2

INTRODUCCIÓN A LA HISTORIA Y A LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

VOLUMEN 2. HACIA LA FORMALIZACIÓN EN HILBERT Y EN BOURBAKI

ALBERTO CAMPOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN
A LA HISTORIA Y A LA FILOSOFÍA
DE LA MATEMÁTICA

VOLUMEN II. HACIA LA FORMALIZACIÓN EN HILBERT Y EN BOURBAKI

Alberto Campos

Universidad Nacional de Colombia.
Facultad de Ciencias.
Departamento de Matemáticas.

Bogotá D. C., 2008.

Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática
Volumen II. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Edición, 2008
Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-719-043-4

Impresión: Proceditor Ltda.
proceditor@etb.net.co
Bogotá, Colombia
Diagramación en LaTeX : Paola Palma Vanegas
Diseño de carátula: Leyla Cárdenas Campos

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Campos Sánchez, Alberto, 1928 –
Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática / Alberto Campos. – Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2008
v. : il.

v. 2. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki

ISBN 978-958-719-043-4

1. Hilbert, David, 1862-1943 2. Bourbaki, Nicolás 3. Filosofía de las matemáticas 4. Lógica simbólica y matemáticas

CDD-21 501 / 2008

Introducción

El hilo conductor en esta obra, es la noción de sistema formal. Se ha estudiado la matemática en estado naciente entre los pitagóricos y algunas ilustraciones de su desenvolvimiento hasta los tiempos de Aristóteles. Luego, cómo axiomatizó Euclides la geometría. Ahora se trata de ver el papel jugado por el quinto postulado de esta axiomatización hasta provocar la creación de las geometrías no euclidianas; la necesidad que éstas pusieron de manifiesto de pensar de nuevo la axiomatización de Euclides, lo cual hizo Hilbert; el consiguiente surgimiento del problema de no contradicción de la matemática la solución inesperada que dan a esta cuestión los teoremas de Gödel, y, la superación, de hecho, de la posición de inseguridad en que aquellos teoremas ponen a los sistemas formales.

Genéticamente, se puede considerar un desarrollo experimental, intuitivo, o axiomático de la matemática. Ya se vieron los dos primeros aspectos; ahora, se trata de ahondar en el aspecto axiomático. La axiomatización de la geometría hecha por Euclides es, históricamente, el primer sistema formal y, durante muchos siglos, el único. Lo que constituye un sistema formal, en el fondo no ha cambiado; es lo que quiere decir Bourbaki con la frase: “Lo que era un teorema para Euclides, todavía lo es para nosotros”. Lo que sí ha cambiado es la forma. Los primeros principios de Euclides no son los de Hilbert, ni en cuanto a componentes, ni en cuanto a exigencias, ni en cuanto a significados o presupuestos filosóficos, etc. Es lo que hace la diferencia entre *Elementos*, de Euclides y *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert. El pasaje de una obra maestra a la otra es uno de los ejemplos más convincentes de evolución en matemática: una vez compuesta la obra de Euclides era ineluctable la de Hilbert. En la manera misma como Euclides eligió los primeros principios está el germen que va a provocar la evolución hasta Hilbert. Al completarse el desarrollo con la obra de Hilbert surge el problema, resuelto por Gödel. La exposición de la matemática más conocida actualmente (y esto no implica que sea aceptada por todos) es la de Nicolas Bourbaki: es la axiomatización de la matemática a la manera de Hilbert, pero añadiéndole un empleo sistemático de las estructuras.

Por capítulos, se tienen los siguientes temas. Axiomatización a la manera de Euclides tal como puede apreciarse en *Elementos* de Euclides fue estudiada en el capítulo noveno del volumen I. Se estudia ahora cómo uno de los cinco postulados, el quinto, originó inmediatamente un problema, que los geómetras ensayaron resolver, y a veces creyeron haberlo hecho, dentro de la misma teoría creada por Euclides; y cómo y porqué no lo lograron (1).

Al álgebra retórica de Mesopotamia y de la Grecia clásica, y al álgebra sincopada de Diofanto, vino a agregarse, principalmente por obra de Viète sobre el álgebra heredada de los árabes, el álgebra simbolizada. Descartes se sirvió eficazmente de ella para resolver un problema cuyo enunciado había transmitido Papo de Alejandría. Igualmente, Fermant lo había utilizado con frutos. Aparece así una nueva función para el álgebra, la de resolver problemas de geometría: es la algebraización de la geometría (2).

Este papel, entonces puramente logístico, va a complementarse con Leibniz mediante anticipos (presentes ya en Descartes) acerca de una matemática universal basada preponderantemente en la lógica (3).

La matemática concebida por Euclides tuvo influencia, digna de ser destacada, sobre las disquisiciones de algunos importantes pensadores. En (4) se estudia el caso, quizá el más famoso, de Kant. La evolución de la investigación geométrica lleva finalmente a aceptar que si en lugar del quinto postulado se toman las dos posibilidades restantes, se obtienen sistemas lógicamente correctos: las geometrías no euclidianas (5).

La premoniciones de Leibniz en el siglo XVII, sin la influencia de Leibniz, es cierto, van a iniciar su realización gracias al ensayo pionero (1847) de Boole titulado *Análisis matemático de la lógica* (6).

El hecho cumplido de las geometrías no euclidianas juntado a la indagación sistemática de la lógica y de las relaciones de esta con la matemática condujeron a filósofos, lógicos y matemáticos a replantear las circunstancias generales de la axiomatización de tal manera que cobijara tanto las geometrías no euclidianas como la euclidiana. Todo este proceso culmina en una obra, más compleja que la de Euclides, *Fundamentos de la geometría*, de David Hilbert (8).

En la obra de Hilbert había surgido un problema, que no podía manifestarse en Euclides, por la muy diferente concepción de los primeros principios. Hilbert lo formula como el problema de la no contradicción de la matemática (9, 10).

Al problema de Hilbert da Gödel una respuesta que trae como consecuencia una limitación intrínseca de los sistemas formales (11).

Bourbaki esquiva pragmáticamente un enfrentamiento con las consecuencias de los teoremas de Gödel, que fueron la canción de cuna del grupo nacido en los años treinta (12).

En el capítulo 13 se consideran los principios metamatemáticos generales que adopta Bourbaki para la exposición matemática. Tres modos (experimental, intuitivo, axiomático) de la relación que pueden tener los seres humanos con la matemática se desarrollan en el capítulo 14.

El último capítulo encierra observaciones críticas a propósito de la filosofía de la matemática de Kant y un centenar de circunstancias para tener en cuenta al iniciarse en filosofía de la matemática. Todas tienden a la simplificación. En conjunto, parecieran inducir a la conclusión: Reducir al mínimo la filosofía de la matemática (15).

Este no es un volumen de historia, aunque se valga fuertemente de ella con el fin de llegar a darse cuenta: de la tendencia evolutiva de la geometría, rama de la matemática, frecuentemente considerada por los filósofos como paradigma del conocimiento racional, y del sentido filosófico de tal tendencia. Otra finalidad es el ejercitamiento incesante en la argumentación: los filósofos han de trabajar siempre discursivamente y por conceptos (Kant) y la validez del discurso está supeditada a la calidad del razonamiento.

Esta obra maduró lentamente, a partir de un pequeño libro (1959), conciso y sesudo, de Robert Blanché, acerca de la axiomática; en el que, a guisa de ilustraciones, el autor aduce hechos preclaros para los conocedores de la historia matemática y obscuros o irrelevantes para quienes no la conocen. La intención inicial fue acumular y disponer convenientemente la información faltante. Poco a poco, debido a la experiencia didáctica con los estudiantes de filosofía y a los intereses específicos de ellos en teoría del conocimiento, la geometría, y no solo la axiomática, pasó también a ser parte constitutiva del estudio; lo cual no es extraño, pues, apenas continúa la tradición académica griega de los cursos propendeúticos para la filosofía. Cada capítulo ha sido redactado de nuevo, por lo menos tres veces. Se ha llegado a un texto autosuficiente. Hay aportes de los estudiantes, desde luego; por una parte, el de las solicitudes de mejores explicaciones; por otra, el más valioso, el de las preguntas, no raras veces, tan inteligentes.

Diversos temas de esta obra han sido expuestos y discutidos, no solo con oyentes filósofos o matemáticos, en diferentes eventos frecuentes en la actividad matemática universitaria.

La presente edición ha sido minuciosamente preparada a partir de los dos libros iniciales *Introducción a la lógica y a la geometría griegas anteriores a Euclides*, y, *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.*

Se espera que los usuarios, al ser cuestión de originalidad en los dos volúmenes de esta obra, lleguen a acordársela, en puntos como los siguientes:

1. Formulación y realización cuidadosa del plan general de la obra.
2. La insistencia en las tres maneras de concebir la axiomatización (de Euclides, de Hilbert, de Bourbaki). La triple concepción es fruto de la práctica docente con estudiantes de matemática y de filosofía y de la insatisfacción consecuente a la búsqueda de explicaciones racionales para ciertos desenvolvimientos en la historia de la geometría.
3. Se intenta hacer ver concretamente la evolución de la geometría: cómo conformaba inicialmente un todo con la axiomática y cómo se fueron constituyendo gradualmente en disciplinas autónomas.
4. El esfuerzo por entender la filosofía de la matemática de Kant y por mostrar cómo esta filosofía quedó paralizada y no puede explicar la matemática posterior a ella.
5. Ensayar por diversos modos hacer patente que las demostraciones no son arbitrarias sino que cada paso, en cada una de ellas, es motivado.
6. Desgajar cada proposición, de modo que se pueda apreciar su peso individual en la demostración en la que figura.
7. Ensayar hacer visible el encadenamiento de las proposiciones en una demostración mediante diagramas.
8. La diligencia en hacer ver la idea directora en algunas demostraciones abstrusas y a veces en la independencia de la demostración respecto de la figura.

9. Todas las paráfrasis que figuran en la obra ellas desarman y arman de nuevo una demostración con el fin de llegar a entenderla a cabalidad.
10. Cada uno de los capítulos, salvo el último, termina con numerosas cuestiones que permiten poner a prueba la comprehensión del texto.
11. El intento de visión panorámica de cien circunstancias relativas a la filosofía de la matemática.
12. El empeño en hacer ver la diferencia entre construir en la mente un mundo donde el control de calidad es la lógica por una parte, y por otra, reconstruir en la mente el mundo circundante con un control de calidad que restringe los resultados a la experiencia posible.
13. El esfuerzo por hacer algo más, en terrenos tan conocidos, como el libro I de *Elementos*, de Euclides, o el capítulo I de *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert.

Alberto Campos Sánchez.
Doctor de la Universidad de París.
Profesor Honorario.
Departamento de Matemáticas.
Universidad Nacional de Colombia.

Bogotá, 19 V 2008.

Índice general

Capítulo 1

El quinto postulado, motor en la evolución de la geometría

En un plano, entre las líneas que no se intersecan, "algunas están siempre a la misma distancia entre sí, otras disminuyen tal distancia continuamente, como la hipérbola y la línea recta [asíntota] o la concoide y la línea recta [asíntota]. Estas líneas, aunque disminuyen continuamente la distancia recíproca, nunca llegan a encontrarse; convergen, pero no enteramente: este es el más paradójico teorema de la geometría puesto que muestra que la convergencia de ciertas líneas es no convergente".

[Proclo, citado por Heath, I, p. 191].

En los capítulos que siguen se va a mostrar cómo evolucionó la geometría, desde la concepción de Euclides hasta la de Hilbert. Se tratará de hacer manifiesto que la geometría no quedó constituida, de una vez por los griegos (como todavía algunos creen), sino que en su construcción axiomática (que por concepciones filosóficas se creía la única posible) quedaron gérmenes que, afortunadamente, impulsaron su desarrollo desde el interior mismo. El gran respeto que se tributó a la obra maestra, hubiera impedido cualquier intento de modificación desde fuera.

Bien pesados los eventos de esta historia, ahora puede decirse que una vez escrito *Elementos*, de Euclides, ineludiblemente se llegaría, algún día, a *Fundamentos de la Geometría*, de Hilbert.

El quinto postulado de Euclides

¿Cuál es el germen del desarrollo? El quinto postulado. Se va a mostrar cómo surge, y, luego, cómo queda planteado el problema.

Recuérdese la definición 23 del Libro I:

Líneas rectas paralelas son líneas rectas coplanares que, prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran en ninguno de los dos.

En los términos en que está dada, esta definición es de lo más general que pueda darse; sin embargo, pronto será restringida.

A poco andar, uno de los problemas que va a presentarse es el de la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta; mientras esto no esté bien decidido, habrá que buscar cómo soslayarlo. Es así como hay dos teoremas del ángulo externo, el 16 y el 32.

Según el primer teorema del ángulo externo (I.16), en todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es mayor que cada uno de los dos interiores no adyacentes.

Para demostrarlo, hay que comparar dos ángulos, construidos en diferentes puntos y lados de una misma recta; lo cual se logra gracias al primer criterio de igualdad de triángulos, el cual, por cierto, implica, únicamente, que un determinado ángulo es mayor que otro (ver en el capítulo 9 del volumen I, la demostración del teorema 16). Para mayor precisión, habrá que esperar el teorema I 32. (Ver Capítulo 4 del presente volumen).

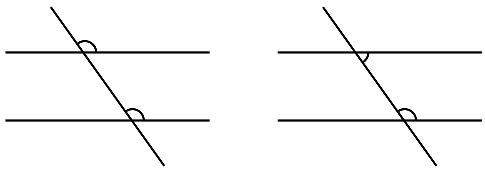
Pero, en la construcción relativa a la demostración del teorema I 16, se postula, implícitamente, que dado un segmento, es siempre posible construir el doble del mismo; lo cual conduce a postular la infinitud de la recta.

Grosso modo, se verá posteriormente, aquí se produce la separación de caminos, axiomáticamente hablando, entre la que será la geometría de Euclides y la de Riemann sobre la esfera.

El problema de Euclides no es la existencia de paralelas. En efecto, el teorema 27 asegura que si una recta al incidir sobre otras dos, forma ángulos alternos internos iguales entre sí, las dos rectas son paralelas.

Está garantizada la existencia de paralelas.

Cosa análoga hace el teorema 28, según el cual, si una recta al incidir sobre otras dos forma un ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto por el mismo lado, o, si los ángulos internos por el mismo lado son iguales a dos ángulos rectos, entonces, las rectas son paralelas.



Mientras no haya quinto postulado de Euclides, no habrá separación de la que, después, se llamará, geometría de Bolyai-Lobachevski, donde, por lo dicho, queda asegurada la existencia de paralelas; no su unicidad, desde luego. Así, pues, los terrenos de la geometría no euclidiana son, en parte, compartidos con el mismo Euclides.

Enunciado del quinto postulado

Naturalmente, se toma el mismo de Euclides. No se pide prestado uno a geómetras posteriores, por la razón de que hay que acudir al préstamo, cuando no se dispone del objeto que hay que tomar prestado. Afortunadamente, este no es el caso en *Elementos* de Euclides. Este es el enunciado.

Postulado (V). *Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma ángulos internos, por el mismo lado, menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se las prolonga indefinidamente, se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.*

Es incorrecto hablar de postulado de las paralelas. En efecto, ellas no son mencionadas explícitamente; y para encontrar su mención implícita es necesario tener en cuenta todas las posiciones posibles de una de las dos rectas incididas, si la otra se deja fija.

Es posible descomponer el enunciado en antecedente y consecuente.

Antecedente: Una recta al incidir sobre otras dos determina ángulos menores que dos ángulos rectos.

Consecuente: Las dos rectas se encuentran, al prolongarlas por el lado de la recta incidente en que están los ángulos menores que dos rectos.

Ahora bien; decir que no se encuentran por más que se prolonguen, es lo mismo que decir que las rectas son paralelas (Definición 23).

Si se niega el consecuente, y las rectas son paralelas, se niega también el antecedente, es decir, los ángulos determinados por la recta incidente ya no son menores que dos ángulos rectos.

Caso excepcional. Los ángulos determinados por la recta incidente son iguales a dos rectos. Las rectas, prolongadas indefinidamente, no se encuentran por ninguno de los dos lados de la recta incidente. En virtud del teorema 28, las dos rectas incididas de esa manera son paralelas.

Aparece la unicidad de la paralela, como un caso extremo. Hay incontables posibilidades de que las rectas se encuentren, hay un único caso en que no se encuentran. Y esta única posibilidad aparece como el caso limite de las incontables posiciones que determinan ángulos menores que dos rectos, pero que difieren cada vez menos de dos ángulos rectos.

Incontable, al pie de la letra, un conjunto no numerable de casos posibles; y no el que se emplea cuando se habla, por ejemplo, del incontable número de gentes, en la vida corriente, que no solamente es contable, sino además, finito.

En resumen, la unicidad de la paralela aparece implícitamente en Euclides; no hay un enunciado explícito que la introduzca.

Teorema (I. 17)**.** *En todo triángulo, dos ángulos cualesquiera son menores que dos ángulos rectos.*

Se lo ha considerado siempre como una especie de recíproca del quinto postulado. La figura, que acompaña las demostraciones de Euclides, parece sugerir el acercamiento; puesto que si los ángulos son menores que dos rectos, las rectas incididas terminan por encontrarse; en otras palabras, siempre se forma un triángulo. Es curioso que se haya llegado a pensar que, por tal parentesco, el enunciado del quinto postulado también debería ser deducible.

La posibilidad excepcional implicada en el quinto postulado es, por cierto, sumamente excluyente; basta que los ángulos por un mismo lado de la recta incidente difieran de dos ángulos rectos en menos de un ángulo tan pequeño como se quiera, para que haya que concluir que las rectas se encuentran y que forman un triángulo.

Lo cual, a la larga, va a imponer una fuerte restricción a la definición I 23 de *Elementos*. La pareja formada por la definición I 23 y por el quinto postulado, restringen el paralelismo a la equidistancia.

Dice Proclo, en un comentario a las nociones de postulado y axioma: "Digo que el postulado y el axioma deben contener ambos lo sencillo y fácil de entender" (*Científicos griegos*. p. 1171).

Un poco más adelante, en el mismo pasaje dice: "... el hecho de ser iguales todos los ángulos rectos no es un postulado, como no lo es el quinto hecho de que si una recta que corta a otras dos y forma del mismo lado ángulos interiores menores que dos rectos y se prolongan esas rectas, se encuentran hacia el lado en que los ángulos son menores que dos rectos, porque estos hechos no se perciben en una construcción, ni piden que se proporcione algo, sino que denuncian un cierto síntoma, inherente a los ángulos rectos, al mismo tiempo que a las rectas prolongadas a partir de ángulos menores que dos rectos".

Con lo de que el quinto hecho no se percibe en una construcción se puede entender que allí no se enuncia algo "sencillo y fácil de entender". Con lo de que no se pida que se proporcione algo alude a la opinión de los que veían entre el postulado y el axioma la misma relación que entre el problema y el teorema; problema y teorema tienen en común el que haya que demostrarlos, postulado y axioma el que sean indemostrables. Proclo opina, pues, que, en particular, el quinto postulado es demostrable, es decir, no es postulado. Es, además, un síntoma, un indicio de las rectas prolongadas a partir de ángulos menores que dos rectos, es, en cierto modo, connatural a una situación de éstas.

Dice también Proclo (*Científicos griegos*. II tomo. p. 1174): "... el hecho de prolongarse al infinito sin encontrarse es lo que caracteriza a las paralelas, hecho que no es absoluto, aunque sí lo es el de prolongarse al infinito por ambas partes y no encontrarse". Advierte que se descarta así la situación de un par de rectas que por un lado se juntan y por el otro, se alejan cada vez más, aunque se las prolongue al infinito.

Consigna luego la concepción de rectas paralelas como rectas coplanarias equidistantes, que atribuye a *Posidonio*.

Tal es el concepto euclidiano de paralelismo; pero Posidonio dice que dos rectas son paralelas cuando estando situadas en un plano, no se acercan ni se alejan, siendo iguales las perpendiculares trazadas desde los puntos de una a la otra, mientras que las rectas que hacen cada vez menores estas perpendiculares se inclinan una sobre otra; y como la perpendicular basta para definir las alturas de las áreas y las distancias entre rectas, cuando las perpendiculares son iguales también lo son las distancias entre las rectas, pero cuando las hay mayores y menores, las rectas se acercan en el lado en que están las perpendiculares más pequeñas.

En este párrafo de Proclo, aparece el paralelismo al ras de la equidistancia, de manera que si no hay ésta, tampoco hay aquél. En *Elementos*, I 34, seguramente notó Posidonio que ello se hacía subrepticiamente (el autor de *Elementos* no se molestó en consignar la definición de paralelogramo; no se sabe por qué, después de haber puesto prolijamente las 23 definiciones, algunas de ellas inservibles, se contenta con la redacción de lo que tal vez algún texto contemporáneo aceptaría como un teorema-definición) y explicita la explicación del paralelismo mediante la distancia; con lo cual la noción de paralelismo pierde en generalidad y los matemáticos tendrán que ejercitar su imaginación posteriormente, cuando aparezcan las geometrías de Bolyai-Lobachevski.

Los párrafos siguientes del mismo texto de Proclo muestran cuánta discusión había habido en las escuelas, pues, lo que allí se dice puede quedar oculto al más atento lector en su primera lectura del libro de Euclides.

También hay que saber que el hecho de ser asintóticas [no incidentes] no quiere decir que las rectas sean paralelas en todos los casos porque las circunferencias de los círculos concéntricos tampoco se encuentran, sino que se deben prolongar al infinito, lo cual conviene no solo a las rectas, sino también a otras líneas porque podemos imaginar espirales descritas alrededor de rectas y ordenadas de modo que, si se prolongan al infinito al mismo tiempo que estas rectas, no se encontrarán nunca. (*Científicos griegos*. II. p. 1174).

La historia del desarrollo del quinto postulado es muy extensa; pero, en estas notas, se va a restringir a la mención de únicamente aquellos episodios en que se sintieron incómodos algunos geómetras, al parecer sin razón; la explicación de la incomodidad solo se vería durante el examen de conciencia axiomático posterior al descubrimiento de las geometrías no euclidianas. Entre tantas lucubraciones, algunos acertaban a iluminar los puntos claves, cuyo esclarecimiento traería finalmente la libertad axiomática, si así puede decirse. Uno de ellos fue *Geminiano*, según la versión que da Proclo (*Científicos griegos*. Tomo II. pp. 1174-1175):

Teniendo esto [ver la última cita anterior] en cuenta, Gémino hizo observar que hay líneas terminadas que comprenden una figura, como la circunferencia, la elipse y la cisoide, e indeterminadas que se prolongan al infinito, como la recta, la parábola, la hipérbola y la concoide; entre las que se prolongan al infinito unas no encierran ninguna figura, como la recta y las secciones cónicas que hemos citado, y otras tienen una parte que comprende una figura y otra parte que llega al infinito; unas son asíntotas, es decir: que no se encuentran de ningún modo, y otras son encontrantes [síntotas o incidentes], que se encuentran algunas veces; entre las líneas asíntotas, unas están en un plano y otras no, y entre las primeras unas se alejan conservando siempre la misma distancia y otras la disminuyen como la hipérbola y la concoide respecto de la recta, porque estas líneas, aunque su distancia disminuye constantemente, son asíntotas y se acercan unas a otras, pero nunca por completo, lo cual constituye el teorema geométrico más paradójico porque presenta la inclinación simultánea no coincidente de ciertas líneas, y, por último, entre las líneas que se alejan continuamente a igual distancia están las rectas que no disminuyen jamás la separación que hay entre ellas y son paralelas.

Lo que hace Gémino es considerar las líneas curvas que, como se dice ahora, tienen ramas infinitas. Una clasificación de ellas permite distinguir las que admiten una recta, por decirlo así, acompañante al infinito, (se acercan una de otra, sin nunca llegar a ser incidentes), de las otras que no admiten una tal recta; de la curva y de la recta que se aproximan al infinito sin llegar a tocarse, es de las que se dice que son asíntotas.

La paradoja de Gémino consiste en que las asíntotas son paralelas (en cuanto no se encuentran por más que se prolonguen) según la definición 23 de Euclides, pero no lo son en el sentido de equidistancia que Posidonio dio al paralelismo.

Gémino tenía toda razón en extrañarse; habrá que esperar que Saccheri recomience el trabajo que había hecho Euclides, desde la definición 23 antes de introducir el quinto postulado, para que se aprecien las dos nociones de paralelismo. Son la clave para distinguir geometría euclidiana de no euclidiana.

