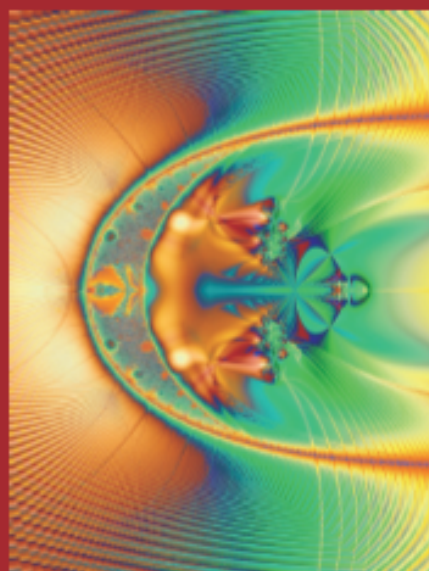


colección **textos**

ELEMENTOS DE MECÁNICA MATEMÁTICA

Víctor A. Eremeyev
Leonid P. Lebedev
Leonardo Rendón Arbeláez



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS

ELEMENTOS DE MECÁNICA MATEMÁTICA

Elementos de Mecánica Matemática

Temas de Matemáticas Aplicadas

Victor A. Eremeyev

Leonid P. Lebedev

Leonardo Rendón Arbeláez

Bogotá D.C., Colombia, 2013

- © Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
- © Victor A. Eremeyev
Otto von Guericke University Magdeburg, Germany
South Sci Center of RASci & South Federal University, Rostov on Don, Russia
- © Leonid P. Lebedev
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia
- © Leonardo Rendón Arbeláez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia

ISBN 978-958-761-388-9

Primera edición, 2013

PREPARACIÓN EDITORIAL:

Coordinación de publicaciones, Facultad de Ciencias
Páginas interiores compuestas en LaTeX por los autores

CUBIERTA:

María Alejandra Ossa

IMPRESIÓN:

Proceditor Ltda., Bogotá, Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Bogotá D.C., Colombia.

Eremeyev, Victor A.
Elementos de mecánica matemática / Victor A. Eremeyev,
Leonid P. Lebedev, Leonardo Rendón Arbeláez. – 1ª. ed. – Bogotá:
Universidad Nacional de Colombia, 2013
p. – (Notas de clase)

ISBN 978-958-761-388-9

1. Mecánica – Modelos matemáticos 2. Física matemática I.
Lebedev, Leonid P. II. Rendón Arbeláez, Leonardo III. Título IV.
Serie

CDD: 531 ed. 20

CO-BoBN- a832255

Contenido

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1. Elementos del Cálculo Variacional | 7 |
| 1.1. Problema del mínimo de funciones y funcionales | 7 |
| 1.2. El problema del mínimo del funcional principal | 9 |
| 1.3. Lema fundamental del cálculo variacional | 12 |
| 1.4. Ecuación de Euler | 14 |
| 1.5. Condiciones naturales en la frontera | 15 |
| 1.6. Puntos singulares del funcional | 17 |
| 1.7. Dos problemas de extremo y notas generales | 20 |
| 1.8. Funcional que depende de $y^{(n)}, n > 1$ | 23 |
| 1.9. Un problema compuesto de mínimo | 27 |
| 1.10. Problema de mínimo: funcional dependiendo de una función en varias variables | 29 |
| 1.11. Funcional cuadrático en un espacio de Hilbert | 31 |
| 1.12. Sobre espacios de Sóbolev | 33 |
| 1.13. Problemas | 36 |
| 2. Algunos Modelos Elementales de Mecánica | 39 |
| 2.1. Equilibrio del resorte | 40 |
| 2.2. Las ecuaciones de equilibrio | 42 |
| 2.3. Una barra prismática sometida a una carga axial | 44 |
| 2.4. Soluciones energéticas para una barra | 52 |
| 2.5. Algunas notas generales | 57 |
| 2.6. Problemas compuestos | 58 |
| 2.7. Un modelo de la viga | 62 |

| | |
|--|------------|
| 2.8. Problemas del equilibrio para la viga | 70 |
| 2.9. Problemas | 75 |
| 3. Elementos del Análisis Tensorial | 85 |
| 3.1. Vectores y operaciones con vectores | 85 |
| 3.2. Tensores y acciones para los tensores | 89 |
| 3.3. Los campos tensoriales | 99 |
| 3.4. Superficies y curvas espaciales | 106 |
| 3.5. Problemas | 115 |
| 4. Problemas Multidimensionales de Equilibrio | 119 |
| 4.1. Relaciones principales en la teoría de membrana | 119 |
| 4.2. Problema de Dirichlet | 122 |
| 4.3. Problema de Neumann | 125 |
| 4.4. Problemas | 128 |
| 5. Teoría de la Elasticidad | 137 |
| 5.1. Deformación | 138 |
| 5.2. Tensiones y las ecuaciones de equilibrio | 142 |
| 5.3. Las ecuaciones de movimiento | 147 |
| 5.4. La ley de Hooke | 149 |
| 5.5. Ley de Hooke para un cuerpo anisotrópico | 154 |
| 5.6. Ecuaciones de equilibrio en desplazamientos | 157 |
| 5.7. Condiciones iniciales y en la frontera | 159 |
| 5.8. Problema de las frecuencias propias | 160 |
| 5.9. Formulación variacional de los problemas de equilibrio . | 161 |
| 5.10. Desigualdad de Korn | 162 |
| 5.11. Solución generalizada del problema mixto de equilibrio | 164 |
| 5.12. Problemas | 167 |
| 6. Anexos | 175 |
| A. Sobre el Cálculo Variacional | 177 |
| A.1. Problema del mínimo | 177 |

| | |
|--|------------|
| B. Las Fórmulas Integrales del Cálculo y Sus Extensiones | |
| Tensoriales | 181 |
| B.1. Desde la fórmula de Newton–Leibnitz a la fórmula de Stokes | 181 |
| B.2. Las fórmulas integrales en las notaciones tensoriales . . | 184 |
| B.3. El teorema de la divergencia superficial | 185 |

Prefacio

Estas notas de clase surgen con charlas y seminarios dictados por el primer autor a profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. Fueron complementadas con la visita del primer autor al Departamento y ampliadas con diversas actividades académicas realizadas por los autores en un periodo de tres años.

Los autores manifestamos nuestro agradecimiento a la profesora Myriam Leonor Campos Flórez, directora del Departamento, por su constante apoyo; igualmente, al profesor Ignacio Mantilla, Decano de la Facultad de Ciencias, por su colaboración con los intercambios académicos. Al estudiante John Freddy Mateus le manifestamos nuestro agradecimiento por las ayudas técnicas y al profesor Héctor Mora Escobar por algunas sugerencias y correcciones. Igualmente nos gustaría hacer un reconocimiento especial a los evaluadores de estas notas por sus valiosas sugerencias y comentarios. Con el Profesor Roberto Martínez tuvimos la oportunidad de realizar una fructífera comunicación personal.

Victor A. Eremeyev
*Otto von Guericke University Magdeburg, Germany,
South Scientific Center of RASci &
South Federal University, Rostov on Don, Russia*

Leonid P. Lebedev
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Leonardo Rendón Arbeláez
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Introducción

El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace es hallar una función $u = u(x, y), (x, y) \in S$ que satisfaga las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } S, \quad u|_{\Gamma} = \varphi, \quad (0.0.1)$$

donde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, S es un dominio en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ es suficientemente suave¹ y φ una función definida en Γ , ver la figura 1.

Si existe una solución u para el problema de Dirichlet, entonces u es una función analítica en el dominio abierto S y además u es única. Si adicionalmente u es tal que la integral de Dirichlet

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_S \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy$$

es finita, entonces el problema de Dirichlet es equivalente a la solución del problema del mínimo del funcional $D(u)$ sobre el conjunto de las funciones con derivadas continuas de orden menor o igual que 2 en el dominio abierto S , tales que $D(u)$ es finito y satisface $u|_{\Gamma} = \varphi$ en la frontera. Más adelante probaremos este hecho.

La relación entre los problemas, (0.0.1) y el problema del mínimo de $D(u)$, no es solo una consecuencia formal de una cadena de transformadas, adquiere significado físico si consideramos el problema de

¹Vamos a decir que la frontera es suficientemente suave si sobre Ω podemos utilizar la fórmula de integración por partes para integrales definidas. Además en el problema de existencia de soluciones suponemos que el teorema de inmersión de Sóbolev es válido para lo que es suficiente que S tenga la propiedad del cono, explicaremos esto mas adelante. Usualmente suponemos que S es continuamente diferenciable a trozos.

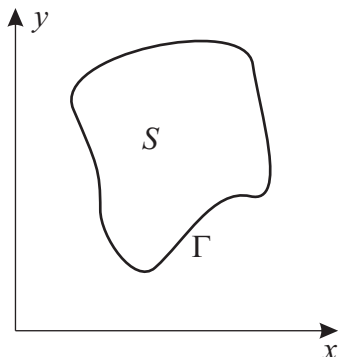


Figura 1: Dominio S en \mathbb{R}^2 .

Dirichlet como el modelo matemático del equilibrio de una membrana plana con una frontera dada. Además, el problema variacional describe el equilibrio de la misma membrana con frontera fija desde el punto de vista del principio del mínimo de la energía potencial total de la membrana.

Actualmente no hay ninguna preferencia entre una u otra formulación del problema. Otro problema de la física matemática es el *Problema de Neumann*: debemos buscar una solución u de la misma ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{en } S$$

pero con la siguiente condición de tipo Neumann en la frontera

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \psi,$$

donde \mathbf{n} es la normal externa a Γ y ψ es definida sobre Γ . Las soluciones al problema de Neumann son analíticas en S pero no son únicas: $u(x, y) + c$ es una solución para todo c constante. En física matemática se concluye que si una solución u existe entonces

$$\int_{\Gamma} \psi \, ds = 0. \tag{0.0.2}$$

Esta condición es consecuencia de una cadena de transformaciones y no tiene una explicación clara en matemáticas. Además, no es claro

como extender la condición a otros problemas de tipo Neumann para otras ecuaciones. Pero la ecuación (0.0.2) es la condición del equilibrio de la membrana vista como un cuerpo rígido y por ello tiene significado mecánico.

Consideremos el problema variacional que corresponde al problema de Neumann. Para un matemático puro, no para un físico, puede parecer extraño que cambiemos el problema del mínimo del funcional $D(u)$ por el problema del mínimo del funcional

$$E(u) = D(u) - \int_{\Gamma} \psi u \, ds.$$

Además, consideramos el mínimo de $E(u)$ sobre el conjunto de las funciones de $C^{(2)}(S)$ y no introducimos para las funciones ninguna condición en la frontera del dominio S . En este caso, si u es un punto de mínimo de E suficientemente suave, entonces u satisface la ecuación de Laplace en S y la condición (0.0.2). Además, si el problema del mínimo tiene una solución entonces (0.0.2) es válida, esto es, la misma condición que se planteó en el problema de Neumann.

La explicación del porqué debemos cambiar la forma del funcional viene del principio del mínimo de la energía potencial total, el cual es difícil de elaborar solo usando transformaciones formales.

En los párrafos anteriores se ve la relación entre el problema de Neumann y el problema variacional. Las relaciones de este tipo son comunes en mecánica. Ellas nos permiten estudiar problemas matemáticos desde otro punto de vista. De esta manera, en matemáticas, se aplican métodos e ideas modernas relacionadas con el problema variacional tales como soluciones generalizadas, técnica de los espacios de Sóbolev, métodos de análisis funcional para planteamiento de problemas y estudio de soluciones.

En mecánica, el estudio de los problemas empieza con una modelación, para posteriormente usar las herramientas matemáticas con una visión mecánica. Una parte del estudio de los problemas mecánicos, que pertenece a la matemática pura, contiene los siguientes pasos:

1. Formulación de modelos matemáticos que normalmente son problemas con valores en la frontera e iniciales;

2. Estudio de propiedades de un modelo matemático y su solución;
3. Elaboración, adecuación y estudio de métodos numéricos para buscar la solución del problema.

En todos estos pasos la participación de los matemáticos es necesaria, pero el problema para los matemáticos es que el trabajo es difícil sin el conocimiento de algunos aspectos de mecánica. Por otro lado, los ingenieros para quienes los matemáticos hacen este trabajo deben entender los resultados de los matemáticos. El objetivo de estas notas es relacionar el conocimiento de ambos grupos de investigadores.

Ya hemos hablado acerca de dos planteamientos de un problema de mecánica relacionados con principios físicos. Pero hay muchas otras técnicas que se utilizan en estudios mecánicos y que pueden ser parte, al parecer, de la matemática pura de hoy.

Uno de los problemas matemáticos en mecánica es el problema de existencia de una solución del problema de Dirichlet. Dirichlet propuso resolverlo usando el método variacional. El funcional $D(u)$ tiene valores no-negativos y entonces es claro que, sobre el conjunto de funciones admisibles (ver párrafos anteriores), es acotado inferiormente: $D(u) \geq d \geq 0$. Hay una sucesión de funciones admisibles u_n tal que $D(u_n) \rightarrow d$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dirichlet anunció que es claro que la sucesión converge a alguna función y entonces la solución del problema existe. Su “es claro” fue interpretado como propiedad de convergencia, esto es:

$$D(u_n - u_m) \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Algún tiempo después Weierstrass demostró que no es claro si existe una función suave que sea el límite de la sucesión $\{u_n\}$, y fueron, además, construidos algunos ejemplos en el que el límite suave no existe. Por mucho tiempo la demostración de Dirichlet fue un ejemplo de cuán grave es decir “es claro”, hasta el momento cuando Sergey L’vovich Sóbolev, matemático ruso, introdujo derivadas generalizadas, soluciones generalizadas y los espacios que hoy tienen su nombre. Esa nueva técnica de Sóbolev permite explicar el sentido de la prueba de Dirichlet usando métodos modernos de análisis funcional e integrales de Lebesgue, que antes de Sóbolev fueron usados sólo en matemática pura.

Puede ser que la técnica de espacios de Sóbolev sólo sea una técnica para matemáticos, pero ahora nos damos cuenta que es la única manera de poder explicar los resultados del método de elementos finitos que los ingenieros usaban para sus diseños. De ahí en adelante la técnica de Sóbolev se convirtió en parte fundamental de la física matemática.

Es interesante que las raíces del método de elementos finitos estén en el mismo problema del mínimo de energía que usaba Dirichlet para su demostración. El origen del método de elementos finitos sea el método que propuso el físico W. Ritz. En su método se buscan soluciones aproximadas de problemas de mecánica como puntos del mínimo del funcional de energía sobre un subespacio de funciones admisibles de dimensión finita. Para el problema de Dirichlet, según Ritz, se necesita encontrar una función \tilde{u} que tome los valores de u en la frontera $\tilde{u}|_{\Gamma} = \varphi$, entonces \tilde{u} es una función dada, y se debe introducir una base de funciones e_1, \dots, e_n que tomen el valor cero en la frontera $e_k|_{\Gamma} = 0, k = 1, \dots, n$. Una solución aproximada por Ritz se busca sobre el conjunto de funciones de la forma:

$$u_n = \tilde{u} + \sum_{k=1}^n c_k e_k$$

con coeficientes numéricos c_k . El problema es hallar los c_k que minimizan $D(u_n)$. El problema se reduce entonces, a un problema algebraico y presenta resultados prácticos. De nuevo, queremos destacar que el método nació en mecánica pero su comportamiento y justificación fue trabajo de la matemática pura.

Este libro busca reunir a los matemáticos e ingenieros que tengan un interés común en los problemas de mecánica, pero que han perdido un lenguaje común.

Capítulo 1

Elementos del Cálculo Variacional

1.1. Problema del mínimo de funciones y funcionales

Uno de los puntos principales de este libro es el principio de mínimo de la energía potencial total. En mecánica clásica y elemental la energía se expresa en función de los parámetros del sistema mecánico. En mecánica continua esta expresión tiene la forma de la suma de las integrales sobre el volumen del cuerpo y sus integrandos son funciones de los parámetros de los procesos que actúan en el volumen. La energía potencial total para cuerpos elásticos toma valores numéricos reales, así, tiene sentido el principio de mínimo de la energía. En mecánica continua la energía no es una función pero sí un objeto más general, un *funcional* cuyos argumentos son algunas funciones de los parámetros de procesos en el cuerpo.

El problema de la determinación del mínimo de una función en una variable se resuelve de una manera fácil: si f toma un valor de mínimo en el punto x_0 y es derivable, entonces necesariamente

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 0.$$

Consideremos $f(x_0 + t)$ como una función de t . Es claro que esta

función toma el valor de mínimo cuando $t = 0$. Entonces la condición para obtener un mínimo se puede reescribir como

$$\left. \frac{df(x_0 + t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Esta nueva forma de calcular el mínimo es muy útil para extender la condición a las funciones de varias variables y a funcionales. Por ejemplo, si una función f cuyo argumento vectorial es $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ toma un valor mínimo en un punto \mathbf{x} , f es diferenciable y, además, si \mathbf{a} es un vector fijo entonces $f(\mathbf{x} + t\mathbf{a})$ es una función en la variable t que tiene un mínimo cuando $t = 0$. Entonces

$$\left. \frac{df(\mathbf{x} + t\mathbf{a})}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

De esta manera tenemos que todas las derivadas direccionales en el punto \mathbf{x} son cero. Si hacemos $\mathbf{a} = \mathbf{i}_k$, donde \mathbf{i}_k son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n , entonces todas las derivadas parciales de primer orden de f son cero en el punto \mathbf{x} .

Como fue dicho, un funcional es una función de algún conjunto de parámetros que pueden ser funciones con valores reales \mathbb{R} . Podemos considerar estos parámetros como elementos y de algún espacio, usualmente un espacio de Banach B , de esta manera un funcional es un operador $F : B \rightarrow \mathbb{R}$. La idea intuitiva del mínimo del funcional F es que y es un punto de mínimo si $F(y) \leq F(z)$ para todo z alrededor de y , entonces podemos usar la misma técnica utilizada anteriormente. Esto es, para y y z fijos $F(y + tz)$ es una función en la variable real t que tiene un mínimo en el punto $t = 0$. Si $F(y + tz)$ es derivable en $t = 0$ entonces

$$\left. \frac{dF(y + tz)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \tag{1.1.1}$$

La expresión de la izquierda se denomina la *derivada funcional en el sentido de Gateaux de F en el punto y* . La igualdad (1.1.1) es una condición necesaria del mínimo del funcional, puede ser extendida a funcionales sobre cualquier espacio lineal. Sólo debemos formalizar la definición de qué es un punto de mínimo de un funcional. La definición

es una reescritura de la definición del punto de mínimo de una función reemplazando el símbolo de valor absoluto ($|\cdot|$) por el símbolo de norma ($\|\cdot\|$).

Recordemos que y es un punto de mínimo global de F si $F(y) \leq F(z)$ para todo $z \in B$. y es un punto de mínimo local de F si existe un valor $\varepsilon > 0$ tal que $F(y) \leq F(y+z)$ para todo z tal que $\|z\| < \varepsilon$.

1.2. El problema del mínimo del funcional principal

En la historia del cálculo variacional aparecen como nombres importantes los de Leonardo Euler (1707-1783) y Joseph L. Lagrange (1736-1813). Euler elaboró las principales técnicas del cálculo para el llamado funcional principal

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

y Lagrange introdujo la mecánica llamada Lagrangiana que está basada en el cálculo variacional. Mencionamos estos nombres porque sus trabajos en el área son imposibles de separar de la mecánica, además, en la historia de la mecánica y el cálculo variacional de los siglos *XVII* – *XIX* el lector puede encontrar a casi todos los matemáticos y físicos famosos de ese tiempo.

Estudiaremos el problema de la determinación del mínimo del funcional principal. Se busca un punto de mínimo de F sobre el conjunto C_0 que consiste de las funciones de $C^{(2)}([a, b])$ que satisfacen las siguientes condiciones en la frontera:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

donde y_a y y_b están dados. Las funciones del conjunto C_0 se denominan funciones admisibles para el problema. Nótese que C_0 es el dominio en el cual solucionamos el problema del mínimo de F . Este dominio no es un espacio lineal, es un cono en $C^{(2)}([a, b])$. Recordemos que $C^{(k)}([a, b])$

denota el conjunto de funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ con derivadas hasta de orden k y de norma

$$\|y\|_{C^{(k)}} = \max_{x \in [a, b]} \max \left\{ |y(x)|, |y'(x)|, \dots, |y^{(k)}(x)| \right\}.$$

Suponemos por simplicidad que $f(x, y, z)$ y sus derivadas parciales hasta orden dos son continuas en todos los puntos.

Supongamos además, que existe un punto mínimo $y \in C_0$ de F . En este capítulo buscaremos las condiciones que debe satisfacer y . La suposición de la existencia de y puede llevar a contradicciones como lo ilustra la paradoja de Perron¹. Para el problema del mínimo de F en la clase de funciones C_0 las condiciones se reducen a la ecuación de Euler para el funcional F .

Pareciera ser que en la definición del punto local del mínimo de F sea natural tomar la norma del espacio $C^{(2)}([a, b])$. Pero históricamente, para la definición se usaban otras dos normas. Una de ellas es la norma del espacio $C([a, b])$. En este caso el punto de mínimo local se denomina *fuerte*; la otra norma es la del espacio $C^{(1)}([a, b])$, esta vez el punto de mínimo local se denomina *débil*. Es claro que un punto de mínimo local fuerte es también un punto de mínimo local débil, pero un punto de mínimo local débil puede no ser un punto de mínimo local fuerte. Si un punto de mínimo local es débil o fuerte, en ambos casos es un punto de mínimo si en la definición usamos la norma del espacio $C^{(2)}([a, b])$.

Para usar la ecuación (1.1.1) para F consideremos el conjunto de funciones de la forma $y(x) + th(x)$ donde t es un parámetro real y $h(x)$ es una función arbitraria pero fija. Todas las funciones $y + th$ pertenecen a C_0 , por eso $h \in C^{(2)}([a, b])$ y además

$$h(a) = 0, \quad h(b) = 0. \quad (1.2.1)$$

Denotamos el subespacio de $C^{(2)}([a, b])$ de las funciones que satisfacen las condiciones (1.2.1) por C_{00} . Para cada punto de mínimo y la

¹*Paradoja de Perron*. Supongamos que existe un número entero N mayor que todos los números. Como N es el mayor de todos, entonces N^2 , que es entero también, satisface la desigualdad $N^2 \leq N$; pero las soluciones no-negativas de la desigualdad pertenecen al segmento $[0, 1]$ y entonces $N = 1$. El punto de contradicción es la suposición de existencia del objeto N , que no existe!.

ecuación (1.1.1) toma la forma

$$\left. \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)) \right|_{t=0} = 0$$

que es válida para todo $h \in C_{00}$. Diferenciando sobre el símbolo de la integral con respecto a t y usando la regla de cadena tenemos que

$$\int_a^b (f_y(x, y(x), y'(x))h(x) + f_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x)) dx = 0, \quad (1.2.2)$$

donde

$$f_y(x, y(x), y'(x)) = \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, y') \right|_{y=y(x), y'=y'(x)}$$

y

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \left. \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y, y') \right|_{y=y(x), y'=y'(x)}.$$

En las derivadas anteriores consideremos $f(x, y, y')$ como una función en tres variables independientes x, y y y' . Integrando por partes obtenemos

$$\int_a^b f_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x) dx = - \int_a^b h(x) \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)), dx$$

donde d/dx es la derivada completa con respecto a x y $y = y(x), y' = y'(x)$. Aquí los otros miembros desaparecen porque $h(a) = h(b) = 0$. Entonces la ecuación (1.2.2) sería

$$\int_a^b \left(f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \right) h(x) dx = 0. \quad (1.2.3)$$

La ecuación (1.2.3) es válida para todo $h \in C_{00}$. De acuerdo al teorema tradicionalmente llamado *El lema fundamental del cálculo variacional* (ver abajo) tenemos que

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in (a, b). \quad (1.2.4)$$

La ecuación (1.2.4) se denomina *ecuación de Euler del funcional F* , y es análoga a la ecuación de Fermat $f'(x) = 0$ para un punto x de

mínimo de la función $y = f(x)$. La ecuación (1.2.4) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden la cual define que el número de condiciones de Dirichlet en la frontera es dos.

Antes de formular y probar el lema fundamental notamos que cuando el cálculo variacional inició, la derivación de la ecuación de Euler y su solución fueron pasos principales del problema del mínimo de F . Recientemente se entendió que la ecuación (1.2.2), que es válida para todo $h \in C_{00}$, tiene su propio significado. Este significado inició la teoría de soluciones generalizadas, espacios de Sóbolev y otras partes de la teoría moderna de ecuaciones diferenciales.

1.3. Lema fundamental del cálculo variacional

Abajo se verá este lema cuando h es de una clase más suave que C_{00} .

Definición 1.1. $\mathcal{D}(a, b)$ es el conjunto de las funciones de clase $C^{(\infty)}([a, b])$ que se anulan, junto con todas sus derivadas, en los puntos a y b .

Una de las formas posibles del Lema Principal del cálculo variacional es

Lema 1.1. *Sea una función g continua a trozos en (a, b) y tal que*

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0 \quad (1.3.1)$$

para todo $h \in \mathcal{D}(a, b)$, entonces g se anula en todos los puntos donde es continua.

Demostración. Supongamos que g es continua en el punto $c \in (a, b)$ y que $g(c) \neq 0$, esto es, que $g(c) = d > 0$ para algún $d \in \mathbb{R}$. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x - c| \leq \varepsilon$, tenemos que $g(x) \geq d/2$. Seleccionemos

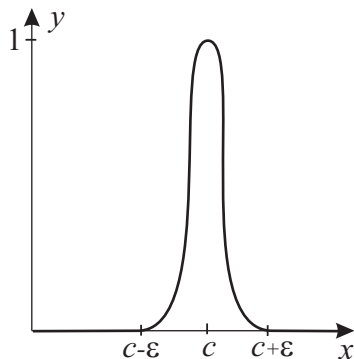


Figura 1.1: Función con forma de campana.

una función $h_\varepsilon \in \mathcal{D}(a, b)$, tal que para $h = h_\varepsilon$ la ecuación (1.3.1) no sea válida. Tomemos

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{(x-c)^2 - \varepsilon^2}}, & \text{si } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \\ 0, & \text{si } x \notin (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \end{cases}.$$

La función está representada en la figura 1.1. Es fácil ver que $h_\varepsilon \in \mathcal{D}(a, b)$ es cero fuera de $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ y es positiva en todo punto de $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Entonces

$$\int_a^b g(x) h_\varepsilon(x) dx = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} g(x) h_\varepsilon(x) dx \geq \frac{d}{2} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} h_\varepsilon(x) dx > 0$$

que contradice la igualdad (1.3.1). \square

El lector debió notar que realmente no necesitamos tratar todas las funciones de $\mathcal{D}(a, b)$ en la expresión (1.3.1), es suficiente tomar un subconjunto de $\mathcal{D}(a, b)$ de funciones de forma de campana $h_\varepsilon(x)$. Podemos demostrar usando sólo el subconjunto de las funciones h que si para $g \in L^2(a, b)$ la igualdad (1.3.1) es válida para todas las funciones de la forma de campana, entonces g es cero en casi todos los puntos de (a, b) . Existen otras versiones del lema fundamental, una de ellas pertenece a Emil du Bois-Reimond quien fue un oftalmólogo y matemático. En el siglo XIX era usual que los investigadores fueran expertos en varias áreas, como lo fue Hermann Von Helmholtz, médico y físico, que introdujo la ecuación clásica que lleva su nombre.

1.4. Ecuación de Euler

Por el lema fundamental, la ecuación (1.2.4) de Euler es válida en todos puntos de (a, b) donde la expresión

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x))$$

es continua. Entonces la siguiente ecuación es válida:

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Claro que en el caso cuando y es un punto de máximo de F sobre C_0 , la función y satisface la ecuación de Euler también. Tiene sentido considerar esta ecuación separadamente cuando y no es un punto de mínimo ni de máximo. Las soluciones de la ecuación de Euler son llamadas *extremales* del funcional F .

Consideraremos el problema del tipo Dirichlet para F . Después veremos que las soluciones de otros problemas de mínimo del funcional F satisfacen la misma ecuación.

Tomemos un ejemplo. Sea un funcional

$$F = \int_0^a (y'^2 + y^2 - 2y \sin x) dx. \quad (1.4.1)$$

Un punto de extremo de F está entre funciones con valores en la frontera

$y(0) = 0, y(a) = 1$. Aquí $f = y'^2 + y^2 - 2y \sin x$. De acuerdo a la ecuación de Euler, tenemos que y satisface la ecuación

$$y'' - y + \sin x = 0.$$

Se sugiere al lector resolver el problema con valores en la frontera $y(0) = 0, y(a) = 0$.

De un modo aleccionador, es útil considerar el mismo problema pero para el funcional $F = \int_0^\pi (y'^2 - y^2 - 2y \sin x) dx$ con valores en la frontera

$$y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

El lector debe recordar que en el cálculo variacional los problemas de extremo de un funcional se reducen a problemas para ecuaciones diferenciales con valores en la frontera y no a problemas con valores iniciales. Para el funcional F , dado por (1.4.1), la ecuación de Euler es de segundo orden. En el ejemplo anterior vemos que la ecuación es lineal. Es fácil ver que la ecuación de Euler es una ecuación lineal si f es una forma cuadrática de variables y y y' .

1.5. Condiciones naturales en la frontera: problema de tipo Neumann

Estamos interesados en saber cuales son las condiciones para que una función y sea un punto de mínimo del funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

sobre el conjunto de todas las funciones de $C^{(2)}([a, b])$. Dichas funciones no tienen ninguna restricción en los extremos de (a, b) . Vamos a demostrar que en este caso hay condiciones naturales en la frontera, una en el punto a y otra en b . Es claro que en el punto de extremo del problema con los extremos libres, la igualdad

$$\left. \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)) \right|_{t=0} = 0 \quad (1.5.1)$$

es válida también. La diferencia entre este problema y el problema de Dirichlet es que aquí $h \in C^{(2)}([a, b])$ es una función arbitraria, pero si restringimos el conjunto de las funciones admisibles sólo a C_{00} , entonces las consideraciones realizadas en la Sección 1.2 no cambian y eso significa que la ecuación de Euler (1.2.4) es válida para y :

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Usemos el hecho que en este problema el conjunto de las funciones admisibles $h \in C^{(2)}(a, b)$. Vale la pena observar que C_{00} es un subconjunto propio de $C^{(2)}(a, b)$. Integramos por partes en la ecuación

(1.2.2) que es la consecuencia de (1.5.1) para toda $h \in C^{(2)}([a, b])$. Haciendo esto tenemos que

$$\int_a^b \left(f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \right) h(x) dx + f_{y'}(x, y(x), y'(x)) h(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Pero debido a la ecuación de Euler, el integrando anterior es cero, no importa cual sea el $h \in C^{(2)}([a, b])$. Entonces tenemos que para toda h

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) h(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (1.5.2)$$

Tomemos $h(x) = x - b$ y después $h(x) = x - a$. Entonces

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \Big|_{x=a} = 0, \quad f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \Big|_{x=b} = 0. \quad (1.5.3)$$

Las dos condiciones en la frontera que tenemos aquí se llaman las *condiciones naturales* del problema de la determinación del mínimo del funcional F . En el ejemplo de la sección 1.4 las condiciones (1.5.3) toman la forma $y'(a) = 0, y'(b) = 0$. Más adelante, en muchos problemas de mecánica, veremos las condiciones naturales para el problema de la determinación del mínimo de la energía potencial total. En mecánica, las condiciones naturales se definen por los valores de las fuerzas exteriores que actúan en la frontera del dominio.

Consideremos el problema mixto del mínimo de F cuando en el punto a está definida $y(a) = y_0$ y en el punto b no hay restricciones para y . La repetición de las consideraciones de esta sección nos demuestran que la ecuación de Euler es válida para y en (a, b) . Aquí $h(a) = 0$ y entonces la ecuación (1.5.2) se reduce a la siguiente forma

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) h(x) \Big|_{x=b} = 0,$$

de donde tenemos la condición

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \Big|_{x=b} = 0.$$

La segunda condición en la frontera claramente es $y(a) = y_0$.

Entonces, cada vez que no hay restricciones en algún punto extremo del dominio, inmediatamente para la función del extremo tenemos una condición natural en este punto. Esto explica porque no podemos considerar para el problema del mínimo de F el caso cuando en el punto a se definen dos condiciones, $y(a) = y_0$ y $y(a) = y_1$. Aquí vamos a tener una tercera condición en el punto b y entonces para la ecuación de Euler, que es de segundo orden, hay tres condiciones adicionales. En el caso general este problema no tiene solución.

El lector debe notar que la construcción de las condiciones del mínimo del funcional tienen dos pasos. En el primer paso seleccionamos un subconjunto de las funciones admisibles, tal que deducimos la ecuación de Euler; en el segundo paso extendemos el conjunto de funciones admisibles, usamos el resultado del primer paso y deducimos las condiciones naturales. Vamos a usar este esquema de ahora en adelante.

Note que para el problema de Neumann para la ecuación de Laplace las condiciones naturales son las condiciones del tipo Neumann. Por eso para varios problemas de mecánica podemos llamar las condiciones naturales como las condiciones del tipo de Neumann.

1.6. Puntos singulares del funcional

Supongamos que el integrando del funcional, f , tiene un punto singular c , $a < c < b$, donde la solución del problema de mínimo pierde suavidad pero es continua. Vamos a cambiar la forma del funcional F de esta manera

$$G(y) = \int_a^c f(x, y(x), y'(x)) dx + \int_c^b g(x, y(x), y'(x)) dx + \phi(y(c)),$$

donde $a < c < b$. El funcional G refleja la situación en mecánica para construcciones compuestas cuando describen la energía de una construcción de tres objetos (por ejemplo, viga-resorte-viga) pero conservamos la continuidad de desplazamientos en los puntos de contacto de los objetos.

Suponemos que las funciones f , g y ϕ son suficientemente suaves en sus dominios. Vamos a buscar un punto de mínimo de G , una función y

tal que es continua sobre $[a, b]$, y pertenece a $C^{(2)}((a, c))$ y $C^{(2)}((c, b))$, y' puede tener un salto en el punto c .

Suponiendo como antes, que un punto de mínimo de la función y de G existe, tenemos que

$$\left. \frac{d}{dt} G(y + th) \right|_{t=0} = 0.$$

Aquí no restringimos el conjunto de las funciones h admisibles en los extremos y entonces esperamos tener para y las condiciones naturales en los puntos extremos a y b . El problema entonces, es encontrar la condición en el punto c . La clase de las funciones admisibles h y la clase de y son las mismas.

Esta vez la solución del problema tiene más pasos que antes. De la última relación tenemos que

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\int_a^c f(x, y + th, y' + th') dx + \int_c^b g(x, y + th, y' + th') dx + \phi(y(c) + th(c)) \right) \right|_{t=0} = 0$$

que se reduce a

$$\int_a^c (f_y(x, y, y')h + f_{y'}(x, y, y')h') dx + \int_c^b (g_y(x, y, y')h + g_{y'}(x, y, y')h') dx + \phi'_y(y(c))h(c) = 0.$$

Integraremos por partes sobre el signo de las integrales

$$\begin{aligned} & \int_a^c \left(f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') \right) h dx + f_{y'} h \Big|_{x=a}^{x=c-0} \\ & + \int_c^b \left(g_y(x, y, y')h - \frac{d}{dx} g_{y'}(x, y, y') \right) h dx + g_{y'} h \Big|_{x=c+0}^{x=b} \\ & + \phi'_y(y(c))h(c) = 0, \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

donde $c - 0$ significa el límite lateral izquierdo en c y $c + 0$ es el límite derecho.

En el primer paso tomamos en la ecuación (1.6.1) el conjunto de las h admisibles tales que $h(x) = 0$ cuando $x \in [b, c]$ y $h(a) = 0$. Entonces tenemos la situación de la derivación de la ecuación de Euler para F para el problema del tipo Dirichlet

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0, \quad x \in (a, c). \quad (1.6.2)$$

Seleccionamos otro subconjunto de las h admisibles tales que $h(x) = 0$ cuando $x \in [a, c]$ y $h(b) = 0$ en (1.6.1). De la misma manera tenemos que

$$g_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} g_{y'}(x, y, y') = 0, \quad x \in (c, b). \quad (1.6.3)$$

Entonces la ecuación de Euler es válida en $(a, c) \cup (c, b)$. Veamos otras consecuencias de la ecuación (1.6.1). Por las ecuaciones (1.6.2) y (1.6.3) los miembros con integrales en (1.6.1) son cero y (1.6.1) toma la forma

$$f_{y'} h \Big|_{x=a}^{x=c-0} + g_{y'} h \Big|_{x=c+0}^{x=b} + \phi'_y(y(c)) h(c) = 0.$$

Ahora seleccionamos h que se anule en los puntos c y b , entonces tenemos una de las condiciones naturales

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \Big|_{x=a} = 0.$$

Seleccionando h tal que $h(a) = 0$ y $h(c) = 0$ tenemos que

$$g_{y'}(x, y(x), y'(x)) \Big|_{x=b} = 0.$$

Ahora

$$\left(f_{y'} \Big|_{x=c-0} - g_{y'} \Big|_{x=c+0} + \phi'_y(y(c)) \right) h(c) = 0.$$

Seleccionando h tal que $h(c) \neq 0$ obtenemos la condición en el punto c

$$f_{y'} \Big|_{x=c-0} - g_{y'} \Big|_{x=c+0} + \phi'_y(y(c)) = 0.$$

Obsérvese que si $\phi = 0$ y además $g(x) = f(x)$ sobre (c, b) , entonces la condición en el punto c toma la forma

$$f_{y'} \Big|_{x=c-0} - f_{y'} \Big|_{x=c+0} = 0 \quad (1.6.4)$$

lo que significa la continuidad de $f_{y'}$ en el punto c .

Algunas veces el funcional principal toma el valor mínimo en un punto y que tiene *un salto en un punto c de (a, b) , pero c no está definido de antemano*. Para este problema, en el punto c son válidas dos condiciones. Una condición es (1.6.4) y la segunda condición define la posición de c

$$(f - y'f_{y'})\Big|_{x=c-0} = (f - y'f_{y'})\Big|_{x=c+0}.$$

Las dos condiciones son llamadas las condiciones de Weierstrass–Erdman. El lector interesado en estas condiciones, debe consultar en libros de cálculo variacional.

1.7. Dos problemas de extremo adicionales y algunas notas generales

Algunas veces la integración del funcional principal F se hace sobre un contorno cerrado en el plano o en el espacio. En este caso, el funcional tiene la misma forma

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

donde los valores a y b corresponden al mismo punto en el plano o en el espacio. En este caso el conjunto de funciones admisibles contiene todas las funciones periódicas con período $b - a$. Las funciones admisibles son continuas y

$$y(a) = y(b); \tag{1.7.1}$$

si además sus primeras derivadas son continuas, entonces

$$y'(a) = y'(b). \tag{1.7.2}$$

Es claro que la ecuación de Euler es válida para y , el punto de mínimo de F . Es fácil ver que si en el punto que corresponde a $x = b$ la función

y tiene un salto, entonces, como vimos anteriormente, tenemos como consecuencia que

$$y' \frac{d}{dx} f \Big|_{x=b-0} = y' \frac{d}{dx} f \Big|_{x=a+0}. \quad (1.7.3)$$

En las dos versiones de la segunda condición tenemos que el problema con valores en la frontera tiene dos condiciones (1.7.1), (1.7.2) o (1.7.1), (1.7.3). Pero la naturaleza de la condición (1.7.3) es un poco diferente de la naturaleza de los problemas anteriores. Es útil ver cual es la diferencia entre estos problemas usando un ejemplo elemental.

