usa la fórmula del ejemplo 2 anterior para $B \neq 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
p_t &= A^t p_0 + B \sum_{k=0}^{t-1} A^k = A^t p_0 + B \frac{1 - A^t}{1 - A} \\
&= A^t \left(p_0 - \frac{B}{1 - A} \right) + \frac{B}{1 - A}.
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores

$$A = 1 - \theta(b + \beta) \quad \text{y} \quad B = \theta[a + \alpha],$$

se tiene

$$\begin{aligned} p_t &= A^t\left(p_0 - \frac{\theta[a+\alpha]}{1-[1-\theta(b+\beta)]}\right) + \frac{\theta[a+\alpha]}{\theta(b+\beta)} \\ &= A^t\left(p_0 - \frac{a+\alpha}{b+\beta}\right) + \frac{a+\alpha}{b+\beta} \\ &= A^t\left(p_0 - \bar{p}\right) + \bar{p}, \end{aligned}$$

donde $\bar{p}$ es el precio de equilibrio en el caso de que el mercado sea estático. La ecuación dice que el precio en cada periodo es igual al precio de equilibrio más el valor del desajuste inicial distorsionado. La distorsión se da de acuerdo con el comportamiento de la sucesión $\left\{[1-\theta(b+\beta)]^t\right\}$. Para analizar la convergencia basta comparar los valores de $1-\theta(b+\beta)$ con los de r en el ejemplo 1 anterior:

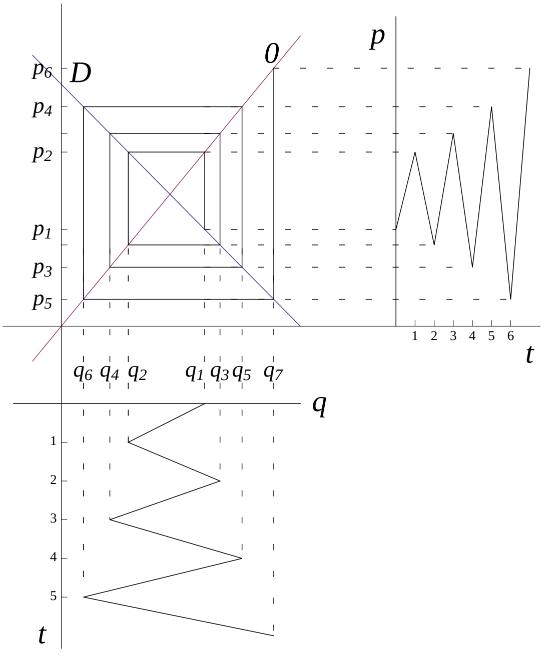


Figura 7.3: Dinámica de la interacción cantidades-precios, cuando el equilibrio es inestable.

a) Si $0 < 1-\theta(b+\beta) < 1$, los precios decrecen hacia el precio de equilibrio.

b) $-1 < 1 - \theta(b+\beta) < 0$, los precios oscilan de forma amortiguada y convergen hacia el precio de equilibrio.

c) Si $A = 1 - \theta(b+\beta) = 1$,

$$p_t = A^t p_0 + B \sum_{k=0}^{t-1} A^k = p_0 + Bt$$

que converge solamente cuando $A = 0$, lo que equivale a que $\theta = 0$. En este caso los precios son constantes para todo t.

d) Si

$$p_0 = \frac{B}{1-A} = \bar{p}$$

la sucesión es constante y por tanto converge.

e) Si $1-\theta(b+\beta) = -1$, los precios oscilan en dos valores, p_0 y $2\bar{p}-p_0$.

f) Para los otros casos, $1 - \theta(b+\beta) < -1$ o $1 - \theta(b+\beta) > 1$; los precios divergen en forma oscilante explosiva en el primer caso y creciente sin límite en el segundo.

4. Usando la deducción anterior la solución de la ecuación lineal no homogénea de primer orden,

$$x_{t+1} = 2x_t + 3, \qquad x_0 = 100$$

es

$$x_t = 2^t \left(x_0 - \frac{3}{1-2} \right) + \frac{3}{1-2} = 2^t\,(100+3) - 3 = 103\left(2^t\right) - 3$$

Ejercicios

1. Encontrar los primeros 10 términos de la sucesión definida por la recursión

$$\begin{cases} x_{2t} = tx_t + t + 1 \\ x_{2t+1} = tx_t + t, \end{cases}$$

con $x_1 = 1$.

2. Encontrar una sucesión oscilante amortiguada que sea divergente.

3. ¿Toda sucesión oscilante explosiva es no acotada?

4. Clasificar las siguientes sucesiones:

   a) $\left\{3^t \operatorname{sen} t\right\}$. *b*) $\left\{3^t \operatorname{sen} \dfrac{t\pi}{2}\right\}$. *c*) $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^t \operatorname{sen} \dfrac{t\pi}{2}\right\}$.

   d) $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^t \operatorname{sen} t\right\}$. *e*) $\left\{e^{-t} \operatorname{sen} 5t\right\}$. *f*) $\left\{\dfrac{1-2^t}{1+2^t}\right\}$.

5. Encontrar variables económicas: autónomas, no autónomas, que haya pasado de autónomas a no autónomas y viceversa.

7.2. Ecuaciones en diferencias

En general, el estado de un sistema dinámico en un momento t depende de estados anteriores: $t-1$, $t-2$, ...; estos sistemas se modelan usando ecuaciones recurrentes en las cuales se utiliza una o varias variables para describir el estado del sistema. Si el sistema está regido por n variables en el momento t, se usa un vector $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ para describir su estado en ese momento; por esta razón $\mathbf{x}_t$ se llama **variable o variables de estado** dependiendo de si es una variable o un vector de variables. El modelo que rige el estado de un sistema que depende de k periodos anteriores es una ecuación de la forma

$$\mathbf{G}\left(t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \ldots, \mathbf{x}_{t-k+1}, \mathbf{a}\right) = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{G}$ es una función de varias variables y varios valores; esta expresión representa un sistema de ecuaciones, tantas como el número de valores de la función $\mathbf{G}$. Cuando el sistema es cuadrado (n ecuaciones y n variables) y es posible despejar las variables de estado en el último periodo, el sistema tiene la forma

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-k+1}, \mathbf{a}\right) \\ f_2\left(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-k+1}, \mathbf{a}\right) \\ \vdots \\ f_n\left(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-k+1}, \mathbf{a}\right) \end{pmatrix}$$

Este sistema puede ser **lineal** o **no lineal**, dependiendo de si las funciones involucradas son o no lineales en las variables de estado.

El **orden** de una ecuación o un sistema es la mayor diferencia entre los subíndices de las variables de estado (k en el caso anterior). Si t no aparece como una variable en forma explícita, la ecuación o el sistema es **autónomo** y dependiendo de los coeficientes puede ser de **coeficientes constantes o variables**, y si hay términos independientes no es **homogéneo**. La **solución** de la ecuación o el sistema de ecuaciones es una sucesión o sucesiones en forma explícita que satisfacen la ecuación o el sistema. La solución de una ecuación determina la **trayectoria** que sigue la variable de estado a partir de **condiciones iniciales**, esto es los valores de $\mathbf{x}_0$. En el caso discreto la trayectoria es la sucesión formada por los valores de las variables de estado[1]:

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_t, \ldots$$

en el caso continuo la trayectoria es la curva descrita por la función o funciones solución de la ecuación o el sistema.

Puesto que cualquier sistema se puede convertir en un sistema de primer orden o en una ecuación de orden igual número de ecuaciones del sistema lineal, con las mismas características del sistema original en cuanto a homegeneidad, autonomía, etc; en adelante solo se analizan sistemas de la forma:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{a}\right).$$

Ejemplos

1. $x_{t+4} - x_{t+1} = 2x_t^2 + 1$, es una ecuación autónoma no lineal con coeficientes constantes de cuarto orden.

2. $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden.

3. $x_{t+2} = tx_t + t + 1$, es una ecuación lineal no autónoma de segundo orden con coeficientes variables.

4. $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$, es una ecuación no lineal autónoma de primer orden con coeficientes constantes.

5. La solución de la ecuación lineal no autónoma de primer orden

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t$$

[1] Algunos autores usan órbita y trayectoria como sinónimos; sin embargo, para Medio [M y L] existe diferenciación: la órbita es el conjunto $\{\mathbf{x}_t \mid t = 0, 1, 2 \ldots\}$ y la trayectoria es $\{(t, \mathbf{x}_t) \mid t = 0, 1, 2 \ldots\}$.

se encuentra haciendo un proceso inductivo hacia atrás

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= a_t x_t + b_t = a_t\left(a_{t-1}x_{t-1} + b_{t-1}\right) + b_t \\
&= a_t a_{t-1} x_{t-1} + a_t b_{t-1} + b_t \\
&= a_t a_{t-1}\left(a_{t-2}x_{t-2} + b_{t-2}\right) + a_t b_{t-1} + b_t \\
&= a_t a_{t-1} a_{t-2} x_{t-2} + a_t a_{t-1} b_{t-2} + a_t b_{t-1} + b_t \\
&= \cdots \\
&= x_0 \prod_{i=0}^{t} a_i + \sum_{i=0}^{t} b_i \left(\prod_{j=i+1}^{t} a_j\right)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{cases} x_{t+2}^2 = x_{t+1} y_t + t^2 \\ y_{t+2} = x_{t+1}^3 + 5y_{t-1} \end{cases}$$

es un sistema no lineal, no autónomo, no homogéneo de tercer orden.

7.

$$\begin{cases} x_{t+3} - 3x_{t+1} + 4y_t + t^2 = 0 \\ 4y_{t+2} + 5x_{t+1} + 2y_{t+1} + y_{t-1} + t + 1 = 0 \end{cases}$$

es un sistema lineal, no autónomo, no homogéneo de cuarto orden.

8. Si en el sistema

$$\begin{cases} x_{t+2} - 3x_{t+1}^2 + 4y_t + t - 1 = 0 \\ y_{t+2} x_{t+1} + y_{t+1} + y_{t-1} + 2 = 0, \end{cases}$$

se hacen las sustituciones $z_t = x_{t+1}$, $w_t = y_{t+1}$ equivale a

$$\begin{cases} z_t = x_{t+1} \\ w_t = y_{t+1} \\ z_{t+1} - 3z_t^2 + 4y_t + t - 1 = 0 \\ w_{t+1} z_t + w_t + y_{t-1} + 2 = 0, \end{cases}$$

la última ecuación es

$$w_{t+2} z_{t+1} + w_{t+1} + y_t + 2 = 0,$$

si se traslada un periodo. Reemplazando $v_t = w_{t+1}$, esta se transforma en

$$v_{t+1}z_{t+1} + w_{t+1} + y_t + 2 = 0$$

y el sistema equivalente de primer orden es

$$\begin{cases} x_{t+1} = z_t \\ y_{t+1} = w_t \\ w_{t+1} = v_t \\ z_{t+1} - 3z_t^2 + 4y_t + t - 1 = 0 \\ v_{t+1}z_{t+1} + w_{t+1} + y_t + 2 = 0. \end{cases}$$

Para convertir el sistema en una ecuación se elimina una variable. Despejando en la primera ecuación

$$y_t = \frac{1}{4}\left(1 - t - x_{t+2} + 3x_{t+1}^2\right)$$

reemplazando en la segunda y simplificando

$$\left(3x_{t+3}^2 - x_{t+4} - t + 1\right) x_{t+1} + 3x_{t+2}^2 + 3x_t^2 - x_{t+3} - x_{t+1} - 2t + 10 = 0.$$

7.2.1. Equilibrio

Un sistema o ecuación está en equilibrio cuando sus variables de estado no cambian de valor a través del tiempo, por esto el concepto de equilibrio no es aplicable a algunos sistemas no autónomos, aquellos en los que la influencia explícitamente del tiempo no permita que sus variables permanezcan estáticas. El vector de variables de estado $\mathbf{x}_t$ del sistema autónomo,

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_t, \mathbf{a}\right),$$

está en **equilibrio** si y sólo si

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{x}}, \quad \text{para} \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Los valores de las variables de estado $\mathbf{x}_t$ no cambian para $t = 0, 1, 2, \ldots$ por lo que ese valor es fijo e igual a $\bar{\mathbf{x}}$; ésta es la razón para que se hable del **punto de equilibrio**, **estado estable** o **punto fijo** (*steady state*) de la ecuación o el sistema.

Ejemplos

1. Los puntos de equilibrio de la ecuación

$$5x_{t+1} = x_t^2 + 6$$

están donde $x_{t+1} = x_t = \bar{x}$. Al reemplazar $\bar{x}$ debe satisfacer la ecuación

$$5\bar{x} = \bar{x}^2 + 6$$

que equivale a

$$\bar{x}^2 - 5\bar{x} + 6 = 0.$$

De donde los puntos de equilibrio de la ecuación son $\bar{x} = 3$ y $\bar{x} = 2$.

2. El único punto de equilibrio de la ecuación

$$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$$

es $\bar{x} = 0$ ya que ésta es la solución de la ecuación:

$$\bar{x} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x}.$$

3. Los equilibrios de

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$$

son las soluciones de la ecuación,

$$\bar{x} = k\bar{x}(1 - \bar{x}),$$

esto es, $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = \frac{k-1}{k}$.

4. Los puntos de equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ del sistema

$$\begin{cases} x_{t+2}^3 = 4x_{t+1} + y_t \\ y_{t+2} = x_{t+1}^2 - 4 \end{cases}$$

satisfacen las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} \bar{x}^3 = 4\bar{x} + \bar{y} \\ \bar{y} = \bar{x}^2 - 4 \end{cases}$$

Eliminando $\bar{y}$ este sistema se reduce a la ecuación

$$\bar{x}^3 = 4\bar{x} + \bar{x}^2 - 4$$

o, en forma equivalente,

$$\bar{x}^3 - 4\bar{x} - \bar{x}^2 + 4 = 0$$

que tiene como soluciones $\bar{x} = 1$, $\bar{x} = 2$ y $\bar{x} = -2$ y los valores correspondientes de $\bar{y}$ son: -3, 0 y 0. Por lo tanto, los puntos de equilibrio son $(1, -3)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

5. El punto de equilibrio de la ecuación

$$x_{t+1} - 2x_t = \left(t^2 - 2^t\right) x_t$$

es $\bar{x} = 0$.

6. Las ecuaciones

$$x_{t+1} - 2t = \left(t - 3^t\right) x_t - 1 \quad \text{y} \quad x_{t+1} = x_t + b_t$$

no tienen puntos de equilibrio.

Los puntos de equilibrio se clasifican en **inestables**, **lyapunovmente estables**, **asintóticamente estables** y **exponencialmente estables**.

Definición 7.3. *El punto fijo $\bar{\boldsymbol{x}}$ es lyapunovmente estable (o simplemente estable) si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$, entonces $\|\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \epsilon$ para $t = 1, 2, \ldots$.*

Esto significa que si la variable de estado inicialmente está cerca del punto de equilibrio, a través del tiempo la variable no se alejará, esto es, los valores sucesivos de la variable de estado seguirán cerca del equilibrio, aunque esa sucesión no converja al punto de equilibrio.

Definición 7.4. *El punto fijo $\bar{\boldsymbol{x}}$ es asintóticamente estable si y sólo si es estable y existe $\delta > 0$ tal que si $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0.$$

Si el valor inicial de las variables de estado está en una vecindad del punto de equilibrio, entonces los valores de la variable de estado convergerán al punto de equilibrio. El conjunto de valores iniciales $\mathbf{x}_0$ para los cuales $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$, se conoce como el **dominio de estabilidad** (*basin*) de $\bar{\mathbf{x}}$ y se denota

$$DE(\bar{\mathbf{x}}) = \left\{\mathbf{x}_0 \mid \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}\| = 0\right\}.$$

Si este conjunto es $\mathbb{R}^n$ se dice que el punto es **globalmente asintóticamente estable**; si no, el punto es **localmente asintóticamente estable**.

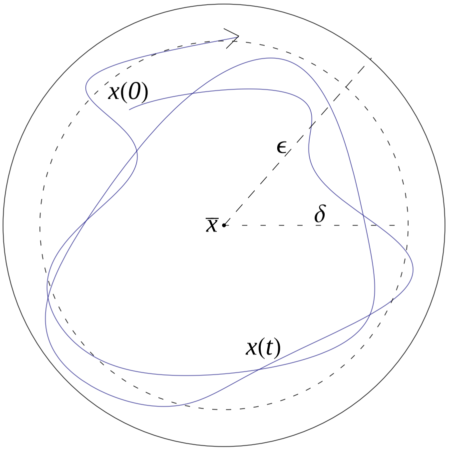


Figura 7.4: Punto de equilibrio lyapunovmente estable.

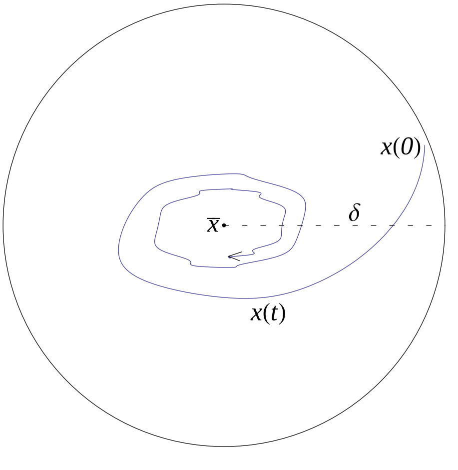


Figura 7.5: Punto de equilibrio asintóticamente estable.

Definición 7.5. *El punto fijo* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *es exponencialmente estable si y sólo si existen* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ *y* $\delta > 0$ *tales que: si* $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$, *entonces*

$$\|\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}\| \leq \|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\|\alpha^{\beta t}, \quad para \quad t = 1, 2, \ldots.$$

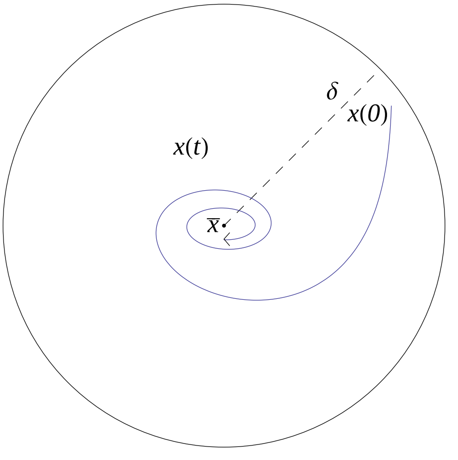


Figura 7.6: Punto de equilibrio exponencialmente estable.

La estabilidad exponencial exige, además de la convergencia, una velocidad exponencial de convergencia. En este sentido es el tipo de estabilidad más fuerte: un punto exponencialmente estable es asintóticamente estable y un punto asintóticamente estable es lyapunovmente estable.

Un sistema dinámico tiene un punto de equilibrio lyapunovmente estable si las trayectorias que parten cerca del punto de equilibrio no se alejan del equilibrio; el punto es asintóticamente estable si se acercan al equilibrio, y es exponencialmente estable si se acercan en forma exponencial (muy rápido) al equilibrio.

Ejemplo

Para la ecuación

$$x_{t+1} = ax_t + b,$$

si $a \neq 1$, el punto de equilibrio es $\bar{x} = \frac{b}{1-a}$ y si $a = 1$, no tiene punto de equilibrio. En la sección anterior se encontró que la solución de la ecuación es

$$x_t = \begin{cases} a^t(x_0 - \bar{x}) + \bar{x}, & \text{si} \quad a \neq 1 \\ bt + x_0 & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

1. Si $a = -1$, como la sucesión $\left\{(-1)^t\right\}$ es oscilante regular la solución,

$$x_t = (-1)^t (x_0 - \bar{x}) + \bar{x}$$

   es también oscilante; por lo tanto si x_0 está cerca de $\bar{x}$, los valores sucesivos de x_t para $t = 1, 2, \ldots$ estarán cerca de $\bar{x}$. En particular

$$\|x_t - \bar{x}\| = \|x_0 - \bar{x}\| \quad \text{para} \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

   En este caso $\bar{x}$ es un punto de equilibrio lyapunovmente estable.

2. Si $|a| < 1$, la sucesión $\left\{a^t\right\}$ converge a cero y la solución,

$$x_t = a^t (x_0 - \bar{x}) + \bar{x}$$

   converge a $\bar{x}$. Además,

$$\|x_t - \bar{x}\| \leq |a|^t \|x_0 - \bar{x}\| \quad \text{para} \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

   por lo tanto se tiene estabilidad exponencial. Por otra parte, como

$$\lim_{t \to \infty} \|x_t - \bar{x}\| = 0$$

   sin importar cuál sea el valor de x_0, en este caso la ecuación tiene un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable y

$$DE(\bar{x}) = \mathbb{R}.$$

7.2.2. Estabilidad de soluciones

La estabilidad es un concepto que no solo es aplicable al comportamiento de los puntos de equilibrio, esto es a sistemas o ecuaciones autónomos. Dado que en sistemas no autónomos no existe concepto de equilibrio se ha generalizado el concepto de estabilidad al comportamiento de la trayectoria solución de la ecuación o el sistema.

Puesto que la solución de un sistema o ecuación, $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{a})$, depende de las condiciones iniciales, $\mathbf{x}_0$, se usa la notación $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0)$ para la solución, esta hace explícita la dependencia de la trayectoria que siguen las variables de estado del valor $\mathbf{x}_0$. La estabilidad para soluciones puede clasificarse como en el caso de puntos de equilibrio en lyapunov, asintótica y exponencialmente estable como también en local y globalmente estable.

Definición 7.6. *La solución* $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0)$ *del sistema* $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}_t)$ *es lyapunovmente estable (o simplemente estable) si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^*\| < \delta$, *entonces* $\|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0^*)\| < \epsilon$ *para* $t = 1, 2, \ldots$.

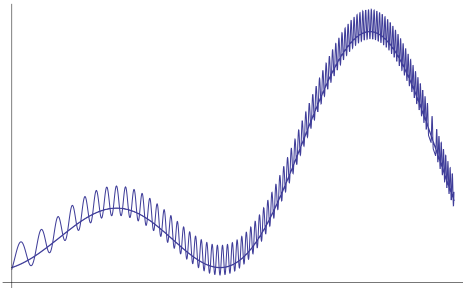


Figura 7.7: La solución del sistema es lyapunov estable: si las condiciones iniciales están cerca, las soluciones están cerca.

Esto significa que si las condiciones iniciales de las variables de estado están cerca, a través del tiempo las variables no se alejarán, esto es, los valores sucesivos de las variables de estado seguirán cerca.

Definición 7.7. *La solución* $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0)$ *del sistema* $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}_t)$ *es asintóticamente estable si y sólo si es estable y existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^*\| < \delta$, *entonces*

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0^*)\| = 0.$$

Si las condiciones iniciales para la variable de estado están suficientemente cerca, entonces las trayectorias soluciones a partir de esos valores convergerán. En este contexto también es posible hablar de dominio de estabilidad así como de estabilidad local y global.

Definición 7.8. *La solución* $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0)$ *del sistema* $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}_t)$ *es exponencialmente estable si y sólo si existen* $A > 0$, $\alpha > 0$ *y* $\delta > 0$ *tales que: si* $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^*\| < \delta$, *entonces*

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0^*)\| \leq Ae^{\alpha t}, \quad \textit{para} \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Un sistema dinámico tiene una solución lyapunovmente estable si las trayectorias que parten cerca de ella no se alejan; la solución es asintóticamente estable si esas trayectorias se acercan, y es exponencialmente estable

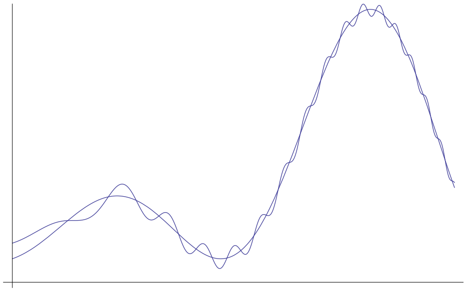


Figura 7.8: La solución del sistema es asintóticamente estable: variaciones en el valor de la condición inicial $x(0)$ producen soluciones convergentes.

si se acercan en forma exponencial (muy rápido). En otro caso la solución es inestable.

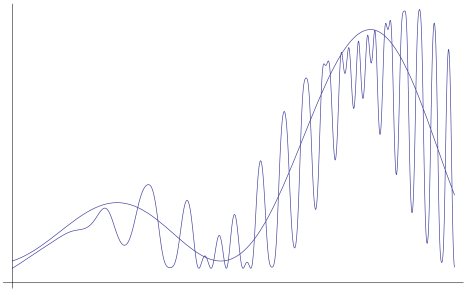


Figura 7.9: Sistema inestable: leves variaciones en la condición inicial producen distorsiones en la solución.

7.2.3. Ecuaciones de primer orden

Puesto que no existe un procedimiento general para encontrar la solución de una ecuación de primer orden no lineal,

$$x_{t+1} = f(x_t),$$

es posible, por medio de la gráfica de la curva $y = f(x)$, determinar el comportamiento de los puntos de equilibrio, $f(p) = p$. Si $x_0 = p$, la sucesión x_t se vuelve constante, es decir, $x_t = p$, para $t = 1, 2, 3, \ldots$. El análisis de estos puntos es la versión discreta de un **diagrama de fase** en el cual se grafica el comportamiento de la sucesión dada por la recursión $x_t = f(x_{t-1})$. Al iterar esta recursión se encuentra sucesivamente

$$x_t = f(x_{t-1}) = f(f(x_{t-2})) = f(f(f(x_{t-3}))) = \ldots = f^{[t]}(x_0),$$

donde el paréntesis cuadrado indica el número de veces que se compone f.

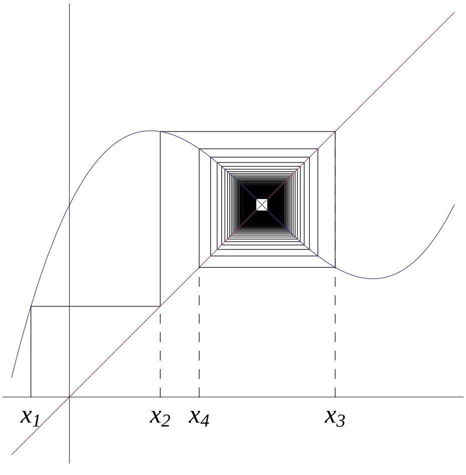


Figura 7.10: Comportamiento gráfico de la ecuación $x_{t+1} = f(x_t)$.

Gráficamente, a partir de un valor inicial x_0 se encuentra el valor de x_t para cualquier t. Para esto se calculan todos los valores de la sucesión entre 0 y t. x_1 es el valor de $f(x_0)$ que está en el cruce de la recta vertical que pasa por x_0 con la curva $y = f(x)$, para calcular $x_2 = f(x_1)$ se proyecta x_1 sobre el eje horizontal, esto equivale a encontrar el cruce de la recta horizontal que pasa por $x_1 = f(x_0)$ con la recta $y = x$. El valor de x_2 está en la intersección de la recta vertical que pasa por x_1 con la curva $y = f(x)$. Iterando este proceso, para un valor inicial de x_0 se encuentra el comportamiento de la sucesión con respecto a los puntos de equilibrio; gráficamente, estos puntos se encuentran en la intersección de la recta $y = x$ con la curva $y = f(x)$.

Para determinar el comportamiento de los puntos de equilibrio, se analiza la ecuación con valores iniciales tomados cerca de los puntos de equilibrio (como lo muestra la figura 7.10). Los puntos de equilibrio pueden ser **atractivos** (asintóticamente estables) o **repulsivos**. Un punto de equilibrio $\bar{x}$ es atractor si la sucesión converge a $\bar{x}$ cuando el valor inicial está en una vecindad de $\bar{x}$, $x_0 \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$ para algún $\delta > 0$. Estos puntos son estables en el sentido que pequeñas perturbaciones del sistema en equilibrio lo conducen nuevamente al mismo punto de equilibrio. En el caso que las perturbaciones lo alejen del equilibrio, los puntos son repulsores o **inestables**.

Algunas sucesiones tienen, además de los puntos de equilibrio, otros puntos de interés. Un punto p es un **punto periódico de orden** k para la ecuación $x_{t+1} = f(x_t)$, si k es el menor entero positivo para el que

$$p = f(f(...(f(p))...)) = f^{[k]}(p),$$

la sucesión retorna el valor p después de k iteraciones.

El conjunto de los k puntos distintos $\{p, p_1, ..., p_{k-1}\}$, tales que

$$f(p) = p_1,\ f^{[2]}(p) = p_2, \ldots, f^{[k-1]}(p) = p_{k-1}$$

forman un k**-ciclo** o una **órbita de periodo** k. Éstos pueden ser atractivos o repulsivos, este comportamiento es similar al de los puntos de equilibrio.

El siguiente teorema que da el comportamiento de los puntos de equilibrio y los ciclos de la ecuación $x_{t+1} = f(x_t)$ está basado en el teorema de Taylor al aproximar linealmente la función $f(x)$ alrededor del punto de equilibrio de la ecuación,

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Por lo tanto, el comportamiento de la ecuación $x_{t+1} = f(x_t)$ es aproximadamente igual al de la ecuación

$$x_{t+1} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x})$$

para la cual el comportamiento del punto de equilibrio está determinado por $f'(\bar{x})$.

Teorema 7.2. *Si $\bar{x}$ es un punto de equilibrio para la ecuación $x_{t+1} = f(x_t)$ y f' existe y es continua en $\bar{x}$. Entonces*

1. *Si $0 < f'(\bar{x}) < 1$ y x_0 está en una vecindad de $\bar{x}$, la sucesión x_t es monótona y converge a $\bar{x}$.*

2. *Si $-1 < f'(\bar{x}) < 0$ y x_0 está en una vecindad de $\bar{x}$, la sucesión x_t es oscilante amortiguada y converge a $\bar{x}$.*

3. *Si $f'(\bar{x}) > 1$ y $x_0 \neq \bar{x}$ está en una vecindad de $\bar{x}$, la sucesión x_t diverge en forma monótona de $\bar{x}$.*

4. *Si* $f'(\bar{x}) < -1$ *y* $x_0 \neq \bar{x}$ *está en una vecindad de* $\bar{x}$*, la sucesión* x_t *diverge en forma oscilante explosiva de* $\bar{x}$*.*

5. *Si* $f'(\bar{x}) = 1$*,* $f'(x) - 1$ *cambia de positivo a negativo en* $\bar{x}$ *y* x_0 *está en una vecindad a la derecha de* $\bar{x}$*, la sucesión* x_t *converge en forma decreciente a* $\bar{x}$*.*

6. *Si* $f'(\bar{x}) = -1$ *y* x_0 *está en una vecindad de* $\bar{x}$*, la sucesión* x_t *converge a* $\bar{x}$ *en forma oscilante amortiguada.*

Si $p, p_1, p_2, ..., p_{k-1}$ *forman un k-ciclo, éste es atractivo si*

$$\left| f'(p) f'(p_1) f'(p_2) ... f'(p_{k-1}) \right| < 1$$

y es repulsivo si

$$\left| f'(p) f'(p_1) f'(p_2) ... f'(p_{k-1}) \right| > 1.$$

Ejemplos

1. La sucesión definida por la ecuación en recurrencia de primer orden

$$x_{t+1} = k x_t (1 - x_t),$$

con $k > 0$, tiene sus puntos de equilibrio en las soluciones de la ecuación

$$\bar{x} = f(\bar{x}) = k\bar{x}(1 - \bar{x})$$

que son $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = (k-1)/k$. Por otra parte, puesto que

$$f'(\bar{x}) = k(1 - 2\bar{x}), \quad f'(0) = k \quad \text{y} \quad f'((k-1)/k) = 2 - k,$$

entonces, dependiendo del valor de k, estos puntos serán atractores o repulsores.

2. Para

$$x_{t+1} = g(x_t) = x_t^2 - 6$$

los puntos de equilibrio son los que satisfacen la ecuación

$$\bar{x} = g(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 6$$

que son $\bar{x} = 3$ y $\bar{x} = -2$. Puesto que $g'(\bar{x}) = 2\bar{x}$, $|g'(3)| = 6$ y $|g'(-2)| = 4$, entonces ambos son puntos de equilibrio repulsivos.

Los 2-ciclos están formados por los puntos que satisfacen la ecuación

$$p = g^{[2]}(p) = \left(p^2 - 6\right)^2 - 6$$

que no sean puntos de equilibrio. Los puntos que satisfacen la ecuación son $p = 3$, $p = -2$, $p = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ y $p = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$; los dos primeros son puntos de equilibrio por lo tanto el 2-ciclo está formado por los dos segundos. Como

$$g'\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) g'\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) = 4\frac{1+\sqrt{21}}{2}\frac{1-\sqrt{21}}{2} = -20 < 1$$

el 2-ciclo $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$ es atractivo

Ejercicios

1. Encontrar, si existen, las órbitas de la sucesión $\left\{\cos\frac{t\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{t\pi}{2}\right\}$.

2. Para la ecuación
$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t).$$
Encontrar:
   a) Los 2-ciclos.
   b) Los 3-ciclos y determinar si son atractivos o repulsivos.

3. Para la ecuación
$$x_{t+1} = 2x_t^2 + 1,$$
encontrar y clasificar, si existen, los puntos de equilibrio y los ciclos de orden 2 y 3.

4. Encontrar los valores de c para los que la ecuación
$$x_{t+1} = x_t^2 + c$$
tiene:
   a) Puntos de equilibrio.
   b) Puntos de equilibrio estables.
   c) 2-ciclos.

d) 2-ciclos atractivos.

5. Identificar el tipo de estabilidad que producen cada uno de los casos del teorema 7.2.

6. Describir por medio de ecuaciones en recurrencia el capital acumulado hasta el mes t en una cuenta de ahorros que rinde $r\,\%$ mensual, si inicialmente se invierten $\$v$, cada mes se ahorra $\$c$ y semestralmente $\$b$.

7.2.4. Ecuaciones en diferencias lineales de orden n con coeficientes constantes

Puesto que toda ecuación de orden n se puede reducir a un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas y todo sistema lineal $n \times n$ se puede reducir a una ecuación de orden n, en este capítulo solo se solucionan ecuaciones. Para encontrar la solución de una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

$$c_n x_{t+n} + c_{n-1} x_{t+n-1} + \cdots + c_1 x_{t+1} + c_0 x_t = 0$$

se asume que la solución es de la forma $x_t = r^t$ para algún r, ya que para ésta $x_{t+n} = r^{t+n} = r^n x_t$ (el valor en cualquier periodo es múltiplo de valor en el momento t). El valor de r se determina reemplazando la solución en la ecuación,

$$\begin{aligned} &c_n r^{t+n} + c_{n-1} r^{t+n-1} + \cdots + c_1 r^{t+1} + c_0 r^t \\ &= r^t \left(c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r + c_0\right) = 0 \end{aligned}$$

esta ecuación solamente se satisface si r es solución de la ecuación,

$$c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r + c_0 = 0$$

llamada **ecuación característica.**

Se deja como ejercicio que el lector pruebe que la solución de una ecuación forma un espacio vectorial (la dimensión de este espacio es igual al orden de la ecuación); para esto basta ver que cualquier combinación lineal de soluciones es solución, es decir, si x_t^1 y x_t^2 son soluciones de la ecuación, entonces

$$k_1 x_t^1 + k_2 x_t^2$$

es una solución, con k_1 y $k_2$constantes, y que una base del espacio tiene tantas soluciones linealmente independientes como el orden de la ecuación. Todas las posibles soluciones de la ecuación están determinadas por todas las combinaciones lineales de los elementos de una base. Por lo tanto, si x_t^1, x_t^2,...,x_t^n son soluciones linealmente independientes de una ecuación, todas las posibles soluciones de la ecuación están determinadas por todos los posibles valores de las constantes $k_1, k_2, ..., k_m$. Esto es

$$k_1 x_t^1 + k_2 x_t^2 + ... + k_n x_t^n$$

es una familia de soluciones. Una solución se determina encontrando los valores de las constantes $k_1, k_2, ..., k_n$ que se encuentran a partir de las condiciones iniciales.

7.2.5. Ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

El sistema

$$\begin{cases} x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t \\ y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t \end{cases}$$

en forma matricial

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t, \quad \text{donde} \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se reduce a una ecuación despejando y_t en la primera ecuación,

$$y_t = \frac{1}{a_{12}} x_{t+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_t$$

y reemplazando en la segunda ecuación,

$$\frac{1}{a_{12}} x_{t+2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}} x_{t+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_t\right).$$

Multiplicando por a_{12},

$$x_{t+2} - a_{11}x_{t+1} = a_{12}a_{21}x_t + a_{22}\left(x_{t+1} - a_{11}x_t\right)$$

y transponiendo términos,

$$x_{t+2} - (a_{11} + a_{22})x_{t+1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_t = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$x_{t+2} - \mathrm{Tr}(A)x_{t+1} + |A|\, x_t = 0$$

donde $\mathrm{Tr}(A)$ y $|A|$ son respectivamente la traza y el determinante de la matriz A. Esta última es un caso particular de la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de segundo orden,

$$ax_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = 0$$

la ecuación característica es

$$ar^2 + br + c = 0$$

sus soluciones son

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Éstas pueden ser reales o complejas dependiendo del discriminante, $b^2 - 4ac$. Puesto que la ecuación es de segundo orden el espacio solución es un espacio vectorial de dimensión 2 que está generado por las combinaciones lineales de dos soluciones linealmente independientes:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales distintas y la solución de la ecuación es
$$x_t = k_1 r_1^t + k_2 r_2^t.$$

2. Si $b^2 = 4ac$ las raíces son iguales y la solución es
$$x_t = k_1 r^t + k_2 t r^t.$$

3. Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas conjugadas, $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$, la solución
$$x_t = k_1 r_1^t + k_2 r_2^t = k_1(\alpha + i\beta)^t + k_2(\alpha - i\beta)^t$$
Puesto que la solución para cada t es real, en particular para $t = 0$ y $t = 1$,
$$x_0 = k_1 + k_2 \text{ y } x_1 = k_1(\alpha + i\beta) + k_2(\alpha - i\beta)$$
despejando en la primera, $k_1 = x_0 - k_2$ y reemplazando en la segunda,
$$x_1 = (x_0 - k_2)(\alpha + i\beta) + k_2(\alpha - i\beta)$$

de donde

$$k_2 = \frac{x_0(\alpha + i\beta) - x_1}{2i\beta} = \frac{x_0}{2} - \frac{\alpha x_0 - x_1}{2\beta} i.$$

De aquí,

$$k_1 = x_0 - \left(\frac{x_0}{2} - \frac{\alpha x_0 - x_1}{2\beta} i \right) = \frac{x_0}{2} + \frac{\alpha x_0 - x_1}{2\beta} i.$$

Es decir, $k_1 = \bar{k}_2$.

Llevando $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$ a forma polar

$$r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

donde $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ es el módulo y $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$ es el argumento de la raíz. Usando el teorema de De Möivre[2], la solución se convierte en

$$\begin{aligned}
x_t &= k_1 r_1^t + k_2 r_2^t \\
&= k_1(\alpha + i\beta)^t + k_2(\alpha - i\beta)^t \\
&= k_1 \left[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right]^t + k_2 \left[\rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)\right]^t \\
&= k_1 \left[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right]^t + k_2 \left[\rho(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))\right]^t \\
&= \rho^t \left[k_1(\cos(t\theta) + i \operatorname{sen}(t\theta)) + k_2(\cos(-t\theta) + i \operatorname{sen}(-t\theta))\right] \\
&= \rho^t \left[k_1(\cos(t\theta) + i \operatorname{sen}(t\theta)) + k_2(\cos(t\theta) - i \operatorname{sen}(t\theta))\right] \\
&= \rho^t \left[(k_1 + k_2)\cos(t\theta) + i(k_1 - k_2)\operatorname{sen}(t\theta)\right]
\end{aligned}$$

Como se mostró antes que $k_1 = \bar{k}_2$, entonces $k_1 + k_2 = 2\mathrm{Re}(k_1)$ y $k_1 - k_2 = 2i\mathrm{Im}(k_1)$ por lo tanto $k_1 + k_2$ y $i(k_1 - k_2)$ son dos constantes reales y la solución finalmente es

$$x_t = \rho^t \left[c_1 \cos(t\theta) + c_2 \operatorname{sen}(t\theta)\right]$$

donde c_1 y c_2 son números reales que se determinan por las condiciones iniciales.