Varios tuvieron aciertos como el de Gémino. Otros intentaron destacar aspectos no explorados del problema, pero no lo consiguieron. Sin embargo, son intentos que vale la pena tener en cuenta, porque la equivocación tendrá su explicación, cuando en el siglo XIX se resuelva el problema que va tomando cuerpo desde los tiempos de la escuela de Alejandría. Tal como aparece en los textos de Proclo, el problema consiste en ver razones para no aceptar el quinto postulado como postulado y en ver alguna manera de demostrarlo, es decir, de deducirlo, sea con los otros supuestos de *Elementos*, sea fabricando completamente una demostración.

Esto quiso hacer *Ptolomeo*, el astrónomo griego del siglo segundo de la era actual, según Proclo (*Científicos griegos*. Tomo II. pp. 1175-1180), en una obra de la cual no queda más trazo que éste en Proclo, quien comienza así: "Ptolomeo cree haber demostrado este postulado en su obra *Sobre el encuentro de las rectas prolongadas a partir de los ángulos menores que dos rectos*, admitiendo previamente muchas cosas demostradas por el autor de *Elementos*. Suponiéndolas todas verdaderas…".

Se echa de ver que Proclo no está convencido de los raciocinios de Ptolomeo. Este habría probado que

Las rectas son paralelas cuando los ángulos internos son iguales a dos rectos.

Se tiene:

Antecedente: los ángulos internos son iguales a dos rectos.
Consecuente: las rectas son paralelas.

Si se compara con parte del enunciado del teorema 28 (*Elementos*. Libro I):

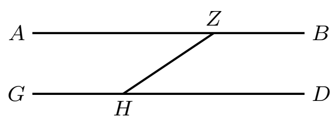
Si los dos ángulos internos son iguales a dos rectos, las dos rectas son paralelas, entonces, se ve que Ptolomeo demuestra sencillamente el teorema 28. Ptolomeo utilizó este otro enunciado del mismo:

Dos rectas prolongadas a partir de dos ángulos rectos, no se encuentran jamás.

En seguida, Ptolomeo va a tratar de demostrar la tercera parte del teorema 29 del libro I de *Elementos*:

Si rectas paralelas son cortadas por una recta, los ángulos internos del mismo lado valen dos rectos.

Euclides no pudo probar este resultado sin asumir el quinto postulado. El reto de Ptolomeo consiste en probar el mismo resultado sin tener que recurrir al quinto postulado. He aquí el núcleo del razonamiento de Ptolomeo, primero transcrito textualmente de Proclo, después, en una versión libre.



Como los ángulos internos del mismo lado de la secante son, necesariamente, iguales, menores o mayores que dos rectos, sean AB y GD dos paralelas cortadas por la recta HZ. Digo que esta recta no forma ángulos internos del mismo lado de ella que valgan más de dos rectos. En efecto, si los ángulos formados por las rectas AZ y ZH, GH y HZ son mayores que dos rectos, los formados por BZ y ZH, DH y HZ serán menores que dos rectos, y como también son mayores que dos rectos, porque las rectas AZ y GH no son más paralelas que las ZB y HD, resulta que si la recta que incide sobre las AZ y GH forma ángulos internos mayores que dos rectos, la que incide sobre ZB y HD también forma ángulos internos mayores que dos rectos; pero, estos ángulos internos también son menores que dos rectos, lo cual es imposible; y del mismo modo se demostraría que la secante no forma ángulos internos menores que dos rectos; luego, si los ángulos internos no son mayores ni menores que dos rectos, tienen que ser iguales a dos rectos.

Es muy importante, desde el doble punto de vista de la lógica y de la geometría, entender el razonamiento de Ptolomeo; merece, por tanto ser parafraseado.

Hay tres posibilidades para los ángulos internos del mismo lado de la transversal a dos paralelas: ser mayores, ser iguales, ser menores que dos ángulos rectos. Ptolomeo va a mostrar que ni son mayores ni menores, así quedará establecido que son iguales. En su demostración se tiene:

Antecedente: los ángulos internos son mayores que dos rectos.
Consecuente: los ángulos internos por el otro lado de la transversal son al mismo tiempo menores que dos rectos, y, mayores que dos rectos.

Ahora bien. Es imposible que los mismos dos ángulos sean simultáneamente menores y mayores que dos rectos. Por tanto, los ángulos por un lado de la transversal no son mayores que dos rectos. Análogamente se mostraría que no son menores.

Por consiguiente, los ángulos internos por un mismo lado de la transversal son iguales a dos ángulos rectos.

Expuesta la prueba de Ptolomeo, es fácil comprender la desconfianza de Proclo respecto de ella. Por el I 28 de *Elementos* se sabe que si los ángulos internos de dos rectas con una transversal son iguales a dos rectos, entonces, las dos rectas son paralelas. En parte, el I 29 es el teorema recíproco: si las rectas son paralelas, entonces, los ángulos internos por un mismo lado de la transversal son iguales a dos rectos. Para mostrar este recíproco, Euclides tuvo que probar antes la primera parte del mismo I 29: sobre rectas paralelas una transversal determina ángulos alternos internos iguales. Y para mostrarlo tuvo que asumir el quinto postulado. Hay algo incorrecto en el procedimiento de Ptolomeo? En realidad, Proclo no dice si encontró algo.

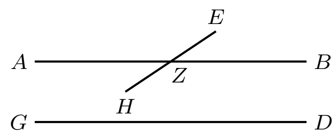
En cuanto al argumento mismo de Ptolomeo, por el I 13 de *Elementos* se sabe que una recta que incide sobre otra, determina, por un lado de la recta incidida, ángulos iguales a dos rectos. Es posible, pues, justificar que una recta que incide sobre otras dos, determina ángulos internos de parte y parte de la transversal iguales a cuatro ángulos rectos. Así que podría admitirse el primer consecuente de Ptolomeo, "los ángulos son menores que dos rectos", pues que si de un lado de la transversal los ángulos son mayores que dos rectos, los del otro lado deben ser menores para que en total sumen cuatro rectos. En cuanto al segundo consecuente, el argumento de que dos rectas por un lado de la transversal no son más paralelas que dos rectas por el otro lado de la transversal no podía despertar sospechas sin conocerse todavía el paralelismo de la geometría de Bolyai-Lobachevski, que ya se anuncia en el teorema resumen de Saccheri, que se verá más adelante. Únicamente entonces es entendible que Ptolomeo está suponiendo la unicidad de la paralela, equivalente al quinto postulado. (Capítulo 9).

Continúa Proclo: "Demostrado esto, se demuestra de una manera incontrovertible la proposición", es decir, el enunciado del quinto postulado, o, para que no quede duda: "Si una recta que incide sobre otras dos forma ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, dichas rectas prolongadas se encontrarán del mismo lado en que los ángulos son menores que dos rectos…". Proclo resume, en seguida, de manera no muy clara, el argumento de Ptolomeo forjado en una reducción al absurdo. Y añade que "una vez alcanzada la proposición, Ptolomeo quiso añadir algo más riguroso…". Proclo transcribe la prueba anunciada. Después de lo cual, no muy seguro del proceder de Ptolomeo, escribe: "Esto es lo que dijo Ptolomeo. Conviene, sin embargo, tomar precauciones ante la eventual presencia de algún paralogismo en las hipótesis adoptadas".

Así, pues *Proclo* no está de acuerdo con la prueba dada por Ptolomeo, aunque no acierta a dar una razón válida para rechazarla. Pero sí está de acuerdo con él en que el quinto postulado de Euclides no es postulado sino teorema, como procede a mostrarlo. Para ello se basa en un pasaje de Aristóteles: *Del cielo.* I 5. 271 b 28. Allí figura un supuesto, que el traductor de *Científicos Griegos* traduce como axioma. Dice Proclo: "… hay que admitir previamente el axioma que utilizó Aristóteles para establecer la finitud del universo: *'Si dos rectas que forman un ángulo, a partir de un punto se prolongan al infinito, el intervalo entre ambas se puede hacer mayor que toda magnitud finita'* … luego la distancia entre las rectas puede hacerse mayor que cualquier magnitud dada finita prolongando suficientemente las rectas".

Este axioma parece evidente a Proclo; en realidad, no cumple el criterio, ya citado, del mismo Proclo: "Digo que el postulado y el axioma deben contener ambos lo sencillo y fácil de entender". Dicho axioma figurará como un teorema en la obra de Saccheri. En seguida, Proclo anuncia el que más adelante será llamado postulado de Proclo:

"Digo que si una recta corta a una de las paralelas corta también a la otra".



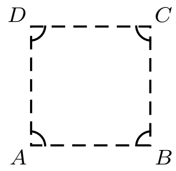
Proclo prueba este enunciado mediante una reducción inmediata al axioma de Aristóteles. "Dadas las paralelas AB y GD y la recta EZH que corta a la recta AB, tenemos dos rectas ZB y ZH que prolongadas suficientemente desde el punto Z llegarán a tener entre ellas una distancia mayor que cualquier magnitud finita, y, por tanto, esta distancia será también mayor que la que existe entre las paralelas, y la recta ZH cortará a la GD". Ya con esta proposición, Proclo da una prueba del quinto postulado. Es de notar que la demostración del enunciado de Proclo supone algo más, es a saber, que la distancia entre las paralelas permanece siempre finita.

¿Cómo es posible que Proclo haya logrado lo que no logró Euclides? Esta interesante cuestión no tendrá una respuesta satisfactoria sino cuando los matemáticos se pongan a reflexionar acerca de las consecuencias de la invención de geometrías no euclidianas, como se verá en el Capítulo 9 al estudiar la axiomatización a la manera de Hilbert.

Omar *Jayam* (1050 - 1123). Parece haber sido el primer geómetra que, en el estudio del problema del quinto postulado, haya utilizado un cuadrilátero sobre el cual habrá que leer los enunciados de Vitale, Saccheri, Lambert, ..., luego de ser reinventado por el primero de éstos que no conoció los trabajados de Jayam. Llamado ordinariamente cuadrilátero de Saccheri (o de Lambert), hay quien (Martin, pp. 271-272), les da el nombre de cuadriláteros de Jayam. Son así:

- Los ángulos en A y en B son rectos.
- Los lados AD, BC pueden ser o no iguales; de ello dependerá o no la igualdad de los ángulos en D y C.

Omar Jayam mostró que si los lados AD, BC son iguales, entonces, los ángulos en C y D son iguales.



Jayam demostró también que el bisector perpendicular de AB es igualmente el bisector perpendicular de CD (siempre que $AD = BC$).

Nasir *Al Din* (1201 - 1274). Su trabajo constituye un avance hacia la geometría no euclidiana en cuanto se refiere al problema del quinto postulado. Prueba éste, a condición de que le acepten una premisa.

Hipótesis de Nasir Al Din. *Si dos líneas rectas r y s son la una perpendicular y la otra oblicua a un segmento, AB, las perpendiculares trazadas de s hacia r son menores que AB por el lado en que s forma un ángulo agudo con AB, y, mayores que AB por el lado en que s forma un ángulo obtuso con AB.*

Como caso particular de su hipótesis, Nasir Al Din obtiene un rectángulo. A partir de este rectángulo prueba que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. En efecto, si el triángulo tiene un ángulo recto, es la mitad de un rectángulo; si el rectángulo es cualquiera, puede descomponerse en dos triángulos, cada uno con un ángulo recto.

Asume luego el postulado de Eudoxio-Arquímedes.

Valiéndose de un triángulo rectángulo, prueba el quinto postulado. Más precisamente, prueba que si AB, AC, CD son tres rectas tales que CD es perpendicular a AC y AB es oblicua a AC, entonces, CD corta a AB.

Mediante el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo, I 32 de *Elementos*, Nasir Al Din logra la prueba del enunciado de Euclides, reduciéndolo al caso particular anterior.

Christopher *Clavio* (1537 - 1612). En 1574, en su edición latina de *Elementos* (texto de geometría para Descartes y Pascal, entre otros) publica una nueva demostración del postulado de Euclides, para la que tiene que suponer:

Postulado de Clavio. *La línea equidistante de una línea recta es una línea recta.*

Giordano *Vitale* da Bitonto (1633 - 1711). En 1680, publicó el siguiente teorema:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cuyos ángulos A y B son rectos, cuyos lados AD y BC son iguales, y, tal que HK sea una perpendicular trazada desde un punto H del lado DC hasta el punto K de la base AB del cuadrilátero. Entonces:

- *Los ángulos en D y en C son iguales.*
- *Cuando el segmento HK es igual al segmento AD, los dos ángulos en C y en D son rectos, y, CD equidista de AB.*

El cuadrilátero en cuestión es el mismo de Jayam. Según Bonola, este teorema constituye la más notable contribución al problema del quinto postulado desde sus comienzos hasta la fecha del teorema. El hecho de que Jayam estuviera ya tras de la pista de resultados similares, no invalida el juicio de Bonola, si se tiene en cuenta, como ya se indicó, que los estudios del geómetra persa fueron conocidos posteriormente.

He aquí una paráfrasis del teorema de Vitale.

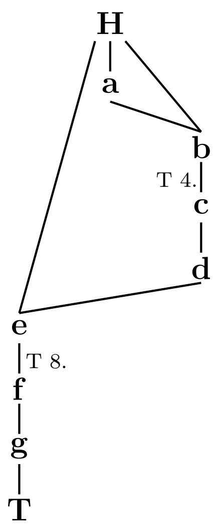
H: $ABCD$ es un cuadrilátero.
$\measuredangle A$, $\measuredangle B$ son rectos.
$AD = BC$.
H es un punto de CD, K un punto de AB.
HK es perpendicular.
T: $\measuredangle D = \measuredangle C$.
Si $HK = AD$, entonces,
$\measuredangle D = \measuredangle C = 1$ recto,
CD equidista de AB.

He aquí una deducción de la primera conclusión:

a: Unir A con C, B con D. (**H**. P 1).
b: $AB = AB$. (**H**, **a**).
$AD = BC$. (**H**, **a**).
$\measuredangle A = \measuredangle B$. (**H**, **a**).
c: $\triangle ABD = \triangle ABC$. (**b**. T 4).
d: $AC = BD$. (**c**).
e: $AC = BD$. (**d**).
$AD = BC$.

$DC = DC$. (**H**).
f: $\triangle ACD = \triangle BCD$. (**e**. T 8).
g: $\measuredangle D = \measuredangle C$. (**f**).
T: (**g**)

Diagrama de la demostración de la primera conclusión del teorema de Vitale.



John *Wallis* (1616 - 1703). En 1693, publicó en Oxford, entre sus obras matemáticas, dos conferencias pronunciadas en la misma Universidad, una en 1651, la otra en 1663. Wallis da una demostración del postulado de Euclides, pero, para ello tiene que asumir un enunciado que, aparentemente, nada tiene que ver, axiomáticamente hablando, con el de Euclides; como para los casos anteriores, la relación solo se vio después de creada la geometría de Bolyai-Lobachevski. Es el siguiente:

Postulado de Wallis. *Para cualquier figura, existe una figura semejante de magnitud cualquiera.*

Como si quisiera justificar el hecho de haber adoptado el postulado de existencia de figuras semejantes, Wallis afirma que ya Euclides al postular la existencia de un círculo de centro y radio dados (Postulado 3), admite prácticamente la similaridad de los círculos.

Saccheri, posteriormente, hará una crítica sobre la extensión de lo postulado por Wallis. En realidad, solo necesitaba comparar dos triángulos en la construcción que hacía para demostrar el postulado de Euclides, una vez asumido lo de la semejanza de figuras. Así que Saccheri concluye que Wallis no necesitaba asumir más que la existencia de dos triángulos, de ángulos correspondientes iguales y lados correspondientes desiguales. Con ellos habría podido deducir la existencia de un cuadrilátero en el que la suma de los ángulos es igual a cuatro ángulos rectos. De donde habría podido llegar al quinto postulado.

Un gran avance logra Gerolamo *Saccheri* (1667 - 1733). El historiador de la geometría no euclidiana, Bonola, en cuyo libro podrán encontrarse muchos más detalles que en estas notas, hace de Saccheri el gran precursor. Saccheri escribió la obra: *Euclides vindicado de toda mancha, o, conato geométrico mediante el cual se establecen los verdaderos primeros principios de toda la geometría.* La idea global es que Euclides procedió correctamente al asumir el quinto postulado. Para ello, supone que la negación del quinto postulado debe conducir a una contradicción; de donde, en lógica de dos valores, se concluye que el quinto postulado es verdadero y que Euclides no cometió ninguna falla lógica al asumirlo. En la demostración de I 16, Euclides asume implícitamente que la línea recta es infinita. Dado que Saccheri emplea dicha proposición, asume ipso facto la infinitud de la recta. Saccheri asume también el postulado de Eudoxio-Arquímedes, en la forma: Dados dos segmentos diferentes, hay un múltiplo del menor que supera al mayor. Emplea también la hipótesis de continuidad de la línea recta, enunciado intuitivamente así: "Un segmento que pasa de la longitud a hasta la longitud b diferente de a, toma, durante la variación, cada longitud intermedia entre a y b".

Saccheri emplea repetidamente el siguiente procedimiento: admite que una proposición se cumple para una figura dada, de cierto tipo; demuestra, luego, que la proposición se cumple para todas las figuras del mismo tipo.

En resumen, Saccheri toma las siguientes hipótesis:

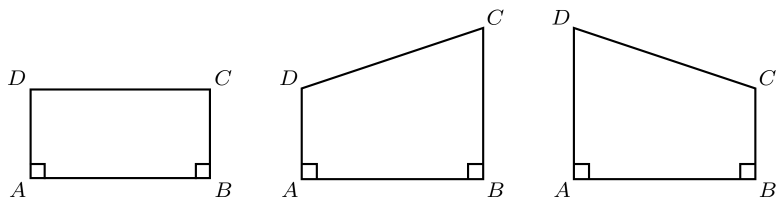
- Las 23 definiciones del libro I de Euclides.
- Los postulados 1, 2, 3, 4 de Euclides.
- La negación del quinto postulado de Euclides.
- Las primeras 28 proposiciones del Libro I de Euclides.
- La hipótesis de que la recta es infinita.
- La hipótesis de la continuidad de la recta.
- El postulado de Eudoxio-Arquímedes.

Entonces, se propone demostrar que se llega a una teoría contradictoria, debido a la presencia entre las hipótesis de la negación del quinto postulado, que Saccheri piensa que debe ser una proposición falsa.

Saccheri hizo un uso tan sistemático del cuadrilátero birrectángulo, que había sido utilizado no solo por Giordano Vitale, sino, todavía más atrás, por Omar Jayam, que tal cuadrilátero pasó a llamarse "cuadrilátero de Saccheri", no siendo ésta, la primera vez en la historia de la matemática que un determinado objeto matemático se conozca por el nombre de su utilizador más que por el de su creador. (Igual cosa ha sucedido con teoremas o con algoritmos). (La primera proposición de Saccheri recuerda también la de Giordano Vitale).

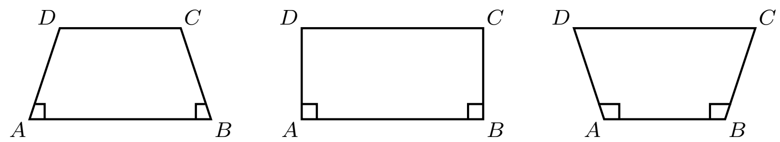
Proposición (I de Saccheri). *Si un cuadrilátero tiene dos ángulos consecutivos, en A y en B, rectos, y, los lados, AD y BC, desiguales, entonces, de los ángulos en C y en D es mayor el adyacente al lado menor; es menor, el adyacente al lado mayor. Si un cuadrilátero tiene dos ángulos consecutivos, en A y en B, rectos, y, los lados, AD y BC, iguales, entonces, los ángulos en C y en D son iguales.*

Las figuras, desde luego, no pueden ser más que un auxilio para la intuición.



Formula Saccheri las célebres tres hipótesis. Ver figuras abajo.

Hipótesis del ángulo recto: $\measuredangle C = \measuredangle D = 1$ ángulo recto.
Hipótesis del ángulo obtuso: $\measuredangle C = \measuredangle D > 1$ ángulo recto.
Hipótesis del ángulo agudo: $\measuredangle C = \measuredangle D < 1$ ángulo recto.



Proposición (III de Saccheri).
La hipótesis del ángulo recto implica que $AB = CD$.
La hipótesis del ángulo obtuso implica que $AB > CD$.
La hipótesis del ángulo agudo implica que $AB < CD$.

Proposición (IV de Saccheri).
$AB = CD$ *implica la hipótesis del ángulo recto.*
$AB > CD$ *implica la hipótesis del ángulo obtuso.*
$AB < CD$ *implica la hipótesis del ángulo agudo.*

Nota. Los dibujos adjuntos indican cómo hay que entender los enunciados, no cómo serían realmente, pues, al ser trazados sobre una hoja de papel se procede euclidianamente, es decir, con la hipótesis del ángulo recto.

Proposición (V de Saccheri). *Si la hipótesis del ángulo recto es cierta una vez, entonces, es cierta siempre.*

Enuncia proposiciones análogas para las otras dos hipótesis.

Gracias al teorema I 25 de *Elementos*, Saccheri obtiene un importante teorema.

Teorema (I 25). *(*Elementos*). Si dos triángulos tienen dos de los lados de uno respectivamente iguales a dos de los lados de otro, mas la base de uno mayor que la del otro, tendrán también, el ángulo comprendido por las rectas iguales del primero mayor que el ángulo comprendido por las rectas iguales del segundo.*

Proposición (IX de Saccheri). *En la hipótesis del ángulo recto, la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. En la hipótesis del ángulo obtuso, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos. En la hipótesis del ángulo agudo, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.*

Proposición (XV de Saccheri). *(Recíproca de la IX). Si la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, entonces, se sigue la hipótesis del ángulo recto. Etc.*

Lema (II de Saccheri)**.** *Hipótesis:*

- ABC *es un triángulo.*
- $\measuredangle C$ *es recto.*
- H *es punto medio de* AB*. (I 10* Elementos*).*
- K *es el pie de la perpendicular desde* H *hasta* AC*. (I 11).*
- L *es el pie de la perpendicular desde* H *hasta* BC*. (I 11).*

Tesis:

- $AK = KC$ *en la hipótesis del ángulo recto.*
- $AK < KC$ *en la hipótesis del ángulo obtuso.*
- $AK > KC$ *en la hipótesis del ángulo agudo.*

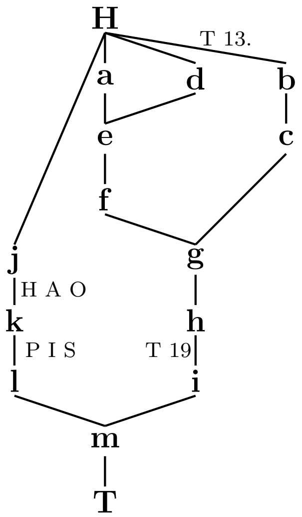
Para hacer la demostración en la hipótesis del ángulo obtuso se añade a las hipótesis, ésta:

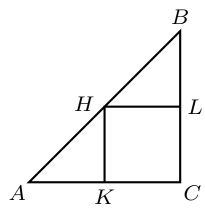
H: Hipótesis del ángulo obtuso.

Entonces

a: $\measuredangle BHK + \measuredangle CBH + \measuredangle BCK + \measuredangle CKH >$ 4 ángulos rectos. (**H**).
b: $\measuredangle AHK + \measuredangle BHK =$ 2 ángulos rectos. (**H**. I 13 *Elementos*).
c: $\measuredangle BHK =$ 2 ángulos rectos $-\measuredangle AHK$. (**b**).
d: $\measuredangle BCK + \measuredangle CKH =$ 2 ángulos rectos. (**H**).
e: $\measuredangle BHK + \measuredangle CBH +$ 2 ángulos rectos $>$ 4 ángulos rectos. (**a**, **d**).
f: $\measuredangle BHK + \measuredangle CBH >$ 2 ángulos rectos. (**e**).
g: 2 ángulos rectos $-\measuredangle AHK + \measuredangle CBH >$ 2 ángulos rectos. (**c**, **f**).
h: $\measuredangle CBH > \measuredangle AHK$. (**g**).
i: $HL > AK$. (**h**. I 19 *Elementos*).
j: $\measuredangle K = \measuredangle C = \measuredangle L =$ 1 ángulo recto. (**H**).
k: $\measuredangle KHL$ es obtuso. (**j**. Hipótesis del ángulo obtuso).
l: $KC > HL$. (**k**. Proposición I de Saccheri).
m: $KC > AK$. (**l**, **i**).
T: (**m**)

Diagrama de la demostración del Lema II de Saccheri:





(P I S: Proposición I de Saccheri).