Consideremos el problema de la determinación del mínimo del siguiente funcional:

$$\mathcal{E}(y) = \int_0^b \left(\frac{1}{2} E A y'^2(x) - t(x) y(x) \right) dx.$$

Este funcional representa la energía potencial total de una barra sometida a una carga $t(x)$ distribuida. El parámetro de longitud x cambia del punto de inicio $x = 0$ de la barra hasta b , la longitud de la barra. Aquí E es el modulo de elasticidad de Young y A es el área de sección de la barra. Supongamos que E y A son constantes y que $t(x)$ es continua sobre $[0, b]$.

Es fácil ver que la ecuación de Euler tiene la forma

$$E A y''(x) = -t(x). \quad (1.7.4)$$

Integrando la ecuación tenemos que

$$E A y'(x) = E A y'(0) - \int_0^x t(v) dv. \quad (1.7.5)$$

Integrando nuevamente tenemos que

$$E A y(x) = E A y(0) + E A y'(0)x - \int_0^x \left(\int_0^u t(v) dv \right) du. \quad (1.7.6)$$

Ahora consideremos todos los problema vistos anteriormente.

El problema de Dirichlet: Las condiciones en la frontera son

$$y(0) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

con valores y_a, y_b dados. Sustituyendo estos en la ecuación (1.7.6) tenemos los valores únicos $y(0)$ y $y'(0)$. Entonces el problema de Dirichlet tiene una solución única.

El problema de Neumann: Las condiciones en la frontera son

$$y'(0) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

Sustituyendo la primera condición en (1.7.5) tenemos que

$$EAy'(x) = \int_0^x t(v) dv.$$

Ahora, tomando la segunda condición $y'(0) = 0$ tenemos que

$$\int_0^b t(x) dx = 0, \tag{1.7.7}$$

que es una condición necesaria para la existencia de una solución del problema de Neumann. Entonces aquí la solución existe si y sólo si, para la carga t la condición (1.7.7) es válida. Esta condición tiene un significado mecánico: la carga t está auto-equilibrada, lo cual es la condición necesaria porque la barra está libre.

Es fácil ver que en el problema de Neumann el valor $y(0)$ es indefinido, lo que significa que si una solución del problema existe entonces no es única.

Si consideramos el primer problema de esta sección con las funciones admisibles periódicas (no importa que el problema no está relacionado con el problema de la determinación del mínimo de la energía potencial total para una barra), la situación es muy similar a la situación del problema de Neumann: para tener una solución del problema, la función t debe satisfacer la condición (1.7.7). Además, si una solución del problema existe, entonces no es única.

Más adelante probaremos que las soluciones de los problemas en la frontera para la ecuación de Euler son realmente los puntos de mínimo del funcional \mathcal{E} en las clases de las funciones admisibles correspondientes.

Las condiciones que veíamos para estos problemas son típicas para los problemas estáticos de mecánica. Los problemas de Dirichlet con

la frontera fija tienen una única solución si la carga es continua. En los problemas de Neumann hay una solución sólo si la carga está auto-equilibrada y además la solución no es única. Hay otros tipos de problemas en la frontera y problemas de mínimo de la energía potencial total de sistemas elásticos los cuales debemos estudiar de manera individual.

Aquí tiene sentido mencionar que el problema de equilibrio de la barra elástica es muy sencillo, pero contiene elementos aparte de las condiciones que usamos derivando las condiciones del mínimo de funcionales. Por ejemplo, en ingeniería, el caso cuando t tiene un salto en algún punto c es usual. Pero de la ecuación de Euler (1.7.4) vemos que en este punto y'' tiene un salto también. Es claro que la derivación de las condiciones del mínimo no cambia. Nosotros podemos considerar la carga que contiene fuerzas puntuales. Aquí la solución del problema del mínimo va a tener un salto en la primera derivada y' en el punto de la aplicación de la fuerza. Entonces para estos problemas sencillos tenemos una situación no trivial que es más complicada en problemas más elaborados.

1.8. Problema de mínimo del funcional que depende de $y^{(n)}$, $n > 1$

Consideremos el problema de mínimo de los funcionales de la forma

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx,$$

donde $n > 1$. Resolviendo el problema del mínimo de Neumann para el funcional principal ($n = 1$) no necesitamos imponer las condiciones en la frontera, ellas son una consecuencia natural del proceso de minimización. Lo mismo pasa cuando $n > 1$.

Entonces empezamos con el problema de Neumann. Seleccionemos $C^{(2n)}([a, b])$ como la clase de las funciones admisibles para este problema. Supongamos que $y \in C^{(2n)}([a, b])$ es un punto de mínimo de Φ y que $h \in C^{(2n)}([a, b])$ es una función arbitraria. Como anteriormente,

tenemos que

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(y + th) \right|_{t=0} = 0.$$

En detalles este toma la forma

$$\int_a^b (f_y h + f_{y'} h' + \cdots + f_{y^{(n)}} h^{(n)}) dx = 0, \quad (1.8.1)$$

donde

$$f_{y^{(k)}} = \left. \frac{\partial}{\partial z_k} f(x, z_0, z_1, \dots, z_n) \right|_{z_0=y(x), z_1=y'(x), \dots, z_n=y^{(n)}(x)}, \quad h^{(k)} = h^{(k)}(x)$$

y $h^{(0)} = h(x)$. Supongamos que f es tan suave que todas las derivadas que necesitamos son continuas. Como antes, queremos aplicar aquí el lema fundamental del cálculo variacional. Se integra por partes k veces el miembro que contiene $h^{(k)}$, $k \geq 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{y^{(k)}} h^{(k)} dx &= \int_a^b (-1)^k h \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}} dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j h^{(k-j-1)} \frac{d^j}{dx^j} f_{y^{(k)}} \Big|_{x=a}^{x=b}. \end{aligned}$$

La ecuación (1.8.1) toma la forma

$$\begin{aligned} \int_a^b h \left(f_y + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}} \right) dx \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j h^{(k-j-1)} \frac{d^j}{dx^j} f_{y^{(k)}} \Big|_{x=a}^{x=b} = 0. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Aquí $h \in C^{(2)}([a, b])$ es arbitraria. Como antes, primero tomemos el subconjunto de todas las funciones admisibles $\mathcal{D}(a, b)$. Entonces $h^{(k)}(a) = 0, h^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, \dots$. Tenemos

$$\int_a^b h \left(f_y + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}} \right) dx = 0$$

para toda $h \in \mathcal{D}(a, b)$. Por suposición, la expresión entre paréntesis es continua en $[a, b]$. Por el lema fundamental tenemos que

$$f_y + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_{y^{(k)}} = 0, \quad x \in (a, b). \quad (1.8.3)$$

Esta ecuación se llama *la ecuación de Euler–Lagrange*. Ella incluye la ecuación de Euler para $n = 1$. Su orden generalmente es $2n$.

Ahora derivemos las condiciones en la frontera, llamadas *naturales*. Extendemos el conjunto de h a todas las funciones admisibles. Por la ecuación (1.8.3) la integral en (1.8.2) es cero para toda h . Entonces

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j h^{(k-j-1)} \frac{d^j}{dx^j} f_{y^{(k)}} \Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \quad (1.8.4)$$

para toda h . Es fácil construir el conjunto de los polinomios $P_{ak}(x)$ tales que

$$P_{ak}^{(j)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } j = k \\ 0 & \text{cuando } j \neq k \end{cases}, \quad k \leq n-1,$$

$$P_{ak}^{(m)}(b) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Tomando $h = P_{ak}(x)$ en la última igualdad, tenemos que

$$\left(f_{y^{(k)}} - \frac{d}{dx} f_{y^{(k+1)}} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} f_{y^{(n)}} \right) \Big|_{x=a} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.8.5)$$

Considerando de manera similar la ecuación (1.8.4) en el punto $x = b$, tenemos que

$$\left(f_{y^{(k)}} - \frac{d}{dx} f_{y^{(k+1)}} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} f_{y^{(n)}} \right) \Big|_{x=b} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.8.6)$$

Para la ecuación de Euler–Lagrange tenemos $2n$ condiciones naturales en los extremos de (a, b) , con n condiciones en cada extremo. El

problema para la ecuación (1.8.2) con las condiciones en la frontera (1.8.5) y (1.8.6) se denomina el problema del tipo Neumann.

Las derivadas $h^{(k)}$ que se presentan en la ecuación (1.8.2) en la frontera, definen la formulación de las condiciones de tipo Dirichlet para la misma ecuación. Ellas son

$$y^{(k)}(a) = \tilde{y}_{ak}, \quad y^{(k)}(b) = \tilde{y}_{bk}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

donde \tilde{y}_{ak} e \tilde{y}_{bk} son las constantes dadas.

En mecánica, el problema de Dirichlet es usualmente el problema en términos de desplazamientos con la frontera fija. Los problemas del tipo Neumann usualmente son formulados en el caso cuando la carga está definida en la frontera del cuerpo.

Veremos que está pasando con el problema de equilibrio de una viga de longitud b con los parámetros constantes E e I sometida a una carga distribuida $q(x)$. En términos del desplazamiento normal $y(x)$, su energía potencial total es

$$\int_0^b \left(\frac{1}{2} EI (y''(x))^2 - q(x) y(x) \right) dx.$$

En el equilibrio de la viga, el funcional de energía toma el valor mínimo sobre el conjunto de desplazamientos normales admisibles. La ecuación de Euler-Lagrange, que es la ecuación del equilibrio de la viga, está dada por

$$EI y^{(4)}(x) - q(x) = 0, \quad x \in (0, b).$$

Las condiciones naturales, denominadas condiciones del tipo Neumann, son

$$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y''(b) = 0, \quad y'''(b) = 0.$$

Las condiciones del tipo Dirichlet son

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

Las condiciones naturales tienen significados claros en mecánica: ellas dicen que la fuerza transversal y el momento son cero en los extremos de la viga.

1.9. Un problema compuesto de mínimo

En mecánica encontramos problemas cuando los cuerpos están en contacto. En este caso, frecuentemente es difícil decir cuales son las condiciones en el área del contacto. Vamos a modelar la situación con el problema del funcional compuesto

$$\Psi(y) = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx + \int_b^c g(x, y, y') dx, \quad a < b < c.$$

Supongamos que las funciones f y g son suficientemente suaves en sus dominios. Es natural suponer la continuidad de y en el punto b . No es claro inmediatamente cuales son las otras condiciones en la frontera, $\{a, b, c\}$, si resolvemos el problema de la determinación del mínimo del funcional Ψ .

El procedimiento tradicional dice que para un punto y de mínimo de Ψ y una función h admisible y fija, que debe ser continua en el punto b , tenemos que

$$\int_a^b (f_y h + f_{y'} h' + f_{y''} h'') dx + \int_b^c (g_y h + g_{y'} h') dx = 0.$$

Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b h \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \right) dx + \int_b^c h \left(g_y - \frac{d}{dx} g_{y'} \right) dx & \quad (1.9.1) \\ + h f_{y'} \Big|_{x=a}^{x=b} + h' f_{y''} \Big|_{x=a}^{x=b} - h \frac{d}{dx} f_{y''} \Big|_{x=a}^{x=b} + h g_{y'} \Big|_{x=b}^{x=c} & = 0. \end{aligned}$$

Seleccionando $h \in \mathcal{D}(a, b)$ arbitraria, tenemos la ecuación

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0, \quad x \in (a, b).$$

Si tomamos otra función $h \in \mathcal{D}(b, c)$ arbitraria, entonces

$$g_y - \frac{d}{dx} g_{y'} = 0, \quad x \in (b, c).$$

De estas ecuaciones y de (1.9.1) se obtiene que

$$\begin{aligned} -h\left(f_{y'} - \frac{d}{dx}f_{y''}\right)\Big|_{x=a} + h'f_{y''}\Big|_{x=a}^{x=b} \\ + h\left(\left(f_{y'} - \frac{d}{dx}f_{y''}\right)\Big|_{x=b-0} - g_{y'}\Big|_{x=b+0}\right) + hg_{y'}\Big|_{x=c} = 0. \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

Aquí podemos seleccionar los valores de $h(a)$, $h'(a)$, $h(b)$, $h'(b)$ y $h(c)$ independientemente. Si consideramos el problema de mínimo sin las restricciones en la frontera, tenemos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \left(f_{y'} - \frac{d}{dx}f_{y''}\right)\Big|_{x=a} = 0, \quad f_{y''}\Big|_{x=a} = 0, \\ f_{y''}\Big|_{x=b} = 0, \quad \left(f_{y'} - \frac{d}{dx}f_{y''} - g_{y'}\right)\Big|_{x=b} = 0, \quad g_{y'}\Big|_{x=c} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos 5 condiciones naturales. Para el sistema de dos ecuaciones, una de orden cuatro y otra de orden dos, necesitamos 6 condiciones en la frontera. Una condición más, es la condición de continuidad de y en el punto b

$$y(b-0) = y(b+0).$$

Es interesante ver qué está pasando si queremos considerar el problema de Dirichlet para la ecuación de Euler–Lagrange (que son dos ecuaciones dadas sobre intervalos diferentes). Las condiciones están definidas de manera dual usando (1.9.2). Entonces debemos definir en los puntos a , b y c los siguientes valores

$$y(a) = y_{00}, \quad y'(a) = y_{01}, \quad y'(b) = y_{11}, \quad y(c) = y_{20}.$$

Para formular el problema debemos agregar dos condiciones más en el punto de contacto b . Estas condiciones son

$$y(b-0) = y(b+0), \quad \left(f_{y'} - \frac{d}{dx}f_{y''}\right)\Big|_{x=b-0} = g_{y'}\Big|_{x=b+0}$$

que son también las condiciones del problema de Neumann. En el problema del contacto de una viga y una barra conectadas en ángulo recto, la segunda condición significa la igualdad de fuerzas de la reacción de cada barra entre sí, que le da sentido a estas condiciones.

1.10. Problema de mínimo: funcional dependiendo de una función en varias variables

Buscaremos un punto de mínimo del funcional

$$\Theta(u) = \int_S f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dS,$$

donde el dominio de u es $S \subset \mathbb{R}^2$, un conjunto acotado con la frontera Γ suave a trozos, $dS = dx dy$. Los índices x, y denotan las derivadas parciales correspondientes. Consideremos ahora el problema de Neumann, entonces el conjunto de funciones admisibles es $C^{(2)}(\bar{S})$. Denotemos el punto de mínimo de Θ por $u = u(x, y)$. Sea $h = h(x, y)$ una función admisible arbitraria pero fija. Entonces tenemos que

$$\left. \frac{d\Theta(u + th)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

que es

$$\int_S (f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y) dS = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} f_u &= \left. \frac{\partial u(x, y, u, p, q)}{\partial u} \right|_{u=u(x,y), p=u_x(x,y), q=u_y(x,y)}, \\ f_{u_x} &= \left. \frac{\partial u(x, y, u, p, q)}{\partial p} \right|_{u=u(x,y), p=u_x(x,y), q=u_y(x,y)}, \\ f_{u_y} &= \left. \frac{\partial u(x, y, u, p, q)}{\partial q} \right|_{u=u(x,y), p=u_x(x,y), q=u_y(x,y)}. \end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_S \left(f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right) h dS & \qquad (1.10.1) \\ + \int_{\Gamma} \left(f_{u_x} \cos(n, x) + f_{u_y} \cos(n, y) \right) h ds & = 0, \end{aligned}$$

donde s es el parámetro de longitud de Γ y $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ son los cosenos de los ángulos formados por la normal exterior a Γ con los ejes x y y respectivamente.

Necesitamos una versión del lema fundamental en dos dimensiones. Sea S un dominio medible y abierto en \mathbb{R}^2 . $\mathcal{D}(S)$ es el conjunto de las funciones con soportes en S que tienen todas las derivadas continuas.

Lema 1.2. *Sea una función g absolutamente integrable sobre S y tal que*

$$\int_S g(x, y) h(x, y) dS = 0 \quad (1.10.2)$$

para toda $h \in \mathcal{D}(S)$. En todo punto (x, y) donde $g(x, y)$ es continua tenemos que $g(x, y) = 0$.

Demostración. La demostración es similar a la demostración del lema fundamental en una dimensión. Supongamos que $g(x_0, y_0) = a > 0$ en un punto de continuidad de g . Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo punto (x, y) de la bola $B \subset S$ cerrada de radio ε con centro en (x_0, y_0) tenemos que $g(x, y) > a/2$. Sea

$$h_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{r^2 - \varepsilon^2}} & \text{cuando } r < \varepsilon \\ 0 & \text{cuando } r > \varepsilon \end{cases},$$

donde $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Es fácil ver que $h_\varepsilon \in \mathcal{D}(S)$. Obtenemos

$$\int_S g(x, y) h_\varepsilon(x, y) dS = \int_B g(x, y) h_\varepsilon(x, y) dS \geq \frac{a}{2} \int h_\varepsilon(x, y) dS > 0$$

que contradice a (1.10.2). \square

Regresamos a la igualdad (1.10.1). Primero escogemos $h \in \mathcal{D}(S)$ teniendo

$$\int_S \left(f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right) h dS = 0.$$

Sea $f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y}$ una función continua en S . Por el lema 1.2, obtenemos que

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0 \quad \text{en } S. \quad (1.10.3)$$

Regresamos a la ecuación (1.10.1) cuando h es admisible y arbitraria. Por (1.10.3), la ecuación (1.10.1) se reduce a la siguiente forma

$$\int_{\Gamma} \left(f_{u_x} \cos(n, x) + f_{u_y} \cos(n, y) \right) h \, ds = 0,$$

de donde, por el lema fundamental, sobre Γ se tiene que

$$f_{u_x} \cos(n, x) + f_{u_y} \cos(n, y) = 0. \quad (1.10.4)$$

La ecuación (1.10.3) es la ecuación de Euler–Lagrange para el problema de mínimo de Θ . La ecuación (1.10.4) es una condición natural en la frontera.

Consideremos un ejemplo importante. Sea

$$\Theta(u) = \int_S \left((u_x)^2 + (u_y)^2 - 2fu \right) dS$$

con una función f definida en S . Aquí la ecuación (1.10.3) es

$$u_{xx} + u_{yy} + f = 0$$

que se denomina la ecuación de Poisson y la ecuación (1.10.4) es

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$$

que es un caso particular de la condición de Neumann para las ecuaciones de Poisson y de Laplace. Ésta es una razón por la cual llamamos a todas las condiciones naturales por el nombre de Neumann. Más adelante vamos a discutir el problema de Neumann y encontrar cuales son las condiciones necesarias para la existencia de una solución.

1.11. Problema de mínimo del funcional cuadrático en un espacio de Hilbert

Los problemas lineales de mecánica que vamos a considerar más adelante, tienen la estructura del funcional de la energía potencial

parecida a los funcionales que vimos antes: contienen un miembro cuadrático que representa la energía elástica del objeto y un miembro lineal, el trabajo de las fuerzas externas sobre los desplazamientos. En esta sección estudiaremos una versión abstracta de estos problemas.

En un espacio de Hilbert real H consideremos el funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - Fu,$$

donde F es un funcional lineal y continuo en H y $a(u, u)$ es un funcional cuadrático con las siguientes propiedades:

- $a(u, v)$ es lineal en u y en v , elementos de H ;
- $a(u, v) = a(v, u)$ para todos $u, v \in H$;
- existen constantes c_1, c_2 tales que para todo $u \in H$

$$0 < c_1 \leq \frac{a(u, u)}{\|u\|^2} \leq c_2 < \infty.$$

Las propiedades definidas de $a(u, v)$ significan que este funcional es un producto interno en H , y H con este producto es un espacio de Hilbert y las normas correspondientes son equivalentes.

Denotamos u_0 como un punto de mínimo de Φ en H .

Teorema 1.1. *Existe un único punto mínimo de Φ .*

Demostración. Como F es lineal y continuo, por el teorema de representación de Riesz tenemos que

$$Fu = a(u, u_0),$$

donde $u_0 \in H$ existe y está definido únicamente. Entonces Φ toma la forma

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - a(u, u_0).$$

Escribiendo Φ como

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2} a(u, u) - a(u, u_0) + \frac{1}{2} a(u_0, u_0) - \frac{1}{2} a(u_0, u_0) \\ &= \frac{1}{2} a(u - u_0, u - u_0) - \frac{1}{2} a(u_0, u_0). \end{aligned}$$

Es claro que el único punto de mínimo de Φ es u_0 y el valor mínimo es

$$\Phi(u_0) = -\frac{1}{2}a(u_0, u_0).$$

□

Más adelante vamos a ver como se puede aplicar este teorema. Sea $u \in H$ un elemento arbitrario. Entonces, tenemos que la ecuación

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(u_0 + tu) \right|_{t=0} = 0$$

toma la forma

$$a(u_0, u) - Fu = 0. \tag{1.11.1}$$

Claro que esta ecuación define el mismo punto u_0 que buscamos en el problema de mínimo. Para los problemas posteriores de mecánica la ecuación (1.11.1) define unas soluciones generalizadas de los problemas.

Frecuentemente vamos a usar el siguiente resultado de demostración elemental:

Teorema 1.2. *Sean $a(u, v)$ una forma cuadrática que satisface las condiciones definidas anteriormente, y F un funcional lineal y continuo en H . La ecuación $a(u, v) - Fv = 0$, válida para todo $v \in H$, tiene una solución única.*

1.12. Sobre espacios de Sóbolev

El teorema del párrafo anterior se aplica en espacios energéticos que usualmente son algunos subespacios de los espacios de Sóbolev. Introduciremos el material que vamos a usar en una futura presentación.

Sea V un conjunto abierto de \mathbb{R}^n cuya frontera es suficientemente suave.

Definición 1.2. *El espacio de Sóbolev $W^{k,p}(V)$, con k entero y $p \geq 1$ es el espacio de completéz del conjunto de las funciones $C^{(k)}(\bar{V})$ con*

respecto a la norma

$$\|u\| = \left(\int_V \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dV \right)^{1/p}.$$

Aquí usamos las notaciones $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Los espacios de Sóbolev son espacios de Banach.

Vamos a necesitar los teoremas de inmersión de los espacios de Sóbolev cuando $n = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$ y $p = 2$. Los dominios V en los teoremas deben ser acotados con fronteras suficientemente suaves que satisfacen la condición del cono que para $n > 1$, esto es, que existe un cono finito en el espacio tal que podemos tocar con el vértice del cono todo punto de la frontera de tal manera que el cono quede en V . En Fig. 1.2 presentamos a la izquierda un dominio plano donde se cumple la condición del cono y en la derecha uno donde no se cumple.

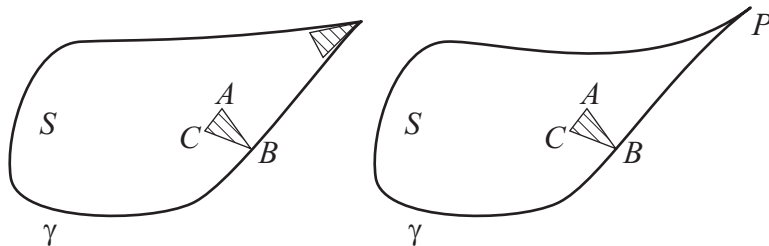


Figura 1.2: En el dominio plano de la izquierda, se satisface la condición del cono. El cono de la condición se reduce al triángulo ABC . Podemos tocar cualquier punto de la frontera γ con el vértice B del triángulo moviendo el triángulo de tal manera que siempre permanezca en S . En el de la derecha no se satisface la condición del cono: no existe un triángulo finito con el que podemos tocar el punto P de tal manera que el triángulo este en S .

Para $n = 1$ tenemos [Adams and Fournier (2005)]

Teorema 1.3. Sean $V = (a, b)$, a, b finitos, y k entero. El operador de inmersión de $W^{k,2}$ a $C^{(k-1)}([a, b])$ es continuo y compacto.

Para $n = 2$ tenemos [Adams and Fournier (2005)]

Teorema 1.4. Sean $V = S$, $S \subset \mathbb{R}^2$ acotado con la frontera suficientemente suave que satisface la condición del cono. Los operadores de inmersión de $W^{1,2}(S)$ a los espacios $L^p(S)$ y $L^p(\gamma)$ son continuos y compactos para todo $1 \leq p < \infty$ donde γ es una curva suave a trozos en \bar{S} .

Para $n = 3$ tenemos [Adams and Fournier (2005)]

Teorema 1.5. Sean V , un dominio acotado en \mathbb{R}^3 con la frontera suficientemente suave que satisface la condición del cono. Los operadores de inmersión de $W^{1,2}(V)$ a los espacios $L^p(V)$ y $L^q(\Gamma)$ son continuos para todo $1 \leq p \leq 6/5$, $1 \leq q \leq 4/3$ donde Γ es una superficie suave a trozos en \bar{V} . Los operadores son compactos si $1 \leq p < 6/5$, $1 \leq q < 4/3$.

1.13. Problemas

Deduzca las ecuaciones de Euler y las condiciones naturales en la frontera para los siguientes funcionales:

1. $\int_0^1 \sqrt{1 + u'^2(x) + u^2(x)} dx;$
2. $\int_2^3 [u'^2(x) + (1 + x^2) u^2(x)] dx;$
3. $\int_1^3 [2u'^2(x) - (1 + 3x^2) u^2(x)] dx;$
4. $\int_a^b [7u'^2(x) + 3(1 + x^2) u^2(x)] dx, \quad a < b;$
5. $\int_a^b [u'^2(x) + (1 + x^4) u^2(x)] dx + u(a)^2, \quad a < b;$
6. $\int_1^3 [xu'^2(x) + (x^2 + 3) u^2(x)] dx + 5u^2(1) + u^2(3);$
7. $\int_a^b [5u'^2(x) + \sqrt{x + 5} u^2(x)] dx + u(a)^2, \quad 0 \leq a < b;$
8. $\int_1^5 [u'^2(x) + xu^2(x)] dx + u^2(2) ;$
9. $\int_a^b [u'^2(x) + xu^2(x)] dx + u^2(0,5a + 0,5b), \quad a < b ;$
10. $\int_0^\pi [3u'^2(x) - 2u^2(x)] dx + [u(\pi) - u(0)]^2;$
11. $\int_0^1 [u''^2(x) + 2u^2(x)] dx + [u(1) - u(0)]^2 + [u'(1) - u'(0)]^2;$
12. $\int_0^1 [u''^2(x) + 2u'^2(x)] dx;$

13. $\int_0^1 [u''^2(x) + u'^2(x) + u^2(x)] dx + u'^2(0,5);$
14. $\int_0^1 [u'''^2(x) - u''^2(x) + 2(1-x^2)u^2(x)] dx;$
15. $\int_a^b [u'''^2(x) - u'^2(x) + u(x)] dx, \quad a < b;$
16. $\int_a^b \int_c^d [(u_x)^2 + 2(u_y)^2 + 3u^2 - 2u] dx dy, \quad a < b, \quad c < d;$
17. $\int_a^b \int_c^d [(u_x)^2 + (u_y)^2 + u^2] dx dy + \int_a^b u^2(x, c) dx, \quad a < b, \quad c < d;$
18. $\int_a^b \int_c^d [(u_x)^2 + (u_y)^2 - u^2] dx dy + \int_c^d u^2(b, y) dy, \quad a < b, \quad c < d;$
19. $\int_a^b \int_c^d [(u_x)^2 - (u_y)^2 + 2u] dx dy, \quad a < b, \quad c < d;$
20. $\int_a^b \int_c^d [(u_x)^n + (u_y)^n] dx dy, \quad a < b, \quad c < d;$
21. $\int_a^b \int_c^d [\sin(u_x) + \sin(u_y)] dx dy, \quad a < b, \quad c < d;$
22. $\int_a^b \int_c^d [2 - \cos(u_x) - \cos(u_y)] dx dy, \quad a < b, \quad c < d;$
23. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2} dx dy;$
24. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2} dx dy + \int_0^1 \sqrt{1 + (u_x)^2} \Big|_{y=0,5} dx;$
25. $\int_0^1 \int_0^1 (1 + (u_x)^2 + (u_y)^2)^n dx dy, \quad n > 0.$

Capítulo 2

Algunos Modelos Elementales de Mecánica

Los modelos que vamos a considerar matemáticamente en este capítulo son elementales. Es posible resolver los problemas correspondientes analíticamente. Pero su análisis contiene detalles que presentan los problemas de mecánica continua más complicados.

Primero iniciamos con la discusión de la consecuencia de la formulación de los problemas de mecánica continua, que contiene los siguientes pasos:

1. Ecuación(es) de equilibrio y movimiento.
2. Medidas de deformación en términos de desplazamientos.
3. Ecuaciones de compatibilidad (de Hooke).
4. Condiciones en la frontera del cuerpo.

Si el problema es de dinámica, entonces debemos adicionar las condiciones iniciales para desplazamientos y velocidades de todos los puntos materiales del cuerpo en algún momento, que se llamará momento inicial. Estos cuatro pasos del trabajo en problemas técnicos, pertenecen a la mecánica. Aquí empieza el trabajo de los matemáticos.

En matemáticas se estudian las propiedades cualitativas de los problemas de mecánica, como son:

- existencia y unicidad de soluciones de los problemas;
- dependencia de propiedades de las soluciones que dependen de

los parámetros del objeto de problema (aquí se estudian las clases a las cuales pertenecen las soluciones y su dependencia de las distintas fuerzas externas, de las características de elasticidad, de suavidad de la frontera del cuerpo, etc.);

- principios extremales para los problemas y propiedades extremales de sus soluciones;
- elaboración y justificación de los métodos numéricos para resolver los problemas.

Vamos a aplicar este programa a un problema de un curso de física básica.

2.1. Equilibrio del resorte

Consideremos un resorte con rigidez c sometido a una fuerza constante F como indica la figura 2.1.

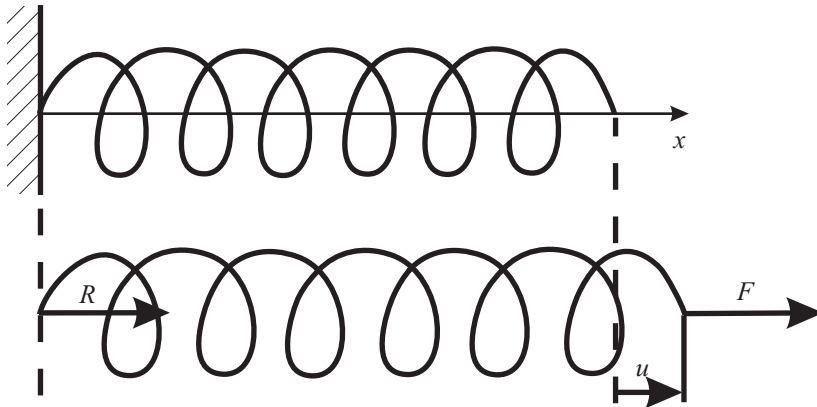


Figura 2.1: El resorte sometido a una fuerza F y desplazado una longitud u .

Vamos a considerar punto por punto el modelo matemático para el resorte. El extremo izquierdo del resorte está fijo. Podemos quitar

la pared de soporte, y cambiarla por su reacción R sobre el resorte, como indica la figura 2.1. La ecuación del equilibrio es única

$$R + F = 0.$$

Entonces $R = -F$ y si F es positiva, entonces el resorte es extendido (estirado) y en todo punto del resorte la tensión es F . La medida de deformación es el alargamiento u del resorte. La ecuación de compatibilidad está dada por la ley de Hooke, que aquí toma la forma

$$F = ku. \quad (2.1.1)$$

Matemáticamente el problema es elemental, no hay condiciones en la frontera. Entonces todas las ecuaciones del problema se reducen a la ecuación única $F = ku$ que dice que si F actúa sobre el resorte, entonces este se alarga una longitud $u = F/k$.

Por lo tanto, para el problema dado, con una fuerza F , tenemos que la solución u existe y es única. Vamos a calcular el trabajo que se necesita hacer para extender el resorte una distancia u_0 . Si el resorte se alargase una longitud u , y es alargado por la fuerza $F = ku$, el trabajo para estirar el resorte una longitud infinitesimal du es

$$dA = F du = ku du.$$

Entonces, para alargar el resorte una longitud u_0 , necesitamos ejercer un trabajo dado por

$$A = \int_0^{u_0} ku du = \frac{ku_0^2}{2}.$$

Este trabajo realizado, es la energía elástica acumulada en el resorte por el alargamiento u_0 . Entonces al extender el resorte una distancia u , éste acumula la energía

$$\mathcal{E} = \frac{ku^2}{2}.$$

La cantidad $P = Fu$ es el potencial de la fuerza constante F , esto es

$$F = \frac{d(Fu)}{du}.$$

La diferencia

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E} - P = \frac{ku^2}{2} - Fu$$

es llamada la energía potencial total del sistema resorte–fuerza. Si consideramos E como una función de u , es fácil ver que para una fuerza F constante, la función E toma mínimo cuando $ku - F = 0$, pero ésta es la ecuación (2.1.1) y entonces el resorte está en equilibrio con un alargamiento u para el cual la energía potencial total E toma el valor mínimo. Este es el principio elemental de física que vamos a extender a todos los otros modelos elásticos que consideramos lo vamos a llamar el *principio variacional de Lagrange*.

Vamos a extender la teoría y los resultados del resorte a la teoría de los objetos elásticos de mecánica más complejos. La idea de extender este método es muy sencilla, pero la técnica para atacar los problemas es más compleja.

Consideremos algunos puntos principales de la formulación de los problemas de mecánica continua.

2.2. Las ecuaciones de equilibrio

La primera parte de la descripción de un medio deformable son las ecuaciones de equilibrio o de movimiento. Estas ecuaciones (puede ser una ecuación única) tienen como base las ecuaciones de mecánica de cuerpos rígidos pero no son una consecuencia directa. Para su formulación necesitamos introducir algunas hipótesis (axiomas). La primera es:

Principio de solidificación: En el equilibrio, toda parte del medio (cuerpo) sometido a fuerzas y reacciones por las otras partes del cuerpo, satisface la ecuación de equilibrio como una parte rígida.

En mecánica continua las fuerzas externas son distribuidas normalmente en el volumen del cuerpo o en su superficie y, además, pueden ser puntuales también. Cuando cortamos imaginariamente una parte del cuerpo, debemos cambiar la acción de las otras partes del cuerpo por las fuerzas de sus reacciones (algo similar a lo que se hizo con el resorte de la figura 2.1 cuando se cambió la pared por su reacción sobre el resorte). Aquí suponemos que las reacciones actúan sólo sobre

la frontera de la sección cortada, entonces estas fuerzas son fuerzas superficiales, que es otra hipótesis de la mecánica continua.

Para un cuerpo rígido C sabemos que las ecuaciones del equilibrio en el espacio son seis. Primero, son tres ecuaciones escalares, las cuales son los componentes de una única ecuación vectorial

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{F}_k = \mathbf{0}, \quad (2.2.1)$$

esto es, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido es cero. La ecuación de movimiento se construye formalmente de esta ecuación usando el principio de d'Alambert de mecánica clásica adicionando una fuerza ficticia llamada fuerza de inercia

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{F}_k - m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{0},$$

donde m es la masa del cuerpo, \mathbf{x} su posición y t el tiempo.

Las otras tres ecuaciones de equilibrio para el cuerpo rígido dicen que la suma de todos los momentos de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero. Su ecuación vectorial es

$$\sum_{k=1}^m (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_k = \mathbf{0}, \quad (2.2.2)$$

donde \mathbf{r}_k es la posición del punto de aplicación de la fuerza \mathbf{F}_k , \mathbf{r}_0 es el vector de posición del polo, punto con respecto al cual se calculan todos los momentos vectoriales de las fuerzas. La posición del polo es arbitraria pero fija. En componentes, esta ecuación vectorial puede ser presentada como tres ecuaciones escalares. Usando el principio de d'Alambert podemos escribir la ecuación dinámica para momentos introduciendo el momento cinético del cuerpo. El lector interesado puede consultar esto en cualquier libro sobre mecánica clásica. Aquí vamos a presentar sólo la información mínima necesaria.

Vamos a usar estas ecuaciones de equilibrio para cualquier parte de un cuerpo deformable, suponiendo que las fuerzas de reacción de las otras partes actúan sólo sobre la frontera de la sección analizada. Hay

teorías donde este axioma se presenta de otra manera. Demostraremos como usar el axioma mostrado para el modelo más elemental de la teoría de elasticidad y de resistencia de materiales de una barra.

2.3. Una barra prismática sometida a una carga axial

Consideremos una barra prismática y elástica sometida a una carga axial (dirigida a lo largo del eje de la barra) en equilibrio. Introducimos x , para denotar la distancia desde un extremo A hasta un punto cualquiera del eje; como se muestra la en Fig. 2.2.

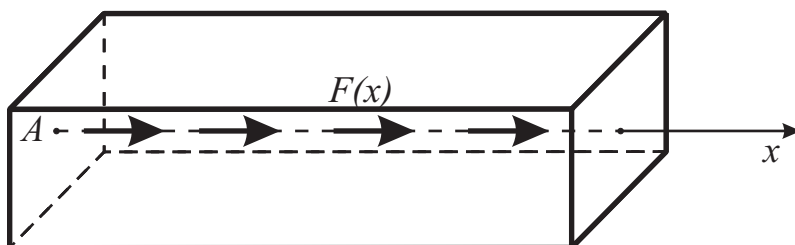


Figura 2.2: Una barra sometida a una carga axial distribuida $F(x)$.

Supongamos que en la sección x normal al eje (por brevedad la llamaremos “la sección”) la carga está distribuida uniformemente en el área S de la sección. Denotamos $F(x)$ a la resultante de la carga externa en una sección x . Podemos suponer una distribución uniforme de F en el área y también que cualquier sección, inicialmente plana, continúa plana después de la deformación.

Cortando la barra en dos partes vemos que la sección que separa las partes tiene dos caras. Por la tercera ley de Newton, las fuerzas con que cambiamos las reacciones de las partes cortadas deben ser iguales en magnitud y opuestas en dirección. Definimos las reacciones que implican el alargamiento axial de la barra como reacciones positivas y las que implican una compresión como negativas, ver la figura 2.3.

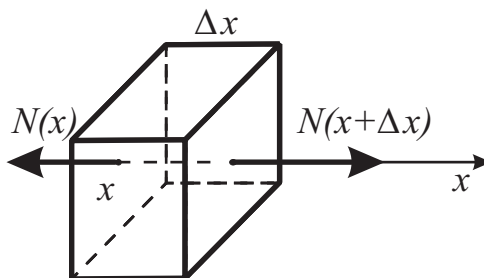


Figura 2.3: Una parte de la barra entre las secciones, con coordenadas x y $x + \Delta x$.