Ejercicios

1. Comprobar que la solución para raíces reales iguales toma la forma propuesta en el texto.

[2] $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^t = \cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta$.

2. Solucionar las siguientes ecuaciones en diferencias:

   a) $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t, x_1 = x_0 = 1$.

   b) $x_{t+2} + 5x_{t+1} + 6x_t = 0$.

   c) $x_{t+2} + x_{t+1} + x_t = 0$, $x_1 = 1$ y $x_0 = 2$.

   d) $x_{t+2} + x_{t+1} + (1/4)x_t = 0$, $x_1 = 2$ y $x_0 = -1$.

3. Probar que si $(r_1)^t$ y $(r_2)^t$ son soluciones de la ecuación

$$ax_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = 0.$$

   Entonces $k_1(r_1)^t + k_2(r_2)^t$ es una solución para cualquier valor de k_1 y k_2.

7.2.6. Comportamiento de la solución

El análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio de una ecuación o un sistema se puede realizar sin encontrar la solución, para esto se establece el comportamiento de las raíces en función de los coeficientes o parámetros.

La ecuación equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t \end{cases}$$

es

$$x_{t+2} - \mathrm{Tr}(A)x_{t+1} + |A|x_t = 0$$

su polinomio característico es

$$r^2 - \mathrm{Tr}(A)r + |A| = 0.$$

Si las soluciones de la ecuación característica son r_1 y r_2, entonces

$$(r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1r_2$$

por lo tanto $\mathrm{Tr}(A)r = r_1 + r_2$ y $|A| = r_1r_2$.

Puesto que las raíces son:

1. Reales distintas cuando $\mathrm{Tr}(A)^2 > 4|A|$. En este caso la solución de la ecuación es

$$x_t = k_1r_1^t + k_2r_2^t.$$

esta solución es estable si y sólo si las sucesiones r_1^t y r_2^t son convergentes, para lo cual se debe determinar si r_1 y r_2 están en el intervalo $[-1, 1]$. Para esto basta con determinar el signo de las expresiones

$$(1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2 = 1 + \mathrm{Tr}(A) + |A|$$

y

$$(1 + r_1)(1 + r_2) = 1 + (r_1 + r_2) + r_1 r_2 = 1 - \mathrm{Tr}(A) + |A|,$$

ya que el signo de $1 - \mathrm{Tr}(A) + |A|$ determina la posición de las raíces con respecto a 1: si es positivo ambas raíces están al mismo lado de 1 (ambas son mayores que 1 o menores que 1) y si es negativo una está a la izquierda y la otra a la derecha de 1; el signo de $1 + \mathrm{Tr}(A) + |A|$ indica la posición de las raíces con respecto a -1: si es positivo ambas raíces están al mismo lado de -1 y si es negativo hay una a cada lado de -1; existen tantas posibilidades de combinación de estos signos como de las raíces con respecto a 1 y -1:

a) $1 + \mathrm{Tr}(A) + |A| > 0$, $1 - \mathrm{Tr}(A) + |A| > 0$ y $\mathrm{Tr}(A) > 2$ si y sólo si $r_1 > 1$ y $r_2 > 1$. En este caso r_1^t y r_2^t son sucesiones estrictamente crecientes que divergen a ∞ y la ecuación solo es estable cuando $k_1 = k_2 = 0$, esto es, en el equilibrio el punto se conoce como **nodo inestable**.

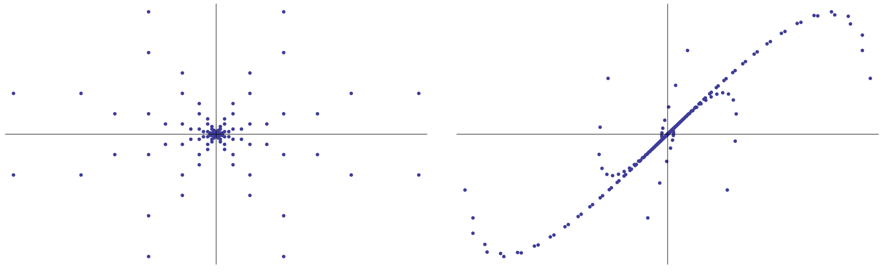


Figura 7.11: Graficas de trayectorias solución para sistemas cuyos puntos de equilibrio son nodos estables.

b) $1 + \mathrm{Tr}(A) + |A| > 0$, $1 - \mathrm{Tr}(A) + |A| > 0$ y $\mathrm{Tr}(A) < -2$ si y sólo si $r_1 < -1$ y $r_2 < -1$. r_1^t y r_2^t son sucesiones oscilantes explosivas, por lo que la ecuación es inestable y el punto de equilibrio es otra forma de nodo inestable.

c) $1 + \mathrm{Tr}(A) + |A| > 0$, $1 - \mathrm{Tr}(A) + |A| > 0$ y $-2 < \mathrm{Tr}(A) < 2$ si y sólo si $-1 < r_1 < 1$ y $-1 < r_2 < 1$. r_1^t y r_2^t son sucesiones convergentes, por lo tanto la ecuación es estable; puesto que la solución involucra sucesiones de la forma α^t y la convergencia no depende de los valores de k_1 y k_2, se tiene que el equilibrio es globalmente exponencialmente estable y se conoce como **nodo estable**.

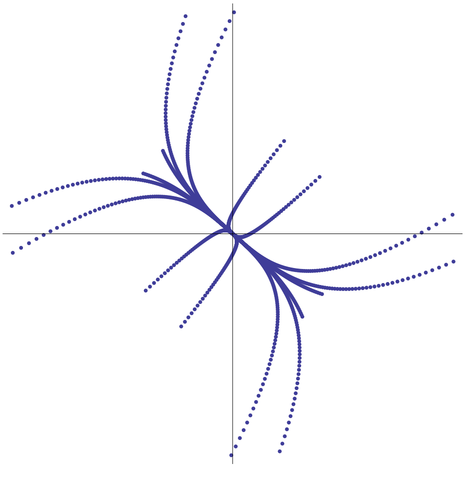


Figura 7.12: Comportamiento gráfico de las soluciones de un sistema con punto de silla. El punto de equilibrio es localmente exponencialmente estable.

d) $1+\mathrm{Tr}(A)+|A| > 0$, $1-\mathrm{Tr}(A)+|A| < 0$ si y sólo si $-1 < r_1 < 1$ y $r_2 > 1$. r_1^t es convergente y r_2^t es divergente a ∞; la ecuación sólo es estable cuando $k_2 = 0$, es decir, la estabilidad depende de las condiciones iniciales (localmente estable). El comportamiento de este equilibrio es conocido como **punto de silla**.

e) $1 + \mathrm{Tr}(A) + |A| < 0$, $1 - \mathrm{Tr}(A) + b > 0$ si y sólo si $r_1 < -1$ y $-1 < r_2 < 1$. r_1^t es oscilante explosiva y r_2^t es convergente; la ecuación sólo es estable cuando $k_1 = 0$. Otra variante de un punto de silla.

f) $1 + \mathrm{Tr}(A) + |A| < 0$, $1 - \mathrm{Tr}(A) + b < 0$ si y sólo si $r_1 < -1$ y $r_2 > 1$. r_1^t es oscilante explosiva y r_2^t es creciente a ∞; la ecuación sólo es estable cuando $k_1 = k_2 = 0$, esto es, en el equlilibrio. el punto de equilibrio es un nodo inestable.

2. Reales iguales, cuando $\mathrm{Tr}(A)^2 = 4|A|$. Las raíces son

$$r_1 = r_2 = -\frac{\mathrm{Tr}(A)}{2},$$

y la convergencia se desprende del valor de $\mathrm{Tr}(A)$. Si $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$ la solución converge y la ecuación es globalmente exponencialmente estable (nodo estable) sino es inestable (nodo inestable).

3. Complejas conjugadas, cuando $\mathrm{Tr}(A)^2 < 4|A|$, por lo tanto

$$r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$$

y en forma polar $r_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 = r_1\bar{r}_1 = r_1 r_2 = |A|.$$

Para que la solución converja, ρ debe ser menor que uno, esto es, $|A|$ debe ser menor que uno; en este caso nuevamente la ecuación es globalmente exponencialmente estable (**espiral estable**). Si $\rho = 0$ la ecuación es lyapunovmente estable ya que la solución está en función de senos y cosenos y estas funciones están acotadas por 1 (**centro**). Y si $\rho > 0$ el punto es inestable (**espiral inestable**).

7.2.7. Ecuaciones homogéneas de orden n

Puesto que la solución de una ecuación lineal homogénea de orden n está asociada a la solución de su ecuación característica y por el teorema fundamental del álgebra esta última tiene exactamente n raíces complejas, estas raíces pueden ser reales o complejas y si son reales pueden ser iguales o distintas. Dependiendo de esto la solución general de la ecuación en diferencias contiene los siguientes términos.

Si la raíz r del polinomio característico es:

1. Real y solamente ocurre una vez (multiplicidad 1), la solución general contiene un término de la forma kr^t.

2. Real y se repite m veces (multiplicidad m), la solución general contiene los términos: k_1r^t, k_2tr^t, $k_3t^2r^t$, $k_4t^3r^t$, …, $k_mt^{m-1}r^t$.

3. Compleja (su conjugado también es raíz) y ocurre solamente una vez (multiplicidad 1), por estas dos raíces ($r = a+ib$ y $\bar{r} = a-ib$) la solución general contiene los términos: $k_1\rho^t \operatorname{sen}(t\theta)$ y $k_2\rho^t \cos(t\theta)$ donde

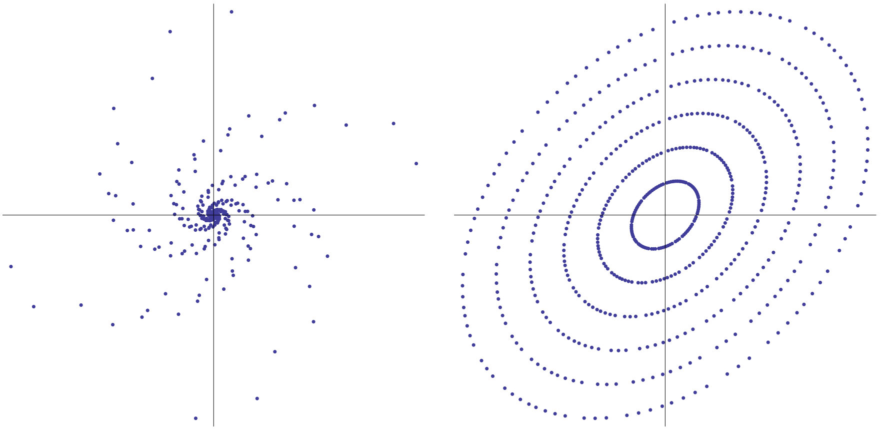


Figura 7.13: Graficas de trayectoria para sistemas cuyos puntos de equilibrio son espiral estable y centro, respectivamente. El primero es globalmente exponencialmente estable y el segundo es lyapunovmente estable, cada condición inicial produce una solución casi-cíclica.

$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y θ es el argumento de r, estos valores representan la longitud y el ángulo del número complejo.

4. Compleja (su conjugado también es raíz) y ocurre m veces (multiplicidad m), por estas $2m$ raíces ($r = a + ib$ y $\bar{r} = a - ib$) aparecen los términos: $k_1\rho^t \operatorname{sen}(t\theta)$,$k_2\rho^t \cos(t\theta)$, $k_3t\rho^t \operatorname{sen}(t\theta)$, $k_4t\rho^t \cos(t\theta)$,..., $k_{2m-1}t^{m-1}\rho^t \operatorname{sen}(t\theta)$, $k_{2m}t^{m-1}\rho^t \operatorname{sen}(t\theta)$.

7.2.8. Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes

La solución de una ecuación no homogénea

$$c_n x_{t+n} + c_{n-1}x_{t+n-1} + \cdots + c_1 x_{t+1} + c_0 x_t = a_t \tag{7.2}$$

está formada por una solución de la homogénea asociada

$$c_n x_{t+n} + c_{n-1}x_{t+n-1} + \cdots + c_1 x_{t+1} + c_0 x_t = 0$$

y por una solución particular, es decir, $x_t = x_t^h + x_t^p$, donde x_t^h es solución de la ecuación anterior y x_t^p es solución de la ecuación (7.2). Esta solución particular tiene la misma forma de la sucesión $\{a_t\}$: si $\{a_t\}$ es constante, la solución particular es constante y su valor se determina reemplazando en la ecuación (7.2); en este caso la solución particular es el punto de equilibrio de la ecuación. Si $\{a_t\}$ es un polinomio en t, la solución es otro polinomio en t y sus coeficientes se calculan por reemplazo e igualación en la ecuación (7.2). Cuando la sucesión $\{a_t\}$ es r^t y r es raíz de multiplicidad k del polinomio característico, la solución particular es

$$c_1 r^t + c_2 t r^t + c_3 t^2 r^t + c_4 t^3 r^t + ... + c_{k+1} t^{k+1} r^t$$

y nuevamente los c se determinan por reemplazo.

Ejemplos

1. Para encontrar la solución de la ecuación

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = t^2 + t + 3(4)^t, \quad \text{con} \quad x_0 = 1 \text{ y } x_1 = 4.$$

Inicialmente se soluciona la homogénea asociada,

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0.$$

Su ecuación característica

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

tiene como raíces $r = 2$ y $r = 3$, por lo que la solución de la homogénea es,

$$x_t^h = c_1(2)^t + c_2(3)^t.$$

La solución particular es de la forma

$$x_t^p = at^2 + bt + c + d(4)^t.$$

Para calcular los coeficientes se reemplaza en la ecuación original,

$$x_{t+2}^p - 5x_{t+1}^p + 6x_t^p = t^2 + t + 3(4)^t,$$

lo que, sucesivamente, se convierte en

$$
\begin{aligned}
x_{t+2}^p - 5x_{t+1}^p + 6x_t^p &= a(t+2)^2 + b(t+2) + c + d(4)^{t+2} \\
&- 5\left(a(t+1)^2 + b(t+1) + c + d(4)^{t+1}\right) \\
&+ 6\left(at^2 + bt + c + d(4)^t\right) \\
&= a(t^2+4t+4) + b(t+2) + c + 16d(4)^t \\
&- 5\left(a(t^2+2t+1) + b(t+1) + c + 4d(4)^t\right) \\
&+ 6\left(at^2 + bt + c + d(4)^t\right) \\
&= (a - 5a + 6a)t^2 + (4a + b - 10a - 5b + 6b)t \\
&+ (4a + 2b + c - 5a - 5b - 5c + 6c) \\
&+ (16d - 20d + 6d)4^t \\
&= 2at^2 + (-6a - 2b)t + (-a - 3b + 2c) + 2d(4)^t \\
&= t^2 + t + 3(4)^t.
\end{aligned}
$$

Al igualar coeficientes en la última ecuación, $2a = 1$, $-6a - 2b = 1$, $-a - 3b + 2c = 0$ y $2d = 3$. De donde, $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = -\frac{5}{4}$ y $d = \frac{3}{2}$, de donde

$$x_t^p = \frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}(4)^t$$

y

$$x_t = c_1(2)^t + c_2(3)^t + \frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}(4)^t.$$

Para encontrar c_1 y c_2 se soluciona el sistema,

$$
\begin{cases}
x_0 = 1 = c_1(2)^0 + c_2(3)^0 + \frac{1}{2}0^2 - 2(0) - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}(4)^0 \\
x_1 = 4 = c_1(2)^1 + c_2(3)^1 + \frac{1}{2}1^2 - 2(1) - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}(4)^1,
\end{cases}
$$

que equivale a

$$
\begin{cases}
1 = c_1 + c_2 - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = c_1 + c_2 + \frac{1}{4} \\
4 = 2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{2} - 2 - \frac{5}{4} + 6 = 2c_1 + 3c_2 + \frac{13}{4},
\end{cases}
$$

cuya solución es $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = -\frac{3}{4}$ y la solución del problema, con condiciones iniciales, es

$$x_t = \frac{3}{2}(2)^t - \frac{3}{4}(3)^t + \frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}(4)^t.$$

2. La solución de la ecuación

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 2t + 4(2)^t, \quad \text{con} \quad x_0 = 2 \text{ y } x_1 = 3$$

difiere de la del ejercicio anterior en la solución particular, en esta tiene la forma

$$x_t^p = at + b + c(2)^t + dt(2)^t$$

porque $(2)^t$ hace parte de la solución de la homogénea. Para calcular los coeficientes se reemplaza en la ecuación

$$\begin{aligned} x_{t+2}^p - 5x_{t+1}^p + 6x_t^p &= a(t+2) + b + c(2)^{t+2} + d(t+2)(2)^{t+2} \\ &- 5\left(a(t+1) + b + c(2)^{t+1} + d(t+1)(2)^{t+1}\right) \\ &+ 6\left(at + b + c(2)^t + dt(2)^t\right) \\ &= 2at - 3a + 2b - 2d(2)^t \\ &= 2t + 4(2)^t \end{aligned}$$

de la última igualdad $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $d = -2$ y c puede tomar cualquier valor. La solución es

$$x_t = c_1(2)^t + c_2(3)^t + t + \frac{3}{2} + c(2)^t - 2t(2)^t = \alpha(2)^t + c_2(3)^t + t + \frac{3}{2} - 2t(2)^t.$$

$\alpha = -3$ y $c_2 = \frac{7}{2}$ son la solución del sistema

$$\begin{cases} 2 = \alpha + c_2 + \frac{3}{2} \\ 3 = 2\alpha + 3c_2 + 1 + \frac{3}{2} - 4, \end{cases}$$

resultante de reemplazar las condiciones iniciales en la solución. Por lo tanto, la solución de la ecuación es,

$$x_t = -3(2)^t + \frac{7}{2}(3)^t + t + \frac{3}{2} - 2t(2)^t.$$

3. Si el modelo de mercado las cantidades demandadas y ofrecidas dependen del nivel y del incremento de los precios en el último periodo,

$$D_t = D\left(p_t, p_{t-1}\right) = a - bp_t + c\left(p_t - p_{t-1}\right),$$

$$O_t = O\left(p_t, p_{t-1}\right) = \beta p_t - \alpha + \gamma\left(p_t - p_{t-1}\right).$$

La ecuación que rige los precios es

$$\begin{aligned} p_{t+1} - p_t &= \theta\left[D_t - O_t\right] \\ &= \theta\left\{a - bp_t + c\left(p_t - p_{t-1}\right) - \left[\beta p_t - \alpha + \gamma\left(p_t - p_{t-1}\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

θ es un parámetro de ajuste. Después de transponer términos la ecuación anterior equivale a

$$p_{t+1} + [\theta(b - c + \beta + \gamma) - 1]p_t + \theta(c - \gamma)p_{t-1} = \theta(a + \alpha),$$

en forma reducida,

$$p_{t+1} + Bp_t + Cp_{t-1} = D,$$

con $B = \theta(b-c+\beta+\gamma)-1$, $C = \theta(c-\gamma)$ y $D = \theta(a+\alpha)$. La solución de la ecuación homogénea asociada,

$$p_{t+1} + Bp_t + Cp_{t-1} = 0$$

es

$$p_t^h = c_1\left(B - \sqrt{B^2 - 4C}\right)^t + c_2\left(B + \sqrt{B^2 - 4C}\right)^t,$$

donde, c_1 y c_1 están dadas por las condiciones iniciales. Como El término independiente de la ecuación es constante la solución particular es su punto de equilibrio,

$$p_t^p = \bar{p} = \frac{D}{1 + B + C}.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es

$$p_t = c_1\left(B - \sqrt{B^2 - 4C}\right)^t + c_2\left(B + \sqrt{B^2 - 4C}\right)^t + \frac{D}{1 + B + C}.$$

Para encontrar los valores de c_1 y c_1 se soluciona el sistema,

$$\begin{cases} p_0 &= c_1 + c_2 \\ p_1 &= c_1\left(B - \sqrt{B^2 - 4C}\right) + c_2\left(B + \sqrt{B^2 - 4C}\right) + \frac{D}{1+B+C}, \end{cases}$$

resultante de reemplazar los valores iniciales de los precios en la solución.

Ejercicios

1. Probar que la solución particular de la ecuación

$$p_{t+1} + [\theta(b - c + \beta + \gamma) - 1]p_t + \theta(c - \gamma)p_{t-1} = \theta(a + \alpha)$$

es el precio de equilibrio del modelo lineal estático:

$$D(p) = a - bp \quad \text{y} \quad O(p) = \beta p - \alpha.$$

2. Encontrar la solución general de la ecuación

$$p_{t+1} + [\theta(b - c - \beta + \gamma) - 1]p_t + \theta(c - \gamma)p_{t-1} = \theta(a + \alpha)$$

y describir las condiciones para que la solución sea estable.

3. Solucionar las siguientes ecuaciones en diferencias:

   a) $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t + t - 3$, $x_1 = x_0 = 1$.

   b) $x_{t+2} + 5x_{t+1} + 6x_t = (-2)^t + 3^t$.

   c) $x_{t+2} + x_{t+1} + x_t = t^2 + t + 1$, $x_1 = 1$ y $x_0 = 2$.

   d) $x_{t+2} + x_{t+1} + (1/4)x_t = t(1/2)^t$, $x_1 = 2$ y $x_0 = -1$.

4. Hicks en uno de sus escritos usa la siguiente ecuación

$$Y_{t+2} - (b + k)Y_{t+1} + kY_t = a(1 + g)^t$$

donde a, b, g y k son constantes.

   a) Encontrar la solución particular de la ecuación.

   b) Dar condiciones sobre los parámetros para que la ecuación tenga soluciones reales distintas, reales iguales y complejas.

   c) Dar condiciones sobre los parámetros para que la solución sea estable.

7.3. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias

El modelaje de sistemas dinámicos que interactúan se hace por medio de sistemas de ecuaciones en diferencias o diferenciales, dependiendo de si la dinámica es continua o discreta[3]. Los sistemas más “simples” de solucionar son los lineales con coeficientes constantes que tienen la forma

$$\begin{cases} x_{t+1}^1 = a_{11}x_t^1 + a_{12}x_t^2 + \cdots + a_{1n}x_t^n + b_1 \\ x_{t+1}^2 = a_{21}x_t^1 + a_{22}x_t^2 + \cdots + a_{2n}x_t^n + b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad . \\ x_{t+1}^n = a_{n1}x_t^1 + a_{n2}x_t^2 + \cdots + a_{nn}x_t^n + b_n \end{cases}$$

donde x_t^k representa el estado de la k-ésima variable en el momento t, para $k = 1, 2, ..., n$. Usando matrices, el sistema se representa en forma compacta por

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B$$

donde A es la matriz $n \times n$ de coeficientes, $\mathbf{x}_t$ es el vector de estado de las n variables en t y B es el vector de términos independientes. La solución está formada por la solución particular (punto de equilibrio) y la solución de la homogénea,

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}^p + \mathbf{x}_t^h = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_t^h.$$

En el caso de que el sistema sea homogéneo, $B = 0$, la ecuación matricial equivale a

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1}$$

Si se itera esta última ecuación hasta $t = 0$, se encuentra

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} = A(A\mathbf{x}_{t-2}) = A^2\mathbf{x}_{t-2} = \cdots = A^t\mathbf{x}_0$$

y el problema a solucionar se reduce a cómo calcular la potencia t-ésima de la matriz A. Si esta matriz tiene valores propios distintos, el álgebra lineal garantiza que sus vectores propios forman una base del espacio $\mathbb{R}^n$, por lo tanto, $\mathbf{x}_0$ (el estado inicial) se puede escribir como una combinación de esos vectores propios,

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i$$

Al reemplazar esta expresión en la solución de la ecuación se tiene sucesi-

[3]Ver las secciones 1 y 2 de la parte 1 del libro de Azariadis [Az].

vamente

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} = A^{t+1}\mathbf{x}_0 = A^{t+1}\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i = A^t\left(A\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i\right) &= A^t\left(\sum_{i=1}^{n} k_iA\mathbf{v}_i\right)\\
= A^t\left(\sum_{i=1}^{n} k_ir_i\mathbf{v}_i\right) = A^{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n} k_ir_i^2\mathbf{v}_i\right) &= \cdots\\
= \sum_{i=1}^{n} k_ir_i^{t+1}\mathbf{v}_i\end{aligned}$$

donde los r y los v son valores y vectores propios correspondientes a la matriz A. Estos valores determinan el comportamiento de la solución y como en el caso de ecuaciones de orden n para que haya convergencia deben tener valor absoluto menor que uno. Por este método el comportamiento de la solución depende del comportamiento de los valores propios de la matriz A. Así, el análisis de la convergencia o divergencia de la solución del problema solamente requiere los valores propios de la matriz de coeficientes. Este análisis sin el cálculo explícito de los valores propios se hace por medio del siguiente teorema que da condiciones sobre los coeficientes del polinomio

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n$$

para que las raíces (valores propios) tengan parte real con valor absoluto menor que uno.

Teorema 7.3. *(**Schur**) Todas las raíces de la ecuación*

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

tienen valor absoluto menor que uno si y sólo si los n determinantes siguientes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \cdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

son todos positivos.

7.4. Sistemas no lineales

No siempre es posible encontrar la solución analítica de un sistema no lineal,

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases}$$

pero es fácil describir su comportamiento vía la computación de una buena cantidad de términos de la sucesión de valores que forman la trayectoria solución en cualquier programa que sirva para tales fines (por ejemplo Excel).

Para hacer el análisis de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

se hace uso del teorema de **Hartman-Grobman** que garantiza que basta analizar los puntos de equilibrio de la linealización del sistema. La aplicación del teorema de Taylor a las funciones f y g al rededor del punto de equilibrio, $(\bar{x}, \bar{y})$, da las aproximaciones:

$$\begin{cases} f(x,y) \approx f(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) \\ g(x,y) \approx g(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}). \end{cases}$$

Reemplazando las condiciones de equilibrio,

$$\begin{cases} f(x,y) \approx \bar{x} + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) \\ g(x,y) \approx \bar{y} + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}). \end{cases}$$

Por tanto, basta analizar el sistema lineal,

$$\begin{cases} x_{t+1} = \bar{x} + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x_t - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y_t - \bar{y}) \\ y_{t+1} = \bar{y} + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x_t - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(y_t - \bar{y}), \end{cases}$$

haciendo las sustituciones, $z_t = x_t - \bar{x}$ y $w_t = y_t - \bar{y}$ el sistema equivalente es

$$\begin{cases} z_{t+1} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})z_t + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})w_t \\ w_{t+1} = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})z_t + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})w_t, \end{cases}$$

este tiene punto de equilibrio en el origen y su representación matricial es

$$\begin{pmatrix} z_{t+1} \\ w_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} (\bar{x},\bar{y}) \begin{pmatrix} z_t \\ w_t \end{pmatrix} = J(\bar{x},\bar{y}) \begin{pmatrix} z_t \\ w_t. \end{pmatrix}$$

La matriz J es la matriz jacobiana del sistema. La traza y el determinante de J determinan el comportamiento del punto de equilibrio del sistema linealizado. El teorema de Hartman-Grobman garantiza que el comportamiento del sistema linealizado y el no lineal son iguales si los valores característicos en el punto de equilibrio, esto es las soliciones de la ecuación

$$r^2 - \mathrm{Tr}\left(J(\bar{x},\bar{y})\right) r - |J(\bar{x},\bar{y})| = 0,$$

tienen módulo distinto de uno, $|r| \neq 1$.

Ejemplo

Los puntos de equilibrio del sistema,

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^2 + y_t^2 \\ y_{t+1} = x_t y_t - a y_t \end{cases}$$

satisfacen el par de ecuaciones,

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \\ \bar{y} = \bar{x}\bar{y} - a\bar{y}. \end{cases}$$

La segunda equivale a $\bar{y}(\bar{x} - a - 1) = 0$, de donde, $\bar{y} = 0$ o $\bar{x} = a + 1$. Reemplazando $\bar{y} = 0$ en la primera $\bar{x} = \bar{x}^2$, o $\bar{x}(\bar{x} - 1) = 0$ da los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Reemplazando $\bar{x} = a + 1$ en la primera, $a + 1 = a^2 + 2a + 1 + \bar{y}^2$ o $\bar{y}^2 = -a^2 - a$, que es un nḿero real, si $-1 \leq a \leq 0$ en cuyo caso $\bar{y} = \pm\sqrt{-a^2 - a}$ y los puntos de equilibrio correspondientes son $(a+1, \pm\sqrt{-a^2 - a})$. La matriz jacobiana del sistema es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x - a \end{pmatrix}$$

Calculando en cada punto de equilibrio:

1. $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}(J(0,0)) = -a$, $|J(0,0)| = 0$,

   $$\mathrm{Tr}^2(J(0,0)) - 4|J(0,0)| = a^2$$

   las raíces son reales. Como

   $$1 + \mathrm{Tr}(J(0,0)) + |J(0,0)| = 1 - a, \quad 1 - \mathrm{Tr}(J(0,0)) + |J(0,0)| = 1 + a$$

   a) si $-2 < a < 2$, $1 - a > 0$ y $1 + a > 0$ esto es, si $-1 < a < 1$; $(0,0)$ es nodo estable.

   b) si $1 - a > 0$ y $1 + a < 0$, o $1 - a < 0$ y $1 + a > 0$; $(0,0)$ es punto de silla.

   c) En cualquier otro caso (con $|a| \neq 1$), $(0,0)$ es nodo inestable.

2. $J(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}(J(1,0)) = 3 - a$, $|J(1,0)| = 2(1 - a)$,

   $$\mathrm{Tr}^2(J(1,0)) - 4|J(1,0)| = (3 - a)^2 - 8(1 - a) = (a + 1)^2$$

   las raíces son reales.

   $$1 + \mathrm{Tr}(J(1,0)) + |J(1,0)| = 3(2 - a), \quad 1 - \mathrm{Tr}(J(1,0)) + |J(1,0)| = -a.$$

   a) si $-2 < 3 - a < 2$, $2 - a > 0$ y $-a > 0$, $(1,0)$ es nodo estable. Pero no existe a que satisfaga esas condiciones.

   b) si $2 - a > 0$ y $-a < 0$, o $2 - a < 0$ y $-a > 0$; $(1,0)$ es punto de silla. Esto es, si $0 < a < 2$.

   c) Si $a > 2$ o $a < 0$, $(1,0)$ es nodo inestable.

Ejercicios

1. Terminar el análisis del comportamiento de los puntos de equilibrio del ejemplo anterior, esto es examinar la jacobiana en los puntos $(a+1, \pm\sqrt{-a^2-a})$.

2. La relación entre la demanda, la oferta y los precios en un cierto mercado está dada por:

   $D_t = a + bp_t$, con $a > 0$ y $b < 0$,
   $O_t = c + dp_t^E$, con $d > 0$ y p_t^E es el precio esperado por los productores,
   $p_t^E = p_{t-1} + k(p_N - p_{t-1}), p_N$ es el precio natural que se considera constante.

   a) Encontrar expresiones explícitas para la oferta, la demanda y los precios en función de t. Es decir, solucionar el modelo.

   b) Encontrar las condiciones para que exista convergencia en el modelo.

3. La empresa W ajusta sus precios de acuerdo con la cantidad que tiene en inventario. Si hay escasez los precios suben y si hay abundancia los precios bajan. El ajuste de los precios se hace proporcionalmente a la diferencia entre el inventario en cada periodo y un valor crítico de inventario I^*. Por otra parte, el inventario en cada periodo es la diferencia entre la oferta y la demanda en el periodo anterior. Si además las funciones de oferta y demanda son funciones lineales de los precios en el periodo correspondiente, encontrar ecuaciones que relacionen el inventario, la demanda, la oferta, los precios para W y el punto de equilibrio analizando su comportamiento.

4. Encontrar la solución del sistema $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$ y analizar la convergencia si la matriz A es:

   a) $\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -5/8 & 1/8 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/5 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix}$

5. Usar algún programa computacional (por ejemplo Excel) para graficar el comportamiento de los sistemas del ejercicio anterior.

6. Una estimación parcial del modelo de Phillips arrojó el siguiente sistema:
$$\begin{cases} p_t = 2 - 4u_t - 0{,}1\pi_t \\ \pi_{t+1} - \pi_t = k\,(p_t - \pi_t) \\ u_{t+1} - u_t = a\,(p_t - 2)\,, \end{cases}$$
donde u es la tasa de desempleo, p es la tasa de inflación y π es la tasa de inflación esperada. Encontrar el punto de equilibrio del sistema y determinar las condiciones sobre a y k para que ese punto de equilibrio sea estable, si además se sabe que $a > 0$ y $0 < k \leq 1$.

7. Encontrar los valores del consumo c_t y el capital k_t en cada periodo si se quiere maximizar la utilidad total que produce el consumo en T periodos descontados a una tasa ρ, se quiere gastar el capital $k_0 > 0$, la función de utilidad es $u(c) = \ln c$ y el capital está invertido en una cuenta que paga $r\,\%$ por periodo. Es decir, encontrar c_t y k_t para
$$\text{Maximizar } \sum_{t=0}^{T} \frac{\ln c_t}{(1+\rho)^t} \text{ sujeto a: } k_{t+1} - k_t = rk_t - c_t, k_0 > 0 \text{ y } k_T = 0.$$

8. Hacer el análisis de los puntos de equilibrio del sistema
$$\begin{cases} x_{t+1} = 36 - 8x_t^2 - 4y_t^2 \\ y_{t+1} = x_t y_t \end{cases} .$$

7.5. Un modelo de generaciones traslapadas

Se asume una función de utilidad
$$U_t = \frac{\left(c_t^1\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{\left(c_{t+1}^2\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$
donde $\theta > 0$ y $\rho > 0$. c_t^1 es el consumo de la generación t cuando es joven y c_{t+1}^2 el consumo cuando son viejos (la generación dura 2 periodos). Si un individuo que nace en el momento t recibe salarios w_t cuando joven y no recibe cuando viejo, la restricción para su consumo está dada por
$$c_t^1 + s_t = w_t, \quad \text{y} \quad c_{t+1}^2 = (1 + r_{t+1})s_t,$$

r_{t+1} es la tasa de interés en el intervalo de tiempo $[t, t+1)$, s_t es el ahorro o crédito en el periodo t. Los valores de los salarios y la tasa de interés están dados, se deben encontrar los consumos y el ahorro para maximizar la utilidad. Reemplazando los valores de los consumos en la utilidad se tiene

$$U_t = U(s_t) = \frac{(w_t - s_t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{((1+r_{t+1})s_t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

La condición de primer orden

$$\frac{dU_t}{ds_t} = \frac{-(1-\theta)(w_t - s_t)^{-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{(1-\theta)((1+r_{t+1})s_t)^{-\theta}(1+r_{t+1})}{1-\theta} = 0$$

se convierte en

$$(1+r_{t+1})^{1-\theta}(s_t)^{-\theta} = (1+\rho)(w_t - s_t)^{-\theta}$$

en términos de los consumos

$$\frac{c_{t+1}^2}{c_t^1} = \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\theta}$$

la tasa de ahorro óptima es

$$s_t = \frac{w_t}{1 + (1+\rho)^{1/\theta}(1+r_{t+1})^{(\theta-1)/\theta}} = \frac{w_t}{z_{t+1}}$$

Si los productores tienen funciones de producción neoclásica

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

(F es neoclásica si,

- Para $K > 0$ y $L > 0$, F tiene productos marginales positivos y decrecientes,
- F tiene rendimientos constantes a escala y
- Los productos marginales se aproximan a cero si el insumo correspondiente se aproxima a infinito, y se aproximan a infinito si el insumo se aproxima a cero, condiciones de Inada)

en términos per cápita,

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = F(k_t, 1) = f(k_t)$$

el beneficio del productor está dado por

$$\Pi_t = F(K_t, L_t) - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

δ es la tasa de depreciación del capital. Esta expresión usando f,

$$\Pi_t = L_t f(k_t) - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

las condiciones de primer orden para maximizar el beneficio

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = L_t f'(k_t) \frac{1}{L_t} - (r_t + \delta) = 0$$

y

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = f(k_t) - L_t f'(k_t) \frac{K_t}{(L_t)^2} - w_t = 0$$

equivalen a

$$r_t = f'(k_t) - \delta \quad \text{y} \quad w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Si se asume una economía cerrada donde la inversión agregada es igual al ingreso menos el consumo,

$$K_{t+1} - K_t = w_t L_t + r_t K_t - c_t^1 L_t - c_t^2 L_{t-1}.$$

Además,

$$K_{t+1} - K_t = F(K_t, L_t) - C_t - \delta K_t$$

donde $C_t = c_t^1 L_t - c_{t+1}^2 L_{t-1}$, sustituyendo los consumos

$$\begin{aligned}
K_{t+1} &= K_t + w_t L_t + r_t K_t - c_t^1 L_t - c_t^2 L_{t-1} \\
&= (1 + r_t) K_t + w_t L_t - (w_t - s_t) L_t - (1 + r_t) s_{t-1} L_{t-1} \\
&= s_t L_t + (1 + r_t)\left(K_t - s_{t-1} L_{t-1}\right) \\
&= (1 + r_t) K_t + s_t L_t - (1 + r_t) s_{t-1} L_{t-1}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, la solución de la ecuación,

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t$$

(ejemplo 5, sección 7.2 de la página 222) aplicada a este caso,

$$K_{t+1} = K_1 \prod_{i=1}^{t}(1+r_i) + \sum_{i=1}^{t} [s_i L_i - (1+r_i)s_{i-1}L_{i-1}] \left(\prod_{j=i+1}^{t} (1+r_j) \right).$$

Si la tasa de interés es constante, $r_t = r$ para todo t,

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= (1+r)^t K_1 + \sum_{i=1}^{t} [s_i L_i - (1+r)s_{i-1}L_{i-1}] \left(\prod_{j=i+1}^{t} (1+r) \right) \\ &= K_1 \prod_{i=1}^{t}(1+r) + \sum_{i=1}^{t} [s_i L_i - (1+r)s_{i-1}L_{i-1}] (1+r)^{t-i}. \end{aligned}$$

Puesto que s y r son funciones de la producción per cápita, la expresión para el capital es función de la producción per cápita y el tamaño de la mano de obra, además, la población crece en función de una ecuación logística. Así, el capital se reduce a una expresión que solamente contiene la tasa de crecimiento de la población, la producción per cápita y la población inicial.

Ejercicio

Encontrar el capital en la forma que lo enuncia el párrafo anterior.