¿Cómo se deshizo Saccheri de la hipótesis del ángulo obtuso? Mediante un proceder del cual no se destaca a continuación sino el aspecto clave del razonamiento, desde luego, aspecto lógico. Siguiendo a Nasir Edin, muestra Saccheri:

Proposición (XI y XII de Saccheri)**.** *Con la hipótesis del ángulo recto y la del ángulo obtuso, se sigue que, una perpendicular y una oblicua, a una tercera recta, se cortan entre sí.*

Con esta proposición le es posible demostrar la siguiente:

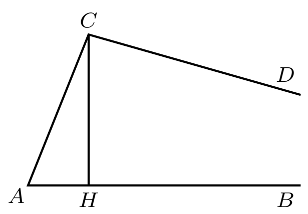
Proposición (XIII de Saccheri)**.** *Con las dos hipótesis, la del ángulo recto y la del ángulo obtuso, se cumple el quinto postulado.*

He aquí la demostración de Saccheri.

H: AB, CD son dos rectas.
La recta AC incide sobre las rectas AB, CD.
$\measuredangle BAC + \measuredangle ACD < 2$ ángulos rectos.
$\measuredangle BAC < 1$ ángulo recto.
Hipótesis del ángulo obtuso.
Hipótesis del ángulo recto.

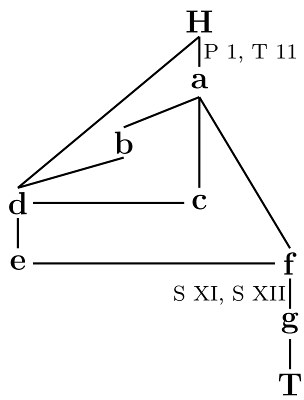
T: Se cumple el quinto postulado.

a: Trazar desde C la recta CH perpendicular en H a AB. (**H**. P 1, T 11).
b: $\measuredangle ACD = \measuredangle ACH + \measuredangle DCH$. (**a**).
c: En el triángulo ACH, $\measuredangle CAH + \measuredangle ACH + \measuredangle AHC \geq 2$ ángulos rectos. (**a**, **H**).
d: $\measuredangle CAH + \measuredangle ACH + \measuredangle AHC \geq 2$ ángulos rectos $> \measuredangle BAC + \measuredangle ACD =$
$= \measuredangle CAH + \measuredangle ACH + \measuredangle DCH$. (**H**, **b**, **c**).
e: $\measuredangle AHC > \measuredangle DCH$. (**d**).
f: $\measuredangle DCH$ es agudo. (**a**, **e**).
g: AB y CD se cortan. (**f**. Proposiciones XI y XII de Saccheri).



Nota. En la hipótesis, uno de los dos ángulos, BAC, ACD es menor que un ángulo recto, por ser (hipótesis anterior) los dos menos que dos rectos. Hay, pues, que añadir cuál se escoge.

Diagrama de la demostración de la Proposición XIII de Saccheri.



En estas condiciones, Saccheri puede mostrar:

Proposición (XIV de Saccheri)**.** *La hipótesis del ángulo obtuso es falsa.*

Es efecto, puesto que se cumple el quinto postulado, se cumple, en particular, que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos. Por lo tanto, no se cumple la hipótesis del ángulo obtuso, y, ésta es falsa.

En un diagrama, éste es el procedimiento seguido por Saccheri para deshacerse de la hipótesis del ángulo obtuso. En el diagrama, S XI, quiere decir, Proposición XI de Saccheri, etc. HAR, HAO indican respectivamente, la hipótesis del ángulo recto y la del ángulo obtuso.

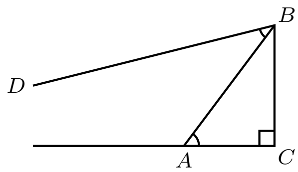
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{HAR} \arrow[d, dash] & & \text{HAO} \arrow[d, dash] \\
\text{S XI} \arrow[dr, dash] & & \text{S XII} \arrow[dl, dash] \\
& \text{S XIII} \arrow[d, dash] & \\
& \text{S XIV} &
\end{tikzcd}$$

Desde el punto de vista lógico, es de notar que la proposición 19 es implicada por la 18 y ésta, a su turno por la 16; y un supuesto implícito, en Euclides, para la I 16 es la infinitud de la recta. Ahora bien. Esta hipótesis y la del ángulo obtuso son incompatibles. Así, pues, Saccheri llega lógicamente a la exclusión de la hipótesis del ángulo obtuso, gracias a la presencia de la hipótesis de la infinitud de la recta, que implica la exclusión.

Euclides había asumido implícitamente la infinitud de la recta, al suponer, en la demostración del T 16, que dado un segmento cualquiera, recta en la terminología de *Elementos*, existe otro segmento del cual puede recortarse uno igual al primero. Es lo que se lee ordinariamente en los comentadores, incómodos por no encontrar en qué lugar de *Elementos* está el supuesto que da al traste, casi por anticipado, con la hipótesis del ángulo obtuso y permite a Saccheri seguir adelante con la del ángulo agudo. En realidad, debe de retrocederse hasta el postulado 2, que permite prolongar una recta finita todo lo que se necesite, indefinidamente. Es el infinito potencial de Aristóteles que aquí es suficiente para tener la infinitud de la recta.

¿Cómo ensayó Saccheri deshacerse de la hipótesis del ángulo agudo? Estudiando minuciosamente la situación; prueba de ello son más de 15 teoremas que formuló y demostró y que ahora son parte de la geometría de Bolyai-Lobachevski. Aparece en seguida la transposición de uno de los más notables, por la sencillez de la demostración, por contrariar la intuición, y, por las consecuencias que se extraen de él; solo algunas serán mencionadas. Cabe recordar el enunciado del teorema I 27 de *Elementos*, sobre el cual se apoyará un paso de la demostración: Si una recta al incidir sobre otras dos, hace ángulos alternos iguales entre sí, entonces, las dos rectas son paralelas entre sí.

Proposición (XVII de Saccheri)**.** *Con la hipótesis del ángulo agudo, dada una recta, pueden trazarse una perpendicular y una oblicua a dicha recta, que no se encuentran.*



H: ABC es un triángulo.
$\measuredangle C$ es recto.
BD es una recta tal que $\measuredangle ABD = \measuredangle BAC$.
Hipótesis del ángulo agudo.

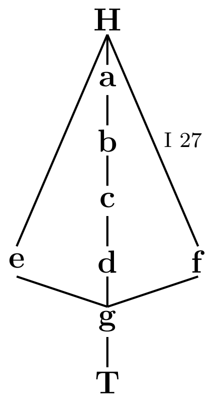
T: Las rectas AC, BD no se encuentran.

a: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$ es menor que π. (**H**).
b: $\measuredangle A + \measuredangle B + \frac{1}{2}\pi$ es menor que π. (**a**).
c: $\measuredangle A + \measuredangle B$ es menor que $\frac{1}{2}\pi$. (**b**).
d: BD es oblicua respecto de la recta BC. (**c**).
e: AC es perpendicular a BC.(**H**).
f: BD y AC no se encuentran. (**H**. I 27).
g: Dada la recta, BC, existen una perpendicular, AC, a la recta, BC, y una oblicua, BD, a la recta, BC, tales que AC, BD no se encuentran. (**d**, **e**, **f**).
T: (**g**).

Nota. Es muy notable la contraposición entre las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo recto, por una parte, y, la hipótesis del ángulo agudo, por otra, que resulta de comparar las proposiciones XI y XII, con la proposición XVII, de Saccheri, respectivamente: una perpendicular y una oblicua a una tercera recta, se encuentran en las dos hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo recto, no se encuentran en la hipótesis del ángulo agudo.

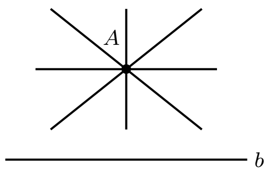
Ya se mencionó otra situación, la de la infinitud de la recta, en la que la hipótesis del ángulo obtuso contrasta con las otras dos hipótesis, la del ángulo recto y la del ángulo agudo.

Diagrama de la demostración de la proposición XVII de Saccheri.



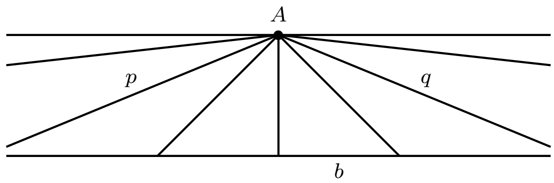
Aparece en seguida un teorema resumen de enunciados generales de varios teoremas.

Se considera una recta, b, un punto, A, exterior a ella, y, el haz de rectas que pasa por A.



Teorema (Resumen)**.** *En la hipótesis del ángulo agudo, existen, en el haz de rectas que pasan por A, dos rectas, p y q, asintóticas con b, una hacia la derecha, otra hacia la izquierda, que dividen el haz en dos subhaces: un subhaz de rectas que cortan a b, y, un subhaz de rectas que tienen una perpendicular común con b.*

Las rectas asintóticas, p y q, ni cortan a b, ni tienen perpendicular común con b. Por consiguiente, no pertenecen a ninguno de los dos subhaces, sino que los separan. En el teorema resumen están contenidos, entre otros, estos dos resultados, aplicables a la pareja p y b, o, a la pareja q y b.



Proposición (XXIII de Saccheri)**.** *Si dos rectas coplanares son tales que, ni se intersecan, ni tienen una perpendicular común, entonces, se acercan cada vez más una de otra.*

Proposición (XXV de Saccheri)**.** *La distancia entre dos rectas coplanares que, ni se intersecan, ni tienen una perpendicular común, puede hacerse menor que la longitud de un segmento dado tan pequeño como se quiera.*

Estas dos proposiciones responden a una cuestión planteada por los geómetras griegos. Afirman ellas que si hay dos rectas coplanares, que ni se cortan, ni tienen una perpendicular común entonces, dichas rectas son asíntotas. Saccheri demuestra la existencia de tales asíntotas.

Saccheri prueba también otro enunciado que tiene que ver con lucubraciones de geómetras griegos. Helo aquí:

Proposición (XXI de Saccheri)**.** *En la hipótesis del ángulo recto, y, en la del ángulo agudo, la distancia desde un punto que recorre uno de los lados de un ángulo, hasta un punto que recorre el otro de los lados del ángulo, crece indefinidamente.*

Se reconoce el axioma de Aristóteles, sobre el que había basado Proclo su demostración relativa al problema del quinto postulado.

Otro notable resultado de Saccheri, ya por fuera del teorema resumen, es el siguiente:

Si dos rectas se acercan continuamente una de otra, pero de manera que su distancia permanezca mayor que la longitud de un segmento dado, entonces, es imposible la hipótesis del ángulo agudo.

En otras palabras, la ausencia de la posibilidad de líneas rectas asintóticas, implica, el quinto postulado. Lo cual muestra cuánta razón tenían tanto Euclides al enunciar la definición 23 y el quinto postulado, como Posidonio y Gémino al plantear de diferente manera lo que había hecho Euclides, y, al reflexionar sobre ello.

Estos y otros teoremas demostró Saccheri, sin encontrar por ninguna parte, la contradicción que esperaba.

El plan adoptado por Saccheri era correcto. Un avance, inclusive, en cuanto supone inicialmente un pie de igualdad a las tres hipótesis, la del ángulo recto, la del ángulo obtuso, la del ángulo agudo. No es que pensara que las dos advenedizas hipótesis merecieran equipararse con la que, por prejuicio suyo, era la verdadera; pero, desde el punto de vista puramente lógico, no les negó la oportunidad de que de ellas se extrajeran consecuencias; aunque lo que él aguardaba, era que mostraran ser inaceptables por el hecho de producir contradicción dentro del sistema.

A nadie se le ocurría, todavía, que había que considerar tres casos, o si se quiere, que, para declarar resuelto el problema del quinto postulado, había que examinar todas las posibilidades si se quería proceder matemáticamente; y, en este caso, todas las posibilidades eran tres: una única paralela, más de una paralela, ninguna paralela. Pero con su proceder, comenzó a acostumbrar a los geómetras a no escandalizarse de la idea, y, en cierta manera, provocó posteriormente a éstos, a dar el paso al mundo de las posibilidades, desde el de la realidad, que era el que todos pensaban estar idealizando.

Así, pues, el plan de Saccheri era correcto; lo incorrecto, si así puede decirse, es que se haya dejado vencer por el prejuicio de que había que llegar a una contradicción con las hipótesis no euclidianas, para que el nombre de Euclides quedara en limpio.

A pesar, pues, de ser un buen lógico, su prejuicio lo condujo a la siguiente "proposición".

"**Proposición (XXXIII de Saccheri).** *La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta*".

Saccheri se esfuerza en demostrar esta proposición, mediante el establecimiento de cinco lemas que en el fondo, según Bonola, se reducen a mostrar que "si la hipótesis del ángulo agudo fuera cierta, las líneas p y b tendrían una perpendicular común, en su punto común, en el infinito; lo cual es contrario a la naturaleza de la línea recta".

Para pronunciarse sobre tal enunciado es conveniente recordar las condiciones dadas.

Inicialmente, la línea p es una recta límite entre las semirrectas que cortan a la recta b y las que no la cortan. O, con los términos de Saccheri, entre las rectas que cortan a b, y, las rectas que tienen una perpendicular común con b. Y se puede decir también: p es una recta del haz que pasa por A, que es asíntota con b. Es una recta del haz que pasa por A, que no encuentra a la recta b, ni tiene perpendicular común con ella.

Ahora, aparece que p y b tienen un punto común en el infinito, y, una perpendicular común en ese mismo punto.

Esta es ya una situación nueva. En efecto, la geometría de Euclides no se ocupa de elementos situados en el infinito. Si acaso entra en sus consideraciones una noción de infinito es la de infinito potencial de Aristóteles, en cuanto se trata de prolongar rectas indefinidamente, por ejemplo.

Pero, para que Saccheri tenga razón, se necesita que las rectas se encuentren efectivamente en el infinito, y, tengan, efectivamente, una perpendicular común. Y esto no se puede obtener con el solo infinito potencial de Aristóteles. Dicha nueva situación, ya por fuera de la geometría de Euclides, necesita ser estudiada como nueva que es; y Saccheri no podía saber, a priori, si las propiedades válidas euclidianamente, a distancia finita, lo serían también, a distancia infinita.

Después del trabajo de Saccheri, el que vale la pena destacar como uno que haya contribuido a esclarecer las ideas, es una especie de reflexión sobre lo que ha sido desarrollado hasta el momento.

Klügel presentó en 1763, como disertación en la Universidad de Gotinga (Göttingen) donde era discípulo de Kaestner, una "recensión de los principales intentos para demostrar la teoría de las paralelas", donde examina una treintena de demostraciones del quinto postulado.

Su conclusión es que tales demostraciones son insuficientes. Es más importante lo que sugiere.

"Sería posible, sin duda, que rectas que no se cortan, diverjan". Y previene la objeción, con esta frase: "Que tal cosa sea un contrasentido, lo sabemos, no por rigurosas consideraciones, ni en virtud de claros conceptos de líneas rectas y curvas, sino más bien, mediante la experiencia y el juicio de nuestros ojos".

Bonola traduce el término alemán "Augen" por el inglés "senses". Dice más la traducción literal, mucho más diciente cuando se trata, como en este caso, de intuiciones proyectivas. (Y, aunque así no fuera, no se puede olvidar al vikingo Olafo amenazando a su pequeño retoño Hamlet de llevarlo a donde el oculista, porque Hamlet ha asegurado que la Tierra es redonda).

La observación de Klügel es importante, porque quizá sea la primera vez que un entendido haya expresado dudas en cuanto al camino seguido en la solución del problema; más aún, recusado el testimonio de la intuición; y, aceptado, con plena conciencia, la posibilidad de que rectas que no se corten, no sean forzosamente paralelas, sin que se aparten la una de la otra. Es poner en tela de juicio el carácter absoluto hasta entonces de la geometría.

Hubo, sin embargo, una consecuencia enteramente negativa, de la crítica de Klügel, que es imprevista, o para la cual era imprevisible que se contara con la anuencia del mismo Klügel y de su maestro Kaestner: la escuela de Gotinga (que aparentemente comenzaba ya a merecer el enorme prestigio que ha tenido posteriormente) declaró la necesidad de admitir la hipótesis euclidiana. Bonola no explica qué alcance tendría esta medida; ni si al decir, escuela de Gotinga (the Göttingen school) haya que entender toda la Universidad de Gotinga; pero, todo el gesto, o parte de él, era inesperada consecuencia del trabajo de Klügel. Es como si, habiendo constatado que las razones eran insuficientes, se hubiera impuesto por autoridad aquello que se quería demostrar.

Lambert, conoció la memoria de Klügel. En 1776, atacó el problema del quinto postulado; siguió poco más o menos el camino de Saccheri, para lo cual debía de tener sus razones, dado que era un buen matemático, capaz de inventar sus propios métodos, si hubiera sido del caso.

Utilizó un cuadrilátero con tres ángulos rectos, que suele ser llamado cuadrilátero de Lambert. Formuló las tres hipótesis, del ángulo recto, del ángulo obtuso, del ángulo agudo y extrajo consecuencias de ellas. Mostró cómo llegar a la exclusión de la hipótesis del ángulo obtuso. No es claro si desechó la del ángulo agudo.

(Para lo que sigue, ver la explicación de la función $a(p)$, ángulo de paralelismo, para la longitud p, en el capítulo 5, al tratar de Bolyai o de Lobachevski). Saccheri había probado que dado p_0 existe a_0 único tal que $a\,(p_0) = a_0$. Lambert mostró que recíprocamente, si $0 < a_0 < \frac{\pi}{2}$, entonces, existe un único p_0 tal que $a\,(p_0) = a_0$. De la hipótesis del ángulo agudo se sigue la existencia de una unidad absoluta de longitud. (Martin. p. 305). Un ángulo tiene medida absoluta, no un segmento si existe semejanza. Basta asociar un segmento con un ángulo para transferir la medida absoluta de los ángulos a los segmentos.

La contribución más notable de Lambert a la evolución del problema del quinto postulado fue lo que sugirió, más que lo que reencontró, por originalmente que lo haya hecho. Son las dos observaciones que siguen.

La hipótesis del ángulo obtuso tiene consecuencias como las de la geometría sobre una esfera.

La hipótesis del ángulo agudo tiene consecuencias como las de una geometría sobre una esfera de radio imaginario.

Se dice ordinariamente que llegó a ellas, dándose cuenta de que si en la fórmula $r^2\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\pi\right)$ para el área de un triángulo sobre una esfera de radio r, se cambia el radio real r por el imaginario ir, se obtiene $r^2\left(\pi-\widehat{A}-\widehat{B}-\widehat{C}\right)$ área de un triángulo según la hipótesis del ángulo agudo, ya estudiada por Lambert. Es como si Lambert, ya desestimada la hipótesis del ángulo agudo, admitiera que, en caso de no rechazarla, ella se verificaría sobre una esfera de radio imaginario.

Fue también Lambert quien demostró que la geometría esférica es independiente del quinto postulado.

En 1791, *Lorenz* asume el enunciado siguiente, con el cual demuestra el quinto postulado.

Por un punto entre dos rectas que determinan un ángulo puede siempre trazarse una recta que corta a las dos rectas.

Pocos años después, Legendre, en uno de los numerosos (poco más o menos una docena) esfuerzos para demostrar el quinto postulado, utilizó el mismo postulado.

Wolfgang *Bolyai*, contribuyó de doble manera a la solución del problema del quinto postulado: intentando varias veces resolverlo, teniendo un hijo que lo resolvió.

Estudiante con Gauss en Gotinga, entre 1795 y 1798, y uno de los pocos y más fieles amigos (la correspondencia entre los dos durante unos 50 años es una de las fuentes para estudiar a Gauss) del príncipe de los matemáticos, se interesó en el problema, probablemente por influencia de Kaestner y del profesor de astronomía Seyffer. Creyó, en diversas ocasiones, haberlo resuelto. Particularmente, en 1804, estaba tan seguro de ello, que le envió una comunicación a Gauss, en ese entonces en su ciudad natal Brunswick; Gauss descubrió la falla del razonamiento de Bolyai, quien, por cierto, nunca desistió de su propósito. Publicó varias obras, a las cuales, como su casi contemporáneo Legendre, adornaba de apéndices con los últimos hallazgos relativos al problema del quinto postulado.

Uno de los enunciados que asumió Wolfgang Bolyai para poder demostrar el quinto postulado fue éste:

Cuatro puntos no coplanares cualesquiera están sobre una esfera.

O, para dos dimensiones:

Por tres puntos no colineales puede trazarse siempre un círculo.

Por las cartas que escribió a su hijo Janos, parece que haya llegado a convencerse de que no había nada que hacer con este problema del quinto postulado.

Es, de cualquier modo, el último de los grandes interesados en demostrar el postulado de Euclides, que valga la pena estudiar, dado que quienes después de los trabajos de Janos Bolyai, Lobachevski, etc., continúan con la intención de hacerlo, es porque no han entendido la solución del problema, ni, probablemente, el problema mismo.

Cuestiones

1. La propiedad de las paralelas, de no cortarse no importa cuanto se las prolongue, cae enteramente fuera del dominio de nuestra experiencia. Explicar por qué.

2. Usar aparatos de precisión no simplifica nada, porque están hechos según principios geométricos y sus lecturas suponen propiedades geométricas del rayo luminoso. ¿Es correcto este argumento? ¿Por qué?

3. La importancia del quinto postulado es fundamental y su evidencia es nula. Sin embargo, la geometría de Euclides resuelve problemas prácticos. Indicar la época en la que un geómetra haya podido escribir lo anterior. Justificar la respuesta.

4. ¿En el enunciado del quinto postulado hay alguna restricción?

5. Proclo no admite como postulado el de Euclides, aduciendo que la proposición recíproca del quinto postulado es el teorema I 17. "¿No sería ridículo considerar indemostrables teoremas cuyos recíprocos son demostrables?". ¿Qué opinión le merece este razonamiento de Proclo? (*Científicos griegos.* Tomo II. p. 1172).

6. Escribe Proclo (*Científicos griegos.* Tomo II. p. 1176):

   > "El hecho de que una recta se incline sobre otra cuando disminuyen los ángulos es verdadero e ineluctable, mientras que el encuentro final de las rectas que se inclinan cada vez más cuando se prolongan es probable, pero no ineluctable, a no ser que un razonamiento demuestre que el hecho es verdadero para todas las rectas. En efecto, ciertas líneas indefinidamente inclinadas unas sobre otras son asíntotas, lo cual parece improbable, y, sin embargo, es verdad y se ha descubierto para otras líneas. Por consiguiente, lo que es posible para éstas, ¿no lo será también para las rectas?".

   Darse bien cuenta de por qué la circunferencia y la elipse no pueden tener asíntotas, especies de líneas rectas que acompañan a ciertas curvas hasta el infinito. Tampoco la parábola, aunque sí tenga ramas que se extienden hasta el infinito, tiene asíntotas. La hipérbola sí las tiene: son cuatro rectas, una para cada una de las ramas infinitas de esta curva plana. Los geómetras griegos anotaron este hecho y reflexionaron sobre él: hay líneas, no forzosamente ambas rectas, tales que prolongadas al infinito, como en la definición 23 de Euclides, no se encuentran. Tal reflexión equivalía a un regreso hasta la concepción más amplia de la definición 23 de *Elementos*; más aún, a una puesta en camino hacia geometrías no euclidianas, como se verá después. Con razón para algunos geómetras griegos, el hecho anotado era "el hecho más paradójico de la geometría", según la expresión de Gémino.

   Representación de la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$ para $x = 1000$, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$. ¿Cuáles son las asíntotas?

7. Trate de ver las razones que tendrían los geómetras griegos para considerar más "evidentes" los postulados 1, 2, 3, 4 que el 5. ¿Puede ser una de ellas la forma negativa en que está redactado el quinto postulado?

8. Posidonio define las paralelas como rectas coplanarias equidistantes. Comparar con la definición 23 de *Elementos.* ¿Cuál es más general? ¿Por qué?

9. Uno de los teoremas de Saccheri dice: "Si la suma de los ángulos de un cuadrilátero dado, es igual que, mayor que, menor que cuatro ángulos rec-

tos, entonces, se verificará, respectivamente, la hipótesis del ángulo recto, la del obtuso, o, la del agudo". ¿Sucede lo mismo con el enunciado: "La suma de los ángulos internos, de lado y lado de una transversal que corta a dos paralelas es igual a cuatro ángulos rectos"?