Ahora deducimos la ecuación de equilibrio de la parte mostrada en la figura 2.3 que está en equilibrio y entonces, por el principio de solidificación, todas las fuerzas que actúan sobre esta sección están en equilibrio como si la sección fuera un cuerpo rígido. Las fuerzas son $-N(x)$ al lado izquierdo, $N(x + \Delta x)$ al lado derecho y la fuerza externa está dada por $\int_x^{x+\Delta x} F(s)ds$. La única ecuación de equilibrio en este caso es

$$-N(x) + N(x + \Delta x) + \int_x^{x+\Delta x} F(s)ds = 0.$$

Dividimos los miembros de esta ecuación por Δx . Suponiendo que F es continua en el punto x y haciendo que $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos la ecuación del equilibrio de la barra en x

$$\frac{dN(x)}{dx} + F(x) = 0. \quad (2.3.1)$$

Notemos que la ecuación está derivada para la barra deformada, lo que significa que la posición inicial de los puntos de la barra cambia. El lector debe recordar que estamos considerando deformaciones muy pequeñas y por eso omitimos el cambio de coordenadas de todos los puntos del cuerpo por las deformaciones pequeñas. Esto no es correcto para deformaciones finitas, las cuales se describen con teorías no-lineales.

En los problemas de resistencia de materiales, la forma de las fuerzas externas es muy elemental, usualmente las fuerzas son puntuales o distribuidas linealmente en segmentos. Entonces la ecuación (2.3.1) se integra de una manera explícita. Pero queremos demostrar la técnica analítica que podemos aplicar en problemas más complejos donde la integración explícita es imposible. De esta manera no discutiremos los métodos que se usan en resistencia de materiales, pero presentaremos los métodos analíticos que se usan en la teoría general.

Hay problemas de equilibrio en resistencia de materiales para la barra cuando podemos encontrar N en cualquier sección usando sólo las ecuaciones de mecánica clásica. Por ejemplo, esto se da cuando la barra tiene sólo uno de sus extremos fijo. En este caso introducimos la reacción del soporte en este punto, que es desconocida. Las ecuaciones de equilibrio permiten encontrar esta reacción y, después, la tensión en toda la sección. Las construcciones para las que podemos solucionar los problemas del equilibrio usando sólo las ecuaciones de mecánica clásica se denominan *estáticamente definidas*. Pero si los dos extremos de la barra están fijos debemos introducir en el problema las reacciones de los soportes, que son desconocidas; en este caso usando sólo las ecuaciones del equilibrio no podemos definir las tensiones entre la barra de forma única. Tales construcciones se denominan *estáticamente indefinidas*. Para los problemas estáticamente indefinidos podemos encontrar las tensiones entre la barra sólo si sabemos las propiedades de su material. En este libro consideraremos sólo materiales elásticos. El lector debe notar que la mayoría de los problemas de mecánica continua son estáticamente indefinidos.

Las propiedades de los materiales están definidas con las denominadas ecuaciones constitutivas. Consideremos una de ellas denominada *ley de Hooke* que relaciona la densidad de la fuerza interna (o la tensión)

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

con la deformación (o el alargamiento unitario) ε que introducimos como sigue.

Denotemos $u(x)$ al desplazamiento del punto x por la deformación. En el punto $x + \Delta x$ el desplazamiento es $u(x + \Delta x)$. El alargamiento

del segmento Δx por la deformación es $u(x + \Delta x) - u(x)$ y entonces el alargamiento unitario es

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Su límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ es la medida de la deformación o simplemente la deformación en el punto x

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (2.3.2)$$

La ley de Hook es

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.3.3)$$

donde E se el llamado módulo de Young o el módulo de elasticidad.

Esta ley es usada para las deformaciones pequeñas. Cuando derivamos las ecuaciones lineales suponemos que las deformaciones y desplazamientos son tan pequeños que cuando transformamos algunas ecuaciones, consideramos los miembros cuadráticos infinitesimalmente pequeños comparados con los miembros lineales.

Sustituyendo (2.3.2) y (2.3.3) en la ecuación de equilibrio (2.3.1) tenemos la ecuación del equilibrio en términos del desplazamiento u :

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du(x)}{dx} \right) + F(x) = 0 \quad (2.3.4)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. En el caso general ES puede depender de x pero nosotros estamos considerando el caso más sencillo, cuando E y S son constantes.

Sabemos que la ecuación (2.3.4) al ser una ecuación diferencial de segundo orden tiene dos soluciones linealmente independientes. Entonces, para definir un único estado de equilibrio de la barra, debemos complementar la ecuación con dos condiciones. La experiencia de los ingenieros dice qué condiciones debemos asignar en ambos extremos de la barra, así en cada extremo debe ser asignada una condición. Estas condiciones son las *condiciones en la frontera*. Para la barra, los dos extremos constituyen su frontera. En cada uno de los extremos usualmente se asigna un valor de desplazamiento o de la fuerza externa. La fuerza F está relacionada con u por la fórmula $F = ESu'$,

entonces la asignación de la fuerza es equivalente a la asignación de u' en el mismo extremo.

Hay dos problemas principales al analizar el equilibrio de la barra. El primer problema es cuando la barra, de longitud a , tiene desplazamientos en los extremos u_0 y u_1 tales que

$$u(0) = u_0, \quad u(a) = u_1. \quad (2.3.5)$$

En teoría de ecuaciones diferenciales el problema de la solución de la ecuación (2.3.4) con condiciones dadas por (2.3.5) es llamado el *problema de Dirichlet*. Cuando las fuerzas F_0 y F_1 están dadas en los extremos, tenemos que

$$ESu'(0) = -F_0, \quad ESu'(a) = F_1. \quad (2.3.6)$$

Nótese que en la primera ecuación de (2.3.6) el signo es “menos” debido a la *regla de signos* de la resistencia de materiales que dice que la tensión es positiva si la deformación en la barra se debe a la tracción y negativa si se debe a la compresión.

En mecánica clásica las ecuaciones (2.3.4) y (2.3.6) determinan el problema de equilibrio de la barra libre porque no hay ningún punto fijo de la barra. En matemáticas este problema se denomina *problema de Neumann* porque aquí los valores de u' están dados en los extremos.

Cuando consideremos un problema con valores en la frontera, el primer punto en matemáticas es establecer los teoremas de existencia y unicidad o no-unicidad de una solución. Para la barra esto lo podemos hacer de manera sencilla, integrando la ecuación (2.3.4) explícitamente. De esta forma, tenemos que

$$ES \frac{du(x)}{dx} = c_1 - \int_0^x F(s) ds. \quad (2.3.7)$$

Una nueva integración nos da

$$u(x) = c_2 + \frac{c_1}{ES}x - \int_0^x \left(\frac{1}{ES} \int_0^r F(s) ds \right) dr.$$

Para las condiciones (2.3.5) obtenemos

$$u_0 = c_2, \quad u_1 = c_2 + \frac{c_1}{ES}a - \int_0^a \left(\frac{1}{ES} \int_0^r F(s) ds \right) dr.$$

Entonces

$$c_2 = u_0, \quad c_1 = \frac{ES}{a} \left(u_1 - u_0 + \int_0^a \left(\frac{1}{ES} \int_0^r F(s) ds \right) dr \right)$$

y el problema de Dirichlet tiene una solución única para todo $F(x)$ integrable sobre $[0, a]$.

Consideremos ahora el problema de Neumann. Por (2.3.7) tenemos que

$$c_1 = -F_0, \quad c_1 - \int_0^a F(s) ds = F_1.$$

Primero veamos que las condiciones de Neumann no definen la constante c_2 . Luego observemos que la segunda condición implica que

$$\int_0^a F(s) ds + F_1 + F_0 = 0 \tag{2.3.8}$$

y entonces el problema tiene una solución si y sólo si la ecuación (2.3.8) se cumple. En este caso la solución general u del problema contiene una constante indefinido $c_2 = u_0$.

Entonces la respuesta al problema de Neumann es un poco sorprendente: una solución existe si y sólo si se cumple la ecuación (2.3.7) y si (2.3.7) se cumple, esta solución no es única.

Este resultado matemáticamente extraño, tiene argumentos mecánicos claros. Si la barra está libre, puede estar en equilibrio si y sólo si todas las fuerzas externas que actúan sobre ella están en equilibrio. La ecuación (2.3.8) dice que la resultante de las fuerzas es cero y por lo tanto, las fuerzas externas están auto-equilibradas. Es claro porque no hay una solución del problema de equilibrio: si las fuerzas externas no están auto-equilibradas entonces la barra, como un cuerpo entero, debe moverse con aceleración. Luego, la constante indefinida c_2 corresponde al desplazamiento de la barra como cuerpo rígido. Es claro que el problema de equilibrio de la barra es indefinido porque no tenemos ninguna restricción para el desplazamiento de la barra como un cuerpo rígido, por lo tanto podemos asignar el desplazamiento de un punto de la barra de manera arbitraria.

El lector deberá verificar que cuando asignamos un desplazamiento para un extremo y una fuerza para el otro extremo, el problema tiene una solución única para toda F .

Planteamiento variacional de los problemas para la barra

Vamos a ver como plantear los mismos problemas de equilibrio usando el procedimiento variacional. Primero introducimos el funcional de energía potencial total del sistema barra-fuerzas:

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}ES \int_0^a u'(x)^2 dx - \int_0^a F(x)u(x) dx - F_0u(0) - F_1u(a). \quad (2.3.9)$$

La primera integral cuadrática en u' , es la energía interna de la barra, los miembros lineales en u expresan el trabajo de las fuerzas externas sobre el desplazamiento correspondiente, ellos son los potenciales de las fuerzas también. Para el problema de Dirichlet el miembro $F_0u(0) + F_1u(a)$ es constante y no participa en la formulación variacional.

Queremos probar que el problema de la determinación del mínimo del funcional \mathcal{E} en la clase de funciones admisibles es una solución al problema de equilibrio de la barra. Analizamos el problema de Neumann. Tomemos como clase de las funciones admisibles a $C^{(2)}([0, a])$ y supongamos que existe una solución del problema del mínimo de \mathcal{E} en la misma clase. Denotemos el minimizador de $\mathcal{E}(u)$ por u y el desplazamiento virtual por la función arbitraria pero fija δu la cual pertenece a $C^{(2)}([0, a])$.¹ Entonces tenemos que

$$\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(u + t\delta u)$$

para todo real t . Luego, la función $\mathcal{E}(u + t\delta u)$ en la variable t , toma el valor mínimo en $t = 0$ y

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u + t\delta u) \right|_{t=0} = 0$$

para todo δu admisible.

Por un lado, esta ecuación dice que la primera variación $\delta\mathcal{E} = d/dt(\mathcal{E}(u + t\delta u)|_{t=0})$ en el punto de mínimo es cero para todos los

¹Nótese que en mecánica están acostumbrados a denotar los desplazamientos admisibles (virtuales) con dos letras δu , parecido al diferencial del desplazamiento principal.

desplazamientos δu admisibles. Por otro lado, esta ecuación expresa el *principio de trabajos (o desplazamientos)* virtuales de mecánica, que es más general que el principio del mínimo de la energía porque puede ser válido aún cuando el principio del mínimo de la energía *NO* se pueda aplicar porque las fuerzas no son potenciales o la energía de deformación no exista.

Continuando, tenemos que

$$ES \int_0^a u'(x) \delta u'(x) dx - \int_0^a F(x) \delta u(x) dx - F_0 \delta u(0) - F_1 \delta u(a) = 0. \quad (2.3.10)$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^a \left((ESu'(x))' + F(x) \right) \delta u(x) dx + (F_0 + ESu'(0)) \delta u(0) + (F_1 - ESu'(a)) \delta u(a) = 0.$$

La ecuación es válida para todo $\delta u \in C^{(2)}([0, a])$. Seleccionando la clase δu de las funciones admisibles que son cero en los puntos $x = 0$ y $x = a$, por el lema fundamental del calculo variacional 1.3, tenemos que u satisface la ecuación (2.3.4). Extendiendo la clase de δu a todas las funciones admisibles veremos que u satisface las condiciones (2.3.6) y entonces es una solución al problema de Neumann.

Si $\delta u = c$ es una constante entonces por (2.3.10) tenemos que

$$c \left(\int_0^a F(x) dx + F_0 + F_1 \right) = 0.$$

Entonces para $c \neq 0$ tenemos la condición de auto-equilibrio de las fuerzas externas (2.3.8).

Repitiendo el procedimiento en el orden inverso, podemos demostrar que una solución $u \in C^{(2)}([0, a])$ del problema de Neumann (ecuaciones (2.3.4) y (2.3.6)) es un punto estacionario de \mathcal{E} en la clase $C^{(2)}([0, a])$. Más adelante demostraremos que u es un punto de mínimo de \mathcal{E} . Entonces tenemos que

Teorema 2.1. (*Principio de Lagrange para la barra libre*) *El problema del mínimo de \mathcal{E} en la clase $C^{(2)}([0, a])$ es equivalente a la solución del problema de Neumann (2.3.4) y (2.3.6) en la misma clase.*

Para plantear el problema de Dirichlet en la forma variacional es suficiente restringir el problema de la determinación del mínimo del funcional \mathcal{E} en la clase $C_D^{(2)}([0, a])$ de las funciones de $C^{(2)}([0, a])$ que satisfacen las condiciones (2.3.5). En este caso, para tener $u + t\delta u$ de clase $C_D^{(2)}([0, a])$, para todo $t \in \mathbb{R}$ necesitamos que

$$\delta u(0) = 0 = \delta u(a).$$

Repetiendo las consideraciones anteriores, tenemos que

Teorema 2.2. (*Principio de Lagrange para la barra con extremos fijos*) El problema de la determinación del mínimo del funcional \mathcal{E} en la clase $C_D^{(2)}([0, a])$ es equivalente a la solución del problema de Dirichlet (2.3.4) y (2.3.5) en la misma clase.

Como ejercicio el lector puede plantear el problema que mezcla los valores en la frontera para una barra.

2.4. Soluciones energéticas del problema del equilibrio de una barra

El problema de equilibrio para la barra es muy sencillo pero usando el Principio de Lagrange podemos ver los puntos interesantes para otros problemas de mecánica que no tienen soluciones explícitas.

Consideremos el problema de Dirichlet con las condiciones

$$u(0) = 0 = u(a) \tag{2.4.1}$$

entonces el problema consiste en la ecuación (2.3.4) y las condiciones (2.4.1).

Usando el Principio de Lagrange (Teorema 2.2) introducimos las soluciones generalizadas del problema de equilibrio. Como punto inicial tomemos la ecuación (2.3.10) que debe ser válida en la clase de todas las funciones admisibles δu . Por las condiciones $\delta u(0) = 0 = \delta u(a)$ la ecuación (2.3.10) toma la forma

$$\int_0^a ESu'(x)\delta u'(x) dx - \int_0^a F(x)\delta u(x) dx = 0. \tag{2.4.2}$$

Necesitamos extender el conjunto de las funciones admisibles δu al espacio energético.

Definición 2.1. *El espacio energético para la barra con extremos fijos H_{Bf} es la completitud del subconjunto C_{Bf} de las funciones de $C^{(2)}([0, a])$ que satisfacen las condiciones (2.4.1) con la norma inducida por el producto interno*

$$(u, v)_B = \int_0^a ESu'(x)v'(x) dx, \quad \|u\|_B = (u, u)_B^{1/2}.$$

Por la desigualdad elemental válida para toda función de C_{Bf}

$$\int_0^a u^2(x) dx \leq c \int_0^a u'^2(x) dx$$

con c constante, que no depende de $u \in C_{Bf}$, tenemos que la norma del espacio H_{Bf} es equivalente a la norma del espacio de Sóbolev $W^{1,2}(0, a)$ y entonces podemos usar el teorema de inmersión 1.3 para sus elementos.

Ahora introducimos la definición de la solución energética.

Definición 2.2. *$u \in H_{Bf}$ es una solución energética del problema de equilibrio de una barra con extremos fijos (2.4.1) si satisface la ecuación*

$$(u, v)_B = \int_0^a F(x)v(x) dx \tag{2.4.3}$$

para todo $v \in H_{Bf}$.

La ecuación (2.4.3) coincide con la ecuación (2.4.2).

Supongamos que $F \in L^1(0, a)$. Por el teorema de inmersión 1.3 veamos que $\int_0^a F(x)v(x) dx$ es un funcional lineal continuo en H_{Bf} :

$$\left| \int_0^a F(x)v(x) dx \right| \leq \max_{x \in [0, a]} |v(x)| \int_0^a |F(x)| dx \leq c \|v\|_B.$$

Entonces, por el teorema 1.2, tenemos

Teorema 2.3. *Sea $F \in L^1(0, a)$. El problema de equilibrio de la barra con extremos fijos (2.4.1) tiene una solución energética única $u \in H_{Bf}$ de acuerdo con la definición 2.2. La solución u es el punto de mínimo en H_{Bf} del funcional de la energía potencial total*

$$\frac{ES}{2} \int_0^a (u'(x))^2 dx - \int_0^a F(x) u(x) dx.$$

La última parte del teorema es una consecuencia de los teoremas 1.1 y 1.2.

Es fácil extender ese teorema al caso de las condiciones (2.3.5). La función

$$u^*(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) u_0 + \frac{x}{a} u_1$$

toma las condiciones (2.3.5). Busquemos una solución en la forma $u + u^*$, $u \in H_{Bf}$. La ecuación de equilibrio ahora es

$$(u, v)_B = -(u^*, v)_B + \int_0^a F(x) v(x) dx$$

que debe ser válida para todo $v \in H_{Bf}$. El miembro derecho de la ecuación es un funcional lineal y continuo, entonces, por razones similares la ecuación tiene una solución única en H_{Bf} . El lector debe notar que la unicidad de esta solución no significa la unicidad de la solución del problema de equilibrio porque la selección de u^* no es única. Entonces debemos probar la unicidad de la solución del problema independientemente.

Este método de demostración de los teoremas de existencia y unicidad para las condiciones en la frontera no-homogéneas, es común para todas las clases de problemas en mecánica lineal.

Podemos extender la clase de las fuerzas F admisibles incluyendo fuerzas puntuales. Si una fuerza puntual F_0 actúa en un punto c , cambiaremos la ecuación de equilibrio por

$$(u, v)_B = \int_0^a F(x) v(x) dx + F_0 v(c).$$

Aquí, en la parte derecha escribimos el trabajo de todas las fuerzas sobre el desplazamiento admisible $v \in H_{Bf}$. El lector debe hacer la demostración del teorema de existencia y unicidad como antes.

Es interesante notar que el miembro $F_0 v(c)$ podemos escribirlo usando la función δ de Dirac

$$F_0 v(c) = \int_0^a F_0 \delta(x - c) dx.$$

Los problemas de equilibrio de una barra con fuerzas puntuales son más antiguos, por ello, los ingenieros usaban funciones δ implícitamente mucho antes que los físicos modernos. En resistencia de materiales, los ingenieros saben que en el punto c la fuerza interna N tiene un salto debido a F_0 . Esto significa que la primera derivada u' de la solución tiene un salto en el mismo punto. Recomendamos al lector derivar cual es este salto usando el procedimiento regular de la derivación de las condiciones del extremo para un funcional.

Notemos que aquí consideramos las ecuaciones y todas las variables sin unidades. Pero todo lo que hacemos es válido para las variables con unidades también. En este caso, el lector debe recordar que todas las cantidades, incluidas las normas y constantes, tienen las unidades y entonces cambian sus valores numéricos si cambia el sistema de unidades.

Una barra libre

Recordemos que una barra se denomina libre cuando no tiene ninguna restricción para su movimiento en la dirección de su eje. La energía potencial total de la barra libre esta dada por la fórmula

$$\mathcal{E}(u) = \frac{ES}{2} \int_0^a u'(x)^2 dx - \int_0^a F(x) u(x) dx - F_0 u(0) - F_1 u(a).$$

El cambio de $u(x)$ por $u(x) + c$, donde c es una constante, no cambia la energía de deformación de la barra $ES/2 \int_0^a u'(x)^2 dx$. Es claro que la energía $\mathcal{E}(u)$ puede tener un punto de mínimo sólo si el trabajo de las fuerzas externas $\int_0^a F(x)u(x) dx + F_0u(0) + F_1u(a)$ satisface la condición de autoequilibrio de las fuerzas

$$\int_0^a F(x) dx + F_0 + F_1 = 0. \quad (2.4.4)$$

Tenemos la misma condición considerando la ecuación de equilibrio que es la igualdad a cero de la primera variación de $\mathcal{E}(u)$ para todo desplazamiento v admisible, esto es

$$ES \int_0^a u'(x) v'(x) dx - \int_0^a F(x) v(x) dx - F_0 \delta v(0) - F_1 \delta v(a) = 0. \quad (2.4.5)$$

Sustituyendo aquí $v = 1$ tenemos también la condición (2.4.4).

Cualquier desplazamiento admisible podemos representarlo en la forma

$$u = u_1 + u_0,$$

donde u_0 es una constante y el promedio de u_1 es cero:

$$\int_0^a u_1(x) dx = 0.$$

Denotemos el conjunto de todas las funciones de $C^{(2)}(0, a)$ con el promedio cero por C_{Bl} . Es claro que C_{Bl} es un subespacio de $C^{(2)}(0, a)$.

Para las funciones de C_{Bl} se conoce la *desigualdad de Poincaré*

$$\int_0^a u^2(x) dx \leq C \int_0^a (u'(x))^2 dx \quad (2.4.6)$$

con una constante C que no depende de u . El lector debe probar este hecho como un ejercicio.

Definición 2.3. *La completéz de C_{Bl} con respecto la norma $\|\cdot\|_B$ es el espacio energético H_{Bl} .*

Introducimos ahora la definición de una solución energética

Definición 2.4. *Supongamos que la condición (2.4.4) se cumple. Una función $u \in H_{Bl}$ es una solución energética del problema de equilibrio de la barra libre si satisface la ecuación (2.4.5) para todo $v \in H_{Bl}$.*

Recordamos que una solución del problema puede existir sólo si la condición (2.4.4) es válida. Si $u \in H_{Bl}$ es una solución energética del problema entonces $u(x) + c$ también es una solución del problema para todo constante c . La descomposición del problema de acuerdo a la

descomposición de la solución en dos partes es posible por la linealidad del problema.

Por la desigualdad de Poincaré, el espacio H_{Bl} es un subespacio de $W^{1,2}(0, a)$. Entonces la demostración del siguiente teorema es similar a la demostración del teorema 2.3.

Teorema 2.4. *Supongamos que la condición (2.4.4) se cumple y $F \in L^1(0, a)$. Existe una solución energética $u \in H_{Bl}$ del problema de equilibrio de la barra libre de acuerdo con la definición 2.4. Toda solución del problema es de la forma $u(x) + c$, donde c es una constante indefinida y u es el punto de mínimo en H_{Bl} del funcional de la energía potencial total $\mathcal{E}(u)$.*

Notemos que una solución de la ecuación (2.4.5) en el sentido de la definición 2.4 existe si la condición (2.4.4) NO se cumple, esta solución no es una solución del problema de equilibrio para una barra libre, pero si lo es para una barra cuyos movimientos están restringidos geoméricamente por $\int_0^a u dx = 0$.

2.5. Algunas notas generales

La estructura del problema de equilibrio para la barra y la consideración de sus teoremas de existencia y unicidad es común en todos los problemas de equilibrio en mecánica continua.

Como primer paso del estudio de los problemas de mecánica continua debemos deducir o introducir:

- una medida de fuerzas internas (las tensiones),
 - las ecuaciones del equilibrio,
 - una medida de deformación,
- y
- relacionar las medidas de deformación con las tensiones (del tipo de la ley de Hook).

Después podemos derivar las ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos de los puntos del objeto. Las condiciones en la frontera del objeto junto con las ecuaciones de equilibrio constituyen el planteamiento del problema de equilibrio en cuanto a desplazamientos. En este libro consideramos sólo este tipo de problemas, pero es posible no eliminar las tensiones y considerar los problemas con todas las variables.

Introduciendo la energía de deformación y el trabajo de las fuerzas externas, podemos presentar el planteamiento del problema como un problema variacional. Para las fuerzas potenciales es equivalente al planteamiento del problema empleando el principio de los desplazamientos (o trabajos) virtuales. Algunas veces se empieza la descripción con el análisis de la deformación del cuerpo dada por la energía de deformación que cambia la relación entre tensiones y deformaciones y permite emplear el principio de Lagrange directamente.

La ecuación que dice que la primera variación de la energía potencial total del sistema cuerpo–fuerzas externas es cero para todas las variaciones de los desplazamientos admisibles, es la base para introducir soluciones generalizadas, denominadas débiles, y energéticas también. Introduciendo espacios energéticos con la norma relacionada con la energía de deformación, determinamos la clase donde buscamos las soluciones energéticas y presentamos los teoremas de existencia y unicidad (recordamos que en este libro sólo consideremos los problemas lineales). Para cuerpos libres cuyos movimientos no están restringidos por restricciones de naturaleza geométrica, obtenemos condiciones de auto-equilibrio para las fuerzas externas cada vez.

2.6. Problemas compuestos

La mayoría de los problemas en ingeniería son compuestos. Surgen cuando se construyen objetos consistentes de elementos con modelos matemáticos diferentes. Por ejemplo, en ingeniería civil emplean modelos de vigas junto con el modelo de fundaciones de Winkler, etc.

Para esta instancia tenemos dos modelos matemáticos de la mecánica de un resorte y una barra. Vamos a construir algunos problemas

usando estos modelos.

Una barra con un resorte

Consideremos el problema de equilibrio de una barra acoplada con un resorte bajo carga, ver la figura 2.4. Vamos a usar el principio

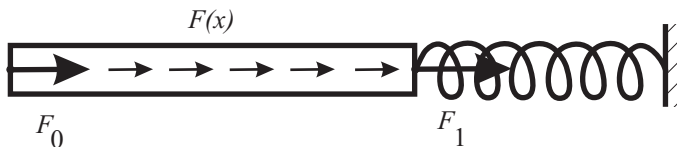


Figura 2.4: Resorte sometido a una fuerza F alargada por u .

del mínimo de la energía potencial total, para el cual necesitamos la energía de deformación de la barra

$$\frac{ES}{2} \int_0^a (u'(x))^2 dx,$$

la energía de deformación del resorte

$$\frac{k}{2} v^2,$$

donde k es el coeficiente del resorte y v el cambio de su longitud, el trabajo de las fuerzas externas sobre los desplazamientos $u(x)$

$$F_0 u(0) + \int_0^a F(x) u(x) dx + F_1 u(a).$$

Entonces, la energía potencial total del sistema deformado es

$$\mathcal{E} = \frac{ES}{2} \int_0^a (u'(x))^2 dx + \frac{k}{2} v^2 - \left(F_0 u(0) + \int_0^a F(x) u(x) dx + F_1 u(a) \right).$$

Debemos acompañar \mathcal{E} con la condición de compatibilidad

$$u(a) + v = 0.$$

Haciendo esto tenemos que el funcional \mathcal{E} depende sólo de u

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) = & \frac{ES}{2} \int_0^a (u'(x))^2 dx + \frac{k}{2} u^2(a) \\ & - \left(F_0 u(0) + \int_0^a F(x) u(x) dx + F_1 u(a) \right). \end{aligned}$$

En el equilibrio del sistema, el funcional \mathcal{E} toma el valor minimal que nos brinda la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} ES \int_0^a u'(x) \delta u(x) dx + ku(a) \delta u(a) \\ - \left(F_0 \delta u(0) + \int_0^a F(x) \delta u(x) dx + F_1 \delta u(a) \right) = 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación es la que podemos tomar para plantear el problema de equilibrio del sistema de manera generalizada.

Aquí el producto interno que define el espacio energético es

$$(u, v)_{BR} = ES \int_0^a u'(x) v(x) dx + ku(a) v(a).$$

Recomendamos demostrar que sobre el conjunto de las funciones de $C^{(2)}([0, a])$ la norma $\|u\|_{BR}$ es equivalente a la norma de $W^{1,2}(0, a)$ y entonces en el espacio energético del sistema, que es la completitud de $C^{(2)}([0, a])$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{BR}$, podemos repetir todo lo dicho para el problema de equilibrio de la barra con extremos fijos. El lector debe practicar probando el teorema de existencia y unicidad de una solución generalizada.

Usando el procedimiento típico para la derivación de la ecuación de Euler–Lagrange y las condiciones naturales, podemos ver que la solución, si es suficientemente suave, satisface la ecuación de equilibrio para la barra. Las condiciones naturales en los puntos extremos son

$$ESu'(0) = -F_0, \quad ESu'(a) = F_1 - ku(a).$$

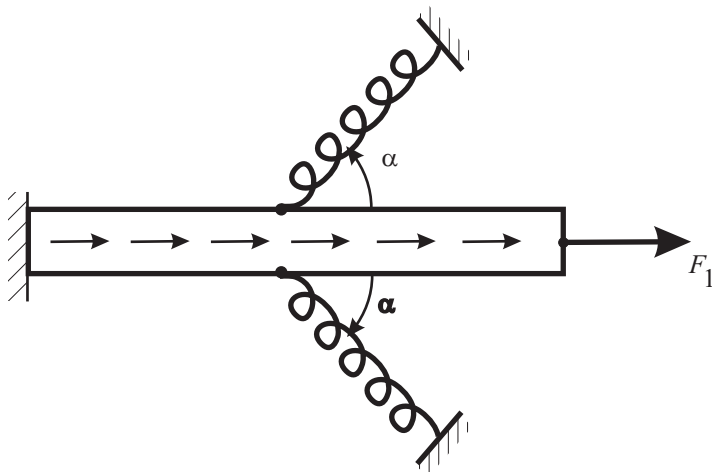


Figura 2.5: Barra bajo la acción de una fuerza axial F apoyada en dos resortes y fija en uno de sus extremos.

Es fácil deducir estas condiciones mecánicamente considerando el equilibrio de los puntos extremos. Note que hay problemas de mecánica donde la derivación formal de las condiciones naturales en la frontera es una tarea fácil, pero relativamente difícil si usamos sólo las ecuaciones del equilibrio de mecánica.

De manera similar podemos considerar los problemas de dos y más barras y/o resortes acoplados en una recta cargados por el sistema de fuerzas a lo largo del eje.

Una barra acoplada con dos resortes

Para familiarizarse aún más con el planteamiento de los problemas, consideremos la estructura de la figura 2.5.

Aquí los resortes son iguales ($k_1 = k_2$) y están inclinados un ángulo α respecto al eje de la barra. El funcional de la energía potencial total del sistema \mathcal{E} es

$$\mathcal{E} = \frac{ES}{2} \int_0^a (u'(x))^2 dx + 2 \frac{k}{2} v^2 - \int_0^a F(x) u(x) dx$$

La condición de compatibilidad en el punto $x = c$ es

$$v \cos \alpha = -u(c),$$

y entonces, en términos de los desplazamientos de la barra u , obtenemos que

$$\mathcal{E} = \frac{ES}{2} \int_0^a (u'(x))^2 dx + ku^2(c) \cos^2 \alpha - \int_0^a F(x)u(x) dx.$$

El principio del mínimo de la energía potencial total nos da la ecuación

$$ES \int_0^a u'(x) v'(x) dx + 2k u(c) v(c) \cos^2 \alpha - \int_0^a F(x) v(x) dx = 0 \quad (2.6.1)$$

que debe ser válida para toda v admisible. Esta ecuación plantea el problema de equilibrio de una manera generalizada. Todo el procedimiento para demostrar el teorema de existencia y unicidad de una solución generalizada del problema de equilibrio es análogo al procedimiento anterior. De la suma de los primeros miembros de la ecuación (2.6.1) se define el producto interno en el espacio energético para el problema.

Es interesante notar que la condición natural en el punto $x = c$ es

$$ESu'(c+0) - ESu'(c-0) = 2k \cos^2 \alpha u(c)$$

que no es evidente al deducir la condición mecánicamente.

2.7. Un modelo de la viga

Una barra suficientemente grande con respecto a sus tamaños laterales y que está sometida a una carga lateral q se denomina *viga*. La viga está soportada lateralmente en extremos o puntos intermedios y además, está bajo flexión. Consideraremos la flexión de la viga en un plano axial. Sometida a una carga, la viga tiene desplazamientos laterales que se describen usando los desplazamientos $w(x)$ de su eje neutral calculando la coordenada x a lo largo del eje. Para una viga homogénea, el eje neutral constituye los centros de gravedad de las

secciones normales. Cuando los desplazamientos $w(x)$ y $w'(x)$ bajo la carga transversal son muy pequeños, que es usualmente el caso en la teoría de vigas, el cambio de longitud de la barra es pequeño, de segundo orden con respecto a los valores de $w(x)$ y $w'(x)$. Por eso los problemas para las barras sometidas a una carga con direcciones arbitrarias se parten en dos clases de problemas: para las barras y para las vigas.

La experiencia en flexión dice que, en los puntos que constituyen la sección normal al eje neutral antes de la deformación, después de deformación se “reorganizan” en una superficie casi plana, por eso, para modelar una viga, se supone que es plana después de la deformación. Además, en el modelo más popular en resistencia de materiales, la hipótesis de Daniel Bernoulli dice que la sección normal al eje neutral después de la deformación es la sección normal al eje neutral deformado. Aceptemos esta hipótesis aquí y empezamos a construir el modelo de una viga con las fuerzas internas.

Realizamos el esquema general de la construcción de los modelos.

Las tensiones y ecuaciones del equilibrio

Las tensiones en la viga están caracterizadas con dos parámetros relacionados con las fuerzas en una sección normal (la “sección” por brevedad) que son: el esfuerzo cortante Q y el momento flector M . Debido a que una sección tiene dos lados y está equilibrada en esos lados, estos parámetros tienen un valor absoluto igual pero direcciones contrarias. Por eso, seleccionamos las direcciones positivas para ellos como está dado en la figura 2.6.

Consideremos una parte de la viga entre las secciones x y $x + \Delta x$ en equilibrio (recordemos que, como para la barra, tomamos deformaciones infinitesimales, entonces la sección es un rectángulo que no cambia sus tamaños por la carga) ver la figura 2.7. Por el principio de solidificación, para el equilibrio de la sección tomada, tenemos para las fuerzas verticales la ecuación

$$-Q(x) + \int_x^{x+\Delta x} q(s) ds + Q(x + \Delta x) = 0.$$

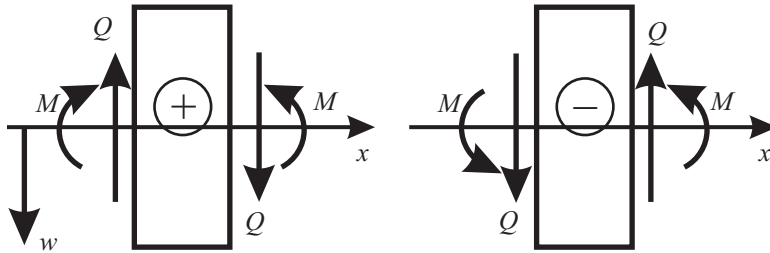


Figura 2.6: Reglas de signos para Q , M , w .

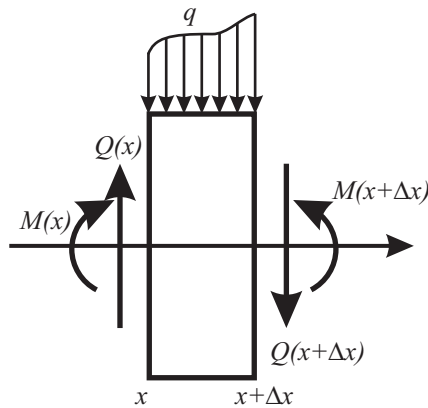


Figura 2.7: Una parte elemental de la viga entre las secciones x y $x + \Delta x$ sometida a la carga distribuida q .

Dividiendo ambas partes de la ecuación por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos que

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad (2.7.1)$$

que es la primera ecuación del equilibrio.

Para las fuerzas paralelas al eje neutral, la ecuación fue considerada según el modelo de la barra y no participa en las ecuaciones del equilibrio de la viga. La ecuación para los momentos, tomada con

respecto al polo x es

$$-M(x) - \int_x^{x+\Delta x} s q(s) ds - \Delta x Q(x + \Delta x) + M(x + \Delta x) = 0.$$

De la misma manera, dividiendo esta ecuación por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos la segunda ecuación del equilibrio

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \quad (2.7.2)$$

Eliminando Q de las ecuaciones (2.7.1) y (2.7.2) tenemos la ecuación que vamos a usar en adelante

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (2.7.3)$$

En resistencia de materiales se emplean las fuerzas F_p y los momentos flectores M_p puntuales. Cambiando la fuerza distribuida q por la fuerza puntual F_p , es fácil ver que en el punto de aplicación de F_p el esfuerzo Q tiene un “salto”:

$$Q(x + 0) - Q(x - 0) = -F_p.$$

Análogamente, si el momento flector M_p se aplica en el punto x entonces M tiene un salto en x

$$M(x + 0) - M(x - 0) = -M_p.$$

Más adelante veremos cómo estas ecuaciones de mecánica surgen del principio variacional.

Como para la barra, un problema de equilibrio de una viga se llama estáticamente definido si las ecuaciones (2.7.1) y (2.7.2) junto con los valores dados en la frontera, definen Q y M únicamente y un problema es estáticamente indefinido si las ecuaciones con las condiciones en la frontera no definen Q y M únicamente. Para los problemas estáticamente indefinidos debemos considerar la deformación y su relación con Q y M .

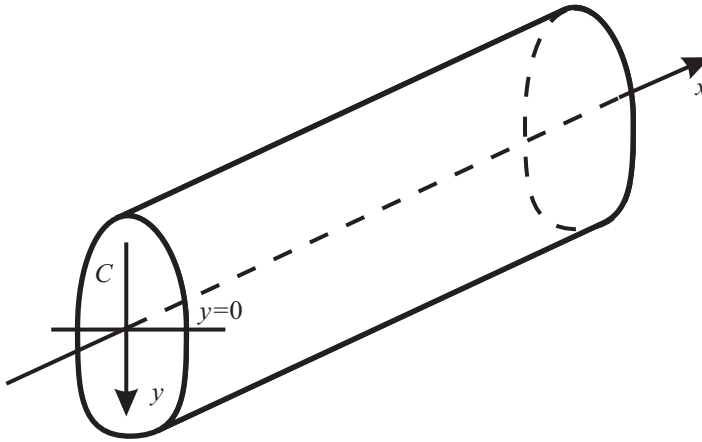


Figura 2.8: Eje neutro de una viga que pasa por el centro de masa de la sección tomada.

Deformaciones

La hipótesis de Bernoulli sobre la deformación de la viga tiene como resultado que el eje neutro de la viga pasa por el centro de gravedad de toda la sección y la distribución de deformación a lo largo del eje esta dada por la fórmula

$$\varepsilon = -y \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (2.7.4)$$

donde y es la coordenada vertical de la sección como se representa en la figura 2.8.

La ecuación $-d^2 w/dx^2 = \kappa$ es la expresión aproximada de la curvatura de la función $y = w(x)$.

La ley constitucional

Para la tensión axial σ empleamos la ley de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon,$$

donde E es el módulo de Young. El momento flector M se relaciona con σ de acuerdo a la ecuación

$$M = \int_C y\sigma \, dA,$$

donde dA es el area del elemento de la sección C . De las anteriores ecuaciones obtenemos la ley constitucional para la viga

$$M = EI\kappa = -EI \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (2.7.5)$$

donde

$$I = \int_C y^2 \, dA$$

denota el momento de la sección. La expresión EI se denomina *rigidez a la flexión de la viga*.