7.6. Monopolista *vs.* entrante

Si dos empresas que ofrecen el mismo producto, una de las cuales es monopólica hasta que otra decide entrar en el mercado. Sean $p = a - bq$ la función inversa de demanda para el mercado, x la cantidad que el monopolio cubre en ese mercado, y y la cantidad que cubre la firma entrante, $c_m = c + dx$ la función de costos del monopolio y $c_e = \alpha + \beta y$ la función de costos de la firma entrante. Si en el momento $t = 0$, el monopolista determina las cantidades ofrecidas como solución del problema:

$$\max_{x_0} \Pi = x_0 (a - bx_0) - (c + dx_0)$$

estas cantidades y precios son

$$x_0^* = \frac{a-d}{2b} \quad \text{y} \quad p_0^* = \frac{a+d}{2}.$$

En $t = 1$ la firma entrante aprovecha la demanda residual, suponiendo que en el nuevo periodo el monopolista se comportará como en el periodo precedente y entra al mercado. Las cantidades y precios se determinan por la solución de

$$\max_{y_1} \Pi = y_1 \left[a - b\left(x_0^* + y_1\right)\right] - \left(\alpha + \beta y_1\right)$$

que son

$$y_1^* = \frac{a - \beta - bx_0^*}{2b} \quad \text{y} \quad p_1^* = \frac{p_0^* + \beta}{2}.$$

El comportamiento en los siguientes periodos para cada una de las empresas está determinado por lo acaecido en el periodo precedente. Por lo tanto, las cantidades y precios en el periodo $t+1$ están determinados por la solución de los problemas:
Para el monopolista:

$$\max_{x_{t+1}} \Pi = x_{t+1} \left[a - b\left(x_{t+1} + y_t^*\right)\right] - \left(c + dx_{t+1}\right)$$

Para el entrante:

$$\max_{y_{t+1}} \Pi = y_{t+1} \left[a - b\left(x_t^* + y_{t+1}\right)\right] - \left(\alpha + \beta y_{t+1}\right).$$

Las cantidades y precios soluciones de los problemas son,

$$y_{t+1}^* = \frac{a - \beta - bx_t^*}{2b} \quad \text{y} \quad x_{t+1}^* = \frac{a - d - by_t^*}{2b}$$

y

$$p_{t+1}^* = \frac{a + d + \beta - p_t^*}{2}.$$

La solución del sistema de cantidades y la ecuación de precios determina las trayectorias de cantidades y precios; si el entrante no es tomador de precios, son:

$$\begin{aligned} p_t^* &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} \left(p_1^* - \frac{a+d+\beta}{3}\right) + \frac{a+d+\beta}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} \frac{2\beta - a - d}{3} + \frac{a+d+\beta}{3} \end{aligned}$$

los precios oscilan amortiguadamente alrededor de $\frac{a+d+\beta}{3}$ y convergen a este valor. Las cantidades,

$$\begin{pmatrix} x_t^* \\ y_t^* \end{pmatrix} = k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3b} \begin{pmatrix} a+\beta-2d \\ a+d-2\beta \end{pmatrix}$$

donde

$$k_1 = \frac{a+d-2\beta}{4b} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{2\beta-a-d}{12b}.$$

Capítulo 8

Dinámica continua

Un ejemplo tangible de la dinámica en el que los demandantes y los oferentes ajustan sus cantidades demandadas y ofrecidas dependiendo del precio y de los cambios en el nivel de precios, es el mercado financiero. En éste la información fluye “casi” instantáneamente, las cantidades demandadas en cada momento t dependen del nivel de precios en cada instante t y su tendencia en un intervalo de tiempo h,

$$D(t) = D\left[p(t), \frac{p(t) - p(t-h)}{h}\right]$$

y también la oferta depende de las mismas variables,

$$O(t) = O\left[p(t), \frac{p(t) - p(t-h)}{h}\right].$$

El comportamiento de los precios está determinado por el exceso de demanda en el intervalo de tiempo de reacción de los agentes por medio de la ecuación:

$$p(t+h) - p(t) = \theta\, h[D(t) - O(t)]$$

donde θ es un parámetro de ajuste. Si el intervalo de reacción tiende a cero la ecuación anterior se convierte en:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \theta\left[D\left(p(t), \dot{p}(t)\right) - O\left(p(t), \dot{p}(t)\right)\right].$$

Esta ecuación rige el comportamiento de los precios en cada instante; el determinar los niveles de precios $p = p(t)$ implica solucionar esta ecuación diferencial.

8.1. Ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** es aquella que contiene derivadas. La clasificación de ecuaciones diferenciales es similar a la de ecuaciones en recurrencia, esto es, en lineales, no lineales, autónomas, no autónomas, homogéneas y no homogéneas, y también con respecto al **orden**. El orden de una ecuación es la mayor derivada que contenga. Un **sistema de ecuaciones diferenciales** de orden n es una expresión de la forma

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, ..., \mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{F}$ es alguna función de varias variables y varios valores (campo vectorial). La clasificación de los sistemas o ecuaciones es similar al caso discreto. Un sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

está en **equilibrio** si y sólo si

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 0, \quad \text{para todo} \quad t.$$

Este concepto indica que las variables de estado están fijas. Las nociones de estabilidad son iguales al caso discreto, salvo la siguiente posible variación en la definición de equilibrio exponencialmente estable

Definición 8.1. *El punto fijo $\bar{\boldsymbol{x}}$ es exponencialmente estable si y sólo si existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\delta > 0$ tales que: si $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$, entonces*

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}\| \leq \alpha \|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| e^{-\beta t}, \quad \textit{para} \quad t > 0.$$

En el caso de una ecuación de primer orden autónoma (la variable de estado depende del valor de la misma variable y no del tiempo)

$$\dot{x} = f(x)$$

los puntos de equilibrio están en los valores para los que

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

en ellos la variable permanece constante a través del tiempo. Para este tipo de ecuaciones el comportamiento cualitativo de la solución, $x = x(t)$, se hace por medio de un diagrama de fase o de la gráfica de la solución.

Tomando a x como variable independiente y a $\dot{x}$ como variable dependiente, la gráfica de $\dot{x} = f(x)$ da el comportamiento de $\dot{x}$ *versus* x. El crecimiento de la solución está determinado por el signo de la función $f(x)$. Si la gráfica está sobre el eje horizontal, la solución $x = x(t)$ es creciente, mientras que si la gráfica está bajo el eje, la solución decrece. Los puntos de corte determinan los puntos de equilibrio del sistema ya que en ellos $\dot{x} = 0$, lo que indica que no hay crecimiento ni decrecimiento de la solución. Estos puntos de equilibrio pueden ser **estables** (atractores) o **inestables** (repulsores); son estables si al perturbar el sistema éste tiende a volver al equilibrio, en caso contrario son inestables. El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento.

Ejemplo

La figura 8.1 es la gráfica de la ecuación

$$\dot{x} = (x-1)(x+2)x$$

tomando los valores de x en el eje horizontal y los de $\dot{x}$ en el eje vertical.

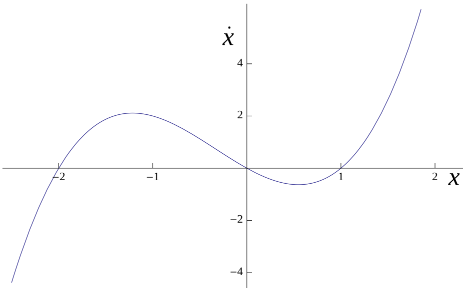


Figura 8.1: $\dot{x} = (x-1)(x+2)x$.

El comportamiento de la solución de $\dot{x} = (x-1)(x+2)x$ viene dado por el comportamiento de la gráfica. Los puntos de equilibrio son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$; puesto que a la izquierda de -2 la gráfica está bajo el eje, la solución decrece en ese intervalo y como a la derecha la gráfica está sobre el eje, la solución crece. Así, si el valor inicial del problema $x(0)$ es mayor que -2, la función $x(t)$, para $t > 0$, es creciente y por lo tanto se aleja de -2. Si $x(0)$ es menor que -2, la función $x(t)$, para $t > 0$, es decreciente y también se aleja de -2. Por lo tanto, $x = -2$ es un punto de equilibrio inestable. De la misma forma se muestra que $x = 0$ es un punto estable; a la derecha de este punto $x = f(t)$ decrece y a la izquierda crece; esto significa que si $x(0)$ está cerca de 0 la solución se acerca a $x = 0$.

Este análisis se puede reducir a indicar sobre la gráfica de $\dot{x} = f(x)$ el crecimiento de la solución pintando sobre ella flechas que indican si la función crece o decrece al incrementarse el tiempo o sobre una recta localizar los puntos de equilibrio y mediante flechas indicar el crecimiento del sistema. De cualquiera de estas formas es muy simple determinar la naturaleza de los puntos de equilibrio. Para el ejemplo anterior la figura 8.2 muestra el comportamiento de la solución y los puntos de equilibrio que se deducen de la dirección de las flechas. Si los valores de x son menores que -2 o están en el intervalo $(0, 1)$ la solución decrece, si están en el intervalo $(-2, 0)$ o son mayores que 1 la solución crece. El punto de equilibrio $x = 0$ es estable y los puntos $x = -2$ y $x = 1$ son inestables.

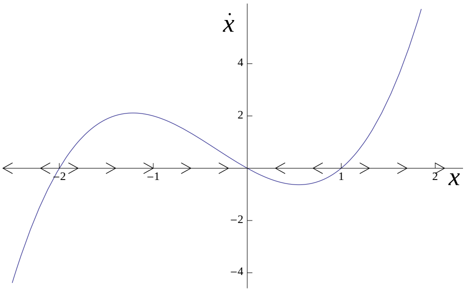


Figura 8.2: Crecimiento de la solución y comportamiento de los puntos de equilibrio de la ecuación $\dot{x} = (x - 1)(x + 2)x$.

Con la información anterior y la que provee la segunda derivada se determina el comportamiento de la solución:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \dot{x}(x+2)x + (x-1)\dot{x}x + (x-1)(x+2)\dot{x} \\
&= [(x+2)x + (x-1)x + (x-1)(x+2)]\dot{x} \\
&= [(x+2)x + (x-1)x + (x-1)(x+2)](x-1)(x+2)x \\
&= (3x^2 + 2x - 2)(x-1)(x+2)x
\end{aligned}$$

Esta segunda derivada es cero cuando $x = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$, $x = -2$, $x = 0$, ó $x = 1$ y su signo determina donde la función $x(t)$ es convexa o cóncava. La función es convexa cuando toma valores en $\left(-2, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right) \cup (1, \infty)$ y es cóncava cuando lo hace en $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},0\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},1\right)$.

La gráfica de $x(t)$, para $t\geq 0$, depende del valor de $x(0)$, para:

1. $x(0)<-2$, la función es decreciente y cóncava.
2. $x(0)=-2$, la función es constante (x está en equilibrio).
3. $-2<x(0)<\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$, la función es creciente y convexa.
4. $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\leq x(0)<0$, la función es creciente cóncava.
5. $x(0)=0$, la función es constante (está en equilibrio).
6. $0<x(0)<\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$, la función decrece y es convexa.
7. $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\leq x(0)<1$, la función decrece y es cóncava.
8. $x(0)=$1, la función es constante (está en equilibrio).
9. $x(0)>$1, la función crece y es convexa.

De esta forma se encuentra la gráfica de la solución como alguna de las mostradas en la figura 8.3, dependiendo del valor inicial.

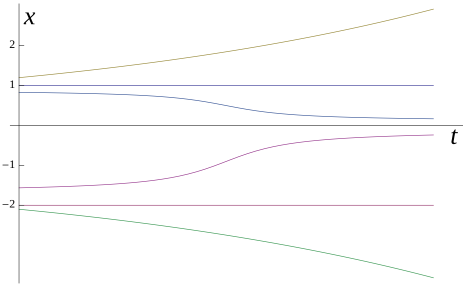


Figura 8.3: Gráfica de la solución de la ecuación $\dot{x}=(x-1)(x+2)x$, dependiendo de la condición inicial.

Teorema 8.1. *Si p es un punto de equilibrio para la ecuación $\dot{x}=f(x(t))$ y f' existe y es continua en $x=p$. Entonces*

1. *Si $f'(p)<0$ y x_0 está en una vecindad de p, p es un punto de equilibrio estable.*
2. *Si $f'(p)>0$ y x_0 está en una vecindad de p, p es un punto de equilibrio inestable.*

Ejercicios

1. Probar el teorema 8.1.

2. Hacer el análisis cualitativo gráfico de la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $\dot{x} = kx(T - x)$.

   b) $\dot{x} = 2x(x + 1)(x - 4)$.

   c) $\dot{x} = (x^2 + 1)(x^2 - 2)$.

8.1.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales más "simples" de solucionar son las llamadas **separables**, las cuales se pueden llevar a la forma

$$f(x)dx = g(t)dt$$

su solución implícita resulta de integrar cada término de la ecuación anterior, la dificultad de su solución depende de las funciones f y g.

Las ecuaciones que se pueden reescribir en la forma

$$M(x, t)dx + N(x, t)dt = 0$$

donde las dos funciones M y N son homogéneas del mismo grado se llaman **homogéneas**. Mediante los cambios de variable $x = ut$ ó $t = vx$ se transforman en separables. Al diferenciar la primera de estas ecuaciones se tiene $dx = udt + tdu$ y al reemplazar estas expresiones en la ecuación anterior la convierten en

$$M(ut, t)(udt + tdu) + N(ut, t)dt = 0$$

como las funciones son homogéneas (de grado p),

$$t^p M(u, 1)(udt + tdu) + t^p N(u, 1)dt = 0$$

después de simplificar y transponer términos,

$$\frac{dt}{t} = -\frac{M(u, 1)du}{uM(u, 1) + N(u, 1)}$$

nuevamente la solución depende de la dificultad de la integral.

Una ecuación es **exacta** si es la diferencial de alguna función $f(x,t)$. Si la ecuación es

$$M(x,t)dx + N(x,t)dt = 0$$

entonces, $M(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}$. Si a su vez las funciones M y N son diferenciables, $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ de donde f debe ser doblemente diferenciable y

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

que es la condición para que la ecuación sea exacta. La solución es $f(x,t) = c$; para recuperar la función f se debe integrar M con respecto a x o N con respecto a t.

Para solucionar una ecuación diferencial **lineal de primer orden**,

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)$$

se multiplica por una función $m(t)$, llamada **factor de integración**, con el fin de convertirla en separable. Multiplicar por $m(t)$ y sumar y restar el termino $\dot{m}(t)x(t)$ la convierten en

$$\begin{aligned} m(t)\dot{x}(t) + m(t)p(t)x(t) &= (m(t)\dot{x}(t) + \dot{m}(t)x(t)) \\ &\quad + (m(t)p(t)x(t) - \dot{m}(t)x(t)) \\ &= \frac{d\,(m(t)x(t))}{dt} + (m(t)p(t) - \dot{m}(t))\,x(t) \\ &= m(t)q(t) \end{aligned}$$

La última ecuación es

$$\frac{d\,(m(t)x(t))}{dt} = m(t)q(t) \quad \text{si y sólo si} \quad (m(t)p(t) - \dot{m}(t))\,x(t) = 0.$$

Transponiendo términos en la primera y teniendo en cuenta que $x(t)$ es no nulo en la segunda, el par de ecuaciones equivale a

$$d\,(mx) = m(t)q(t)dt \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{dm(t)}{dt} = m(t)p(t)$$

integrando la primera ecuación,

$$m(t)x(t) = \int m(t)q(t)dt + k \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{dm}{m} = p(t)dt$$

de donde se obtiene la solución

$$x(t) = \frac{\int m(t)q(t)dt + k}{m(t)} \quad \text{si y sólo si} \quad \ln(m(t)) = \int p(t)dt.$$

Despejando m y reemplazando en la primera ecuación se tiene que la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden es

$$x(t) = \frac{\int \exp\left[\int p(t)dt\right] q(t)dt + k}{\exp\left[\int p(t)dt\right]}.$$

Esta fórmula proporciona la solución general para este tipo de ecuaciones. La construcción de las funciones CD y CES es ejemplo de uso de las ecuaciones diferenciales en la construcción de funciones que sirven de modelo para el comportamiento de algunos agentes económicos.

8.1.2. La función de Cobb-Douglas

Para maximizar el beneficio del productor que usa dos insumos, K y L, con una función de producción $Q(K, L)$ dada por

$$\Pi = \text{Ingreso total - Costo total} = pQ(K, L) - (rK + wL)$$

el gradiente de Π debe ser cero, es decir,

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p\frac{\partial Q}{\partial K} - r = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p\frac{\partial Q}{\partial L} - w = 0$$

estas condiciones de primer orden se reducen a

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{r}{p} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{w}{p}.$$

La segunda se traduce en que el óptimo está donde la productividad marginal física del trabajo $\frac{\partial Q}{\partial L}$ sea igual a los salarios reales $\frac{w}{p}$.

Douglas, a partir de sus observaciones sobre la participación de los salarios y el capital en la cantidad producida, encontró que la nómina total y el interés total sobre el capital invertido eran proporciones constantes del *output*, sean éstas α y β,

$$wL = \alpha Q \quad \text{y} \quad rK = \beta Q \qquad (*)$$

Si el mercado es perfecto y el empresario maximiza sus beneficios se tiene que

$$p\frac{\partial Q}{\partial L} = w \quad \text{y} \quad p\frac{\partial Q}{\partial K} = r$$

al reemplazar estas igualdades en (*) se encuentra

$$p\frac{\partial Q}{\partial L}L = \alpha Q \quad \text{y} \quad p\frac{\partial Q}{\partial K}K = \beta Q \qquad (**)$$

La primera de estas ecuaciones es separable ya que al transponer términos,

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\alpha}{p}\frac{dL}{L}$$

y al integrar con respecto a L,

$$\ln(Q) = \frac{\alpha}{p}\ln(L) + c,$$

donde c es una constante de integración que en general depende de K, ya que se integró con respecto a L. Despejando,

$$Q(K, L) = e^{\frac{\alpha}{p}\ln L + c} = e^{c + \ln L^{\frac{\alpha}{p}}} = e^{c}\,(L)^{\frac{\alpha}{p}} = C_1(K)\cdot(L)^{\frac{\alpha}{p}}$$

derivando esta función con respecto a K y usando la segunda ecuación de (**)

$$p\frac{\partial Q}{\partial K}K = pC_1'(K)\cdot(L)^{\frac{\alpha}{p}}\,K = \beta C_1(K)\cdot(L)^{\frac{\alpha}{p}} = \beta Q$$

transponiendo términos en la ecuación del medio,

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{\beta}{p}\frac{dK}{K}$$

integrando con respecto a K,

$$\ln(C_1) = \frac{\beta}{p}\ln K + c_2$$

despejando,

$$C_1 = e^{\frac{\beta}{p}\ln(K) + c_2} = e^{c_2 + \ln(K)^{\frac{\beta}{p}}} = e^{c_2}\,(K)^{\frac{\beta}{p}} = A\,(K)^{\frac{\beta}{p}}$$

y reemplazando este valor en la expresión para Q,

$$Q(K, L) = A\,(K)^{\frac{\beta}{p}}\,(L)^{\frac{\alpha}{p}}$$

la conocida función de Cobb-Douglas.

8.1.3. La función CES

La construcción de la CES está basada en la observación de que el *output* es una proporción cambiante del tipo de salario (en adelante se asume $p = 1$ por comodidad)

$$\frac{Q}{L} = \alpha w^{\lambda} \qquad (1).$$

La diferencial total de Q es

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL$$

y en competencia perfecta (ver sección anterior)

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = w,$$

de donde,

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + w dL.$$

Si además Q tiene rendimientos constantes a escala,

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dK}{K} = \frac{dL}{L},$$

así,

$$\frac{dQ}{dK} = \frac{\partial Q}{\partial K} + w\frac{dL}{dK} = \frac{\partial Q}{\partial K} + w\frac{L}{K}, \quad \text{o} \quad \frac{Q}{K} = \frac{\partial Q}{\partial K} + w\frac{L}{K}$$

despejando w,

$$w = \frac{Q}{L} - \frac{K}{L}\frac{\partial Q}{\partial K}$$

Reemplazando en (1),

$$\frac{Q}{L} = \alpha \left(\frac{Q}{L} - \frac{K}{L}\frac{\partial Q}{\partial K} \right)^{\lambda}$$

elevando a potencia $\frac{1}{\lambda}$

$$\left(\frac{Q}{L} \right)^{1/\lambda} = \alpha^{1/\lambda} \left(\frac{Q}{L} - \frac{K}{L}\frac{\partial Q}{\partial K} \right)$$

haciendo $r = \frac{1}{\lambda}$, $\alpha^{-r} = a$ y despejando la derivada de Q con respecto a K se tiene,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{L}{K}\left(\frac{Q}{L} - a\left(\frac{Q}{L}\right)^r\right)$$

separando variables

$$\frac{\partial Q}{L\left(\frac{Q}{L} - a\left(\frac{Q}{L}\right)^r\right)} = \frac{\partial K}{K}$$

integrando, usando la sustitución $u = Q/L$,

$$\int \frac{du}{(u - au^r)} = \int \frac{\partial K}{K}$$

la primera integral se calcula por fracciones simples

$$\frac{1}{(u - au^r)} = \frac{1}{u\left(1 - au^{r-1}\right)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1 - au^{r-1}}$$

sumando la última expresión y simplificando los denominadores se tiene que

$$1 = A\left(1 - au^{r-1}\right) + Bu$$

de donde,

$$A = 1 \text{ y } -au^{r-1} + Bu = 0$$

despejando,

$$B = \frac{au^{r-1}}{u} = au^{r-2}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(u - au^r)} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{au^{r-2}du}{1 - au^{r-1}} &= \ln(u) - \frac{1}{r-1}\int \frac{dz}{z} \\ &= \ln(u) - \frac{1}{r-1}\ln(z),\end{aligned}$$

donde $z = 1 - au^{r-1}$. Reemplazando z y u

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{Q}{L}\right) - \frac{1}{r-1}\ln\left(1 - a\left(\frac{Q}{L}\right)^{r-1}\right) &= \ln \frac{Q}{L}\left(1 - a\left(\frac{Q}{L}\right)^{r-1}\right)^{-\frac{1}{r-1}} \\ &= \ln(K) + c,\end{aligned}$$

con c constante de integración que en general depende de L, tomando exponencial en la última igualdad,

$$\frac{Q}{L}\left(1-a\left(\frac{Q}{L}\right)^{r-1}\right)^{-\frac{1}{r-1}}=CK.$$

Para despejar Q se transponen términos y se toma potencia $(r-1)$-ésima,

$$1-a\left(\frac{Q}{L}\right)^{1-r}=\left(\frac{CLK}{Q}\right)^{r-1},$$

o

$$1=a\left(\frac{L}{Q}\right)^{r-1}+\left(\frac{CLK}{Q}\right)^{r-1}$$

finalmente,

$$Q^{r-1}=aL^{r-1}+(CLK)^{r-1}$$

El valor de C se encuentra usando otra de las condiciones sobre Q.

Ejercicios

1. Hacer explícito el valor de C para la función CES.

2. Solucionar las ecuaciones diferenciales:

   a) $2t+3+(2x-2)\dot{x}=0$.
   b) $\frac{dx}{dt}=\frac{t^2-1}{x^2+1}$.
   c) $2t+4x+(2t-2x)\dot{x}=0$.
   d) $2xdt-tdx=0$.
   e) $\left(x^2+3xt+t^2\right)dt-t^2dx=0$.
   f) $(x-t)dx=(4t-3x)dt$.
   g) $\dot{x}=e^{x+t}$.

3. Hacer el análisis de estabilidad local de las ecuaciones en cada punto de equilibrio

   a) $\dot{x}=\frac{dx}{dt}=8x-x^4$.
   b) $\dot{x}=\frac{dx}{dt}=9x-x^3$.

4. Encontrar la función de demanda en función de los precios que tiene elasticidad lineal $e_{pq} = ap + b$ y determinar las condiciones sobre a y b para que esta elasticidad esté bien definida.

5. Determinar la función de demanda que tiene elasticidad constante para todo nivel de precios.

6. Usar el teorema de la envolvente para probar que:

   a) Si la función de producción tiene rendimientos crecientes a escala, la función de costos (óptimos) es cóncava en cantidades.
   b) Si la función de producción tiene rendimientos constantes a escala, la función de costos es lineal en cantidades y
   c) Si la función de producción tiene rendimientos decrecientes a escala, los costos son convexos en cantidades.
   d) Encontrar en cada caso la forma de las funciones de costos y de demandas condicionadas.

   Ayuda: si la función de producción es homogénea de grado α,

   $$C^* = \lambda \left[Q_K K^* + Q_L L^*\right] = \lambda \alpha q.$$

7. Probar que si la función de utilidad es homogénea de grado α, la función de utilidad indirecta es multiplicativamente separable con respecto a los precios y el ingreso, esto es,

   $$V(\mathbf{p}, m) = V_1(\mathbf{p}) V_2(m)$$

   y encontrar el grado de homogeneidad de V_1.

8. Probar que si la función de producción es homogénea de grado α, la función de beneficio es multiplicativamente separable con respecto a los precios de los insumos y el precio de venta, esto es,

   $$\Pi^*(\mathbf{p}, P) = \Pi_1^*(\mathbf{p}) \Pi_2^*(P)$$

   y encontrar el grado de homogeneidad de Π_1^*.

9. Las funciones de oferta y demanda para un cierto bien son:

   $$D(p) = 100 - kp \qquad \text{y} \qquad O(p) = p - 1000,$$

   donde $k > 0$. Si la dinámica de los precios se determina por:

a) $p_{t+1} - p_t = \theta\,[D(p_t - p_{t-1}) - O(p_t)]$. Encontrar el punto de equilibrio y las condiciones sobre k y θ para que el modelo tenga un punto de equilibrio estable.

b) $\dot{p} = \theta\,[D(p(t)) - O(p(t))]$. Encontrar el punto de equilibrio y las condiciones sobre θ y k para que sea estable.

c) Comparar las respuestas de las partes *a)* y *b)*.

8.1.4. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

La solución general de una ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes constantes forma un espacio vectorial de dimensión igual al orden de la ecuación. En particular la solución de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

forma un espacio vectorial de dimensión 2; su base está generada por dos funciones linealmente independientes. Puesto que la función $x = e^{rt}$, para algún r, es múltiplo de sus derivadas, entonces debe ser solución de la ecuación; para esto se debe determinar el valor de r, lo cual se logra reemplazando la función y sus derivadas en la ecuación:

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

simplificando e^{rt}. Los valores de r deben satisfacer la **ecuación característica**,

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Las posibilidades para las raíces son:

1. Si $b^2 > 4ac$, las raíces r_1 y r_2 son reales distintas y la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = k_1e^{r_1t} + k_2e^{r_2t}.$$

2. Si $b^2 = 4ac$, r_1 y r_2 son reales iguales y la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = k_1e^{r_1t} + k_2te^{r_1t}.$$

3. Si $b^2 < 4ac$, r_1 y r_2 son complejas conjugadas, $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$. La solución de (1) es
$$x(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$
donde las constantes, k_1 y k_2 son complejas conjugadas. Usando el teorema de Euler[1], esta solución se convierte en
$$\begin{aligned}
x(t) &= k_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\
&= e^{\alpha t}\left(k_1 e^{i\beta t} + k_2 e^{-i\beta t}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left[k_1\left(\cos(\beta t) + i\operatorname{sen}(\beta t)\right) + k_2\left(\cos(\beta t) - i\operatorname{sen}(\beta t)\right)\right] \\
&= e^{\alpha t}\left[(k_1 + k_2)\cos(\beta t) + i\,(k_1 - k_2)\operatorname{sen}(\beta t)\right] \\
&= e^{\alpha t}\left[c_1\cos(\beta t) + c_2\operatorname{sen}(\beta t)\right]
\end{aligned}$$
las constantes, c_1 y c_2, son reales.

Para la ecuación
$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$
el punto de equilibrio es $x = 0$, de donde el comportamiento de la solución con respecto al equilibrio está dado por el
$$\lim_{t\to\infty} e^{rt}.$$
Puesto que las raíces de una ecuación cuadrática satisfacen la condición
$$(r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2,$$
entonces las soluciones de la ecuación característica satisfacen la condición
$$r_1 + r_2 = -b \qquad \text{y} \qquad r_1 r_2 = c.$$
y la estabilidad de la ecuación queda determinada por sus coeficientes en la forma:

1. Si $b^2 > 4c$ las raíces son reales distintas y la solución converge si las raíces son negativas, lo que se tiene si y sólo si $c < 0$ y $b > 0$.

2. Si $b^2 = 4c$ las raíces son reales iguales con valor $-b/2$ y la solución converge cuando $b > 0$.

[1] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$.

3. Si $b^2 < 4c$ las raíces son complejas conjugadas y la solución converge cuando la parte real de ellas es negativa, es decir, cuando $-b/2 < 0$.

La solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden n se encuentra en forma análoga a la solución de ecuaciones de segundo orden. Para la ecuación

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

una solución es de la forma $x = e^{rx}$ para algún r ya que para esta función la derivada de orden k es $x^{(k)} = r^k e^{rx}$. Al reemplazar esta función y sus n primeras derivadas la ecuación se convierte en

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$

factorizando y simplificando e^{rx} la ecuación anterior se reduce a la ecuación característica

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Las raíces de esta ecuación dan los valores de r que sirven como exponentes en la solución de la ecuación diferencial. Como en ecuaciones en recurrencia, la solución general es una combinación lineal de las soluciones que proporcionan las raíces de la ecuación característica.

Ejercicios

1. Probar que si dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, entonces $f(t)+g(t)$ y $kf(t)$ también son soluciones de la misma ecuación.

2. Si r_1, r_2 son raíces complejas conjugadas del polinomio característico $ar^2 + br + c = 0$, $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$. Probar que si la solución de la ecuación $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ es $x = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$, las constantes deben ser complejas conjugadas.

El primer ejercicio prueba que las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea forman un espacio vectorial que resulta ser de dimensión igual al orden de la ecuación. La solución general no es otra cosa que un elemento arbitrario del espacio generado por las soluciones, las funciones que se escogen para generarla no son por tanto arbitrarias. Se busca que esas funciones sean base de los espacios solución, para lo cual se deben tener tantas como la dimensión del espacio (orden de la ecuación), que sean además linealmente independientes. Todo lo anterior se logra probando que el determinante

$$W(f(t), g(t)) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

es no nulo para cada una de las soluciones encontradas[2].

A partir del teorema fundamental del álgebra, la forma de la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes está determinada por las raíces de ecuación característica de la siguiente forma:

1. Si todas las raíces son reales distintas, la solución es:

$$x(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} + \cdots + k_n e^{r_n t}$$

2. Si una raíz real r se repite $m+1$ veces, la solución es:

$$x(t) = k_1 e^{rt} + k_2 t e^{rt} + k_3 t^2 e^{rt} + \cdots + k_m t^m e^{rt}$$
$$+ \text{ otros términos que dependen del}$$
$$\text{comportamiento de las otras raíces.}$$

   Esto es, contiene una combinación lineal de: e^{rt}, te^{rt}, $t^2 e^{rt}$,..., $t^m e^{rt}$.

3. Si la raíz $r = a + ib$ es compleja (también su conjugada es raíz) y no se repite, por estas dos raíces (r y su conjugada) la solución es de la forma:

$$x(t) = k_1 e^{at} \cos(bt) + k_2 e^{at} \operatorname{sen}(bt)$$
$$+ \text{ otros términos que dependen del}$$
$$\text{comportamiento de las otras raíces.}$$

   Es decir, contiene una combinación lineal de las funciones $e^{at}\cos(bt)$ y $e^{at}\operatorname{sen}(bt)$.

[2]Para la prueba del anterior resultado se puede consultar cualquier buen texto de ecuaciones diferenciales, por ejemplo Simmons[Sim] o Boyce y DiPrima[B y D].

4. Si la raíz $r = a + ib$ es compleja (también su conjugada es raíz) y se repite m veces, por estas $2m$ raíces (r y su conjugada) la solución es de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 e^{at}\cos(bt) + k_1' e^{at}\operatorname{sen}(bt) + k_2 t e^{at}\cos(bt) + k_2' t e^{at}\operatorname{sen}(bt) \\ &+ \cdots + k_{m-1} t^{m-1} e^{at}\cos(bt) + k_{m-1}' t^{m-1} e^{at}\operatorname{sen}(bt) \\ &+ \text{otros términos que dependen del comportamiento de las} \\ &\text{otras raíces.} \end{aligned}$$

   Esto es, contiene una combinación lineal de: $e^{at}\cos(bt)$, $e^{at}\operatorname{sen}(bt)$, $te^{at}\cos(bt)$, $te^{at}\operatorname{sen}(bt)$, $t^2e^{at}\cos(bt)$, $t^2e^{at}\operatorname{sen}(bt)$,..., $t^{k-1}e^{at}\cos(bt)$, $t^{k-1}e^{at}\operatorname{sen}(bt)$.

La solución general de una ecuación no homogénea se encuentra en forma análoga a las ecuaciones en recurrencia, que es la solución de la ecuación homogénea más una solución particular

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde $x_p(t)$ se puede encontrar por el método de coeficientes indeterminados o por variación de parámetros. En el primero se supone que la solución particular tiene la misma forma que la función que hace no homogénea la ecuación, pero no se conocen los valores de los coeficientes, los cuales deben determinarse por reemplazo e igualación.

Ejemplo

Para encontrar la solución de la ecuación

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 2 + 3t + 5t^2.$$

Inicialmente se soluciona la homogénea asociada

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$$

su polinomio característico

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

tiene como raíces $1 + i$ y $1 - i$. La solución de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = e^t(k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t).$$

La función que hace no homogénea la ecuación es $2+3t+5t^2$, por lo tanto la solución particular debe ser de la misma forma, esto es, un polinomio de segundo grado,

$$x_p(t) = a + bt + ct^2.$$

Para determinar los valores se reemplaza en la ecuación,

$$2c - 2(b + 2ct) + 2\left(a + bt + ct^2\right) = 2 + 3t + 5t^2.$$

y se igualan los coeficientes de los polinomios resultantes,

$$2a - 2b + 2c = 2, \qquad 2b - 4c = 3, \qquad 2c = 5.$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{9}{2} + \frac{13}{2}t + \frac{5}{2}t^2.$$

El método de variación de parámetros supone que la solución particular es combinación lineal variable de las funciones que generan la solución de la homogénea. Este método da fórmulas para la solución particular (ver Simmons[Sim] o Boyce y DiPrima[B y D]).

8.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Muchos problemas de la dinámica económica se pueden modelar por medio de un sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales autónomas de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{F}$ representan vectores; éste es un sistema de n ecuaciones diferenciales con n incógnitas. El punto de equilibrio de un sistema es aquel donde las funciones involucradas no tienen cambios con respecto al tiempo, es decir, donde sus derivadas son nulas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

En algunos casos económicamente es más relevante el comportamiento de la solución con respecto a los puntos de equilibrio del sistema, que su solución.

8.2.1. Diagramas de fase

El análisis gráfico de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

sirve para determinar el comportamiento de los puntos de equilibrio y de las trayectorias solución del sistema con algunas condiciones iniciales.

En un diagrama de fase se trazan las curvas que son soluciones del sitema, esto es, se grafican las curvas formadas por los puntos $(x(t), y(t))$ de tal forma que los valores de $x = x(t)$ y $y = y(t)$ satisfagan el sistema para t en algún intervalo. El sistema geométricamente describe el movimiento de una partícula en el plano: la ecuación $\dot{x} = f(x, y)$ determina el movimiento de la partícula con respecto al eje x, ya que $\dot{x}$ representa el crecimiento de la variable x a medida que el tiempo crece; en la región donde $\dot{x} = f(x, y) > 0$ la partícula se mueve en la dirección de crecimiento del eje x y en la región donde $\dot{x} = f(x, y) < 0$ la partícula se mueve en la dirección hacia donde el eje x decrece. De la misma forma $\dot{y} = g(x, y)$ determina el movimiento de la partícula en la dirección del eje y.

Para hacer el diagrama de fase en un sistema coordenado usual se traza la curva $f(x, y) = 0$ y se determinan las regiones donde $f(x, y) > 0$ y $f(x, y) < 0$; en la primera la trayectoria solución del sistema se mueve a la derecha, $\dot{x} > 0$, en la gráfica esto se indica por medio de una flecha hacia la derecha ($\rightarrow$). En la región donde $f(x, y) < 0$ la trayectoria debe moverse hacia la izquierda, lo que se indica con una flecha hacia la izquierda ($\leftarrow$). Puesto que las trayectorias pueden atravesar la curva $f(x, y) = 0$, si lo hace, en el punto de cruce $\dot{x} = 0$, es decir, en ese punto la tangente a la trayectoria debe ser vertical; esto se indica en la gráfica colocando una línea vertical (figura 8.4). Para determinar el crecimiento de la trayectoria solución al sistema con respecto al eje y se traza el contorno $g(x, y) = 0$ y se determinan los contornos superior e inferior, esto es, la región donde $g(x, y) > 0$ y $g(x, y) < 0$. En el contorno superior la trayectoria se mueve en dirección al crecimiento del eje y, lo que se indica por medio de una flecha hacia arriba ($\uparrow$) y donde $g(x, y) < 0$ por una flecha hacia abajo ($\downarrow$) que indica que la trayectoria se mueve hacia abajo. En los puntos de cruce de las trayectorias solución con la gráfica de $g(x, y) = 0$ las tangentes a las trayectorias deben ser horizontales, allí $\dot{y} = 0$, en la gráfica se indica con una recta horizontal atravesada al gráfico de $g(x, y) = 0$ (figura 8.5). Al reunir el comportamiento de los gráficos anteriores se encuentra el crecimiento de

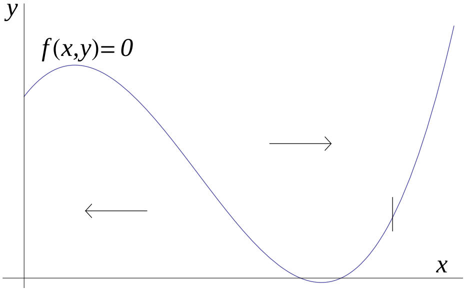


Figura 8.4: El contorno $f(x, y) = 0$ determina las regiones donde la trayectoria se mueve a la derecha o a la izquierda.

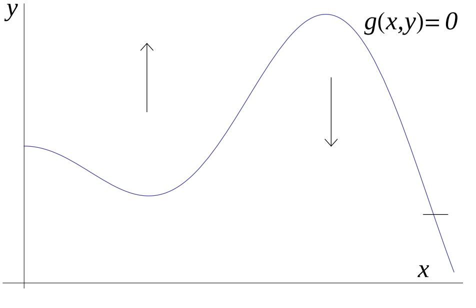


Figura 8.5: El contorno $g(x, y) = 0$ determina las regiones donde la trayectoria se mueve hacia arriba o hacia abajo.

las trayectorias solución del sistema y los puntos de equilibrio que están en la intersección de las curvas $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$; en esos puntos $\dot{x} = \dot{y} = 0$ (figura 8.6).

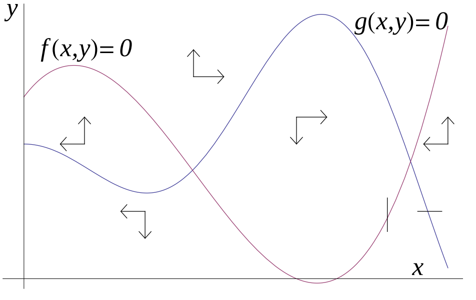


Figura 8.6: Indicaciones del crecimiento de las trayectorias solución del sistema.

Las trayectorias solución del sistema se trazan siguiendo el movimiento indicado por las flechas y el tipo de cruces encontrados en este proceso. En la figura 8.7 se muestran algunas trayectorias.

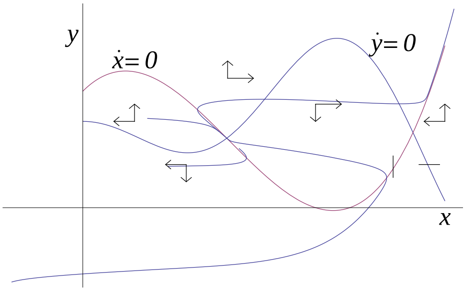


Figura 8.7: Algunas trayectorias solución del sistema.