Se afirma que Ptolomeo, al emplear la expresión "no son más paralelas que" está asumiendo la existencia y la unicidad de la paralela y que, por tanto, está cometiendo petición de principio. No hay que olvidar, empero, que puede valerse de la unicidad del prolongamiento de la recta, según el postulado 2, como se comentó a propósito del teorema 31, en el capítulo 9 del volumen I. Considerar, una vez más, la prueba del alejandrino Ptolomeo. ¿En opinión de usted, tiene falla el razonamiento? ¿Cuál es ella?

10. Las dudas de los griegos, como Gémino, acerca de las asíntotas y el paralelismo eran justificadas. Había un punto en el que la teoría recibida parecía no poder aplicarse, sin más; en efecto, requería un estudio más fino. Esta es una de las formas del trabajo matemático. Compararlo con el de algunos filósofos. Tomar el tema de la causalidad, por ejemplo. U otro. ¿Lo dicho por los filósofos griegos fue verificado por filósofos posteriores? ¿Negado simplemente? ¿Ampliado? ¿Reconstituido? Concretamente: ¿qué relación hay entre las opiniones de Aristóteles y las de Hume? ¿Actualmente parece tener más razón Hume o Aristóteles, acerca de la causalidad? Paralelo entre este desarrollo y el de los geómetras a partir de *Elementos*.

11. En el enunciado de la "Proposición XXXIII" de Saccheri, ¿ha sido substituido el lenguaje técnico por el psicológico? ¿Estuvo, en este caso, guiado Saccheri por el prejuicio o por la intuición? ¿Había otro método diferente al de la lógica para vencer la dificultad? ¿Se acogió a él Saccheri? ¿En algunas discusiones filosóficas hay conflictos entre psicología y razonamiento?

12. Saccheri estaba a punto de descubrir una geometría no euclidiana. ¿Qué era lo que tenía que hacer para que así fuera?

13. Explicar a alguien que lo solicita, qué quiere decir, o a qué se refiere D'Alembert con la siguiente frase: "La definición y las propiedades de la línea recta, así como de las líneas paralelas, son el escollo y por decirlo así el escándalo de los elementos de la geometría". Esta cita la hace Bonola en el parágrafo 23. Verriest hace una cita un tanto diferente: "El postulado de las paralelas constituye, desde hace tantos siglos, el escándalo de la

geometría y la desesperación de los geómetras”. Explicar en qué consiste el escándalo. ¿Muestra este pasaje que algunos intelectuales ansiaban que la geometría saliera de un callejón sin salida?

14. D’Alembert propone la siguiente definición: “Paralela a una línea recta es cualquier otra recta coplanaria, que une dos puntos situados por el mismo lado y a igual distancia de la recta dada”. Considerar dos opiniones que aparecen en Bonola (parágrafo 23): “Es cierto que la definición permite construir paralelas inmediatamente”. Preguntarse si, como una definición no implica existencia, bastará que la definición permita exhibir objetos que la cumplan para que esté garantizada la existencia. Antes de dar una respuesta, recordar la doctrina de Aristóteles y de Kant. Dice luego Bonola que habría que probar después que las paralelas construidas son equidistantes. Relacionar con lo anterior. ¿Algún geómetra sostenía ya una opinión parecida? ¿Quién?

15. “Dos rectas son paralelas si tienen una perpendicular común”. ¿Supone esta definición que las rectas sean equidistantes?

16. J. B. Fourier tomaba la distancia como término no definido y proponía definir las nociones de esfera, plano, recta así:

    Esfera: conjunto de puntos equidistantes de un punto dado. *Plano*: conjunto de puntos equidistantes de dos puntos dados (Ya Leibniz había tenido la misma idea un siglo antes). *Recta*: conjunto de puntos equidistantes de tres puntos dados.

    Trace figuras, o intúyalas, que le permitan comprender la idea de Fourier. Compárela con las definiciones de Euclides. ¿Es intuitiva? ¿Fácil de experimentar?

17. En el parágrafo 30 de Bonola se transcribe lo que sigue:

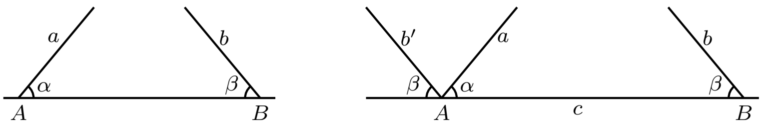
    Sea ABC un triángulo cuyos lados son recorridos en orden desde A a lo largo de AB, BC, CA. Yendo desde A hasta B miramos en la dirección ABb (AB ha sido prolongada hasta b) sin girar. Al llegar a B, viramos de la dirección Bb mediante una rotación de ángulo bBC, hasta que quedemos mirando en la dirección BCc. Luego proseguimos en la dirección BCc hasta C, donde viramos de nuevo desde Cc hasta CAa el ángulo cCA. Y, por último, al llegar a A, viramos desde la dirección Aa hasta la primera dirección AB en el ángulo externo aAB. Entonces, hemos hecho una revolución completa, exactamente como si estando en un punto, hubiéramos hecho el giro completo; y la medida de esta rotación es 2π. Por tanto, los ángulos externos del triángulo suman 2π y los ángulos internos $A + B + C = \pi$”.

Esta "demostración" fue publicada en 1809. Introduce la noción de dirección y asume que translación y rotación son operaciones independientes. Atrajo las críticas de nadie menos que de Gauss. Se supone, objeta Gauss, otra proposición, que no solo necesita prueba, sino que es, esencialmente, la proposición que se pedía demostrar. Trazar una figura y darse cuenta del proceder que se ha seguido. Compararlo con el que aconsejaba Schopenhauer para el teorema de Pitágoras. En este caso se tiene la pretensión de que se tome como prueba un procedimiento que no es más que una constatación en el caso de que la realidad se comporte euclidianamente. ¿Es lícito, en particular, utilizar el sentido de la vista como fondo de una demostración? Ver si hay algunos otros defectos en esta "demostración".

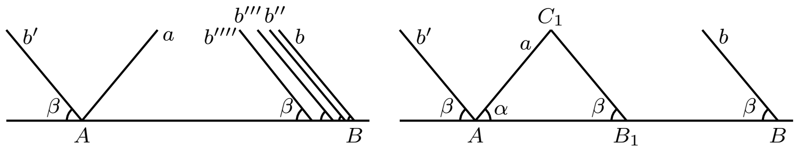
18. La manera como Wallis fue llevado a enunciar su postulado es bastante intuitiva y fácil de entender mediante gráficas. (Bonola, parágrafo 9).

    Wallis se proponía demostrar el quinto postulado como teorema, para lo cual procede así:

    Considera dos rectas a, b cortadas en los puntos A, B por una tercera recta c.



    Llama α, β a los ángulos internos del mismo lado de c tales que $\alpha + \beta$ sea menor que dos ángulos rectos. Tiene que mostrar que las rectas a, b se encuentran. Para lo cual, por el punto A traza la recta b' tal que forme con la recta c el mismo ángulo que la recta b. Se ve que b' es interior al ángulo adyacente a α. Trasladar la recta b sobre BA de manera continua y tal que siempre forme con c el mismo ángulo β. Antes de encontrar la posición b', una de las rectas trasladadas corta necesariamente a la recta a. Así queda determinado un triángulo AB_1C_1 con ángulos en A y en B_1 respectivamente iguales a α y a β. Entonces, si se tuviera un triángulo ABC, semejante al AB_1C_1 se podría asegurar que a, b se cortan. Como no se tiene modo de construirlo, Wallis lo postula. Repasar la crítica que hace Saccheri a Wallis y ver que es justificada. ¿Había que postular la existencia de figuras semejantes? ¿O bastaba postular la existencia de un triángulo semejante a uno dado?



19. Según Martin, (ver el capítulo sobre Geometrías no euclidianas), Leibniz estaría, en este problema, contribuyendo a la confusión. Sentó la definición siguiente: "Dos líneas tienen la misma dirección si pueden ser cortadas por una transversal de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes". Comparar con el teorema 29 de Euclides. ¿Con la definición de Leibniz qué quedaría por demostrar? Examinar tanto el teorema 29 como el 27, 28, 30, 31, 32 de *Elementos*. ¿La definición dada es equivalente a la hipótesis del ángulo recto? ¿Por qué? ¿Como una definición no asegura existencia, seguirían asegurándola los teorema 27 y 28?

20. Es de notar el razonamiento en la proposición XIV de Saccheri. Según la noticia de Bonola (parágrafo 15) podría parafrasearse de la manera que sigue:

    La hipótesis del ángulo recto, o, la del ángulo obtuso,
    implican el quinto postulado.

    El quinto postulado implica que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos.

    Pero, entonces, la suma de los ángulos de un cuadrilátero
    no es mayor que cuatro ángulos rectos.

    Esto implica que no se cumple la hipótesis del ángulo obtuso.

    Por tanto, no vale la hipótesis del ángulo obtuso.

    Más sucintamente:

    Si la hipótesis del ángulo obtuso, o la del ángulo recto,
    implica el quinto postulado,
    entonces, la hipótesis del ángulo obtuso no es válida.

    ¿Será fácil encontrar una situación de la vida corriente que pueda tratarse en términos análogos, si se la quiere examinar desde el aspecto lógico?

21. Según la definición de Euclides, ¿dos rectas que coinciden pueden ser paralelas?

22. Ibn-Haitham (±965 - ±1039), conocido en Occidente como Alhazen, dio una prueba del quinto postulado. Mostró, primero, que los cuatro ángulos de un determinado cuadrilátero (como el considerado tiempos después por Lambert) son rectos. Pero, si demostró esto es porque ya había asumido alguna proposición de tipo euclidiano. Efectivamente, según Martin, (ver el capítulo sobre Geometrías no euclidianas), había asumido la colinealidad de un conjunto de puntos, determinado por un punto que se mueve equidistantemente de una línea dada. Alhazen había introducido la equidistancia, como lo habían hecho anteriormente otros geómetras; como lo harán posteriormente otros, como Christoph Clavio. Comparar los enunciados.

23. Un geómetra italiano, Veronese, en su obra *Fondamenti di geometria*, 1891, no da para las paralelas la definición 23 de *Elementos*, por esta razón: "Nadie ha visto jamas dos líneas rectas de esta especie". ¿Qué opinión le merece el criterio de Veronese? ¿Las nociones geométricas, aún solo aquéllas que se enseñan en la escuela, han sido vistas por alguien? ¿Recuerda esta opinión las de algunos antiguos geómetras? ¿Con qué argumento rechaza Aristóteles la ciencia de las cosas perecederas? ¿Estas criticas se hacen desde el aspecto axiomático? ¿O desde el aspecto intuitivo? Es decir, ¿hay razón para no admitir puntos de vista como éstos desde el aspecto experimental o intuitivo, para la enseñanza, por ejemplo? ¿Hay razón paro no admitir razonamientos, sin más asiento que los sentidos, desde el punto de vista axiomático? Explicar por qué.

24. Buscar razones para no aceptar el carácter de postulado para el quinto postulado de Euclides y reconocerle solamente el carácter de teorema. Buscar una manera de demostrarlo. Estos son dos componentes de un problema importante. ¿Cuál?

Bibliografía

1. BONOLA, Roberto. *La geometria non-euclidea.* (1906). English translation: Non-euclidean geometry. 1912. Dover republication: 1955. $xiv + 268$ pp.

2. Proclo de LICIA. *Científicos griegos.* Volumen II. pp. 1141-1184. Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas por Francisco VERA. 1970. Madrid. Aguilar. 1190 pp.

3. MARTIN, George E. *The foundations of geometry and the non Euclidean plane.* 1975. New York. Springer-Verlag. $xvi + 509$ pp.

Capítulo 2

Descartes: algebraización de la geometría

... largas cadenas de razones...

... entre quienes han buscado la verdad en las ciencias, solamente los matemáticos han logrado encontrar algunas demostraciones, es decir, algunas razones ciertas y evidentes.

[Descartes. Segunda parte. Discurso del método para conducir bien su razón y buscar la verdad en las ciencias. Además *Dióptrica*, *Meteoros*, y, *Geometría* que son ensayos de este método]

Hasta René Descartes, (1596 - 1650), los enunciados de los problemas en geometría según el lenguaje de *Elementos* de Euclides no eran mezclados con el lenguaje del álgebra codificada por Viète. El filósofo francés lo hace y tiene éxito. El desarrollo subsiguiente será fulminante para resolver problemas puestos desde los alejandrinos acerca de un algoritmo para calcular áreas y volúmenes.

Álgebra retórica, álgebra sincopada, álgebra simbólica

Nesselmann. Según Jakob Klein, p. 146, da estos tres apelativos a los procedimientos algebraicos observados en el desarrollo histórico del álgebra.

Ello pone ya en guardia a quien distraídamente (al confundir procederes que se desarrollan con la disciplina misma) quiera pensar que el álgebra viene de los árabes, como el nombre y algunos cálculos.

Los babilonios, y otras grandes civilizaciones (como lo constata van der Waerden) sabían resolver, ecuaciones de segundo grado. Interesante saber cómo lo hacían.

Van der Waerden, pp. 60-61, destaca en un lista de siete problemas, el que sigue:

> Del área de un cuadrado he
> substraído [el lado del] cua-
> drado y eso es 14,30.

La solución es hallada así:

> Tome 1, el coeficiente [del lado del cuadrado].
> Divida 1 en dos partes.
> $0\,;\,30 \times 0\,;\,30 = 0\,;\,15$ se adiciona a 14,30.
> 14,30 ; 15 tiene raíz cuadrada 29 ; 30.
> Se adiciona 29 ; 30 y 0 ; 30 que se
> había multiplicado por sí mismo
> y 30 es el [lado del] cuadrado.

Los números están en base 60; al pasar a la base 10 se obtiene:

$$14,30 = 14 \times 60 + 30 = 840 + 30 = 870.$$
$$29,30 = 29 \times 60 + 30 = 1740 + 30 = 1770.$$

Al multiplicar (en base 60) la mitad de una unidad por sí misma, se obtiene un cuarto de la base, es decir; es decir 0 ; 15.

La operación 14,30 ; 15 equivale a

$$870 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3480 + 1) = \frac{3481}{4}.$$

La raíz de $\dfrac{3481}{4}$ es $\dfrac{59}{2}$.
Al añadir $\dfrac{1}{2} + \dfrac{59}{2}$ se obtiene 30.

En el álgebra cartesiana se tiene sucesivamente:

$$x^2 - x = 870.$$
$$x^2 - x - 870 = 0.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{1+(4\times 870)}}{2} = \frac{1+\sqrt{1+3480}}{2} = \frac{1+\sqrt{3481}}{2} = \frac{1+59}{2} = 30.$$

En *Elementos*, de Euclides, diversas situaciones conducirían a ecuaciones cuadráticas.

Los teoremas VI 28 y VI 29, en *Elementos*, corresponden a la determinación de la solución positiva de una ecuación cuadrática, todo en el lenguaje geométrico de Euclides.

Diofanto de Alejandría (Siglo III)

Es quien introduce el álgebra sincopada, a saber, signos abreviadores para cantidades y operaciones recurrentes constantemente (Heath. *A history of greek mathematics*. Volume II. pp. 440-517). Hay un signo para *arithmós* lo que actualmente se denomina incógnita. Hay signos específicos, para la potencias 1, 2, 3, 4, 5, 6 y para sus inversas. Diofanto va un poco más allá de la potencia tres lo cual, prácticamente carecía de sentido entre los griegos anteriores.

A más de los trece signos conviene tener en cuenta para el desarrollo del álgebra que

- No hay procedimiento sistemático en la solución de problemas de Diofanto; hay diversos modos de proceder para hallar soluciones.
- Hay en Diofanto problemas determinados y problemas indeterminados. La búsqueda de soluciones naturales para problemas indeterminados ocasionan el cálculo diofántico.
- Diofanto busca solo soluciones naturales y racionales, desecha soluciones negativas y soluciones irracionales. Por ejemplo, la ecuación (en escritura actual) $4 = 4x + 20$ es dejada a un lado por absurda.

En el libro I de *Aritmética* de Diofanto, el problema 1 es el siguiente (pp. 1035-1036)

1. *Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada.*

Sea 100 el número dado y 40 la diferencia. Suponiendo que la parte menor es un aritmo, la mayor será un aritmo más 40 unidades, y, por lo tanto, la suma de ambas valdría 2 aritmos más 40 unidades, la cual suma es 100.

Restando los términos semejantes de los semejantes, es decir, 40 unidades de 100 y 40 unidades de 2 aritmos y 40 unidades, los 2 aritmos que quedan valdrán 60 unidades y cada aritmo 30, que será la parte menor, y la mayor 30 más 40, o sea, 70 unidades.

La solución transcrita es la de Diofanto. Es de tipo logístico, pero no es receta escueta, como la mesopotámica, sino que hay razonamiento. La traducción al álgebra simbólica es así

$$x + y = 100.$$
$$x - y = 40.$$

Sistema que paso a paso se resuelve así. Sea a un aritmo.

$$\begin{aligned} y &= a. \\ x &= a + 40. \\ x + y &= 100 = a + 40 + a = 2a + 40. \\ 2a &= 100 - 40 = 60. \\ a &= y = 30. \\ x &= 30 + 40 = 70. \end{aligned}$$

Diofanto permanece casi olvidado hasta 1621, cuando Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581 - 1638) traduce al latín *Arithmetica*. Es la obra que induce a Fermat a plantear problemas de primera importancia en teoría de números.

Según Vera (*Breve historia de la matemática*) el matemático indio Brahmagupta (598 - ±660) sabe resolver ecuaciones de segundo grado; pero es Bhascara (1114 - ±1185) quien logra la fórmula general.

El matemático persa Abuabdala Mohamed Abenmusa Joarizmí (788 - 850), de regreso de un viaje a la India, año 830, redacta *Hisab al-jabr wa-al-muqabala*: libro sobre el restablecimiento y la reducción (p. 113. Ríbnikov. *Historia de las matemáticas.* (1974). Mir. Moscú), cuya primera palabra da el nombre al álgebra.

El álgebra en manos de los árabes hace progresos muy lentos; por ejemplo, su lenguaje sigue siendo retórico y se le sigue dando el empleo que tenía en Mesopotamia y en Diofanto; quizás es más utilizada en problemas de repartimientos proporcionales.

Los algebristas italianos Escipión del Ferro (1456 ? - 1526); Niccolo Fontana, Tartaglia (1499 - 1557); Gerolamo Cardano (1501 - 1576); Ludovico Ferrari (1522 - 1665); y, Raffaele Bombelli (1522 ? - 1572 ?) la enriquecen con las fórmulas resolutivas para las ecuaciones de tercer o cuarto grado. Sin embargo, el impulso investigativo sigue siendo muy escaso.

Es el matemático francés **François Viète** (1540 - 1603) quien logra (a veces se adjunta también a Descartes) la forma definitiva para la notación algebraica. En su obra de 1591, *Introducción al arte analítico*, sistematiza y codifica cuanto se conocía hasta entonces relacionado con el álgebra.

Distingue *logistica numerosa*, cálculo según la línea de Diofanto, apunta el mismo Viète, en el que figuran números, de *logistica speciosa*, cálculo algebraico con ecuaciones, donde no solo las incógnitas se designan con letras, sino también los coeficientes. Utiliza mayúsculas para magnitudes, minúsculas para datos, vocales para incógnitas.

Adolece su logística de fuertes limitaciones dado que admite únicamente soluciones positivas. Generalmente, ni las negativas, ni las irracionales.

Bourbaki, p. 238, trae a cuento la idea de Leibniz acerca de la algebraización del cálculo infinitesimal, reducción a un cálculo operacional dotado de un sistema de notaciones uniforme de carácter algebraico.

Se trata, según Leibniz, de lograr en análisis, lo análogo a la algebraización de la teoría de ecuaciones, de Viète, o a la algebraización de la geometría, de Descartes.

Viète expresa de manera general las relaciones entre los coeficientes y las raíces de una ecuación algebraica, a lo menos cuando las raíces son todas positivas escribe Bourbaki, p. 97.

Quizás debido a la insistencia de Viète en las restricciones anotadas, haya quienes atribuyen tan importantes relaciones entre coeficientes y raíces, por ejemplo al matemático Albert Girard (1595 - 1632) quien hace aseveraciones escuetas, sin demostraciones, como la de que una ecuación de grado n tiene n raíces, lo cual supone las relaciones en cuestión. Es digna de notar en *Invención nueva en álgebra*, 1629, de Girard, la afirmación que Bourbaki, p. 31, califica de ingenua: "Se podría preguntar: ¿para qué sirven las soluciones imposibles? Respondo que para tres cosas: la certeza de la regla general, no quedan soluciones por fuera, la utilidad".

La etapa simbólica del álgebra comienza con un episodio en la vida del matemático y filósofo **René Descartes** (1596 - 1650). Por la importancia de tal acontecimiento en el desarrollo de la matemática se tratará de seguir de cerca parte de la marcha de los pensamientos de Descartes.

Según el filósofo, en noviembre 19 de 1619, se sintió inspirado para hacer grandes realizaciones en las ciencias y en la filosofía. Se va a dedicar a la búsqueda de un método, útil en estas disciplinas para encontrar la verdad.

Es así como se propone concretar sus pensamientos mediante treinta y seis reglas, compuesta cada una de un enunciado general seguido de un comentario detallado acerca del proceso de sus experiencias metodológicas. Solo realizó la mitad de este proyecto. Del resto, apenas están enunciadas las reglas XIX, XX y XXI. Fue suspendida la obra en 1629 y publicada póstumamente en 1701 con el título de *Reglas para la dirección del espíritu*.

Es muy importante porque muestra el gran diseño del saber que se había forjado Descartes como meta. Aparece, por ejemplo, la idea recibida de sus antecesores por Descartes y de gran relevancia en Leibniz acerca de *Mathesis universalis*.

¿Qué otras ideas florecen entre las lucubraciones cartesianas? ¿Hay ya un intento de relación entre geometría y álgebra? ¿O esta se dio, casualmente, cuando le fue sometido a Descartes el problema transmitido por Papo de Alejandría en su *Colección matemática*?

Para averiguarlo se van a recorrer algunas páginas de *Reglas para la dirección del espíritu* y a anotar lo pertinente.

Un comentario en el desarrollo de la regla II dice:

> ... Conviene tener en cuenta que los dos únicos caminos para llegar al conocimiento de las cosas, son la experiencia y la deducción.

Pero, la experiencia engaña frecuentemente, así que no queda sino la deducción.

La aritmética y la geometría son prototipos para Descartes

> ... los que buscan el camino recto de la verdad, no deben ocuparse de lo que no ofrezca una certeza igual a la de las demostraciones de la aritmética y de la geometría.

En el comentario a la regla IV, escribe

> ... no es mi objetivo hablar de la matemática ordinaria sino exponer otra ciencia de la que aquella es la envoltura más que la parte.

Más adelante afirma explícitamente:

> ... debemos referir a la matemática todas las cosas en que se examina el orden o la medida, importando poco se trate de números figuras, astros, sonidos o de cualquier otro objeto si se investiga esa medida u orden. Debe, pues, existir una ciencia general que

explique todo lo que podemos conocer relativo al orden y a la medida sin aplicación a ninguna materia especial. La denominación de esta ciencia... [es] el antiguo y usual de matemática universal...

La última línea muestra que esa disciplina general, no aplicada, provenía de pensadores anteriores; en particular, de Raimundo Lulio. La idea de la matemática universal seguirá su curso, porque F. van Schooten, publica, 1649, *Principios de matemática universal, o sea, una introducción al método de geometría de René Descartes* (Klein. p. 309). Posteriormente la exaltará Leibniz.

En el comentario de la regla VIII, Descartes previene acerca del alcance de la razón

Nada más absurdo que discutir audazmente sobre los misterios de la naturaleza, sobre la influencia de los astros, sobre los secretos del porvenir y sobre otras cosas análogas, y no haberse preocupado de indagar si la razón humana puede profundizar en tales materias.

En una explicación de la regla X, Descartes hace un comentario que aparece igualmente en *Discurso del método*, 1637. Ya en desarrollo de la regla VII, había antepuesto la intuición frente a una conclusión silogística. Ahora escribe:

... el arte de disertar nada útil encierra para el conocimiento de la verdad, ningún silogismo que dé por resultado una verdad, pueden combinar los dialécticos, si no cuentan con la materia, si no conocen la verdad que deducen por ese medio... el estudio de las formas que emplean, nada nuevo les enseña. La dialéctica vulgar es completamente inútil a los que quieren descubrir la verdad; solo sirve, en ocasiones, para exponer a los demás la verdad conocida.