La ecuación del equilibrio en desplazamientos

Empleando la ecuación (2.7.5) podemos re-escribir la ecuación del equilibrio (2.7.3):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = q. \quad (2.7.6)$$

Esta es la ecuación de equilibrio en términos de los desplazamientos w que es válida para EI variable.

Las condiciones en la frontera

La ecuación (2.7.6) es de cuarto orden, por ese motivo debemos complementarla con 4 condiciones. La experiencia en ingeniería dice que debemos distribuir las condiciones de a dos para cada extremo de la barra.

Cuando ambos extremos de la viga están fijos, el problema de equilibrio puede definirse como el problema de Dirichlet. Para él tenemos las siguientes condiciones:

$$w(0) = w_{00}, \quad w'(0) = w_{01}, \quad w(a) = w_{a0}, \quad w'(a) = w_{a1}, \quad (2.7.7)$$

donde $w_{00}, w_{01}, w_{a0}, w_{a1}$ están dados.

Para el problema de Neumann están asignadas las cantidades de Q y M :

$$Q(0) = -Q_{00}, \quad M(0) = -M_{01}, \quad Q(a) = Q_{a0}, \quad M(a) = M_{a1}, \quad (2.7.8)$$

donde $Q_{00}, M_{01}, Q_{a0}, M_{a1}$ están previamente dados.

Para los problemas mixtos, en cada uno de los extremos podemos asignar las combinaciones w, M y w', Q y entonces hay 4 condiciones, incluidas w, w' y Q, M .

La energía potencial total

Para la densidad de la energía de deformación tenemos que

$$\int_0^{\varepsilon^*} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon^*} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}E(\varepsilon^*)^2.$$

Integrando esta ecuación con respecto a la longitud de la viga y usando la ecuación (2.7.4) tenemos la expresión para la energía de deformación de la viga

$$\frac{1}{2}EI \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

La energía potencial total del sistema viga–fuerzas es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(w) = & \frac{1}{2}EI \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_0^a q(x) w(x) dx \\ & - Q_{00} w(0) + M_{01} w'(0) - Q_{a0} w(a) + M_{a1} w'(a). \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

El signo “+” en los miembros M y w' es debido a que las direcciones de rotación de los momentos M y los ángulos w' son opuestos.

El principio de Lagrange

Para poder utilizar este principio, se hace necesario demostrar que un punto estacionario del funcional de la energía potencial total $\mathcal{E}(w)$ del sistema viga–fuerzas satisface la ecuación de equilibrio de la viga

y sus condiciones de Neumann. En un punto estacionario w de $\mathcal{E}(w)$ la primera variación de $\mathcal{E}(w)$ es cero:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}(w, v) = EI \int_0^a \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} dx - \int_0^a q(x) v(x) dx \quad (2.7.10) \\ - Q_{00} v(0) + M_{01} v'(0) - Q_{a0} v(a) + M_{a1} v'(a) = 0 \end{aligned}$$

para todo v virtual (admissible) que es una función arbitraria de $C^{(4)}([0, a])$. Integrando por partes dos veces la primera integral obtenemos

$$\begin{aligned} EI \int_0^a \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} v(x) dx - \int_0^a q(x) v(x) dx \\ + EI w''(a) v'(a) - EI w''(0) v'(0) \\ - EI w'''(a) v(a) + EI w'''(0) v(0) \\ - Q_{00} v(0) + M_{01} v'(0) - Q_{a0} v(a) + M_{a1} v'(a) = 0. \quad (2.7.11) \end{aligned}$$

Para deducir las ecuaciones para W empleamos el procedimiento usual en dos pasos. Primero, seleccionamos de todos los desplazamientos virtuales sólo los v que tienen los siguientes valores

$$v(0) = 0 = v(a), \quad v'(0) = 0 = v'(a).$$

Tenemos

$$\frac{1}{2} EI \int_0^a \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} v(x) dx - \int_0^a q(x) v(x) dx = 0$$

y entonces por el lema fundamental de cálculo variacional

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - q(x) = 0, \quad x \in (0, a),$$

que es la ecuación de equilibrio de la viga. Entonces en (2.7.11) los miembros con las integrales se cancelan y tenemos que

$$\begin{aligned} EI w''(a) v'(a) - EI w''(0) v'(0) - EI w'''(a) v(a) + EI w'''(0) v(0) \\ - Q_{00} v(0) + M_{01} v'(0) - Q_{a0} v(a) + M_{a1} v'(a) = 0 \end{aligned}$$

que es válida para todo $v \in C^{(4)}([0, a])$. Seleccionamos una función v tal que $v(0) = 1$ y $v(a) = v'(0) = v'(a) = 0$ de la que obtenemos

$$EIw'''(0) - Q_{00} = 0.$$

De forma semejante, seleccionando otras tres funciones tales que uno de los valores de $v(0), v(a), v'(0), v'(a)$ es uno y los otros son cero tenemos tres condiciones más:

$$-EIw'''(a) - Q_{a0} = 0, \quad -EIw''(0) + M_{01} = 0, \quad EIw''(a) + M_{a1} = 0.$$

Recordando que $M = -EIw''$, $Q = -EIw'''$ vemos que las ecuaciones que definen las condiciones naturales del problema de minimización de \mathcal{E} coinciden con las condiciones de Neumann para la viga, ecuación (2.7.8).

Ahora podemos considerar el planteamiento del problema de equilibrio para la viga.

2.8. Problemas del equilibrio para la viga

Problema de Dirichlet

Empezamos con el problema de Dirichlet para la viga. Primero introduzcamos el producto interno basándonos en la expresión de la energía de deformación de la viga

$$(w, v)_V = EI \int_0^a \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} dx.$$

Definición 2.5. *La completitud del conjunto C_{40} de las funciones w de $C^{(4)}([0, a])$ que satisfacen las condiciones $w(0) = 0 = w(a), w'(0) = 0 = w'(a)$, con respecto de la norma $\|w\|_V = (w, w)_V^{1/2}$ se define como el espacio energético H_{Vf} de la viga con los extremos fijos.*

La desigualdad

$$\int_0^a u^2(x) dx \leq C \int_0^a (u'(x))^2 dx,$$

es válida para $u \in C^{(1)}([0, a])$ que toma el valor cero en los extremos, con una constante C que no depende de u . Para las funciones del C_{40} tenemos también

$$\int_0^a (u'(x))^2 dx \leq C \int_0^a (u''(x))^2 dx.$$

Por eso, sobre H_{Vf} la norma del espacio H_{Vf} es equivalente a la norma del $W^{2,2}(0, a)$ y podemos usar en H_{Vf} el teorema de inmersión para $W^{2,2}(0, a)$. Por este teorema el operador de inmersión de $W^{2,2}(0, a)$ a $C^{(1)}([0, a])$ es continuo y entonces la formulación del problema de equilibrio puede incluir fuerzas Q_k y momentos M_k externas puntuales que actúan en los puntos x_k , $k = 1, \dots, r$.

Definición 2.6. Una solución energética (generalizada) del problema de Dirichlet para la viga, sometida a una carga q , Q_k , M_k , $k = 1, \dots, r$, con extremos fijos, $w(0) = 0 = w(a)$, $w'(0) = 0 = w'(a)$, es el elemento $w \in H_{Vf}$ que satisface la ecuación

$$EI \int_0^a \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} dx = \int_0^a q(x)v(x) dx + \sum_{k=1}^r Q_k v(x_k) - \sum_{k=1}^r M_k v'(x_k)$$

para toda $v \in H_{Vf}$.

Si $q \in L^1(0, a)$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^a q(x)v(x) dx + \sum_{k=1}^r Q_k v(x_k) - \sum_{k=1}^r M_k v'(x_k) \right| \\ & \leq \int_0^a |q(x)v(x)| dx + \sum_{k=1}^r |Q_k v(x_k)| + \sum_{k=1}^r |M_k v'(x_k)| \\ & \leq c_1 \|v\|_{C^{(1)}([0, a])} \\ & \leq c_2 \|v\|_V \end{aligned}$$

donde los c_k no dependen de $v \in H_{Vf}$. Entonces el trabajo de todas las fuerzas externas

$$A(v) = \int_0^a q(x)v(x) dx + \sum_{k=1}^r Q_k v(x_k) - \sum_{k=1}^r M_k v'(x_k)$$

es el funcional lineal y continuo en H_{Bf} . Empleando los teoremas 1.1 y 1.2 tenemos

Teorema 2.5. *Sea $Q \in L^1(0, a)$. El problema de equilibrio de la viga con extremos fijos ($w(0) = 0 = w(a), w'(0) = 0 = w'(a)$) tiene una solución energética única $u \in H_{Bf}$ de acuerdo con la definición 2.6. La solución u es el punto de mínimo del funcional de la energía potencial total $\frac{1}{2}(w, w)_V - A(v)$ en H_{Vf} .*

Recomendamos al lector considerar el problema de Dirichlet con las condiciones no-homogéneas en la frontera.

Problema de Neumann

Ahora consideremos el problema de equilibrio de una viga libre, esto es, no hay restricciones geométricas para su movimiento en el plano.

Como antes, incluimos la acción de fuerzas y momentos externos puntuales. La ecuación de equilibrio que expresa que en el punto del equilibrio la primera variación de la energía potencial total es cero, es

$$\begin{aligned}
 EI \int_0^a \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} dx - \int_0^a q(x) v(x) dx \\
 - \sum_{k=1}^r Q_k v(x_k) + \sum_{k=1}^r M_k v'(x_k) \\
 - Q_{00} v(0) + M_{01} v'(0) - Q_{a0} v(a) + M_{a1} v'(a) = 0. \quad (2.8.1)
 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $(w, w)_B = 0$ (cuando la energía de deformación de la viga es cero) si y sólo si $w = a + bx$ donde a, b son constantes. Los desplazamientos $w = a + bx$ son desplazamientos de la viga como un cuerpo rígido denominados los desplazamientos rígidos. Sustituyendo $w = a + bx$ en la ecuación (2.8.1) vemos que deben ser válidas las dos ecuaciones (la primera cuando $a = 1, b = 0$ y la segunda cuando

$a = 0, b = 1$)

$$\int_0^a q(x) dx + \sum_{k=1}^r Q_k + Q_{00} + Q_{a0} = 0, \quad (2.8.2)$$

$$\int_0^a q(x) x dx + \sum_{k=1}^r x_k Q_k + a Q_{a0} - \sum_{k=1}^r M_k - M_{01} - M_{a1} = 0.$$

Las ecuaciones dicen que las fuerzas externas son auto-equilibradas. Vamos a suponer que las ecuaciones (2.8.2) son válidas, esta es la condición necesaria para tener una solución del problema de equilibrio. Construyamos un problema suplementario, excluyendo los desplazamientos rígidos.

Definición 2.7. *El espacio H_{Vl} es la completitud, con respecto a la norma $\|\cdot\|_V$, del conjunto de todas las funciones w de $C^{(4)}([0, a])$ que satisfacen las condiciones*

$$\int_0^a w(x) dx = 0, \quad \int_0^a x w(x) dx = 0. \quad (2.8.3)$$

Es fácil probar que sobre H_{Vl}

$$\int_0^a (w^2(x) + w'^2(x)) dx \leq c(w, w)_V,$$

donde c no depende de w . En dos dimensiones esta desigualdad se denomina desigualdad de Poincaré.

Una consecuencia de esta desigualdad es

Lema 2.1. *En el espacio H_{Vl} la norma es equivalente a la norma de $W^{2,2}(0, a)$.*

Entonces podemos usar el teorema de inmersión para $W^{2,2}(0, a)$ en el espacio H_{Vl} . Su consecuencia es que el funcional del trabajo

$$A_l(v) = \int_0^a q(x) v(x) dx + \sum_{k=1}^r Q_k v(x_k) - \sum_{k=1}^r M_k v'(x_k) \\ + Q_{00} v(0) - M_{01} v'(0) + Q_{a0} v(a) - M_{a1} v'(a)$$

es lineal y continuo en H_{VI} (la demostración es similar a la demostración para el funcional de trabajo de la viga con los extremos fijos). Entonces se ha establecido el siguiente teorema

Teorema 2.6. *Sea $q \in L^1(0, a)$. Existe una única solución generalizada $w \in H_{VI}$ de la ecuación (2.8.1) que es válida para toda $v \in H_{VI}$.*

Recordamos que la viga en el problema de equilibrio del teorema tiene las restricciones (2.8.3). Ahora introducimos la siguiente definición:

Definición 2.8. *Una solución generalizada (energética, débil) es una función $w = w_0 + a + bx$ que satisface la ecuación (2.8.1) para toda $v = v_0 + c + dx$, donde $w_0 \in H_{VI}$, a, b, c, d son constantes arbitrarias y toda $v_0 \in H_{VI}$.*

Del Teorema 2.6 tenemos la siguiente consecuencia:

Teorema 2.7. *Sean $q \in L^1(0, a)$ y las fuerzas externas que satisfacen las condiciones de auto-equilibrio (2.8.2). Existe una única (hasta las constantes a, b) solución generalizada del problema de equilibrio de la viga libre de acuerdo a la definición 2.8. La solución es un punto de mínimo de la energía potencial total $\mathcal{E}(w) = \frac{1}{2}(w, w)_V - A_I(w)$ en el espacio $W^{2,2}(0, a)$.*

2.9. Problemas

Para todas las construcciones presentadas en los siguientes dibujos

1. Introducir los desplazamientos que necesite para describir la construcción.
2. Deducir las condiciones de compatibilidad.
3. Escribir el funcional de la energía completa.
4. Deducir las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones en la frontera de las partes de la construcción.
5. Introducir el espacio energético y hallar sus propiedades.
6. Formular el teorema de existencia y unicidad de la solución generalizada.

Notaciones para los problemas 2.9–2.24:

E_j – módulo de Young del material de la viga de subíndice j ;

S_j – área de la sección de la viga de subíndice j ;

I_j – momento de inercia de la sección de la viga de subíndice j ;

l_j – longitud de la viga de subíndice j ;

k_j – coeficiente de rigidez de la resorte de subíndice j .

R, R_1, R_2 – radio de la membrana.

1.

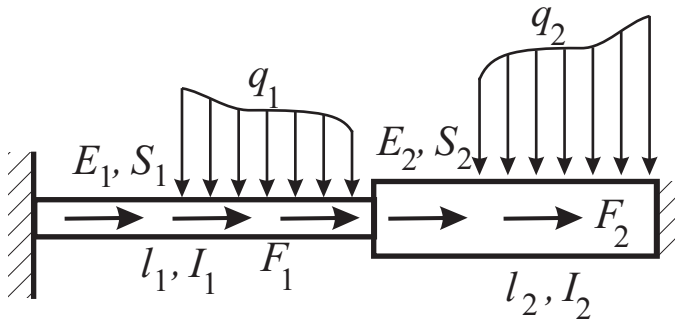


Figura 2.9: Las barras/vigas.

2.

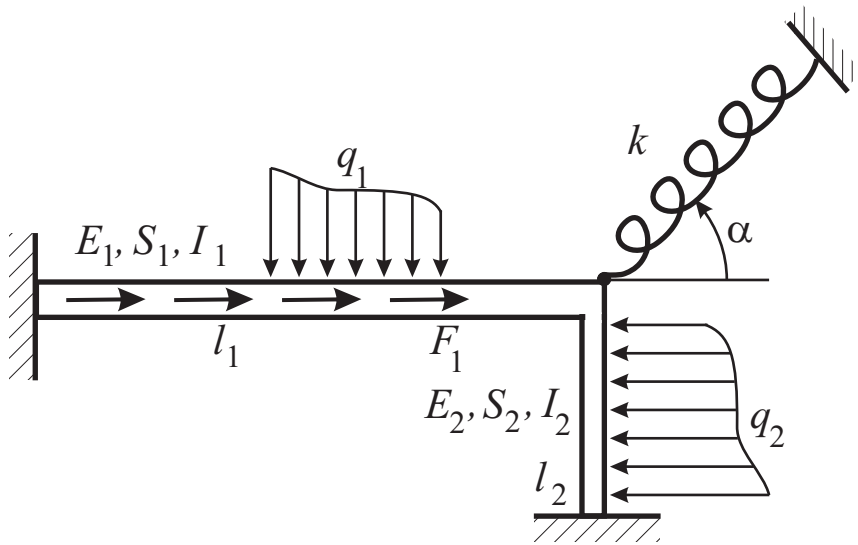


Figura 2.10: La estructura está formada por dos barras/vigas unidas mediante un enlace rígido y un resorte. Formular otro problema donde la estructura tenga un rodillo entre las vigas. ¿Cuál es la diferencia entre las formulaciones de los problemas?

3.

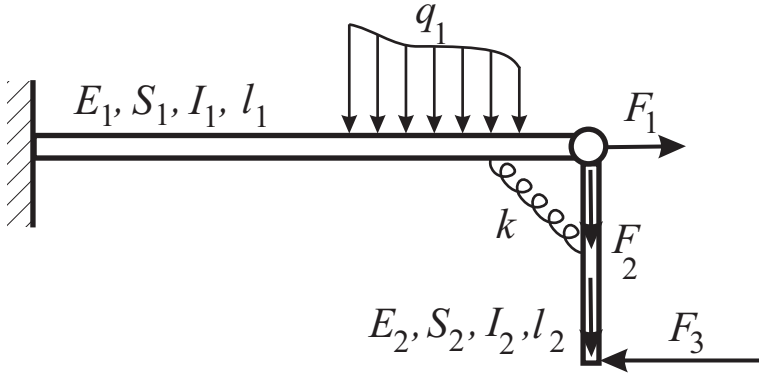


Figura 2.11: Dos vigas conectadas con una rótula y un resorte.

4.

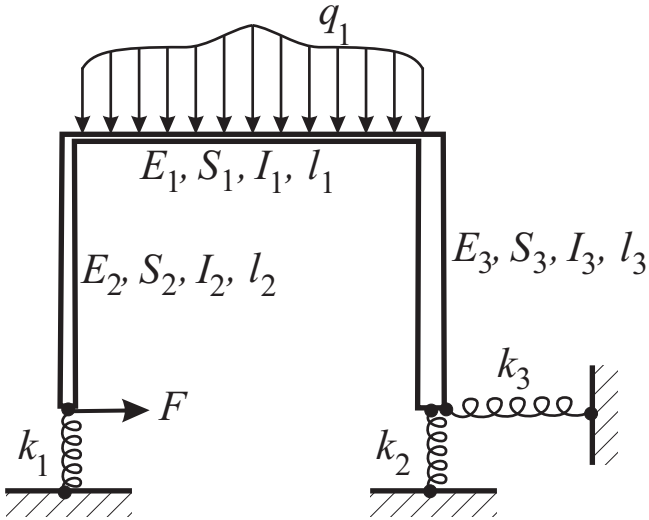


Figura 2.12: Tres vigas y resortes conectados como indica el dibujo.

5.

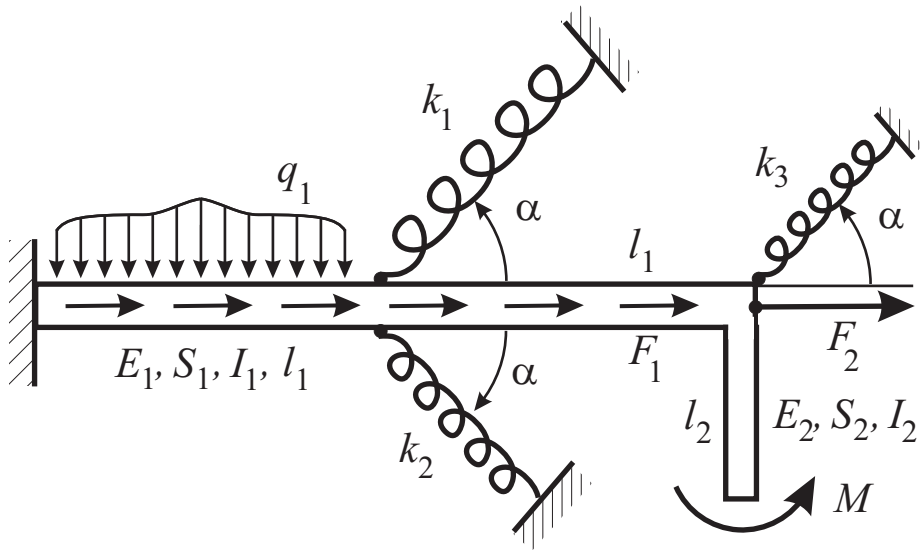


Figura 2.13: Las vigas y resortes conectados sometidos a la carga indicada.

6.

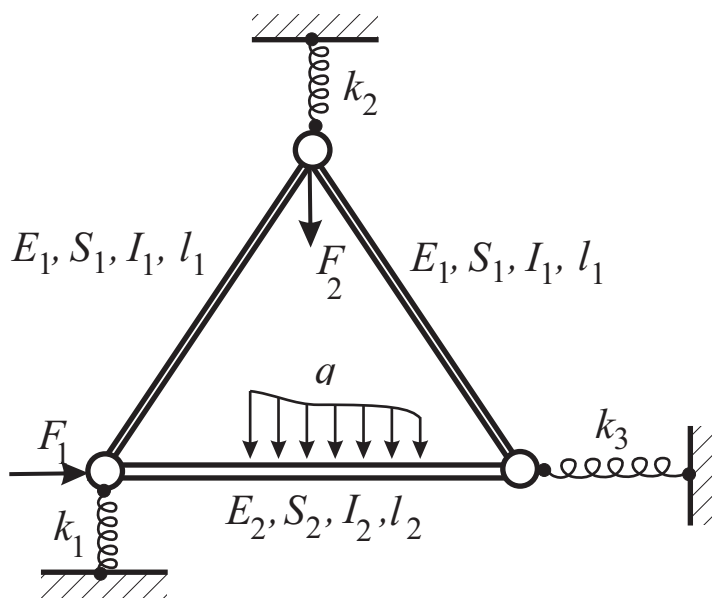


Figura 2.14: Las vigas y resortes conectados sometidos a la carga indicada.

7.

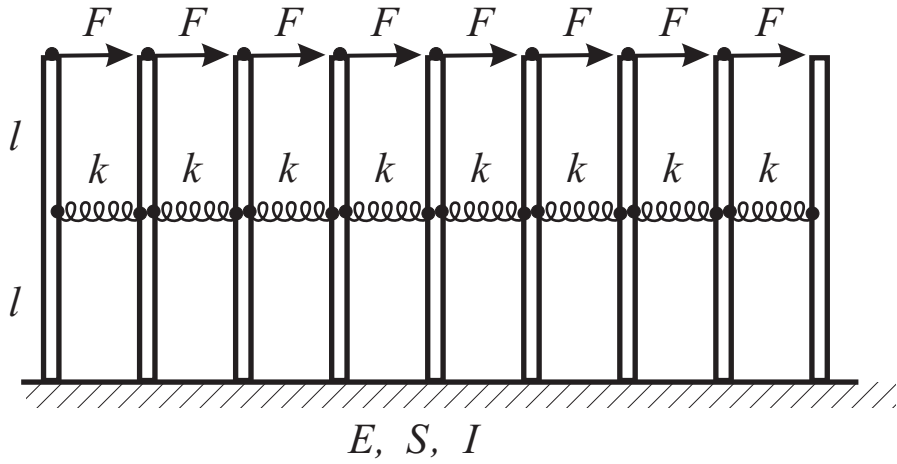


Figura 2.15: Las vigas y resortes conectados sometidos a la carga indicada.

10.

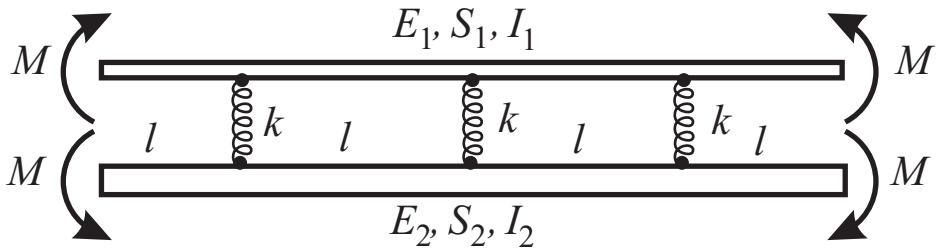


Figura 2.18: Las vigas y resortes conectados sometidos a la carga indicada.

11.

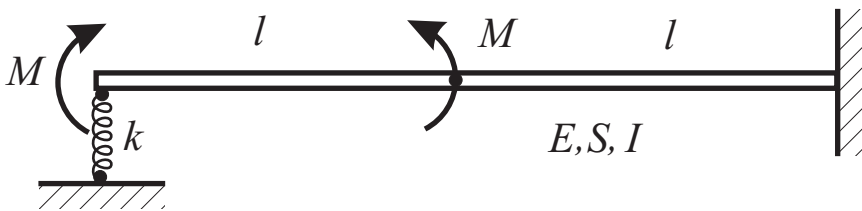


Figura 2.19: Una viga con una rótula en el centro y un resorte sometidos a la carga indicada.

12.

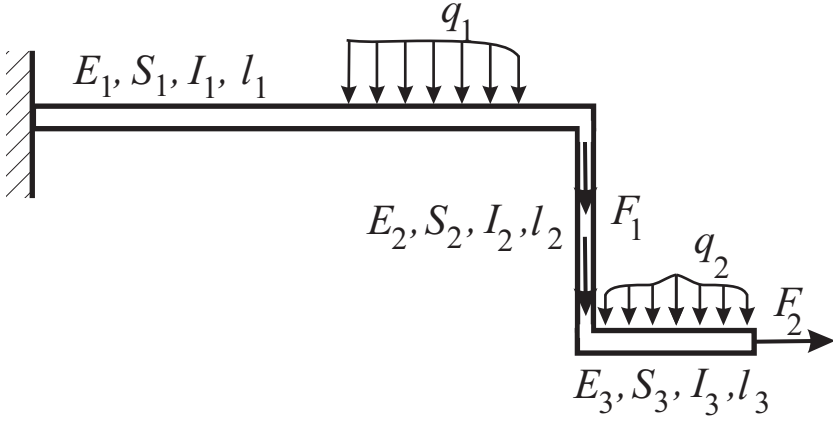


Figura 2.20: Las vigas conectadas y sometidas a la carga indicada.

13.

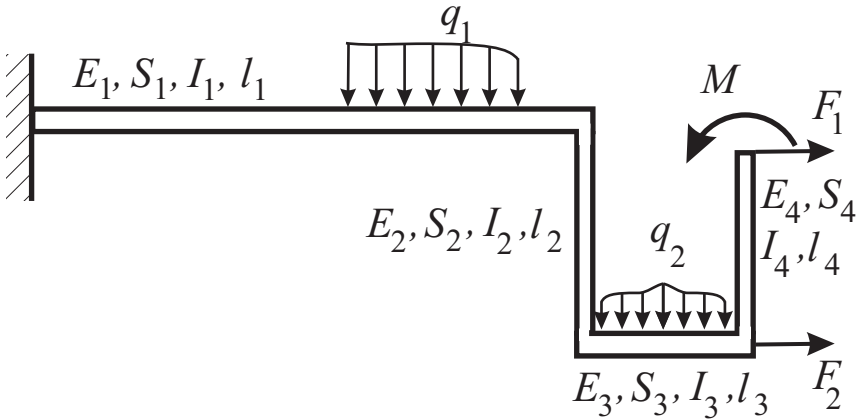


Figura 2.21: Las vigas conectadas y sometidas a la carga indicada.

14.

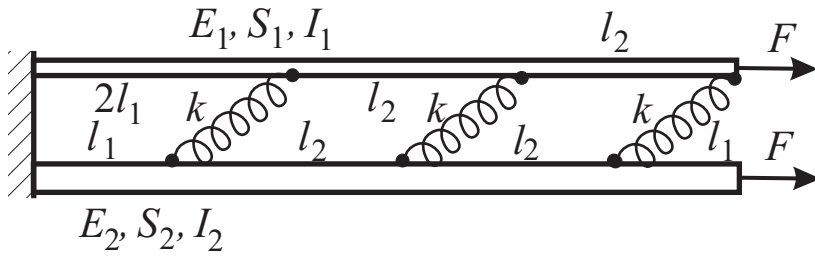


Figura 2.22: Las vigas y resortes conectados y sometidos a la carga indicada.

15.

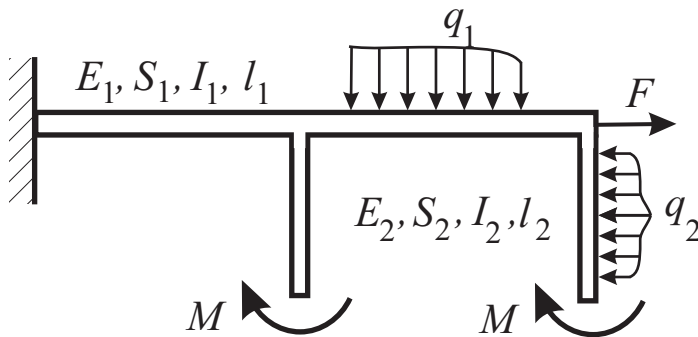


Figura 2.23: Las vigas conectadas y sometidas a la carga indicada.

16.

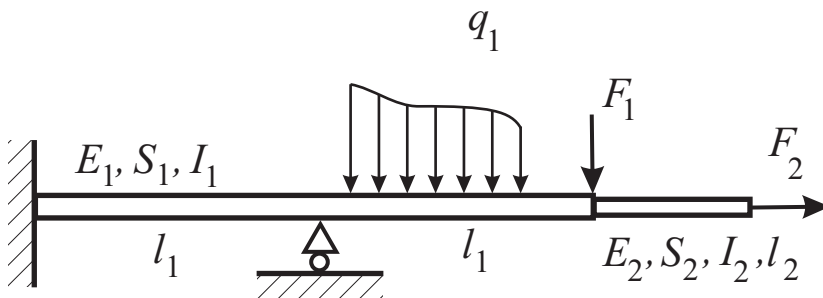


Figura 2.24: Dos vigas conectadas y sometidas a la carga indicada.

Capítulo 3

Elementos del Análisis Tensorial

Este capítulo presenta una introducción breve al análisis tensorial que necesitaremos más adelante. Una presentación más detallada la puede encontrar, por ejemplo, en [Lebedev and Cloud (2003a), Lebedev et al (2010), Simmonds (1982), Sokolnikoff (1994)].

3.1. Vectores y operaciones con vectores

Los vectores son muy comunes en física moderna, más aún en mecánica en particular. Para tener la certeza de este hecho, consideremos los vectores del espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Un vector está relacionado con el sistema de coordenadas y la base correspondiente de \mathbb{R}^3 . Sea \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 una base. Un vector \mathbf{a} tiene la siguiente representación:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad (3.1.1)$$

donde a^i son las componentes de \mathbf{a} en la base \mathbf{e}_i . Un ejemplo de una base es la base canónica de los vectores unitarios ortogonales entre sí que vamos a denotar \mathbf{i}_k , con $k = 1, 2, 3$. En adelante usaremos la regla de la sumatoria con respecto a los índices repetidos (se llama la

regla de Einstein) y la igualdad (3.1.1) la presentaremos en la forma

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i.$$

En el espacio lineal de los vectores introducimos la operación del producto punto o el producto interior de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} de acuerdo con la fórmula

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

donde $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{b}|$ son las magnitudes de \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente y θ es el ángulo mínimo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . En la base canónica $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, donde los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3,$$

tenemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

El producto punto satisface todas las propiedades del producto interno, que son

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
2. $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \beta \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \quad \forall \mathbf{a} \neq 0$.

Aquí $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son vectores arbitrarios.

Para \mathbf{a} y \mathbf{b} introduzcamos ahora el producto vectorial de \mathbb{R}^3 por la fórmula

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \equiv (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{i}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{i}_3.$$

El vector resultante del producto vectorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} es ortogonal a \mathbf{a} y \mathbf{b} y su magnitud está dada por

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta.$$

Para el producto vectorial se cumple que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Para calcular el producto vectorial respecto a la base canónica conviene usar las fórmulas:

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2.$$

Para la base \mathbf{e}_i introducimos la base dual \mathbf{e}^j definida por las fórmulas

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = \delta_j^i \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

donde

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

es el símbolo de Kronecker. Claro está que la base dual a la base canónica es la misma base, es decir $\mathbf{i}^k = \mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, 3$. Es claro que la base dual a \mathbf{e}^k es la base inicial \mathbf{e}_k .

Entonces cualquier vector \mathbf{a} puede ser representado en la base \mathbf{e}_k y su base dual \mathbf{e}^k

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i.$$

Las componentes a_i se denominan componentes covariantes y las componentes a^i componentes contravariantes. Además podemos definir las componentes mediante

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \quad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i.$$

En el caso general $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}^i$, luego $a_i \neq a^i$. Pero en la base canónica $a_i = a^i$ y por lo tanto en la base canónica no hay diferencia entre las componentes covariantes y contravariantes.

En el caso general los vectores \mathbf{e}_i no son unitarios ni ortogonales entre sí. Definamos

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Las cantidades g_{ij} se definen como *coeficientes métricos*. Es claro que $g_{ij} = g_{ji}$. En efecto, consideremos las cantidades

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j.$$

Usando la igualdad $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, podemos demostrar que la matriz g^{ij} es la inversa de la matriz g_{ij} , es decir:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

Deduzcamos ahora la fórmula para el producto punto de \mathbf{a} por \mathbf{b} en la base arbitraria. Tenemos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i \cdot b^j \mathbf{e}_j = g_{ij} a^i b^j.$$

Ahora deduzcamos otras fórmulas para el producto punto

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g^{ij} a_i b_j = \tilde{a}_i b^j = a^i b_j.$$

La notación de los vectores sin el uso de coordenadas nos permite usar varias bases. Sin embargo, necesitamos saber como cambian las componentes de los vectores cuando una base cambia a otra base. Sean dos bases de \mathbb{R}^3 que denotamos como \mathbf{e}_i y $\tilde{\mathbf{e}}_j$. Como $\tilde{\mathbf{e}}_j$ es una base, los vectores de la base \mathbf{e}_i se pueden expresar mediante

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j. \quad (3.1.2)$$

Aquí A_i^j es una matriz no-singular. Sustituyendo (3.1.2) en la representación $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ tenemos

$$\mathbf{a} = a^i A_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j.$$

Entonces, en la otra base obtenemos

$$\mathbf{a} = \tilde{a}^j \tilde{\mathbf{e}}_j \equiv A_i^j a^i \tilde{\mathbf{e}}_j, \quad \tilde{a}^j = A_i^j a^i.$$

No olvidemos que aquí utilizamos la convención de la sumatoria para los índices repetidos.

Las bases duales a \mathbf{e}_i y $\tilde{\mathbf{e}}_j$ que denotamos por \mathbf{e}^i y $\tilde{\mathbf{e}}^j$ respectivamente están relacionados entre sí por una fórmula semejante a la ecuación (3.1.2) con la matriz B_j^i

$$\mathbf{e}^i = B_j^i \tilde{\mathbf{e}}^j. \quad (3.1.3)$$

Usando la igualdad $\tilde{\mathbf{e}}_m \cdot \tilde{\mathbf{e}}^n = \delta_m^n$, podemos demostrar que la matriz B_j^i es la inversa de la matriz A_i^j , es decir, es válido que

$$B_k^j A_i^k = \delta_i^j;$$

en efecto, podemos demostrar que

$$\mathbf{a} = \tilde{a}_j \tilde{\mathbf{e}}^j, \quad \tilde{a}_j = B_j^i a_i.$$

Como resultado, tenemos las ecuaciones que relacionan las componentes “viejas” de \mathbf{a} con las componentes “nuevas”

$$a_i = A_i^j \tilde{a}_j, \quad a^i = B_j^i \tilde{a}^j.$$

Estas fórmulas demuestran que las componentes covariantes del vector cambian según la regla del cambio de la base principal \mathbf{e}_i , ecuación (3.1.2), y las componentes contravariantes cambian según la regla de transformación de la base dual, ecuación (3.1.3).

3.2. Tensores y acciones para los tensores

Hemos dicho que los vectores son utilizados en física. Por ejemplo, la fuerza está caracterizada por su magnitud y dirección, es decir, la fuerza es una cantidad vectorial. Ejemplos de vectores en mecánica y física son los vectores del momento, del desplazamiento, los vectores de la tensión en los campos magnéticos y eléctricos y muchos otros. Pero algunas veces un vector no es suficiente para describir algunos objetos en física y por eso se emplean unos objetos un poco más complicados denominados tensores. Un ejemplo de tensor es el tensor de tensiones que en mecánica continua describe la interrelación entre las partes de un cuerpo. Otros ejemplos son: los tensores de deformaciones, los tensores de coeficientes elásticos del cuerpo o el tensor de curvatura de Riemann.

Díadas y tensores

La fundación del cálculo de tensores constituye la noción del producto tensorial. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sean \mathbf{a}, \mathbf{b} , dos vectores en \mathbb{V} . El producto tensorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} es la pareja ordenada de vectores denominada díada y denotada como $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Tenemos las siguientes

propiedades para las díadas:

$$\begin{aligned}(\lambda \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} &= \mathbf{a} \otimes (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \\(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c},\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

donde λ es un escalar real arbitrario. Observemos de nuevo que la díada es una pareja ordenada, es decir, que si $\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. El producto tensorial genera un espacio lineal nuevo denominado como *producto tensorial de \mathbb{V} por \mathbb{V}* denotado por $\mathbb{T}_2 = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$. El índice 2 de \mathbb{T}_2 significa que \mathbb{T}_2 es generado por 2 espacios vectoriales. En efecto, podemos entonces introducir el producto tensorial de n copias del espacio \mathbb{V}

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \dots \otimes \mathbb{V}.$$

Los elementos de \mathbb{T}_n se definen como tensores de rango n . En las aplicaciones normalmente se usan los productos tensoriales \mathbb{T}_2 , \mathbb{T}_3 , \mathbb{T}_4 . Formalmente podemos considerar los vectores como tensores de primer rango, es decir $\mathbb{V} \equiv \mathbb{T}_1$, y los escalares como los tensores de rango cero.

Como constituyentes de los productos tensoriales podemos utilizar espacios de diferentes dimensiones como ocurre en la teoría de cáscaras donde se efectúa el producto tensorial de espacios de dos dimensiones por espacios de tres dimensiones.

Consideremos una base \mathbf{e}_i . Usando el desarrollo de vectores con respecto a la base y las propiedades de la ecuación (3.2.1), representamos la díada $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ en la forma

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i \otimes b^j \mathbf{e}_j = a^i b^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Por lo tanto, cuando $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ existen 9 díadas $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ las cuales constituyen una base en el espacio vectorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ generado por todas las díadas. Los elementos del espacio de las díadas se denominan tensores o para ser más precisos, tensores de segundo rango. Un tensor de segundo rango \mathbf{A} se representa como

$$\mathbf{A} = a^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Usando una base \mathbf{e} representamos cualquier vector \mathbf{x} como $\mathbf{x} = a^i \mathbf{e}_i$. La representación $\mathbf{A} = a^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ juega el mismo papel: $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ es una base de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ y los a^{ij} son las componentes del elemento \mathbf{A} desarrollado en esta base. Obviamente se puede representar el conjunto de las componentes mediante una matriz bidimensional. Como veremos más adelante, esta representación nos permitirá interpretar \mathbf{A} como un operador lineal en \mathbb{V} dado por su matriz a^{ij} . La introducción de la interpretación se hace de tal manera que se conservan todas las propiedades de los operadores en el espacio lineal si usamos la base canónica.