8.2.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

En algunos casos la solución de un sistema no lineal, como se verá más adelante, se puede aproximar por medio de sistemas lineales; por esto, inicialmente se analiza el comportamiento de sistemas lineales. Un sistema es lineal si las funciones involucradas son lineales, esto es, el sistema es de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B$$

El vector B determina la posición del punto de equilibrio pero este vector no incide en la estabilidad del sistema. Si $B = 0$ el sistema es homogéneo, en este caso el punto de equilibrio está en el origen y por comodidad en el análisis sólo se estudia este caso.

La solución de un sistema homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

es de la forma

$$\mathbf{x} = e^{rt}\mathbf{v}$$

ya que este vector de funciones tiene por derivada un múltiplo del mismo vector,

$$\dot{\mathbf{x}} = re^{rt}\mathbf{v}$$

para determinar los valores de r y $\mathbf{v}$ se reemplaza $\mathbf{x}$ y su derivada en el sistema original,

$$re^{rt}\mathbf{v} = Ae^{rt}\mathbf{v}$$

simplificando e^{rt},

$$r\mathbf{v} = A\mathbf{v}$$

esto indica que r y $\mathbf{v}$ son valor y vector propios correspondientes de la matriz A.

En la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

se trata de encontrar los valores de las v y r que solucionen el sistema,

$$r\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

como el valor del vector $\mathbf{v}$ es no nulo, los valores de r se calculan solucionando la ecuación,

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

que se reduce a

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a-r & b \\ c & d-r \end{vmatrix} &= (a-r)(d-r) - bc = r^2 - (a+d)r + ad - bc \\ &= r^2 - \mathrm{Tr}(A)r + |A| = 0\end{aligned}$$

Así, los valores de r vienen dados por

$$r_1, r_2 = \frac{\mathrm{Tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}^2(A) - 4\,|A|}}{2}$$

que satisfacen la condición

$$(r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$$

por lo tanto,

$$\mathrm{Tr}(A) = r_1 + r_2 \qquad \text{y} \qquad |A| = r_1 r_2.$$

Estas raíces pueden ser:

1. Reales distintas, si y sólo si $\mathrm{Tr}^2(A) > 4|A|$. En este caso hay dos valores propios distintos a los cuales les corresponden dos vectores propios linealmente independientes; a partir de éstos es posible generar la solución general del sistema que tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{r_1 t} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{r_2 t} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

donde r_1 y r_2 son los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema, $\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a r_1 y $\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a r_2. La convergencia de la solución no sólo depende de las raíces sino también de los valores iniciales del problema:

   a) $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ si y sólo si $|A|$ y $\mathrm{Tr}(A)$ son positivos. Si los valores iniciales del problema son distintos del punto de equilibrio, c_1 o c_2 distintos de cero, las funciones exponenciales involucradas en la solución crecen y las trayectorias se alejan del punto de equilibrio; por este comportamiento el punto se conoce como **nodo inestable** (figura 8.8).

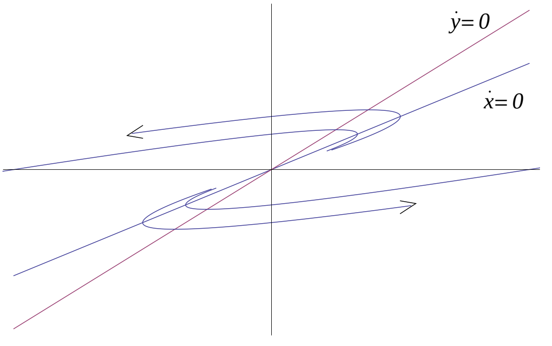


Figura 8.8: Diagrama de fase para un sistema con un nodo inestable.

b) $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$ si y sólo si $|A| < 0$. La solución del sistema converge al punto de equilibrio solamente cuando $c_2 = 0$; esto implica que para que el sistema converja, los valores iniciales deben estar sobre la recta generada por el vector propio correspondiente al valor propio negativo. Por esta razón la recta generada por este vector se conoce como la **senda de convergencia**; por este camino existe la única posibilidad de convergencia del sistema, en términos de álgebra lineal la senda de convergencia es $Gen\{V_1\}$. Si el valor inicial del problema hace $c_2 \neq 0$, esto es, se encuentra fuera de la senda de convergencia, la solución inicialmente puede acercarse al punto de equilibrio pero luego de un cierto intervalo de tiempo divergirá, puesto que valores iniciales que tengan coeficientes distintos de cero para la exponencial positiva llevan a la divergencia del sistema. Cuando el modelo contiene valores propios con estas características, se dice que tiene un **punto de silla** (figura 8.9).

c) r_1 y r_2 son negativos si y sólo si $|A| > 0$ y $\mathrm{TR}(A) < 0$, para cualquier valor del punto inicial el sistema converge al equilibrio puesto que las exponenciales involucradas convergen a cero. Este tipo de punto se conoce como un **nodo estable**.

2. Reales iguales si y sólo si $\mathrm{Tr}^2(A) = 4|A|$. En este caso sólo hay un vector propio y el espacio solución tiene dimensión dos, por lo tanteo es necesario generar otra solución, esto se logra suponiendo una

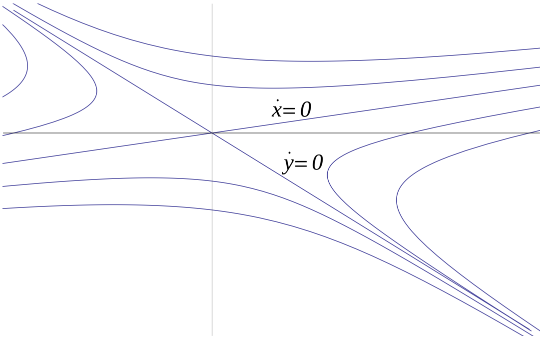


Figura 8.9: El punto de equilibrio del sistema es un punto de silla.

solución de la forma

$$\mathbf{x} = (\mathbf{w} + t\mathbf{v})e^{rt}$$

y encontrando el vector W. La derivada en este caso es

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{v} + r\mathbf{w} + rt\mathbf{v})e^{rt}$$

reemplazando en el sistema original,

$$(\mathbf{v} + r\mathbf{w} + rt\mathbf{v})e^{rt} = A(\mathbf{w} + t\mathbf{v})e^{rt}$$

simplificando e^{rt},

$$(\mathbf{v} + r\mathbf{w}) + rt\mathbf{v} = A(\mathbf{w} + t\mathbf{v})$$

igualando los coeficientes de este polinomio matricial,

$$(\mathbf{v} + r\mathbf{w}) = A\mathbf{w} \qquad \text{y} \qquad rt\mathbf{v} = At\mathbf{v}$$

de donde los valores de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son las soluciones de los sistemas,

$$(A - rI)\mathbf{v} = 0 \qquad \text{y} \qquad (A - rI)\mathbf{w} = \mathbf{v}$$

el primero produce el valor y vector propio del sistema; éste se reemplaza en el segundo y se despeja el vector $\mathbf{w}$.

Para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas la solución es de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{rt} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{rt} \left[\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \right]$$

El sistema converge para cualquier valor de las condiciones iniciales si y sólo si $r < 0$ (que equivale a $\mathrm{Tr}(A) < 0$), el punto de equilibrio es un nodo estable, y el sistema diverge si $r > 0$ (nodo inestable).

3. Complejas conjugadas si y sólo si $\mathrm{Tr}^2(A) < 4|A|$. Las raíces se pueden escribir en la forma $r_1 = \bar{r}_2 = \rho + \theta i$, donde

$$\rho = \mathrm{Tr}(A)/2 \text{ y } \theta = \frac{\sqrt{4\,|A| - \mathrm{Tr}^2(A)}}{2}.$$

Los vectores propios también son complejos conjugados, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ y $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$. Por aplicación de la fórmula de Euler,

$$e^{(\rho+i\theta)t} = e^{\rho t}e^{i\theta t} = e^{\rho t}\left(\cos(\theta t) + i\,\mathrm{sen}(\theta t)\right)$$

Dos soluciones linealmente independientes son:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{(\rho+i\theta)t}\left(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2\right) = e^{\rho t}\left(\cos(\theta t) + i\,\mathrm{sen}(\theta t)\right)\left(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2\right)$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{(\rho-i\theta)t}\left(\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2\right) = e^{\rho t}\left(\cos(\theta t) - i\,\mathrm{sen}(\theta t)\right)\left(\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2\right).$$

Puesto que una combinación lineal de soluciones es solución, entonces:

$$\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} = e^{\rho t}\left(\cos(\theta t)\mathbf{v}_1 - \mathrm{sen}(\theta t)\mathbf{v}_2\right)$$

y

$$-i\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{2} = e^{\rho t}\left(\cos(\theta t)\mathbf{v}_2 + \mathrm{sen}(\theta t)\mathbf{v}_1\right)$$

son soluciones de la ecuación. Puesto que son soluciones reales linealmente independientes, cualquier solución debe ser una combinación lineal de ellas, esto es, la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\rho t}\left[k_1\left(\cos(\theta t)\mathbf{v}_1 - \mathrm{sen}(\theta t)\mathbf{v}_2\right) + k_2\left(\cos(\theta t)\mathbf{v}_2 + \mathrm{sen}(\theta t)\mathbf{v}_1\right)\right].$$

Los valores de ρ producen tres tipos de puntos de equilibrio:

a) La solución converge si y sólo si ρ es negativo que equivale a $\mathrm{Tr}(A) < 0$ el punto de equilibrio es un **punto espiral atractivo o convergente**. El sistema es globalmente exponencialmente estable (figura **??**).

b) La solución se aleja del punto de equilibrio si y sólo si $\rho > 0$, el punto de equilibrio es un **punto espiral repulsivo o divergente**.

c) Cuando $\rho = 0$ la solución del sistema a partir de una condición inicial es cíclica ya que solamente involucra las funciones seno y coseno que son periódicas; en este caso el punto de equilibrio es un **centro**. El sistema es lyapunovmente estable (figura 8.10).

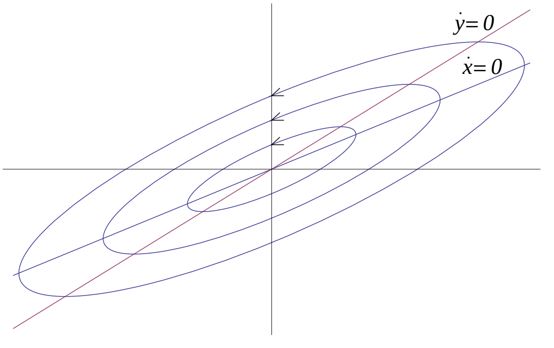


Figura 8.10: El punto de equilibrio es un centro.

Ejemplos

1. La matriz de representación del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

es $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ su polinomio característico, $r^2 - 3r + 2$, tiene como raíces $r = 1$ y $r = 2$. Los vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El punto de equilibrio es un nodo inestable.

2. Para solucionar un sistema no homogéneo se procede como en ecuaciones, esto es, la solución es la suma de la solución del sistema homogéneo y la solución particular, la cual tiene la forma de los términos que hacen no homogénea la ecuación.

   La solución particular del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + t \\ \dot{y} = -x + e^t, \end{cases}$$

   (la solución del sistema homogéneo asociado se encontró en el ejemplo anterior) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1 e^t + d_1 t e^t \\ a_2 t + b_2 + c_2 e^t + d_2 t e^t \end{pmatrix}$$

   dado que e^t hace parte de la solución del sistema homogéneo. Si se reemplaza en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_p = 3x_p + 2y_p + t \\ \dot{y}_p = -x_p + e^t, \end{cases}$$

   los coeficientes de la solución particular son las soluciones de

$$\begin{cases} a_1 + (c_1 + d_1)e^t + d_1 t e^t & = 3\left(a_1 t + b_1 + c_1 e^t + d_1 t e^t\right) \\ & \quad +2\left(a_2 t + b_2 + c_2 e^t + d_2 t e^t\right) + t \\ a_2 + (c_2 + d_2)e^t + d_2 t e^t & = -\left(a_1 t + b_1 + c_1 e^t + d_1 t e^t\right) + e^t. \end{cases}$$

   Igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 = 3b_1 + 2b_2 \\ 3a_1 + 2a_2 + 1 = 0 \\ c_1 + d_1 = 3c_1 + 2c_2 \\ d_1 = 3d_1 + 2d_2 \\ a_2 = -b_1 \\ a_1 = 0 \\ c_2 + d_2 = -c_1 + 1 \\ d_2 = -d_1. \end{cases}$$

La solución es $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{3}{4}$, $d_1 = -2$, $d_2 = 2$ y $c_1 + c_2 = 1$. Por tanto la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t - 2k_2e^{2t} + \frac{1}{2} - 2te^t \\ y(t) = -\alpha e^t + e^t + k_2e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + 2te^t \end{cases}$$

donde $\alpha = k_1 + c_1$ es una nueva constante. Los valores de α y k_2 se encuentran como solución del sistema

$$\begin{cases} x(0) = \alpha - 2k_2 + \frac{1}{2} \\ y(0) = -\alpha + k_2 + \frac{1}{4}, \end{cases}$$

cuando las condiciones iniciales son conocidas.

3. Para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

la matriz de representación es $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico, $r^2 - 2r - 4$, tiene como raíces $r = 1 - \sqrt{5}$ y $r = 1 + \sqrt{5}$, los vectores propios correspondientes a estos valores propios son: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$. La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1e^{(1-\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{5} \end{pmatrix} + k_2e^{(1+\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

El punto de equilibrio es un punto de silla, la senda de convergencia (el espacio generado por el vector propio correspondiente al valor propio negativo) es $Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{5} \end{pmatrix}\right\}$; este espacio corresponde a la recta $y = -(2 + \sqrt{5})x$.

4. El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -4x + 2y \end{cases}$$

está representado por la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo polinomio característico es $r^2 - 4r + 8$. Las raíces de este polinomio son: $2 + 4i$ y $2 - 4i$ y los vectores propios correspondientes son:

$$\begin{pmatrix}1\\4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad \begin{pmatrix}1\\-4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}.$$

Aplicando la fórmula encontrada en el caso de raíces complejas, la solución general para el sistema es

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=e^{2t}\Bigg[&k_1\left(\cos(4t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\operatorname{sen}(4t)\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\right)\\&+k_2\left(\cos(4t)\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\operatorname{sen}(4t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Los valores de k_1 y k_2 se encuentran usando condiciones iniciales. Si se sabe que $x(0)=1$ y $y(0)=3$, al reemplazar estos valores se encuentra:

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\4k_2\end{pmatrix}$$

de donde $k_1=1$ y $k_2=\frac{3}{4}$ y la solución del problema con condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}&=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}\cos(4t)\\-4\operatorname{sen}(4t)\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(4t)\\4\cos(4t)\end{pmatrix}\right]\\&=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(4t)+\frac{3}{4}\operatorname{sen}(4t)\\3\cos(4t)-4\operatorname{sen}(4t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con más ecuaciones es posible hacer el análisis de estabilidad a partir del comportamiento de las raíces del polinomio característico, aunque es imposible resumir el comportamiento de la solución en términos de la traza y el determinante como en el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas; sin embargo, el siguiente resultado da el comportamiento de los valores propios a partir de los coeficientes del polinomio característico de la matriz de coeficientes.

Teorema 8.2. ***(Routh-Hurwitz)*** *El polinomio*

$$P(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

con coeficientes reales y $a_0 > 0$ tiene todas sus raíces con parte real negativa si y sólo si los menores principales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

son todos positivos.

La matriz de Hurwitz contiene en la primera fila los coeficientes impares del polinomio característico, en la segunda los coeficientes pares, la tercera y la cuarta filas son idénticas a la primera y la segunda antecedidas por cero, la quinta y la sexta son iguales a la segunda y la tercera antecedidas por cero, etc. La diagonal $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, está formada por los coeficientes de la ecuación salvo el coeficiente a_0.

El comportamiento de un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas que se pueda reescribir en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + H(\mathbf{x}),$$

donde A es una matriz 2×2, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y H es una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, puede ser determinado por medio del siguiente

Teorema 8.3. *Sea*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{H(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

si G es continua en $(0,0)$, entonces:

1. *Si el punto de equilibrio de $\dot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}$ es estable, entonces el punto de equilibrio de $\dot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x} + H(\boldsymbol{x})$ es estable, y*

2. *Si el punto de equilibrio de $\dot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}$ es inestable, entonces el punto de equilibrio de $\dot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x} + H(\boldsymbol{x})$ es inestable.*

Este teorema o la aproximación del sistema en los puntos de equilibrio por un sistema lineal vía la aplicación del teorema de Hartman-Grobman da el comportamiento de los puntos de equilibrio en sistemas no lineales. En sistemas no lineales este comportamiento lo establece el determinante y la traza de la matriz jacobiana, J.

Ejemplo

El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

tiene cuatro puntos de equilibrio $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$; éstos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

para estudiar su comportamiento se analiza la traza y el determinante de la matriz jacobiana,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

en cada uno de los puntos:

1. En $(1, 0)$, $J(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, su traza es 4 y su determinante es 4, las raíces del polinomio característico son ambas 2, el punto de equilibrio es un nodo inestable.

2. En $(-1, 0)$, $J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ su traza es -4 y su determinante es 4, las raíces del polinomio característico son ambas -2 y el punto de equilibrio es un nodo estable.

3. En $(0, \pm 1)$, $J(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$ su traza es 0 y su determinante es -4, las raíces del polinomio característico son 2 y -2, por lo tanto esos puntos de equilibrio son puntos de silla.

Ejercicios

1. Encontrar la solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y analizar la convergencia si la matriz A es:

   a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

   i) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *j)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   m) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ *n)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *o)* $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *p)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Encontrar la solución del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - 2 \\ \dot{y} = \frac{5}{12}x - \frac{1}{12}y + 5 \end{cases}$$
   con las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$.

3. Hacer el diagrama de fase para cada uno de los sistemas y analizar el comportamiento de los puntos de equilibrio usando la matriz jacobiana:

   a) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 - y \\ \dot{y} = 4 - x^2 - y \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} \dot{x} = y^3 - x - y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$

   e) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 4 - y^2 \end{cases}$

4. El sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 - 2y \\ \dot{y} = x + y^2 - y - 6 \end{cases}$$
   tiene dos puntos de equilibrio. Utilizar la jacobiana para analizar el comportamiento de los puntos de equilibrio y hacer los diagramas de fase correspondientes.

5. Las ecuaciones para la demanda y la oferta son:

$$
\begin{aligned}
D(p) &= 5\ddot{p} + 2\dot{p} + 4p - 98 \\
O(p) &= \ddot{p} - 2\dot{p} + 2p - 2
\end{aligned}
$$

   a) Hallar la solución del modelo, suponiendo que el mercado está en equilibrio en cada momento.

   b) Analizar el comportamiento del mercado si ocurre un desequilibrio del mercado en el momento $t = 0$ que aparta los precios de su nivel de equilibrio, tal que $p(0) = 32$ y $\dot{p}(0) = 35$.

6. Analizar los puntos de equilibrio del sistema no lineal

$$
\begin{cases}
\dot{x} = 0{,}5x - y \\
\dot{y} = 3x - x^3 - 2y
\end{cases}
$$

7. Trazar el diagrama de fase y analizar, por medio de la matriz jacobiana, los puntos de equilibrio del sistema:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = a^2x - x^3 - y \\
\dot{y} = x - y.
\end{cases}
$$

8. Encontrar condiciones sobre el parámetro a para que los puntos de equilibrio del sistema sean estables:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = x - x^3 - ay \\
\dot{y} = x - y.
\end{cases}
$$

9. Una versión del modelo de Phillips para la interacción entre la tasa de inflación y la tasa de desempleo es:

$$
\begin{cases}
\dot{\pi}(t) = \beta\left(p(t) - \pi(t)\right) \\
u(t) = a + b\pi(t) - \alpha p(t) \\
\dot{u}(t) = k(p(t) - \gamma)
\end{cases}
$$

   donde p es la tasa de inflación, π es la tasa de inflación esperada, u es la tasa de desempleo y todos los coeficientes son positivos. Se supone que $(b-\alpha)\beta = k$. Encontrar, si las hay, las condiciones de estabilidad del modelo y determinar su comportamiento.

10. Otra versión del modelo de Phillips es:

$$\begin{cases} \dot{\pi}(t) = \beta\left(p(t) - \pi(t)\right) \\ p(t) = a - bu(t) + \alpha\pi(t) \\ \dot{u}(t) = k(p(t) - \gamma) \end{cases}$$

donde todos los coeficientes son positivos. Se supone que $\alpha\beta - \beta = bk$. Determinar:

  a) La solución del modelo, es decir, $p(t)$, $\pi(t)$ y $u(t)$.
  b) El punto de equilibrio, su tipo y su comportamiento con respecto a estabilidad.

8.3. La dinámica en economía

8.3.1. Los enfoques discreto y continuo de un modelo de Samuelson

Esta sección examina el andamiaje matemático necesario para comparar las concepciones dinámicas en un modelo propuesto por Samuelson[S, pp. 265] para mostrar que los procesos de ajuste son diferentes cuando se trabaja con tiempo continuo o discreto; para ello Samuelson utiliza un modelo keynesiano bastante sencillo.

8.3.2. Caso estático

Considérese el sistema

$$\begin{cases} C\left(r, Y\right) + I + \alpha = Y \\ F\left(r, Y\right) - I = -\beta \\ L\left(r, Y\right) = M \end{cases}$$

r es la tasa de interés, Y es el ingreso, I representa la inversión, C corresponde a la función de consumo, F representa la eficiencia marginal del capital, L es la función de preferencia por la liquidez, M es la cantidad de dinero. El parámetro α mide los desplazamientos hacia arriba de la propensión a consumir. β cuantifica los desplazamientos hacia arriba de la eficiencia marginal del capital[3]. El sistema tiene tres ecuaciones y tres

[3] Mientras que la pendiente de las curvas está determinada por la propensión marginal a consumir y la eficiencia marginal del capital, los parámetros "α" y "β" definen el punto de corte de la curva con la vertical.

incógnitas (r, Y, I). Al reordenar la primera ecuación y derivar con respecto al parámetro α,

$$\begin{cases} C_r r_\alpha + C_Y Y_\alpha - Y_\alpha + I_\alpha = -1 \\ F_r r_\alpha + F_Y Y_\alpha - I_\alpha = 0 \\ L_r r_\alpha + L_Y Y_\alpha = 0 \end{cases}$$

Con respecto al parámetro β,

$$\begin{cases} C_r r_\beta + C_Y Y_\beta - Y_\beta + I_\beta = 0 \\ F_r r_\beta + F_Y Y_\beta - I_\beta = -1 \\ L_r r_\beta + L_Y Y_\beta = 0 \end{cases}$$

Con respecto a M,

$$\begin{cases} C_r r_M + C_Y Y_M - Y_M + I_M = 0 \\ F_r r_M + F_Y Y_M - I_M = 0 \\ L_r r_M + L_Y Y_M = 1 \end{cases}$$

En forma matricial los sistemas se transforman en

$$\begin{pmatrix} c_r & c_Y - 1 & 1 \\ F_r & F_Y & -1 \\ L_r & F_Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\alpha \\ Y_\alpha \\ I_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_r & c_Y - 1 & 1 \\ F_r & F_Y & -1 \\ L_r & F_Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\beta \\ Y_\beta \\ I_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} c_r & c_Y - 1 & 1 \\ F_r & F_Y & -1 \\ L_r & F_Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_M \\ Y_M \\ I_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución de cada uno de los tres sistemas anteriores se obtiene premultiplicando por la inversa de la matriz de coeficientes,

$$\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} L_Y & L_Y & 1 - C_Y - F_Y \\ -L_r & -L_r & C_r + F_r \\ F_r L_Y - F_Y L_r & (C_Y - 1) L_r - C_r L_r & C_r F_Y - (C_Y - 1) F_r \end{pmatrix}$$

Siendo,

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_r & C_Y - 1 & 1 \\ F_r & F_Y & -1 \\ L_r & F_Y & 0 \end{vmatrix}$$

La propensión marginal a consumir es mayor que cero ($C_Y > 0$). La eficiencia marginal del capital es positiva con respecto al ingreso ($F_Y > 0$) y negativa con respecto a la tasa de interés ($F_r < 0$). La demanda de dinero aumenta con el ingreso ($L_Y > 0$) y disminuye cuando la tasa de interés sube ($L_r < 0$). La respuesta del consumo a las variaciones de la tasa de interés es más incierta. Si los intereses suben es probable que aumente el ahorro, pero también puede presentarse un aumento del consumo si la persona interpreta el alza de las tasas de interés como el comienzo de un proceso inflacionario. Por consiguiente, el signo de C_r es desconocido.

A partir de los sistemas matriciales se tienen las soluciones:

$$\begin{pmatrix} r_\alpha \\ Y_\alpha \\ I_\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} L_Y & L_Y & 1 - C_Y - F_Y \\ -L_r & -L_r & C_r + F_r \\ F_r L_Y - F_Y L_r & (C_Y - 1) L_r - C_r L_r & C_r F_Y - (C_Y - 1) F_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -L_Y \\ L_r \\ F_Y L_r - F_r L_Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_\beta \\ Y_\beta \\ I_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -L_Y \\ L_r \\ (1 - C_Y) L_r + C_r L_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_M \\ Y_M \\ I_M \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 - C_Y - F_Y \\ C_r + F_r \\ C_r F_Y - (C_Y - 1) F_r \end{pmatrix}$$

Puesto que el signo de C_r es incierto, [S] concluye que no es posible precisar si Δ es positivo o negativo. A renglón seguido duda que un modelo estático como el presentado tenga la capacidad de explicar el comportamiento de la economía keynesiana. La inversión (I) no es estática. A través del tiempo se va ajustando en función de la diferencia entre la inversión actual y la inversión deseada. Este hecho obliga a considerar un esquema de análisis de carácter dinámico.

8.3.3. Caso dinámico. Tiempo continuo

Expresando el sistema original en forma dinámica y en tiempo continuo se tiene:

$$\begin{cases} \dot{Y} = I - [Y - C(r, Y) - \alpha] \\ 0 = F(r, Y) - I + \beta \\ 0 = L(r, Y) - M \end{cases}$$

Al linealizar este sistema mediante la expansión en polinomio de Taylor de primer orden de las funciones C, F y L, se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{Y} = I - \left[Y - \left\{C(0) + \frac{\partial C}{\partial r}(0)\, r + \frac{\partial C}{\partial Y}(0)\, Y\right\} - \alpha\right] \\ \qquad = I - [1 + C_Y(0)]\, Y - C(0) - C_r(0)\, r - \alpha \\ F(0) + F_r(0)\, r + F_Y(0)\, Y - I + \beta = 0 \\ L(0) + L_r(0)\, r + L_Y(0)\, Y - M = 0 \end{cases}$$

Despejando I en la segunda de estas ecuaciones y reemplazando en la primera,

$$\dot{Y} = F(0) + F_r(0)\, r + F_Y(0)\, Y + \beta - [1 + C_Y(0)]\, Y - C(0) - C_r(0)\, r - \alpha$$

Al simplificar la ecuación anterior se tiene:

$$\dot{Y} = B + Wr + TY$$

con B, W y T constantes. Despejando r en la tercera ecuación del sistema y reemplazando en la anterior,

$$\dot{Y} = B + \frac{W}{rL(0)}\,[M - L_Y(0)\, Y - L(0)] + TY$$

esta ecuación se reescribe

$$\dot{Y} = aY + b$$

a y b son constantes. Esta última es una ecuación diferencial lineal, cuya solución es

$$Y = -\frac{b}{a} + Y(0)e^{at} = Y_0 + a_1 e^{at}$$

Reemplazando esta expresión en la segunda y la tercera ecuaciones del sistema,

$$\begin{cases} F(0) + F_r(0)\, r + F_Y(0)\left[Y_0 + a_1 e^{at}\right] - I + \beta = 0 \\ L(0) + L_r(0)\, r + L_Y(0)\left[Y_0 + a_1 e^{at}\right] - M = 0 \end{cases}$$

Al despejar r de la primera de éstas e I de la segunda, las expresiones resultantes toman la forma

$$\begin{cases} r = r^0 + a_2 e^{at} \\ I = I^0 + a_3 e^{at} \end{cases}$$

Estas soluciones son idénticas a las de [S]. Para determinar las condiciones de estabilidad, derivamos Y con respecto a t:

$$\dot{Y} = a\,(Y - Y_0)$$

Al reemplazar en la primera ecuación del sistema original,

$$I - [Y - C\,(r, Y) - \alpha] = a\,(Y - Y_0)$$

Simplificando y ordenando términos,

$$C\,(r, Y) - (1 + a)\,Y + I + aY_0 = -\alpha$$

Al reemplazarla por la primera del sistema, éste se convierte en

$$\begin{cases} C\,(r, Y) - (1 + a)Y + I + aY_0 = -\alpha \\ F\,(r, Y) - I = -\beta \\ L\,(r, Y) = M \end{cases}$$

La solución es similar a la del caso estático. Basta reemplazar la inversa de la matriz de coeficientes por la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} C_r & C_Y - 1 - a & 1 \\ F_r & F_Y & -1 \\ L_r & F_Y & 0 \end{pmatrix}$$

y Δ por

$$\Delta\,(a) = \begin{vmatrix} C_r & C_Y - 1 - a & 1 \\ F_r & F_Y & -1 \\ L_r & F_Y & 0 \end{vmatrix} = \Delta + aL_r$$

en el sistema de soluciones estáticas. Las soluciones del sistema ofrecen un equilibrio estable sólo si $a < 0$.

Cuando el sistema es estable, el aumento de la eficiencia marginal del capital (α) se traduce en mayores tasas de interés y un ingreso más alto. De la misma manera, cuando la propensión marginal a consumir crece (β), la tasa de interés y el ingreso aumentan ([G-P1]).

8.3.4. Caso dinámico. Tiempo discreto

Considerando la inversión como un parámetro independiente, se tiene

$$Y_t = C\left(\bar{r}, Y_{t-1}\right) + \bar{I}$$

Puesto que la tasa de interés es constante, C no depende de r. Desarrollando C en polinomio de Taylor

$$C\left(\bar{r}, Y_t\right) = C\left(Y_t\right) = C(Y_0) + C_{Y_0}\left(Y_t - Y_0\right)$$

y reemplazando en

$$Y_t = C\left(Y_0\right) + C_{Y_0}\left(Y_{t-1} - Y_0\right) + \bar{I}$$

$$Y_t = C_{Y_0} Y_{t-1} + A$$

A es una constante. La ecuación es una ecuación en diferencias de primer orden que tiene como solución

$$Y_t = K\left(C_{Y_0}\right)^t + B$$

Donde K y B son constantes. Esta solución es estable sólo si

$$\left|C_{Y_0}\right| < 1$$

En el punto de expansión Y_0 la propensión marginal a consumir puede estar en el rango que va desde menos uno a uno. Samuelson dice que la propensión marginal a consumir no necesariamente tiene que ser positiva. En algunas circunstancias se presenta desahorro y ello no es incompatible con el equilibrio.

Si la inversión es variable pero la tasa de interés se mantiene fija,

$$C\left(\bar{r}, Y_{t-1}\right) - Y_t + I_t = 0$$

$$F\left(\bar{r}, Y_t\right) - I_t = 0$$

Al reemplazar los desarrollos de Taylor de primer orden de C y F en las dos ecuaciones anteriores se llega a

$$C\left(Y_0\right) + C_{Y_0}\left(Y_t - Y_0\right) - Y_t + I_t = 0$$

$$F\left(Y_0\right) + F_{Y_0}\left(Y_t - Y_0\right) - I_t = 0$$

Despejando la inversión en la última de éstas y reemplazando el resultado en la primera,

$$C\left(Y_0\right)+C_{Y_0}\left(Y_t-Y_0\right)-Y_t+F\left(Y_0\right)+F_{Y_0}\left(Y_t-Y_0\right)=0$$

De donde se sigue que el ingreso del período t es

$$Y_t=\frac{C_{Y_0}}{1-F_{Y_0}}Y_{t-1}+D$$

D es una constante que depende de los valores iniciales de cada una de las variables involucradas. La solución es

$$Y_t=K_1\left[\frac{C_{Y_0}}{1-F_{Y_0}}\right]^t+E$$

Sustituyendo este resultado en la expresión para I,

$$I_t=F\left(Y_0\right)+F_{Y_0}\left\{K_1\left[\frac{C_{Y_0}}{1-F_{Y_0}}\right]^t+E-Y_0\right\}$$

El equilibrio es estable si

$$\left|\frac{C_Y}{1-F_Y}\right|<1,\text{ ó }\ -\left|1-F_Y\right|<C_Y<\left|1-F_Y\right|.$$

Finalmente, considérese la situación en la que ninguna de las variables está dada.

$$\begin{cases}C\left(r_t,Y_{t-1}\right)-Y_t+I_t=0\\ F\left(r_t,Y_t\right)-I_t=0\\ L\left(r_t,Y_t\right)-M_t=0\end{cases}$$

Sustituyendo los desarrollos de C, F y L en las respectivas ecuaciones,

$$\begin{cases}C_0+C_{r_0}\left(r_t-r_0\right)+C_{Y_0}\left(Y_{t-1}-Y_0\right)-Y_t+I_t=0\\ F_0+F_{r_0}\left(r_t-r_0\right)+F_{Y_0}\left(Y_t-Y_0\right)-I_t=0\\ L_0+L_{r_0}\left(r_t-r_0\right)+L_{Y_0}\left(Y_t-Y_0\right)-M=0\end{cases}$$

Reemplazando la inversión y la tasa de interés,

$$\begin{aligned}&C_0+C_{r_0}\left(r_t-r_0\right)+C_{Y_0}\left(Y_{t-1}-Y_0\right)-Y_t+I_t\\ &=C_0+\frac{C_{r_0}+F_{r_0}}{L_{r_0}}\left[M-L_0-L_{y_0}\left(Y_t-Y_0\right)\right]+C_{Y_0}\left(Y_{t-1}-Y_0\right)\\ &\qquad+Y_t\left(F_{Y_0}-1\right)+F_0+F_{Y_0}Y_0\end{aligned}$$

Despejando el ingreso del período t,

$$\left[F_{Y_0} - 1 - \frac{L_{Y_0}\left(C_{r_0} + F_{r_0}\right)}{L_{r_0}}\right] Y_t = -C_{Y_0} Y_{t-1} + S$$

$$Y_t = -\frac{C_{Y_0} L_{r_0}}{F_{Y_0} L_{r_0} - L_{r_0} - L_{Y_0}\left(C_{r_0} + F_{r_0}\right)} Y_{t-1} + R$$

La solución es

$$Y_t = K_3 \left[-\frac{C_{Y_0} L_{r_0}}{F_{Y_0} L_{r_0} - L_{r_0} - L_{Y_0}\left(C_{r_0} + F_{r_0}\right)}\right]^t + Q$$

La condición de estabilidad es

$$\left|\frac{C_{Y_0} L_{r_0}}{F_{Y_0} L_{r_0} - L_{r_0} - L_{Y_0}\left(C_{r_0} + F_{r_0}\right)}\right| < 1$$

Relación entre, de una parte, los desplazamientos hacia arriba de la propensión marginal a consumir (α) y de la eficiencia marginal del capital (β) y, de otra parte, la tasa de interés (r) y el ingreso (Y). Al comparar las soluciones y sus condiciones de convergencia, se observa que éstas no coinciden.

Capítulo 9

Optimización dinámica discreta

En economía se presentan problemas como los siguientes: ¿Cuál debe ser el consumo durante un intervalo para que la utilidad total a valor presente tenga el valor más grande posible? ¿Cómo deben ajustarse en un cierto periodo las tasas de cambio, de interés y de desempleo para que la inflación baje a cierto nivel? En ellos se quiere determinar cómo se deben manejar las **variables de control** para determinar el comportamiento de otra u otras variables de estado. Este tipo de problemas se ajusta a alguno de los siguientes tipos:

$$\begin{aligned} \text{Optimizar } & \int_a^T F\left(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\right) dt \\ \text{sujeto a } & \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a, \\ & \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Optimizar } & \int_a^T F\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) dt \\ \text{sujeto a } & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ & \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a, \\ & \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \end{aligned}$$

en caso de que las variables involucradas sean continuas y

$$\text{Optimizar } \sum_{t=a}^{T} F\left(t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t\right) \qquad \begin{aligned} \text{Optimizar } & \sum_{t=a}^{T} F\left(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t\right) \\ \text{sujeto a } & \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t\right) \end{aligned}$$

con algunas condiciones para x_a y x_T, cuando las variables sean discretas. El primero es un problema de cálculo de variaciones, el segundo de control óptimo. En este tipo de problemas se trata de conseguir las funciones $x(t)$ y $u(t)$ o las sucesiones x_t y u_t para las que las integrales o sumas toman su valor máximo o mínimo. Estas funciones o sucesiones reciben el nombre de **sendas óptimas** para el problema. La función x recibe el nombre de variable de estado y la u variable de control; se está interesado en saber el comportamiento de x usando u para determinar ese comportamiento. Nótese que todo problema de cálculo de variaciones se puede transformar en un problema de control y si en el problema de control es posible eliminar las variables de control el problema se reduce a cálculo de variaciones.

En general las condiciones $x(a)$ y $x(T)$ no necesariamente son constantes, pueden ser libres o tomar valores en función de a ó T. Estas condiciones se conocen con el nombre de **condiciones de transversalidad**. Para el caso en que el problema esté definido sobre el intervalo $[0, T]$ y $x(0)$ sea fijo, T y x_T pueden ser: x_T y T fijos, x_T fijo y T libre, x_T libre y T fijo, y x_T y T libres. Estas condiciones también se pueden dar para a y $x(a)$

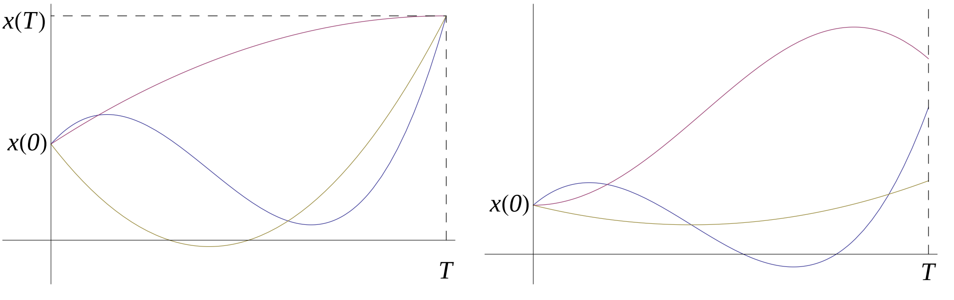


Figura 9.1: Comportamiento de la función $x(t)$ cuando T y x_T son fijos y cuando T es fijo y x_T es libre.

en problemas definidos en el intervalo $[a, T]$; para cada una de las posibilidades se deben encontrar condiciones de optimalidad sobre la función y las condiciones de transversalidad involucradas.

Para problemas discretos existen tres métodos generales de solución: optimización estática, programación dinámica y control óptimo. El segundo aplica el principio que una senda óptima debe estar formada de (sub)sendas óptimas y el último es la particularización del mismo método usado en optimización dinámica continua.

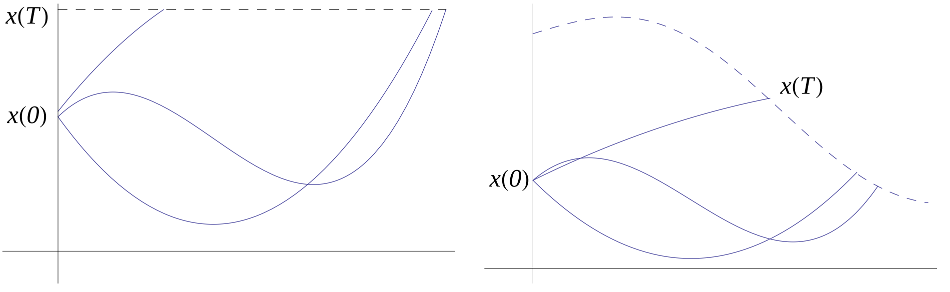


Figura 9.2: Comportamiento de la función $x(t)$ cuando T es libre y x_T es fijo y cuando T y x_T están libres.