En lugar de reglas precisas de lógica, Descartes va a preferir sus caracteres, completamente subjetivos, de claros y distintos, para sus conceptos.

En todas las épocas del desarrollo de la matemática, sea entre los griegos de Atenas o entre los eruditos del Renacimiento tardío, o entre los matemáticos profesionales actuales hay enfoques diferentes hacia el conocimiento matemático. Lo curioso es que Descartes quien va a contribuir frecuentemente en la utilización del álgebra, vehículo por excelencia de lo no intuitivo, aboga a pie juntillas por la intuición y el convencimiento mediante ideas claras y distintas.

Al explayarse Descartes en la regla XIV hay un pasaje digno de recalcar, acerca de la noción de dimensión, tan importante, especialmente, en álgebra.

Bourbaki no destaca el lugar cartesiano. ¿Cómo surge la noción de dimensión mayor que tres según Bourbaki? Está sugerida en Fermat, siglo XVII. En el siglo XIX, está subyacente en Gauss. En 1846, aparece explícitamente en Cayley y en Grassmann.

Bourbaki, p. 80, cita un pasaje de Fermat en el que entrevé el germen de la geometría en n dimensiones. Es cuando Fermat sienta el principio fundamental de que una ecuación de primer grado en el plano representa una recta, una de segundo grado una cónica. Fermat considera problemas determinados que conducen a una ecuación en dos incógnitas, en tres incógnitas, etc. Los primeros consisten en la determinación de un punto, los segundos en la de una recta, los de una superficie, ... Ahí Fermat escribe una expresión que puede traducirse: "análogamente para los siguientes": el germen de la geometría en n dimensiones, según Bourbaki.

El texto de Descartes es más directo. Comienza por decir que por dimensión entiende

"el modo y razón según los cuales un sujeto es considerado como mensurable; de suerte que las únicas dimensiones del cuerpo no son la longitud, la anchura y la profundidad. La pesadez es la dimensión según la cual los sujetos son pesados; la velocidad es la dimensión del movimiento; y así una infinidad de modos semejantes".

La divisibilidad parecía ser lo distintivo para el concepto de dimensión: de cuantos modos puede algo ser subdividido en partes iguales. Así es como tiene sentido hablar de infinitas dimensiones.

Descartes previene las objeciones.

La pesadez de los cuerpos, la velocidad del movimiento, la división del siglo en años y días, son cosas reales; pero la división del día en horas y minutos nada tiene de real. A los físicos corresponde examinar si las dimensiones inventadas por el espíritu tienen fundamento real.

Descartes se dirige luego a los geómetras.

... la mayor parte de sus cultivadores conciben erróneamente en esta ciencia tres clases de cantidades: la línea, la superficie y el cuerpo.

Ahora bien, las tres dimensiones del cuerpo, longitud, anchura, profundidad, no difieren más que en el nombre.

Son, de hecho, intercambiables, es decir, no es intrínseco que una sea anchura y otra profundidad.

Hay un elemento indispensable

La unidad es aquella naturaleza de que deben participar todas las cosas que se comparan entre sí.

Descartes menciona luego

> ... las relaciones que pueden existir entre los seres de la misma especie, relaciones que se reducen a dos principales: el orden y la medida.

De las tres estructuras básicas de Bourbaki, en el siglo XX, solo asoma en Descartes, la de orden.

En el comentario a la regla XVI, Descartes menciona los signos: letras minúsculas a, b, c, para expresar las magnitudes conocidas; las mayúsculas A, B, C, para designar las magnitudes desconocidas. Esto es lo mismo que en Viète, a quien el filósofo no menciona; como tampoco las vocales para las incógnitas; en realidad, Descartes usará las últimas letras del alfabeto para ello.

En la parte realizada de *Reglas para la dirección del espíritu* no aparece relación alguna explícita entre geometría y álgebra. Ella será, pues, circunstancial.

Unos dos o tres años después de haber suspendido la redacción de *Reglas para la dirección del espíritu*, es decir, en 1631, Jakob Golio llama la atención de Descartes sobre el enunciado de un problema, conocido ya por Euclides y transmitido por Papo.

Descartes, 5 IV 1632, escribe a Mersenne que ha dedicado seis semanas al problema.

Descartes logra resolverlo. Será uno de los argumentos para mostrar que su búsqueda de un método ha fructificado. Prácticamente, *Géométrie*, 1637, está dedicada a la comunicación de la solución del problema.

Esbozo de *Géométrie*

La obra consta de tres libros, con títulos dicientes.

I. Sobre los problemas que pueden construirse empleando solamente círculos y líneas rectas.
II. Sobre las naturaleza de las líneas curvas.
III. Sobre la construcción de problemas sólidos y supersólidos.

Al silogismo escolástico contrapone Descartes el método apagógico: todo problema de geometría se puede reducir a tales términos que, para su construcción, no se necesite conocer más que la longitud de algunas líneas rectas.

(primer párrafo del libro I de *Géométrie*). Aquí 'línea recta' equivale todavía a segmento.

Considera cinco operaciones entre segmentos. Adición y sustracción, son las dos primeras. Elige un segmento unidad con el fin de relacionar las líneas rectas con los números. Introduce la multiplicación entre segmentos; gran innovación: el producto de una línea recta por una línea recta es una línea recta y no un cuadrado, como se concebía desde los griegos hasta Descartes; aunque se hable de cuadrados y de cubos se trata de simples líneas rectas; así las operaciones entre segmentos son internas. Multiplicar segmentos consiste en: dadas dos líneas rectas y la línea recta unidad, encontrar una cuarta línea que esté con una de las líneas rectas dadas en la misma relación que la otra línea recta dada lo está con la línea recta unidad. La división entre segmentos consiste en: dadas dos líneas rectas y la línea recta unidad, encontrar una cuarta que esté con una de las líneas rectas dadas en la misma relación que la unidad lo está con la otra. Extraer la raíz cuadrada, cúbica, ..., de una línea recta dada, es el problema que consiste en encontrar una, dos, ..., medias proporcionales entre la unidad y la línea recta dada.

¿Cuál es el método que sigue Descartes para resolver problemas? Quien quiera dar solución a un problema, debe principiar por suponer que ya el problema está resuelto y dar nombre a todas aquellas líneas rectas, conocidas o incógnitas, que parezcan útiles para la construcción, esto es, para la solución del problema. Debe recorrer en seguida la cuestión, una y otra vez, tratando de establecer la dependencia de unas cantidades respecto de otras y expresar luego tal dependencia en ecuaciones. Debe haber tantas ecuaciones cuantas líneas rectas incógnitas hayan resultado, si no la cuestión no está enteramente determinada. Se resuelve el sistema, es decir, se van comparando las ecuaciones hasta que una línea recta desconocida sea expresada mediante una conocida. Todas las cantidades incógnitas podrán expresarse en términos de una conocida, siempre que el problema sea de los que pueden ser resueltos mediante rectas, círculos, cónicas, o una curva de grado no mayor que 3, o, 4. Descartes escribe, no sin cierto aire de superioridad, que no sigue exponiendo este punto para no privar al estudioso de la ventaja de entrenar su entendimiento: añade que este es el mayor beneficio derivable de la geometría así concebida (ingenuamente uno hubiera pensado que el mayor beneficio estaría en resolver el problema) y no requiere más que estar familiarizado con la geometría ordinaria y con el álgebra. Sin embargo, en una carta a Mersenne, 1637, dice que hay quienes encuentran difícil su geometría y que en *Dióptrica* y *Meteoros* solo era su propósito convencer de que su método era mejor que el de la geometría ordinaria. La siguiente confesión suena más sincera con sus propias palabras:

> Esto lo he probado en mi Geometría, porque, para empezar, pude resolver una cuestión que, según Papo, no había podido ser resuelta por ninguno de los geómetras antiguos. Más aún; lo que he consignado allí, en el libro segundo acerca de la naturaleza y las propiedades de las líneas curvas y del método de estudiarlas, está, me parece, tan más allá del tratamiento en la geometría ordinaria como la retórica de Cicerón lo está del a, b, c de los infantes.

También es digno de destacar el siguiente extracto de una carta a la princesa Elizabeth, porque en él Descartes describe, así sea someramente, el punto central de su método.

> En la solución de un problema geométrico tomo cuidado, hasta donde sea posible, de usar como líneas rectas de referencia, líneas rectas paralelas o líneas rectas en ángulo recto; y no uso más teoremas que aquellos que aseguran que lados de triángulos semejantes son proporcionales y que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los lados. No vacilo en introducir diversas cantidades incógnitas, de manera que la cuestión se reduzca a tales términos que dependa solamente de estos dos teoremas.

Descartes insiste una y otra vez en la superioridad de su método respecto al de la geometría ordinaria; termina, empero, su obra maestra con esta, al parecer, confesión de modestia, en realidad, de honda seguridad en sí mismo:

> Espero que la posteridad sabrá reconocerme, no solo las cosas que he explicado aquí, sino también aquéllas que he omitido voluntariamente, para dejarle el placer de encontrarlas.

Lugares planos, lugares sólidos, todas las otras curvas

Los griegos (según Bourbaki, p. 93, tal clasificación era atribuida a Platón) clasificaban las curvas así:

- Lugares planos: recta, circunferencia.
- Lugares sólidos: elipse, hipérbola, parábola.
- Curvas mecánicas: todas las otras curvas.

Euclides hace el estudio de los lugares planos. Apolonio de Perga hace el estudio de los lugares sólidos.

Para hacer el estudio de las curvas mecánicas se requería un instrumento más manejable que el álgebra de figuras de los griegos. Su creación fue lenta. Plasmada por los árabes al finalizar el primer milenio de la era actual, la técnica de cálculo presta servicios a los comerciantes de los siglos siguientes; pero habrá que esperar a que los matemáticos del Renacimiento hagan los adelantos mayores; solamente los matemáticos franceses Viète, Descartes, Fermat logran darle el estatuto decisivo y hacerla el instrumento eficaz en el estudio de las curvas mecánicas.

La clasificación griega de las curvas, aunque no surja de la geometría misma, merece ser tenida en cuenta metodológicamente; sigue, hasta cierto punto el orden de dificultad en el estudio de las curvas. Descartes intenta una generalización de tal clasificación; pero, Bourbaki anota que esta resulta ser apenas una transposición, sin justificación, de la de los primeros grados a grados cualesquiera. Desde antes de Euclides, la búsqueda de solución para ciertos problemas obligó a los geómetras griegos a construir curvas más complicadas, específicamente para resolver el problema entre manos; en cambio, toda clase de curvas puede ser estudiada gracias a la introducción del álgebra. La reducción, lograda por Descartes tanto como por Fermat, de las ecuaciones cuadráticas a siete tipos muestra que no hay en realidad más lugares planos y sólidos que los ya estudiados por los griegos. Descartes y Fermat convirtieron en procedimiento manejable y expedito, una idea que asomaba ya en Menecmo y que fue utilizada como medio de exposición por Apolonio: la de referir puntos, rectas, etc., a ciertas líneas convenientemente escogidas.

La introducción del problema de Papo ocupa la mitad del primer libro y una cuarta parte del libro segundo. En total, unas veinte páginas, sobre las poco más o menos cien páginas que contienen *Geometría* en la edición española.

Lo que permite decir que todo el ensayo está centrado en la exposición de la solución del problema de Papo es la selección de los temas, indicados en la obra por numerosos subtítulos. Por ejemplo, todo el libro tercero está dedicado a las ecuaciones algebraicas, dado que al resolver el problema introduce Descartes numerosas relaciones en dos o tres variables, algunas de grado sexto.

El problema mismo matemáticamente no es muy interesante, Descartes cita completo el texto de Papo y luego da su propia versión, que es así:

> Teniendo tres, cuatro o un mayor número de rectas dadas en posición, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se puedan trazar tantas líneas rectas, una por cada una de las dadas, que formen ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto [esto es, el producto de los dos segmentos], guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no haya sino tres; o bien, con el rectángulo de las otras dos, si no hay más que cuatro.

O bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres [el producto de tres segmentos] guarde una proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra recta dada.

Si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras tres.

Si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde una proporción dada con el resultado de la multiplicación de las otras tres y también de una recta dada.

Si hay ocho, que el resultado obtenido de la multiplicación de cuatro guarde una proporción dada con el resultado obtenido de las otras cuatro.

De este modo, tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de rectas.

Descartes enuncia las respuestas respectivas

Para tres, cuatro, o cinco rectas siempre es posible conocer los puntos buscados, sirviéndose exclusivamente de la regla y el compás; únicamente debe exceptuarse cuando hay cinco rectas y todas ellas son paralelas.

En este caso, al igual que cuando hay seis, siete, ocho o nueve rectas pueden siempre ser hallados los puntos deseados empleando alguna de las tres secciones cónicas; exceptuar solamente aquel caso en el que hay nueve rectas dadas y todas ellas son paralelas.

Para tal caso, como para cuando hay diez, once, doce, o trece rectas, pueden hallarse los puntos buscados por medio de una línea curva que sea de un grado mayor que las secciones cónicas, exceptuando el caso en que fueren trece las líneas rectas dadas si son todas ellas paralelas.

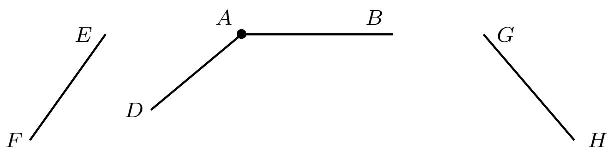
En este caso, como cuando son dadas catorce, quince, diez y seis, o diez y siete será preciso emplear una línea curva de un grado aún mayor que la precedente y así indefinidamente.

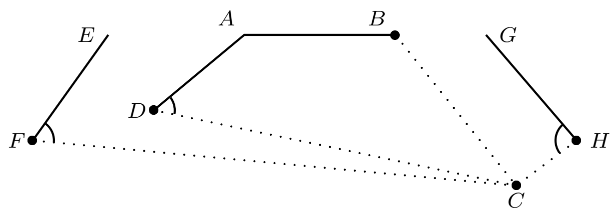
Descartes indica algunos casos particulares. Luego añade

trataré de dar la demostración en pocas palabras, pues ya me hastía extenderme de tal modo.

Allí es cuando introduce el álgebra, particularmente las coordenadas, que habían sido empleadas por ejemplo, por Apolonio, aunque no tan sistemáticamente.

Sean las rectas: AB, AD, EF, GH.



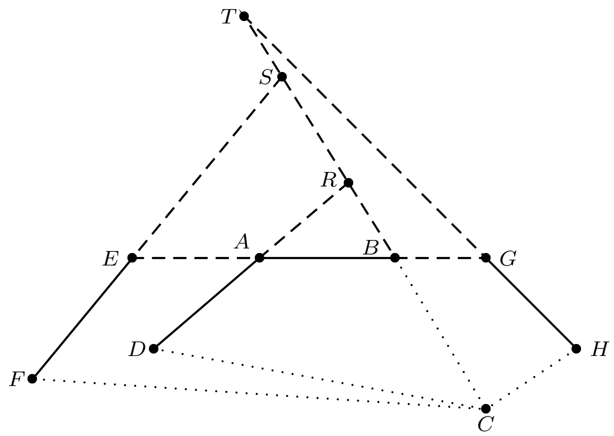


Hay que hallar un punto C tal que al trazar rectas CB, CD, CF, CH sobre las rectas dadas, se obtengan ángulos dados CBA, CDA, CFE, CHG. Descartes considera dos de estas rectas como principales, los ejes coordenados.

Elige AB recta dada, CB recta por calcular.

Se trata de expresar todas las otras rectas en función de estas dos. Las expresiones serían más fáciles si los ejes fueran rectangulares, es decir, los que posteriormente se llamarán cartesianos.

Para relacionarlas es preciso que las rectas se corten, para lo cual basta prolongarlas



Resultan dados poco a poco:

- Los ángulos del triángulo ARB.
- Los ángulos del triángulo DCR.
- Los ángulos del triángulo ESB.
- Los ángulos del triángulo FSC.

- Los ángulos del triángulo BGT.
- Los ángulos del triángulo TCH.

Conocidos los ángulos de un triángulo resultan conocidas las proporciones entre sus lados.

Al escribir todas las proporciones resulta un sistema. Se trata de escribir la ecuación de cada una de las rectas mediante combinaciones de las otras y luego, de reducirlas a ecuaciones en las que únicamente figuran las elegidas como ejes coordenados, es a saber, AB y BC. Si las condiciones han sido bien determinadas y bien traducidas en ecuaciones, será posible resolver el sistema.

Descartes advierte que al multiplicar varias rectas entre sí, las cantidades correspondientes en el producto solamente pueden tener tantas dimensiones, es decir grados, como rectas hayan intervenido. Nunca más de dos dimensiones, cuando han resultado de la multiplicación de dos rectas; ni más de tres cuando son el resultado de una multiplicación de tres rectas y "así hasta el infinito".

En el libro segundo, Descartes da más detalles de su demostración. Las expresiones no son sencillas dado que los ejes coordenados son oblicuos.

Descartes anota que el primer género de líneas curvas que ha considerado no incluye más que las cónicas. Luego pasa a determinar "la primera y más simple de las líneas curvas utilizable en el problema para cinco líneas rectas" de modo que cuatro de ellas son paralelas y la quinta, perpendicular a las otras cuatro. Obtiene una parábola cúbica. El problema que venía desde Euclides ha sido, pues, resuelto.

Descartes cita a Apolonio. Si se comparan los resultados, la diferencia a primera vista está en primer lugar, en el gran número de relaciones que logra establecer Descartes al explotar a fondo la referencia a los ejes coordenados mediante la proporcionalidad; y, en segundo lugar, en el aprovechamiento, igualmente a fondo, del algoritmo algebraico llevado a cabo por Viète, aunque el nombre de éste no aparezca en *Géométrie.*

Arquímedes, y otros matemáticos griegos, había iniciado la búsqueda de un cálculo efectivo para áreas y volúmenes.

Kepler y Galileo, "ambos astrónomos, más que matemáticos" (Bourbaki) habían reiniciado tal búsqueda, en la que luego prosiguieron, cada uno con alguna idea interesante, Cavalieri, Torricelli, Roberval, Fermat, Descartes y Pascal.

El estudio, intenso permitió el florecimiento de otros problemas relacionados: cálculo de máximos y mínimos, de la tangente, de la velocidad.

Por espíritu de sistema (Bourbaki, p. 221) quiso Descartes hacer de las curvas algebraicas el objeto exclusivo de la geometría.

Así que en la investigación acerca de la determinación de la tangente a una curva propone para el contacto un criterio algebraico: coincidencia de dos intersecciones. Su aplicación se efectúa mediante un algoritmo cuyos cálculos devienen fácilmente complicados. Funcionan, por ejemplo, para una $y = x^n$; empero, el reto del momento era calcular la tangente a la cicloide; y allí lo propugnado por Descartes no funciona. Sin embargo, Descartes ha logrado sembrar el entusiasmo entre continuadores: los holandeses Hudde y van Schooten, y el belga Sluse, logran hacia 1650 establecer la fórmula $-F_x/F_y$ para la pendiente a una curva algebraica $F(x, y) = 0$.

Los progresos continúan rápidamente. Hacia 1660, el problema de la tangente a una curva aparece como material conocido en un texto de Barrow.

Allí comienza la culminación del intenso movimiento alrededor del cálculo infinitesimal, al que contribuyó, entre otros, en primer lugar Viète, con su puesta al día del álgebra, y en segundo lugar, Descartes, con su puesta del álgebra al servicio de la geometría. Hubo otras notables contribuciones, antes de las definitivas de Leibniz y Newton, pero sin las de Viète y Descartes (desde luego, Fermat ha contribuido, no más modesta, sino más calladamente que Descartes) no hay algoritmo con toda la ductilidad que requieren las producciones infinitesimales que ya se vislumbran.

Es complicado concretar la herencia de Descartes, dado lo que sugiere el propio filósofo y matemático y el caso que de ello hace sus continuadores.

Bourbaki, p. 242, menciona la confusión creada por Descartes al desechar como tema de la geometría todas las curvas no susceptibles de una definición analítica y al restringir a las solas operaciones algebraicas los procedimientos de formación admisibles para tal definición analítica.

En esto no fue seguido Descartes en cuanto poco a poco los geómetras se valieron de operaciones trascendentes como logaritmación, exponenciación, funciones trigonométricas, cuadraturas, solución de ecuaciones diferenciales, paso al límite, adición de series.

Quizás sea lo mismo que quiera decir Shea, cuando apunta como conclusión que Descartes se interesa en la construcción de las curvas más que en la definición algebraica de ellas. Shea cita pasajes que ponen de manifiesto que para algunos geómetras lo que importaba era una descripción mecánica de las curvas. El mismo Descartes, en la sección primera del libro segundo de *Géométrie* escribe:

> Y, no es necesario suponer nada para trazar todas las líneas curvas que pretendo introducir sino que dos o más líneas puedan moverse entre sí y que sus intersecciones generen otras curvas.

Contra una de las conclusiones de Shea, parece ser que Descartes piensa, por lo menos, en muchas curvas (ahí la posteridad le es deudora de haberle enseñado, mediante la solución del problema de Papo, como puede utilizarse el álgebra para resolver problemas); pero, de acuerdo con una de las conclusiones de Shea, la preocupación de Descartes parece estar en la construcción; de cualquier modo, no está en la descripción algebraica, es decir, mediante propiedades de la curva, aunque parezca sugerirlo la expresión cartesiana de que las “intersecciones generan otras curvas”.

Es diciente, en el discurso octavo, de *Dióptrica*, el pasaje siguiente:

> La elipse u óvalo es una línea curva que los matemáticos se han acostumbrado a representar seccionando transversalmente un cono o un cilindro y que, también he visto como ha sido trazada por los jardineros en los jardines, describiéndola en esta ocasión de una forma grosera y poco exacta, pero que nos permite, así lo estimo, comprender más fácilmente su naturaleza que por referencia a la sección del cilindro o del cono.

Más adelante, vuelve a citar al jardinero, para “conocer”, “más adecuadamente”, esta vez, la hipérbola.

Con Viète, quedó prácticamente constituida el álgebra llamada, por Nesselmann, simbólica; y con Descartes se sabe cómo servirse del álgebra para resolver problemas de geometría. Con la generación siguiente, donde primordialmente descuellan Leibniz y Newton, el álgebra se constituye en el instrumento capital para finalmente, obtener el cálculo infinitesimal. Todo el siglo XVIII, hará derroche algebraico, pero habrá que esperar el siglo XIX para que el álgebra aparezca en el primer rango.

¿Cómo fue, mientras tanto, recibida el álgebra? Muy diversamente, según apreciaciones aportadas por Morris Kline (1980. pp. 124-126).

El filósofo Hobbes, en realidad no muy conocedor del tema, se permitió calificar el libro de John Wallis acerca del tratamiento algebraico de las cónicas como “libro vil”, una “esquirolada de símbolos”.

Tanto Pascal como Barrow propugnan por métodos y pruebas geométricos; objetan el empleo del álgebra que carece de fundamentación lógica.

Newton, en carta a David Gregory, se permite opinar que el "álgebra es el análisis de los chapuceros en matemática", a pesar de que grandes matemáticos como él, habían aprovechado muy bien la ductilidad de los procedimientos algebraicos. Empero, Newton, 1707, en su *Universal Arithmetic* pone la aritmética y el álgebra como ciencia matemática básica; la geometría es solo para proveer demostraciones.

También a Leibniz se le ocurrirán excelentes ideas respecto al álgebra; intentará introducir notación algebraica en lógica, lo cual en realidad, solo se logrará en el siglo XIX. El establecimiento definitivo de las reglas para el cálculo infinitesimal, una genialidad de Leibniz, es debido al álgebra. Sin embargo, Leibniz se permite decir que el álgebra es una "mezcla de buena fortuna y casualidad".

Euler, 1748, emplea abiertamente el álgebra a la que considera superior comparada con los métodos geométricos.

En el siglo XIX, cuando el álgebra deviene, el estudio sistemático de estructuras, hay sin embargo, una discusión peregrina entre geómetras analíticos y sintéticos. No se considera buena geometría si no se procedía como en *Elementos*, excluyendo el cálculo algebraico. Según Bourbaki, es la concepción de la geometría según el 'Programa de Erlangen', la que da al traste con tal porfía.

Más adelante, al estudiar a Leibniz, se continuará con la constante de la algebraización, según la cita de Leibniz que transcribe Bourbaki, ya citada antes.

Con Viète se tiene algebraización de la teoría de ecuaciones.