Como una base del espacio de tensores de segundo rango podemos usar no sólo $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, también los conjuntos de díadas $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ o $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$. Para cada conjunto de bases, el tensor \mathbf{A} tiene diferentes representaciones

$$\mathbf{A} = a_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = a_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j = a^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Las cantidades a_{ij} se denominan componentes covariantes del tensor \mathbf{A} , a^{ij} las componentes contravariantes y a^i_j , a_i^j las componentes mixtas. Cuando cambiamos la base de \mathbb{V} a otra, las reglas de transformación de las componentes de los tensores se obtienen de las reglas de transformación de los vectores. Dependiendo de la base, varias matrices representan al tensor. La representación matricial del tensor tiene sentido sólo si sabemos cual es la base.

De aquí en adelante, los tensores de rangos dos y superiores los denotaremos con letras mayúsculas y en negrita: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}, \mathbf{Q}$, etc.

Consideremos las principales operaciones que se realizan con los tensores de segundo rango. Es claro como introducir las operaciones de suma, el resto de las operaciones para tensores son similares a las operaciones con matrices. Introduciremos otras operaciones.

1. *Producto punto.* El producto punto de dos díadas $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ es la díada

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}.$$

Como resultado se obtiene un tensor de segundo rango.

2. *Producto punto doble.*

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

El resultado es un escalar.

3. *Producto interno.*

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}).$$

Como resultado tenemos un escalar
(pueden denotar como $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ también).

4. *Producto vectorial.*

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \times \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \otimes \mathbf{d}.$$

Como el resultado tenemos una triada que es un tensor de tercer rango.

Estas operaciones se conservan, por linealidad, para todas las operaciones de tensores de segundo rango. Por ejemplo, el producto punto de \mathbf{A} por \mathbf{B} es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (b^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = a^{ij} b^{mn} g_{jm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_n.$$

El lector puede extender fácilmente las operaciones con tensores de segundo rango a los tensores de cualquier rango.

El producto interno de los tensores de segundo rango genera la norma euclidiana en el espacio de los tensores $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A}}$.

Tensores de segundo rango

En muchas aplicaciones encontramos frecuentemente tensores de segundo rango. Desde el punto de vista de los operadores, el tensor de segundo rango \mathbf{A} puede ser considerado como un operador que actúa en el espacio \mathbb{V} por la regla

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}.$$

Un ejemplo más sencillo es el tensor unidad \mathbf{E} tal que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}.$$

El tensor unidad \mathbf{E} tiene las siguientes representaciones:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^j = g_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

El tensor \mathbf{E} es llamado también el tensor métrico porque en las bases no mixtas sus componentes son los coeficientes métricos.

Otro ejemplo de un tensor de segundo rango es el tensor nulo $\mathbf{0}$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}.$$

El tensor inverso al tensor \mathbf{A} , denotado \mathbf{A}^{-1} , es un tensor tal que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

El tensor para el cual existe un tensor inverso se denomina tensor *no-degenerado*.

El tensor transpuesto de \mathbf{A} denotado por \mathbf{A}^T se construye por la transposición de los vectores de las díadas que constituyen el tensor,

$$\mathbf{A}^T \equiv (a^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T = a^{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i.$$

Por ejemplo, para una díada tenemos $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Estos tensores los introducimos por analogía con las operaciones con matrices.

Las características más importantes del tensor son su traza y el determinante que denotamos $\text{tr } \mathbf{A}$ y $\det \mathbf{A}$ respectivamente. La traza $\text{tr } \mathbf{A}$ es la suma de las componentes diagonales mixtas del tensor

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_i^i = a_{.i}^i$$

y el determinante del tensor $\det \mathbf{A}$ es el determinante de la matriz de las componentes mixtas del tensor

$$\det \mathbf{A} = |a_i^j| = |a_{.j}^i|.$$

En particular, la traza de una díada es $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y su determinante es cero.

La traza y el determinante tienen las siguientes propiedades:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T), \quad \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}),$$

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T), \quad \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}).$$

Podemos usar la traza para escribir los productos de tensores:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T).$$

Un tensor de segundo rango se dice *simétrico* si es igual a su tensor transpuesto, es decir

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Un tensor de segundo rango se dice *antisimétrico* si

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T.$$

Un tensor antisimétrico $\mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T$ puede ser representado usando un vector $\boldsymbol{\omega}$ que únicamente está relacionado con $\mathbf{\Omega}$ como sigue:

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Un tensor de segundo rango puede ser representado como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T,$$

que son

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

Un tensor \mathbf{Q} se dice *ortogonal* si su transpuesto es su inverso:

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}.$$

De aquí tenemos que $\det \mathbf{Q} = \pm 1$. Un tensor ortogonal cuyo determinante es igual a 1 se denomina *tensor ortogonal propio* o *tensor de*

rotación. Este tensor describe la rotación de un cuerpo por el ángulo ω con respecto a un eje \mathbf{e} y puede ser representado por la fórmula

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \cos \omega + (1 - \cos \omega) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{e} \times \mathbf{E} \sin \omega.$$

Una propiedad muy valiosa de los tensores ortogonales es que conservan la métrica, por lo tanto conservan las magnitudes de los vectores y los ángulos entre ellos, lo que es una consecuencia de la fórmula

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Un vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ que satisface la siguiente ecuación

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{3.2.2}$$

para algún λ se llama *vector propio* y el λ correspondiente se denomina *valor propio* del tensor \mathbf{A} . La pareja (λ, \mathbf{x}) , $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ es la *pareja propia* del tensor \mathbf{A} . Por la ecuación (3.2.2) vemos que el vector propio está definido hasta un factor constante, por eso usualmente toman el vector propio unitario.

La ecuación (3.2.2) puede ser escrita como

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

de donde obtenemos que los valores propios del tensor están definidos por la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

que puede ser escrita en la forma

$$-\lambda^3 + I_1(\mathbf{A})\lambda^2 - I_2(\mathbf{A})\lambda + I_3(\mathbf{A}) = 0. \tag{3.2.3}$$

La parte izquierda es un polinomio de tercer grado, por lo tanto la ecuación (3.2.3) no tiene más de tres raíces diferentes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Los coeficientes $I_1(\mathbf{A})$, $I_2(\mathbf{A})$, y $I_3(\mathbf{A})$ se definen como primer, segundo y tercer invariantes del tensor \mathbf{A} , estos pueden representarse mediante las componentes de \mathbf{A} por las fórmulas

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}, \quad I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr } \mathbf{A}^2), \quad I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.$$

En términos de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los invariantes tienen la representación

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2(\mathbf{A}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ I_3(\mathbf{A}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Tomando en consideración el punto de vista del tensor como un operador en un espacio finito dimensional podemos transferir todas las propiedades conocidas para matrices y operadores lineales a los tensores de segundo rango. En particular, cualquier tensor simétrico tiene tres vectores propios ortogonales entre sí.

Para el tensor simétrico \mathbf{A} , existe el desarrollo espectral ortogonal

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

donde $\lambda_k, \mathbf{e}_k, k = 1, 2, 3$ son las parejas propios de \mathbf{A} y $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Para el tensor de segundo rango es válido el teorema de Cayley–Hamilton que afirma que \mathbf{A} satisface su ecuación característica, es decir, que tenemos la identidad

$$-\mathbf{A}^3 + I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 - I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_3(\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

El teorema de Cayley–Hamilton nos permite encontrar cualquier potencia entera del tensor usando sólo sus grados inferiores de tres y sus invariantes. Por ejemplo si \mathbf{A} es un tensor no–degenerado tenemos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})} [\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{E}].$$

Tensores de rango superior

En muchas aplicaciones se usan tensores de rango mayor que dos. Ejemplos de tensores de rango tres y cuatro son los productos tensoriales de tres y cuatro vectores respectivamente

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}.$$

Desde el punto de vista de los operadores, el tensor de tercer rango \mathbf{A} es un operador lineal de \mathbb{V} a \mathbb{T}_2 que actúa por la regla

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{T}_2$$

o podemos considerarlo como un operador lineal de \mathbb{T}_2 a \mathbb{V} : $\mathbf{y} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{X}$. En efecto, un tensor \mathbf{C} de rango 4 puede ser considerado como un operador lineal de \mathbb{T}_2 a \mathbb{T}_2 :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \bullet \mathbf{X}.$$

Un ejemplo valioso de un tensor de tercer rango es el tensor de Levi–Chivita

$$\mathcal{E} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}.$$

Nótese que \mathcal{E} es un pseudo-tensor pero aquí no vamos a distinguir entre los tensores y pseudo-tensores. La representación en componentes de \mathcal{E} es

$$\mathcal{E} = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k.$$

Aquí el símbolo de “permutación” ϵ_{ijk} está dado por la fórmula

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i.$$

Un ejemplo físico de un tensor de tercer rango es el tensor de las constantes piezoeléctricas en electro–elasticidad.

Como un ejemplo no–trivial consideremos el tensor unidad \mathbf{I} de cuarto rango definido por la fórmula

$$\mathbf{I} \bullet \mathbf{X} = \mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{T}_2.$$

En componentes \mathbf{I} es

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m.$$

Otros ejemplos de tensores de cuarto rango son el tensor de las constantes elásticas en la teoría de elasticidad y el tensor de curvatura de Riemann.

Funciones tensoriales

En aplicaciones encontramos las funciones tensoriales, es decir, funciones cuyos argumentos y valores son tensores. Como ejemplo consideremos una función lineal de una variable:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{T}_p, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{T}_q.$$

$$\mathbf{F}(\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}) = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \beta\mathbf{F}(\mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{T}_p, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Para la función lineal existe una representación única de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \bullet \mathbf{X}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{T}_{p+q}.$$

En las aplicaciones son interesantes unos casos particulares de representación. Es decir, cualquier función vectorial y lineal en la variable vectorial \mathbf{x} tiene la forma del producto punto de algún tensor de segundo rango \mathbf{A} por \mathbf{x} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{T}_2.$$

Otra representación, una función tensorial cualquiera con valores en \mathbb{T}_2 cuyo argumento es un tensor de segundo rango, tiene una representación única

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \bullet \mathbf{X}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{T}_4.$$

En particular, esta es la forma que toma la ley de Hook generalizada en la teoría de elasticidad:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \bullet \boldsymbol{\varepsilon},$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de deformaciones y \mathbf{C} el tensor de las constantes elásticas.

En mecánica continua no-lineal se emplean funciones que tienen la propiedad de ser invariantes con respecto a algunas transformadas de sus argumentos. Por ejemplo, las funciones isotrópicas se usan para describir las ecuaciones constitucionales de los materiales isotrópicos. La función $\mathbf{F} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_2$ se denomina isotrópica si satisface a la condición

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Q},$$

para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} .

Una función lineal isotrópica $\mathbf{F} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_2$ tiene la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \alpha \mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{X} + \beta \mathbf{X} + \gamma \mathbf{X}^T, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

El tensor de cuarto rango que corresponde a ella es

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \beta \mathbf{I} + \gamma \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{e}^k.$$

Una consideración más detallada acerca de las funciones tensoriales puede ser encontrada en libros [Truesdell and Noll (2004)], [Lebedev et al (2010), Spencer (1971), Ogden (1997)].

3.3. Los campos tensoriales

Consideremos ahora los campos vectoriales y tensoriales. Los cuerpos para los que definimos los campos están descritos en el espacio de tres dimensiones. A cada punto del espacio asociamos el vector que va desde el origen de coordenadas al punto \mathbf{r} y lo denominamos *vector de posición*. De esta manera tenemos la descripción de los puntos del espacio usando el espacio de vectores \mathbb{R}^3 . En el espacio \mathbb{R}^3 vamos a conservar la terminología del espacio inicial para la descripción de los objetos.

Un campo tensorial es una función que va de una región de \mathbb{R}^3 a un espacio de tensores de cierto rango; por lo tanto la función tensorial asigna a cada punto de la región (un cuerpo) algún tensor de un espacio de tensores. Para determinar la posición de un punto en el espacio podemos usar las coordenadas en el espacio inicial que pueden ser cartesianas, cilíndricas, esféricas o cualquier otra. Si las líneas de coordenadas no son rectas, las coordenadas se denominan coordenadas curvilíneas.

Las coordenadas curvilíneas de un punto en \mathbb{R}^3 son tres números (variables) q^1, q^2, q^3 . Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cartesianas x^1, x^2, x^3 . Escribimos dicha relación en la forma

$$x^i = x^i(q^1, q^2, q^3), \quad q^i = q^i(x^1, x^2, x^3) \quad (i = 1, 2, 3).$$

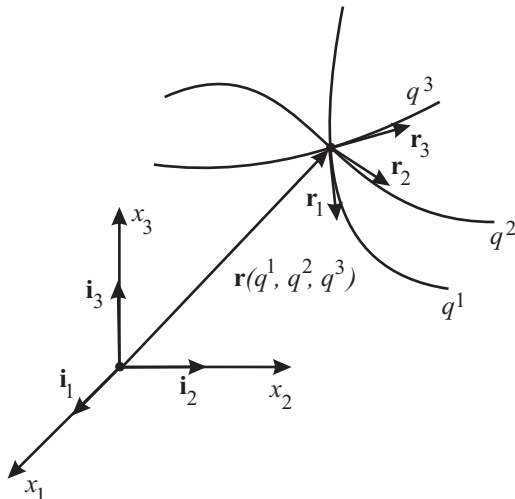


Figura 3.1: Coordenadas curvilíneas.

La correspondencia es uno a uno pero puede no existir en algunos puntos o curvas singulares como en el polo del sistema de coordenadas esféricas. El vector de posición lo podemos representar en coordenadas cartesianas como $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$ o en coordenadas curvilíneas q^1, q^2, q^3 , por lo tanto \mathbf{r} será una función de tres variables

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3).$$

Vamos a suponer que $\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ es suficientemente suave, tal que cuando necesitamos algunas derivadas de \mathbf{r} estas sean continuas. Como la correspondencia entre q^1, q^2, q^3 y x^1, x^2, x^3 es uno a uno implica que el Jacobiano de la transformada de las coordenadas es diferente de cero, es decir

$$J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right| \neq 0$$

excepto en algunos puntos o líneas singulares.

Fijando dos de las tres coordenadas curvilíneas, tenemos una curva coordenada, ver la figura 3.1. Diferenciado \mathbf{r} con respecto a las

variables coordenadas tenemos el conjunto de los vectores

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2}, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3}.$$

Los vectores \mathbf{r}_k son tangentes a las líneas coordenadas correspondientes. Entonces \mathbf{r}_1 es tangente a la línea donde sólo q^1 cambia. De la misma manera \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 son tangentes a las líneas q^2 y q^3 respectivamente. Si el punto (q^1, q^2, q^3) no es singular, es decir que $J(q^1, q^2, q^3) \neq 0$, entonces los vectores $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ no son coplanares y constituyen una base de \mathbb{R}^3 .

La base dual \mathbf{r}^i está definida por las ecuaciones

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i.$$

Los coeficientes métricos de las bases son

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, \quad g_i^j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \delta_i^j.$$

Usando los coeficientes métricos podemos expresar la longitud del elemento infinitesimal $d\mathbf{r}$

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i dq^i \cdot \mathbf{r}_j dq^j = g_{ij} dq^i dq^j, \quad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}_i dq^i.$$

Sea $f(q^1, q^2, q^3)$ una función diferenciable respecto a los q^i con valores escalares. Su primer diferencial puede ser escrito como

$$df(q^1, q^2, q^3) = \frac{\partial f(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora, introduzcamos formalmente el vector

$$\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

denominado *operador nabla* (de Hamilton). Su acción sobre una función f está definida por la fórmula

$$\nabla f = \mathbf{r}^i \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

A menudo, el operador nabla se le denomina como el operador *gradiente*.

Usando el operador nabla ∇ , podemos representar el diferencial de la función vectorial $\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)$ en la forma

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f}^T \cdot d\mathbf{r}.$$

La cantidad $\nabla \mathbf{f}$ se define como gradiente de \mathbf{f} y es un tensor de segundo rango. En literatura algunas veces se le dice simplemente gradiente de f a la cantidad $\nabla \mathbf{f}^T$. La expresión $\nabla \mathbf{f}^T$ se dice la derivada de \mathbf{f} con respecto a \mathbf{r} y se denota como

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}} = \nabla \mathbf{f}^T.$$

Consideremos ahora formalmente el operador nabla ∇ como un vector. Sus productos internos y externos formales con $\mathbf{f} = \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)$ definen la divergencia y el rotacional del vector:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i}.$$

De la misma manera introducimos ahora la divergencia y el rotacional para un campo tensorial arbitrario \mathbf{A} de cualquier rango

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{A}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{A}.$$

Sean f y g funciones escalares, \mathbf{f} y \mathbf{g} funciones vectoriales y \mathbf{Q} una función tensorial donde \mathbf{Q} pertenece al espacio de tensores de segundo rango. Son válidas las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g, \\ \nabla(f\mathbf{f}) &= (\nabla f)\mathbf{f} + f\nabla \mathbf{f}, \\ \nabla(f\mathbf{Q}) &= (\nabla f)\mathbf{Q} + f\nabla \mathbf{Q}, \\ \nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g}^T = (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f}, \\ \nabla(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= (\nabla \mathbf{f}) \times \mathbf{g} - (\nabla \mathbf{g}) \times \mathbf{f}, \\ \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g} + \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) &= (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g} + \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Para diferenciar las funciones vectoriales y tensoriales debemos saber como derivar los vectores de la base. Por ejemplo, la derivada de una función vectorial está dada por la fórmula

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) &= \frac{\partial}{\partial q^k} [f^i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{r}_i] \\ &= \frac{\partial f^i(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + f^i(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k}.\end{aligned}$$

Observemos que las derivadas de los vectores de la base tienen las siguientes propiedades de simetría:

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i = \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r}_j. \quad (3.3.1)$$

Ya que \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3$) es una base, podemos desarrollar $\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i$ en la base

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k.$$

Las cantidades Γ_{ij}^k se denominan coeficientes (o símbolos) de Christoffel de segundo género. Para ellos se usan frecuentemente la notación

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}.$$

De acuerdo a la ecuación (3.3.1) los coeficientes de Christoffel poseen las siguientes propiedades de simetría

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t \right) \mathbf{r}_i.$$

La anterior expresión se denomina derivada covariante y el coeficiente de \mathbf{r}_i es la derivada covariante de la función vectorial \mathbf{f} que denotamos

$$\nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t.$$

Podemos expresar los símbolos de Christoffel usando los coeficientes métricos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kt} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{tj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^t} \right). \quad (3.3.2)$$

También se pueden utilizar los símbolos de Christoffel de primer género Γ_{ijk} denotados como $[ij, k] = \Gamma_{ijk}$.

Estos están dadas por la fórmula

$$\Gamma_{ijt} = \Gamma_{ij}^k g_{kt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{tj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^t} \right).$$

Las derivadas de los vectores de la base dual las podemos expresar usando los símbolos de Christoffel

$$\frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial q^i} = -\Gamma_{it}^j \mathbf{r}^t.$$

Entonces, las fórmulas de diferenciación del campo vectorial son

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^k \nabla_i f_k = \mathbf{r}_j \nabla_i f^j,$$

donde

$$\nabla_k f_i = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^j f_j, \quad \nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t.$$

El gradiente del vector

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j \nabla_i f_j = \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_j \nabla_i f^j$$

muestra que $\nabla_i f_j$ son las componentes covariantes de $\nabla \mathbf{f}$ y $\nabla_i f^j$ son las componentes mixtas de $\nabla \mathbf{f}$.

Para el campo tensorial de segundo rango \mathbf{A} , las relaciones son mas complicadas porque aquí debemos diferenciar las díadas

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} = \nabla_k a^{ij} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j = \nabla_k a_{ij} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j,$$

donde

$$\nabla_k a^{ij} = \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a^{sj} + \Gamma_{ks}^j a^{is}, \quad \nabla_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is}.$$

Reenumerando los ejes si es necesario tenemos que el Jacobiano es positivo lo cual supondremos en adelante. En este caso

$$J \equiv \sqrt{g} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right| \quad (3.3.3)$$

Usando la identidad

$$\Gamma_{in}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^n},$$

presentamos la divergencia de campos vectoriales y tensoriales de manera que esta no contiene los símbolos de Christoffel

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} f^i), \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} a^{ij} \mathbf{r}_j). \quad (3.3.4)$$

Usaremos ahora las coordenadas curvilíneas q^1, q^2, q^3 en varias fórmulas de integración. Sea f una función continua en las coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 sobre la región V . En las coordenadas curvilíneas q^1, q^2, q^3 la función f está representada como $f(q^1, q^2, q^3)$. La integral de f la calculamos mediante

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_V f(q^1, q^2, q^3) J dq^1 dq^2 dq^3,$$

$$J = \sqrt{g} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q^j} \right|.$$

Recordemos el teorema de Gauss–Ostrogradsky. Para una función escalar f es válida la igualdad

$$\int_V \nabla f dV = \int_S f \mathbf{n} dS.$$

Existen fórmulas similares para funciones vectoriales y tensoriales \mathbf{f} y \mathbf{A} respectivamente.

$$\int_V \nabla \mathbf{f} dV = \int_S \mathbf{n} \otimes \mathbf{f} dS, \quad \int_V \nabla \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \otimes \mathbf{A} dS.$$

De aquí obtenemos las fórmulas para la divergencia

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dS, \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS,$$

y otras tales como

$$\int_V \nabla \times \mathbf{f} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS, \quad \int_V \nabla \mathbf{f}^T dV = \int_S \mathbf{f} \otimes \mathbf{n} dS,$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS.$$

Las fórmulas anteriores relacionan las integrales sobre un volumen con las integrales sobre su frontera. Existen fórmulas similares para relacionar las integrales sobre una superficie y su contorno. La fórmula principal de este tipo es la fórmula de Stokes que, para una función vectorial \mathbf{f} dada sobre una región–superficie S simplemente conexa y de contorno Γ tiene la forma

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f} dS.$$

Para una función tensorial \mathbf{A} con valores en el espacio de tensores de segundo rango la fórmula de Stokes toma la forma

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} dS \quad (3.3.5)$$

o

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A}^T dS.$$

Observemos que la fórmula (3.3.5) es válida también cuando \mathbf{A} toma valores en el espacio de tensores de cualquier rango, superior a 2.

3.4. Superficies y curvas espaciales

Para los problemas de física y mecánica en particular los objetos matemáticos como curvas y superficies son muy importantes. Usando las curvas que describen vigas y barras en mecánica, la técnica

de superficies es el centro en la teoría de cáscaras [Antman (2005), Ciarlet (1997), Ciarlet (2010), Ciarlet (2000), Destuynder and Salaun (1996), Eremeyev and Zubov (2008), Lebedev et al (2010), Libai and Simmonds (1998), Sokolnikoff (1994), Vorovich (1999)]. Presentaremos algunos hechos de geometría diferencial acerca de las curvas y superficies en el espacio tridimensional.

Las curvas espaciales

La ecuación de una curva espacial ℓ está dada en la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

o en coordenadas cartesianas, tenemos tres ecuaciones

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t).$$

Aquí $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Supongamos que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es de clase $C^{(2)}$.

La longitud de la parte de ℓ que corresponde al segmento $t \in [t_1, t_2]$ está definida por la fórmula

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt, \quad (\dot{\dots}) \equiv \frac{d}{dt}(\dots).$$

Podemos usar como parámetro t un elemento de longitud s de la curva. La parametrización de la curva con respecto a s , sería $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, y la denominamos parametrización natural.

El vector unitario tangente a ℓ en un punto está definido por la fórmula

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'(s), \quad (\dots)' \equiv \frac{d}{ds}(\dots).$$

Diferenciando $\boldsymbol{\tau}$ definimos la curvatura de la curva en el punto:

$$\boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu},$$

donde el vector unitario $\boldsymbol{\nu}$ se llama vector principal normal a ℓ y k es la curvatura de ℓ .

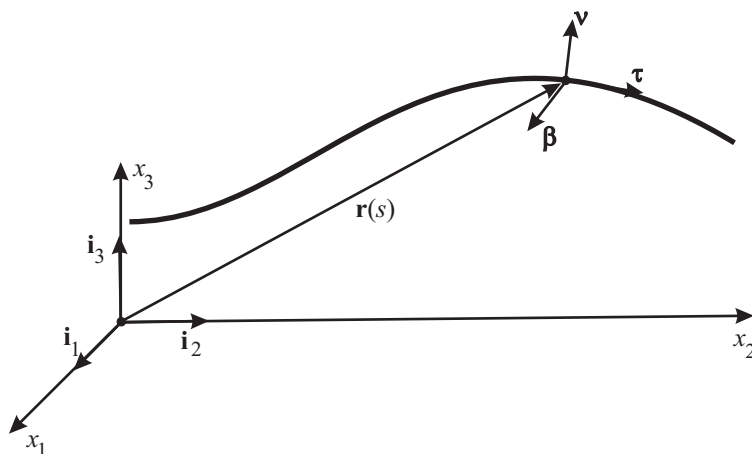


Figura 3.2: Una curva en el espacio y su triedro natural

Como τ es un vector unitario, su derivada ν es ortogonal a τ . El vector $\beta = \tau \times \nu$ es unitario y ortogonal a τ y ν . El vector β se llama vector binormal. El triedro τ , ν y β constituyen el *triédro natural* o la base natural en un punto de la curva ℓ (vea la figura 3.2). Para los vectores del triedro son válidas las fórmulas de Frenet–Serret

$$\begin{aligned}\tau' &= k\nu, \\ \nu' &= -k\tau - \varkappa\beta, \\ \beta' &= \varkappa\nu.\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

\varkappa se denomina torsión de la curva. Para una curva plana $\varkappa = 0$. Si $k(s)$ y $\varkappa(s)$ están dados como funciones de s entonces la posición de la curva en el espacio estará definida únicamente hasta su traslación paralela y rotación como un sólido. Si $k(s) = \varkappa(s) = 0$ entonces la curva es una línea recta.

Las fórmulas (3.4.1) tienen una forma más compacta

$$\tau' = \omega \times \tau, \quad \nu' = \omega \times \nu, \quad \beta' = \omega \times \beta,\tag{3.4.2}$$

donde $\omega = -\varkappa\tau + k\beta$ se llama vector de Darboux.

Utilizamos las fórmulas (3.4.1) o (3.4.2) para buscar la derivadas de los campos vectoriales y tensoriales dados sobre una curva. Como un

ejemplo consideremos como calcular la derivada del campo vectorial \mathbf{Q} definido sobre ℓ . Sea

$$\mathbf{Q} = Q_1\boldsymbol{\tau} + Q_2\boldsymbol{\nu} + Q_3\boldsymbol{\beta}.$$

La derivada de \mathbf{Q} es

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}' &= Q_1'\boldsymbol{\tau} + Q_2'\boldsymbol{\nu} + Q_3'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} \\ &= (Q_1' - kQ_2)\boldsymbol{\tau} + (Q_2' + kQ_1 + \varkappa Q_3)\boldsymbol{\nu} + (Q_3' - \varkappa Q_2)\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

En forma similar se puede calcular la derivada de un campo tensorial de rango arbitrario definido sobre ℓ y escrito en el triedro natural $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$.

Elementos de la teoría de superficies

La ecuación de una superficie Σ en forma paramétrica está dada por medio del vector-radio

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(q^1, q^2),$$

donde q^1, q^2 son las coordenadas curvilíneas $(q^1, q^2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para evitar dudas con el contenido de los párrafos anteriores, cambiaremos \mathbf{r} por $\boldsymbol{\rho}$. La ecuación vectorial de la superficie es equivalente a tres ecuaciones escalares

$$x_1 = x_1(q^1, q^2), \quad x_2 = x_2(q^1, q^2), \quad x_3 = x_3(q^1, q^2).$$

Como en el caso de la curva, vamos a suponer que la función vectorial $\boldsymbol{\rho}$ es de clase C^2 .

Fijando una de las coordenadas, por ejemplo $q^2 = q_0^2$, tenemos la ecuación de la línea coordenada $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(q^1, q_0^2)$. Un ejemplo de una superficie con las líneas coordenadas aparece en la figura 3.3.

Las derivadas de $\boldsymbol{\rho}$ con respecto a q^1 y q^2 en un punto de Σ constituyen la base del plano tangente a Σ en el punto

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial q^1}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial q^2}.$$

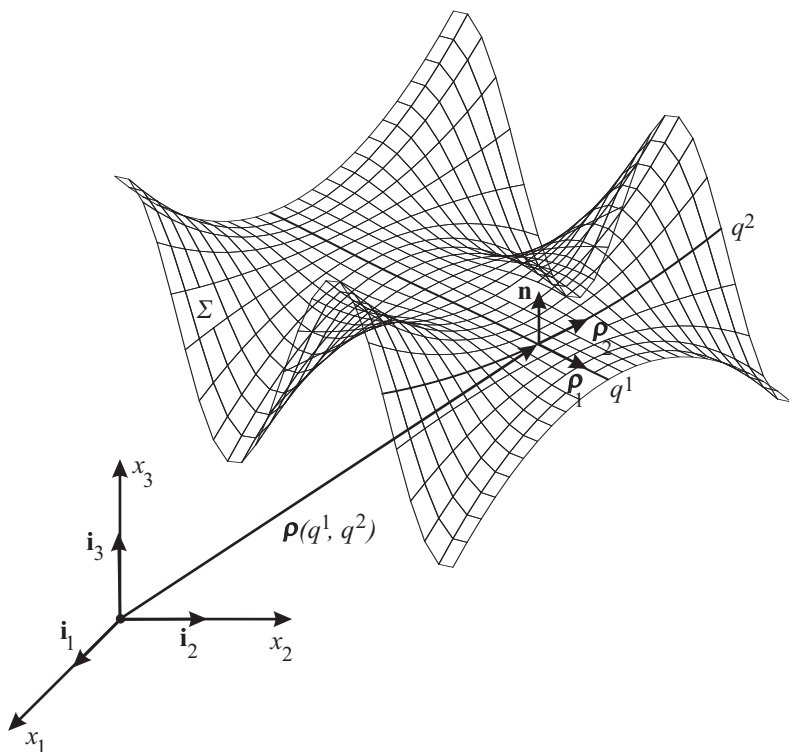


Figura 3.3: La superficie Σ y las líneas coordenadas (q^1, q^2) sobre ella

Los vectores ρ_1 y ρ_2 son tangentes a las líneas de coordenadas $q^2 = q_0^2$ y $q^1 = q_0^1$ respectivamente. El vector normal unitario \mathbf{n} a Σ está definido por la fórmula

$$\mathbf{n} = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|}.$$

Los vectores ρ_1 , ρ_2 y \mathbf{n} constituyen una base de \mathbb{R}^3 en todo punto de Σ . La base dual a este es el triedro $\rho^1, \rho^2, \mathbf{n}$, donde ρ^1, ρ^2 se definen por las ecuaciones

$$\rho_\alpha \cdot \rho^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

De aquí en adelante los índices griegos toman los valores 1 y 2 y los índices latinos toman los valores 1, 2, 3.

La longitud del segmento elemental que pertenece a Σ está determinado por la fórmula

$$ds^2 = d\boldsymbol{\rho} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_i dq^i \cdot \boldsymbol{\rho}_j dq^j = a_{ij} dq^i dq^j,$$

donde $a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta$ son los coeficientes métricos de Σ . La forma cuadrática $a_{ij} dq^i dq^j$ es la primera forma cuadrática de Σ . De manera similar definimos los coeficientes métricos $a^{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}^\beta$.

El área de una parte elemental de Σ está dada por la fórmula

$$da = |\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2| dq^1 dq^2.$$

Introducimos el tensor métrico \mathbf{A} de Σ mediante

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha = \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

donde \mathbf{E} es un tensor unitario en \mathbb{R}^3 . \mathbf{A} tiene el papel de tensor unitario que actúa en el plano tangente a Σ . Si un vector \mathbf{u} pertenece a la superficie tangente a Σ en un punto, es decir que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Podemos demostrar que

$$\mathbf{A} = a_{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}^\alpha \boldsymbol{\rho}^\beta = a^{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\alpha \boldsymbol{\rho}_\beta.$$

El tensor \mathbf{A} también es el primer tensor fundamental de la superficie Σ .

El vector gradiente superficial sobre Σ está definido como

$$\tilde{\nabla} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}.$$

Para calcular las fórmulas de derivadas de los campos tensoriales y vectoriales sobre Σ necesitamos las fórmulas de derivadas de los vectores de la base $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\rho}^1, \boldsymbol{\rho}^2$. Primero consideremos las derivadas de \mathbf{n} :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} = -b_{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}^\beta.$$

Las componentes $b_{\alpha\beta}$ definen el tensor simétrico de segundo rango

$$\mathbf{B} = b_{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}^\alpha \boldsymbol{\rho}^\beta \equiv -\tilde{\nabla} \mathbf{n}.$$

\mathbf{B} es el segundo tensor fundamental de Σ o el tensor de curvaturas. Las componentes de \mathbf{B} son los coeficientes de la segunda forma de la superficie Σ . Como todo tensor simétrico, el tensor \mathbf{B} posee valores propios reales que denotamos k_1 y k_2 y los vectores propios correspondientes \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Los valores k_1, k_2 se definen como curvaturas principales, las líneas sobre Σ cuyos vectores tangentes son \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son las líneas de las curvaturas principales. Las características importantes de la superficie son la curvatura promedio H y la curvatura de Gauss K

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{B} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad K = I_2(\mathbf{B}) = k_1 k_2.$$

Las derivadas de $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ y $\boldsymbol{\rho}^\alpha$ son

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \boldsymbol{\rho}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\rho}^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \boldsymbol{\rho}^\gamma + b_\beta^\alpha \mathbf{n}.$$

Recordemos que $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ son los símbolos de Christoffel relacionados con los coeficientes métricos mediante las ecuaciones (3.3.2).

Presentemos ahora las expresiones para el gradiente de los campos vectoriales y tensoriales sobre la superficie Σ . Sean

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + w\mathbf{n}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = u_1(q^1, q^2)\boldsymbol{\rho}^1 + u_2(q^1, q^2)\boldsymbol{\rho}^2, \quad w = u_3 = u^3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta + T^{3\beta} \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta + T^{\alpha 3} \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \mathbf{n} + T^{33} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

Tenemos

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u} = (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{A} - w\mathbf{B} + (\tilde{\nabla} w + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \otimes \mathbf{n}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} &= \boldsymbol{\rho}^\gamma \frac{\partial}{\partial q^\gamma} \cdot (T^{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta + T^{3\beta} \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta + T^{\alpha 3} \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \mathbf{n} + T^{33} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \boldsymbol{\rho}_\beta + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \boldsymbol{\rho}_\beta + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \boldsymbol{\rho}_\gamma + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \mathbf{n} - T^{3\beta} b_\gamma^\beta \boldsymbol{\rho}_\beta \\ &\quad - T^{33} b_\gamma^3 \mathbf{n} + \frac{\partial T^{\alpha 3}}{\partial q^\alpha} \mathbf{n} + T^{\alpha 3} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \mathbf{n} - T^{\alpha 3} b_\alpha^\beta \boldsymbol{\rho}_\beta. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Stokes (3.3.5), podemos presentar el teorema de divergencia de Gauss–Ostrogradsky para la superficie

$$\int_\Sigma (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + 2H\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T} ds, \quad (3.4.3)$$

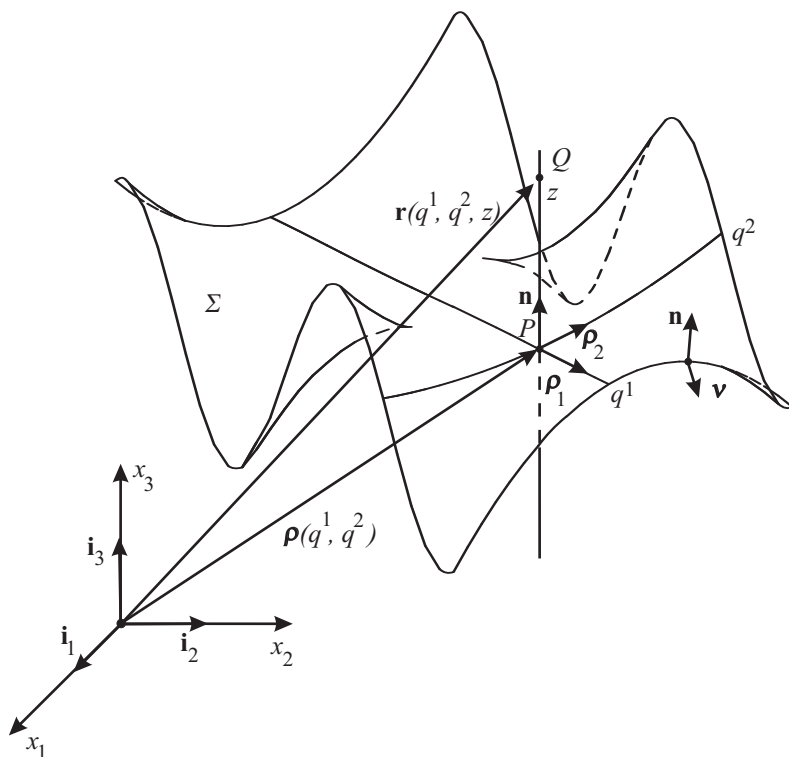


Figura 3.4: Coordenadas curvilíneas (q^1, q^2, z) en la vecindad de Σ

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal al contorno $\partial\Sigma$ que pertenece a la superficie tangente a Σ en los puntos del contorno, es decir que $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n} = 0$.

De la ecuación (3.4.3) tenemos otras las fórmulas de integración

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\tilde{\nabla} \mathbf{T} + 2H\mathbf{n} \otimes \mathbf{T}) d\Sigma &= \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{T} ds, \\ \int_{\Sigma} (\tilde{\nabla} \times \mathbf{T} + 2H\mathbf{n} \times \mathbf{T}) d\Sigma &= \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{T} ds. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Observemos que en las ecuaciones (3.4.3) y (3.4.4) el tensor \mathbf{T} puede tener cualquier rango.

Para introducir unas coordenadas en la vecindad de Σ podemos usar las coordenadas q^1, q^2 de la superficie. Veamos cómo. Sea \mathbf{n} un vector normal a Σ . Dibujemos la línea recta L que contiene a \mathbf{n} y al

punto Q (vea la figura 3.4). La intersección de L con Σ es el punto P con radio-vector $\boldsymbol{\rho}(q^1, q^2)$. Las coordenadas de Q son q^1, q^2 y z , la distancia desde P a Q . La distancia z es positiva si va en la dirección de \overrightarrow{PQ} y coincide con la dirección de \mathbf{n} y negativa si es opuesta. Entonces, el radio-vector \mathbf{r} de Q es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, z) = \boldsymbol{\rho}(q^1, q^2) + z\mathbf{n}.$$

Es fácil ver que esta representación es válida sólo en alguna vecindad de Σ donde la intersección, el punto P , es única. Un ejemplo de Σ es en la figura 3.4.