9.1. Métodos de optimización estática

Para solucionar el problema de encontrar el

$$\begin{aligned}&\text{Óptimo de } \sum_{t=0}^{T} f\left(t, x_t, u_t\right)\\ &\quad \text{sujeto a } x_{t+1} = g\left(t, x_t, u_t\right) \quad \text{para} \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,\\ &\qquad \text{con alguna condición sobre} \quad x_0 \quad \text{y} \quad x_T,\end{aligned}$$

es posible usar técnicas de optimización estática restringida o no restringida. Luego de igualar a cero las restricciones la función lagrangiana para el problema es:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T-1} f\left(t, x_t, u_t\right) + \lambda_t \left[g\left(t, x_t, u_t\right) - x_{t+1}\right] + f\left(T, x_T, u_T\right)$$

sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} &= f_{x_0}\left(0, x_0, u_0\right) + \lambda_0 g_{x_0}\left(0, x_0, u_0\right),\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_t} &= f_{x_t}\left(t, x_t, u_t\right) + \lambda_t g_{x_t}\left(t, x_t, u_t\right) - \lambda_{t-1}, \quad \text{para} \quad t = 1, 2, \ldots, T-1,\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= f_{u_t}\left(t, x_t, u_t\right) + \lambda_t g_{u_t}\left(t, x_t, u_t\right), \quad \text{para} \quad t = 0, 1, \ldots, T,\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_T} &= f_{x_T}\left(T, x_T, u_T\right) - \lambda_{T-1},\end{aligned}$$

y las condiciones necesarias para la solución del problema se pueden escribir en la forma:

$$\begin{aligned} f_{x_0}(t, x_0, u_0) + \lambda_0 g_{x_0}(t, x_0, u_0) &= 0, \\ f_{x_t}(t, x_t, u_t) + \lambda_t g_{x_t}(t, x_t, u_t) &= \lambda_{t-1}, \quad \text{para} \quad t = 1, \ldots, T-1, \\ f_{u_t}(t, x_t, u_t) + \lambda_t g_{u_t}(t, x_t, u_t) &= 0, \quad \text{para} \quad t = 0, 1, \ldots, T, \\ f_{x_T}(t, x_T, u_T) &= \lambda_{T-1}, \end{aligned}$$

esto junto con las restricciones del problema es un sistema de 3 ecuaciones en recurrencia en las variables x_t, u_t y λ_t. En algunos problemas es posible eliminar la variable u_t y usar técnicas de optimización estática no restringuida.

Ejemplos

1. Un monopolista cree que la cantidad q_t que puede vender depende no solo del precio p_t que él imponga, sino también del cambio de precio en la forma:

   $$q_t = a - bp_t + \delta(p_t - p_{t-1})$$

   para $t = 1, 2, \ldots, t$. Sus costos están dado por

   $$C(q_t) = \alpha q_t^2 - \beta q_t + \gamma.$$

   Dado que p_0 es conocido y se desea un precio p_T al final de T periodos. Encontrar la política de precios en los T periodos para maximizar los beneficios

   $$\sum_{t=0}^{T} [p_t q_t - C(q_t)].$$

   El lagrangiano para el problema es

   $$\mathcal{L} = p_0 q_0 - C(q_0) + \sum_{t=1}^{T} \{p_t q_t - C(q_t) + \lambda_t [a + (\delta - b)p_t - \delta p_{t-1} - q_t]\}.$$

   Las condiciones necesarias:

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p_0} &= q_0 - \delta\lambda_0 = 0, \\ \mathcal{L}_{q_0} &= p_0 - C'(q_0) = p_0 - 2\alpha q_0 + \beta = 0, \\ \mathcal{L}_{p_t} &= q_t + (\delta - b)\lambda_t - \delta\lambda_{t+1} = 0, \text{ para } t = 1, 2, \ldots, T, \\ \mathcal{L}_{q_t} &= p_t - C'(q_t) - \lambda_t = p_t - 2\alpha q_t + \beta - \lambda_t = 0, \text{ para } t = 1, 2, \ldots, T, \end{aligned}$$

junto con la restricción dan los valores de precios y cantidades que optimizan el problema. Despejar en la última ecuación

$$\lambda_t = p_t - 2\alpha q_t + \beta,$$

reemplazar en la tercera

$$\begin{aligned} q_t + (\delta - b)\lambda_t - \delta\lambda_{t+1} &= q_t + (\delta - b)\left(p_t - 2\alpha q_t + \beta\right) \\ &\qquad - \delta\left(p_{t+1} - 2\alpha q_{t+1} + \beta\right) \\ = \left[1 - 2\alpha(\delta - b)\right] q_t &+ (\delta - b)p_t - \delta p_{t+1} + 2\alpha\delta q_{t+1} + b\beta = 0, \end{aligned}$$

sustituir la restricción

$$\begin{aligned} &\left[1 - 2\alpha(\delta - b)\right] q_t + (\delta - b)p_t - \delta p_{t+1} + 2\alpha\delta q_{t+1} + b\beta \\ &= \left[1 - 2\alpha(\delta - b)\right]\left[a + (\delta - b)p_t - \delta p_{t-1}\right] + (\delta - b)p_t - \delta p_{t+1} \\ &\qquad + 2\alpha\delta\left[a + (\delta - b)p_{t+1} - \delta p_t\right] + b\beta \\ &= \left[2\alpha\delta(\delta - b) - \delta\right] p_{t+1} + \left[(\delta - b)\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) - 2\alpha\delta^2 + \delta - b\right] p_t \\ &\qquad - \delta\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) p_{t-1} + a\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) + b\beta \\ &= -\delta\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) p_{t+1} + \left[(\delta - b)\left(2 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) - 2\alpha\delta^2\right] p_t \\ &\qquad - \delta\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) p_{t-1} + a\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) + b\beta = 0; \end{aligned}$$

da la ecuación a resolver. La ecuación característica correspondiente a la homogénea es

$$\begin{aligned} -\delta\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) r^2 + \left[(\delta - b)\left(2 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) - 2\alpha\delta^2\right] r \\ - \delta\left(1 - 2\alpha\delta + 2\alpha b\right) = 0. \end{aligned}$$

El comportamiento de la solución depende de las raíces y estas de los parámetros de acuerdo a los resultados del capítulo sobre dinámica discreta.

2. Un consumidor representativo recibe una utilidad $u(c) = \ln c$ por su consumo y dispone de un capital inicial $k_0 > 0$ invertido a una tasa de interés de $r\,\%$ por período. Se quiere encontrar el consumo del individuo representativo en cada uno de T períodos (T fijo) para maximizar la utilidad descontada a una tasa ρ por período. Por lo

tanto se quiere solucionar el problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Máximo de } \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\ln c_t}{(1+\rho)^t} \\
&\quad \text{sujeto a } k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t \quad \text{para} \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \\
&\qquad\qquad k_0 > 0 \quad \text{y} \quad k_T = 0.
\end{aligned}$$

Despejando c_t en la restricción y reemplazándo en el valor objetivo el problema se reduce a,

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } F(k_0, k_1, ..., k_T) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\ln [(1+r)k_t - k_{t+1}]}{(1+\rho)^t} \\
&\text{sujeto a} \quad k_0 > 0 \quad \text{y} \quad k_T = 0.
\end{aligned}$$

De esta forma el problema es no restringuido y puede ser resuelto por los metodos de optimización no restringuida. La derivada parcial de esta función con respecto a la variable k_t es

$$\frac{\partial F}{\partial k_t} = \frac{1+r}{(1+\rho)^t [(1+r)k_t - k_{t+1}]} - \frac{1}{(1+\rho)^{t-1} [(1+r)k_{t-1} - k_t]}.$$

Los valores del capital en cada período son los valores de la solución de la ecuación recurrente que producen las condiciones necesarias para la maximización, esto es, la solución de la ecuación resultante de igualar a cero la derivada anterior:

$$\frac{1+r}{(1+\rho)^t [(1+r)k_t - k_{t+1}]} = \frac{1}{(1+\rho)^{t-1} [(1+r)k_{t-1} - k_t]},$$

al transponer términos

$$(1+r)(1+\rho)^{t-1} [(1+r)k_{t-1} - k_t] = (1+\rho)^t [(1+r)k_t - k_{t+1}],$$

simplificar,

$$(1+r) [(1+r)k_{t-1} - k_t] = (1+\rho) [(1+r)k_t - k_{t+1}]$$

multiplicar

$$(1+r)^2 k_{t-1} - (1+r)k_t = (1+\rho)(1+r)k_t - (1+\rho)k_{t+1}$$

igualar a cero y trasladar un período

$$(1+\rho)k_{t+2} - (1+r)(2+\rho)k_{t+1} + (1+r)^2 k_t = 0.$$

La ecuación característica correspondiente es

$$(1+\rho)R^2 - (1+r)(2+\rho)R + (1+r)^2 = 0$$

y su solución es

$$\begin{aligned}
R &= \frac{(1+r)(2+\rho) \pm \sqrt{(1+r)^2(2+\rho)^2 - 4(1+\rho)(1+r)^2}}{2(1+\rho)} \\
&= \frac{(1+r)(2+\rho) \pm (1+r)\sqrt{[1+(1+\rho)]^2 - 4(1+\rho)}}{2(1+\rho)} \\
&= \frac{(1+r)\left(2+\rho \pm \sqrt{1+2(1+\rho)+(1+\rho)^2 - 4(1+\rho)}\right)}{2(1+\rho)} \\
&= \frac{(1+r)\left(2+\rho \pm \sqrt{1-2(1+\rho)+(1+\rho)^2}\right)}{2(1+\rho)} \\
&= \frac{(1+r)\left(2+\rho \pm \sqrt{[1-(1+\rho)]^2}\right)}{2(1+\rho)} \\
&= \frac{(1+r)(2+\rho \pm \rho)}{2(1+\rho)}
\end{aligned}$$

de donde, los valores de R son $1+r$ y $\frac{1+r}{1+\rho}$. La solución de la ecuación recurrente es

$$k_t = a_1(1+r)^t + a_2\left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^t,$$

donde, a_1 y a_2 se determinan con las condiciones k_0 y k_T.

Ejercicios

1. Terminar el ejemplo 1.

2. Calcular los valores de a_1 y a_2 y encontrar c_t en el ejemplo 2.

3. Solucionar el ejemplo 2 usando optimización restringida.

4. Solucionar el ejemplo 2 si la función de utilidad es $u(c_t) = c_t^{\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$.

9.2. Programación dinámica

La función de valor del problema

$$\begin{gathered}\text{Máximo de } \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t) \\ \text{sujeto a } x_{t+1} = g(t, x_t, u_t) \quad \text{para} \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,\end{gathered}$$

con x_0, T y x_T conocidos, a partir de x_t está definida por

$$V(x_t) = \max_u \sum_{j=t}^{T} f(j, x_j, u_j).$$

Con esta notación el problema se reduce a encontrar $V(x_0)$.

El **principio de optimalidad de Bellman**, según Caputo[Ca], dice: *Una política óptima tiene la propiedad de que el estado inicial y la decisión inicial son las decisiones permanentes que constituyen una política óptima considerando el estado resultante desde la primera decisión.* Esto es, todo proceso óptimo, esta formado por subprocesos óptimos.

Este principio dice que una trayectoria óptima es escogida de manera óptima en cada subescogencia: esto es, la trayectoria debe ser óptima a partir de cualquier momento. En términos analíticos para cada $t = 0, 1, 2, ..., T$

$$V(x_t) = \max_{u_t, \ldots, u_{t+k}} \left\{ \sum_{j=t}^{t+k} f(j, x_j, u_j) + V(x_{t+k+1}) \right\}.$$

En particular para un período se tiene la ecuación

$$V(x_t) = \max_{u_t} \{ f(t, x_t, u_t) + V(x_{t+1}) \}.$$

Esta es la versión discreta de la **ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman** (HJB) que da las condiciones de optimalidad del problema. Usando las condiciones necesarias de óptimalidad

$$\frac{\partial}{\partial u_t}[f(t, x_t, u_t) + V(x_{t+1})] = \frac{\partial f(t, x_t, u_t)}{\partial u_t} + \frac{dV(x_{t+1})}{dx_{t+1}} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial u_t} = 0.$$

Usando la restricción la ecuación es

$$\frac{\partial f(t, x_t, u_t)}{\partial u_t} + \frac{dV(x_{t+1})}{dx_{t+1}} \frac{\partial g(t, x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0.$$

Si se reemplaza el argumento maximizador en $V(x_t)$, se deriva y se usa la restricción se tiene

$$\frac{dV(x_t)}{dx_t} = \frac{\partial f(t, x_t, u_t^*)}{\partial x_t} + \frac{dV(x_{t+1})}{dx_{t+1}} \frac{\partial g(t, x_t, u_t^*)}{\partial x_t}.$$

Este proceso justifica parcialmente el

Teorema 9.1. *Si x_t y u_t son los argumentos maximizadores interiores del problema*

$$\textit{Máximo de } \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t) \ \ \textit{sujeto a } x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$$

para $t = 0, 1, ..., T-1$, con x_0, T y x_T dados. Entonces x_t y u_t satisfacen las ecuaciones

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f(t, x_t, u_t)}{\partial u_t} + \frac{dV(x_{t+1})}{dx_{t+1}} \frac{\partial g(t, x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0, \\
\frac{dV(x_t)}{dx_t} = \frac{\partial f(t, x_t, u_t)}{\partial x_t} + \frac{dV(x_{t+1})}{dx_{t+1}} \frac{\partial g(t, x_t, u_t)}{\partial x_t} \\
x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)
\end{gathered}$$

para $t = 0, 1, 2, ..., T$.

Usando las sustituciones $f_t = f(t, x_t, u_t)$, $g_t = g(t, x_t, u_t)$, $V_t = V(x_t)$ y $V_t' = \frac{dV(x_t)}{dx_t}$ las ecuaciones que dan las condiciones del teorema son

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + V_{t+1}' \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0, \quad V_t' = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} + V_{t+1}' \frac{\partial g_t}{\partial x_t}, \quad x_{t+1} = g_t.$$

Ejemplos

1. Para el problema

$$\text{Máximo de } \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\ln c_t}{(1+\rho)^t} \quad \text{sujeto a } k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t$$

para $t = 0, 1, ..., T-1$, con $k_0 > 0$ y $k_T = 0$. Las condiciones son

$$\frac{1}{(1+\rho)^t c_t} - V_{t+1}' = 0, \quad V_t' = V_{t+1}'(1+r), \quad k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t.$$

La primera y segunda equivalen a

$$V'_{t+1} = \frac{1}{(1+\rho)^t c_t}, \quad V'_{t+1} = \frac{V'_t}{(1+r)}$$

resolviendo la segunda

$$V'_{t+1} = \frac{V'_0}{(1+r)^{t+1}}$$

reemplazandola en la primera y despejando c_t

$$\frac{V'_0}{(1+r)^{t+1}} = \frac{1}{(1+\rho)^t c_t}, \quad c_t = \frac{(1+r)^{t+1}}{V'_0(1+\rho)^t}.$$

Para encontrar k_t se reemplaza c_t en la tercera ecuación que produjo la aplicación del teorema

$$k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t = (1+r)k_t - \frac{(1+r)^{t+1}}{V'_0(1+\rho)^t}.$$

La solución de esta ecuación que es un caso particular del ejemplo 5, sección 7.2 de la página 222, es

$$\begin{aligned}
k_t &= (1+r)^t k_0 - \sum_{i=0}^{t-1} c_i \prod_{j=i+1}^{t-1} (1+r)^j \\
&= (1+r)^t k_0 - \sum_{i=0}^{t-1} \frac{(1+r)^{i+1}}{V'_0(1+\rho)^i} \prod_{j=i+1}^{t-1} (1+r)^j \\
&= (1+r)^t k_0 - \sum_{i=0}^{t-1} \frac{(1+r)^{i+1}}{V'_0(1+\rho)^i}(1+r)^{t-1-(i+1)+1} \\
&= (1+r)^t k_0 - (1+r)^t \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{V'_0(1+\rho)^i} \\
&= (1+r)^t \left[k_0 - \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+\rho)^t}\right)}{V'_0\left(1 - \frac{1}{1+\rho}\right)} \right] \\
&= (1+r)^t \left[k_0 - \frac{(1+\rho)^t - 1}{V'_0\rho(1+\rho)^{t-1}} \right] \\
&= \frac{(1+r)^t}{V'_0\rho(1+\rho)^{t-1}} \left[k_0 V'_0 \rho (1+\rho)^{t-1} - (1+\rho)^t + 1 \right]
\end{aligned}$$

2. Una firma ha recibido una orden para producir Q unidades de su producto en un plazo de T dias. La firma quiere planear su producción para minimizar sus costos compuestos de producción y de almacenamiento. Los costos de producción por unidad aumentan linealmente con la tasa de produción, los costos unitarios diarios de almacenamiento son constantes y la producción se almacena al finalizar cada día.

   Sean x_t el total en inventario y u_t el total producido el día t

$$\begin{aligned} &\text{mín} \sum_{t=0}^{T-1} \left(a u_t^2 + b x_t\right) \\ &\text{sujeto a} \quad x_{t+1} = u_t + x_t, \text{ para } t = 0, 1, \ldots, T-1, \\ &\qquad\qquad\quad x_0 = 0,\ x_T = Q. \end{aligned}$$

   Para este problema el sistema a resolver es

$$2au_t + V'_{t+1} = 0, \quad V'_t = b + V'_{t+1}, \quad x_{t+1} = u_t + x_t.$$

   La solución de la segunda ecuación

$$V'_t = V'_0 - b\,t,$$

   usada en la primera permite despejar u_t,

$$u_t = -\frac{V'_{t+1}}{2a} = -\frac{V'_0 - b(t+1)}{2a} = \frac{b}{2a}t + \frac{b - V'_0}{2a}$$

   y este resultado aplicado en la última permite despejar x_t,

$$\begin{aligned} x_t = x_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \frac{V'_0 - b(k+1)}{2a} &= -\frac{1}{2a}\left[V'_0 t - b\sum_{k=1}^{t} k\right] \\ = \frac{bt(t+1)}{4a} - \frac{V'_0 t}{2a}. \end{aligned}$$

   Para calcular V'_0 se usa la condición $x_T = Q$,

$$x_T = \frac{bT(T+1)}{4a} - \frac{V'_0 T}{2a} = Q$$

   de donde se tiene

$$\frac{V'_0 T}{2a} = \frac{bT(T+1)}{4a} - Q,$$

$$V_0'T = \frac{bT(T+1)}{2} - 2aQ,$$
$$V_0' = \frac{b(T+1)}{2} - \frac{2aQ}{T}.$$

u_t es una sucesión creciente, para que $u_t \geq 0$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$ basta con que $u_0 \geq 0$, esto es,

$$\frac{b - V_0'}{2a} = b - \frac{b(T+1)}{2} + \frac{2aQ}{T} \geq 0.$$

3. Se dispone de una cantidad total B de cierto insumo que se puede usar en cualquiera de T periodos de producción. Si se usa una cantidad q_t en el momento t los beneficios generados por la producción son $\Pi(q_t) = q_t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Para encontrar la distribución del insumo con el propósito de maximizar el beneficio total se debe solucionar el problema:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \sum_{t=0}^{T} \Pi(q_t) \\ &\text{sujeto a} \quad x_{t+1} = x_t - q_t \text{ para } t = 0, 1, \ldots, T-1, \\ &\qquad\qquad\; x_0 = B,\ x_T = 0, \end{aligned}$$

donde, x_t representa la cantidad de insumo disponible en el momento t.

El sistema de ecuaciones a resolver para solucionar el problema son:

$$\alpha q_t^{\alpha-1} - V_{t+1}' = 0, \quad V_t' = V_{t+1}', \quad x_{t+1} = x_t - q_t.$$

Despejando en la primera y reemplazando en la segunda

$$\alpha q_{t-1}^{\alpha-1} = \alpha q_t^{\alpha-1},$$

de aquí

$$q_t = q_{t-1}.$$

La solución de esta ecuación es

$$q_t = q_0$$

para todo t. La solución de la última ecuación con este valor de q_t es

$$x_t = x_0 - q_0\, t = B - q_0\, t.$$

Como, además
$$x_T = B - q_0 T = 0,$$
entonces $q_0 = \frac{B}{T}$. Esto indica que el total de insumo debe ser repartido en partes iguales en cada uno de los periodos de producción.

4. La cantidad de un cierto bien almacenada en el momento inicial es A y lo que se produzca en los próximos T periodos se venderá a un precio p en el momento $T+1$. Los costos de almacenamiento y producción son proporcionales a la tasa de producción, esto es, si se produce una cantidad u los costos son $(cu)u = cu^2$. Se quiere maximizar el beneficio descontado a una tasa r por periodo, esto es solucionar el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \frac{px_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - \sum_{t=0}^{T} \frac{cu_t^2}{(1+r)^t} \\ &\text{sujeto a} \quad x_{t+1} = x_t + u_t, \text{ para } t = 0, 1, \ldots, T, \ x_0 = A, \end{aligned}$$

donde, x_t representa la cantidad acumulada hasta el momento t.

El sistema a solucionar en este caso es,

$$-\frac{2cu_t}{(1+r)^t} + V'_{t+1} = 0, \quad V'_t = V'_{t+1}, \quad x_{t+1} = x_t + u_t,$$

de la primera y la segunda de estas ecuaciones se encuentra que

$$u_t = (1+r)u_{t-1} = (1+r)^t u_0,$$

y de la última
$$x_{t+1} = x_t + (1+r)^t u_0.$$

Que tiene como solución

$$x_t = x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} (1+r)^i u_0 = A + \frac{u_0}{r}\left[1 - (1+r)^t\right].$$

Para determinar la cantidad a producir en cada periodo se debe calcular el valor de u_0.

Como
$$V(x_{T+1}) = \frac{px_{T+1}}{(1+r)^{T+1}}$$

si está determinado el valor de x_T la ecuación de HJB para el periodo es

$$V(x_T) = \max_{u_T} \{f(T, x_T, u_T) + V(x_{T+1})\}$$

que puesta en contexto es

$$\begin{aligned} V(x_T) &= \max_{u_T} \left\{ -\frac{cu_T^2}{(1+r)^T} + \frac{px_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} \right\} \\ &= \max_{u_T} \left\{ -\frac{cu_T^2}{(1+r)^T} + \frac{p(x_T+u_T)}{(1+r)^{T+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Sea

$$h(z) = -\frac{cz^2}{(1+r)^T} + \frac{p(x_T+z)}{(1+r)^{T+1}}$$

como

$$h'(z) = -\frac{2cz}{(1+r)^T} + \frac{p}{(1+r)^{T+1}} = 0$$

cuando $z = \frac{p}{2c(1+r)}$ y

$$h''(z) = -\frac{2c}{(1+r)^T} < 0$$

h tiene su máximo en $z = \frac{p}{2c(1+r)}$. Esto es, $u_T = \frac{p}{2c(1+r)}$ es la producción óptima en en momento T. Por lo tanto,

$$u_T = (1+r)^T u_0 = \frac{p}{2c(1+r)},$$

de aquí

$$u_0 = \frac{p}{2c(1+r)^{T+1}},$$

y

$$u_t = \frac{p}{2c(1+r)^{T-t+1}}.$$

La producción es inversamente proporcional al costo y creciente en cada periodo.

5. Supóngase que en el ejemplo 2 la firma tiene una capacidad instalada que le permite producir a lo mas q unidades diarias. Esto es, solucionar

el problema

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{t=0}^{T-1} \left(au_t^2 + bx_t\right)\\
&\text{sujeto a} \quad x_{t+1} = u_t + x_t, \quad 0 \le u_t \le q \text{ para } t = 0, 1, \ldots, T-1,\\
&\qquad\qquad\ x_0 = 0,\ x_T = Q.
\end{aligned}$$

El valor objetivo puede ser transformado en

$$-\max \sum_{t=0}^{T-1} \left(-au_t^2 - bx_t\right)$$

Por lo tanto, para este problema la función de valor satisface la ecuación

$$V(x_t) = \max_{0 \le u_t \le q} \left\{-au_t^2 - bx_t + V(x_{t+1})\right\}.$$

El lagrangiano para el problema de optimización es

$$\mathcal{L}\left(u_t, \mu_1, \mu_2\right) = -au_t^2 - bx_t + V(x_{t+1}) + \mu_1 u_t + \mu_2 \left(q - u_t\right)$$

Las condición necesaria de optimalidad es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{u_t} &= -2au_t + \frac{\partial V(x_{t+1})}{\partial u_t} + \mu_1 - \mu_2\\
&= -2au_t + V'(x_{t+1}) \frac{\partial x_{t+1}}{\partial u_t} + \mu_1 - \mu_2\\
&= -2au_t + V'_{t+1} + \mu_1 - \mu_2 = 0
\end{aligned}$$

y las condiciones de holgura complementaria para cada t son

$$\begin{cases}
\mu_1 u_t = 0, & \mu_1 \ge 0, \quad u_t \ge 0\\
\mu_2 \left(q - u_t\right) = 0, & \mu_2 \ge 0, \quad u_t \le q.
\end{cases}$$

Existen tres posibilidades para que se cumplan estas condiciones:

a) $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ y $u_t = 0$. El sistema a resolver es

$$\begin{cases}
V'_{t+1} + \mu_1 = 0\\
x_{t+1} = x_t.
\end{cases}$$

De la segunda ecuación

$$x_t = x_0 = 0,$$

esto es, si no se produce hasta el día t la cantidad acumulada es nula.

b) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$ y $u_t = q$. En este caso el sistema es

$$\begin{cases} -2aq + V'_{t+1} - \mu_2 = 0 \\ x_{t+1} = x_t + q. \end{cases}$$

La solución de la segunda ecuación es

$$x_t = x_{T_2} + (t - T_2)\, q,$$

para algún valor de x_{T_2} y $T_2 \leq t$. En este caso se produce al nivel de la capacidad instalada y se almacenan q unidades diariamente.

c) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$. El sistema de ecuaciones que producen las condiciones de optimalidad del problema es

$$\begin{cases} -2au_t + V'_{t+1} = 0 \\ x_{t+1} = x_t + u_t. \end{cases}$$

Como la solución en este caso es interior, al reemplazar el valor óptimo de u_t en la ecuación de HJB y derivar implícitamente

$$V'_t = -b + V'_{t+1}.$$

Reemplazando $V'_{t+1} = 2au_t$, de la primera ecuación del sistema, en el resultado de derivar la de HJB

$$2au_{t-1} = -b + 2au_t.$$

Esta equivale a

$$u_{t+1} = u_t + \frac{b}{2a}$$

su solución es

$$u_t = u_{T_1} + \frac{b}{2a}\left(t - T_1\right),$$

para $T_1 \leq t$. Al reemplazar este resultado en la segunda ecuación del sistema

$$x_{t+1} = x_t + u_{T_1} + \frac{b}{2a}\left(t - T_1\right)$$

cuya solución para $t \geq T_1$ es

$$x_t = x_{T_1} + (t - T_1)\left[u_{T_1} - \frac{b}{2a}T_1\right] + \frac{b}{2a}\left[\frac{t(t-1)}{2} - \frac{T_1\,(T_1 - 1)}{2}\right]$$

Es natural suponer que la producción es no decreciente, en caso contrario el costo de almacenamiento no alcanza su mínimo, por lo tanto la producción debe tener la forma

$$u_t = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ u_{T_1} + \frac{b}{2a}\,(t - T_1)\,, & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ q & \text{si } T_2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

esto es, el día $T_1 + 1$ se inicia la producción y esta se realiza en forma creciente hasta el día $T_2 - 1$, de T_2 en adelante se produce al máximo posible (al tope de la capacidad instalada). La cantidad almacenada es

$$x_t = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ x_{T_1} + (t - T_1)\left[u_{T_1} + \frac{b}{4a}\,(t - T_1 - 1)\right], & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ x_{T_2} + (t - T_2)\,q & \text{si } T_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

De la construcción de u_t y x_t, $u_{T_1} = x_{T_1} = 0$ y por las condiciones de transversalidad del problema

$$x_T = x_{T_2} + (T - T_2)\,q = Q$$

por lo tanto,

$$u_t = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ \frac{b}{2a}\,(t - T_1)\,, & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ q & \text{si } T_2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

y

$$x_t = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ \frac{b}{4a}\,(t - T_1)\,(t - T_1 - 1)\,, & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ x_{T_2} + (t - T_2)\,q & \text{si } T_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Reemplazando se encuentra que

$$\begin{aligned} u_{T_2-1} &= \frac{b}{2a}\left(T_2 - T_1 - 1\right), \\ x_{T_2-1} &= \frac{b}{4a}\left(T_2 - T_1 - 1\right)\left(T_2 - T_1 - 2\right), \\ x_{T_2} &= \frac{b}{4a}\left(T_2 - T_1 - 1\right)\left(T_2 - T_1\right). \end{aligned}$$

Para que la sucesión u_t sea no decreciente basta con

$$u_{T_2-1} = \frac{b}{2a}\left(T_2 - T_1 - 1\right) \leq q.$$

Ejercicios

1. Encontrar V_0' en el ejemplo 1 de la sección 9.2 haciendo uso de la condición $k_T = 0$ y comprobar que la solución coincide con la encontrada en el ejemplo 2 de la sección 9.1.

2. Probar la conjetura, en los ejemplos 2 y 5, de que la producción debe ser no decreciente.

3. Encontrar los valores de T_1 y T_2 óptimos en el ejemplo 5.

Capítulo 10

Optimización dinámica continua

10.1. Cálculo de variaciones

10.1.1. Condiciones necesarias

Para encontrar las condiciones necesarias que debe cumplir la función que soluciona el problema

$$\text{Óptimo de } \int_a^T F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \text{ sujeto a } \; x(a) = x_a \, x(T) = x_T,$$

con a y x_a fijos, se parte del supuesto de que se conoce $x^*(t)$ la solución del problema y se trata de encontrar las condiciones que esta función debe satisfacer. Si $x^*(t)$ y T^* son las variables de estado y el tiempo de terminación que solucionan un problema de cálculo de variaciones, entonces la función

$$V\left(x(t), T\right) = \int_a^T F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt$$

alcanza su óptimo en x^*, T^*. La función x^* debe por lo tanto ser factible, esto es, satisface las restricciones $x^*(a) = x_0$, $x^*(T) = x_T$. Como en el caso de optimización estática, el procedimiento para encontrar las condiciones necesarias es alterar el óptimo. Esto se logra usando una función fija $h(t)$ no nula que satisfaga la condición $h(a) = 0$ de tal manera que la función $x_\epsilon(t) = x^*(t) + \epsilon h(t)$ sea una solución factible para cada ϵ real (ver gráfica 10.1), ΔT distinto de cero y $T_\epsilon = T^* + \epsilon \Delta T$, con esto se busca encontrar las condiciones que debe satisfacer x^* y T^* para que sean la solución al problema, esas condiciones deben ser independientes de h y ΔT que de antemano se fijan arbitrariamente no nulas. Si se reemplazan los x y T

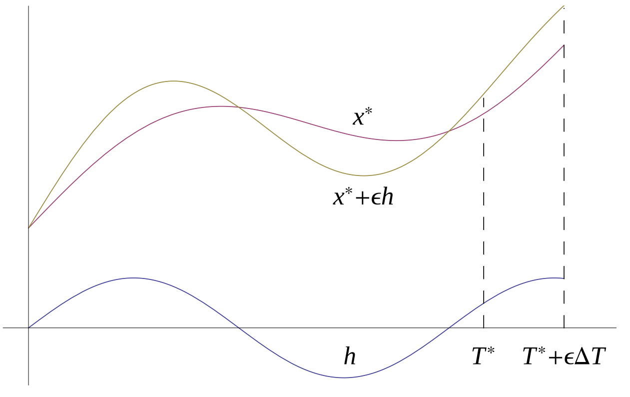


Figura 10.1: Gráfica de la solución, x^* y T^*, y la variación, $x_\epsilon(t) = x^*(t) + \epsilon h(t)$ y $T_\epsilon = T^* + \epsilon \Delta T$.

así construidos en V y se tiene en cuenta que x^*, h y ΔT son fijas (x^* por ser óptima y h y ΔT porque se fijaron previamente), se encuentra que la función V depende solamente del valor de ϵ en la forma

$$V(\epsilon) = V(x_\epsilon(t), T_\epsilon) = \int_a^{T^*+\epsilon\Delta T} F\left(t, x^*(t) + \epsilon h(t), \dot{x}^*(t) + \epsilon \dot{h}(t)\right) dt,$$

es decir, una función de una variable real. Para determinar las condiciones que satisface el óptimo de $V(\epsilon)$ se usan las herramientas del cálculo diferencial en una variable. La hipótesis que x^* es la solución del problema equivale a que V alcanza su óptimo en $\epsilon = 0$, entonces la condición necesaria que debe satisfacer $V(\epsilon)$ es

$$\frac{dV}{d\epsilon}(0) = 0.$$

Usando la regla de Leibniz,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$$

y el teorema fundamental del cálculo, la derivada de V con respecto a ϵ es

$$\begin{aligned}\frac{dV(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_a^{T^*+\epsilon\Delta T} \frac{\partial F\left(t, x^*(t)+\epsilon h(t), \dot{x}^*(t)+\epsilon\dot{h}(t)\right)}{\partial\epsilon} dt \\ &\quad + F\left(t, x^*(t)+\epsilon h(t), \dot{x}^*(t)+\epsilon\dot{h}(t)\right)\Big|_{T^*+\epsilon\Delta T}(\Delta T) \\ &= \int_a^{T^*+\epsilon\Delta T} \left[D_1F(\cdots)\,h(t) + D_2F(\cdots)\,\dot{h}(t)\right] dt \\ &\quad + F(\cdots)|_{T^*+\epsilon\Delta T}(\Delta T).\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\epsilon}(0) = \int_a^{T^*} &\left[D_1F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,h(t) + D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,\dot{h}(t)\right] dt \\ &+ F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))|_{T^*}(\Delta T) = 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Para escribir esta condición, de primer orden, sin que se involucre la función h es necesario transformar la integral,

$$\int_a^{T^*} D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,\dot{h}(t)(t)dt$$

usando integración por partes tomando

$$u = D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad \text{y} \quad dv = \dot{h}(t)dt,$$

se tiene,

$$du = \frac{d\left[D_2F\left(t, x^*(t), \dot{x^*}(t)\right)\right]}{dt}dt \quad \text{y} \quad v = h(t).$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_a^{T^*} D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,\dot{h}(t)dt &= D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,h(t)|_a^{T^*} \\ &\quad - \int_a^{T^*} \frac{d\left[D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\right]}{dt}h(t)dt,\end{aligned}$$

por la condición $h(a) = 0$, impuesta a h, esta ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}\int_a^{T^*} D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,\dot{h}(t)dt &= D_2F(T^*, x^*(T^*), \dot{x}^*(T^*))\,h(T^*) \\ &\quad - \int_a^{T^*} \frac{d\left[D_2F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\right]}{dt}h(t)dt.\end{aligned}$$

Al reemplazar este resultado en la ecuación (10.1) y factorizar, se tiene

$$\frac{dV}{d\epsilon}(0) = \int_a^{T^*} \left(D_1F - \frac{d\left(D_2F\right)}{dt} \right) h(t)dt + \left(D_2F\right) h|_{T^*} + F|_{T^*}\left(\Delta T\right) = 0.$$

Puesto que la función h es arbitraria, esta última ecuación se satisface si:

$$D_1F\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) = \frac{d\left[D_2F\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)\right]}{dt} \tag{10.2}$$

y

$$D_2F\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) h(t)|_{T^*} + F\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)|_{T^*}\left(\Delta T\right) = 0. \tag{10.3}$$

La ecuación (10.2) generalmente se escribe en la forma

$$F_x = \frac{d\left(F_{\dot{x}}\right)}{dt}$$

y se conoce como **ecuación de Euler**. Usando la regla, de la cadena esta condición se reduce a:

$$F_x = F_{\dot{x}t} + F_{\dot{x}x}\dot{x} + F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}.$$

La ecuación (10.3) debe independizarse de h. Para esto se hace $\epsilon = 1$ y se utiliza una diferencial en la aproximación:

$$x^*\left(T^* + \Delta T\right) - x^*(T^*) \approx \dot{x}^*(T^*)\Delta T$$

y a partir de ésta se desprende del gráfico 10.1 que:

$$\Delta x_T \equiv x\left(T^* + \Delta T\right) - x^*(T^*) \approx h(T^*) + \dot{x}^*(T^*)\Delta T$$

de ahí,

$$h(T^*) \approx \Delta x_T - \dot{x}^*(T^*)\Delta T$$

aplicando esta aproximación a la ecuación (10.3) eliminando los *,

$$\left(D_2F\right)\left(\Delta x_T - \dot{x}|_T\,\Delta T\right) + F|_T\,\Delta T = 0.$$

Después de asociar,

$$F_{\dot{x}}|_T\,\Delta x_T + \left(F - \dot{x}F_{\dot{x}}\right)|_T\,\Delta T = 0. \tag{10.4}$$

Esta ecuación produce cuatro condiciones de transversalidad sobre $x(T) = x_T$:

1. Si T y x_T son fijos, Δx_T y ΔT son ambos cero. La ecuación (10.4) se satisface, por lo tanto no hay condiciones fuera de las dadas por las restricciones del problema.

2. Si T es fijo y x_T es libre, ΔT es cero, $\Delta x_T \neq 0$ y la ecuación (10.4) equivale a
$$F_{\dot{x}}|_T = 0.$$

3. Si T es libre y x_T es fijo, Δx es cero, $\Delta T \neq 0$ y lacondición (10.4) es en este caso
$$(F - \dot{x}F_{\dot{x}})|_T = 0.$$

4. Si T y x_T son libres y $x(T)$ toma valores sobre la gráfica de la función $g(T)$, esto es, $x(T) = g(T)$. Usando la diferencial para aproximar el valor del incremento,
$$\Delta x_T = g(T + \Delta T) - g(T) \approx g'(T)\Delta T$$
reemplazando en (10.4) con $\Delta T \neq 0$ la ecuación equivale a
$$\left(\left(g' - \dot{x}\right) F_{\dot{x}} + F\right)\Big|_T = 0$$

10.1.2. Condiciones suficientes

Si en el problema
$$\text{Óptimo de } \int_a^T F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \ \text{ sujeto a } x(a) = x_a \text{ y } x(T) = x_T,$$
a, x_a, T y x_T son fijos la función $V(\epsilon)$ es
$$V\left(\epsilon\right) = V\left(x_\epsilon(t)\right) = \int_a^T F\left(t, x^*(t) + \epsilon h(t), \dot{x}^*(t) + \epsilon \dot{h}(t)\right) dt.$$
Su derivada con respecto a ϵ
$$\frac{dV}{d\epsilon} = \int_a^T \left[F_x\left(t, x^* + \epsilon h, \dot{x}^* + \epsilon\dot{h}\right) h + F_{\dot{x}}\left(t, x^* + \epsilon h, \dot{x}^* + \epsilon\dot{h}\right) \dot{h}\right] dt.$$
De la ecuación $\frac{dV}{d\epsilon}(0) = 0$ se encuentran las condiciones necesarias de optimalidad, esto es, la ecuación de Euler para este caso. Las condición suficiente, de segundo orden, que se deben satisfacer para que el problema

tenga un máximo o un mínimo las dá la segunda derivada

$$\frac{d^2V}{d\epsilon^2} = \int_a^T \left\{ \left[F_{xx}\left(t, x^* + \epsilon h, \dot{x}^* + \epsilon \dot{h}\right) h + F_{x\dot{x}}(\cdots)\,\dot{h} \right] h + \left[F_{\dot{x}x}(\cdots)\, h + F_{\dot{x}\dot{x}}(\cdots)\,\dot{h} \right] \dot{h} \right\} dt.$$

Al reemplazar $\epsilon = 0$ y simplificar

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\epsilon^2}(0) &= \int_a^T \Big[F_{xx}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) h^2(t) + F_{x\dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \dot{h}(t)h(t) \\
&\qquad + F_{\dot{x}x}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) h(t)\dot{h}(t) + F_{\dot{x}\dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \dot{h}^2(t) \Big] dt \\
&= \int_a^T \begin{pmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}_{(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))} \begin{pmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_a^T \begin{pmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{pmatrix} H_f^e(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \begin{pmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix} dt
\end{aligned}$$

donde H_f^e es la matriz hessiana de la función f con respecto a las variables de estado x y $\dot{x}$. De la última ecuación se concluye que si $H_f^e\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)$ es definida positiva la solución encontrada es un mínimo para el problema y si es definida negativa es un máximo.