Con Descartes, se tiene algebraización de la geometría.

Con Leibniz y Newton, se alcanza algebraización del cálculo infinitesimal.

Bibliografía

1. BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques.* 1974. Hermann. Paris. 379 pp.
2. DESCARTES, René. *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría.* (1637). 1987. Alfaguara. Segunda edición. $LV + 490$ pp.

3. HEATH, Thomas. *A history of greek mathematics*. Volume II. (1921). pp. 440-517. *Algebra: Diophantus of Alexandria*. 1981. Dover. $xi + 586$ pp.

4. KLEIN, Jacob (1899 - 1978. Alemania). *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. (1966). Dover. $xv + 360$ pp.

5. KLINE, Morris. *Mathematics. The loos of certainty*. (1980. Oxford University Press. 366 pp). Traducción española: *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. 1985. Siglo XXI editores. $xi + 444$ pp.

6. VERA, Francisco. *Breve historia de la matemática*. (1946). Segunda edición. 1961. Losada. 158 pp.

7. *Científicos griegos*. Tomo II. Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas por Francisco VERA. Aguilar. Madrid. 1970. 1190 pp. En las páginas 1017 - 1140 aparece *Aritmética*, de Diofanto.

8. van der WAERDEN, Bartel Leenert. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. 1983. Springer-Verlag. $xii + 223$ pp.

9. van der WAERDEN, Bartel Leenert. *A history of Algebra*. 1985. $xi + 271$ pp.

Capítulo 3

Leibniz: algebraización de la lógica y del cálculo infinitesimal

Todo raciocinio no es otra cosa que conexión y substitución de caracteres, sean estos palabras, signos, imágenes... No solamente las cosas mismas, pero ni siquiera las ideas de las cosas, es prudente o posible tenerlas siempre en la mente; así que en lugar de ellas se ponen signos.

[Leibniz. Couturat. p 102, n 1]

El propósito de este capítulo es estudiar grandes líneas del proyecto de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) para algebraizar la lógica, así como fallidos intentos, aunque con logros importantes, del mismo Leibniz para realizar su programa. Por contraste, se traen a cuento algunas reflexiones de Leibniz acerca de su proyecto realizado (a la par de Newton) de algebraización del cálculo infinitesimal.

Para Bourbaki, solo Descartes y Leibniz pertenecen tanto a la historia de la filosofía como a la de la matemática.

Descartes o Pascal intentaban socavar la autoridad escolástica; uno y otro erraron el flanco al atacar la lógica; por ejemplo, lo que escribe Descartes, en *Discurso del método* acerca del silogismo como método de invención. Por el contrario, Leibniz profesa gran estima por la lógica de Aristóteles, que se propone conocer a fondo; es así, como comienza a darse cuenta de las falencias de la lógica tradicional. Si hubiera avanzado más, habría minado de veras la lógica tradicional.

Leibniz no sigue por esta senda, dedica parte de sus meditaciones a lo que será la lógica del futuro que, en algún pasaje, él mismo llama simbólica.

Pensador universal, desflora otros temas, particularmente en matemática. En Bourbaki, un matemático es citado por sus ideas creativas, así hayan sido solamente sugeridas, debido a la dificultosa maduración de las ideas en matemática. Pues bien. Los cuatro matemáticos más citados son: Hilbert, por lo menos unas 38 veces; Gauss, unas 35 veces; Leibniz, unas 32; Dedekind, unas 31. Los escritos de Leibniz son un semillero de ideas; pocas prosperaron tanto como la del cálculo infinitesimal. Y, en realidad, pocos fueron útiles en el sentido de haber inspirado a investigadores matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX. Sus manuscritos quedaron apilados en la biblioteca de Hanover. Incluso puede pensarse que las ideas matemáticas, salvo la del cálculo infinitesimal, permanecieron un tanto apiladas en los siete volúmenes de escritos matemáticos, editados por Gerhardt, entre 1849 y 1863. Leibniz comienza a resplandecer de nuevo con la obra de Couturat (Paris. Alcan. 1901. $xiv + 608$ pp.) *La logique de Leibniz d'après des documents inédits.*

Parece lo más indicado compulsar algunas de las grandes ideas de Leibniz, puestas de nuevo en valor por Couturat. Transcribe Couturat en pie de página fragmentos de textos leibnizianos y en el texto mismo de la obra ofrece una especie de traducción libre, iluminada por su propia concepción de la lógica hacia 1900. El propósito en la presente semblanza de Leibniz cosmlógico es transcribir, en cuanto sea posible, el propio texto de Leibniz.

Esto en cuanto concierne a la lógica. En la última parte del capítulo, se traen a cuento, otra idea maestra de Leibniz, a saber, su manejo de las secuencias y un comentario de Leibniz acerca de su cálculo infinitesimal.

En lo que concierne al tratado de Couturat, se cita con cuidado la página, precedida de la letra p, y el numeral de la nota en dicha página, precedida de la letra n.

Combinatoria

Leibniz tenía en gran estima la lógica de Aristóteles (p 1)

Creo que la invención de la forma de los silogismos es una de las más bellas del espíritu humano e, incluso, una de las más considerables. Es una especie de matemática universal, cuya importancia no es suficientemente reconocida; se puede decir que allí está contenido un arte de lo indefectible, a condición de que pueda servirse bien de ella, lo cual no es siempre el caso.

A este elogio de un personaje de diálogo, replica otro (p 33)

Usted parece hacer la apología de la lógica tradicional, pero veo que lo que usted aporta pertenece a una lógica más sublime, respecto de la cual la tradicional no es sino lo que los rudimentos del abecedario son a la erudición.

[El texto latino de Leibniz dice vulgaris donde aquí se ha escrito tradicional].

Es, en realidad, a esta lógica más sublime a la que piensa Leibniz llamar matemática universal. La matemática es la lógica de la imaginación (p 32, n 2).

Florece, entonces, una de las ideas más reiteradas en Leibniz, p 35.

. . . es a saber, pensar en una especie de alfabeto para los pensamientos humanos. . .

Alfabeto de los pensamientos humanos es un catálogo de los que por sí mismos son concebibles y por combinación de los cuales crecen las otras ideas.

Alfabeto de los pensamientos humanos es un catálogo de nociones primitivas, es decir, de aquellas tales que ninguna definición puede hacer más claras.

Diez y ocho años tenía Leibniz cuando concibió su proyecto que lo hizo exultar "con una alegría pueril" señalaba posteriormente el mismo Leibniz. En diversas oportunidades se refiere Leibniz a este episodio de su vida. Por ejemplo en el pasaje siguiente:

. . . no sé qué inspiró la aparición del pensamiento de que se podría imaginar un análisis de nociones, desde donde por combinación podrían surgir verdades estimables por así decirlo en números. Es agradable recordar ahora con qué argumentos bastante pueriles haya llegado a la sospecha de una materia tan importante (p 33, n 3).

Leibniz insiste en que era un infante (puer) cuando ya tenía esta y otras ideas.

Leibniz enuncia el problema fundamental de lo que llamaba lógica de la invención.

Dado un sujeto, encontrar todos sus predicados posibles; dado un predicado, encontrar todos los sujetos posibles (p 36).

Es un problema de combinaciones a la manera de Raimundo Lulio, quien, para encontrar todas las proposiciones posibles entre nueve términos, los dispuso sobre un círculo y trazó todas las cuerdas que las unían dos a dos. Así obtuvo 36 combinaciones. Lulio considera otras combinaciones.

Procediendo como Lulio, con el número 210, cuyos factores primos son 2, 3, 5, 7 se tiene

2×3	3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2 \times 3 \times 5 \times 7$
2×5	3×7	$2 \times 3 \times 7$	
2×7	5×7	$2 \times 5 \times 7$	
		$3 \times 5 \times 7$	

Se puede atribuir a un sujeto dado, cada uno de los factores primos, luego cada una de las combinaciones formadas con factores primos (pp 41-42, n 1, n 2). Leibniz lo ilustra con letras, desde luego, más cerca todavía de la formalización.

Leibniz publicó su *De arte combinatoria*, en 1666. Lo había compuesto uno o dos años antes. Fue un trabajo de grado, donde comenzó a exhibir su gran capacidad de invención.

El mismo confiesa que antes de 1672 gozaba de una "superbe ignorance" en matemática. En ese año va a Paris, en misión diplomática y allí conoce al físico holandés Huygens, a quien tiene como su maestro por haberle incitado al trabajo intelectual especialmente en matemática.

Característica universal

Por *caracteres* Leibniz entendía todo signo escrito, dibujado, esculpido. Los caracteres *reales* representan objetos o ideas, no letras, sílabas, o, palabras solamente (p 81).

Entre los caracteres reales, unos sirven para la representación de ideas y otros sirven para el razonamiento (p 81).

Para la representación de ideas están los jeroglíficos, egipcios o chinos, los símbolos de los astrónomos y de los químicos. Son imperfectos e insuficientes (p 81).

Para la característica leibniziana no son aptos los primeros sino los segundos. Entre estos están las cifras de la aritmética y los signos del álgebra (p 81).

Es más. La aritmética y el álgebra son muestras de la característica universal. Esta no es solo posible, sino que, en parte, ya está realizada (p 82, n 1).

La ventaja de su característica es que ella ha de permitir efectuar razonamientos y demostraciones mediante un cálculo análogo a los de la aritmética y el álgebra.

No hay que pensar que Leibniz esté pensando en la *logística numerosa* y la *logística speciosa* de Viète. Leibniz las excluye en una carta, 28 IV 1603, a L´Hospital: "... Viète y Descartes, en esto, no han develado todos los misterios".

Leibniz ya afirma la eficacia de un sistema de signos bien escogidos en el pensamiento deductivo.

> Una parte del secreto del análisis consiste en la característica, es decir, en el arte de emplear bien los signos puestos en servicio,

se lee en la misma carta (p 83, n 2). Según Leibniz, la geometría ha avanzado menos que el resto de la matemática (habrá que pensar que se refiere de nuevo a la aritmética y al álgebra) dada su carencia de caracteres para representar las figuras y las construcciones geométricas.

Leibniz asevera que el progreso en matemática al que él ha contribuido, se debe a que "hizo mejorar el uso de los símbolos que representan cantidades".

En una carta al duque de Hanover escribe (hacia 1690).

> Y como tuve la dicha de perfeccionar considerablemente el arte de inventar, o, análisis de los matemáticos, comencé a pensar ciertos enfoques nuevos para reducir todos los razonamientos humanos a una especie de cálculo (p 84, n 3).

Su invención más célebre, dice Couturat, a saber el cálculo infinitesimal, se debe, desde luego, a su búsqueda constante de nuevos simbolismos más generales y no puede menos que confirmarlo en su opinión acerca de la importancia capital de una buena característica en las ciencias deductivas (p 85).

La característica es un cálculo operatorio que representa mediante signos apropiados, nociones que ya no son aritméticas y que somete a un algoritmo determinado (p 85).

Couturat subraya cómo la invención matemática más célebre y más fecunda de Leibniz, el cálculo infinitesimal está relacionada con sus estudios lógicos, como una aplicación de su característica universal. "Es un placer anotar cómo se deriva este teorema según mi característica" exclama Leibniz mismo. Por el contexto dice Couturat, la característica aludida aquí es el cálculo infinitesimal, el cual, según Leibniz involucra todos los teoremas relativos a cuadraturas (p 87, n 1).

Una cualidad de un sistema de símbolos ha de ser la concisión (p 88).

La combinación de caracteres ha de pintar a la imaginación las conexiones lógicas de los conceptos correspondientes. Las reglas de la lógica han de traducirse por reglas que rigen la manipulación de signos (p 88).

A pesar de la expresión adversa de Leibniz, transcrita un poco antes, la característica guarda su parecido con el método cartesiano: los dos procedimientos se inspiran en el modelo del álgebra.

La función de la característica es concebida por Leibniz del siguiente modo (p 90, n 2).

> Da palabras a las lenguas, letras a las palabras, cifras a la aritmética, notas a la música; es la que enseña el secreto de fijar el razonamiento, y la que obliga a dejar trazos visibles sobre el papel para ser examinado sin afán; es, finalmente la que permite razonar con poco gasto, poniendo caracteres en lugar de cosas para desembarazar la imaginación.

Hay una imagen que gusta particularmente a Leibniz, que menciona frecuentemente ornándola, con perífrasis, y que ha tomado de la mitología (p 90, n 3):

> El verdadero método ha de suministrar un hilo de Ariadna, es decir, un cierto medio sensible y grosero, que conduzca el espíritu, a la manera de las líneas en geometría o de las formas para las operaciones que se prescribe a los aprendices en aritmética.

Leibniz habla también de "hilo de pensamiento", "hilo para la meditación", "hilo palpable"(p 91).

Una explicación, sin afán, es la que sigue:

> "Hilo para la meditación llamo al método, fácil y certero, siguiendo al cual, sin agitación del espíritu, sin litigios, sin temor de errar, no se procede con menos seguridad que quien, en el laberinto posee un hilo de Ariadna.

Leibniz compara su método a un parapeto de un puente que habría que cruzar de noche.

Leibniz avanza en sus premoniciones hacia la lógica del futuro. Comienza por afirmar que "cálculo" no es otra cosa que una "operación mediante caracteres". Y en otro pasaje dice (p 96, n 3).

> Todo raciocinio no es otra cosa que conexión y substitución de caracteres, sean estos palabras, signos, imágenes... Es patente, que todo razonamiento es una combinación de caracteres.

Se acerca de Hobbes quien ya había asegurado que "todo razonamiento es un cálculo".

Piensa en un riguroso razonamiento escrito (p 96, n 4).

La escritura y la meditación van al mismo paso, o, para decirlo mejor, la escritura es el hilo de la meditación.

Así llega Leibniz a uno de sus grandes temas: *calculus ratiocinator*. En la descripción de su autor (p 96-97, n 5)

Calculus ratiocinator, o sea un artificio para razonar fácil e infaliblemente. Algo hasta ahora ignorado.

Y en una carta de 1707, explica

Característica de la razón, por obra de la cual es posible alcanzar verdades de la razón, por decirlo así, mediante una especie de cálculo, como en aritmética y en álgebra; así mismo en cualquiera otra materia subordinable al raciocinio.

Leibniz asigna una función bien precisa al *calculus ratiocinator*

... nunca habrán de terminar las controversias, nunca será posible imponer silencio a las sectas, a menos que de los raciocinios complicados, de los vocablos con significación vaga e incierta se pase a cálculos sencillos en caracteres bien determinados (p 97, n 4).

Leibniz garantiza la característica como "juez de controversias" y como método infalible, de modo que "todos nuestros errores sean tan solo errores de cálculo" (p 99, n 1).

Particularmente declarativo es un pasaje de Leibniz, 1678, citado por todas partes (p 98, n 3).

Cuando surjan controversias, sobrarán las disputas entre dos filósofos, como entre dos calculistas. Bastará tomar el cálamo a la mano, sentarse frente a los ábacos, y decirse mutuamente: calculemos!

Sofismas y paralogismos serán como errores de cálculo en aritmética. No se podría errar, aunque esa fuera la intención. "Quimeras que incluso quien las avanza no las entiende, no podrán ser escritas en tales caracteres" (p 99, n 1, n 2, n 3).

Se toma nota de todas estas prevenciones leibnizianas que no van a influir prácticamente en el desarrollo de la lógica, pero que sí van a ser apreciadas y observadas en pleno siglo XX.

Se puede vislumbrar la idea de formalización (Hilbert, Bourbaki) en la siguiente aseveración de Leibniz (p 102, n 1).

Todo razonamiento humano se efectúa mediante signos o caracteres. No solamente, pues, las cosas mismas, pero ni siquiera las ideas de las cosas, es posible o prudente tenerlas siempre en la mente; así que por cuestiones de economía en lugar de ellas se ponen signos.

Leibniz quería estatuir indicaciones precisas para asociar signos, pero, todo símbolo es convencional. El filósofo desea que se adopten símbolos tan naturales como sea posible, es decir, los más apropiados a las nociones que deben representar. Una idea abstracta, empero, no puede ser figurada. Ambiciosamente, Leibniz espera que el signo ofrezca los mismos aspectos que la noción y remita en cierta manera hacia su constitución. La característica *real*, fundada sobre el análisis de las nociones y el "alfabeto de los pensamientos humanos", es también la característica *natural*, la que suministra para las ideas complejas los signos más simples, más claros, más transparentes. La idea, empero, es aún muy difusa.

Supuesto que se tenga suficiente información acerca de lo que Leibniz entendía por su característica universal, es de considerar ahora, la realización de la idea.

No solo fue difícil. Fue imposible inventar un sistema de signos que respondiera a todos los requisitos, a pesar de que Leibniz había esbozado soluciones desde su obra de juventud, *De arte combinatoria*, 1666.

En uno de sus diversos intentos, las ideas simples estaban representadas por números primos y las complejas por productos de números primos (p 111).

Se puede declarar, que aquí el mismo Leibniz se encerró en un recinto incómodo. Hay que ver por qué.

El alfabeto de la ideas se traduciría por la secuencia de los números primos. El número de las ideas simples puede ser, pues, infinito (al parecer, no siempre Leibniz lo afirmó). Quedaría por determinar cómo secuenciarlas apropiadamente.

Habría que asignar a cada idea simple un signo o un nombre. Así se tendría el alfabeto de los pensamientos humanos.

A partir de ahí, se expresarían todas las otras nociones, combinando los signos paralelamente con los conceptos, gracias a la maravillosa fecundidad del arte de las combinaciones.

El mismo Leibniz asegura que la base de su lógica y de perquisiciones posteriores fue *De arte combinatoria*.

Las ideas complejas se conforman a partir de las simples, como los números no primos se conforman como producto de primos.

Ahí es donde surge un obstáculo: no solo hay producto lógico, hay otras operaciones lógicas, que parecen no tener cabida en el sencillo y aritmético esquema de Leibniz. Leibniz, dice Couturat, queda encerrado en el cálculo de silogismos, es decir, de clases y de las solas relaciones de inclusión y de exclusión.

Couturat hace un compendio diciendo que Leibniz admitía para su lógica diversos simbolismos paralelos y equivalentes, en los que las relaciones de los conceptos habrían sido traducidos respectivamente mediante cálculos, ecuaciones, figuras, o movimientos. Su lógica resultaba concebida sea como una aritmética, sea como un álgebra, como una geometría, e incluso, como una mecánica (p 116).

Finalmente, nada concreto. Pospone la realización de su cálculo a la de realizaciones previas indispensables, que solo se lograrán posteriormente.

Ciencia general

"La lógica es ciencia general" para Leibniz en 1683, en cuanto método universal aplicable a todas las ciencias (p 176, n 1).

"Arte de pensar" es la lógica de Leibniz, superior así al arte de juzgar, de Aristóteles. Ha de ser paralelo incluso al arte de inventar cartesiano, sin acercarse más de la cuenta, dadas las reticencias cartesianas en cuanto a la lógica como instrumento de creación.

La invención preocupa mucho a Leibniz. Diversos métodos concurren a ella. Por ejemplo análisis y síntesis. En el método analítico, una cuestión propuesta se resuelve en nociones más simples por donde se llega a la solución. En el método sintético se parte de nociones más simples para llegar a las más compuestas y por allí a la cuestión propuesta (p 179, n 4). Contrariamente a lo que a veces se dice, Leibniz enseña que en lo que todavía no está bien establecido cabe emplear el método de la certidumbre o de la demostración o de la combinatoria, en una palabra, de la síntesis. Para lo que es del todo desconocido hay que valerse del análisis. Según Leibniz, estos dos artes no difieren tanto como a veces se cree (p 179, n 3).

Considera álgebra y combinatoria como análisis y síntesis. La primera lleva del efecto a la causa, del fin a los medios; la segunda, de la causa al efecto, de los medios al fin, es decir, de la cosa al uso de la cosa (p 178, n 2).

Leibniz, en 1666, ya conoce las reglas cartesianas para el método, las cuales critica, a veces, y adapta (p 180-182). También conoce la dificultad que subraya Pascal cuando se quiere demostrar todo. Leibniz parece adoptar el enunciado de Hobbes: "Las definiciones son las únicas proposiciones primeras universales". Ahora bien. Para Leibniz, las demostraciones no son sino cadenas de definiciones; lo asegura en diversas ocasiones (p 184, n 3; p 185, n 1). Todos los enunciados han de poderse demostrar, porque ¿de donde provendría su certeza? Ha de poderse ver la relación de un enunciado o con el principio de identidad o con el de contradicción. "Todas las proposiciones ciertas han de poder ser demostradas, salvo las idénticas y las empíricas". Las idénticas son las reducibles al principio de identidad. Las empíricas son las conocidas por inducción, no aceptables, por lo tanto, dado que las ciencias devendrían empíricas. Así que solo las idénticas son indemostrables. Los axiomas, pues, han de ser demostrables (p 185, n 3). Lo afirma, una vez más, en carta del 19 III 1678: "Todas las verdades han de poder resolverse en definiciones, proposiciones idénticas, y proposiciones experimentales" (p 186, n 1). "Luego de atenta consideración, nadie puede poner en duda que la demostración, con mayor razón la síntesis y el análisis, si no expresamente, ciertamente de manera implícita, no es otra cosa que cadena de definiciones" (carta en 1678) (p 187, n 2).

Una vez reducida la demostración a la definición, Leibniz entra a discurrir cuestiones de posibilidad basado en su clasificación de los tipos de definición. En la axiomática actual, por lo menos en la formalizada, el papel de la definición es meramente el de abreviación; la definición pierde esa especie de función ontológica que tiene en Aristóteles.

En el capítulo acerca de la ciencia general, Couturat considera muchos otros temas, leibnizianos que no tienen nada que ver, generalmente, con la lógica, ni con la matemática contemporánea, sino con las ciencias y sobre todo con la metafísica.

Mathesis universalis

Un proyecto de Leibniz era escribir un libro que hubiera debido llamarse *Nuevos elementos de matemática universal* en donde Leibniz hace entrar el análisis y la síntesis, que equipara con el álgebra y la combinatoria (p 283, n 1).

La perfección del álgebra depende del arte de las combinaciones (p 286, n 1).

El álgebra de la que tanto mérito se hace no es sino una parte de la combinatoria (p 286, n 2). El álgebra no es sino una parte de la característica (p 286, n 2).

El arte combinatoria es la ciencia de lo símil y de lo disímil, cuando el álgebra lo es de lo igual y de lo desigual. Por el contrario, la combinatoria difiere apenas de la ciencia característica general mediante la cual son pensados los caracteres aptos para el álgebra, para la música, para la lógica... El arte combinatoria no la concibo como para inquirir el número posible de variaciones sino como la de las formas o conocimiento general de lo símil y de lo disímil, cuyas reglas aplica el álgebra a magnitudes en general y la geometría aplica a las figuras (p 287, n 2).

Muchas de las cosas más difíciles son inventadas por la combinatoria, por el álgebra; los mismos fundamentos del álgebra son constituidos por la combinatoria (p 288, n 1).

Leibniz aspira, incluso, a explicar raíces de grados altos mediante arte combinatoria más que por álgebra (p 288, n 2).

La combinatoria trata de las formas de las cosas, abstracción hecha de magnitud, lugar, acción (p 288, n 3).

Leibniz continúa exaltando su combinatoria que parece equiparar a la matemática universal.

En un pasaje análogo a los anteriores, Leibniz bosqueja una subordinación de la geometría a la combinatoria, sin detallarlo tanto como hizo respecto al álgebra.

Luego continúa elaborando su concepto de matemática universal.

La matemática universal ha de suministrar algún método para determinar los objetos de la imaginación, o por decirlo así, una lógica de la imaginación.

La matemática universal es la ciencia de las cosas imaginables. La metafísica es la ciencia de las cosas intelectuales (p 291, n 1).

Leibniz insiste en que no ha de confundirse el álgebra con la mathesis universalis (p 291, n 3). Su concepción del álgebra es la que primó hasta, poco más o menos, mitad del siglo XIX, cuando el álgebra inició su ascenso, hacia el tratamiento de las estructuras; entonces será el pleno derecho una matemática universal. Otras ramas de la matemática serán igualmente, matemática universal.

Leibniz, increíblemente, llega a enceguecerse, contra quienes no reservan un modesto lugar para el álgebra. Es así como ataca fuertemente a los cartesianos, quienes resultaron mucho más visionarios al hacer del álgebra un arte para la invención. Leibniz, 1684, se permite reír de Malebranche, cartesiano convencido, quien cree que el álgebra es la primera y más sublime de las ciencias, que la aritmética y el álgebra son las solas ciencias que dan al espíritu toda la perfección y todo el alcance de que es capaz, que la aritmética y el álgebra son la verdadera lógica. Leibniz pone en duda los conocimientos algebraicos y la penetración de Malebranche en el arte de la invención (p 292-293, n 4).