En esta vecindad de Σ , introducimos los vectores de la base

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \boldsymbol{\rho}_\alpha + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} = (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{n}.$$

La base dual está definida por las fórmulas

$$\mathbf{r}^\alpha = (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^\alpha, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}. \quad (3.4.5)$$

Nótese que $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ no existe como inverso al tensor tridimensional porque $\mathbf{A} - z\mathbf{B}$ es degenerado. Aquí el inverso tiene el siguiente sentido

$$(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) = (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}.$$

De acuerdo a la ecuación (3.4.5), la fórmula para el operador nabla espacial toma la forma

$$\nabla = \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} = (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z}.$$

3.5. Problemas

En todos los problemas siguientes \mathbf{i}_k son los vectores de la base canónica y \mathbf{e}_k de la base arbitraria. Si no se dice lo contrario los tensores están definidos en tres dimensiones y son de segundo rango.

- Determine las partes simétrica y antisimétrica de los tensores: (a) $\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3$, (b) $\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3$; (c) $\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1$.
- Encuentre los tres invariantes de los siguientes tensores: (a) $\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2$; (b) $\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$.
- Sean \mathbf{A} un tensor de segundo rango no-singular (es inversible) y \mathbf{a}, \mathbf{b} unos vectores. Demuestre que $\mathbf{A} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ es invertible si y sólo si $1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a} \neq 0$.
- Tensores \mathbf{A}, \mathbf{B} de segundo rango se llaman conmutativos si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Demuestre tensores simétricos \mathbf{A}, \mathbf{B} son conmutativos si los conjuntos de sus vectores propios coinciden.
- Demuestre que en el espacio de todos los tensores de segundo rango $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$ tiene todas las propiedades del producto interior y entonces el espacio es un espacio con producto interno. Demuestre que los conjuntos de todos los tensores simétricos es un subespacio con el producto interior $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. ¿Que puede decir acerca del conjunto de todos los tensores antisimétricos de segundo rango?
- Represente el tensor unidad (métrico) \mathbf{E} en sus bases en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.
- Sea $f = f(r)$ una función de r , donde $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ y \mathbf{r} es un vector de posición en \mathbb{R}^3 . Encuentre ∇f y $\nabla^2 f$.
- Sea \mathbf{r} un vector de posición en \mathbb{R}^3 . Encuentre $\nabla \mathbf{w}$ y $\nabla \cdot \mathbf{w}$, donde (a) $\mathbf{w} = 2\mathbf{r}$, (b) $\mathbf{w} = 3x_3\mathbf{i}_1$, (c) $\mathbf{w} = 2x_1\mathbf{i}_1 + 3x_3\mathbf{i}_3$.
- Encuentre: (a) $\nabla \cdot (\mathbf{E} \otimes \mathbf{r})$;

- (b) $\nabla \cdot (\mathbf{r} \otimes \mathbf{E})$;
 (c) $\nabla(\mathbf{A} \otimes \mathbf{r})$, donde \mathbf{A} es constante;
 (d) $\nabla \cdot (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$.
10. Escriba el operador ∇ en la base $2\mathbf{i}_1, 3\mathbf{i}_2, 4\mathbf{i}_3$.
11. Sean S un superficie cerrada y \mathbf{n} una normal unidad externa a S . Demuestre que $\int_S \mathbf{n} dS = \mathbf{0}$.
12. Represente $(\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega})^2$ y $(\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega})^3$.
13. Escriba los tres invariantes I_1, I_2, I_3 de $\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{E} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$.
14. Derive la traza y el determinante de los siguientes tensores:
 (a) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$,
 (b) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,
 (c) $\mathbf{E} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$.
15. Usando el teorema de Gauss–Ostrogradsky demuestre que el volumen V con frontera S esta dado por las fórmulas

$$V = \frac{1}{3} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS$$

y

$$V = \frac{1}{6} \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) dS, \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}.$$

16. En cada caso derivar con respecto a s el tensor \mathbf{T} :
 (a) $\mathbf{T} = T(s) \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}$,
 (b) $\mathbf{T} = T(s) \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}$,
 (c) $\mathbf{T} = T_1(s) \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\nu} + T_2(s) \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\tau}$.
17. Encuentre la curvatura de Gauss K y la curvatura promedio H para la esfera unidad y el cilindro circular de radio 1 y altura 1.
18. Para la superficie $z = x^2 + y^2$ encuentre la curvatura de Gauss K y la curvatura promedio H .

-
19. Para la superficie $z = x^2 - y^2$ encuentre la curvatura de Gauss K y la curvatura promedio H .

Capítulo 4

Problemas Multidimensionales de Equilibrio

Empezaremos con analizar el problema de equilibrio de una membrana. Este problema se encuentra en cualquier libro de física matemática pero usualmente la deducción de la ecuación de equilibrio emplea algunos aspectos de mecánica. Por ahora, el conocimiento de mecánica en los procesos puede ayudar e ilustrar otros aspectos difíciles de la teoría abstracta.

4.1. Relaciones principales en la teoría de membrana

Una membrana es similar a una superficie. Como objeto real tiene algún espesor, sin embargo se modela la membrana como una superficie sin espesor, por ese motivo la membrana no muestra resistencia alguna a la flexión. Un ejemplo de una membrana real es una burbuja de jabón. Las fuerzas internas de la burbuja de jabón tienen su origen en la tensión superficial de líquidos. La tensión superficial tiene dirección normal al contorno de la frontera de la superficie, pertenece al plano tangente y su valor promedio no cambia, no depende del

área superficial o de la curvatura de la membrana. Por ello la energía acumulada por la deformación de la membrana es proporcional a su área. Si inicialmente la forma de la membrana es plana $S \subset \mathbb{R}^2$ y la deflexión de la membrana es $u(x, y)$, $(x, y) \in S$, entonces la energía acumulada por deflexión es

$$a \left(\int_S \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dS - \int_S 1 dS \right),$$

donde u_x, u_y son las derivadas parciales de u con respecto a x y y respectivamente. Vamos a considerar deformaciones muy pequeñas de la membrana, es decir, deformaciones infinitesimales. En este caso

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \approx \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$$

por lo tanto, la energía acumulada es aproximadamente

$$\frac{a}{2} \int_S (u_x^2 + u_y^2) dS.$$

Queremos aplicar el principio del mínimo de la energía potencial total (el principio de Lagrange). Para ello necesitamos una expresión para el potencial de las fuerzas externas, el cual es el trabajo efectuado por el desplazamiento:

$$\int_S F(x, y) u(x, y) dS + \int_\Gamma \psi(s) u(x, y) ds$$

donde F es la densidad de las fuerzas distribuidas sobre S , ψ es la densidad de las fuerzas distribuidas sobre un contorno Γ suficientemente suave, que puede incluir los puntos de la frontera de S , y ds es un elemento de longitud de Γ . Por simplicidad, suponemos que Γ es la frontera de S .

La energía potencial total del sistema membrana–fuerzas es

$$\mathcal{E}(u) = \frac{a}{2} \int_S (u_x^2 + u_y^2) dS - \int_S F u dS - \int_\Gamma \psi u ds. \quad (4.1.1)$$

Por el principio de Lagrange, la membrana sometida a la carga (F, ψ) está en equilibrio si u es un punto estacionario admisible (o

del mínimo) de $\mathcal{E}(u)$. Recordemos que u es una solución admisible si es suficientemente suave y satisface las restricciones geométricas del problema correspondiente. Ahora deduzcamos la ecuación de equilibrio de la membrana y las condiciones naturales para el problema.

La primera variación de $\mathcal{E}(u)$ es la derivada de Gateaux:

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u + tv) \right|_{t=0} = \delta \mathcal{E}(u, v).$$

En el punto u del mínimo de \mathcal{E} tenemos que la primera variación de \mathcal{E} es cero,

$$a \int_S (u_x v_x + u_y v_y) dS - \int_S F v dS - \int_\Gamma \psi v ds = 0$$

para todo desplazamiento virtual v .

Integrando por partes en la primera integral tenemos

$$\int_S a(u_{xx} + u_{yy})v dS - \int_\Gamma a \frac{\partial u}{\partial n} v ds + \int_S F v dS + \int_\Gamma \psi v ds = 0, \quad (4.1.2)$$

donde $\partial u / \partial n$ es la derivada en la dirección del vector unitario normal externo n al contorno Γ .

La deducción de las ecuaciones la haremos en dos pasos. Primero, seleccionamos todas las v que tomen el valor cero en Γ , lo que nos lleva a la ecuación

$$\int_S \left(a(u_{xx} + u_{yy}) + F \right) v dS = 0.$$

Por el lema fundamental del cálculo variacional en dos dimensiones tenemos que

$$a(u_{xx} + u_{yy}) + F = 0 \quad \text{en } S. \quad (4.1.3)$$

Esta es la ecuación de Poisson que modela la deflexión de la membrana. Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.1.2) tenemos

$$\int_\Gamma \left(-a \frac{\partial u}{\partial n} + \psi \right) v ds = 0$$

que es válida para todas las v admisibles, incluyendo las que no son cero en Γ . Empleando el lema fundamental del cálculo variacional para esta integral obtenemos

$$a \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \psi. \quad (4.1.4)$$

Por lo tanto, la condición de Neumann bien conocida en la teoría nos indica que la ecuación de Poisson es necesaria para la membrana cuando asignamos una fuerza sobre Γ . Además, esta condición es una condición natural para el problema cuando lo planteamos como un problema variacional de acuerdo al principio de Lagrange.

4.2. Problema de Dirichlet

En este libro veremos los problemas de Dirichlet para varios objetos. Consideremos este problema para la membrana recordando que las propiedades de sus soluciones y métodos de estudio son semejantes a los de todos los problemas del tipo de Dirichlet en mecánica lineal.

Para la membrana, el problema de Dirichlet consiste de la ecuación de Poisson (4.1.3) acompañada con la condición de Dirichlet, la cual, por simplicidad, tomamos en la forma homogénea

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (4.2.1)$$

Consideremos las soluciones generalizadas que son los puntos extremales de la energía potencial total, que toma la forma

$$\mathcal{E}(u) = \frac{a}{2} \int_S (u_x^2 + u_y^2) dS - \int_S F u dS.$$

Su punto extremal u satisface la ecuación

$$a \int_S (u_x v_x + u_y v_y) dS - \int_S F v dS = 0 \quad (4.2.2)$$

para todo desplazamiento virtual v .

Debemos introducir ahora la clase de funciones donde vamos a buscar la solución. Primero introducimos el espacio energético empleando el miembro cuadrático de la ecuación.

Definición 4.1. El espacio H_{Mf} es el espacio de completitud del conjunto $C_0^{(2)}$ de todas las funciones u de $C^{(2)}(\bar{S})$ que satisfacen la condición (4.2.1) con respecto a la norma inducida por el producto interno

$$(u, v)_M = a \int_S (u_x v_x + u_y v_y) dS.$$

Es fácil ver que $(u, v)_M$ es realmente un producto interno en $C_0^{(2)}$. El espacio H_{Mf} es un espacio de Hilbert.

Lema 4.1. El espacio H_{Mf} es un subespacio de $W^{1,2}(S)$ con norma equivalente a la norma de $W^{1,2}(S)$.

Demostración. El lema nos dice que en el subespacio H_{Mf} podemos usar el teorema de Sóbolev en $W^{1,2}(S)$. Es claro que

$$\|u\|_{H_{Mf}} \leq \|u\|_{W^{1,2}}.$$

Para demostrar la equivalencia de las normas es suficiente probar la desigualdad de Friedrichs

$$\int_S u^2 dS \leq c_S \int_S (u_x^2 + u_y^2) dS \quad (4.2.3)$$

que es válida para toda función $u \in C_0^{(2)}$ cuya constante c_S es independiente de u . Para probar la ecuación (4.2.3) definamos $u \in C_0^{(2)}$ como cero por fuera de S empleando para la nueva función la misma notación u . Es claro que u es continua en \mathbb{R}^2 , S es acotado y por lo tanto existe un cuadrado $C = [-l, l] \times [-l, l]$ que contiene a S . En los lados de la región C la función toma valores cero. Luego la igualdad

$$u(x, y) = \int_{-l}^x \frac{\partial u(s, y)}{\partial s} ds$$

es válida, y

$$u^2(x, y) = \left(\int_{-l}^x \frac{\partial u(s, y)}{\partial s} ds \right)^2.$$

Empleando la desigualdad Cauchy para integrales usando $u_s = 1 \cdot u_s$ tenemos

$$u^2(x, y) \leq \int_{-l}^x 1 ds \int_{-l}^x u_s^2 ds.$$

Integrando ambos lados de la desigualdad sobre C tenemos

$$\int_C u^2(x, y) dx dy \leq 2l \int_C \int_{-l}^x u_s^2 ds dx dy \leq 4l \int_C u_s^2 dx dy.$$

Utilizando que $u = 0$ por fuera de S tenemos

$$\int_S u^2(x, y) dx dy \leq 4l \int_S u_s^2 dx dy$$

de donde obtenemos la desigualdad de Friedrichs que completa la demostración. \square

Gracias a este lema, podemos aplicar los teoremas abstractos 1.1 y 1.2 al problema de existencia de una solución. Por el teorema 1.4 vemos que el funcional $A(v) = \int_S Fv dS$ es lineal y continuo en H_{Mf} si $F \in L^p(S)$ para algún $p > 1$. En efecto, es claro que A es lineal en v . Que este sea continuo es consecuencia de la desigualdad

$$\left| \int_S Fv dS \right| \leq \|F\|_{L^p(S)} \|v\|_{L^q(S)} \leq c \|v\|_M$$

donde $1/p + 1/q = 1$ y la constante c queda definida por el teorema 1.4.

Por lo tanto, tenemos

Teorema 4.1. *Sea $F \in L^p(S)$ para algún $p > 1$. El problema de equilibrio de una membrana con extremos fijos ($u|_\Gamma = 0$) tiene una solución energética única $u \in H_{Mf}$, que es una solución de la ecuación (4.2.2). La solución u es un punto de mínimo del funcional de la energía potencial total $\mathcal{E}(u)$ de la membrana.*

4.3. Problema de Neumann

Regresemos al problema para la membrana libre de restricciones geométricas. Consideremos el problema de la determinación del mínimo del funcional de la energía potencial total

$$\mathcal{E}_l(u) = \frac{1}{2}(u, u)_M - \int_S F u \, dS - \int_\Gamma \psi u \, ds.$$

Es claro que para $u = c$, con c constante, tenemos que $(u, u)_M = 0$ y por lo tanto el problema del mínimo tiene sentido sólo si

$$\int_S F \, dS + \int_\Gamma \psi \, ds = 0, \quad (4.3.1)$$

la cual es una de las condiciones de auto-equilibrio de las fuerzas externas a las que se encuentra sometida la membrana. Siempre que $u = c$ la membrana tiene movimiento como un cuerpo espacial rígido. Es interesante notar que las rotaciones rígidas de la membrana no brindan condiciones para los momentos de las fuerzas. Esto es consecuencia de que para cualquier rotación rígida $u = ax + by$ de la membrana, su energía de deformación no es cero, lo que si ocurre para un cuerpo linealmente elástico: esto es gracias a que la teoría de la membrana corresponde con la teoría de superposición de deformaciones pequeñas sobre deformaciones finitas (tensión inicial de la membrana). De esta manera, la condición (4.3.1) es la única condición necesaria para la existencia del punto crítico de $\mathcal{E}_l(u)$.

Nótese que la condición de que la primera variación de $\mathcal{E}_l(u)$ en el punto crítico u sea cero, toma la forma

$$a \int_S (u_x v_x + u_y v_y) \, dS - \int_S F v \, dS - \int_\Gamma \psi v \, ds = 0,$$

donde v pertenece a la clase de los desplazamientos admisibles. Vamos a usar esta ecuación para introducir una solución generalizada. Nótese que si aquí tomamos $v = c$ tenemos la misma condición de auto-equilibrio que en la ecuación (4.3.1).

Vamos a eliminar los desplazamientos rígidos $u = c$ de la clase de desplazamientos virtuales. Denotemos como $C_l^{(2)}$ al conjunto de todas

las funciones u de $C^{(2)}(\bar{S})$ que tienen promedio cero:

$$\int_S u \, dS = 0.$$

$C^{(2)}(\bar{S})$ es un espacio lineal. Además, es claro que $(\cdot, \cdot)_M$ es un producto interno en $C^{(2)}(\bar{S})$. Ahora podemos introducir la siguiente definición:

Definición 4.2. *El espacio energético H_{MI} para la membrana libre es el espacio de completitud del espacio $C^{(2)}(\bar{S})$ con respecto a la norma $\|u\|_M = (u, u)_M^{1/2}$.*

Las propiedades de los elementos del espacio H_{MI} son una consecuencia de la desigualdad de Poincaré

$$\int_S u^2 \, dS \leq c \left(\left(\int_S u \, dS \right)^2 + \int (u_x^2 + u_y^2) \, dS \right) \quad (4.3.2)$$

que es válida para toda $u \in C^{(2)}(\bar{S})$ cuya constante C es independiente de u . El lector debe consultar acerca de la desigualdad en [Lebedev and Vorovich (2003)]. Una consecuencia de la ecuación (4.3.2) es que sobre el espacio $C_l^{(2)}$ la desigualdad de Poincaré se reduce a la desigualdad (4.2.3) y, como para el problema de Dirichlet tenemos

Lema 4.2. *El espacio H_{MI} es un subespacio de $W^{1,2}(S)$ con norma equivalente a la norma de $W^{1,2}(S)$.*

Nótese que el problema de la determinación del mínimo del funcional $\mathcal{E}_l(u)$ sobre H_{MI} puede ser resuelto de manera similar al problema de la determinación del mínimo de la energía potencial total de la membrana con contorno fijo. Debemos suponer solamente que $F \in L^p(S)$, $\psi \in L^r(\Gamma)$ para algunos $p > 1, r > 1$. Entonces, por la desigualdad de Hölder y el teorema 1.4 tenemos

$$\left| \int_S Fv \, dS + \int_\Gamma \psi v \, ds \right| \leq \|F\|_{L^p(S)} \|v\|_{L^q(S)} + \|\psi\|_{L^r(\Gamma)} \|v\|_{L^t(\Gamma)} \leq c \|v\|_M,$$

donde $1/p + 1/q = 1$, $1/r + 1/t = 1$, por lo tanto $\int_S Fv \, dS + \int_\Gamma \psi v \, ds$ es un funcional lineal y continuo en H_{MI} . Por el teorema 1.2 el problema del mínimo del funcional $\mathcal{E}_l(u)$ tiene un punto de mínimo $u \in H_{MI}$. Recordemos que el problema de Neumann está relacionado con este problema. Por ello tenemos

Teorema 4.2. Sean $F \in L^p(S)$, $\psi \in L^r(\Gamma)$ y supongamos que las fuerzas externas son auto-equilibradas (la ecuación (4.3.1)). El problema de Neumann para la membrana tiene una solución generalizada de la forma $u_0(x, y) + c$ donde $u \in H_{MI}$ está definida de manera única y c es una constante indefinida. La función u_0 satisface la ecuación

$$(u_0, v)_M - \int_S Fv \, dS - \int_\Gamma \psi v \, ds = 0$$

para toda $v \in W^{1,2}(S)$.

Entonces la solución del problema de Neumann está definida únicamente hasta el desplazamiento rígido $u = c$.

Es interesante notar que podemos considerar el caso cuando la fuerza ψ está dada sobre alguna parte de S . Para ello podemos repetir todo el procedimiento del problema de Neumann en este nuevo problema. Lo único que cambia es que el contorno y la integral correspondiente entran a la expresión de la energía potencial total.

4.4. Problemas

Para las membranas dibujadas en las siguientes figuras (tomar el parámetro de la membrana $a = 1$):

1. plantear el problema en manera clásica;
2. presentar el funcional de la energía potencial total, deducir las condiciones naturales en la frontera y compararlas con las condiciones del punto 1;
3. introducir el espacio energético;
4. definir la solución generalizada del problema;
5. aplicar el teorema de existencia y unicidad de la solución generalizada para el problema.

1.

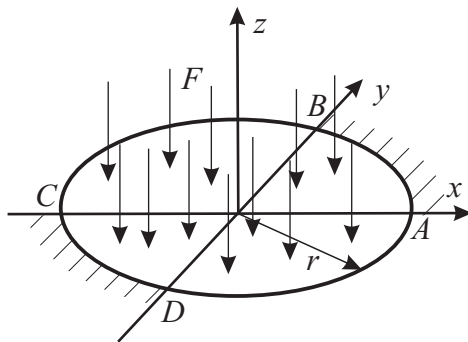


Figura 4.1: La membrana redonda de radio $r = 10\text{cm}$ con las partes AB y CD de la frontera fijas; la densidad de la fuerza $F = 3x^2 + 3$ MPa.

2.

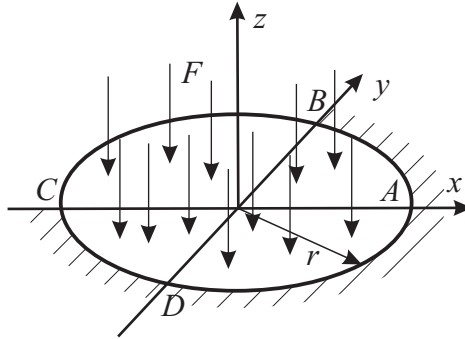


Figura 4.2: La membrana-anillo de radio $r = 20\text{cm}$ con la parte $CDAB$ de la frontera fija; la densidad de la fuerza $F = 2 + 3y$ MPa.

3.

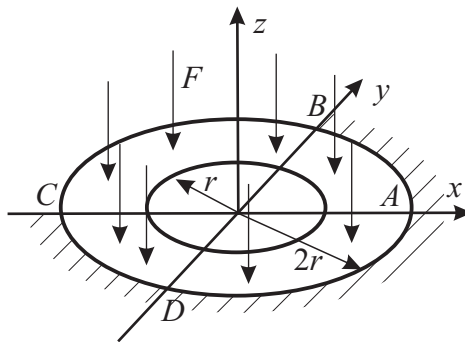


Figura 4.3: La membrana-anillo redonda con la parte $CDAB$ de la frontera externa fija, $r = 10\text{cm}$, la densidad de la fuerza $F = 2$ MPa.

4.

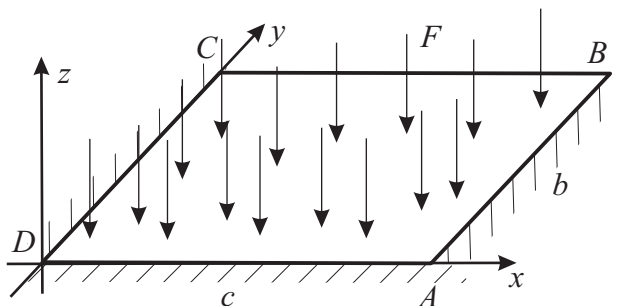


Figura 4.4: La membrana rectangular, $b = 20\text{cm}$, $c = 30\text{cm}$, la parte de la frontera $CDAB$ esta fija. La membrana está sometida a la carga distribuida por la ley $F = x^2 + y^2$ MPa.

5.

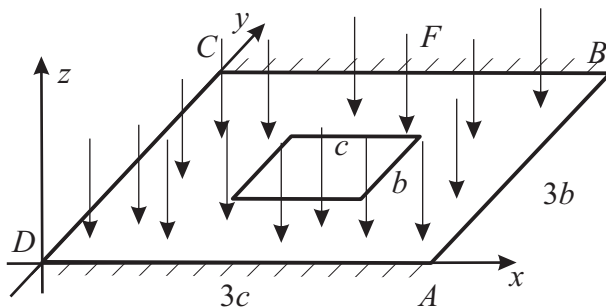


Figura 4.5: La membrana rectangular, $b = 20\text{cm}$, $c = 30\text{cm}$ con el abierto central, las partes de la frontera DA y BC son fijas. La membrana está sometida a la carga distribuida por la ley $F = 3x^2 + 2y^2$ MPa.

6.

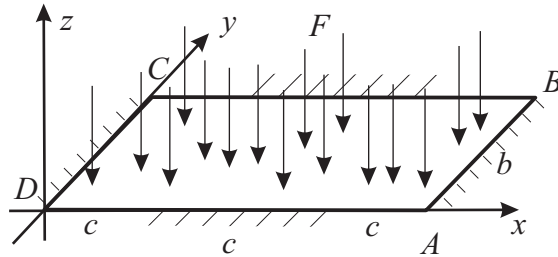


Figura 4.6: La membrana rectangular con la parte de la frontera fija como indica la figura, $c = 10\text{cm}$, $b = 40\text{cm}$, sometida a la carga distribuida $F = 2 + \cos x^2$ MPa.

7.

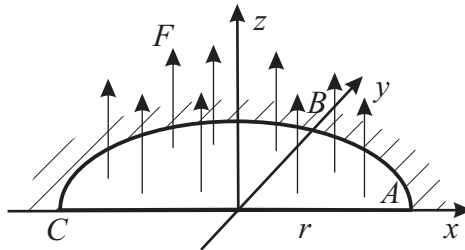


Figura 4.7: La membrana semicircular de radio $r = 20\text{cm}$ con la parte circular ABC fija, sometida a la carga $F = 3y^2 + 4x^2 + 5$ MPa.

8.

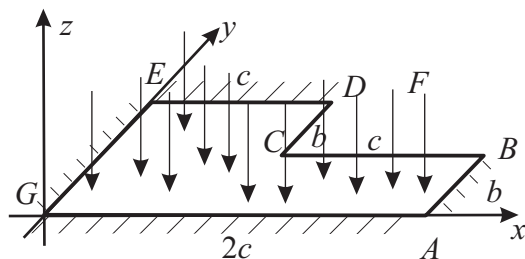


Figura 4.8: La membrana con la parte fija del contorno como indica la figura ($b = 25\text{cm}$, $c = 20\text{cm}$), sometida a la carga $F = 2 \cos xy$ MPa.

9.

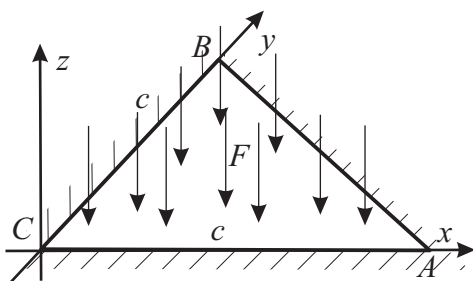


Figura 4.9: La membrana triangular con la frontera fija, $c = 30\text{cm}$, sometida a la carga distribuida $F = 4$ MPa.

10.

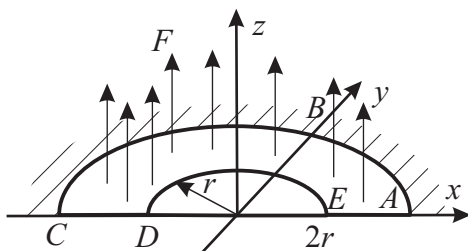


Figura 4.10: La membrana – semi-anillo con la parte ABC de la frontera fija, $r = 10\text{cm}$, sometida a la carga transversal $F = 3$ MPa.

11.

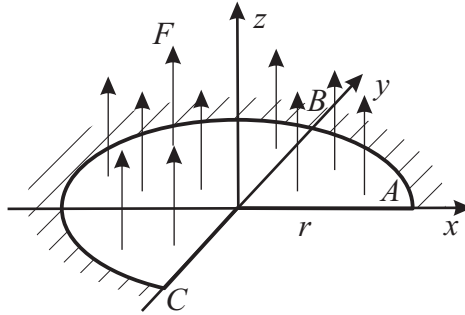


Figura 4.11: La membrana 3/4 del círculo de radio $r = 20\text{cm}$, con la parte ABC de la frontera fija, sometida a la carga $F = 3\text{ MPa}$.

12.

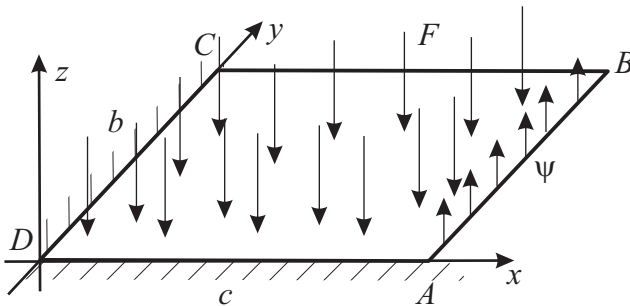


Figura 4.12: La membrana rectangular con la parte CDA de la frontera fija, $c = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, sometida a la carga transversal $F = 4x^2\text{ MPa}$ y la carga transversal sobre la parte AB de la frontera $\psi = 3^{10^6}\text{ N/m}$.

13.

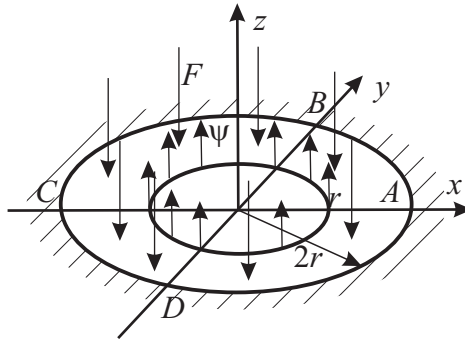


Figura 4.13: La membrana – anillo con el contorno externo fijo, el contorno interno sometido a la carga $\psi = 2\text{N/m}$ y la carga distribuida en el dominio $F = 5\text{MPa}$; $r = 5\text{cm}$.

14.

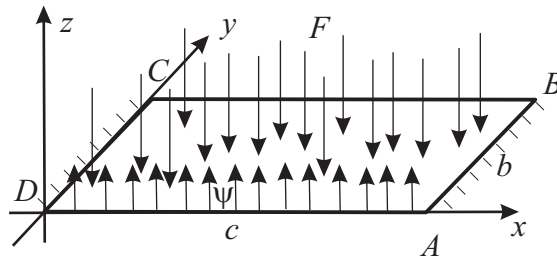


Figura 4.14: La membrana rectangular, $b = 5\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$, sometida a la carga $F = 5\text{MPa}$, las partes AB y CD de la frontera son fijas, en la parte DA actúa la fuerza distribuida $\psi = 3\text{N/m}$.

15.

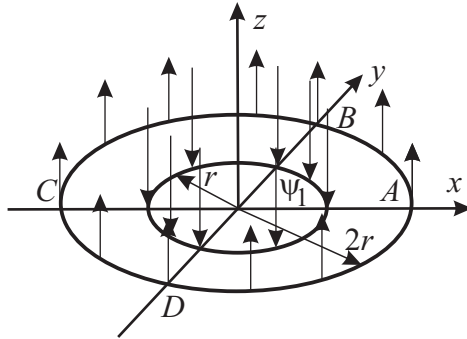


Figura 4.15: La membrana - anillo con $r = 3\text{cm}$, sometida a la carga transversal: $\psi_1 = -3\text{N/m}$, $\psi_2 = 4\text{N/m}$.

16.

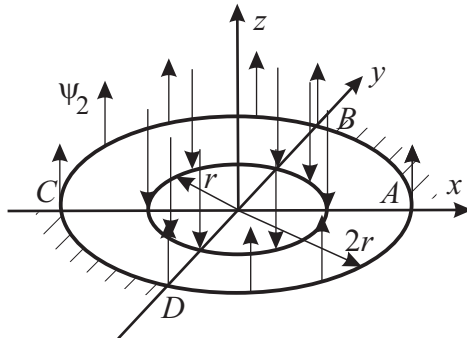


Figura 4.16: La membrana - anillo con $r = 5\text{cm}$, las partes AB y CD de la frontera son fijas. La membrana está sometida a la carga transversal: $\psi_1 = 3\text{N/m}$, $\psi_2 = -4\text{N/m}$.

Capítulo 5

Teoría de la Elasticidad

En los capítulos anteriores fueron considerados modelos simples de los cuerpos elásticos: modelos unidimensionales de resortes, barras, vigas y el modelo bidimensional de una membrana. En este capítulo consideraremos el modelo más complicado de la teoría lineal de elasticidad. La teoría de elasticidad es una herramienta muy poderosa del análisis moderno en ingeniería. Además fue y es fuente de problemas nuevos en matemáticas. Su objetivo es el análisis de deformaciones y tensiones de los cuerpos sometidos a cargas. En el caso de barras y vigas, que son cuerpos delgados largos, sus deformaciones se deben al cambio de su longitud o curvatura. Para otros cuerpos, las deformaciones no son tan elementales y para el análisis necesitamos otra forma de investigación.

Un ejemplo de un cuerpo para el que se necesita un análisis más avanzado se puede observar en la figura 5.1. En las investigaciones de nuevos materiales se emplean probetas de esta forma para exámenes de alargamiento en dos direcciones. Sobre una probeta en forma de cruz actúan las fuerzas F_1 y F_2 . En los extremos de la cruz la deformación se puede relacionar con el alargamiento de forma sencilla, pero en el centro las deformaciones son más complicadas.

La teoría lineal de la elasticidad es el primer paso para la investigación de los problemas de mecánica continua tales como las teorías de termoelasticidad, viscoelasticidad, plasticidad, destrucción, etc. La técnica matemática de la elasticidad lineal es la base para estas gen-

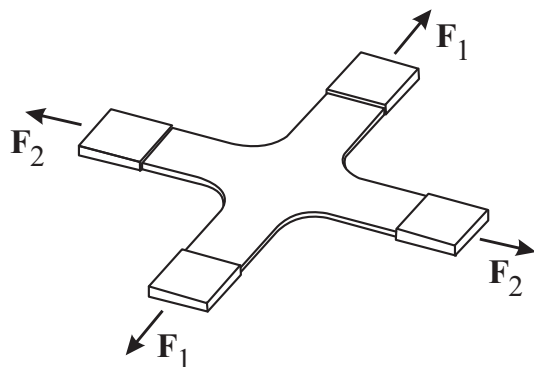


Figura 5.1: Probeta utilizada para investigar tracciones en dos dimensiones.

eralizaciones y extensiones.

En este capítulo vamos a considerar las ideas básicas de la elasticidad lineal, plantear sus modelos matemáticos principales e investigarlos.

El lector puede encontrar una presentación más detallada en [Landau and Lifshitz (2008a), Lebedev et al (2010), Lurie (2005), Ogden (1997)]. Problemas matemáticos de mecánica se discuten en los libros [Antman (2005), Ciarlet (1996), Lebedev and Vorovich (2003), Lebedev and Cloud (2009)].

5.1. Deformación

Un cuerpo sometido a una carga cambia su forma. En general, este cambio se describe usando el tensor de deformación. Restringiremos esta consideración para las deformaciones muy pequeñas.

Recordemos que en el alargamiento de una barra la deformación fue introducida como sigue. En el instante inicial, la barra tiene longitud l_0 . Bajo carga la barra tiene longitud l . La deformación de la barra está dada por

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \equiv \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Si introducimos u , el desplazamiento del punto de la barra, su deformación en un punto está dada por la fórmula

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (5.1.1)$$

Para un cuerpo voluminoso, en la generalización de esta fórmula necesitamos considerar los cambios de longitud en varias direcciones y no es evidente como hacerlo.

Sea un cuerpo que ocupa un dominio V en el espacio. Bajo carga, el cuerpo toma otro dominio v . Denotamos por \mathbf{r}_0 y \mathbf{r} las posiciones de un corpúsculo en los instantes inicial y final respectivamente. La diferencia

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

se denomina *vector de desplazamiento*. Este vector describe el cambio de la posición de un punto del cuerpo debido a la deformación (figura 5.2). Aceptamos la hipótesis de que los desplazamientos y sus primeras derivadas de los puntos del cuerpo son muy pequeños

$$\|\mathbf{u}\| \ll 1, \quad \|\nabla\mathbf{u}\| \ll 1.$$

En lo que sigue, haciendo las transformaciones de varias expresiones, vamos a eliminar a todos los miembros con \mathbf{u} o sus primeras derivadas de grado mayor que uno, de la misma manera como en cálculo se hace con infinitesimales de orden superior. En particular, esta hipótesis no nos permite distinguir entre los volúmenes v y V , por lo tanto la deformación en la figura 5.2 es una exageración.

Consideremos el cambio de longitud de una fibra elemental $d\mathbf{r}_0$ del cuerpo en deformación. Después de la deformación su longitud estará denotada por el diferencial $d\mathbf{r}$. Usando que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$ tenemos $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{u} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0 \cdot \nabla\mathbf{u}$. Escribimos esto como

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F},$$

donde $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \nabla\mathbf{u}$ es llamado el gradiente de la deformación .

Antes de la deformación el cuadrado de la longitud de la fibra es $dS^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0$ y después de la deformación $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F} \cdot$

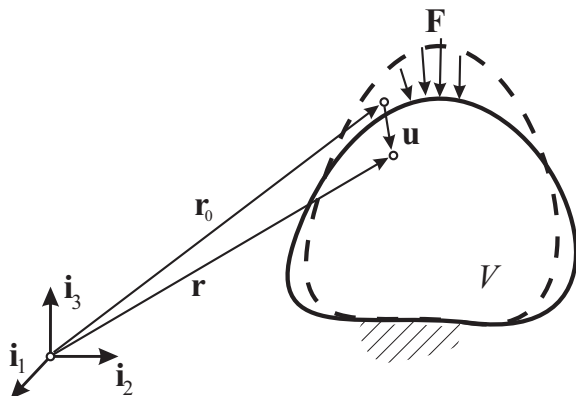


Figura 5.2: Deformación de un cuerpo tridimensional

$\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{r}_0$. El cambio de longitud está dado por

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= d\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r}_0 \\ &= d\mathbf{r}_0 \cdot \left[(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \underline{(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}^T}) \right] \cdot d\mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

Para un desplazamiento muy pequeño podemos suprimir el término subrayado de esta manera

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot [(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] \cdot d\mathbf{r}_0 = 2d\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r}_0,$$

donde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (5.1.2)$$

es denominado *tensor lineal de deformación* o el *tensor de deformación pequeña*. Es fácil ver que $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un tensor simétrico:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T.$$

En coordenadas cartesianas $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{mn} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n$ y sus componentes se expresan en términos de las derivadas parciales del vector de despla-

miento como sigue

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que las expresiones de las componentes diagonales son generalizaciones de la ecuación (5.1.1). Las componentes ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} de $\boldsymbol{\varepsilon}$ describen el cambio de longitud de las fibras elementales en la dirección de los ejes \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 respectivamente. Las otras componentes ε_{mn} ($m \neq n$) describen la distorsión del volumen pequeño caracterizado por el cambio de los ángulos entre las fibras direccionadas a lo largo de los ejes coordenados.

Sean las coordenadas curvilíneas arbitrarias q^1 , q^2 , q^3 . En todo punto definen la base principal

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}, \quad k = 1, 2, 3$$

y la base dual \mathbf{r}^k ($k = 1, 2, 3$), que satisface las condiciones

$$\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}^m = \delta_k^m,$$

donde δ_k^m es el símbolo de Kronecker. En las coordenadas q^1 , q^2 , q^3 el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ esta dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{st} \mathbf{r}^s \otimes \mathbf{r}^t, \quad \varepsilon_{st} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial q^t} + \frac{\partial u_t}{\partial q^s} \right) - \Gamma_{st}^r u_r.$$

Recordemos que los Γ_{st}^r son los símbolos de Christoffel de segundo género, ver la ecuación (3.3.2).

Cuando el campo de los desplazamientos \mathbf{u} está dado, la ecuación (5.1.2) define el tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$. Algunas veces necesitamos buscar el campo de desplazamientos cuando conocemos el campo de deformación en el cuerpo. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\varepsilon}$ no depende de las coordenadas, es claro que los desplazamientos son $\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}$, donde \mathbf{a} es un vector constante y arbitrario.