La generalización de los resultados a problemas que contienen varias variables de estado, esto es, cuando la función involucrada en el problema es $f\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right)$ ($\mathbf{x}$ representa el vector de las n variables de estado del problema) es, para las condiciones necesarias, el sistema de ecuaciones de Euler:

$$f_{x_i}\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right) = \frac{d\left[f_{\dot{x}_i}\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right)\right]}{dt}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, ..., n$$

y, para las condiciones suficientes, que la matriz $H_f^e\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right)$ sea definida positiva o negativa según la solución sea un mínimo o un máximo, respectivamente.

Ejemplo

Para encontrar el plan de consumo de un consumidor que desea maximizar su utilidad, $u(c) = c^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, descontada a una tasa δ. Si dispone de un capital inicial k_0, desea gastar todo el capital en un intervalo de tiempo

T en el cual el capital se halla invertido a tasa de interés r. El problema es

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } &\int_0^T e^{-\delta t} (c(t))^\alpha \, dt \\ \text{sujeto a } &\dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ &k(0) = k_0 \\ &k(T) = 0. \end{aligned}$$

Despejando c en la restricción,

$$c = rk - \dot{k}$$

reemplazando en el objetivo, el problema se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } &\int_0^T e^{-\delta t} \left(rk(t) - \dot{k}(t)\right)^\alpha dt \\ \text{sujeto a } &k(0) = k_0 \\ &k(T) = 0. \end{aligned}$$

Las derivadas necesarias en la ecuación de Euler para

$$F\left(t, k, \dot{k}\right) = e^{-\delta t} \left(rk(t) - \dot{k}(t)\right)^\alpha$$

son

$$\begin{aligned} F_k &= e^{-\delta t}\alpha \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-1} r, & F_{\dot{k}} &= -e^{-\delta t}\alpha \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-1}, \\ F_{\dot{k}t} &= \delta e^{-\delta t}\alpha \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-1}, & F_{\dot{k}k} &= -e^{-\delta t}\alpha(\alpha-1) \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-2} r \\ F_{\dot{k}\dot{k}} &= e^{-\delta t}\alpha(\alpha-1) \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

La ecuación de Euler

$$F_k = F_{\dot{k}t} + F_{\dot{k}k}\dot{k} + F_{\dot{k}\dot{k}}\ddot{k}$$

se reduce a

$$\begin{aligned} e^{-\delta t}\alpha \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-1} r =& \delta e^{-\delta t}\alpha \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-1} - e^{-\delta t}\alpha(\alpha-1) \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-2} r\dot{k} \\ &+ e^{-\delta t}\alpha(\alpha-1) \left(rk - \dot{k}\right)^{\alpha-2} \ddot{k}. \end{aligned}$$

Simplificando factores comunes,

$$\left(rk - \dot{k}\right) r = \delta \left(rk - \dot{k}\right) - (\alpha - 1)r\dot{k} + (\alpha - 1)\ddot{k}. \tag{10.5}$$

Ordenando y simplificando nuevamente,

$$(\alpha - 1)\ddot{k} - (\alpha r - 2r + \delta)\dot{k} + (\delta r - r^2)k = 0$$

Las raíces de la ecuación característica correspondiente son

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{(\alpha r - 2r + \delta) \pm \sqrt{(\alpha r - 2r + \delta)^2 - 4(\alpha - 1)(\delta r - r^2)}}{2(\alpha - 1)} \\ &= \frac{(\alpha r - 2r + \delta) \pm \sqrt{(\alpha r - \delta)^2}}{2(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha r - 2r + \delta) \pm (\alpha r - \delta)}{2(\alpha - 1)} \end{aligned}$$

con el signo positivo $r_1 = r$ y con el negativo $r_2 = \frac{\delta - r}{\alpha - 1}$. Así la solución a la ecuación de Euler es

$$k(t) = a_1 \exp\left(\frac{\delta - r}{\alpha - 1} t\right) + a_2 \exp(rt).$$

Los valores de las constantes a_1 y a_2 se determinan con las condiciones $k(0)$ y $k(T)$. Esta expresión y la correspondiente para $c(t)$ dan los valores del capital y el consumo en cada instante t del intervalo.

Ejercicio

Usar las restricciones del problema para determinar los valores de las constantes a_1, a_2 y la función de consumo $c(t)$.

A partir de la ecuación (10.5) y la restricción diferencial es posible hacer un diagrama de fase para encontrar el comportamiento de la interacción entre el capital y el consumo. La ecuación (10.5) equivale a

$$r\left(rk - \dot{k}\right) = \delta\left(rk - \dot{k}\right) - (\alpha - 1)\left(r\dot{k} - \ddot{k}\right).$$

Reemplazando el valor de c despejado de la restricción diferencial, $c = rk - \dot{k}$, esta ecuación se convierte en

$$(\alpha - 1)\dot{c} = (\delta - r)c.$$

Esta ecuación y la restricción del problema original producen el sistema

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{\delta - r}{\alpha - 1} c \\ \dot{k} = rk - c \end{cases}$$

$\dot{c} = 0$ corresponde al eje horizontal y $\dot{k}$ corresponde a la recta con pendiente $r < 1$ (r es la tasa de interés); o en forma matricial,

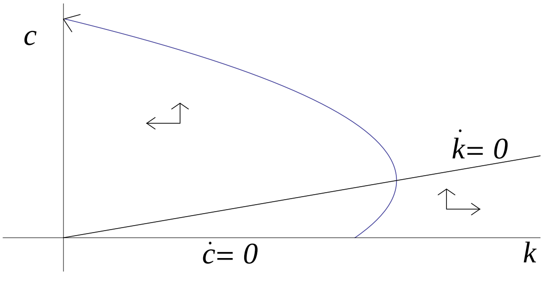


Figura 10.2: Diagrama de fase para la interacción entre el capital y el consumo.

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta - r}{\alpha - 1} & 0 \\ -1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes tiene traza $\frac{\delta - r}{\alpha - 1} + r$ y determinante $\frac{\delta - r}{\alpha - 1} r$. Si la tasa de interés es mayor que la tasa de descuento, la traza y el determinante son positivos. Además, como

$$\left(\frac{\delta - r}{\alpha - 1} + r \right)^2 - 4 \frac{\delta - r}{\alpha - 1} r = \left(\frac{\delta - r}{\alpha - 1} - r \right)^2 > 0.$$

Puesto que el intervalo de tiempo es finito, la trayectoria de la interacción representa la variación del capital y el consumo en ese intervalo a partir de un capital inicial positivo hasta agotar el capital y sus rendimientos.

Ejercicio

Justificar los signos de la traza y el determinante en el ejemplo anterior.

Ejemplo

En el problema

$$\begin{aligned} \text{Óptimos de} \int_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \\ \text{sujeto a } x(0) = 0 \\ x(T) = T - 5 \end{aligned}$$

la condición de transversalidad $x(T) = T - 5$ hace que T y $x(T)$ sean libres. La ecuación de Euler para $F(t, x, \dot{x}) = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}$ es

$$-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2} = -\frac{\dot{x}}{x^2\sqrt{1+\dot{x}^2}}\dot{x} + \frac{1}{x\left(1+\dot{x}^2\right)^{3/2}}\ddot{x}$$

simplificando se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2} &= -\frac{\dot{x}^2}{x^2\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{\ddot{x}}{x\left(1+\dot{x}^2\right)^{3/2}} \\ -\left(1+\dot{x}^2\right)^2 &= -\left(1+\dot{x}^2\right)\dot{x}^2 + x\ddot{x} \\ -1 - 2\dot{x}^2 - \dot{x}^4 &= -\dot{x}^2 - \dot{x}^4 + x\ddot{x} \\ -1 &= \dot{x}^2 + x\ddot{x} \\ -1 &= \frac{d\left(x\dot{x}\right)}{dt} \end{aligned}$$

esta última ecuación es separable, transponiendo términos,

$$d\left(x\dot{x}\right) = -dt$$

integrando,

$$x\dot{x} = -t + a, \quad \text{o} \quad x\frac{dx}{dt} = -t + a.$$

Transponiendo nuevamente,

$$xdx = \left(-t + a\right)dt$$

integrando,

$$\frac{x^2}{2} = \frac{-t^2}{2} + at + b, \quad \text{o} \quad x^2 = -t^2 + 2at + 2b.$$

Para calcular el valor de las constantes se reemplazan las condiciones iniciales,

$$x^2(0) = -0^2 + 2a(0) + 2b = 2b = 0,$$

de donde $b = 0$. Por otra parte,

$$x^2(T) = -T^2 + 2aT = (T-5)^2 .$$

Puesto que esta última ecuación tiene dos incógnitas, una constante a de integración y el instante T de terminación del proceso, se hace uso de la condición (10.4) de transversalidad para conseguir otra ecuación que permita encontrar los valores de esas incógnitas, para el caso $g(T) = T-5$, $g'(T) = 1$ y la condición es

$$\left(\left(g' - \dot{x}\right) F_{\dot{x}} + F\right)\Big|_T = \left(\left(1-\dot{x}\right)\frac{\dot{x}}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\right)\Bigg|_T = 0$$

multiplicando por $x\sqrt{1+\dot{x}^2}\Big|_T$,

$$\left(\left(1-\dot{x}\right)\dot{x} + 1 + \dot{x}\right)|_T = 0$$

simplificando,

$$\left(\dot{x} - \dot{x}^2 + 1 + \dot{x}^2\right)\big|_T = \left(\dot{x}+1\right)|_T = 0$$

usando la condición $x\dot{x} = -t + a$

$$\dot{x}(T) = \frac{-T+a}{x(T)} = -1, \text{ o } -T + a = -x(T) = -(T-5)$$

de donde $a = 5$. Reemplazando este resultado en $-T^2 + 2aT = (T-5)^2$, produce

$$2T^2 - 20T + 25 = 0$$

cuyas solución es

$$T = \frac{10 \pm \sqrt{50}}{2}.$$

Ejercicios

1. Probar que otra forma para la ecuación de Euler es:

$$f_t = \frac{d\left(f - \dot{x} f_{\dot{x}}\right)}{dt}.$$

2. Solucionar el último ejemplo con la condición terminal,

$$(T-9)^2 + (x(T))^2 = 9$$

y determinar si la solución proporciona un máximo o un mínimo.

3. Solucionar el problema

$$\begin{aligned} &\text{Máximo } \int_0^T e^{-0{,}5t}\left[10u(t) - u^2(t)\right] dt, \\ &\text{sujeto a } \dot{x}(t) = 15 - x(t) - u(t), \quad x(0) = x(T) = 20, \end{aligned}$$

por medio de cálculo de variaciones y usar las condiciones de transversalidad para encontrar los valores de las constantes de integración.

4. Para el siguiente problema:

$$\text{Óptimo } \int_1^T \left[x(\dot{x} - x) - x^2 - 2(\dot{x} - x)^2\right] dt, \quad \text{sujeto a} \quad x(1) = 2.$$

   a) Encontrar la solución de la ecuación de Euler.
   Usar las condiciones de transversalidad para calcular las constantes de integración de la función solución, si:
   b) $T = 4$ y $x(4) = 3$.
   c) T es libre y $x(T) = 3$.
   d) $T = 4$ y $x(4)$ es libre.
   e) T es libre y $x_T + T^2 = 1$.

5. Escribir y solucionar la ecuación de Euler del problema:

$$\text{Óptimo } \int_0^T \left[x^2 + 4x\dot{x} + 2(\dot{x})^2\right] dt, \quad \text{sujeto a} \quad x(0) = 1.$$

   Usar las condiciones de transversalidad para calcular las constantes de integración si:

   a) $T = 2$ y $x(2) = 1$.
   b) T es libre y $x(T) = 1$.
   c) $T = 2$ y $x(2)$ es libre.
   d) T es libre y $3x_T + 4T = 10$.

6. Un monopolista ha determinado que el número de unidades que puede vender depende del precio y su tasa de cambio en la forma

$$q = 1 - 3p - \dot{p}$$

y que su función de costos es

$$c(q) = q^2 - 4q + 20$$

dado que $p(0) = p_0$ y $p(T) = p_T$. Encontrar la política de precios para maximizar los beneficios totales en el período $[0, T]$,

$$\int_0^T [pq - c(q)]\, dt.$$

Hacer el análisis si T es fijo y libre lo mismo que si p_T es fijo y libre.

7. Encontrar la solución del problema:

$$\text{Óptimo} \int_0^1 \left[2x^2 + x\dot{x} + x\dot{y} + 3\dot{x}y + y\dot{y} + y^2 + 4(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right] dt,$$

con $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, $x(1) = 2$ y $y(1) = 0$.

8. Escribir las posibles condiciones de transversalidad para un problema con dos variables de estado.

9. Para calcular el valor óptimo de:

$$\int_0^T \left[x^2 + 4x\dot{x} + 2(\dot{x})^2 + t\dot{x}\right] dt, \qquad \text{sujeto a} \quad x(0) = 1.$$

   a) Encontrar la solución de la ecuación de Euler.
   Determinar el sistema para calcular las constantes de integración si:

   b) T es libre y $x(T) = 1$.

   c) T es libre y $(x_T - 1)^2 + T^2 = 1$.

10.2. Control óptimo

Los problemas de control son aquellos que se pueden llevar a la forma

$$\begin{aligned}
\text{Optimizar } & \int_a^T F\left(t, x(t), u(t)\right) dt \\
\text{sujeto a } & \dot{x}(t) = G\left(t, x(t), u(t)\right) \\
& x(a) = x_a \\
& x(T) = x_T.
\end{aligned}$$

La variable x se llama variable de estado (son las variables que aparecen derivadas en la restricción) y u es una variable de control; la condición terminal puede ser de cualquiera de los tipos descritos en las condiciones de transversalidad.

Si en la restricción es posible despejar u en función de x y su derivada, el problema se puede convertir en uno de cálculo de variaciones.

10.2.1. Condiciones necesarias

Si en el problema anterior a y x_a son valores fijos la solución del problema requiere encontrar x, u y T óptimos, para esto se usa el mismo procedimiento de la sección anterior, esto es, suponer la solución y hacer una variación para encontrar las condiciones que debe satisfacer. Inicialmente la restricción del problema se transforma en

$$G\left(t, x(t), u(t)\right) - \dot{x} = 0.$$

Si $\lambda(t)$ es cualquier función, ésta hace el papel del multiplicador de Lagrange en los problemas estáticos restringidos y es conocida como función de coestado; al multiplicar la igualdad anterior por $\lambda(t)$ se tiene que la restricción se puede llevar a la forma

$$\lambda(t)\left(G(t, x(t), u(t)) - \dot{x}\right) = 0$$

puesto que esta igualdad se satisface para todas las funciones x, u que sean factibles, el problema es

$$\begin{aligned}
\text{Optimizar } & \int_a^T \left[F\left(t, x(t), u(t)\right) + \lambda(t)\left(G(t, x(t), u(t)) - \dot{x}\right)\right] dt \\
\text{sujeto a } & x(a) = x_a \\
& x(T) = x_T.
\end{aligned}$$

En este último problema se ha eliminado la restricción diferencial. El valor objetivo se reescribe en la forma

$$\begin{aligned}
&\int_a^T \left[F\left(t, x(t), u(t)\right) + \lambda(t)\left(G(t, x(t), u(t)) - \dot{x}\right)\right] dt \\
&= \int_a^T \left[H\left(t, x(t), u(t), \lambda(t)\right) - \lambda(t)\dot{x}\right] dt
\end{aligned}$$

donde $H = F + \lambda G$ es llamada la **función hamiltoniana** o **hamiltoniano** (esta función juega en esta teoría un papel parecido al Lagrangiano en optimización estática restringida). El problema se reduce a

$$\begin{aligned}
\text{Optimizar } &\int_a^T \left[H(t, x, u, \lambda) - \lambda\dot{x}\right] dt \\
\text{sujeto a } &x(a) = x_a \\
&x(T) = x_T.
\end{aligned}$$

Las condiciones necesarias se encuentran, como en el caso de cálculo de variaciones, suponiendo que se ha encontrado la solución x^*, u^* y T^* y preguntando qué tipo de condiciones deben satisfacer para esto; sean, además, h y k dos funciones no nulas fijas con $h(a) = 0$, ΔT (fijo) y ϵ reales no nulos. De esta forma, si $x(t) = x^*(t) + \epsilon h(t)$, $u(t) = u^*(t) + \epsilon k(t)$ y $T = T^* + \epsilon\Delta T$ son soluciones factibles, el objetivo del problema solamente depende de ϵ en la forma

$$\begin{aligned}
V(\epsilon) = \int_a^{T^*+\epsilon\Delta T} &\Big[H(t, x^*(t) + \epsilon h(t), u^* + \epsilon k(t), \lambda(t)) \\
&-\lambda(t)\left(\dot{x}^*(t) + \epsilon\dot{h}(t)\right)\Big]\, dt.
\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden para optimizar el valor de V producen las condiciones necesarias para el problema de control; éstas son idénticas al caso de cálculo de variaciones y resultan de la ecuación $\frac{dV}{d\epsilon}(0) = 0$. Para esto se calcula inicialmente $\frac{dV}{d\epsilon}$ usando el teorema fundamental del cálculo y la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\epsilon} = &\int_a^{T^*+\epsilon\Delta T} \frac{d\left[H(t,x^*+\epsilon h,u^*+\epsilon k,\lambda)-\lambda\left(\dot{x}+\epsilon\dot{h}\right)\right]}{d\epsilon}dt \\ &+ \left[H(t,x^*+\epsilon h,u^*+\epsilon k,\lambda)-\lambda\left(\dot{x}^*+\epsilon\dot{h}\right)\right]\Big|_{T^*+\epsilon\Delta T}\Delta T \\ = &\int_a^{T^*+\epsilon\Delta T}\left[H_x(\cdots)h+H_u(\cdots)k-\lambda\dot{h}\right]dt \\ &+ \left[H-\lambda\left(\dot{x}^*+\epsilon\dot{h}\right)\right]\Big|_{T^*+\epsilon\Delta T}\Delta T.\end{aligned}$$

Usando integración por partes, $w=\lambda$, $dv=\dot{h}$, $dw=\dot{\lambda}dt$ y $v=h$; el último término de la integral se transforma en

$$\begin{aligned}\int_a^{T^*+\epsilon\Delta T}\lambda(t)\dot{h}dt = &\ \lambda(t)h(t)|_a^{T^*+\epsilon\Delta T} - \int_a^{T^*+\epsilon\Delta T}\dot{\lambda(t)}(t)h(t) \\ &= \lambda(T^*+\epsilon\Delta T)h(T^*+\epsilon\Delta T)-\lambda(a)h(a) \\ &\quad - \int_a^{T+\epsilon\Delta T}\dot{\lambda}(t)h(t)dt \\ &= \lambda(T^*+\epsilon\Delta T)h(T^*+\epsilon\Delta T) - \int_a^{T^*+\epsilon\Delta T}\dot{\lambda}(t)h(t)dt\end{aligned}$$

reemplazando esto en la expresión para $\frac{dV}{d\epsilon}$,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\epsilon} = &\int_a^{T^*+\epsilon\Delta T}\left[H_x(\cdots)h(t)+H_u(\cdots)k(t)+\dot{\lambda}h(t)\right]dt \\ &+ \left[\left(H-\lambda\left(\dot{x}^*+\epsilon\dot{h}\right)\right)\Delta T-\lambda h\right]\Big|_{T^*+\epsilon\Delta T}.\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon=0$,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\epsilon}(0) = &\int_a^{T^*}\left[\left(H_x(\cdots)+\dot{\lambda}(t)\right)h(t)+H_u(\cdots)k(t)\right]dt \\ &+ \left[(H-\lambda\dot{x}^*)\Delta T-\lambda h\right]|_{T^*}=0.\end{aligned}$$

Para encontrar las condiciones necesarias (que sean independientes de las funciones h y k que fueron involucradas como un medio para alterar los óptimos x^* y u^* y así determinar qué propiedad deben satisfacer estas funciones x^* y u^*) basta con que cada uno de los términos involucrados en la ecuación anterior sea igual a cero:

$$\left(H_x(t,x^*,u^*,\lambda)+\dot{\lambda}\right)h(t)=0, \qquad H_u(t,x^*,u^*,\lambda)k(t)=0.$$

Como desde el comienzo, $h(t)$ y $k(t)$ son funciones fijas no nulas, pero arbitrarias. Las condiciones anteriores se convierten en las llamadas **condiciones de Pontryagin**,

$$H_x(t,x^*,u^*,\lambda)=-\dot{\lambda}, \qquad H_u(t,x^*,u^*,\lambda)=0.$$

Estas ecuaciones junto con la restricción se acostumbran a escribir en el sistema:

$$\begin{cases} H_x = -\dot{\lambda} \\ H_u = 0 \\ H_\lambda = \dot{x}. \end{cases}$$

llamadas condiciones del máximo de Pontryagin De la última parte de la ecuación $\frac{dV}{d\epsilon}(0)=0$,

$$\left[\left(H-\lambda\dot{x}^*\right)\Delta T-\lambda h\right]\Big|_T=0$$

se deducen las condiciones de transversalidad, para esto se usa la aproximación

$$h(T^*)\approx \Delta x_T-\dot{x}^*(T^*)\Delta T$$

encontrada en la sección anterior que reemplazada en la ecuación anterior la convierte en

$$\left[\left(H-\lambda\dot{x}^*\right)\Delta T-\lambda\left(\Delta x_T-\dot{x}^*\Delta T\right)\right]\Big|_T = H|_T\,\Delta T-\lambda|_T\,\Delta x_T=0. \quad (10.6)$$

De la última ecuación, como en el caso del cálculo de variaciones, se deducen cuatro casos para las condiciones de transversalidad sobre $x(T)=x_T$:

1. Si T y x_T son fijos, Δx_T y ΔT son ambos cero. La ecuación (10.6) se satisface, por lo tanto no hay condiciones fuera de las dadas por las restricciones del problema.

2. Si T es fijo y x_T es libre, ΔT es cero, $\Delta x_T\neq 0$ y la ecuación (10.6) equivale a
$$\lambda|_T=0.$$

3. Si T es libre y x_T es fijo, Δx es cero, $\Delta T \neq 0$, entonces la condición (10.6) es en este caso
$$H|_T = 0.$$

4. Si T y x_T son libres y $x(T)$ toma valores sobre la gráfica de la función $g(T)$, esto es, $x(T) = g(T)$. Usando la diferencial para aproximar el valor del incremento,
$$\Delta x_T = g(T + \Delta T) - g(T) \approx g'(T)\Delta T$$
reemplazando en (6) con $\Delta T \neq 0$ la ecuación equivale a
$$\big(H - \lambda g'\big)\big|_T = 0.$$

10.2.2. Condiciones suficientes

Para el problema

$$\begin{aligned} &\text{Óptimo de } \int_a^T F\left(t, x(t), u(t)\right) dt \\ &\text{sujeto a } \dot{x} = G\left(t, x(t), u(t)\right),\ x(a) = x_a \text{ y } x(T) = x_T, \end{aligned}$$

con a, x_a, T y x_T son fijos la función $V(\epsilon)$ es

$$\begin{aligned} V\left(\epsilon\right) = \int_a^T &\left[H\left(t, x^*(t) + \epsilon h(t), u(t) + \epsilon k(t), \lambda(t)\right)\right. \\ &\left. -\lambda(t)\left(\dot{x}^*(t) + \epsilon \dot{h}(t)\right)\right] dt. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\epsilon} = \int_a^T &\left[H_x\left(t, x^*(t) + \epsilon h(t), u^*(t) + \epsilon k(t), \lambda(t)\right) h(t)\right. \\ &\left. + H_u\left(t, x^*(t) + \epsilon h(t), u^*(t) + \epsilon k(t), \lambda(t)\right) k(t) - \lambda(t)\dot{h}(t)\right] dt. \end{aligned}$$

Anteriormente de $\frac{dV}{d\epsilon}(0) = 0$ se encontraron las condiciones necesarias de optimalidad, condiciones del máximo. De la segunda derivada se deducen las condición que se deben satisfacer para que el problema tenga un máximo o un mínimo. Como

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\epsilon^2} = \int_a^T &\left\{\left[H_{xx}\left(t, x^*(t) + \epsilon h(t), u^*(t) + \epsilon k(t), \lambda(t)\right) h(t)\right.\right. \\ &\left.\left. + H_{xu}\left(\cdots\right) k(t)\right] h(t) + \left[H_{ux}\left(\cdots\right) h(t) + H_{uu}\left(\cdots\right) k(t)\right] k(t)\right\} dt. \end{aligned}$$

Al reemplazar $\epsilon = 0$ y simplificar

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\epsilon^2}(0) &= \int_a^T \left[H_{xx}\left(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\right) h^2(t) + F_{xu}\left(\cdots\right) k(t)h(t)\right. \\
&\qquad \left. + F_{ux}\left(\cdots\right) h(t)k(t) + F_{uu}\left(\cdots\right) k^2(t)\right] dt \\
&= \int_a^T \left(h(t),\ k(t)\right) \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ F_{ux} & F_{uu} \end{pmatrix}_{(t,x^*(t),u^*(t),\lambda(t))} \left(h(t),\ k(t)\right)^T dt \\
&= \int_a^T \left(h(t),\ k(t)\right) H_H^e(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \left(h(t),\ k(t)\right)^T dt
\end{aligned}$$

donde H_H^e es la matriz hessiana del hamiltoniano del problema con respecto a las variables de estado x y de control u. De lo anterior se concluye que si $H_H^e\left(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\right)$ es definida positiva la solución encontrada es un mínimo para el problema y si es definida positiva es un máximo.

Cuando el problema tiene n variables de estado y m variables de control,

$$\begin{aligned}
&\text{Óptimo de } \int_a^T F\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) dt \\
&\text{sujeto a } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right),\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a \text{ y } \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T,
\end{aligned}$$

la función hamiltoniana es

$$H\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right) = F\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) g_i\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$$

las condiciones del máximo es el sistema

$$\begin{cases} H_{x_i} = -\dot{\lambda}_i, & \text{para } i = 1, 2, ..., n \\ H_{u_j} = 0, & \text{para } j = 1, 2, ..., m \\ H_{\lambda_i} = \dot{x}_i, & \text{para } i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

este junto con las correspondientes condiciones de transversalidad dan las condiciones necesarias de optimalidad. Las condiciones suficientes las dá el la matriz hessiana de la función hamiltoniana.

Ejercicios

1. Condicionar los valores de los parámetros para que $u(c) = ac^{\alpha}$ sea una función de utilidad neoclásica.

Ejemplo

Para encontrar el plan de consumo que maximiza la utilidad, $u(c) = \ln(c)$, descontada a una tasa δ, si dispone de un capital inicial k_0, y se desea gastar todo el capital en un intervalo de tiempo T en el cual el capital está invertido a tasa de interés r. El problema es

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & \int_0^T e^{-\delta t} \ln(c(t))dt \\ \text{sujeto a } & \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ & k(0) = k_0 \\ & k(T) = 0. \end{aligned}$$

La variable de estado es $k(t)$ y la variable de control es $c(t)$, el hamiltoniano para este problema es

$$H(t, k, c, \lambda) = e^{-\delta t} \ln(c) + \lambda (rk - c)$$

y las condiciones necesarias son

$$H_k = r\lambda = -\dot{\lambda} \quad \text{y} \quad H_c = \frac{e^{-\delta t}}{c} - \lambda = 0.$$

Este par de ecuaciones y la restricción producen un sistema de tres ecuaciones (en este caso lineales) con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ \dot{\lambda}(t) = -r\lambda(t) \\ \lambda(t) = \frac{e^{-\delta t}}{c} \end{cases}$$

la segunda es una ecuación diferencial separable,

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = -r\lambda$$

transponiendo términos,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -rdt,$$

integrando,

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \ln \lambda = \int -rdt = -rt + a, \qquad \text{o} \qquad \ln \lambda = -rt + a$$

despejando λ,

$$\lambda(t) = e^{-rt+a} = e^{-a}e^{-rt} = Ae^{-rt} = \lambda(0)e^{-rt}$$

a partir de ésta se encuentra la solución de todo el sistema. Despejando c en la última ecuación,

$$c(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\lambda(t)} = \frac{e^{-\delta t}}{\lambda(0)e^{-rt}} = \frac{e^{(r-\delta)t}}{\lambda(0)}$$

usando estos resultados en la primera,

$$\dot{k}(t) = rk(t) - \frac{e^{(r-\delta)t}}{\lambda(0)}$$

se convierte en una ecuación lineal de primer orden,

$$\dot{k}(t) - rk(t) = -\frac{e^{(r-\delta)t}}{\lambda(0)}$$

que tiene como solución

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\int \exp(\int -rdt)\left[-\frac{1}{\lambda(0)}e^{(r-\delta)t}\right] dt + b}{\exp\left(\int -rdt\right)} \\
&= \frac{-\frac{1}{\lambda(0)}\int e^{-rt}\left[e^{(r-\delta)t}\right] dt + b}{e^{-rt}} \\
&= \frac{-\frac{1}{\lambda(0)}\int e^{-\delta t}dt + b}{e^{-rt}} \\
&= e^{rt}\left(b - \frac{1}{\lambda(0)}\int e^{-\delta t}dt\right) \\
&= e^{rt}\left(b + \frac{e^{-\delta t}}{\delta\lambda(0)}\right) \\
&= \frac{e^{(r-\delta)t}}{\delta\lambda(0)} + be^{rt}.
\end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned}
k(0) &= \frac{1}{\delta\lambda(0)} + b = k_0 \\
k(T) &= \frac{e^{(r-\delta)T}}{\delta\lambda(0)} + be^{rT} = k_T
\end{aligned}$$

de la primera de estas ecuaciones,

$$b = k_o - \frac{1}{\delta\lambda(0)}$$

reemplazando en la segunda y despejando $\lambda(0)$, que es desconocido hasta el momento, se obtiene sucesivamente:

$$k_T = \frac{e^{(r-\delta)T}}{\delta\lambda(0)} + \left(k_0 - \frac{1}{\delta\lambda(0)}\right) e^{rT} = \frac{e^{rT}}{\delta\lambda(0)} \left(e^{-\delta T} - 1\right) + k_0 e^{rT}$$

$$k_T - k_0 e^{rT} = \frac{e^{rT}\left(e^{-\delta T} - 1\right)}{\delta\lambda(0)}$$

$$\lambda(0) = \frac{e^{rT}\left(e^{-\delta T} - 1\right)}{\delta\left(k_T - k_0 e^{rT}\right)}.$$

Ejercicio

Completar la solución del ejemplo.

Ejemplo

Una alternativa en la solución de problemas con una variable de control y una de estado consiste en realizar un diagrama de fase del comportamiento de la solución; este diagrama muestra la interacción entre las funciones que solucionan el problema. Para el caso del problema anterior se debe convertir el sistema que da las condiciones necesarias,

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ \dot{\lambda}(t) = -r\lambda(t) \\ \lambda = \frac{e^{-\delta t}}{c(t)} \end{cases}$$

en un sistema que solamente involucre la variable de estado y la de control; para el caso es fácil dado que basta reemplazar la última ecuación en la segunda:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ \frac{d\left(\frac{e^{-\delta t}}{c(t)}\right)}{dt} = -r\frac{e^{-\delta t}}{c(t)} \end{cases} = \begin{cases} \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ -\delta\frac{e^{-\delta t}}{c(t)} - \frac{e^{-\delta t}}{c^2(t)}\dot{c} = \frac{-re^{-\delta t}}{c(t)}. \end{cases}$$

Multiplicando y despejando $\dot{c}$ en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\ \dot{c} = (r - \delta)c(t) \end{cases}$$

el comportamiento de este sistema entre 0 y T es el mostrado en la figura 10.2, a partir de un valor inicial k_0 el capital crece hasta un punto en el que la curva de interacción, entre capital y consumo, corta la recta $c = rk$ (donde el consumo y el retorno de la inversión del capital son iguales); a partir de ese punto el capital decrece hasta llegar a cero. Por su parte, el consumo crece desde un valor inicial cero hasta agotar el capital.

La forma matricial del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -1 \\ 0 & r-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

proporciona el comportamiento del punto de equilibrio. ¿Es relevante en este caso el análisis del comportamiento del punto de equilibrio?. La matriz de coeficientes tiene traza, $2r - \delta$, determinante $r(r - \delta)$ que es positivo ya que la tasa de interés es mayor que la tasa de descuento. ¿Qué pasaría si esto no fuese así? y como

$$(2r - \delta)^2 - 4r(r - \delta) = 4r^2 - 4r\delta + \delta^2 - 4r^2 + 4r\delta = \delta^2$$

por lo tanto, las raíces de la ecuación característica son reales positivas diferentes y el sistema es inestable.

10.2.3. Problemas con valor de salvamento

En problemas de la forma

$$\begin{aligned} \text{Máximo de } & \int_a^T F(t, x(t), u(t))\, dt + \varphi(T, x(T)) \\ \text{sujeto a } & \dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t)) \\ & x(a) = x_a, \quad x(T) = x_T. \end{aligned}$$

la función $\varphi(T, x(T))$ se conoce como el **valor de salvamento**. este tipo de problemas son útiles al modelar situaciones en las cuales influye el horizonte temporal del proceso y el estado en el cual terminan las variables: los beneficios que produce una máquina y su valor de reventa (que dependerá del tiempo de uso y de su estado), los ingresos que genera una licencia para la explotación de un recurso natural y el valor de la licencia por el recurso no explotado son ejemplos de aplicación de este tipo de modelos.

Para aplicar la teoría expuesta, en la ecuación

$$\int_a^T \frac{d}{dt}\varphi\left(t, x(t)\right) dt = \varphi\left(T, x(T)\right) - \varphi\left(a, x(a)\right)$$

se despeja $\varphi\left(T, x(T)\right)$ y se reemplaza en el valor objetivo, así este es

$$\text{Máximo de } \varphi\left(a, x(a)\right) + \int_a^T \left[F\left(t, x(t), u(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(\varphi\left(t, x(t)\right)\right)\right] dt$$

como $\varphi\left(a, x(a)\right)$ es constante, no afecta su valor y se puede reducir a

$$\text{Máximo de } \int_a^T \left[F\left(t, x(t), u(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(\varphi\left(t, x(t)\right)\right)\right] dt.$$

La función hamiltoniana para este problema es

$$\begin{aligned} H\left(t, x, u, \lambda\right) &= F\left(t, x(t), u(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(\varphi\left(t, x(t)\right)\right) + \lambda(t)G(t, x(t), u(t)) \\ &= F(t, x, u) + \varphi_t(t, x) + \varphi_x(t, x)\dot{x} + \lambda(t)G(t, x, u) \\ &= F(t, x, u) + \varphi_t(t, x) + \varphi_x(t, x)G(t, x, u) + \lambda(t)G(t, x, u). \end{aligned}$$

y las condiciones del máximo son

$$\begin{cases} H_x = F_x + \varphi_{tx} + \varphi_{xx}G + \varphi_x G_x + \lambda G_x = -\dot{\lambda}, \\ H_u = F_u + \varphi_x G_u + \lambda G_u = 0, \\ H_\lambda = G = \dot{x}. \end{cases}$$

Reemplazando $\eta = \lambda + \varphi_x$, y su derivada

$$\dot{\eta} = \dot{\lambda} + \frac{d}{dt}\left(\varphi_x\right) = \dot{\lambda} + \varphi_{xt} + \varphi_{xx}\dot{x} = \dot{\lambda} + \varphi_{xt} + \varphi_{xx}G,$$

la función hamiltoniana se convierte en

$$H(t, x, u, \eta) = F(t, x, u) + \varphi_t(t, x) + \eta G(t, x, u)$$

y las condiciones del máximo en

$$\begin{cases} H_x = F_x + \varphi_{tx} + \varphi_{xx}G + \eta G_x = -\dot{\eta} + \varphi_{xt} + \varphi_{xx}G, \\ H_u = F_u + \eta G_u = 0, \\ H_\lambda = G = \dot{x}. \end{cases}$$

Bajo la condición $\varphi_{tx} = \varphi_{xt}$, estas se reducen a

$$\begin{cases} H_x = F_x + \eta G_x = -\dot{\eta}, \\ H_u = F_u + \eta G_u = 0, \\ H_\lambda = G = \dot{x} \end{cases}$$

idénticas a las del problema sin valor de salvamento. Puesto que las condiciones anteriores no se alteran si

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x(t), u(t)) + \eta(t) G(t, x(t), u(t)),$$

el problema se puede solucionar con un hamiltoniano corriente y las condiciones usuales de optimalidad.

La ecuación de donde se desprenden las condiciones de transversalidad

$$H|_T \, \Delta T - \lambda|_T \, \Delta x_T = 0$$

es ahora

$$(F + \eta G + \varphi_t)|_T \, \Delta T - (\eta - \varphi_x)|_T \, \Delta x_T = 0$$

de donde:

1. Si T es fijo y x_T es libre,

$$(\eta - \varphi_x)|_T = 0, \quad \text{o} \quad \eta|_T = \varphi_x|_T \, .$$

2. Si T es libre y x_T es fijo,

$$(F + \eta G + \varphi_t)|_T = 0.$$

3. Si T y x_T son libres, y satisfacen la relación $x(T) = g(T)$. Usando la diferencial para aproximar el valor del incremento Δx_T,

$$\left[F + \eta G + \varphi_t - (\eta - \varphi_x) \, g'\right]\big|_T = 0.$$

Ejercicios

1. Comprobar que para las funciones que satisfacen las condiciones necesarias, del ejemplo anterior, la tasa de crecimiento del capital con respecto al consumo es menor que la tasa de interés para todos los niveles de consumo que satisfacen $c < rk$. ¿Qué se puede decir para los niveles de consumo que satisfacen $c > rk$?

2. Un individuo dispone de un capital k_0 invertido a una tasa de interés r y posee bienes por k_1 que se dispone a vender para gastar todo en un periodo de tiempo T; sus estudios lo han llevado a concluir que su utilidad depende del consumo de dos bienes, paseos (p) y buena comida (c) en la forma $u(p,c) = a\ln(pc^2)$. Su propósito es determinar cuál debe ser el plan de consumo de los dos bienes y cuándo debe vender sus propiedades para gastar el capital que la transacción produzca, dado que la tasa de crecimiento de la renta de la tierra es w, para maximizar su utilidad a valor presente en ese intervalo. Examinar las posibles relaciones entre w y r.