Más terminantemente: los que se imaginan que todos los métodos matemáticos dependen del álgebra están equivocados (p 293, n 1).

Estas disputas eruditas llevan a Leibniz a ocuparse de problemas de Diofanto.

Su casi inquina contra los cartesianos lo lleva a subestimar la geometría analítica cartesiana y se convierte en un episodio interesante en el desarrollo de la matemática.

Leibniz quiere mostrar cómo todo no se reduce al álgebra, en geometría o en cálculo integral. Lo que trasciende los procedimientos algebraicos hace aparecer lo trascendente.

Couturat apunta que Leibniz cita frecuentemente, la ecuación trascendente

$$x^x + x = 30$$

de grado no aparente y con una solución: 3 (p 294, n 1-5).

Otro ejemplo famoso de trascendencia es la expresión de π mediante una serie infinita

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

que Leibniz afirma haber hallado gracias a finas consideraciones combinatorias, más allá del álgebra y del análisis. Asevera Leibniz: el instrumento de que me proveen las combinaciones sirve para encontrar un número infinito de figuras conmensurables con una figura dada (p 295, n 2).

Aquí es, añade Couturat, donde Leibniz inserta un pensamiento citado con frecuencia que comienza con la frase: nada hay tan importante como considerar los orígenes de las invenciones, más valederas, creo, que las invenciones mismas. . . (p 295, n 2).

Antes de 1673, Leibniz había construido una máquina aritmética que él consideraba superior a la que había construido Pascal y a otras que habían surgido después de la de Pascal. Lo curioso es que criticaba el isocronismo aproximativo de las pequeñas oscilaciones sobre el cual Huygens había establecido su reloj de péndulo: habría podido proceder mejor, Huygens, si se hubiera guiado por el arte de las combinaciones, mucho más general que el del álgebra (p 296, n 1).

Leibniz puede ser considerado, anota Couturat (p 303, n 3) como el precursor, no solo de la lógica algorítmica, sino también de la de relaciones, entrevista por de Morgan, fundada por C. S. Peirce y desarrollada por Schröder.

> Si algún día tengo tiempo, quisiera culminar mi meditación acerca de la característica general o manera de cálculo universal, que debe servir en las otras ciencias como sirve en matemática. Tengo ya bellos intentos, definiciones, axiomas, teoremas y problemas importantes sobre coincidencia o identidad, determinación, similitud, relación, potencia o causa, substancia, por todas partes procedo mediante letras de manera precisa y rigurosa, como en álgebra (p 304, n 1).

La característica se aplicaría no solo en matemática, sino también en mecánica, dinámica, hasta en metafísica (p 304, n 1).

Por ejemplo, la relación “estar en”: se dice estar en, de la parte en el todo, incluso lo indivisible en el continuo, como punto en la recta, ... Si lo que está en, es homogéneo con aquello que lo contiene, entonces se habla de parte y al continente se le llama todo (p 306, n 1).

Así, toda la doctrina silogística podría ser tratada mediante los conceptos de continente y contenido, diferentes de los de todo y parte; dado que el todo excede siempre la parte, mientras que contenente y contenido pueden ser a veces iguales, como sucede con las proposiciones recíprocas (p 306, n 2).

Leibniz distingue entre igualdad y equivalencia; esta, es igualdad en todos los casos (p 307, n 5). Conlleva igualdad de los coeficientes respectivos (p 310, n 3) en el caso de ecuaciones.

Cosas iguales tienen la misma cantidad. Cosas semejantes, la misma calidad (p 310, n 5).

En notas a pie de página, pp 310-315, transcribe Couturat las caracterizaciones que hace Leibniz de los conceptos

- identidad, igualdad;
- coincidencia, congruencia;

- homogeneidad, semejanza.

Resultan fórmulas de Leibniz citadas frecuentemente, como

- Son la *misma cosa*, si la una puede ser substituida en el lugar de la otra, sin alterar la verdad.
- Son *iguales*, si tienen la misma magnitud, es decir, si pueden ser substituidas la una, por la otra, sin alterar la magnitud (p 317, n 2).
- Dos cosas congruentes no difieren sino por la posición, es decir, por sus relaciones extrínsecas (p 310, n 4).

Leibniz llama combinación semejante la que actualmente se llama operación conmutativa (p 320, n 1).

Distingue, igualmente, un cálculo en el que AA es lo mismo que A (actualmente se habla de idempotencia), de uno en el que no es lo mismo que A (p 320, n 2).

Distingue un cálculo conmutativo en el que AB es lo mismo que BA, de uno en el que esto no ha sido asumido (p 321, n 3).

Leibniz introduce el concepto de forma lógica: una exposición completa y ordenada de la argumentación.

Hay quienes piensan que el rigor matemático está fuera de lugar cuando se lleva a ciencias diferentes de la matemática. Ignoran, dice Leibniz, que es lo mismo escribir matemáticamente que en la forma que los lógicos llaman raciocinio (p 318, n 3).

Leibniz concibe la lógica como mathesis universalis (p 33, n 2) (p 317, n 3) así el desenvolvimiento de tal idea llegue solo más adelante, por ejemplo, con el álgebra universal, de Whitehead; expresión que tampoco se extraña en Leibniz en el mismo año de su fallecimiento, 1716 (p 319, n 5).

Cálculo lógico

La investigación de Couturat lo condujo a establecer tres fechas en las que Leibniz intenta desarrollar su ambicioso proyecto lógico: 1679, 1686, 1690.

Las dificultades no se hacen esperar. Couturat aduce diversos ejemplos.

Ya ha sido anotado que la composición de conceptos es asimilada por Leibniz a la multiplicación aritmética. Ahora bien. Esta es conmutativa. Género próximo y diferencia específica no son permutables.

Tradicionalmente pueden obtenerse todos los géneros, y especies mediante dicotomía; pero, este principio no es generalizable.

Leibniz asocia conceptos simples con números primos y conceptos complejos por productos de números primos. Cada término tendrá su número característico. La descomposición de un número característico en sus factores primos dará la definición del término correspondiente.

Un concepto tiene por predicados todos sus divisores, es decir, todos sus factores primos. Una proposición universal afirmativa es verdadera, si el sujeto contiene al predicado, es decir, si el sujeto contiene al predicado como factor.

Al explicitar lo análogo para las proposiciones restantes, universal negativa, particular afirmativa, particular negativa, se obtienen situaciones completamente contradictorias.

Leibniz trató de arreglar las situaciones contrapuestas que se le presentaban, lo cual ocasionaba complicaciones cada vez mayores para el sistema.

Finalmente, Leibniz renuncia a la asociación de conceptos simples y números característicos y los reemplaza por letras. Su aritmética deviene álgebra (p 337).

En esta parte de la teoría asume como principios la conmutatividad y la tautología y como axiomas (proposiciones verdaderas per se) el principio de identidad, el de simplificación, y el del silogismo.

Se tienen, pues, como principios

- el de conmutatividad, que enuncia así: la transposición de letras en el mismo término no cambia nada, de modo que ab coincide con ba.
- el de tautología, que enuncia así: la repetición de la misma letra en el mismo término es inútil, aa es a.

Asume tres axiomas (proposiciones verdaderas per se):

- El principio de identidad, es decir, a es a.
- El principio de simplificación, es decir, ab es a, o, ab es b. Ejemplo: Todo animal racional es animal.
- El principio del silogismo, que enuncia diciendo: si a es b y si b es c, a es c.

Define la identidad o igualdad lógica de dos términos mediante la posibilidad de substituir el uno por el otro, sin alterar la verdad.

Leibniz consigna luego una relación entre identidad e inclusión, así: Si a es b, y, si b es a, a y b son idénticas. Leibniz demuestra tal relación (p 339).

Leibniz enuncia diversas relaciones, que Couturat transcribe, anotando de paso, equivocaciones de Leibniz.

Diversos predicados pueden reunirse en uno solo (p 340, n 1). Si a es b, y a es c, entonces, a es bc.

Recíprocamente, un predicado compuesto puede descomponerse en sus elementos (p 340, n 2). Si a es bc, entonces, a es b, y, a es c.

Con el sujeto es procedente la composición, no la división, enuncia Leibniz (p 340, n 4). Si a es c, o (Leibniz habría escrito, y), si b es c, entonces, ab es c.

Se pueden multiplicar los dos términos de una proposición de un mismo factor: Si a es b, entonces, ac es bc.

De un número cualquiera de proposiciones se puede hacer una sola, reuniendo todos los sujetos en uno solo y todos los predicados en uno solo (p 341, n 1). Si a es b, y, c es d, entonces, ac es bd.

Se pueden multiplicar (componer) los dos términos de una proposición por un mismo factor, no se puede descomponer, o dividir, o suprimir uno de los factores. De ac es bc, no se sigue a es b. Según Couturat, hace Leibniz un añadido, que no completa ni una condición necesaria, ni una suficiente, al decir: no se puede sino en el caso particular en el que b y c no tienen elemento común (p 341-342, n 4).

Leibniz añade otras relaciones (p 342)

- a no es no a.
- no a no es a.
- Lo que no es a es no a.
- Lo que no es no a es a.

Leibniz añade un *principio de cálculo* que destaca el caracter formal del cálculo que está construyendo: todo lo que haya sido demostrado para ciertas letras indeterminadas vale para todas las letras que tengan entre ellas las mismas relaciones (p 342).

Leibniz define *uno* mediante inclusión lógica, así: Si a es m, y, b es m, y, si a es b y b es a, entonces, m es *uno*.

Varios es definido así: Si a es m y b es m, y, si a no es b y b no es a, entonces hay varios m. Además a y b son dispares.

Leibniz define los naturales sucesivos:

- Si a es m y b es m, y, si a y b son dispares, hay dos m.
- Si a es m, b es m, c es m, y, si a, b, c son dispares, entonces, hay tres m.

Una anotación importante hace Couturat acerca de la terminología de Leibniz.

La multiplicación de conceptos consiste para Leibniz en la adición de las comprehensiones de los conceptos. Alguna vez, Leibniz, 1683, representa por la multiplicación, la alternativa de varios conceptos: x es abc, significa x es a, o, b, o, c. No pudo desarrollar un cálculo alternativo, dado que se le entremezclan la adición lógica, la multiplicación y la multiplicación lógica (p 344).

Dos términos son *idénticos* si son intersustituibles. Dos términos están en la relación de sujeto a predicado si el segundo puede sustituir al primero, es decir, si la comprehensión del segundo está contenida en la del primero. "A es B es lo mismo que A contiene a B" (p 345, n 4). Un ejemplo del mismo Leibniz es el siguiente.

Desde el punto de vista de la comprehensión puede notarse $\{\text{cuadriláteros}\} \subset \{\text{paralelogramos}\} \subset \{\text{rectángulos}\}$. Los cuadriláteros tienen menos propiedades que los paralelogramos. Los paralelogramos tiene menos propiedades que los rectángulos. La comprehensión de cuadriláteros está contenida en la de paralelogramo. Los rectángulos tienen más condiciones que los paralelogramos. Hay menos requerimientos para ser cuadrilátero que para ser paralelogramo y menos para ser paralelogramo que para rectángulo. En extensión, la inclusión es al revés. Todo rectángulo es paralelogramo. Todo paralelogramo es cuadrilátero.

Couturat presenta resultados obtenidos por Leibniz, principalmente en su intento de 1686, sobre cuyo escrito el mismo Leibniz anotó "Aquí he avanzado excelentemente". Allí Leibniz emplea mayúsculas.

La igualdad equivale a dos inclusiones inversas simultáneas. $A = B$, equivale a A es B, y, B es A.

La inclusión resulta subordinada o reducida a la relación de identidad.

$A = AB$, es decir, que A es idéntica a AB, dado que B nada añade a la comprehensión de A.

Si A es B y A es C, entonces, A es BC.

Leibniz define formalmente no no $A = A$ (Leibniz empleaba siempre el signo ∞ que había introducido Descartes (p 347, n 2)).

Leibniz introduce, una vez más, ahora en letras mayúsculas, los principios de identidad, de tautología, de simplificación.

Toda proposición verdadera es analítica, es decir, afirma de un sujeto un predicado que ya está contenido, implícita o explícitamente, en el sujeto.

El principio del silogismo ya no es un axioma, como en el primer ensayo, sino que es demostrado.

Premisas

$$\begin{aligned} A = AB&,\text{ es decir, } A \text{ es } B.\\ B = BC&,\text{ es decir, } B \text{ es } C.\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned} A &= AB\\ &= A(BC) = ABC\\ &= (AB)C\\ &= AC,\end{aligned}$$

es decir, A es C.

Leibniz insistía en que había que demostrar los axiomas, por lo menos cuando no se reducen a identidades.

Leibniz se aplica a establecer formas silogísticas aristotélicas como teoremas, Leibniz supone existencia, incluso para los términos universales.

Define *imposible* o *nada* como lo que involucra contradicción y *ser* como lo posible o no contradictorio. Le resultan términos posibles y términos imposibles. Por lo tanto, no todo término existe o es posible. Se introdujo así un callejón sin salida. No podrá poner como principio que todo término general existe o es posible.

Leibniz transforma los juicios de predicación en juicios de existencia.

La proposición particular afirmativa, algún A es B, se traduce por: AB es. La proposición negativa, algún A no es B, se traduce, A(no B) es.

La universal negativa es la negación de la particular afirmativa, AB no es. La universal afirmativa es la negación de la particular negativa, A(no B) no es.

Ni Boole, ni Jevons acertaron el camino de Leibniz, que sí encontrará Mac Coll (p 350, n 4). Desde luego, es la de Leibniz la mejor traducción al álgebra. Es la utilizada, por ejemplo, sistemáticamente por Hilbert y Ackermann. Desafortunadamente ansiaba demostrar la subalternación y la conversión parcial de la lógica tradicional, lo cual no era posible en la traducción más cómoda. Aunque sigue encontrando relaciones interesantes, por ejemplo, "una cosa es negar la proposición, otra negar el predicado", sin embargo, las dificultades se multiplican (uno de los cuadernos de notas lleva el título *Dificultades lógicas*. p 353, n 2).

Couturat, p 354, resume diciendo: Si Leibniz hubiera estado menos apegado a la tradición escolástica, habría tenido menos respeto por modos de razonamiento erróneos y el álgebra de la lógica hubiera estado constituida doscientos años antes sobre bases sólidas y definitivas.

Según Couturat, p 354, el ensayo de 1686 contiene una idea capital, a saber, la analogía entre proposiciones categóricas y proposiciones hipotéticas, es decir, de conceptos y de proposiciones.

Leibniz establece un paralelismo entre el análisis de las nociones y el de las verdades. Definir una noción es resolverla en nociones simples. Demostrar una proposición es llevarla a proposiciones más simples, finalmente, a los axiomas. Es analizarla.

En una proposición categórica el sujeto contiene al predicado; en una proposición hipotética, el antecedente contiene al consecuente. La proposición hipotética, si A es B, C es D, se traduce: (A es B) es (C es D); o también (A contiene a B) contiene (C contiene a D).

El enunciado del propio Leibniz es así (p 355, n 2): cuando se dice A es B, y, A y B son proposiciones, se entiende que de A se sigue B. Cuando se dice que de A es B, se sigue que E es F, es lo mismo que decir A ser B es E ser F.

La equivalencia es explicada por Leibniz así (p 355, n 6): de A es B, se puede inferir, si L es A, L es B. Recíprocamente, de la hipotética, si L es A, L es

B, cualquiera sea L, se puede inferir, todo A es B. Así que, si C designa la afirmación L es A, y, D la afirmación L es B, entonces, la proposición categórica A es B, equivale a la hipotética C es D.

Así como la igualdad o identidad de dos conceptos equivale a dos inclusiones inversas, así mismo la equivalencia de dos proposiciones equivale a dos inferencias inversas.

La negación se aplica tanto a los conceptos como a las proposiciones. La proposición directa (primaria) A, equivale a la proposición reflexiva (secundaria) A es verdadera; así mismo, la proposición negada, no A, equivale a la secundaria, A es falsa.

De donde se sigue que la inferencia A es B, implica, no B es no A, es susceptible de dos interpretaciones: La primera, cuando A y B son conceptos; la segunda, cuando A y B son proposiciones, significa que la proposición hipotética, si A es verdadera, B es verdadera, implica, si B es falsa, A es falsa.

Igualmente, *nada* tiene dos sentidos diferentes: como concepto significa no ser; como proposición, lo falso o lo absurdo. *Unidad* como concepto representa *ente*, como proposición representa *verdadero* (p 357, n 4).

La tercera etapa de ensayos de Leibniz para realizar mediante cálculos sus concepciones lógicas es situada por los expertos hacia 1690.

Leibniz asume de nuevo la traducción algebraica que coincide con la actual de Hilbert y Ackermann (pp. 347-349. CAMPOS, Alberto. *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen I. Lógica y geometría griegas*. 2006. UNIBIBLOS. $xv + 694$ pp) para las proposiciones elementales de la lógica tradicional.

En la demostración de estas expresiones Couturat, p 358, hace notar la presencia de un postulado particularmente interesante. Dos factores cuyo producto es nulo, deben contener respectivamente dos términos contradictorios.

Lo más interesante es que nulo es dicho en el latín de Leibniz *non Ens*. Adelante aparecerá una observación de Bourbaki.

A Leibniz le siguen apareciendo dificultades que es oportuno tener en cuenta dado que también se hacen presentes en los actuales cursos de lógica.

'Todo A es B' no implica existencia para ningún elemento de A en la universal afirmativa. Al considerar la particular afirmativa 'Algún A es B' implica la existencia de algún A. Las proposiciones particulares implican existencia, no las universales. La traducción algebraica de la particular afirmativa es, en el latín de Leibniz 'AB est Ens', es decir, AB es, es decir, actualmente AB no es el conjunto vacío.

'Todo A es B' se traduce algebraicamente $A = AB$, o, A(no B) $= 0$ (Leibniz. Actualmente $A \cap B^c$, eq, $\emptyset$). Lo que sigue siendo válido aún cuando A no tenga elementos.

Leibniz encuentra lo que hay que hacer. Su razonamiento es así (se separa cada paso para clarividencia):

Para la conversión parcial:

Todo A es B, es decir, AB equivale al mismo A.
Ahora bien, A es (por hipótesis).
Luego AB es, es decir, algún A es B.
Pero puede igualmente decirse BA es, es decir, algún B es A.
Así, se tiene la conversión por accidente, es decir, de todo A es B, se sigue que algún B es A.

Para la subalternación:

$A = AB$, es decir, todo A es B.
$A \neq 0$, es decir, A no es vacío.
$AB \neq 0$, es decir, AB no es vacío, algún A es B.

Leibniz advierte: todos los términos que intervienen tienen (esse) ser (Ens). O también: siempre hay que asumir que el término tiene verdadero ser (Ens) (p 360, n 1, 2, 3).

Conviene tener en cuenta la observación de Couturat, p 361: la conversión parcial, o, la subalternación son inferencias inmediatas, al añadir la premisa de existencia, pasan a ser mediatas (dos premisas).

Leibniz compara la adición lógica y la adición aritmética. En aritmética, A designa cosas iguales pero diferentes; así $A + A = 2A$. En lógica, A designa cosas idénticas, así $A + A = A$.

La igualdad aritmética designa una igualdad de magnitud. La igualdad lógica designa la identidad absoluta (p 366).

En otros fragmentos de la misma época Leibniz se ocupa de propiedades de la igualdad y la desigualdad. Demuestra, especialmente, la equivalencia de las relaciones

$$A < B, \quad \text{y,} \quad A + B = A.$$

Se puede transformar una inclusión en una igualdad.

Enuncia un problema pertinente: Encontrar un conjunto de términos tales que todas sus combinaciones aditivas se reproduzcan sin producir nuevos términos “Al componer, nada nuevo puede hacerse” dice textualmente Leibniz (p 369, n 4).

Una solución es la siguiente (p 370).

- Sean A, B, C, D términos diferentes.
- Fórmense las combinaciones aditivas
  $A + B = M$, es decir, A y B están en M.
  $M + C = N$, es decir, M está en N.
  $N + D = P$, es decir, N está en P.
  Entonces
  $A + M = B + M = M$.
  $M + N = N$.
  $N + P = P$.

Leibniz vuelve a ocuparse del principio del silogismo como en los ensayos anteriores (p 370). Además, de reglas de composición entre igualdades y desigualdades (p 371) y de los recíprocos (p 372). En total, son 21 teoremas.

Se pueden componer y descomponer los predicados de un mismo sujeto; se pueden componer los sujetos de un mismo predicado, pero no se los puede descomponer. El antecedente de una inclusión no puede ser sino el predicado, el consecuente no puede ser sino el sujeto de la proposición que la traduce. Ahora bien. Solo desde el punto de vista de la comprehensión vale el principio de la lógica tradicional: el predicado está en el sujeto. Así que las propiedades de la inclusión consideradas por Leibniz valen solo desde el punto de vista de la comprehensión. Es de tener en cuenta el ejemplo (p 373, n 3) ya citado de Leibniz, con los conceptos: cuadrilátero, paralelogramo, rectángulo..

Curiosamente, Leibniz cree que vale la inclusión recíproca. Couturat (p 375) anota que la inclusión en extensión no tiene las mismas propiedades que la inclusión en comprehensión; ello ocasiona invalidez para algunos modos silogísticos, si no se toman las precauciones del caso.

Una vez más, p 376, Couturat explica que el haberse situado Leibniz en el enfoque de la comprehensión le impidió constituir el álgebra de la lógica, en alguna de las tres ocasiones en que lo intentó.

La substracción conduce a Leibniz a encontrar cero, o, nada; a poner enunciados como

'$A - A$ es nada'
'A(no A) es absurdo'

Antes había enunciado que "non Ens" es lo absurdo o imposible o contradictorio. Leibniz intenta establecer diferencias (p 379, n 1).

Leibniz considera la compensación, es decir, el resultado de añadir y restar el mismo término a una suma (pp 381-385).

Concluye Couturat, p 385, para que la sustracción sea posible sin restricción, se hace necesario que no haya elementos comunes. Así, pueden manejarse las adiciones lógicas como las adiciones aritméticas. Como tal restricción no estaba en las intenciones de Leibniz, se vio de nuevo envuelto en muchas dificultades, que, una vez más, lo inducen a abandonar la realización emprendida por tercera vez.

En resumen, Leibniz tuvo ideas poco más o menos claras de todo lo que fue con los siglos el material para la lógica: operaciones lógicas, traducción algebraica de las cuatro proposiciones elementales de la lógica tradicional, reglas de composición y descomposición, doble interpretación del cálculo lógico según los términos representen conceptos o proposiciones. Poseía aquello con lo que Boole y Schröder van a desarrollar la lógica en el siglo XIX, "en ciertos puntos estaba más avanzado que Boole".

¿Cómo es que no logró llevar más adelante su proyecto? Su enfoque desde la comprehensión fue un obstáculo insalvable. El sí vislumbró el desarrollo desde la extensión, pero nunca lo trabajó con la misma intensidad para darse cuenta de que no siempre había reciprocidad de un punto de vista respecto del otro. Puede resumirse la situación diciendo que a Leibniz fundamentalmente le hicieron falta el punto de vista de la extensión y las relaciones de de Morgan con la riqueza de relaciones que ellas hacen posible.

Cálculo geométrico

En diversas oportunidades epistolares Leibniz asevera que el álgebra no es la característica apropiada para la geometría y que hay un análisis más sublime para la geometría por el que puede obtenerse mucho de modo más hermoso y más breve (p 388, n 1).

En carta, 8 IX 1679, a Huygens, es particularmente explícito

Vistos los resultados que he introducido, no estoy aún contento con el álgebra, en cuanto no suministra los más cortos caminos, ni las más bellas construcciones en geometría... Creo que falta todavía un análisis propiamente geométrico lineal que exprese directamente *situación* como el álgebra expresa *magnitud* (p 389).

En otro pasaje añade:

No temo decir que hay que avanzar en álgebra más allá de lo que dejaron Viète y Descartes, como Viète y Descartes avanzaron más allá de los antiguos (p 389, n 2).

Todavía en otra carta, 6 I 1680:

He encontrado algunos elementos de una nueva característica, completamente diferente del álgebra, la que tendrá grandes ventajas para representar al espíritu exactamente y al natural, aunque sin figuras, todo lo que depende de la imaginación.

En alguna de sus explicaciones enuncia un principio importante en el pensamiento de Leibniz, el de la inteligibilidad universal.