En el caso general, determinar \mathbf{u} cuando conocemos $\boldsymbol{\varepsilon}$, es posible si y sólo si $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisface las condiciones de compatibilidad

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{0}. \quad (5.1.3)$$

Si la ecuación (5.1.3) es válida, la fórmula de Cesàro define \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{M_0}^M \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(s) + (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}) \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}(s)) \right\} \cdot d\mathbf{r}(s), \quad (5.1.4)$$

donde \mathbf{u}_0 y $\boldsymbol{\omega}_0$ son el desplazamiento y el vector de la rotación del corpúsculo M_0 con el radio-vector \mathbf{r}_0 respectivamente. M_0M es el paso de integración que conecta los puntos M_0 y M . En la ecuación (5.1.4) $\mathbf{r}(s)$ es el radio-vector del punto arbitrario del paso M_0M y \mathbf{r} es el radio-vector del punto M .

5.2. Tensiones y las ecuaciones de equilibrio

La noción de tensor de tensiones es fundamental en mecánica continua. En el párrafo de la sección 2.3 hemos encontrado la tensión como una cantidad escalar. Para los cuerpos tridimensionales, el escalar σ cambia al tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$.

Consideremos el equilibrio de un cuerpo deformable. Por el principio de la solidificación, ver *Principio de Solidificación* de la sección 2.2, en el equilibrio tenemos que el vector resultante de todas las fuerzas y el momento resultante de todas las fuerzas son nulos. En otras palabras, para toda la sección del cuerpo deben ser válidas las ecuaciones de tipo (2.2.1) y (2.2.2).

Veamos cuáles son las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y sus partes. Sea una parte arbitraria \mathcal{P} del cuerpo como se ve en la figura 5.3. En mecánica continua se acepta como un axioma que sobre \mathcal{P} actúan sólo dos tipos de fuerzas. El primer tipo son las *fuerzas de masa* que actúan internamente en el cuerpo y no dependen de las condiciones externas de \mathcal{P} . Como ejemplos de fuerzas masivas tenemos la fuerza de la gravedad y la fuerza centrífuga. El segundo tipo de fuerzas son

las *fuerzas superficiales* o *fuerzas de contacto*. Éstas actúan sólo sobre la frontera de \mathcal{P} y describen las fuerzas de reacción entre el cuerpo y las fuerzas del medio que rodea a \mathcal{P} . Imaginemos que seleccionamos una parte \mathcal{P} del cuerpo y cambiamos la reacción de la parte restante del cuerpo a \mathcal{P} por algunas otras fuerzas. Por suposición, actúan sobre \mathcal{P} en la parte superficial que la conecta con el resto del cuerpo. Por esta razón, a estas fuerzas se les llaman fuerzas de contacto. Además notemos que las fuerzas de contacto describen la acción del medio ambiente que rodea la superficie del cuerpo. Nótese que, la introducción de éstas fuerzas y que la interacción entre las partes del cuerpo se describan usando fuerzas de contacto. Son los axiomas de la teoría de elasticidad clásica.

Entonces, las fuerzas que actúan sobre la parte \mathcal{P} son

$$\mathbf{F}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}_B(\mathcal{P}) + \mathbf{F}_C(\mathcal{P}),$$

donde los índices B y C denotan las fuerzas de masa y de contacto respectivamente.

Introduzcamos las densidades de las fuerzas de masa y de contacto

$$\mathbf{F}_B(\mathcal{P}) = \int_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} dV, \quad \mathbf{F}_C(\mathcal{P}) = \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} d\Sigma,$$

donde $V_{\mathcal{P}}$ es un dominio en espacio que toma \mathcal{P} , $\Sigma_{\mathcal{P}} = \partial V_{\mathcal{P}}$ la frontera de \mathcal{P} , y ρ es la densidad del material del cuerpo. Las unidades de \mathbf{f} son fuerza por unidad de masa y las unidades de \mathbf{t} son fuerza por unidad de área. La cantidad \mathbf{t} es el *vector de tensión* y en su papel, es semejante a la presión en mecánica de gases y fluidos.

Entonces, las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido (2.2.1) y (2.2.2) se transforman para un cuerpo deformable como sigue. Tenemos dos ecuaciones vectoriales

1. El vector resultante de las fuerzas que actúan sobre \mathcal{P} es cero:

$$\int_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} d\Sigma = \mathbf{0}. \quad (5.2.1)$$

2. El vector resultante del momento de las fuerzas que actúan sobre

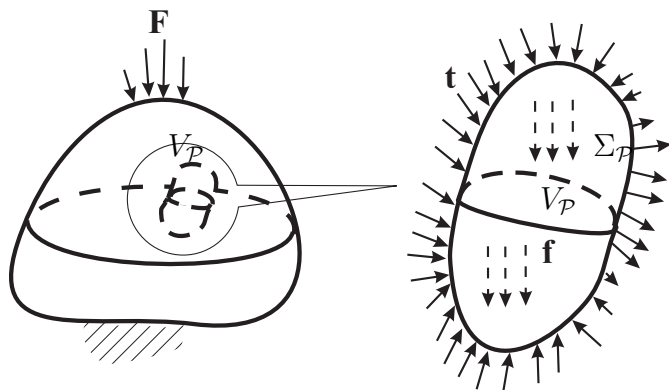


Figura 5.3: Fuerzas que actúan sobre la parte V_P del cuerpo.

\mathcal{P} es cero:

$$\int_{V_P} \{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \rho \mathbf{f}\} dV + \int_{\Sigma_P} \{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{t}\} d\Sigma = \mathbf{0}, \quad (5.2.2)$$

donde \mathbf{r} es el radio-vector del punto arbitrario del cuerpo y \mathbf{r}_0 es el radio-vector del algún punto fijo arbitrario (el polo). Podemos probar que si (5.2.1) es válida, entonces (5.2.2) no depende de la selección del vector \mathbf{r}_0 .

Nótese que de aquí en adelante \mathcal{P} no es absolutamente arbitrario, sin embargo debe ser regular tal que sobre \mathcal{P} las fórmulas de integración por partes sean válidas, por lo tanto su frontera debe ser suficientemente suave.

Consideremos las propiedades del vector de tensión \mathbf{t} . En general, su valor depende del punto del cuerpo que se tome, es decir, del radio-vector \mathbf{r} y de la normal \mathbf{n} al área sobre la cual \mathbf{t} actúa. En adelante usaremos la normal externa.

En mecánica continua, la tercera ley de Newton, es decir la igualdad de acción y reacción toma la forma denominada lema de Cauchy. El lema está dado por

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{r}, -\mathbf{n}).$$

Del lema y usando las condiciones de equilibrio (5.2.1) y (5.2.2) podemos mostrar que, en algún punto \mathbf{t} , es una función lineal de \mathbf{n} ,

entonces, usando el teorema de representación de la función lineal en \mathbb{R}^3 podemos obtener el siguiente teorema llamado *teorema de Cauchy*.

Teorema 5.1. (De Cauchy). *En todo punto de un cuerpo el vector de tensión \mathbf{t} , que actúa sobre un área elemental con normal \mathbf{n} , es*

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.2.3)$$

Aquí $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de segundo rango que depende del punto del cuerpo donde se aplique, llamado *tensor de tensiones de Cauchy* o sólo *tensor de tensiones*.

La demostración del teorema de Cauchy se encuentra en la mayoría de los libros de mecánica continua, por ejemplo en [Lurie (2005), Lebedev et al (2010), Ogden (1997), Truesdell and Noll (2004)].

En coordenadas cartesianas denotamos σ_{sk} a las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$, esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s.$$

El significado de los índices de σ_{ks} es el siguiente. El primer índice k significa que el vector de tensión de componentes $\mathbf{t}(\mathbf{i}_k) = (t_{k1}, t_{k2}, t_{k3})$ actúa sobre el área elemental con normal \mathbf{i}_k , el segundo índice s es para la componente proyección del vector \mathbf{t} sobre el eje \mathbf{i}_s . Por ejemplo, σ_{31} es la proyección de $\mathbf{t}(\mathbf{i}_3)$ sobre el eje x_1 y el vector $\mathbf{t}(\mathbf{i}_3)$ actúa sobre el área elemental con normal \mathbf{i}_3 .

Usando el vector de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ podemos deducir las condiciones de equilibrio del cuerpo en forma diferencial. Esto es:

Teorema 5.2. *En todo punto del cuerpo V , donde $\boldsymbol{\sigma}$ es continuamente derivable, la siguiente ecuación del equilibrio es válida*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5.2.4)$$

Nótese que es una ecuación vectorial y por lo tanto, las componentes del vector $\boldsymbol{\sigma}$ forman un sistema de tres ecuaciones escalares. Nótese también que la ecuación no depende de las propiedades del material del cuerpo.

Demostración. Sustituimos $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ en la ecuación (5.2.1) y aplicamos el teorema de Gauss–Ostrogradsky a la integral de superficie. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} d\Sigma \\ &= \int_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Sigma \\ &= \int_{V_{\mathcal{P}}} (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV. \end{aligned}$$

El dominio $V_{\mathcal{P}}$ es arbitrario. Suponiendo que el integrando es continuo, tenemos la ecuación (5.2.4). \square

Usamos la primera condición de equilibrio dada en la ecuación (5.2.1). Consideremos ahora las consecuencias de la segunda condición de equilibrio, ecuación (5.2.2).

Teorema 5.3. *Suponiendo que la ecuación (5.2.2) es válida para toda parte del cuerpo, tenemos que el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico, es decir $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.*

Demostración. Usando la ecuación (5.2.3) transformamos la integral de superficie de la ecuación (5.2.2) a la integral sobre el volumen $V_{\mathcal{P}}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{t} d\Sigma &= \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\Sigma \\ &= - \int_{V_{\mathcal{P}}} \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] dV. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Transformemos la última integral en (5.2.5) usando las igualdades $\partial \mathbf{r} / \partial x_k = \mathbf{i}_k$ e $\partial \mathbf{r}_0 / \partial x_k = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{i}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{i}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{i}_k \\ &= -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s. \end{aligned}$$

Entonces, si el momento resultante de las fuerzas sobre $V_{\mathcal{P}}$ es cero, tenemos

$$\int_{V_{\mathcal{P}}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{V_{\mathcal{P}}} \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s dV = \mathbf{0}. \quad (5.2.6)$$

De acuerdo a la ecuación (5.2.4), la primera integral en (5.2.6) es cero. Por lo tanto la segunda integral sobre $V_{\mathcal{P}}$ en (5.2.6) es también cero. Entonces

$$\sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s = \mathbf{0} \quad \text{en } V.$$

Éste resultado es válido si y sólo si el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T.$$

En efecto, consideremos la parte de la suma $\sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s$ cuando k, s son iguales a 1 o 2. Tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s &= \sigma_{11} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 + \sigma_{22} \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 + \sigma_{12} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 + \sigma_{21} \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 \\ &= (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \mathbf{i}_3 \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

por lo tanto $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. De manera similar podemos demostrar que $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ y $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, lo que completa la demostración. \square

Nótese que en mecánica continua existen modelos más generales cuando la interacción entre las partes del cuerpo incluye los momentos sobre la superficie de contacto [Cosserat and Cosserat (1909), Nowacki (1986), Eringen (1999), Eremeyev et al (2012)]. Para éstos modelos el tensor de tensión no es simétrico.

5.3. Las ecuaciones de movimiento

Aplicando el principio de d'Alembert a las ecuaciones del equilibrio (5.2.4), podemos transformarlas en las ecuaciones dinámicas del cuerpo. De acuerdo a este principio debemos cambiar formalmente las fuerzas de masa por las siguientes:

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

donde t es el tiempo y ρ es la densidad del material del cuerpo. Entonces, las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (5.3.1)$$

Con ayuda de las fórmulas generales (3.3.4), en coordenadas curvilíneas s arbitrarias, las ecuaciones (5.3.1) tienen la forma

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \sigma^{ij} \mathbf{r}_j) + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

donde \sqrt{g} está dada por la ecuación (3.3.3). Escribiendo por componentes, la ecuación (5.3.1) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \sigma^{ij}) + \Gamma_{mn}^j \sigma^{mn} + \rho \sqrt{g} f^j = \rho \sqrt{g} \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2, 3).$$

En coordenadas cartesianas la ecuación (5.3.1) presenta una forma más sencilla. Sustituyendo las expresiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{mn} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n, \quad \mathbf{u} = u_m \mathbf{i}_m,$$

en la ecuación (5.3.1) tenemos

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

o

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

5.4. La ley de Hooke

Las ecuaciones (5.1.2) y (5.3.1) son válidas para el caso de deformaciones pequeñas. Pero no son suficientes para describir las deformaciones en un cuerpo. Por ejemplo, sabemos que una viga de acero es menos flexible que una viga de madera. Para introducir las diferencias de material en el planteamiento de los problemas necesitamos las ecuaciones de compatibilidad que relacionan tensiones y deformaciones. Restringiremos esta consideración a la relación lineal entre los σ y ε . La versión más sencilla de esta relación es la ley de Hooke para una barra (2.3.3)

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Recuérdese que E es el *modulo de elasticidad de Young*.

Para un cuerpo tridimensional esta ecuación es insuficiente. Consideremos un cuerpo de material elástico e isotrópico. Decimos que es isotrópico si las propiedades de su material no dependen de su orientación. Por ejemplo, en una bola de material isotrópico, no importa si esta fue girada algún ángulo antes de la deformación. La definición exacta de material isotrópico se utiliza en teoría de grupos y no la consideraremos aquí. Muchos materiales en ingeniería son isotrópicos, por ejemplo, el acero, el aluminio entre otros metales. Sin embargo, la madera o los cristales no son isotrópicos .

Tomemos un cubo pequeño de un material isotrópico. Consideremos la deformación cuando el cubo esta cargado por las tensiones σ_1 distribuidas uniformemente en las dos caras paralelas del cubo, como se observa en la figura 5.4. Al deformarse, toma la forma de un paralelepípedo, y la deformación se da a lo largo del eje \mathbf{i}_1 , que denotamos como ε_1 . De acuerdo a la ley de Hooke, ε_1 y σ_1 están relacionados por

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1. \quad (5.4.1)$$

La experiencia en la vida cotidiana nos sugiere que la sección transversal disminuye¹. Debido a que el material es isotrópico, las deformaciones ε_2 y ε_3 en direcciones \mathbf{i}_2 y \mathbf{i}_3 deben ser iguales entre si.

¹Nótese que para la mayoría de materiales esta afirmación es correcta, sin embargo existen materiales para los que la sección transversal va a aumentar. Por ejemplo, esto ocurre para algunas espumas

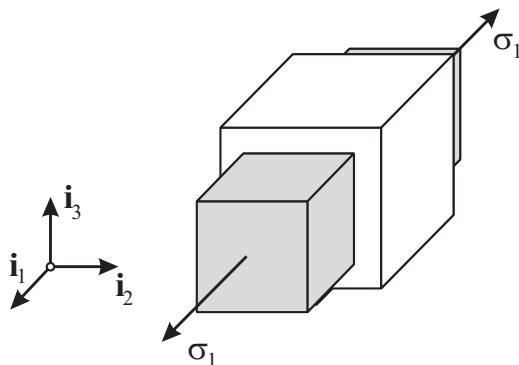


Figura 5.4: Deformación de un cubo isotrópico a lo largo del eje x_1 .

Para el modelo lineal, deben ser proporcionales a ε_1

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1. \quad (5.4.2)$$

Aquí ν es una cantidad sin dimensión denominada coeficiente de Poisson. El signo “-” en la ecuación (5.4.2) corresponde a la disminución de los lados paralelos a los ejes x_2 y x_3 de la sección cuando alarga el lado paralelo a x_1 . Por la ecuación (5.4.2) y (5.4.1), tenemos que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1. \quad (5.4.3)$$

Consideremos el alargamiento del cubo bajo tensiones uniformes σ_2 aplicadas en lados perpendiculares al eje \mathbf{i}_2 , vea la figura 5.5. Análogamente al caso anterior, podemos relacionar ε_1 , ε_2 y ε_3

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\sigma_2, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_2. \quad (5.4.4)$$

Para terminar, consideremos el alargamiento del cubo en la dirección x_3 bajo la tensión uniforme σ_3 como se muestra en la figura 5.6

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_3, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_3, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\sigma_3. \quad (5.4.5)$$

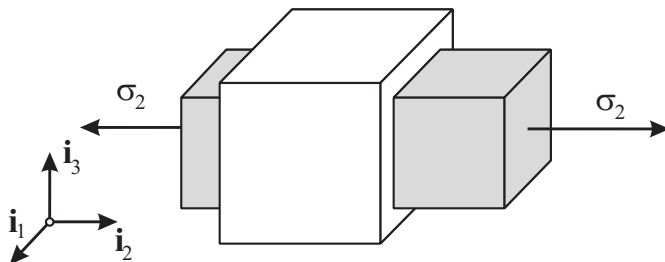


Figura 5.5: Deformación del cubo isotrópico en la dirección x_2 .

Consideremos ahora la deformación del cubo bajo la acción de todas las tensiones σ_1 , σ_2 , σ_3 simultáneamente. Ya que todas las ecuaciones son lineales, el resultado lo obtendremos sumando miembro a miembro las ecuaciones (5.4.3), (5.4.4) y (5.4.5)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_3, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones corresponden a la relación entre $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ escrita en términos de los valores principales de los tensores. Usando la representación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \sigma_2 \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \sigma_3 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3,$$

tenemos, en notación tensorial

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.4.6)$$

Podemos invertir la ecuación (5.4.6). En efecto, si calculamos la traza de la ecuación (5.4.6) obtenemos la igualdad

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 - 2\nu} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.4.7)$$

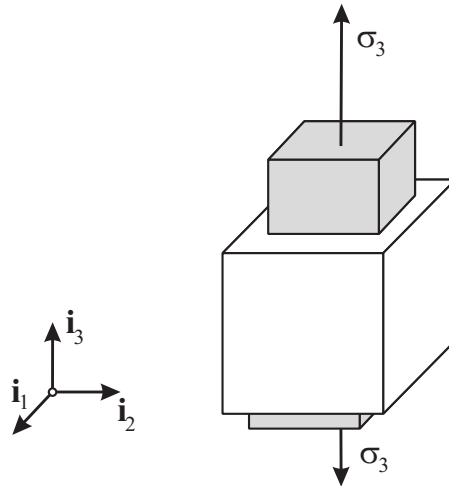


Figura 5.6: Deformación del cubo isotrópico en la dirección x_3 .

El factor

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

en la última ecuación, tiene un nombre especial, llamado el *módulo de elasticidad de volumen*. De acuerdo a la ecuación (5.4.7), de (5.4.6) tenemos que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu E}{(1 + \mu)(1 - 2\nu)} \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.4.8)$$

Esta ecuación se escribe usualmente utilizando las notaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.4.9)$$

donde μ y λ son las *constantes de Lamé*:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \mu)(1 - 2\nu)}.$$

Además μ es el *módulo de corte*, que en la literatura se denota también como G .

| Moduli | λ, μ | k, μ | μ, ν | E, ν | E, μ |
|-----------|--|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| λ | λ | $k - \frac{2}{3}\mu$ | $\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ | $\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ | $\frac{(E-2\mu)\mu}{3\mu-E}$ |
| $\mu = G$ | μ | μ | μ | $\frac{E}{2(1+\nu)}$ | μ |
| k | $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ | k | $\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ | $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ | $\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$ |
| E | $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ | $\frac{9k\mu}{3k+\mu}$ | $2\mu(1+\nu)$ | E | E |
| ν | $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | $\frac{3k-2\mu}{6k+2\mu}$ | ν | ν | $\frac{1}{2}\frac{E}{\mu} - 1$ |

Cuadro 5.1: Transformaciones entre los coeficientes elásticos.

En la literatura se usan varias parejas de constantes elásticas listadas como E, ν, μ, λ, k . Las reglas de transformaciones de una pareja a otra se resumen en la tabla 5.1

La ley de Hooke (5.4.9) nos permite encontrar una función W tal que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Una verificación inmediata nos dice que

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2.$$

La función W se denomina *densidad de la energía potencial de deformación* o de la energía elástica. Unas consideraciones en termodinámica dicen que W debe ser una función definida positiva del argumento $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad \text{para } \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0} \quad (5.4.10)$$

que define algunas desigualdades para los valores de las constantes elásticas. Para deducir ellas representamos $\boldsymbol{\varepsilon}$ como la suma del tensor proporcional al tensor unidad y su dev definido por la igualdad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\mathbf{E} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} + \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Usando la igualdad

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon},$$

tenemos que

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{6}(3\lambda + 2\mu)(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Pero $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ y $\text{dev } \boldsymbol{\varepsilon}$ son independientes y de la desigualdad (5.4.10) tenemos que

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (5.4.11)$$

Entonces, el módulo de volumen $k = \lambda + 2/3\mu$ y el módulo de corte $G = \mu$ son positivos. Como consecuencia de las desigualdades (5.4.11) tenemos

$$E > 0, \quad -1 < \nu \leq 1/2$$

Para la mayoría de los materiales $\nu > 0$. Para algunos materiales, como el caucho, el valor de ν está muy cerca a su máximo, $1/2$; y el volumen de cualquier parte del caucho casi no cambia en la deformación. Si $\nu > 0$ la dimensión de la sección transversal disminuye durante alargamiento de un cuerpo. Para algunas espumas ν puede ser negativo y la sección transversal aumenta cuando tenemos un alargamiento del material. En textos más técnicos podemos encontrar los valores para varios materiales. Por ejemplo, para el acero $E \approx 2 \times 10^{11}$ Pa y $\nu \in [0,25, 0,33]$.

5.5. Ley de Hooke para un cuerpo anisotrópico

Para los materiales anisotrópicos, describir adecuadamente la deformación es imposible si usamos sólo dos constantes elásticas. La dependencia lineal general entre los tensores de segundo rango $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ tiene la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

En coordenadas cartesianas se re-escribe como

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \varepsilon_{mn}.$$

El tensor \mathbf{C} de cuarto rango es el *tensor de módulos elásticos* o *tensor de rigidez*

$$\mathbf{C} = c_{ijmn} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n$$

Este tensor tiene 81 componentes pero no todas son independientes. Por simetría de los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ sólo 36 componentes son independientes ya que se deben cumplir que

$$c_{ijmn} = c_{jimn} = c_{ijnm}.$$

La densidad de la energía de deformación $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$ para un material anisotrópico se da como una forma cuadrática de $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} c_{ijmn} \varepsilon_{mn}.$$

La presencia de una función W positiva, nos brinda algunas restricciones para las componentes de \mathbf{C}

$$c_{ijmn} = c_{mnij} \quad \forall \quad i, j, m, n.$$

En efecto, es claro que la permutación de las parejas de índices de las componentes no cambia el valor de W y entonces es suficiente considerar el tensor \mathbf{C} simétrico emparejando los índices. Por lo tanto, las componentes de \mathbf{C} poseen las siguientes propiedades de simetría:

$$c_{ijmn} = c_{jimn} = c_{ijnm}, \quad c_{ijmn} = c_{mnij} \quad \forall \quad i, j, m, n.$$

Es fácil ver que tenemos 60 relaciones, por lo tanto la ley de Hooke generalizada \mathbf{C} tiene sólo $81 - 60 = 21$ componentes independientes.

Es posible demostrar que W es un potencial para $\boldsymbol{\sigma}$, es decir que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Si escribimos W como una función de la variable $\boldsymbol{\sigma}$, $W = W(\boldsymbol{\sigma})$, podemos obtener la propiedad dual

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

En aplicaciones técnicas y en particular en programas para computadores que emplean los métodos de elementos finitos, para la ley de Hooke se usan las notaciones matriciales. Como los tensores de tensiones y deformaciones son simétricos, podemos considerarlos como vectores de 6 dimensiones. En este caso el tensor de constantes elásticas lo podemos representar como una matriz 6×6 con componentes C_{pq} , $p, q = 1, 2, \dots, 6$. Para esta transformación, las notaciones matriciales usan la regla propuesta por Voigt. La transformada $c_{ijmn} \rightarrow C_{pq}$ se aplica como sigue: Las parejas de los índices 11, 22, 33 cambian a 1, 2, 3, respectivamente, las parejas 23 y 32 a 4, las parejas 13 y 31 a 5 y las parejas 12 y 21 a 6. Por ejemplo, $c_{1133} \rightarrow C_{13}$ y $c_{2132} \rightarrow C_{64}$. En esta transformada es válida la siguiente simetría: $C_{pq} = C_{qp}$. Las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones se transforman por las reglas

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}.$$

En notación matricial la ley de Hooke toma la forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}.$$

En el caso general, \mathbf{C} tiene 21 componentes independientes pero la mayoría de materiales anisotrópicos tienen alguna simetría adicional y entonces \mathbf{C} tiene menos de 21 componentes independientes. Por ejemplo, para un material isotrópico transversalmente, es decir, aquel cuyas propiedades no cambian por la rotación con respecto a algún eje, el número de componentes independientes se reduce a 5. Para los

materiales isotrópicos el número de componentes independientes es mínimo, 2.

Para un material isotrópico la ley de Hooke está dada por la ecuación (5.4.9)

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mu (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{e}^k + \mathbf{I}).$$

La forma matricial para \mathbf{C} en este caso es una matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}.$$

5.6. Ecuaciones de equilibrio en desplazamientos

Ya hemos deducido las ecuaciones de movimiento (5.3.1) y equilibrio (5.2.4) en términos de las componentes del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Las ecuaciones (5.2.4) contienen 6 componentes σ_{ij} . Usando la ley de Hooke y la expresión para el tensor de deformación, podemos transformar las ecuaciones (5.3.1) y (5.2.4) en las ecuaciones con respecto a las componentes del vector de desplazamiento \mathbf{u} . De esta manera las ecuaciones (5.3.1) y (5.2.4) se reducen a los sistemas de tres ecuaciones con respecto de tres componentes desconocidas del vector \mathbf{u} .

Para simplicidad, reducimos la deducción al caso del material isotrópico y homogéneo de acuerdo a la ley de Hooke (5.4.9). La homogeneidad del material implica tomar λ y μ constantes. Escribiendo $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ en términos de \mathbf{u} , tenemos

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (\lambda \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda \nabla \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T.$$

Usando la igualdad

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u},$$

transformamos $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ a la forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Entonces, las ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos son

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (5.6.1)$$

En coordenadas curvilíneas arbitrarias las ecuaciones (5.6.1) toman la forma

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial q^k} \varepsilon + \mu g^{mn} \nabla_m \nabla_n u_k + \rho f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

donde

$$\varepsilon = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} g^{mn} u_n)}{\partial q^m}.$$

En las coordenadas cartesianas las ecuaciones (5.6.1) son

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial u_i}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} + \rho f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Más detalladamente tenemos:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_1 + \rho f_1 = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_2 + \rho f_2 = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_3 + \rho f_3 = 0,$$

donde Δ es el operador espacial de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

5.7. Condiciones en la frontera y condiciones iniciales

Primero consideremos valores en la frontera que podamos asignar a problemas en la teoría de elasticidad. La intuición física propone que en la frontera debemos asignar el vector de desplazamiento o el vector de tensiones. Ambos vectores no pueden ser asignados en un punto simultáneamente. En la teoría de elasticidad hay tres tipos principales de condiciones en la frontera:

- Los desplazamientos se asignan sobre toda la frontera del cuerpo;
- Las tensiones están asignadas sobre toda la frontera del cuerpo;
- La frontera está partida en dos partes, sobre una parte se dan los desplazamientos y sobre la otra las tensiones.

El primer problema de la teoría de elasticidad es buscar el vector desplazamiento \mathbf{u} que satisfaga las ecuaciones del equilibrio en términos de los desplazamientos, ecuación (5.6.1), en el dominio V y sobre la frontera Σ del dominio V , que es igual al vector \mathbf{u}^0 dado por:

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = \mathbf{u}^0. \quad (5.7.1)$$

Las condiciones (5.7.1) se denominan *condiciones cinemáticas*.

El segundo problema de la teoría de elasticidad es buscar un vector \mathbf{u} que satisfaga las ecuaciones (5.6.1) y las *condiciones estáticas*, cuando sobre la frontera Σ las tensiones están dadas \mathbf{t}^0 :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma} = \mathbf{t}^0. \quad (5.7.2)$$

Nótese que en el segundo problema, los puntos de la frontera no son fijos y el cuerpo puede moverse libremente. Por ello el cuerpo estará en equilibrio sólo si las fuerzas externas están auto-equilibradas.

Las condiciones en la frontera en los dos problemas juegan el papel de condiciones de Dirichlet y Neumann para la ecuación de Poisson, ecuaciones (4.2.1) y (4.1.4).

El tercer problema de la teoría de elasticidad es buscar un vector \mathbf{u} que satisfaga las ecuaciones (5.6.1) y las *condiciones mixtas* en

la frontera. Aquí, en la parte Σ_1 del cuerpo están dados todos los desplazamientos \mathbf{u}^0 y sobre el resto de la frontera Σ_2 del cuerpo las tensiones \mathbf{t}^0 :

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma_2} = \mathbf{t}^0.$$

Existen otros tipos de condiciones mixtas cuando en diferentes puntos de la frontera las combinaciones de los desplazamientos y tensiones están dadas. Por ejemplo, si sobre una parte de la frontera el cuerpo contacta un cuerpo rígido y suave (sin fricción), entonces sobre esta parte Σ_3 están dados el desplazamiento normal a la frontera y la tensión tangente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_3} = u^0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})|_{\Sigma_3} = \mathbf{0}.$$

En los problemas de dinámica las ecuaciones de movimiento se completan con las condiciones en la frontera de los problemas de estática y con las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales se dan cuando hay un instante inicial y los campos de desplazamientos y velocidades de todos los puntos del cuerpo están dados

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{v}_0.$$

Los vectores \mathbf{u}_0 y \mathbf{v}_0 deben tener algún tipo de suavidad y ser compatibles con las condiciones en la frontera.

5.8. Problema de las frecuencias propias

Un caso particular de los problemas importantes en dinámica son los problemas de frecuencias propias de los cuerpos. Vamos a buscar una solución al problema de dinámica en la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (5.8.1)$$

El problema general de frecuencias propias está dado como problema homogéneo dado por las ecuaciones

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ en } V, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma_2} = \mathbf{0}. \quad (5.8.2)$$

Sustituyendo la expresión (5.8.1) en las ecuaciones (5.8.2) escritas en términos de los desplazamientos y cancelando el factor $e^{i\omega t}$, tenemos

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = -\rho\omega^2 \mathbf{w} \quad \text{in } V, \quad \mathbf{w}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma_2} = \mathbf{0}. \quad (5.8.3)$$

Las variables de este problema no dependen del tiempo t . El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T).$$

El problema planteado en la ecuación (5.8.3) se define como *problema de las frecuencias propias*: se necesita buscar valores positivos ω llamados *frecuencias propias* para los cuales la ecuación (5.8.3) tiene una solución \mathbf{w} no-trivial y normalizada; \mathbf{w} se denomina *moda propia*.

5.9. Formulación variacional de los problemas de equilibrio

La energía potencial total de un cuerpo elástico bajo una carga es

$$\mathcal{E}_E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Sigma} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} dS. \quad (5.9.1)$$

El principio general del mínimo de la energía potencial total nos dice que en la posición de equilibrio \mathbf{u} , la primera variación $\delta\mathcal{E}_E(\mathbf{u})$ es cero. La expresión para $\delta\mathcal{E}_E(\mathbf{u})$ es

$$\delta\mathcal{E}_E(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\Sigma} \mathbf{t}^0 \cdot \delta\mathbf{u} dS.$$

Si \mathbf{u} es un vector fijo sobre Σ_1 entonces $\delta\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}$. Utilizando el procedimiento usual del cálculo variacional, para el punto mínimo \mathbf{u} suave, tenemos como consecuencia las ecuaciones

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma} = \mathbf{t}^0$$

que coinciden con las ecuaciones (5.2.4) y (5.7.2). Esto significa que hemos usado la forma correcta de la energía potencial total para el cuerpo elástico.

Por analogía con otros modelos elásticos que ya hemos considerado antes, podemos usar la ecuación $\delta\mathcal{E}_E(\mathbf{u}) = 0$ para introducir la solución generalizada en los problemas de equilibrio de un cuerpo en la teoría de elasticidad. Pero primero consideremos una desigualdad importante para la teoría, denominada:

5.10. Desigualdad de Korn

Para el análisis cualitativo de los problemas de la teoría de elasticidad es muy importante la *desigualdad de Korn* que dice que las componentes del vector desplazamiento para que la energía de deformación sea finita pertenecen al espacio de Sóbólev $W^{1,2}(V)$. La desigualdad de Korn nos permite estimar la norma de los desplazamientos efectuados por el cuerpo debido a su energía de deformación.

Una de las formas de la desigualdad de Korn es la siguiente:

$$\int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) dV \leq c \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dV \quad (5.10.1)$$

para todo vector \mathbf{u} suficientemente suave e igual a cero en alguna parte Σ_1 de la frontera de V , $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}$. Aquí la constante c depende sólo de V , Σ_1 y las constantes elásticas. La forma $W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ es cuadrática en $\boldsymbol{\varepsilon}$. No estamos interesados en el valor preciso de c , podemos cambiar en la desigualdad $W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ por $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$. La demostración de la desigualdad de Korn para $\Sigma_1 \neq \Sigma$ es complicada, ver [Ciarlet (1996)], por ello nos restringimos al caso en que el vector de desplazamiento es cero sobre toda la frontera

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = \mathbf{0}. \quad (5.10.2)$$

Primero demostraremos que para un desplazamiento suave que satisface la condición (5.10.2) es válida la desigualdad

$$\int_V \text{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) dV \leq 2 \int_V \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) dV. \quad (5.10.3)$$

En efecto, en coordenadas cartesianas tenemos

$$\int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} \right)^2 dV \leq 2 \int_V \left(\sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2 \right) dV.$$

Obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) dV &= \frac{1}{2} \int_V [\operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T) + \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})] dV \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(V)}^2 + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dV. \end{aligned}$$

Ya que la ecuación (5.10.2) es válida, aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradsky, transformamos la última integral en

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dV &= \int_V \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = - \int_V u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} dV \\ &= \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 dV. \end{aligned}$$

Entonces, la siguiente igualdad es válida

$$2 \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{L^2(V)}^2 = \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(V)}^2 + \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 dV,$$

de aquí tenemos la desigualdad (5.10.3) ya que el segundo miembro de la suma no es negativo.

La segunda parte de la desigualdad (5.10.1) sigue de la *desigualdad de Friedrichs*

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV \leq c_1 \int_V \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T) dV,$$

o en coordenadas cartesianas

$$\int_V \sum_{i=1}^3 |u_i|^2 dV \leq c_1 \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dV.$$

Aquí la constante c_1 no depende de la función \mathbf{u} que es cero sobre la frontera, vea la prueba, por ejemplo, en [Lebedev and Cloud (2003b)].

Por las desigualdades (5.10.3) y de Friedrichs tenemos la desigualdad (5.10.1) que necesitábamos probar.

Es fácil ver que la ecuación

$$W(\mathbf{u}) = 0$$

tiene una solución de la forma

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$$

con vectores arbitrarios constantes \mathbf{a}, \mathbf{b} , donde \mathbf{r} es el radio-vector de un punto arbitrario. Es posible probar que la ecuación no tiene soluciones de otra forma. Los desplazamientos de esta forma se denominan desplazamientos pequeños del cuerpo rígidos o, brevemente, los *desplazamientos rígidos*.

Es claro que para un desplazamiento rígido no nulo \mathbf{u}_0 la desigualdad de Korn (5.10.1) no es válida. Pero podemos probar que sobre el conjunto de vectores \mathbf{u} suaves que son ortogonales a todos los desplazamientos rígidos tenemos que la ecuación (5.10.1) es válida con una constante c que no depende de \mathbf{u} . Este conjunto de vectores satisface las dos condiciones

$$\int_V \mathbf{u} dV = \mathbf{0}, \quad \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV = \mathbf{0}.$$

Esta desigualdad de Korn se usa para problemas de cuerpos elásticos que pueden moverse libremente como un cuerpo rígido.

5.11. Una solución generalizada del problema mixto del equilibrio

Empezamos con el problema mixto cuando en la frontera están dados

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0} \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma} = \mathbf{t}^0. \quad (5.11.1)$$

Si una solución \mathbf{u} es suficientemente suave, entonces satisface la ecuación

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon} dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\delta \mathbf{u}} dV - \int_{\Sigma} \mathbf{t}^0 \cdot \boldsymbol{\delta \mathbf{u}} dS = 0. \quad (5.11.2)$$

Vamos a tomar esta ecuación como base de la definición de la solución generalizada cuando el problema está dado en términos de los desplazamientos.

Primero necesitamos introducir el espacio donde consideraremos el problema.

Definición 5.1. El espacio energético para el cuerpo elástico de la parte cuya frontera es Σ_1 denominado H_{Ef} es el espacio de completitud del subconjunto C_{Ef} de las funciones de $C^{(2)}(\bar{V})$ que satisfacen la condición $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}$ en la norma inducida por el producto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_E = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV,$$

$$\|\mathbf{u}\|_E = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_E^{1/2}.$$

Por la desigualdad de Korn las primeras derivadas de las componentes cartesianas de los elementos de H_{Ef} pertenecen al espacio $L^2(V)$. Por el teorema de inmersión de Sóbolev tenemos que para $\mathbf{u} \in H_{Ef}$ las componentes cartesianas de \mathbf{u} pertenecen a $L^6(V)$ y $L^4(\Sigma_2)$ y

$$\left(\int_V |\mathbf{u}|^6 dV \right)^{1/6} \leq C \|\mathbf{u}\|_E, \quad (5.11.3)$$

$$\left(\int_{\Sigma_2} |\mathbf{u}|^4 dS \right)^{1/4} \leq C \|\mathbf{u}\|_E \quad (5.11.4)$$

con C una constante independiente de \mathbf{u} .

Ahora podemos formular:

Definición 5.2. $\mathbf{u} \in H_{Ef}$ es una solución generalizada (débil, energética) del problema mixto del equilibrio de un cuerpo elástico bajo las condiciones en la frontera dadas en la ecuación (5.11.1), si se satisface la ecuación (5.11.2) para todo $\delta\mathbf{u} \in H_{Ef}$.

La dos últimas desigualdades (5.11.3) y (5.11.4) nos permiten mostrar que el funcional del trabajo

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{t}^0 \cdot \delta\mathbf{u} dS$$

con respecto a $\delta\mathbf{u}$ es lineal y continuo en el espacio H_{Ef} si todas las componentes cartesianas de \mathbf{f} pertenecen a $L^{6/5}(V)$ y las componentes cartesianas de \mathbf{t}^0 pertenecen a $L^{4/3}(\Sigma_2)$.

Entonces, por el Teorema 1.2 obtenemos:

Teorema 5.4. Sean $\mathbf{f} \in L^{6/5}(V)$, $\mathbf{t}^0 \in L^{4/3}(\Sigma_2)$. El problema mixto del equilibrio de un cuerpo elástico sometido a una carga \mathbf{f} en V y \mathbf{t}^0 sobre Σ_2 y que está fijo en los puntos de Σ_1 tiene una solución generalizada única $\mathbf{u} \in H_{Ef}$ de acuerdo a la Definición 5.2. La solución \mathbf{u} es el punto de mínimo del funcional de la energía potencial total $\mathcal{E}_E(\mathbf{u})$ en H_{Ef} .