Ejemplo

La formulación clásica del modelo de crecimiento de Solow en el que se trata de maximizar la utilidad total descontada (a una tasa ρ) de la población, en un cierto intervalo de tiempo, conocida la utilidad per cápita que produce el consumo, $u(c(t))$. En él la población, que se considera igual a la fuerza de trabajo, crece a una tasa exógena n; se produce con una función neoclásica F, esto es, usa como insumos esenciales el capital agregado (K) y la fuerza de trabajo (L), tiene rendimientos constantes a escala, productividades marginales positivas y decrecientes y satisface las llamadas condiciones de Inada: cuando las cantidades de cada insumo son pequeñas los rendimientos marginales son grandes y cuando las cantidades son grandes los rendimientos son (muy) pequeños. La producción se consume o se invierte y se supone que el capital se deprecia a una tasa δ. Además se dan unas ciertas condiciones iniciales sobre el capital. En este tipo de problemas se trata de encontrar cuál debe ser la forma de consumir para solucionar el problema. Esta formulación se traduce a:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \int_0^T & e^{-\rho t} L(t)u(c(t))dt \\
\text{sujeto a } & F(K,L) = L(t)c(t) + \dot{K} + \delta K(t) \\
& K(0) = K_0 \\
& K(T) = K_T.
\end{aligned}$$

Las condiciones sobre la fuerza de trabajo producen la ecuación diferencial separable:

$$\frac{dL}{dt} = nL, \quad \text{o} \quad \frac{dL}{L} = ndt$$

luego de integrar se obtiene

$$\ln(L(t)) = nt + a, \quad \text{o} \quad L(t) = L(0)e^{nt}.$$

Las condiciones sobre la función de producción F son:

1. Los insumos son esenciales,

$$F(K, 0) = F(0, L) = 0.$$

2. Rendimientos constantes a escala,

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L).$$

3. Rendimientos marginales positivos,

$$F_K > 0 \text{ y } F_L > 0.$$

4. Rendimientos marginales decrecientes,

$$F_{KK} < 0 \text{ y } F_{LL} < 0.$$

5. Condiciones de Inada,

$$\lim_{L \to 0} F_L = \infty, \ \lim_{K \to 0} F_K = \infty, \ \lim_{L \to \infty} F_L = 0 \text{ y } \lim_{K \to \infty} F_K = 0.$$

Estas condiciones en términos per cápita: a partir del tipo de rendimientos a escala,

$$F(K, L) = F\left(L \cdot \frac{K}{L}, L \cdot 1\right) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = LF(k, 1) = Lf(k)$$

donde $k = \frac{K}{L}$ y $f(k) = F(k, 1)$ son respectivamente el capital y la función de producción per cápita; de aquí se deduce que a se convierte en $f(0) = 0$. Usando la ecuación anterior, la condición c y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} F_K &= \frac{\partial\left(F(K, L)\right)}{\partial K} = \frac{\partial\left(Lf(k)\right)}{\partial K} = Lf'(k)\frac{\partial k}{\partial K} \\ &= Lf'(k)\frac{1}{L} = f'(k) > 0, \end{aligned}$$

esto es, la función f es creciente. Derivando nuevamente con respecto a k y usando la condición d,

$$F_{KK} = \frac{\partial\,(f')}{\partial K} = f''(k)\frac{\partial k}{\partial K} = f''(k)\frac{1}{L} < 0,$$

como $L > 0$, se deduce que $f''(k) < 0$, así la función f es cóncava. Las condiciones de Inada se traducen en

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \text{ y } \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0,$$

la función per cápita crece "muy" rápido si k está cerca de cero y lentamente si k es grande. Esto se traduce geométricamente en que las tangentes a la gráfica de f cerca de cero son casi perpendiculares y lejos del origen son casi horizontales, por lo tanto, la gráfica de f debe tener la forma mostrada en la figura 10.3.

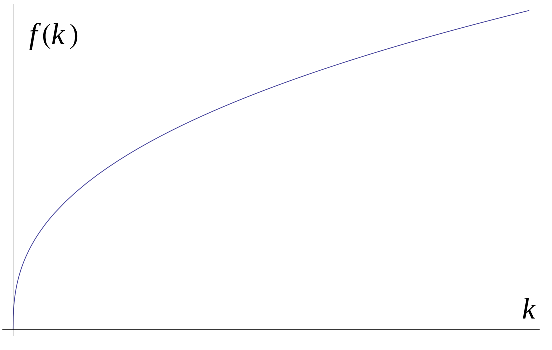


Figura 10.3: Gráfica de $c = f(k)$.

La restricción del problema $F(K, L) = L(t)c(t) + \dot{K} - \delta K(t)$ usando la ecuación que rige el crecimiento de la población y la función de producción per cápita se convierte en

$$\begin{aligned} L(t)f(k) &= L(t)c(t) + \frac{d(L(t)k(t))}{dt} + \delta L(t)k(t) \\ &= L(t)c(t) + \dot{L}k(t) + L(t)\dot{k}(t) + \delta L(t)k(t) \\ &= L(t)c(t) + nL(t)k(t) + L(t)\dot{k} + \delta L(t)k(t) \end{aligned}$$

luego de simplificar $L(t)$ y transponer términos,

$$\dot{k} = f(t) - c(t) - (n+\delta)k(t).$$

El valor objetivo del problema es

$$\int_0^T e^{-\rho t} L(0) e^{nt} u(c(t)) dt = L(0) \int_0^T e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt.$$

De esta forma el problema en términos per cápita queda

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & \int_0^T e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt \\ \text{sujeto a } & \dot{k} = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t) \\ & k(0) = k_0 \\ & k(T) = k_T \end{aligned}$$

k es la variable de estado, c la variable de control y el hamiltoniano es

$$H(t,k,c) = e^{(n-\rho)t} u(c(t)) + \lambda(t) \left(f(k(t)) - c(t) - (n+\delta) k(t) \right).$$

Las condiciones necesarias son

$$\begin{aligned} H_k &= \lambda(t) \big(f' k(t) - (n+\delta) \big) = -\dot{\lambda}(t) \\ H_c &= e^{(n-\rho)t} u'(c) - \lambda(t) = 0. \end{aligned}$$

Sin el conocimiento explícito de las funciones involucradas, producción y utilidad, es imposible encontrar la solución del sistema

$$\begin{cases} \lambda(t) \left(f' k(t) - (n+\delta) \right) = -\dot{\lambda}(t) \\ e^{(n-\rho)t} u'(c) - \lambda(t) = 0 \\ \dot{k}(t) = f(k) - c(t) - (n+\delta) k(t) \end{cases}$$

que resulta de las condiciones necesarias y la restricción diferencial. Sin embargo, es posible determinar la interacción entre las variables de estado y control (capital y consumo) vía un diagrama de fase; para esto se debe eliminar λ. Por lo cual, despejando λ en la segunda ecuación,

$$\lambda = e^{(n-\rho)t} u'(c),$$

derivando con respecto a t,

$$\dot{\lambda} = (n-\rho) e^{(n-\rho)t} u'(c) + e^{(n-\rho)t} u''(c) \dot{c}.$$

Reemplazando estas expresiones en la primera ecuación del sistema,

$$
\begin{aligned}
&e^{(n-\rho)t}u'(c)\left(f'k(t)-(n+\delta)\right)\\
&=-\left[(n-\rho)e^{(n-\rho)t}u'(c)+e^{(n-\rho)t}u''(c)\dot{c}\right].
\end{aligned}
$$

Despejando $\dot{c}$ se tiene sucesivamente

$$
\begin{aligned}
u'(c)\left(f'k(t)-(n+\delta)\right)&=-(n-\rho)u'(c)-u''(c)\dot{c}\\
u''(c)\dot{c}&=-u'(c)\left(f'k(t)-(n+\delta)+(n-\rho)\right)\\
\dot{c}&=\frac{-u'(c)}{u''(c)}\left(f'k(t)-(\delta+\rho)\right).
\end{aligned}
$$

De esta forma el sistema se reduce a

$$
\begin{cases}
\dot{k}=f(k)-c(t)-(n+\delta)k\\
\dot{c}=\frac{-u'(c)}{u''(c)}\left(f'k(t)-(\delta+\rho)\right).
\end{cases}
$$

Puesto que $\dot{k}=0$ equivale a $c=f(k)-(n+\delta)\,k$, para trazar la gráfica de $\dot{k}=0$ se usa la gráfica de $c=f(k)$, descrita anteriormente, y la gráfica de $c=(n+\delta)k$ que representa una recta con pendiente $(n+\delta)$. Como por las condiciones de Inada $f'(k)$ toma todos los valores positivos, la recta $c=(n+\Delta)k$ interseca a la curva en dos puntos, uno de ellos es el origen. La diferencia de los valores de $c=f(k)$ y $c=(n+\delta)k$ describen la curva

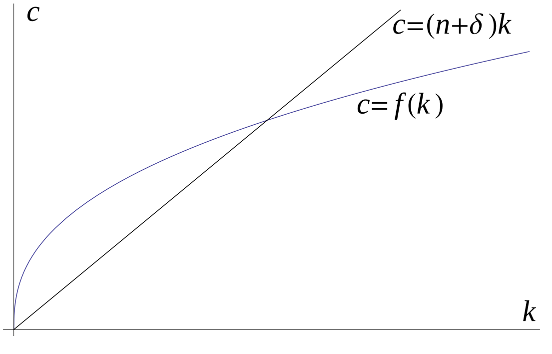


Figura 10.4: Las curvas $c=f(k)$ y $c=(n+\delta)k$.

$\dot{k}=0$. Esto se realiza encontrando la diferencia de las alturas de las dos curvas que produce la gráfica. Por otra parte, $\dot{c}=0$ en aquellos puntos

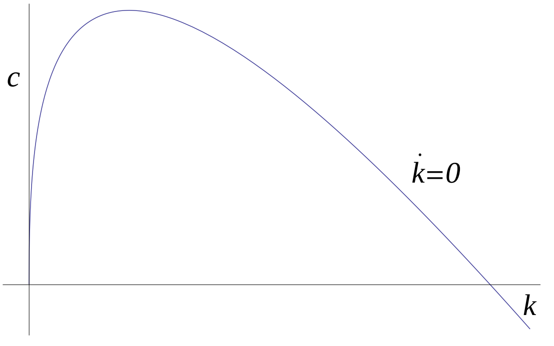


Figura 10.5: La gráfica de $\dot{k} = 0$ equivale a la de $c = f(k) - (n + \delta)k$.

donde $f'(k) = n + \delta$, esto representa una recta vertical ya que c puede tomar cualquier valor y k solamente el valor donde se satisface la ecuación $f'(k) = n+\delta$. Al reunir las dos gráficas y hacer el análisis de signos se tiene que el comportamiento de la interacción entre capital y consumo está dado en la figura 10.6. El punto de equilibrio para este sistema es punto de silla

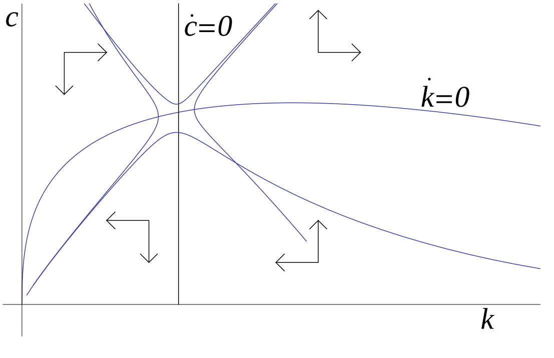


Figura 10.6: Diagrama para la interacción entre capital y consumo.

del sistema. Analíticamente este comportamiento se encuentra linealizando el sistema por medio de polinomios de Taylor de primer orden alrededor del punto de equilibrio $(\bar{k}, \bar{c})$. Allí el comportamiento del sistema se deduce del comportamiento de su linealización por medio de un polinomio de Taylor,

$$\begin{cases} \dot{k} = f(\bar{k}) - \bar{c} - (n+\delta)\bar{k} + \left[f'(\bar{k}) - (n+\delta)\right](k-\bar{k}) - (c-\bar{c}) \\ \dot{c} = -\frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})}\left[f'(\bar{k}) - (n+\delta)\right] - \frac{(u''(\bar{c}))^2 - u'(\bar{c})u''(\bar{c})}{(u''(\bar{c}))^2}\left[f'(\bar{k}) - (\delta+\rho)\right] \\ \qquad (c-\bar{c}) - \frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})}f''(\bar{k})(k-\bar{k}) \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} \dot{k} = \left[f'(\bar{k}) - (n+\delta)\right](k-\bar{k}) - (c-\bar{c}) \\ \dot{c} = -\frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})}f''(\bar{k})(k-\bar{k}) \end{cases}$$

en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(\bar{k}) - (n+\delta) & -1 \\ -\frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})}f''(\bar{k}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{c} - \left[f'(\bar{k}) - (n+\delta)\right]\bar{k} \\ \frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})}f''(\bar{k})\bar{k} \end{pmatrix}.$$

A partir de las condiciones sobre las funciones de producción y utilidad, el signo del determinante de la matriz de coeficientes es

$$-\frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})}f''(\bar{k}) < 0.$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio característico tienen signos opuestos y el punto de equilibrio es un punto de silla.

10.2.4. Problemas con descuento

Muchos problemas en economía tienen la forma

$$\begin{aligned} \text{Máximo de } & \int_a^T e^{-\rho t}F\left(t, x(t), u(t)\right)dt + \varphi\left(T, x(T)\right) \\ \text{sujeto a } & \dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t)) \\ & x(a) = x_a, \quad x(T) = x_T. \end{aligned}$$

El hamiltoniano corriente es

$$H\left(t, x, u, \lambda\right) = e^{-\rho t}F\left(t, x(t), u(t)\right) + \lambda(t)G(t, x(t), u(t))$$

y las condiciones del máximo son

$$\begin{cases} H_x = e^{-\rho t}F_x + \lambda G_x = -\dot{\lambda}, \\ H_u = e^{-\rho t}F_u + \lambda G_u = 0, \\ H_\lambda = G = \dot{x}. \end{cases}$$

Si se hace la sustitución $\lambda = e^{-\rho t}\mu$, $\dot{\lambda} = -\rho e^{-\rho t}\mu + e^{-\rho t}\dot{\mu}$, estas se convierten en

$$\begin{cases} e^{-\rho t}F_x + e^{-\rho t}\mu G_x = \rho e^{-\rho t}\mu - e^{-\rho t}\dot{\mu}, \\ e^{-\rho t}F_u + e^{-\rho t}\mu G_u = 0, \\ G = \dot{x}, \end{cases}$$

eliminando $e^{-\rho t}$

$$\begin{cases} F_x + \mu G_x = \rho\mu - \dot{\mu}, \\ F_u + \mu G_u = 0, \\ G = \dot{x}. \end{cases}$$

Que se pueden escribir en la forma

$$\begin{cases} H_x^D = \rho\mu - \dot{\mu}, \\ H_u^D = 0, \\ H_\mu^D = \dot{x}. \end{cases}$$

donde

$$H^D\left(t, x, u, \lambda\right) = F\left(t, x(t), u(t)\right) + \mu(t)G(t, x(t), u(t))$$

es conocido como el hamiltoniano descontado. Este procedimiento simplifica el sistema sin alterar la solución , además si F y G son autónomas este es un sistema autónomo.

Ejemplo

El propósito del gobierno es minimizar la pérdida social (PS) definida como una proporción de las desviaciones del ingreso y la tasa de inflación de sus valores ideales, $\bar{Y}$ para el ingreso ideal y cero para la tasa de inflación. Esto se representa por una función de pérdida de la forma

$$PS = a\left(Y - \bar{Y}\right)^2 + b(p-0)^2 = a\left(Y - \bar{Y}\right)^2 + bp^2,$$

con a y b positivos. Se asume, además, que el desfase entre las tasas de inflación real y esperada es proporcional al ingreso no satisfecho,

$$p - \pi = \alpha\left(Y - \bar{Y}\right),$$

y que las expectativas sobre la tasa de inflación crecen proporcionalmente a los desajustes entre el valor esperado y el real. Esto es, la tasa de crecimiento de las expectativas de la inflación se ajusta de acuerdo con la relación

$$\dot{\pi} = \beta(p - \pi), \quad 0 < \beta \leq 1$$

Si además se toma una tasa de descuento r, el problema es

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } & \int_0^T e^{-rt} PS dt \\
\text{sujeto a } & p - \pi = \alpha \left(Y - \bar{Y}\right) \\
& \dot{\pi} = \beta(p - \pi) \\
& \pi(0) = \pi_0 \\
& \pi(T) = \pi_T.
\end{aligned}$$

Despejando p en la primera restricción y reemplazando, el problema se transforma en

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } & \int_0^T e^{-rt} \left\{ a \left(Y - \bar{Y}\right)^2 + b \left[\pi + \alpha \left(Y - \bar{Y}\right)\right]^2 \right\} dt \\
\text{sujeto a } & \dot{\pi} = \alpha\beta \left(Y - \bar{Y}\right) \\
& \pi(0) = \pi_0 \\
& \pi(T) = \pi_T.
\end{aligned}$$

El hamiltoniano descontado para el problema es

$$H^D = \left\{ a \left(Y - \bar{Y}\right)^2 + b \left[\pi + \alpha \left(Y - \bar{Y}\right)\right]^2 \right\} + \mu\alpha\beta \left(Y - \bar{Y}\right).$$

Las condiciones necesarias,

$$\begin{aligned}
H_\pi^D &= \left[2b \left(\pi + \alpha \left(Y - \bar{Y}\right)\right)\right] = r\mu - \dot{\mu} \\
H_Y^D &= 2 \left[(a + \alpha b) \left(Y - \bar{Y}\right) + b\pi\right] + \mu\alpha\beta = 0.
\end{aligned}$$

Al eliminar μ, despejando en la segunda ecuación y reemplazando en la primera ecuación se transforma sucesivamente en

$$\begin{aligned}
2b \left(\pi + \alpha \left(Y - \bar{Y}\right)\right) =& - \frac{2r}{\alpha\beta} \left[(a + \alpha b) \left(Y - \bar{Y}\right) + b\pi\right] \\
& - \frac{d}{dt} \left\{ - \frac{2}{\alpha\beta} \left[(a + \alpha b) \left(Y - \bar{Y}\right) + b\pi\right] \right\} \\
=& \frac{2}{\alpha\beta} \left[(a + \alpha b) \left(\dot{Y} - r(Y - \bar{Y})\right) + b \left(\dot{\pi} - r\pi\right)\right] \\
=& \frac{2}{\alpha\beta} \left\{ (a + \alpha b) \left(\dot{Y} - r(Y - \bar{Y})\right) \right. \\
& \left. + b \left[\alpha\beta \left(Y - \bar{Y}\right) - r\pi\right] \right\}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. En el último ejemplo, escribir el sistema en forma matricial, encontrar la solución correspondiente. Si $T \to \infty$, encontrar los puntos de equilibrio y analizar su comportamiento.

2. Para el problema

$$\text{Maximizar} \int_0^{\infty} e^{-rt}\left(\delta x - \frac{1}{2}(x+z)^2\right) dt$$
$$\text{sujeto a } \dot{x} = \alpha z + \beta$$

   a) Usar el hamiltoniano descontado para encontrar las condiciones necesarias de optimalidad, reducirlas a un sistema en $\dot{\mu}$ y $\dot{x}$ y hacer el análisis del sistema discriminando los casos para las distintas combinaciones de los parámetros.

   b) En caso de punto de silla encontrar la senda de convergencia del sistema.

3. El objetivo del gobierno es maximizar

$$\int_0^{\infty} e^{-rt}\left[\bar{u} - u - \frac{\pi^2 + z^2}{2}\right] dt$$

   donde π es la tasa de inflación, u el nivel de desempleo, $\bar{u}$ la tasa natural de desempleo (que se considera constante) y z la tasa de crecimiento de la oferta de dinero y se supone que $\dot{\pi} = az + b$, $\pi(0) = \pi_0$ y existe una relación tipo Phillips $\bar{u} = \alpha u(t) + \beta\pi(t)$.

   a) Encontrar el punto de equilibrio del sistema que dan las condiciones necesarias para solucionar el problema y analizar la estabilidad analítica y gráficamente.

   b) Determinar los cambios en la estabilidad si se presentan cambios en los parámetros.

4. El problema

$$\text{máx} \int_0^{\infty} e^{-0,5t}\left[\sqrt{k} + \sqrt{c}\right] dt \quad \text{sujeto a} \quad \dot{k} = \sqrt{k} - c - 0{,}2k, \quad k(0) = 1$$

puede ser interpretado como la maximización de una función de utilidad separable que depende del consumo y la riqueza, con una restricción que relaciona el crecimiento del capital con el consumo y su valor inicial. Encontrar la solución del problema y analizar los puntos de equilibrio.

5. Para el problema:

$$\text{Óptimo} \int_0^T \left[x^2 + 4xu + 2u^2\right] dt, \quad \text{sujeto a} \quad \dot{x} = u \quad x(0) = 1.$$

Encontrar:

a) La solución del sistema que producen las condiciones de Pontryagin.
Las constantes de integración si:

b) $T = 2$ y $x(2) = 1$.

c) T es libre y $x(T) = 1$.

d) $T = 2$ y $x(2)$ es libre.

e) T es libre y $3x_T + 4T = 10$.

f) Determinar si la solución encontrada en cada caso es un máximo o un mínimo.

6. Para el problema:

$$\text{Óptimo} \int_1^T \left[x\,(u-x) - x^2 - 2\,(u-x)^2\right] dt,$$
$$\text{sujeto a} \quad \dot{x} = u \quad x(1) = 2.$$

a) Encontrar la solución del sistema de Pontryagin.
Calcular las constantes de integración de la función solución si:

b) $T = 4$ y $x(4) = 3$.

c) T es libre y $x(T) = 3$.

d) $T = 4$ y $x(4)$ es libre.

e) T es libre y $x_T + T^2 = 1$.

f) Determinar si la solución encontrada en cada caso es un máximo o un mínimo.

7. Sea

$$\int_1^T \left[xu - x^2 - 2u^2 + (t^2 - 3t)u\right] dt,$$
$$\text{sujeto a} \quad \dot{x} = x + u, \quad x(1) = 2.$$

Encontrar:

a) Las sendas de estado y control que satisfacen las condiciones de Pontryagin.
Determinar el sistema de ecuaciones para calcular las constantes de integración si:

b) $T = 2$ y $x(2) = 1$.

c) $T = 2$ y $x(2)$ es libre.

d) Determinar si la solución encontrada en cada caso es un máximo o un mínimo.

10.2.5. Restricciones sobre la variable de control

La generalización de las condiciones del máximo a problemas de la forma

$$\begin{aligned} \text{Máximo de} \int_a^T F\left(t, x(t), u(t)\right) dt \\ \text{sujeto a } \dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t)) \\ x(a) = x_a, \quad x(T) = x_T \text{ y } u \in A. \end{aligned}$$

son

$$\begin{cases} H_x = -\dot{\lambda} \\ \text{máx}_{u \in A} H \\ H_\lambda = \dot{x} \end{cases}$$

dependiendo de las condiciones impuestas a la variable de control, la segunda condición implica la aplicación de alguno de los teoremas de optimización restringida. Esta condición coincide con $H_u = 0$ cuando la solución es interior o u no está restringida.

Ejemplos

1. Una firma que ha recibido una orden para producir Q unidades de su producto en un tiempo T quiere minimizar los costos compuestos

de costos de producción y de almacenamiento. Los costos de producción por unidad aumentan linealmente con la tasa de produción, los costos unitarios de almacenamiento son constantes y la planta de la empresa tiene una capacidad instalada capaz de producir q unidades de producto por unidad de tiempo.

Sean $x(t)$ el total en inventario y $u(t)$ la tasa de producción en el momento t, el problema a solucionar es

$$\begin{aligned}&\text{mín} \int_0^T \left[au^2(t) + bx(t)\right] dt \\ &\text{sujeto a} \quad \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 0,\ x(T) = Q,\ 0 \leq u(t) \leq q.\end{aligned}$$

Si se usa el mismo procedimiento de optimización restringuida por desigualdades el hamiltoniano es

$$H\left(x(t), u(t), \lambda(t)\right) = -au^2(t) - bx(t) + \lambda(t)u(t)$$

y las condiciones del máximo

$$\begin{cases} H_x = -b = -\dot{\lambda} \\ \text{máx}_u\, H = -au^2 - bx + \lambda u \quad \text{sujeto a} \quad 0 \leq u \leq q \\ H_\lambda = u = \dot{x}. \end{cases}$$

$\lambda = b\,t + \alpha$ en la primera ecuación. El lagrangiano para maximizar el hamiltoniano es

$$\mathcal{L}\left(u, \mu_1, \mu_2\right) = -au^2 - bx + \lambda u + \mu_1 u + \mu_2(q - u)$$

las condiciones necesarias de optimalidad

$$\begin{cases} \mathcal{L}_u = -2au + \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 u = 0 \\ \mu_2(q - u) = 0. \end{cases}$$

con $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$. $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$ no es posible porque u no puede ser simultáneamente 0 y q. Las combinaciones posibles son:

a) $\mu_1 > 0$, $u = 0$ y $\mu_2 = 0$. De la primera ecuación

$$\mu_1 = -\lambda = -(b\,t + \alpha) > 0$$

lo cual tiene sentido si y sólo si $t < -\frac{\alpha}{b}$, y de la tercera ecuación de las condiciones del máximo $x(t) = \beta$.

b) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$ y $u = q$. En este caso la primera ecuación se reduce a

$$\mu_2 = \lambda - 2aq = b\,t + \alpha - 2aq.$$

de aquí $\mu_2 > 0$ si y sólo si $t > \frac{2aq-\alpha}{b}$. De la tercera ecuación de las condiciones del máximo $x(t) = q\,t + \gamma$.

c) $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 0$.

$$u(t) = \frac{\lambda}{2a} = \frac{b\,t+\alpha}{2a}$$

de la segunda ecuación y

$$x(t) = \int \frac{b\,t+\alpha}{2a}dt = \frac{b}{4a}t^2 + \frac{\alpha}{2a}t + \delta$$

de la tercera de condición del máximo.

Puesto que uno de los costos involucrados es el de almacenamiento es natural suponer que la tasa de producción (u) es creciente, por lo tanto

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t < -\frac{\alpha}{b} \\ \frac{b\,t+\alpha}{2a}, & \text{si} \quad -\frac{\alpha}{b} \le t \le \frac{2aq-\alpha}{b} \\ q, & \text{si} \quad \frac{2aq-\alpha}{b} < t \le T, \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \beta, & \text{si} \quad 0 \le t < -\frac{\alpha}{b} \\ \frac{b}{4a}t^2 + \frac{\alpha}{2a}t + \delta, & \text{si} \quad -\frac{\alpha}{b} \le t \le \frac{2aq-\alpha}{b} \\ q\,t+\gamma, & \text{si} \quad \frac{2aq-\alpha}{b} < t \le T. \end{cases}$$

u dice que en $t = -\frac{\alpha}{b}$ se debe comenzar a producir a una tasa constante hasta alcanzar el máximo posible (en $t = \frac{2aq-\alpha}{b}$). De ahí hasta la fecha de entrega del pedido ($t = T$) se debe producir a la capacidad instalada. Por esto para determinar el comportamiento de la producción se debe encontrar el valor de α (debe ser negativo para que tenga sentido la solución).

Por las condiciones $x(0) = 0$ y $x(T) = Q$, $\beta = 0$ y $\gamma = Q - qT$. $x(t)$ es continua puesto que $u(t)$ lo es, por tanto,

$$\frac{b}{4a}\left(-\frac{\alpha}{b}\right)^2 + \frac{\alpha}{2a}\left(-\frac{\alpha}{b}\right) + \delta = \frac{\alpha^2}{4ab} + \frac{\alpha^2}{2ab} + \delta = \frac{3\alpha^2}{4ab} + \delta = 0$$

y

$$\frac{b}{4a}\left(\frac{2aq-\alpha}{b}\right)^2+\frac{\alpha}{2a}\left(\frac{2aq-\alpha}{b}\right)+\delta=q\frac{2aq-\alpha}{b}+Q-qT$$

al despejar δ en la primera y reemplazar en la segunda

$$\frac{b}{4a}\left(\frac{2aq-\alpha}{b}\right)^2+\frac{\alpha}{2a}\left(\frac{2aq-\alpha}{b}\right)-\frac{3\alpha^2}{4ab}=q\frac{2aq-\alpha}{b}+Q-qT,$$

esta se convierte sucesivamente en:

$$\frac{1}{4ab}\left(2aq-\alpha\right)^2+\left(\frac{\alpha}{2ab}-\frac{q}{b}\right)\left(2aq-\alpha\right)-\frac{3\alpha^2}{4ab}=Q-qT,$$

$$\frac{1}{4ab}\left(2aq-\alpha\right)^2-\frac{1}{2ab}\left(2aq-\alpha\right)^2-\frac{3\alpha^2}{4ab}=Q-qT,$$

$$-\frac{1}{4ab}\left(2aq-\alpha\right)^2-\frac{3\alpha^2}{4ab}=Q-qT,$$

$$(2aq-\alpha)^2+3\alpha^2=4ab(qT-Q),$$

$$\alpha^2-aq\alpha+\left[a^2q^2-ab(qT-Q)\right]=0,$$

de donde

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{aq-\sqrt{a^2q^2-4\left[a^2q^2-ab(qT-Q)\right]}}{2}\\&=\frac{aq-\sqrt{4ab(qT-Q)-3a^2q^2}}{2},\end{aligned}$$

$\alpha\leq 0$ si y sólo si $a^2q^2\leq 4ab(qT-Q)-3a^2q^2$, esto es, $\frac{aq^2+bQ}{bq}\leq T$. Si esta última condición no se cumple la producción debe comenzar desde $t=0$.

2. El aprendizaje de una persona es proporcional a su capital humano $h(t)$ y a la fracción de tiempo dedicado al trabajo $1-E(t)$, este capital decae (medida de olvido) a una tasa constante $a\geq 0$ y crece en función de la inversión en educación (esta función es creciente y cóncava, raíz cuadrada para este ejemplo) que depende del capital invertido y del tiempo dedicado al estudio $E(t)$. Se desea maximizar

el aprendizaje en el tiempo de vida $[0, T]$ descontado a una tasa r al momento de nacer:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \int_0^T e^{-rt}(1 - E(t))h(t)dt \\ &\text{sujeto a} \quad \dot{h}(t) = A\sqrt{E(t)h(t)} - ah(t), \\ &\qquad\qquad h(0) = h_0 > 0, \quad 0 \leq E(t) \leq 1, \quad A > 0. \end{aligned}$$

El hamiltoniano descontado es

$$H^D\left(h(t), E(t), \mu(t)\right) = (1 - E(t))h(t) + \mu(t)\left[A\sqrt{E(t)h(t)} - ah(t)\right]$$

las condiciones del máximo son

$$\begin{cases} H_h^D = 1 - E + \mu\left[\frac{A}{2}\sqrt{\frac{E}{h}} - a\right] = r\mu - \dot{\mu} \\ \text{máx}_E\, H^D = (1 - E)h + \mu\left[A\sqrt{Eh} - ah\right], \quad \text{sujeto a} \quad 0 \leq E \leq 1 \\ H_\lambda^D = A\sqrt{Eh} - ah = \dot{h}. \end{cases}$$

El lagrangiano para la solución del problema de maximización de H^D es

$$\mathcal{L}\left(E, \eta_1, \eta_2\right) = (1 - E)h + \mu\left[A\sqrt{Eh} - ah\right] + \eta_1 E + \eta_2(1 - E)$$

la condición de optimalidad

$$\mathcal{L}_E = -h + \mu\frac{A}{2}\sqrt{\frac{h}{E}} + \eta_1 - \eta_2 = 0$$

y las de holgura complementaria

$$\eta_1 E = 0,\ \eta_2(1 - E) = 0, \quad \text{con} \quad \eta_1 \geq 0,\ \eta_2 \geq 0;$$

producen dos casos para la solución:

a) $\eta_1 = 0$, $\eta_2 > 0$ y $E = 1$ de donde el sistema a resolver es

$$\begin{cases} \mu\left[\frac{A}{2\sqrt{h}} - a\right] = r\mu - \dot{\mu} \\ -h + \mu\frac{A}{2}\sqrt{h} - \eta_2 = 0 \\ A\sqrt{h} - ah = \dot{h}. \end{cases}$$

De la última ecuación

$$h(t) = \left(A - \beta e^{-\frac{at}{2}}\right)^2,$$

con esto μ se despeja de la primera ecuación

$$\mu(t) = \gamma \frac{e^{(r-a)t}}{\left(\beta - Ae^{\frac{at}{2}}\right)^{\frac{1}{a}}}.$$

b) Si $\eta_1 = 0$ y $\eta_2 = 0$, el sistema es

$$\begin{cases} 1 - E + \mu \left[\frac{A}{2}\sqrt{\frac{E}{h}} - a\right] = r\mu - \dot{\mu} \\ -h + \mu \frac{A}{2}\sqrt{\frac{h}{E}} = 0 \\ A\sqrt{Eh} - ah = \dot{h}. \end{cases}$$

En la segunda ecuación

$$\mu = \frac{2}{A}\sqrt{Eh},$$

al reemplazar en la primera

$$\begin{aligned} r\frac{2}{A}\sqrt{Eh} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{A}\sqrt{Eh}\right) &= 1 - E + \frac{2}{A}\sqrt{Eh}\left[\frac{A}{2}\sqrt{\frac{E}{h}} - a\right] \\ &= 1 - E + \frac{2}{A}\sqrt{Eh}\frac{A}{2}\sqrt{\frac{E}{h}} - \frac{2a}{A}\sqrt{Eh} \\ &= 1 - \frac{2a}{A}\sqrt{Eh}. \end{aligned}$$

Si $z = \frac{2}{A}\sqrt{Eh}$, esta se reduce a la ecuación separable

$$\frac{dz}{dt} = (a + r)z - 1$$

de donde

$$z = \frac{2}{A}\sqrt{Eh} = \frac{1 + Be^{(a+r)t}}{a + r}.$$

Con esto la última ecuación del sistema

$$\frac{dh}{dt} + ah = \frac{A^2}{2(a + r)}\left(1 + Be^{(a+r)t}\right)$$

tiene como solución

$$h = \frac{A^2}{2(a+r)}\left[\frac{1}{a} + \frac{B}{2a+r}e^{(a+r)t} + \delta e^{-at}\right].$$

A partir de estos casos se construye la solución del problema de forma que E sea continua, en esta construcción, como en el ejemplo anterior, se debe hacer alguna conjetura sobre el comportamiento de las funciones involucradas.

Ejercicios

1. Analizar el caso $\frac{aq^2+bQ}{bq} > T$ en el ejemplo 1.

2. Discutir la solución encontrada en el ejemplo 2.

10.2.6. Programación dinámica

Para el problema

$$\begin{aligned} \text{Máximo de } &\int_a^T F\left(t, x(t), u(t)\right) dt + \varphi\left(T, x(T)\right) \\ \text{sujeto a } &\dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t)) \\ &x(a) = x_a, \quad x(T) = x_T. \end{aligned}$$

se define la función de valor por

$$\begin{aligned} V\left(t, x_t\right) = \max_{u(s)} \int_t^T F\left(s, x(s), u(s)\right) ds + \varphi\left(T, x(T)\right) \\ \text{sujeto a } \dot{x}(s) = G(s, x(s), u(s)) \quad x(t) = x_t, \quad x(T) = x_T, \end{aligned}$$

en particular $V(T, x_T) = \varphi(T, x(T))$. Para $\Delta t > 0$

$$\begin{aligned}
V(t, x_t) &= \max_{u(s)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F(s, x(s), u(s))\, ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t+\Delta t}^{T} F(s, x(s), u(s))\, ds + \varphi(T, x(T)) \right\} \\
&= \max_{u(s)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F(s, x(s), u(s))\, ds + V(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) \right\} \\
&\approx \max_{u(s)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F(s, x(s), u(s))\, ds + V(t+\Delta t, x_t + \Delta x_t) \right\} \\
&\approx \max_{u(s)} \left\{ F(t, x(t), u(t))\, \Delta t + V(t+\Delta t, x_t + \Delta x_t) \right\}
\end{aligned}$$

Aproximando V por un polinomio de Taylor de primer orden

$$\begin{aligned}
V(t+\Delta t, x_t + \Delta x_t) &\approx V(t, x_t) + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial x_t}\Delta x_t \\
&\approx V(t, x_t) + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial x_t}\frac{dx}{dt}\Delta t \\
&= V(t, x_t) + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial x_t} G(t, x(t), u(t))\Delta t.
\end{aligned}$$

Al reemplazar en $V(t, x_t)$

$$\begin{aligned}
V(t, x_t) = \max_{u(t)} \Big\{ & F(t, x(t), u(t))\, \Delta t + V(t, x_t) \\
& + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial x_t} G(t, x(t), u(t))\Delta t \Big\}
\end{aligned}$$

y al simplificar y dividir por Δt

$$\max_{u(t)} \left\{ F(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial x_t} G(t, x(t), u(t)) \right\} = 0.$$

Esta ecuación puede tomar la forma

$$\frac{\partial V(t, x_t)}{\partial t} + \max_{u(t)} \left\{ F(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V(t, x_t)}{\partial x_t} G(t, x(t), u(t)) \right\} = 0$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el caso continuo. Esta es una ecuación diferencial parcial cuya solución, en general, no es simple salvo algunos casos especiales, ver por ejemplo en Kamien y Schwartz[Ka].

10.3. Crecimiento con dos tasas de preferencia intertemporal

Sean dos funciones de utilidad, u_R, u_P. La primera representa la utilidad de las personas ricas y la segunda la de los pobres. De acuerdo con la usanza común, la utilidad depende del consumo. La utilidad de los ricos es función del consumo de los ricos (c_R). De la misma manera, la utilidad de los pobres depende del consumo de éstos (c_P). Normalmente se supone que la tasa de preferencia intertemporal (θ) es constante para cada individuo.

La función objetivo es

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty u_R\left(c_R\left(t\right)\right)\exp\left[-\int_0^t \theta_R\left(c_R\left(z\right)\right)dz\right]dt\\&+\int_0^\infty u_P\left(c_P\left(t\right)\right)\exp\left[-\int_0^t \theta_P\left(c_P\left(z\right)\right)dz\right]dt\end{aligned}$$

sometida a la restricción

$$\frac{dk}{dt} = y(k) - (c_R + c_P) - \eta k.$$

Las variaciones en el *stock* de capital son iguales al ingreso (y) menos el consumo total ($c_R + c_P$) menos la tasa de crecimiento de la población (η) multiplicada por el *stock* de capital. $y(k)$ representa la función de producción. k es el capital per cápita. Como es usual, $y' > 0$, $y'' < 0$.

El hamiltoniano para el problema es

$$\begin{aligned}H = {}& u_R\exp\left[-\int_0^t \theta_R\left(c_R\left(z\right)\right)dz\right] + u_P\exp\left[-\int_0^t \theta_P\left(c_P\left(z\right)\right)dz\right]\\&+\left(y(k) - c_R - c_P - \eta k\right)\end{aligned}$$

λ es la variable de coestado, relacionada con la variable de estado k.