Usando las mismas ideas para otros modelos de objetos libres, podemos introducir la definición de la solución generalizada para el cuerpo libre cuando $\Sigma_2 = \Sigma$.

Como un ejercicio: para un cuerpo elástico cuya frontera no tiene una parte fija demuestre el teorema: una solución generalizada del problema de equilibrio de cuerpo existe si y sólo si $\mathbf{f} \in L^{6/5}(V)$, $\mathbf{t}^0 \in L^{4/3}(\Sigma)$ y satisfacen las condiciones del auto-equilibrio:

$$\int_V \mathbf{f} dV + \int_\Sigma \mathbf{t}^0 dS = \mathbf{0}, \quad \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \int_\Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{t}^0 dS = \mathbf{0}.$$

Nótese que la solución es única hasta un desplazamiento rígido

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}.$$

5.12. Problemas

Para los cuerpos de acero dibujados en las siguientes figuras:

1. plantear el problema de manera clásica;
2. presentar el funcional de la energía potencial total, deducir las condiciones naturales en la frontera y compararlas con las condiciones en la frontera del punto 1;
3. introducir el espacio energético;
4. definir la solución generalizada del problema;
5. aplicar el teorema de existencia y unicidad de la solución generalizada para el problema.

1.

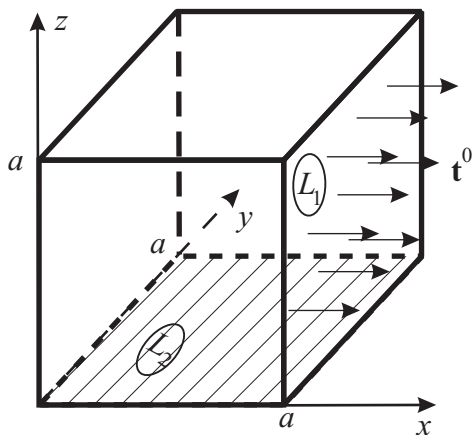


Figura 5.7: El cubo de acero con el lado $a = 10\text{cm}$, la cara L_2 está fija y la cara L_1 está sometida a la carga normal, $|\mathbf{t}^0| = 10^6\text{MPa}$.

2.

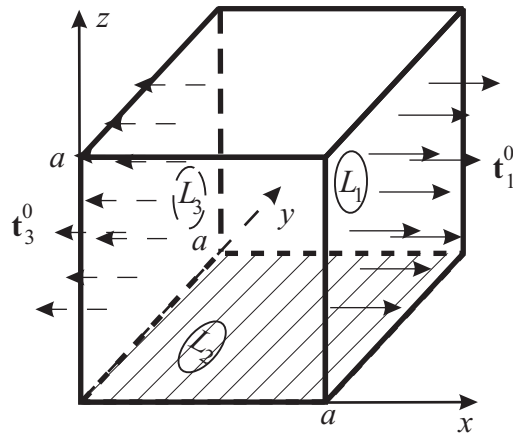


Figura 5.8: El cubo de acero con el lado $a = 10\text{cm}$, la cara L_2 fija y las caras L_1 y L_3 están sometidas a las cargas normales, $|\mathbf{t}_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|\mathbf{t}_3^0| = 2 \cdot 10^6\text{MPa}$

3.

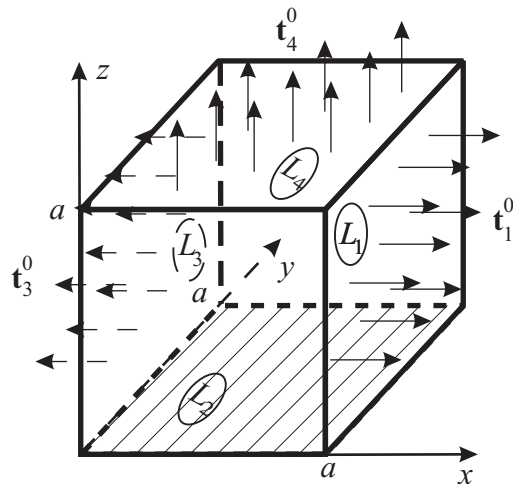


Figura 5.9: El cubo de acero, el lado $a = 3\text{cm}$. La cara L_2 esta fija. Las otras caras están sometidas a las cargas normales indicadas en el dibujo, $|\mathbf{t}_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|\mathbf{t}_3^0| = 3 \cdot 10^6\text{MPa}$, $|\mathbf{t}_4^0| = 4 \cdot 10^6\text{MPa}$.

4.

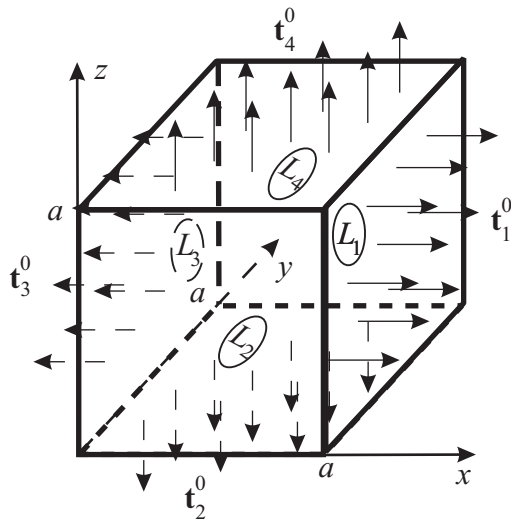


Figura 5.10: El cubo de acero, $a = 6\text{cm}$. La caras están sometidas a las cargas normales indicadas en el dibujo, $|t_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|t_2^0| = 2 \cdot 10^6\text{MPa}$, $|t_3^0| = 3 \cdot 10^6\text{MPa}$, $|t_4^0| = 4 \cdot 10^6\text{MPa}$.

5.

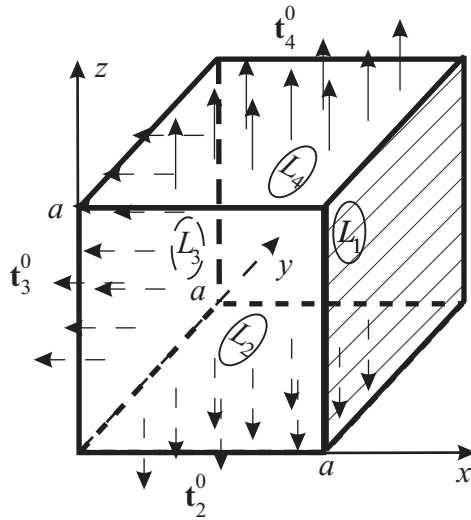


Figura 5.11: El cubo de acero, $a = 3\text{cm}$. La cara L_1 está fija. Las otras caras están sometidas a las cargas normales indicadas en el dibujo, $|t_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|t_3^0| = 3 \cdot 10^6\text{MPa}$, $|t_4^0| = 4 \cdot 10^6\text{MPa}$.

6.

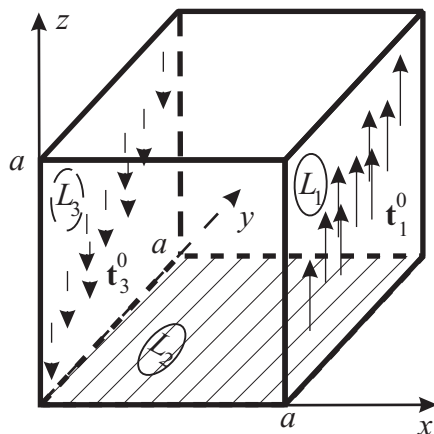


Figura 5.12: El cubo de acero, $a = 8\text{cm}$. La cara L_1 está fija. Las otras caras están sometidas a las cargas tangentes indicadas en el dibujo, $|\mathbf{t}_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|\mathbf{t}_3^0| = 3 \cdot 10^6\text{MPa}$.

7.

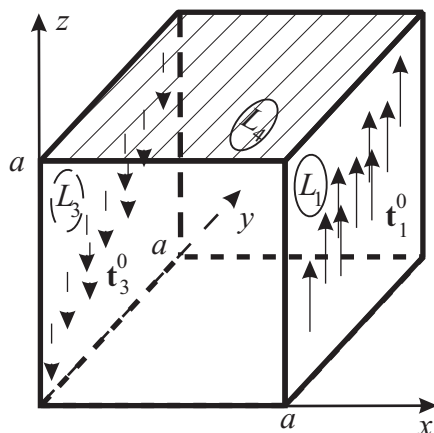


Figura 5.13: El cubo de acero, el lado $a = 5\text{cm}$. La cara L_4 está fija. Las otras caras están sometidas a la carga tangente indicada en el dibujo, $|\mathbf{t}_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|\mathbf{t}_3^0| = 3 \cdot 10^6\text{MPa}$.

8.

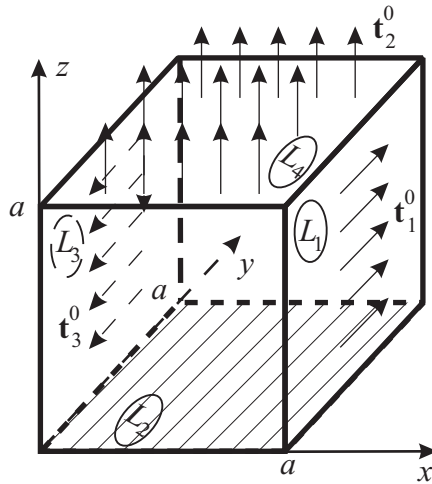


Figura 5.14: El cubo de acero, $a = 6\text{cm}$. La cara L_2 está fija. Las L_1 y L_3 caras están sometidas a la carga tangente indicada en el dibujo, $|\mathbf{t}_1^0| = 10^6\text{MPa}$, $|\mathbf{t}_3^0| = 2 \cdot 10^6\text{MPa}$, sobre L_4 actúa la fuerza distribuida normal, $|\mathbf{t}_2^0| = 3 \cdot 10^6\text{MPa}$. ¿Que pasa si L_2 esta libre?

9.

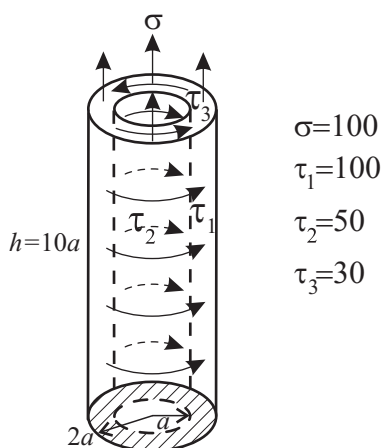


Figura 5.15: El cilindro circular de aluminio de radio $2a = 10\text{cm}$ y altura $h = 10a$ con hueco circular. La cara de abajo está fija, las otras partes de la frontera están sometidas a la carga indicada en el dibujo (los valores son en MPa).

10.

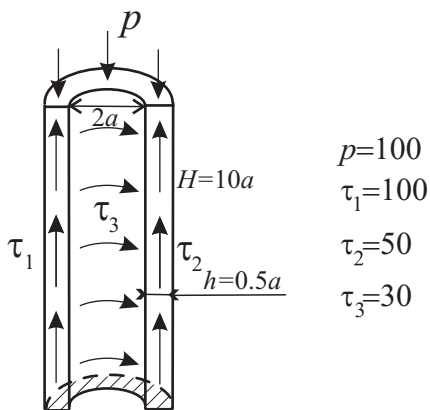


Figura 5.16: El semi-cilindro circular de aluminio del radio $2a = 20\text{cm}$ y altura $H = 10a$ con hueco circular. La cara de abajo está fija, las otras partes de la frontera sometidas a la carga indicada en el dibujo (los valores son en MPa).

11.

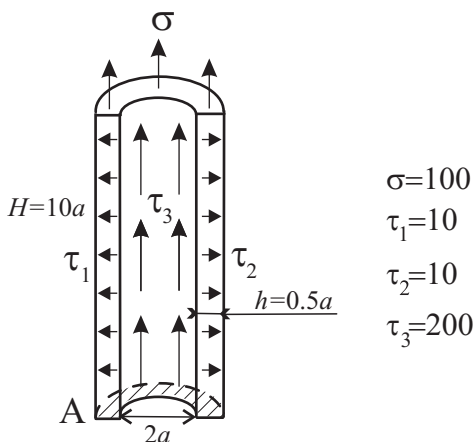


Figura 5.17: El semi-cilindro circular de aluminio del radio $2a = 20\text{cm}$ y altura $H = 10a$ con hueco circular. La cara de abajo está fija, las otras partes de la frontera sometidas a la carga indicada en el dibujo (los valores son en MPa).

Capítulo 6

Anexos

Apéndice A

Sobre el Cálculo Variacional

A.1. Problema del mínimo

En este libro se trataron varios problemas de equilibrio de objetos elásticos. También se consideró el punto mínimo de los funcionales de la energía potencial total apropiados sobre los conjuntos de las funciones admisibles correspondientes se definen el equilibrio de los objetos. Se presentan estos funcionales y sus primeras variaciones:

para **la barra**, ec. (2.3.9)

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}ES \int_0^a u'(x)^2 dx - \int_0^a F(x)u(x) dx - F_0u(0) - F_1u(a),$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}(u, \delta u) &= ES \int_0^a u'(x)\delta u'(x) dx - \int_0^a F(x) \delta u(x) dx \\ &\quad - F_0 \delta u(0) - F_1 \delta u(a); \end{aligned}$$

para **la viga**, ec. (2.7.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(w) &= \frac{1}{2}EI \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_0^a q(x)w(x) dx \\ &\quad - Q_{00}w(0) + M_{01}w'(0) - Q_{a0}w(a) + M_{a1}w'(a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}(w, \delta w) = & EI \int_0^a \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w(x)}{\partial x^2} dx - \int_0^a q(x) \delta w(x) dx \\ & - Q_{00} \delta w(0) + M_{01} \delta w'(0) - Q_{a0} \delta w(a) + M_{a1} \delta w'(a); \end{aligned}$$

para **la membrana**, ec. (4.1.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) = & \frac{a}{2} \int_S (u_x^2 + u_y^2) dS - \int_S F u dS - \int_\Gamma \psi u ds, \\ \delta\mathcal{E}(u, \delta u) = & a \int_S (u_x \delta u_x + u_y \delta u_y) dS - \int_S F \delta u dS - \int_\Gamma \psi \delta u ds; \end{aligned}$$

para **el cuerpo elástico**, ec. (5.9.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_\Sigma \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} dS, \\ \delta\mathcal{E}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = & \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_\Sigma \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{u} dS. \end{aligned}$$

Las expresiones para \mathcal{E} y $\delta\mathcal{E}$ están escritas para cargas dadas sobre toda la frontera. Si alguna parte de la frontera esta fija entonces las correspondientes variaciones de los desplazamientos y/o sus derivadas $\delta u, \delta w, \delta \mathbf{u}$ son cero sobre esta parte y la respectiva parte de las expresiones desaparecen.

En el libro se demuestra que los puntos de mínimo de estos funcionales, que son soluciones de todos los problemas considerados, existen y son únicos en el sentido generalizado cuando las soluciones pertenecen a los espacios energéticos correspondientes. Estas soluciones pueden ser clásicas, que significa que contienen todas las derivadas clásicas que entran a las ecuaciones del equilibrio si las cargas en la frontera de los cuerpos son continuas.

Los principios del mínimo de la energía potencial para varios modelos elásticos fueron conocidos mucho tiempo antes que la idea del comportamiento de las soluciones generalizadas (débiles). Hasta hoy en los libros de física estos principios minimales se derivan suponiendo que un punto minimal u^* del funcional energético $\mathcal{E}(u)$ existe y es suficientemente suave. Aquí se supone que \mathcal{E} es un funcional abstracto,

no sólo como los que se muestran arriba. La idea es considerar el funcional sobre el conjunto de todas las funciones admisibles que incluyen la familia $u^* + t\delta u$ que depende del parámetro real t . Si $\mathcal{E}(u)$ toma un valor mínimo en u^* sobre el conjunto de las funciones admisibles entonces la función $\mathcal{E}(u^* + t\delta u)$ de parámetro t toma un mínimo cuando $t = 0$. Si la derivada $d\mathcal{E}(u^* + t\delta u)/dt|_{t=0}$ existe entonces

$$\left. \frac{d\mathcal{E}(u^* + t\delta u)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Para los funcionales energéticos descritos arriba esta ecuación es la ecuación del equilibrio en la forma integro-diferencial cuando δu varía sobre todas las funciones admisibles:

$$\delta\mathcal{E}(u, \delta u) = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Las funciones admisibles son tales que para todo t y para cualquier función δu de la familia $u^* + t\delta u$ debe satisfacer las restricciones geométricas del problema. Como se demuestra en el libro para funciones suficientemente suaves la ecuación (A.1.2) se reduce a una ecuación (o a varias ecuaciones) de equilibrio y las condiciones en la frontera, que se llaman naturales. Para el equilibrio de los objetos elásticos las condiciones naturales son las condiciones del equilibrio en los puntos de la frontera donde no hay restricciones geométricas.

En la mecánica y en el cálculo de variaciones la expresión $d\mathcal{E}(u^* + t\delta u)/dt|_{t=0}$ se llama la primera variación de \mathcal{E} en el punto u^* y se denota $\delta\mathcal{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$. En análisis la primera variación se llama la derivada funcional en el sentido de Gâteaux (también llamada diferencial de Gâteaux). Cuando aplicamos su definición a una función F de argumento vectorial $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tenemos la expresión del primer diferencial de F :

$$\left. \frac{dF(\mathbf{x} + t\mathbf{d}\mathbf{x})}{dt} \right|_{t=0} = \nabla F \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (\text{A.1.3})$$

La formulación variacional de los problemas en física explica porque en los problemas con valores en la frontera se toman unas u otras condiciones en la frontera.

No todos los problemas de la mecánica tienen la formulación variacional en la forma del problema del mínimo. Algunos de los problemas

pueden ser formulados como problemas variacionales pero no minimales o maximales. Un ejemplo es el principio de Hamilton de la acción minimal, que es sólo un principio estacionario.

Apéndice B

Las Fórmulas Integrales del Cálculo y Sus Extensiones Tensoriales

El objetivo del apéndice es presentar las fórmulas integrales de Stokes, Green y Gauss–Ostrogradski del cálculo usando la teoría de tensores.

B.1. Desde la fórmula de Newton–Leibnitz a la fórmula de Stokes

Sea $f(x)$ una función continuamente derivable sobre el segmento $[a, b]$. Es bien conocida la fórmula de Newton–Leibnitz

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \equiv f(x) \Big|_a^b. \quad (\text{B.1.1})$$

Usando la fórmula (B.1.1) podemos deducir la fórmula de integración por partes para funciones continuamente diferenciables $f(x)$ y $g(x)$:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad (\text{B.1.2})$$

Las fórmulas (B.1.1) y (B.1.2) pueden ser extendidas a dos o mas dimensiones. Para un dominio en el plano una de las extensiones es la fórmula de Green

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (\text{B.1.3})$$

donde $S \in \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado con la frontera Γ (Fig. B.1) que es una curva suave a trozas y las funciones $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ son continuamente diferenciables sobre S . La fórmula de Green es presentada en cualquier libro de texto sobre cálculo.

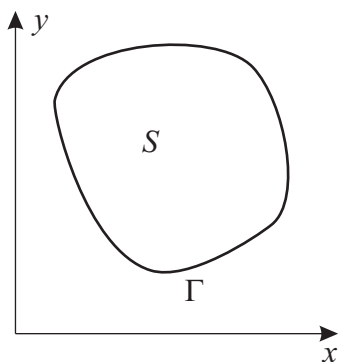


Figura B.1: S es un dominio acotado en el plano con la frontera Γ .

La fórmula de Stokes generaliza la fórmula de Green a tres dimensiones y es bien conocida también:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz & \quad (\text{B.1.4}) \\ &= \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz \\ & \quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx, \end{aligned}$$

donde $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie suave en trozas, $\Gamma = \partial S$ es la frontera de S (véase Fig. B.2), y las funciones $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$

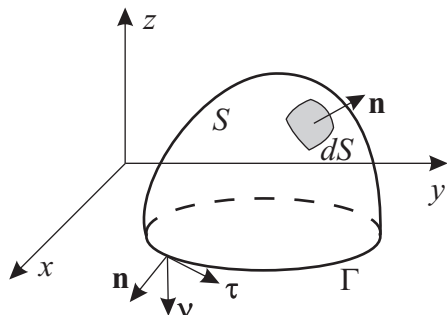


Figura B.2: La superficie S y su contorno Γ : dS es una parte infinitesimal de S , \mathbf{n} es la normal unidad a S en punto, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$ son los vectores unidades definidos en todo punto de Γ y tales que $\boldsymbol{\tau}$ es tangente a Γ en un punto y $\boldsymbol{\nu}$ es ortogonal a $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{n} en el punto.

y $R = R(x, y, z)$ son continuas y continuamente derivables sobre las partes suaves de S .

Las fórmulas de los teoremas de Green y Stokes relacionan la integral de una función sobre la frontera de un dominio con la integral sobre el dominio de una expresión de las primeras derivadas de la función. La fórmula de Gauss–Ostrogradski,

$$\int_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \quad (\text{B.1.5})$$

relaciona la integral de las funciones $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ y $R = R(x, y, z)$ que son continuas y diferenciables en V , un volumen acotado de \mathbb{R}^3 , con la integral de sus derivadas sobre la frontera $S = \partial V$ del volumen V .

B.2. Las fórmulas integrales en las notaciones tensoriales

Re-escribimos las fórmulas (B.1.4) y (B.1.5) usando las técnicas del cálculo tensorial. Denotamos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{f} = P\mathbf{i}_1 + Q\mathbf{i}_2 + R\mathbf{i}_3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \\ \nabla \times \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Es fácil ver que son válidos

$$dx = \mathbf{i}_1 \cdot d\mathbf{r}, \quad dy = \mathbf{i}_2 \cdot d\mathbf{r}, \quad dz = \mathbf{i}_3 \cdot d\mathbf{r},$$

$$dx dy = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{n} dS, \quad dy dz = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{n} dS, \quad dz dx = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde dS es la área de un elemento infinitesimal de la superficie S y \mathbf{n} es la normal unitaria a dS .

En las notaciones vectoriales la fórmula de Stokes (B.1.4) es

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Usando la identidad $(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f}$ transformamos la fórmula de Stokes a

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f} dS.$$

Igualmente la fórmula (B.1.5) toma la forma

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV. \quad (\text{B.2.1})$$

Las fórmulas de Stokes y de Gauss–Ostrogradski pueden ser extendidas al caso en que cambiamos el vector \mathbf{f} por un tensor \mathbf{T} de orden arbitrario. Se debe tener especial cuidado con el orden de las

operaciones, pues en general no conmutan. Por ejemplo, las siguientes fórmulas son correctas

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{T} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) dS, \quad (\text{B.2.2})$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV. \quad (\text{B.2.3})$$

Si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ la fórmula

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV$$

es **incorrecta** pero es válida si \mathbf{T} es un tensor simétrico del segundo orden.

Las fórmulas anteriores pueden ser generalizados al caso de los campos vectoriales y tensoriales dados sobre una superficie que lleva al teorema de divergencia sobre una superficie (3.4.3).

B.3. El teorema de la divergencia superficial

La fórmula (3.4.3)

$$\int_{\Sigma} (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + 2H\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T} ds$$

constituye el teorema de divergencia del Capítulo 3.

Demostraremos el teorema para un tensor \mathbf{T} de cualquier orden. Primero probaremos que un tensor \mathbf{T} arbitrario puede ser representado en la forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}_2. \quad (\text{B.3.1})$$

En efecto, tenemos que

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{A} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}.$$

Para el tensor $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ es conocida la identidad

$$\mathbf{A} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{A}).$$

Entonces

$$\mathbf{T} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}.$$

Finalmente tenemos que los tensores \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 en (B.3.1) son

$$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{n} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (\text{B.3.2})$$

Aplicando la fórmula (B.2.2) a \mathbf{T}_1 :

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}_1 = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}_1) dS. \quad (\text{B.3.3})$$

Usando la notación

$$\nabla = \tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z},$$

donde $\tilde{\nabla}$ es la parte del operador gradiente ∇ dado sobre S y que

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}_1) = \mathbf{n} \cdot \left[\left(\tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{T}_1 \right] = \mathbf{n} \cdot (\tilde{\nabla} \times \mathbf{T}_1),$$

tenemos la fórmula de Stokes que incluye solo la derivadas tangenciales de \mathbf{T}_1

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}_1 = \int_S \mathbf{n} \cdot (\tilde{\nabla} \times \mathbf{T}_1) dS. \quad (\text{B.3.4})$$

Note que en la fórmula (B.3.4) el tensor \mathbf{T}_1 puede ser definido sólo sobre la superficie S porque la fórmula depende de los valores de \mathbf{T} sobre S y de sus derivadas direccionales que son en las direcciones tangentes a S en el punto de integración.

Transformamos la parte izquierda de (B.3.4). El diferencial $d\mathbf{r}$ tiene la forma $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$, donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector unidad tangente al contorno Γ y s el parámetro de longitud del contorno. El vector $\boldsymbol{\tau}$ se satisface la fórmula

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu},$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unidad al contorno Γ que pertenece al plano tangente de S , vea Fig. B.2. Por la identidad $(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}_1 = \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1)$, obtenemos que

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}_1 = - \oint_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1) ds.$$

Usando la identidad

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\nabla} \times \mathbf{T}_1) = -\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1)$$

y transformando la parte derecha de (B.3.4) tenemos otra forma de la ecuación (B.3.3):

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1) ds = \int_S \tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1) dS. \quad (\text{B.3.5})$$

Para \mathbf{T}_2 es válida la fórmula

$$\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{T}_2) = (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{n})\mathbf{T}_2 = -2H\mathbf{T}_2, \quad (\text{B.3.6})$$

donde H es la curvatura promedio de la superficie S .

Finalmente usando las fórmulas (B.3.1), (B.3.5) y (B.3.6) obtenemos

$$\int_S (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + 2H\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) dS = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (\text{B.3.7})$$

La igualdad (B.3.7) es el teorema de Gauss–Ostrogradski (que también es conocido como el teorema de divergencia superficial) para el campo tensorial \mathbf{T} definido sobre la superficie S .

Si el campo tensorial es tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$, la fórmula (B.3.7) coincide en la forma con la fórmula clásica de Gauss–Ostrogradski (B.2.3):

$$\int_S \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} dS = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (\text{B.3.8})$$

Pero para el campo tensorial dado sobre una superficie con $H \neq 0$ la fórmula (B.3.8) es incorrecta.

Si S es una superficie cerrada, usando (B.3.7) tenemos la identidad integral

$$\int_S \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} dS = -2 \int_S H\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS. \quad (\text{B.3.9})$$

Usando (B.3.7) podemos deducir otras fórmulas que relacionan integrales sobre una superficie con las integrales sobre la frontera de la superficie. Por ejemplo, sustituyendo $\mathbf{T} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{S}$ en la ecuación (B.3.7) y usando que

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 2H\mathbf{n},$$

obtenemos la fórmula

$$\int_S (\tilde{\nabla} \mathbf{S} + 2H \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}) dS = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{S} ds. \quad (\text{B.3.10})$$

Ahora empezando de (B.3.10) podemos obtener

$$\int_S (\tilde{\nabla} \times \mathbf{S} + 2H \mathbf{n} \times \mathbf{S}) dS = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{S} ds. \quad (\text{B.3.11})$$

Sustituyendo $\mathbf{S} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{X}$ a (B.3.10), tenemos una fórmula integral más

$$\int_S \tilde{\nabla} \times (\mathbf{n} \otimes \mathbf{X}) dS = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{X} ds. \quad (\text{B.3.12})$$

Las fórmulas deducidas juegan un papel importante en mecánica y física de medios continuos, en particular en la teoría de cáscaras.

Bibliografía

- [Adams and Fournier (2005)] Adams, R. A. and Fournier, J.F. (2005). *Sobolev Spaces*, 2nd ed. (Academic Press, Amsterdam, an imprint of Elsevier Science).
- [Antman (2005)] Antman, S. S. (2005). *Nonlinear Problems of Elasticity*, 2nd ed. (Springer Science Media, New York).
- [Arnold (2010)] Arnol'd, V. I. (2010) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed. (Springer Science, New York).
- [Ciarlet (1996)] Ciarlet, Ph. G. (1996). *Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity, Vol.1* (North-Holland, The Netherlands).
- [Ciarlet (1997)] Ciarlet, Ph. G. (1997). *Mathematical Elasticity. Vol. II. Theory of Plates* (North-Holland, Amsterdam).
- [Ciarlet (2000)] Ciarlet, Ph. G. (2000). *Mathematical Elasticity. Vol. III. Theory of Shells* (North-Holland, Amsterdam).
- [Ciarlet (2010)] Ciarlet, Ph. G. (2010). *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity* (Springer-Verlag, Dordrecht).
- [Cosserat and Cosserat (1909)] Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables* (Herman et Fils, Paris). English translation: NASA TT F-11, 561 (NASA, Washington, DC).

- [Destuynder and Salaun (1996)] Destuynder, Ph. and Salaun, M. (1996). *Mathematical Analysis of Thin Plate Models* (Springer-Verlag, Paris, Berlin).
- [Eremeyev and Zubov (2008)] Eremeyev, V. A. and Zubov L. M. (2008). *Mechanics of Elastic Shells* (in Russian) (Nauka, Moscow).
- [Eremeyev et al (2012)] Eremeyev, V. A., Lebedev, L. P., and Altenbach, H. (2012). *Foundations of Micropolar Mechanics* (Springer, Heidelberg).
- [Eringen (1999)] Eringen, A. C. (1999) *Microcontinuum Field Theory. I. Foundations and Solids* (Springer-Velag, New York).
- [Lanczos (1986)] Lanczos, C. (1986). *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed. (Dover Publications).
- [Landau and Lifshitz (2008)] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (2008). *Mecánica*, 2da edición (Reverté).
- [Landau and Lifshitz (2008a)] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (2008). *Teoría de la elasticidad*, 2da edición (Reverté).
- [Lebedev and Vorovich (2003)] Lebedev, L. P. and Vorovich I. I. (2003). *Functional Analysis in Mechanics* (Springer-Verlag, New York).
- [Lebedev and Cloud (2003a)] Lebedev, L. P. and Cloud, M. J. (2003). *Tensor Analysis* (World Scientific, New Jersey, London, Singapore).
- [Lebedev and Cloud (2003b)] Lebedev, L. P. and Cloud, M. J. (2009). *The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics*. (World Scientific, New Jersey, London, Singapore).
- [Lebedev et al (2010)] Lebedev, L. P., Cloud, M. J., and Eremeyev, V. A. (2010). *Tensor Analysis with Applications in Mechanics* (World Scientific, New Jersey, London, Singapore).

- [Lebedev and Cloud (2009)] Lebedev, L. P. and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Mathematical Elasticity* (World Scientific, New Jersey, London, Singapore).
- [Libai and Simmonds (1998)] Libai, A. and Simmonds, J. G. (1998). *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- [Lurie (2005)] Lurie, A. I. (2005). *Theory of Elasticity* (Springer, Berlin).
- [Nowacki (1986)] Nowacki, W. (1986). *Theory of Asymmetric Elasticity* (Pergamon, Oxford).
- [Ogden (1997)] Ogden, R. W. (1997). *Non-Linear Elastic Deformations* (Dover, New York).
- [Simmonds (1982)] Simmonds, J. G. (1982). *A Brief on Tensor Analysis*, 2nd ed. (Springer, New York).
- [Sokolnikoff (1994)] Sokolnikoff, I. S. (1994). *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua* (Wiley, New York).
- [Spencer (1971)] Spencer, A. J. M. (1971). *Theory of Invariants*. In: A. C. Eringen (ed.), *Continuum Physics*, Vol. 1, pp 292–307 (Academic Press, New-York).
- [Timoshenko and Goudier (1975)] Timoshenko, S. P. and Goudier, J. N. (1975). *Teoría de la elasticidad*, 2da edición (URMO, S.A de Ediciones).
- [Truesdell and Noll (2004)] Truesdell, C. and Noll, W. (2004). *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*, 3rd ed. (Springer, Berlin).
- [Vorovich (1999)] Vorovich, I. I. (1999). *Nonlinear Theory of Shallow Shells* (Springer-Verlag, New York).

Índice alfabético

- auto-equilibrio, 74
- Banach, 34
- Bernoulli, 63
- binormal, 108
- Bois-Reimond, 13
- Cauchy, 144
- Cesàro, 142
- Christoffel, 103
- coeficiente
 - de Poisson, 150
- coeficientes métricos, 87
- componentes covariantes y contra-variantes, 87
- componentes covariantes, contra-variantes, 91
- condición
 - de Dirichlet
 - membrana, 122
 - de Neumann, membrana, 122
 - del cono, 34
- condiciones
 - cinemáticas, 159
 - de compatibilidad, 142
 - de Weierstrass–Erdman, 20
 - estáticas, 159
 - mixtas, 159
 - naturales, 16
- condiciones en la frontera
 - cinemáticas, 159
 - estáticas, 159
 - mixtas, 159
- constantes
 - de Lamé, 152
 - elásticas, la tabla, 153
- construcción
 - estáticamente definida, 46
 - estáticamente indefinida, 46
- curvatura, 107
- d’Alambert, 43
- díada, 89
- Darboux, 108
- deflección, 120
- deformación, 47
- densidad de fuerza, 143
- densidad de la energía de deformación, 153
- derivada funcional en el sentido de Gâteaux, 8
- desigualdad
 - de Friedrichs, 123, 163
 - de Korn, 162
 - de Poincaré, 56
- desplazamiento, 139
- desplazamientos pequeños del cuerpo rígido, 164

- determinante, 93
 Dirichlet, 1, 14, 21, 48, 52, 54, 67, 70, 72, 122, 124, 159
- ecuación
 de Euler, 11
 de Euler–Lagrange, 25, 31
- ecuaciones
 dinámicas, media continua, 148
- ecuaciones del equilibrio
 barra, 45
 barra, en desplazamientos, 47
 cuerpo elástico, en desplazamientos, 158
 cuerpo rígido, 43
 medio continuo, 145
 membrana, 121
 viga, 64, 65, 67
- ecuaciones dinámicas, 148
- Einstein, 86
- energía
 membrana, 120
- energía potencial total
 barra, 50
 cuerpo elástico, 161
 membrana, 120, 122
 resorte, 42
 viga, 68
- Erdman, 20
- espacio energético
 barra, problema de Dirichlet, 53
 barra, problema de Neumann, 56
 cuerpo elástico, 165
 membrana, 122
 membrana, problema de Neumann, 126
 viga, 70
- espacio energético, viga, problema de Neumann, 73
- Euler, 9, 25
- extremal, 14
- fórmula
 de Cesàro, 142
 de Gauss–Ostrogradski, 183
 de Green, 182
 de integración por partes, 181
 de Newton–Leibnitz, 181
 de Stokes, 106, 182
- fórmulas de Frenet–Serret, 108
- frecuencias propias, 161
- Friedrichs, 123
- fuerza
 de contacto, 143
 de masa, 142
- fuerzas
 auto-equilibradas, 22, 23, 49, 58, 73, 125, 127, 159
- función
 de la energía de deformación, elasticidad, 155
- funcional, 7
 cuadrático, 32
 principal, 9
- Gâteaux, 8, 179
- Gauss, 105
- gradiente
 de deformación, 139
- Helmholtz, 13

- Hilbert, 31
 hipótesis de Bernoulli, 63
 Hooke, 47
- integral
 de Dirichlet, 1
- Korn, 162
 Kronecker, 87
- Lagrange, 9, 25
 Lamé, 152
- lema
 fundamental del cálculo varia-
 cional, 12
 de Cauchy, 144
 fundamental del cálculo varia-
 cional en \mathbb{R}^2 , 30
- ley
 de Hooke, 47, 152
 de Hooke, forma matricial, 156
 generalizada de Hooke, 154
- método
 de Ritz, 5
- módulo
 de corte, 152
 de elasticidad de volumen, 152
 de Young, 47
- mecánica Lagrangiana, 9
- membrana
 principio de Lagrange, 120
- moda propia, 161
- modulo elástico de Young, 149
- Neumann, 2, 17, 22, 23, 26, 48–50,
 57, 72, 74, 122, 125, 127,
 159
- normal principal, 107
- operador
 nabla, 101
- paradoja de Perron, 10
- Poincaré, 56
- Poisson, 150
- polo, 100
- potencial, 155
- primera forma cuadrática, 111
- principio
 de d’Alembert, 43
 de desplazamientos virtuales,
 51
 de trabajos virtuales, 51
 principio de d’Alembert, 147
 principio de Lagrange
 barra, 51, 52
 cuerpo elástico, 161
 membrana, 120
 resorte, 42
 viga, 68
 principio de solidificación, 42
- problema
 de Dirichlet, 1
 barra, 48
 membrana, 122
 viga, 70
 de frecuencias propias, elasti-
 cidad, 161
 de Neumann, 2
 barra, 48
 viga, 72
 del mínimo, 7
- producto interior, 86
- producto tensorial, 90

- punto singular del funcional, 17
- regla
 de signos, 48
 de Voigt, 156
- Riemann, 89
- rigidez a la flexión de la viga, 67
- Ritz, 5
- Sóbolev, 4
- símbolo
 de permutación, 97
- símbolo de Kronecker, 87
- símbolos de Christoffel, 103
- solución energética
 viga, problema de Dirichlet, 71
 barra, problema de Dirichlet, 53
 barra, problema de Neumann, 56
 cuerpo elástico, problema mixto, 165
- Stokes, 106
- tensor
 lineal de deformación, 140
 antisimétrico, 94
 componentes covariantes, contravariantes, 91
 componentes mixtas, 91
 de Levi-Chivita, 97
 de módulos elásticos, 155
 de rigidez, 155
 de tensiones de Cauchy, 145
 determinante, 93
 invariantes, 95
 inverso, 93, 96
- métrico, 93
 no-degenerado, 93
 nulo, 93
 ortogonal, 94
 simétrico, 94
 transpuesto, 93
 traza, 93
 unidad, 93, 97
- teorema
 de Cauchy, 145
 de Cayley-Hamilton, 96
 de Gauss-Ostrogradsky, 105
 de inmersión de Sóbolev, 1, 34
- teorema de existencia y unicidad
 barra, problema de Dirichlet, 54
 barra, 49
 barra, problema de Neumann, 57
 cuerpo elástico, problema mixto, 166
 en el espacio de Hilbert, 32, 33
 membrana, problema de Dirichlet, 124
 membrana, problema de Neumann, 127
 viga, problema de Dirichlet, 72
 viga, problema de Neumann, 74
- traza, 93
- triedro natural, 108
- vector
 de Darboux, 108
 de desplazamiento, 139
 de posición, 99

- de tensión, 143
- propio, 95
- viga
 - densidad de la energía de de-
formación, 68
 - espacio energético, 70
 - rigidez, 67
- Voigt, 156
- Weierstrass, 4, 20
- Young, 47

Elementos de mecánica matemática
se terminó de imprimir en enero de 2013
en los talleres de Proeditor Ltda.,
calle 1C No. 27 A - 01,
en Bogotá (Colombia).

Se imprimieron 300 ejemplares, compuestos en LaTeX,
usando la fuente Serif Romana de 11 puntos,
en formato 16,5 x 24 cm; para la cubierta
se utilizó Propalcote de 240 g y Bond de 75 g para
las páginas internas.