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{cases} H_{c_p} = 0 \\ H_{c_R} = 0 \\ H_k = -\dot{\lambda} \end{cases}$$

al usar las derivadas del hamiltoniano el sistema es

$$\begin{cases} H_{c_R} = u_R' \exp\left(-\int_0^t \theta_R dz\right) + u_R \exp\left(-\int_0^t \theta_R dz\right)\theta_R - \lambda = 0 \\ H_{c_P} = u_P' \exp\left(-\int_0^t \theta_P dz\right) + u_P \exp\left(-\int_0^t \theta_P dz\right)\theta_P - \lambda = 0 \\ H_k = \lambda(y' - \eta) = -\dot{\lambda}. \end{cases}$$

Transponiendo en las primeras ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda = u_R' \exp\left(-\int_0^t \theta_R dz\right) + u_R \exp\left(-\int_0^t \theta_R dz\right)\theta_R \\ \lambda = u_P' \exp\left(-\int_0^t \theta_P dz\right) + u_P \exp\left(-\int_0^t \theta_P dz\right)\theta_P. \end{cases}$$

Combinando,

$$\dot{\lambda} = \lambda(\eta - y').$$

Que se convierten en

$$\begin{cases} \lambda \exp\left(\int_0^t \theta_R dz\right) = u_R' + \theta_R u_R \\ \lambda \exp\left(\int_0^t \theta_P dz\right) = u_P' + \theta_P u_P \\ \dot{\lambda} = \lambda(\eta - y'). \end{cases}$$

La última ecuación equivale a

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda\left(\eta - y'\right)$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \left(\eta - y'\right) dt$$

Integrando

$$\ln \lambda = \int_0^t \left(\eta - y'\right) dz + c$$

que se puede reescribir en la forma

$$\lambda = A \exp\left(\int_0^t \left(\eta - y'\right) dz\right).$$

Reemplazando λ,

$$\begin{cases} A\exp\left(\int\limits_0^t (\eta - y' + \theta_R)\, dz\right) = u_R' + \theta_R u_R \\ A\exp\left(\int\limits_0^t (\eta - y' + \theta_P)\, dz\right) = u_P' + \theta_P u_P \end{cases}$$

derivando con respecto a t

$$\begin{cases} u_R''\dot{c}_R + \theta_R'\dot{c}_R u_R + \theta_R\dot{c}_R u_R' = A\exp\left(\int_0^t (\eta - y' + \theta_R)\, dz\right)(\eta - y' + \theta_R) \\ u_P''\dot{c}_P + \theta_P'\dot{c}_P u_P + \theta_P\dot{c}_P u_P' = A\exp\left(\int_0^t (\eta - y' + \theta_P)\, dz\right)(\eta - y' + \theta_P)\, . \end{cases}$$

Reemplazando y factorizando,

$$\begin{cases} \dot{c}_R\left(u_R'' + \theta_R' u_R + \theta_R u_R'\right) = \left(u_R' + \theta_R u_R\right)(\eta - y' + \theta_R) \\ \dot{c}_P\left(u_P'' + \theta_P' u_P + \theta_P u_P'\right) = \left(u_P' + \theta_P u_P\right)(\eta - y' + \theta_P) \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{c}_R = \frac{u_R' + \theta_R u_R}{\frac{d}{dc_R}\left(u_R' + \theta_R u_R\right)}\left[\eta - y' + \theta_R\right] = \frac{\eta - y' + \theta_R}{\frac{d}{dc_R}\left[\ln\left(u_R' + \theta_R u_R\right)\right]} \\ \dot{c}_P = \frac{u_P' + \theta_P u_P}{\frac{d}{dc_P}\left(u_P' + \theta_P u_P\right)}\left[\eta - y' + \theta_P\right] = \frac{\eta - y' + \theta_P}{\frac{d}{dc_P}\left[\ln\left(u_P' + \theta_P u_P\right)\right]}. \end{cases}$$

Los cambios en el consumo de los ricos y de los pobres dependen de la productividad marginal de k, de las respectivas tasas de preferencia intertemporal y de la utilidad marginal.

Si L, G representan las funciones involucradas en las ecuaciones, el sistema 3×3 a analizar es

$$\begin{cases} \dot{c}_R = L\left(c_R, k\right) \\ \dot{c}_P = G\left(c_P, k\right) \\ \dot{k} = y(k) - (c_P + c_R) - \eta k. \end{cases}$$

El punto de equilibrio está donde

$$\begin{cases} \dot{c}_P = \left(u_R' + \theta_R u_R\right)(\eta - y' + \theta_R) = 0 \\ \dot{c}_R = \left(u_P' + \theta_P u_P\right)(\eta - y' + \theta_P) = 0 \\ \dot{k} = y - (c_R + c_P) - \eta k_t = 0. \end{cases}$$

La última ecuación equivale a

$$y^* = c_P^* + c_{R^*+\eta k^*}.$$

El * significa que la igualdad representa una situación de equilibrio. $u_R' + \theta_R u_R$ y $u_P' + \theta_P u_P$ son diferentes de cero porque:

- θ_R, $\theta_P > 0$, ya que la tasa de preferencia intertemporal de los ricos y de los pobres es positiva.
- u_R', $u_P' > 0$, por las propiedades convencionales de la función de utilidad.

La primera igualdad se cumple si

$$\theta_R = y' - \eta,$$

la segunda se cumple si

$$\eta - y' + \theta_P = 0$$

o

$$\theta_P = y' - \eta,$$

y la tercera se cumple si

$$y = (c_R + c_P) + \eta k$$

$$y' = \eta + \theta_R = \eta + \theta_P$$

$$y' = \eta + \theta_R^* = \eta + \theta_P^*.$$

Se sigue, entonces, que

$$\begin{cases} \theta_R^* = 0 \\ \theta_P^* = 0. \end{cases}$$

En el punto de equilibrio las tasas de preferencia intertemporal de los pobres y de los ricos son iguales. El modelo únicamente es consistente con tasas de preferencia intertemporal iguales. Esta condición es muy restrictiva porque rechaza de plano la existencia de las curvas de Engel.

Linealizando el sistema alrededor del punto de equilibrio,

$$\begin{cases} \dot{c}_R = L_{c_R}\left(c_R^*, k^*\right)\left[c_R - c_R^*\right] + L_k\left(c_R^*, k^*\right)\left[k - k^*\right] \\ \dot{c}_P = G_{c_P}\left(c_P^*, k^*\right)\left[c_P - c_P^*\right] + G_k\left(c_P^*, k^*\right)\left[k - k^*\right] \\ \dot{k} = \left(y'(k^*) - \eta\right)\left[k - k^*\right] - \left[c_R - c_R^*\right] - \left[c_P - c_P^*\right] \end{cases}$$

donde

$$L_{c_R} = \frac{\frac{d\left[\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right]}{dc_R} - (\eta - y' + \theta_R)\frac{d^2\left[\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right]}{dc_R^2}}{\left\{\frac{d\left[\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right]}{dc_R}\right\}^2}$$

y

$$L_{c_R}\left(c_R^*, k^*\right) = \frac{1}{\left.\frac{d\left[\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right]}{dc_R}\right|_{\left(c_R^*, k^*\right)}} = L_R.$$

De manera similar,

$$G_{c_P}\left(c_P^*, k^*\right) = \frac{1}{\left.\frac{d\left[\ln\left(u'_P+\theta_P u_P\right)\right]}{dc_P}\right|_{\left(c_P^*, k^*\right)}} = G_P.$$

La relación entre L_R y G_P es

$$\frac{RL}{PG} = \frac{\frac{d}{dc_P}\left(\ln\left(u'_P+\theta_P u_P\right)\right)}{\frac{d}{dc_R}\left(\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right)}.$$

Si

$$\frac{d}{dc_P}\left(\ln\left(u'_P+\theta_P u_P\right)\right) = \frac{u''_P+\theta_P u'_P}{u'_P+\theta_P u_P}.$$

Puesto que $u''_P < 0$, $\theta_P > 0$, $u'_P > 0$, el denominador es positivo. Así que el signo de la fracción será positivo si $-u''_P < \theta_P u'_P$. Y negativo si $-u''_P > \theta_P u'_P$.

$$\frac{d}{dc_R}\left(\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right) = \frac{u''_R+\theta_R u'_R}{u'_R+\theta_R u_R}.$$

Los signos se comportan de la misma manera que en la ecuación anterior.

Es razonable pensar que cuando $-u''_P < \theta_P u'_P$, también $-u''_R < \theta_R u'_R$. Y que cuando $-u''_P > \theta_P u'_P$, también $-u''_R > \theta_R u'_R$. Si esta condición se cumple, esta relación siempre será positiva: $\frac{L_R}{G_P} > 0$

$$L_k\left(c_R^*, k^*\right) = \frac{-y''\left(k^*\right)}{\left.\frac{d\left[\ln\left(u'_R+\theta_R u_R\right)\right]}{dc_R}\right|_{\left(c_R^*, k^*\right)}} = L_k$$

$$G_k\left(c_P^*, k^*\right) = \frac{-y''\left(k^*\right)}{\left.\frac{d\left[\ln\left(u'_P+\theta_P u_P\right)\right]}{dc_R}\right|_{\left(c_P^*, k^*\right)}} = G_k.$$

En ambos casos el numerador es positivo, puesto que $y''(k^*) < 0$. Así que los signos de la fracción siguen con las mismas pautas explicadas antes.

De las ecuaciones anteriores se sigue que:

$$L_k(c_R^*, k^*) = -y''(k^*)L_{c_R}(c^*, k^*)$$

y

$$G_k(c_P^*, k^*) = -y''(k^*)G_{c_P}(c^*, k^*)$$

que equivale a

$$\frac{L_k}{L_R} = \frac{G_k}{G_P}$$
$$\frac{L_k}{G_k} = \frac{L_R}{G_P}.$$

Antes se mostró que el miembro derecho de la igualdad es positivo. Así que por definición $\frac{L_k}{G_k} > 0$.

El sistema linealizado se convierte en

$$\begin{cases} \dot{c}_R = L_R\left(c_R - c_R^*\right) + L_k\left(k - k^*\right) \\ \dot{c}_P = G_P\left(c_P - c_P^*\right) + G_k\left(k - k^*\right) \\ \dot{k} = -\left(c_R - c_R^*\right) - \left(c_P - c_P^*\right) + \left(y'(k^* - \eta\right)\left(k - k^*\right) \end{cases}$$

o

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_R \\ \dot{c}_P \\ \dot{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_R & 0 & L_k \\ 0 & G_P & G_k \\ -1 & -1 & y'\left(k^*\right) - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_R - c_R^* \\ c_P - c_P^* \\ k - k^* \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz son las soluciones de

$$(L_R - \tau)(G_P - \tau)(y'(k^*) - \eta - \tau) + L_K(G_P - \tau) + G_K(L_R - \tau) = 0$$

que equivale a

$$\tau^3 - (L_R + G_P + \theta)\tau^2 + (\theta(L_R + G_P) + L_R G_P + L_k + G_k)\tau$$
$$- (L_k G_P + L_R G_k + L_R G_P \theta) = 0.$$

Como $L_R = \frac{-L_k}{y''}$, $G_P = \frac{-G_k}{y''}$,

$$(y'')^2\tau^3 + y''(L_k + G_k - \theta y'')\tau^2 + (L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta)\tau$$
$$+ L_k G_k(2y'' - \theta) = 0.$$

De acuerdo con el teorema de Routh-Hurwitz, el sistema dinámico es estable si la matriz

$$\begin{pmatrix} y''\left(l_k + G_k - \theta y''\right) & l_k G_k \left(2y'' - \theta\right) & 0 \\ \left(y''\right)^2 & L_k G_k + \left(L_k + G_k\right)\left(y''\right)^2 - \theta & 0 \\ 0 & y''\left(L_k + G_k - \theta y''\right) & L_k G_k \left(2y'' - \theta\right) \end{pmatrix}$$

tiene menores principales de orden par o impar todos positivos. Por lo tanto, basta con analizar el determinante

$$\begin{vmatrix} y''(L_k + G_k - \theta y'') & L_k G_k(2y'' - \theta) \\ (y'')^2 & L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta \end{vmatrix}$$
$$= y''(L_k + G_k - \theta y'')\left[L_k G_k + (L_k + G_k)(y'')^2 - \theta\right] - (y'')^2 L_k G_k(2y'' - \theta).$$

Respuestas y sugerencias

Ejercicios 1.1 Página 4.

1a. p: Aumentan los precios, q: se mantiene la publicidad y s: la demanda crece. $(p \wedge q) \Rightarrow \neg s$.

2c. $A(x, y)$: x es amigo de y; j: Juan, p: Pedro, m: María.

$$\forall x((A(x, j) \wedge A(x, p)) \Rightarrow A(x, m)).$$

Ejercicios 1.2 Página 7

1a. No, en el primero la variable x puede tomar el valor 0, en el segundo no.
1d. No, $(-1, -1, 0)$ es elemento del primer conjunto pero no del segundo.
2a. $(0, 0)$ y $(0, 25)$.
2g. $(5, 50, 500)$ y $(-100, 10, 1500)$.

Ejercicios 1.3 Página 20

1. No.
3e. No cerrado, no abierto, no acotado, no compacto, el interior es vacío, su frontera y clausura es $\left\{m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N} \text{ y } n \in \mathbb{Z}_{++}\right\} \cup \{0\}$, el ínf es 0, no es acotado superiormente y el conjunto de sus puntos de acumulación es $\mathbb{N}$.
3g. El conjunto no es cerrado ni abierto, no es acotado inferior ni superiormente, su interior es vacío, su frontera, clausura y conjunto de puntos de acumulacion es $\mathbb{R}$.
5. Usar el principio arquimediano para probar que la unión es igual a $(0, 1]$.
8. Sea $x \in A \cap B$ con A y B conjuntos abiertos, entonces existen $r_A > 0$ y $r_B > 0$ tales que $(x - r_A, x + r_A) \subseteq A$ y $(x - r_B, x + r_B) \subseteq B$. Si $r = \text{mín}\{r_A, r_B\}$, entonces $(x - r, x + r) \subseteq (x - r_A, x + r_A)$ y $(x - r, x + r) \subseteq (x - r_B, x + r_B)$, por lo que $(x - r, x + r) \subseteq A \cap B$, esto es $A \cap B$ es abierto.

Ejercicios 1.5 Página 27

3a. Puesto que $x^2+2xy+2y^2 = x^2+2xy+y^2+y^2 = (x+y)^2+y^2 = 1$, los valores que puede tomar las variables son $-1 \leq y \leq 1$ y $D1 \leq x+y \leq 1$. Despejando en la segunda condición y usando la primera $-2 \leq -1-y \leq x \leq 1-y \leq 2$.
3f. $0 \leq x \leq \frac{I}{p_x}$ y $0 \leq y \leq \frac{I}{p_y}$.
4a. No compacto ya que no es acotado, si $x = 0$ las otras variables pueden ser cualquier número real.
4c. El conjunto no es acotado ya que la variable y puede ser cualquier número real.
5c. $\{(x, y, z) \mid z = 0, x^2+y^2 \leq 2\} \cup \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 2, x^2+y^2 = 2\} \cup \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$.
7. Basta ver que: $x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{5}{4}y^2 = (x + \frac{3}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2$.

Ejercicios 2.2.2 Página 38

1a. $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
1b. $-\frac{24}{25}$.
1c.

$$F\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{2\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{2y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = F(x, y).$$

2c.

$$F(t) = F\left(\frac{t}{1}\right) = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{1} = \sqrt{1 + t^2}.$$

3c Para la función $F(x-y, 2x+y) = x^2+3xy-5y^2$, sea $s = x-y$ y $t = 2x+y$, se debe despejar x y y en términos de s y t y reemplazar en la función: Suamndo las ecuaciones $s + t = 3x$ o $x = \frac{s+t}{3}$, y $y = x - s = \frac{s+t}{3} - s = \frac{s+t-3s}{3} = \frac{t-2s}{3}$. Por lo tanto,

$$F(s, t) = \left(\frac{s + t}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{s + t}{3}\right)\left(\frac{t - 2s}{3}\right) - 5\left(\frac{t - 2s}{3}\right)^2$$

y luego simplificar.
4a.

$$F(G(x, y), y) = 4(G(x, y))^2+y^2 = 4\left(x^2 - 9y^2\right)^2+y^2 = 4x^4-72x^2y^2+325y^4.$$

5a. 3.
5b. -2.

6. $c = d = 0$ o $a = b = 0$, en el primer caso la función es homogénea de grado 2 y en el segundo de grado 1.
9. $\sigma = 1$.
??. Basta ver que,

$$x^a y^b = \left(x^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{b}{a+b}}\right)^{a+b}$$

10 Esto se desprende de: $f(x,y) = f\left(x \cdot 1, x\frac{y}{x}\right) = xf\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Ejercicios 2.4 Página 52

1. Definida positiva.
3. No definida.
4. Definida positiva.

Ejercicios 2.5.1 Página 56

3. Al aplicar logarítmo a la ecuación,

$$\ln f = \frac{1}{\gamma}\left[\ln a + \alpha \ln x + \beta \ln y - \ln\left(cx^\delta + dy^\rho\right)\right]$$

derivar implícitamente con respecto a cada variable, multiplicar cada derivada parcial por la variable correspondiente y sumar se tiene el resultado.
4. Aplicar el teorema de Euler.
6. Basta derivar la ecuación $xf_x + yf_y = f$ y despejar.

Ejercicios 2.6.1 Página 64

3. Inicialmente mostrar que $\frac{F_y}{F_x} = \frac{h_y}{h_x}$ y usar el ejercicio 6 de la sección 2.5.1.

Ejercicios 2.6.4 Página 69

2a. La primera función es homogénea de grado $\frac{\beta}{\alpha}$, por lo tanto si $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ tiene rendimientos crecientes, si $\frac{\beta}{\alpha} = 1$ tiene rendimientos constantes y si $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ tiene rendimientos decrecientes. La segunda es homogénea de grado $\beta + \alpha$ y la tercera es homogénea de grado $\beta + \alpha$ si y sólo si $\delta = \sigma = 0$ por lo tanto estas tienen rendimientos crecientes, constantes o decrecientes si $\beta + \alpha > 1$, $\beta + \alpha = 1$ o $\beta + \alpha < 1$.
2c. El logarítmo de $Q(K,L) = Ae^{\delta\frac{K}{L}} K^\alpha L^\beta$, la transforma en

$$\ln Q = \ln A + \delta \frac{K}{L} + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

su derivada implícita con respecto a K,

$$\frac{Q_K}{Q} = \frac{\delta}{L} + \frac{\alpha}{K}$$

y de aquí

$$Q_K = \left(\frac{\delta}{L} + \frac{\alpha}{K}\right) Q.$$

3. Si f es homogénea de grado p,

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x}).$$

Tomando logarítmo a la ecuación

$$\ln f(\lambda \mathbf{x}) = p \ln \lambda + \ln f(\mathbf{x}).$$

Ejercicios 3.1 Página 82

1b. Los conjuntos no son acotados, por tanto no son compactos.
1c. $A = GS_f$ donde $f(y) = \left|y^2 - y\right|$ definida para $|y+2| \leq 1$.
3a.

$$\begin{aligned} GS_g \cap GI_f &= \left\{(x,y,z) \mid x^2 + x - y \leq z \leq x - y\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \mid x^2 + x \leq y + z \leq x\right\} \end{aligned}$$

la última desigualdad solo se cumple para $x = 0$, por lo tanto el conjunto es igual a $\{(0,y,z) \mid y + z = 0\}$ y este es cerrado y no acotado.
5.

$$\begin{aligned} D &= \{(K,L) \mid \text{mín}\{2K, 3L\} \geq 6\} \\ &= \{(K,L) \mid 2K \geq 6\} \cap \{(K,L) \mid 3L \geq 6\} \\ &= \{(K,L) \mid K \geq 3\} \cap \{(K,L) \mid L \geq 2\} = GS_f \cap GS_g, \end{aligned}$$

donde $f(L) = 3$ y $g(K) = 2$.
8. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x < 1 \\ x - 1, \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$

Ejercicios 3.2 Página 86

1. $A = CI_f(0) \cap CI_g(1)$ donde $f(x,y) = \left|y^2 - y\right| - x$ y $g(x,y) = |y+2|$.

3a.

$$\begin{aligned} CS_g(1)\cap CI_f(2) &= \big\{(x,y)\mid 1\le x^2+x-y,\ x-y\le 2\big\}\\ &= \big\{(x,y)\mid 1-x^2\le x-y\le 2\big\}\\ &= \big\{(x,y)\mid -2\le y-x\le x^2-1\big\}\\ &= \big\{(x,y)\mid x-2\le y\le x^2+x-1\big\}\end{aligned}$$

como la ecuación $x-2=x^2+x-1$ no tiene solución real el conjunto es vacío.

5. $D=\{(K,L)\mid \text{mín}\{2K,3L\}\ge 6\}=CS_f(6)$ con $f(K,L)=\text{mín}\{2K,3L\}$.

8. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x\le 1\\ x-1, \text{ si } x>1.\end{cases}$

Ejercicios 4.1 Página 92

3. Una recta y un círculo.
6. No.

Ejercicios 4.2 Página 96

4. $f(x)=\frac{1}{x}$ con $x>0$, $g(x)=x^2$ y $f(x)=\frac{1}{x}$ con $x>0$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ejercicios 4.2.2 Página 105

1.

$$\begin{aligned} C&=\left\{(x,y)\mid \frac{3x+y}{xy-x^2-3y^2-1}\ge 1\right\}\\ &=\big\{(x,y)\mid 3x+y\le xy-x^2-3y^2-1\big\}\\ &=\big\{(x,y)\mid 3x+y-xy+x^2+3y^2\le -1\big\}=CI_f(-1),\end{aligned}$$

donde, $f(x,y)=3x+y-xy+x^2+3y^2$. Esta función es convexa (es la suma de la forma cuadrática definida positiva $-xy+x^2+3y^2$ y la función lineal $3x+y$) por lo que el conjunto es convexo.

3a. Convexo.
3e. No convexo.
3h. Convexo.
4a. Cóncava.
4b. Cóncava.

$5e$. Es convexa en

$$\{(x, y) \mid 108xy \geq 1,\ x > 0,\ y > 0\}$$

y cóncava en

$$\{(x, y) \mid 108xy \geq 1,\ x < 0,\ y < 0\}.$$

7. Los únicos grafos y contornos convexos son los de funciones lineales.

Ejercicios 4.3 Página 117

$1a$. Cóncava.
$1c$. Convexa.
$1h$. Convexa y cóncava.
3. $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x + \cos x$ y $f(x) + g(x)$ son cuasiconvexas.
7. Por lo menos cuasiconvexa.
8. Compuesta de cóncava y creciente.
9. Basta determinar los valores de r para los que la función $h(t) = t^r$, para $t > 0$ es convexa, cóncava, creciente o decreciente y aplicar las propiedades de composición.

Ejercicios 4.3.1 Página 123

1. f es la compuesta de una función decreciente con una convexa.
3. Aplicar logarítmos.
4. Descomponer en funciones sencillas y aplicar las propiedades, entre ellas el ejercicio 3, o la matriz hessiana.

Ejercicios 5.1 Página 132

1. $\arg\text{máx}\{f(x) \mid x \in (-3, 1]\} = \{1\}$,
   $\arg\text{mín}\{f(x) \mid x \in (-3, 1]\} = (-3, -2) \cup \{0\}$,
   $\text{máx}\{f(x) \mid x \in (-3, 1]\} = 1$ y $\text{máx}\{f(x) \mid x \in (-3, 1]\} = 0$.
2. $\arg\text{máx}\{f(x) \mid x \in [-1, 3)\} = [1, 3]$,
   $\arg\text{mín}\{f(x) \mid x \in [-1, 3)\} = \{0\}$, $\text{máx}\{f(x) \mid x \in [-1, 3)\} = 1$ y
   $\text{máx}\{f(x) \mid x \in [-1, 3)\} = 0$.

Ejercicios 5.3 Página 145

$1a$. $(0, 0)$ es punto de silla.
$1e$. $(0, 0)$ es punto de silla.
$1i$. $(0, 0, 0)$ es mínimo.

1t. Los puntos del conjunto $\{(x,y,0) \mid x+y=\frac{5}{2}\}$ son argumentos minimizadores.
5. $(0,0)$ es punto de silla.

Ejercicios 6.1.2 Página 166

1. Las soluciones de problemas restringidos pueden ser comprobadas usando un programa computacional. La herramienta Solver de Excel es una buena opción en los problemas numéricos.
2. El punto que soluciona el problema no cualifica las restricciones.
5e.
$$x^M = \frac{m}{p_x} - \frac{b}{a}, \quad y^M = \frac{bp_x}{ap_y}, \quad V = \frac{am}{p_x} - b + b\ln\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right).$$

Ejercicios 6.2 Página 181

1. Nuevamente Solver de Excel sirve para comprobar las soluciones.
3. Transformar la restricción
$$\text{mín}\{aK, AL^\alpha T^\beta\} = q,$$
en las restricciones
$$aK \geq q, \quad AL^\alpha T^\beta \geq q,$$
que equivalen a
$$aK - q \geq 0, \quad AL^\alpha T^\beta - q \geq 0,$$
y usar estas últimas para construir el lagrangiano.
4. Como en el ejercicio anterior la restricción
$$\text{mín}\left\{aK, (aL^\rho + bT^\rho)^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\} = q,$$
equivale al par de desigualdades
$$aK \geq q, \quad (aL^\rho + bT^\rho)^{\frac{\sigma}{\rho}} \geq q,$$
la segunda se transforma en
$$aL^\rho + bT^\rho \geq q^{\frac{\rho}{\sigma}}.$$
Así el problema a solucionar es
$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } C(K,L,T) = rK + wL + sT \\ &\text{sujeta a } aK - q \geq 0, \quad aL^\rho + bT^\rho - q^{\frac{\rho}{\sigma}} \geq 0. \end{aligned}$$

$5a$. El problema en forma para aplicar los teoremas es

$$\begin{aligned}
-\text{Maximizar } & -x+y-z \\
\text{sujeta a } & 4-x^2-y^2-z^2 \geq 0, \\
& 2x-3y+4z-1=0, \\
& x \geq 0, \quad z \geq 0.
\end{aligned}$$

Su lagrangiano es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -x+y-z+\mu_1(4-x^2-y^2-z^2)+\mu_2 x+\mu_3 z \\
& +\lambda(2x-3y+4z-1).
\end{aligned}$$

Las condiciones necesarias

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x &= -1-2\mu_1 x+\mu_2+2\lambda=0, \\
\mathcal{L}_y &= 1-2\mu_1 y-3\lambda=0, \\
\mathcal{L}_z &= -1-2\mu_1 z+\mu_2+4\lambda=0,
\end{aligned}$$

las de holgura complementaria

$$\begin{array}{rcr}
\mu_1(4-x^2-y^2-z^2)=0, & \mu_1 \geq 0, & 4-x^2-y^2-z^2 \geq 0, \\
\mu_2 x=0, & \mu_2 \geq 0, & x \geq 0, \\
\mu_2 z=0, & \mu_3 \geq 0, & z \geq 0,
\end{array}$$

y la restricción de igualdad

$$2x-3y+4z=1,$$

dan los valores óptimos del problema.

Ejercicios 6.4 Página 197

$3a$. El lagrangiano para el problema es

$$\mathcal{L}=f(x,y,a)+\lambda(k-g(x,y)).$$

Según el teorema de la envolvente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^*}{\partial a} &= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}\right|_{(x^*,y^*,a,k)} \\
&= \left.\frac{\partial\left(f(x,y,a)+\lambda(k-g(x,y))\right)}{\partial a}\right|_{(x^*,y^*,a,k)} \\
&= \frac{\partial f}{\partial a}(x^*,y^*,a,k).
\end{aligned}$$

$3b$.

$$\frac{\partial f^*}{\partial k} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k}\right|_{(x^*,y^*,a,k)} = \lambda.$$

$3c$. Derivando la ecuación $f_a^* = f_a$ con respecto a k se tiene

$$\frac{\partial f_a^*}{\partial k} = \frac{\partial f_a}{\partial k} = \frac{\partial f_a}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial k} + \frac{\partial f_a}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial k}.$$

Si f y f^* son doblemente diferenciables

$$f_{ax} = f_{xa}, \quad f_{ax} = f_{xa} \quad \text{y} \quad f_{ak}^* = f_{ka}^* = \lambda_a,$$

de donde se tiene el resultado.

5. Seguir la misma idea del ejemplo 1.

$6c$.

$$K^* = \frac{q}{2}, \quad L^* = \frac{q}{3} \quad \text{y} \quad C^* = q\left(\frac{r}{2} + \frac{w}{3}\right).$$

$8c$.

$$x^h = a + \left[\bar{U}\left(\frac{p_y}{\beta p_x}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

$10c$. $Q(K,L) = L + \ln K$.

$12b$.

$$V = \frac{m}{\text{mín}\{ap_x, bp_y\}} \quad \text{y} \quad U(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Ejercicios 7.1 Página 220

2. $\left\{2 + (-1)^t \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$.

4. Basta reemplazar sen $\frac{t\pi}{2}$ por $(-1)^{t+1}$ y usar las definiciones.

Ejercicios 7.2.3 Página 235

1. Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π.

$4a$. Para los que la ecuación $x = x^2 + c$ tiene solución, esto es, $c \leq \frac{1}{4}$.

$4c$. Para los que la ecuación $x = \left(x^2 + c\right)^2 + c$ tenga solución que no satisfaga $x = x^2 + c$, esto es, los valores de c para los que $x^2 + x + c + 1 = 0$ tenga solución: $c \leq -\frac{3}{4}$.

Ejercicios 7.2.5 Página 239

1. Basta reemplazar y comprobar que se satisface la ecuación.

$2b$. $x_t = c_1(-2)^t + c_2(-3)^t$.

Ejercicios 7.2.8 Página 249

1. El precio de equilibrio estático es $\bar{p} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$ y el dinámico satisface la ecuación

$$\bar{p} + [\theta(b - c + \beta + \gamma) - 1]\bar{p} + \theta(c - \gamma)\bar{p} = \theta(a + \alpha).$$

Equivalente a

$$\begin{aligned}[1 + \theta(b - c + \beta + \gamma) - 1 + \theta(c - \gamma)]\bar{p} &= [\theta(b - c + \beta + \gamma) + \theta(c - \gamma)]\bar{p} \\ &= \theta(b + \beta)\bar{p} = \theta(a + \alpha)\end{aligned}$$

tiene la misma solución.

$3b$. La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$x_t^h = c_1(-2)^t + c_2(-3)^t,$$

por lo tanto, la forma de la solución particular es

$$x_t^p = at(-2)^t + b3^t.$$

Para encontrar los valores de a y b se reemplaza en la ecuación,

$$\begin{aligned}x_{t+2}^p + 5x_{t+1}^p + 6x_t^p &= \left(a(t+2)(-2)^{t+2} + b3^{t+2}\right) \\ &+ 5\left(a(t+1)(-2)^{t+1} + b3^{t+1}\right) + 6\left(at(-2)^t + b3^t\right) \\ &= \left(4a(t+2)(-2)^t + 9b3^t\right) + 5\left(-2a(t+1)(-2)^t + 3b3^t\right) \\ &+ 6\left(at(-2)^t + b3^t\right) \\ &= (4 - 10 + 6)\,at(-2)^t + (8 - 10)\,a(-2)^t + (9 + 15 + 6)\,b3^t \\ &= -2a(-2)^t + 30b3^t = (-2)^t + 3^t,\end{aligned}$$

de donde, $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{30}$, y la solución general de la ecuación es

$$\begin{aligned}x_t &= c_1(-2)^t + c_2(-3)^t - \frac{t(-2)^t}{2} + \frac{3^t}{30} \\ &= c_1(-2)^t + c_2(-3)^t + t(-2)^{t-1} + \frac{3^t}{30}.\end{aligned}$$

Los valores de c_1 y c_2 se encuentran con las condiciones iniciales.

Ejercicios 7.4 Página 255

7. Ver el capítulo 9.

Ejercicios 8.1.3 Página 273

2a. La ecuación es separable $\frac{dx}{dt} = \frac{2t+3}{2-2x}$ o $(2-2x)dx = (2t+3)dt$.
2g. Equivale a $e^{-x}dx = e^t dt$.
3b. Los puntos de equilibrioson las soluciones de $x(3-x)(3+x) = 0$, esto es, $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$. La derivada de $f(x) = 9x - x^3$, $f'(x) = 9 - 3x^2$ calculada en cada punto de equilibrio determina el comportamiento de los puntos: $f'(0) = 9 > 0$, $x = 0$ es inestable; $f'(3) = -18 < 0$, $x = 3$ es estable y $f'(-3) = -18 < 0$, $x = -3$ es estable.
6. $C^* = rK^* + wL^*$ por las condiciones necesarias de optimalidad $r = \lambda Q_K$ y $w = \lambda Q_L$, por lo tanto

$$C^* = K^*\lambda Q_K + L^*\lambda Q_L.$$

Por la ayuda

$$C^* = \lambda\left[Q_K K^* + Q_L L^*\right] = \lambda\alpha q$$

y por el teorema de la envolvente $\lambda = C_q^*$. De lo anterior

$$C^* = \frac{dC^*}{dq}\alpha q$$

que es una ecuación diferencial separable, su solución dá los resultados del ejercicio.

Ejercicios 8.2.2 Página 295

7. Los puntos de equilibrio del sistema son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} a^2x - x^3 - y = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

reemplazando la segunda ecuación en la primera esta se reduce a

$$a^2x - x^3 - x = (a^2-1)x - x^3 = x\left((a^2-1) - x^2\right) = 0,$$

los puntos de equilibrio son: $(0,0), \left(\pm\sqrt{a^2-1}, \pm\sqrt{a^2-1}\right)$, para $a^2 > 1$. La jacobiana del sistema

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a^2 - 3x^2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calculada en cada uno

$$J(0,0)=\begin{pmatrix}a^2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad J\left(\pm\sqrt{a^2-1},\pm\sqrt{a^2-1}\right)=\begin{pmatrix}3-2a^2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

tienen traza y determinante

$$\operatorname{tr}\left(J(0,0)\right)=a^2-1,\quad |J(0,0)|=1-a^2$$

y

$$\operatorname{tr}\left(J\left(\pm\sqrt{a^2-1},\pm\sqrt{a^2-1}\right)\right)=2(1-a^2),$$

$$\left|J\left(\pm\sqrt{a^2-1},\pm\sqrt{a^2-1}\right)\right|=2(a^2-1).$$

Como $|J(0,0)|=1-a^2<0$, $(0,0)$ es punto de silla. Para los otros

$$\operatorname{tr}^2(J)-4|J|=4(1-a^2)^2-8(a^2-1)=4(1-a^2)(3-a^2)$$

el primer factor es negativo, por lo tanto si $a^2>3$ los puntos son nodos estables: las raíces del polinomio característico son reales distintas negativas. Y si $a^2<3$ los puntos son espirales estables: las raíces del polinomio característico son complejas conjugadas con parte real negativa.

Ejercicios 10.1.2 Página 333

1. Basta con calcular $\frac{d(f-\dot{x}f_{\dot{x}})}{dt}$.
$4a$. $x(t)=ae^{\sqrt{2}t}+be^{-\sqrt{2}t}$.
$4b$. El sistema a solucionar para encontrar a y b es

$$\begin{cases}x(1)=ae^{\sqrt{2}}+be^{-\sqrt{2}}=2\\ x(4)=ae^{\sqrt{2}4}+be^{-\sqrt{2}4}=3.\end{cases}$$

$9a$. $x(t)=ae^{\frac{t}{\sqrt{2}}}+be^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{2}$.

Ejercicios 10.2.4 Página 357

$2a$.

$$\begin{cases}H_x^D=\delta-x-z=r\mu-\dot{\mu}\\ H_z^D=-x-z+\alpha\mu=0\\ H_\mu^D=\alpha z+\beta=\dot{x},\end{cases}$$

eliminando z equivale a

$$\begin{cases} \dot{\mu} = (r+\alpha)\mu - \delta \\ \dot{x} = \alpha^2\mu - \alpha x + \beta. \end{cases}$$

Para este sistema

$$\mathrm{tr}(J) - 4|J| = r^2 + 4(r+\alpha)\alpha = (r+2\alpha)^2 \geq 0,$$

por lo tanto el sistema tiene raíces reales y su punto de equilibrio es un nodo o un punto de silla.

$2b$. Si $\alpha > 0$ y $(r+\alpha)\alpha > 0$, la senda de convergencia es $\mathrm{Gen}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$5a$. $x(t) = ae^{\frac{t}{\sqrt{2}}} + be^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}$.

Bibliografía

[Az] Azariadis, Costas, *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell, Oxford, 1993.

[B] Barbolla, R., E. Cerdá y P. Sanz, *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*, Prentice Hall, Madrid, 2001.

[B y S] Barbolla y Sanz, P., *'Algebra lineal y teoría de matrices*, Prentice Hall, Madrid, 1998.

[B y C] Berndt y Christensen, "The translog function and the substitution of equipment, structures, and labor in U.S. manufacturing 1962-68", *Journal of Econometrics* 1(1973), pp. 81-114.

[B y D] Boyce, W. y R. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, Inc., Singapur, 1992.

[B y R] Blackorby, C. y R. Russell, "Will the real elasticity of substitution please stand up? (a comparison of the Allen/Uzawa and Morishima elasticities)", *The American Economic Review*, septiembre, 1989, pp. 882-88.

[Ca] Caputo, Michael R., *Foundations of Dynamic Economic analysis*, Cambridge University Press, 2005.

[C] Carter, Michael, *Foundations of Mathematical Economics*, The MIT Press, Cambridge, 2001.

[Ch] Chiang, Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática*, McGraw-Hill, 1987.

[De La F] De La Fuente, Ángel, *Mathematical Methods and Models for Economists*, Cambridge University Press, 2000.

[G-P1] González, Jorge Iván y Arsenio Pecha, "La dinámica en economía, los enfoques de Hicks y Samuelson", *Cuadernos de economía* 23, 1995, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[G-P2] González, Jorge Iván y Arsenio Pecha, "Tasa de equilibrio intertemporal, equilibrio y estabilidad", *Cuadernos de economía* 32, 2000, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[G y L] Guilkey, D. K. y C. A. K. Lovell, "On the flexibility of the translog approximation", *International Economic Review*, Vol. 21, No.1, Febrero, 1980, pp. 137-47.

[Ka] Kamien, Morton I, y Nancy L. Schwartz, *Dinamic Optimization*, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[Kr] Kreps, David M., *Notes on the theory of choice*, Westview Press, Boulder, 1988.

[K] Kuga, K., "On the symmetry of Robinson elasticities of substitution: the general case", *Rewiev of Economic Studies* 46, 1979, pp. 527-31.

[L] Lambert, Peter J., *Advanced Mathematics for Economists: Static and Dynamic Optimization*, Basil Blackwell, 1985.

[Lu] Luenberger, David G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1965.

[M] Madden, Paul, *Concavidad y optimización en microeconomía*, Alianza Editorial, Madrid, 1987.

[McF] Mc Fadden, D., "Constant elasticity of substitution production functions", *Rewiev of Economic Studies* 31, 1963, pp. 73-83.

[M y L] Medio, Alfredo y Marji Lines, *Nonlinear Dynamics: A Primer*, Cambridge University Press, 2001.

[Mo] Moore, James C., *Mathematical methods for economic theory 1*, Springer-Verlag Berlin, 1999.

[Mu] Murata, Yasuo, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, New York, 1977.

[R] Revankar, N. S., "A class of variable elasticity of substitution production functions", *Econometrica*, Vol. 39, No. 1, enero, 1971.

[S] Samuelson, Paul A., *Fundamentos del análisis económico*, Ed. El Ateneo, Buenos Aires, 1977.

[Sa] Sato, K., "A two-level constant-elasticity-of-substitution production function", *Rewiev of Economic Studies*, 1967, pp. 201-18.

[S y K] Sato, R. y T. Koizumi, "On the elasticities of substitution and complementarity", *Oxford Economic Papers* 25, 1973, pp. 44-56.

[Se] Sengupta, Jati K. y Phillip Fanchon, *Control Theory Methods in Economic*, Kluber Academic Publishers, Norwell, 1997.

[Si] Silbelberg, Eugene, *The Structure of Economics: a Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1990.

[Sim] Simmons, George F., *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill, Madrid, 1993.

[Su] Sundaram, Rangarajan K., *A First Course in Optimization Theory*, McGraw-Hill, Cambridge University Press, 1999.

[U] Uzawa, H.,"Production functions with constant elasticities of substitution", *Rewiev of Economic Studies* 29, 1962, pp. 291-99.

[V] Varian, *Análisis microeconómico*, Antoni Bosch Editor, Barcelona, 1992.

[Y] Yohe, G. W., *Exercises and Applications for Microeconomic Analysis*, Norton & Company, New York, 1983.

Índice alfabético