Cuando se puede expresar perfectamente la definición de algo, se puede igualmente hallar todas las propiedades de ese algo.

O como explica Couturat: todas las propiedades de una cosa derivan lógicamente de su esencia y han de poderse deducir analíticamente de su definición.

Años más tarde, escribe, 28 IV 1693, a L'Hospital: Tengo incluso el proyecto de un análisis geométrico, totalmente nuevo, enteramente diferente del álgebra, que sirve para expresar la situación como el álgebra para expresar la magnitud (p 394).

A diversos corresponsales describe el mismo proyecto. Lo llama tanto característica de la situación, como cálculo de la situación, como análisis de la situación (p 395, n 3).

Hacia el fin de su vida, 1714, se lamenta de que su proyecto no haya entusiasmado a ninguno de sus corresponsales y de que no haya tenido con quien discutir detalles. Lo cual lo habría estimulado para ir adelante. La característica geométrica habría de partir del análisis de las demostraciones de Euclides e hizo lo relativo al de algunos pasajes de *Elementos.*

Entre los diversos cuadernos de apuntes, Couturat extrae algunas ideas maestras de Leibniz para el cálculo geométrico, de tres de ellos: *Mathesis generalis*, *Elementa nova*, *Matheseos universalis*, y sobre todo, *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, 1714, donde según Couturat, está el pensamiento definitivo de Leibniz acerca de la filosofía de la matemática.

Mediante álgebra las relaciones de situación se expresan por relaciones de magnitud. Cuando se dice que "$x^2 + y^2 = a^2$ es la ecuación de un círculo, hay que explicar que son x y y". El teorema acerca de triángulos semejantes, lleva la similitud (relación de forma) a proporcionalidad de lados (relación de magnitud).

La traducción de los problemas de geometría al álgebra, el reducir la situación a la magnitud, es frecuentemente forzada: hay que ver la manera de expresar el problema en el cálculo y después del cálculo hay que ver cómo sacar de ahí una construcción (p 405, n 1).

Leibniz adelanta una observación que será fundamental cuando la intuición comience a ser mirada con desconfianza en las demostraciones

> No son las figuras las que inspiran la demostración a los geómetras... La fuerza de la demostración es independiente de la figura trazada (p 401, n 2).

En enero de 1680, Leibniz quería dar una muestra de su lengua filosófica. Se vale de la geometría y puede verse allí un esbozo de geometría proyectiva.

> No mezclaré nada de cálculo, ni siquiera magnitudes, sumas, diferencias, composiciones de razones entre razones, potencias, o sumas [integrales, anota Couturat, p 404, n 2], ni otras cosas como es común en aritmética o en geometría, sino solo consideraré puntos, rectas, ángulos, intersecciones, contactos, movimientos y mostraré cómo expresiones cualesquiera son reducidas a lineales. El fruto será máximo, dado que de esta manera habrá raciocinios geométricos sumamente sutiles sin escribir, sin polvillo o arena para trazar figuras, sin cálculo, llevados a término por la sola fuerza de la imaginación y de la memoria (p 404-405, n 2).

Para el cálculo de la situación hay más precisiones

Como se hace en el cálculo de magnitudes que se da forma a las mismas al adicionarlas, multiplicarlas por un número, multiplicarlas por otras así como hacer las recíprocas de estas operaciones, así también obtenemos otras relaciones, progresiones, comparaciones de mayoría, minoría o igualdad. Se le da forma a lo extenso mediante secciones y movimientos, luego consideramos en ellas fuera de magnitudes, la similitud, la congruencia (donde concurren igualdad y similitud) coincidencia y, además, determinación (p 410, n 3).

Dos figuras que tienen la misma magnitud son iguales; si tienen la misma forma son semejantes. Dos objetos semejantes no pueden diferir sino por la magnitud. El estudio de la semejanza es el fundamento del análisis de la situación. Son semejantes las cosas que son indiscernibles. Si todas las cosas presentes fueran disminuidas en la misma proporción, nadie podría darse cuenta del cambio. Es el problema, observa Couturat, (p 412, n 1) de la indiscernibilidad de mundos semejantes.

Leibniz, más adelante, funda la geometría sobre la congruencia, dejando a un lado similitud y movimiento. En particular postula el axioma de congruencia, o de libre movilidad (que, independientemente de lo pensado por Leibniz, será un tema importante en la geometría del siglo XIX).

Leibniz define recta, plano, círculo, esfera mediante congruencias que no implican sino la noción de distancia entre dos puntos. El discurre sobre estas definiciones, criticando las de Euclides (pp 421-424).

El cálculo geométrico de Leibniz parece bien planteado desde el punto de vista axiomático, pero no logra las demostraciones requeridas (pp 424-427).

Couturat plantea la cuestión de por qué no logra Leibniz la realización de su cálculo geométrico.

El genuino análisis de situación que se proponía Leibniz solo era realizable mediante relaciones proyectivas y el filósofo y matemático trabajó con similitud y congruencia y finalmente solo con congruencia. Así no era posible realizar su idea maestra de crear un cálculo geométrico independiente del álgebra que él asociaba con la noción de magnitud. En la matemática universal, Leibniz separa cantidad de calidad, la magnitud y la forma, por lo tanto, la magnitud y la situación.

Hay grandes nombres para la geometría proyectiva, como el de Desargues en el siglo XVII, o los de Poncelet, Plücker, Steiner, Staudt en el siglo XIX. Parece ser que quienes mejor realizaron lo que Leibniz se proponía fue Staudt, por una parte, con su "geometría de la posición"; por otra, Grassmann, con su teoría de la extensión. Sin que, desde luego, ellos hayan sido inspirados por Leibniz, descubierto solamente hacia 1900.

De cualquier modo la expresión, *analysis situs*, es decir, análisis del lugar, o, análisis de la situación, perduró hasta bien entrado el siglo XX, cuando fue reemplazado por el de topología.

Bibliografía

1. BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques.* (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp.

2. CAMPOS, Alberto. *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen I. Lógica y geometría griegas.* 2006. UNIBIBLOS. $xv+694$ pp.

3. COUTURAT, Louis. *La logique de Leibniz d'après des documents inédits.* (1901. Paris. Alcan). 1961. Georg Olms Verlagsbuchandlung. Hildesheim. $xiv+608$ pp.

Cálculo de secuencias

En su trabajo de 1666, *De arte combinatoria*, Leibniz pone de manifiesto su facilidad para la invención. El cálculo de secuencias fue particularmente cultivado desde los pitagóricos. Hay antecesores más cercanos a Leibniz que prosiguen el mismo trabajo. Sin embargo, baste considerar en seguida el problema que Huygens propuso a Leibniz, para ver que no todo estaba resuelto y que era posible dar muestra de creatividad.

Considera Leibniz casos sencillos, como
Secuencias de enteros (a_n): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
Primeras diferencias $(b_n = a_{n+1} - a_n)$: 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
Segundas diferencias $(c_n = b_{n+1} - b_n)$: 0, ..., 0, ...

Secuencias de cuadrados: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
Primeras diferencias: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
Segundas diferencias: 2, 2, 2, ...
Terceras diferencias: 0, 0, 0, ...

Secuencias de cubos: 0, 1, 8, 27, 64, 125, ...
Primeras diferencias: 1, 7, 19, 37, 61, ...
Segundas diferencias: 6, 12, 18, 24, ...
Terceras diferencias: 6, 6, 6, ...
Cuartas diferencias: 0, 0, 0, ...

En 1672, en Paris, el físico y matemático holandés, Cristian Huygens (1629 - 1695) no solamente lo pone en contacto con obras matemáticas sino también con el problema: hallar la suma de la serie formada por los inversos de los números triangulares.

Para contestar el problema de Huygens, Leibniz considera la relación

$$b_1 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1},$$

donde $b_i = a_i - a_{i+1}$.

Para los números triangulares $b_i = \dfrac{1}{\frac{i(i+1)}{2}}$, es decir, $b_i = \dfrac{2}{i(i+1)}$.

Dado que $b_i = \dfrac{2}{i} - \dfrac{2}{i+1}$, se tendrá que

$$b_1 + \cdots + b_n = 2 - \frac{2}{n+1};$$

por lo que la serie tiene como suma 2.

Leibniz generaliza posteriormente su procedimiento en lo que llama el triángulo armónico, si se quiere, una continuación del llamado triángulo de Pascal (por haberle consagrado Blas Pascal (1623 - 1662) una memoria, pero el triángulo es conocido desde antes), así

Triángulo aritmético: Los términos interiores son suma de los que están debajo

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Triángulo armónico: Los términos interiores son diferencia de los que están a la izquierda

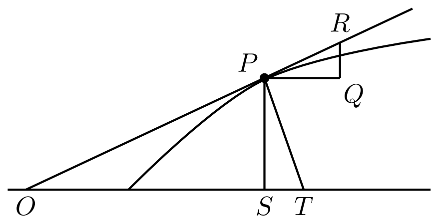
Por ejemplo: $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5-4}{20} = \dfrac{1}{20}$; $\quad \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{5-3}{60} = \dfrac{2}{60} = \dfrac{1}{30}$.

Leibniz logra resolver, mediante sus cadenas de secuencias, problemas de cuadraturas, es decir, de hallar el área situada bajo una curva: problemas típicos del cálculo infinitesimal.

Leibniz y Newton llegan por caminos muy diferentes a la creación del cálculo infinitesimal.

A los grandes principios de este cálculo llega Leibniz más expeditamente por el triángulo infinitesimal considerado por Pascal (a quien, en cierto modo, reprocha no haber sabido dar el paso que él sí da).

Se trata de un triángulo llamado característico, formado por indivisibles cuya hipotema es tangente a una curva en un punto $P = (x, y)$; triángulo que había sido empleado para algunas cuadraturas; la visión combinatoria de Leibniz le permite dar cuenta de problemas de diferenciación como de integración.



$PQ = dx$
$QR = dy$
OP es la tangente en P
PT es la normal en P
OS es la subtangente
ST es la subnormal

Por semejanza de los triángulos rectángulos PQR y PST $\dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{PS}{ST}$.

Por lo tanto $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{ST}$.

Por ejemplo, para el problema de determinar una curva cuya subnormal sea inversamente proporcional a la ordenada, es decir, tal que $ST = k/y$ se obtiene que $y^2\,dy = k\,dx$. Al integrar se obtiene una cúbica.

Cálculo infinitesimal y álgebra

El mayor éxito de Leibniz fue su creación del cálculo infinitesimal.

En 1682, Menken y Pfanz crean (hay fuentes en las que la creación se atribuye a Leibniz) la revista *Acta Eruditorum*. Fueron invitados a colaborar tanto Leibniz como Ehrenfried Walter von Tschirnhauss (1651 - 1708). En 1684, Leibniz publica un artículo de unas pocas páginas con un largo título cuya traducción, es

> Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas.

Ordinariamente se lo cita con las primeras palabras del título: *Nova methodus*.

El artículo entra inmediatamente en la explicación técnica y una vez dadas las reglas claras y algunos ejemplos, Leibniz hace comentarios interesantes. Por ejemplo:

> Del conocimiento de este *algoritmo*, así lo llamo, o de este cálculo, que llamo *diferencial*, pueden obtenerse todas las otras ecuaciones diferenciales por medio del álgebra común, y los máximos y los mínimos, así como pueden obtenerse las tangentes, de tal forma que no sea necesario separar las fracciones o los irracionales u otros vínculos, como, sin embargo, debía hacerse según los métodos hasta ahora publicados.

Leibniz reitera los temas anunciados en el título, luego entra en más explicaciones. Finaliza con aplicaciones. La última, es la solución de un problema propuesto por Beaune a Descartes, quien “intentó, pero no resolvió”.

La afirmación importante de Leibniz es la de que su algoritmo se hace por medio del álgebra.

En un segundo ensayo, *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos* “de una riqueza equiparable a las contenidas en *Nova methodus*”, escribe hacia la mitad del ensayo, tan corto como el anterior

> Me parece bien en este lugar, para decir algo interesante, abrir el camino de las cantidades trascendentes, ya que algunos problemas no son planos, ni sólidos, ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica.

Unos renglones más adelante dice que es necesario que las líneas trascendentes, como la cicloide, sean estudiadas en geometría; añade

> la geometría de Descartes que las excluía fue un error no menor que el de los antiguos.

Después de algunos detalles sobre las líneas introducidas, aserta

> Me parece que no añado en vano que la geometría con este método es llevada mucho más allá de los límites propuestos por Viète y Descartes.

Expone aquí, de nuevo, su empleo del triángulo característico para hacer una integración. Luego de algunas explicaciones acerca de la notación, hace historia del cálculo infinitesimal.

> Falta, para que no parezca que me atribuyo demasiado a mí mismo o que menosprecio a los demás, que diga en pocas palabras lo que en mi fórmula se debe especialmente a los insignes matemáticos de nuestro siglo en este género de geometría.

A continuación, Leibniz hace una lista de grandes nombres en la historia del cálculo infinitesimal comenzando por Arquímedes y terminando con Newton. Cosa curiosa no menciona a Pascal, incluso cuando escribe "... imaginé rápidamente el triángulo que en todas las curvas yo llamaba característico, cuyos lados son indivisibles (o, hablando más precisamente, infinitamente pequeños) o cantidades diferenciales".

En una carta, 1680, a Tschirnhauss, cuenta Leibniz cómo había cosechado el método de los indivisibles (originado en Cavalieri) en unas cartas de Pascal que Huygens le había prestado.

El mismo Leibniz escribió, 1714, *Historia y origen del cálculo diferencial*, donde él mismo aparece en tercera persona. Escribe la siguiente frase

> De un ejemplo dado por Dettonville [pseudónimo de Pascal] repentinamente saltó chispa hacia él [Leibniz], que por extraño que parezca, Pascal mismo no había percibido (Edwards, pp 239-240).

La chispa, explica Edwards, consistía en generalizar el procedimiento de Pascal, reemplazando el radio de un círculo por la normal a una curva cualquiera. Es decir, aplicar el método del triángulo característico no solo a un círculo sino a una curva cualquiera.

Empero, lo más atinente al título del capítulo, son las observaciones de Leibniz acerca de su empleo del álgebra. Dice

> ... no se por qué en esta tarea no me satisfacía el cálculo algebraico y ante las dificultades de las figuras me veía obligado a demostrar todavía muchas cosas que hubiera querido analizar, hasta que finalmente encontré el verdadero suplemento del álgebra para las trascendentes, es decir, mi cálculo de los infinitamente pequeños, o diferencial o sumatorio o de cuadraturas, y, si no me engaño, es lo que llamo acertadamente *análisis de los divisibles y de los infinitos*, que, una vez encontrado, todo lo que antes me causaba admiración en este campo me parece un juego y una broma.

Con estos pasajes de Leibniz, que refuerzan algunos ya anotados al recorrer el libro de Couturat, queda argumentado e ilustrado el siguiente pasaje de Bourbaki y el título del presente capítulo acerca de la parte matemática de la obra de Leibniz y de sus coetáneos. Menciona Bourbaki la algebraización progresiva del análisis infinitesimal, es decir, de su reducción a un cálculo operacional dotado de un sistema de notación uniforme de caracter algebraico. Como Leibniz lo indicó multitud de veces con nitidez perfecta, se trataba de hacer para el nuevo análisis lo que Viète había hecho para la teoría de ecuaciones y Descartes para la geometría.

Bibliografía

1. BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques.* (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp.

2. EDWARDS, C. H.. *The Historical Development of the Calculus.* 1979. Springer-Verlag. $xii + 351$ pp.

3. LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Análisis infinitesimal.* Estudio preliminar de Javier de Lorenzo. Traducción de Teresa Martín Santos. 1987. Tecnos. $lxxvii + 29$ pp.

4. ZALAMEA, Fernando. *Cálculo y arte combinatoria en Leibniz.* Seminario de historia de la matemática. 1997. II. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 11 pp.

Capítulo 4

Kant: ¿Cómo es posible la matemática pura?

... lo que consideramos el nuevo método del pensamiento, a saber, que solo conocemos a priori de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas.

[Kant. *Crítica de la razón pura*. B. XVIII]

Proyecto. Impulsada por la intención de derivar el quinto postulado de los otros principios asumidos por la construcción euclidiana, la evolución de la geometría ha llegado hasta Lambert, quien, en cierta medida, recomienza la investigación de Saccheri. Señal de que debe de producirse un cambio en la orientación de la investigación. Ese cambio se produjo y fue la obra de cinco geómetras: Schweikart, Taurinus, Gauss, Bolyai, Lobachevski.

Sin embargo, antes de pasar a describir tal capítulo del desarrollo de la geometría, es de alto interés, conocer la influencia que la geometría euclidiana tuvo sobre la estructuración del sistema del más reputado de los filósofos modernos: Immanuel Kant (1724 - 1804). Se ha dicho que Kant hace, en cierta manera, desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia, una justificación epistemológica de la obra de Euclides, confiriendo estado de derecho, o como se dice igualmente, carta de ciudadanía, a una situación de hecho.

Es también importante, desde el punto de vista matemático, conocer el fruto de dicha influencia y los cauces de ella, dado que, a su vez, las opiniones de Kant interfirieron en el desarrollo de la geometría durante el siglo XIX.

Está, pues, justificado el hecho de hacer un estudio, somero, de la filosofía de la matemática de Kant, en cuanto ella se apoya sobre *Elementos*, de Euclides.

Entre las diferentes filosofías de la matemática (ver capítulo 15) es la de Kant la que sirve de referencia, aunque sus puntos de vista se consideren superados, aquella respecto de la cual hay que tomar posición y alinderamientos.

¿Qué llevó a Kant a pensar su filosofía de la matemática?

Si ya las pequeñas empresas requieren una decisión bien probada, las de alto coturno, como la de Kant, tienen su fundamento en motivaciones profundas. Las de Kant eran de naturaleza ética. La ética se sostiene edificada sobre la metafísica. La obra de Kant tiene que ver primordialmente con la metafísica, es decir, etimológicamente hablando, con lo no físico, con lo que está más allá de la experiencia. También la matemática es un conocimiento independientemente de la experiencia, o como igualmente se dice, a priori. Por eso Kant asociaba con frecuencia a matemática y metafísica (con bastante frecuencia dice sencillamente filosofía). Ambas trabajan con conceptos. Son conocimientos a priori, del entendimiento puro o de la razón pura, que contribuyen a resolver un gran problema: ¿qué tanto sabemos a priori? ¿Cuál es la extensión de aquellos conocimientos para cuya obtención nos podemos pasar de la experiencia?

Durante sus estudios y una buena parte de su carrera universitaria, Kant se familiarizó con una cierta metafísica, la que era profesada por la escuela de los estudiosos de Leibniz (filósofo y matemático de primer orden), metafísica de la cual Kant se nutrió confiadamente, poco más o menos hasta 1770, cuando, como él mismo lo dice, Hume lo despertó de su sueño dogmático. En el parágrafo 5 de *Prolegómenos* escribe Kant.

> "¿Cómo es posible, decía Hume, que si me es dado un concepto, me pueda elevar sobre él, y pueda enlazar con él otro que no está en él contenido, y de tal manera como si éste perteneciera necesariamente a aquél? Solamente le experiencia puede poner en nuestras manos tales enlaces, y toda aquella supuesta necesidad, o, lo que es lo mismo, el supuesto conocimiento a priori, no es más que una larga costumbre de encontrar algo verdadero y, por eso, de considerar como objetiva la necesidad subjetiva".

Es posible que en ningún otro pasaje de *Prolegómenos* o de *Crítica de la razón pura* se haya tomado Kant el trabajo de compendiar en apretadas frases un pensamiento que lo había sacudido tan duro; de cualquier modo, en lo más profundo de la elaboración del pensamiento de Kant se deja ver el rastro de las dudas bien asentadas de Hume. Con los procedimientos propuestos en

Crítica de la razón pura, Kant se propone derruir le duda del filósofo inglés que tan cercana está al escepticismo, una tendencia que Kant aborrece; en particular, Kant rescata a la matemática del lugar de verdades no necesarias donde Hume la había colocado en 1739, *Tratado de la naturaleza humana*; es cierto que el mismo Hume le había restituido su carácter de verdad necesaria en 1748, *Ensayo sobre el entendimiento humano*.

Despertado de su sueño dogmático, Kant entró en una etapa de crítica de fondo. Encontró, entonces, que la situación de la metafísica era lamentable. En las primeras páginas del prólogo de la primera edición, 1781, de *Crítica de la razón pura*, Kant explica la marcha de sus pensamientos.

“La razón humana tiene el destino singular, en uno de sus campos de conocimiento, de hallarse acosada por cuestiones que no puede rechazar por ser planteadas por la misma naturaleza de la razón, pero a las que tampoco puede responder por sobrepasar todas sus facultades”.

Inicialmente, la razón echa mano de principios cuyo uso es inevitable en el curso de la experiencia, uso que se halla a la vez suficientemente justificado por esta misma experiencia. Al querer avanzar, “ya que las cuestiones nunca se agotan”, se ve obligada a recurrir a principios que sobrepasan todo posible uso empírico, no pueden ser contrastados porque están más allá de la experiencia. Ello da lugar a que cada quien alimente sus pretensiones respecto de la metafísica ya que si esta, en un tiempo, ejerció un dominio despótico, ahora no merezca sino indiferencia. Esta situación contrasta con la de las ciencias, como la física y la matemática, que mantienen su viejo prestigio del rigor. En el parágrafo 4 de *Prolegómenos*, escribe Kant:

“Mucho antes de que se empezase a interrogar metódicamente a la naturaleza, se interrogó simplemente a la razón aislada…”. “… pero las leyes de la naturaleza deben ser comúnmente investigadas con trabajo; y esta metafísica, nadó en la superficie, como la espuma…”.

¿Qué le pasó a la metafísica que en un principio iba adelante de las ciencias nombradas y actualmente esté muy detrás de ellas convertida en teatro de disputas sin término? En el prólogo a la segunda edición, 1787, de *Crítica de la razón pura*, como respondiendo a esta pregunta, Kant delinea el estado de la lógica, la matemática y la física y apunta algunas apreciaciones que han sido muy rememoradas y meditadas, y que si es el caso serán citadas en parte, más adelante, o si no en los complementos y ejercicios. La conclusión referente a la metafísica es la que sigue:

“La metafísica, conocimiento especulativo de la razón, completamente aislado, que se levanta enteramente por encima de lo que enseña la experiencia, con meros conceptos (no aplicándolos a la intuición, como hace la matemática), donde, por tanto, la razón ha de ser discípula de sí misma, no ha tenido hasta ahora la suerte de poder tomar el camino seguro de la ciencia. Y ello a pesar de ser más antigua que todas las demás y de que seguiría existiendo aunque estas desaparecieran totalmente... En la metafísica, la razón se atasca continuamente... incontables veces hay que volver atrás...". "La metafísica es un campo de batalla destinado al parecer a ejercitar las fuerzas propias en un combate donde ninguno de los contendientes ha logrado jamás conquistar el más pequeño terreno ni fundar sobre su victoria una posesión verdadera. No hay, pues, duda de que su modo de proceder ha consistido, hasta la fecha, en un mero andar a tientas y, lo que es peor, a base de simples conceptos" (BXV).

Así, pues, la física y la matemática son ciencias. No lo es la metafísica. Las cuestiones que parecían haber sido resueltas, de una vez por todas, por connotados pensadores vuelven a estar en litigio en la obra de filósofos posteriores. ¿Acaso el principio de causalidad no figuraba en Leibniz entre las verdades necesarias? ¿Cómo es que ahora Hume con argumentos a primera vista irrefutables, en todo caso muy sugestivos, pone la causalidad entre las cosas que se hacen por costumbre? La comparación, por otra parte, de la física y la matemática con la filosofía muestra una enorme brecha entre esta y aquellas. El haber de la metafísica se reduce a cero, sobre todo si un principio como el de causalidad, que sustenta toda la ciencia de la naturaleza, no ha podido ser de veras fundamentado filosóficamente. Hay que defender esas antiguas posiciones. Kant es el paladín. Fundamentará la física y la matemática, prez de la razón humana y garantía del poder de esta. Kant espera que *Crítica de la razón pura* logrará igualmente insertar a la metafísica en el seguro camino de la ciencia. Ciencia como *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de Newton; o como *Elementos*, de Euclides. La primera es la física, la segunda, la matemática. Kant que acepta gustoso entrar en la corriente de la filosofía de su época, la crítica, no hace ninguna de sus dos modelos sino que los acepta como están; precisamente porque su primera preocupación no es la filosofía de la física o de la matemática; el mismo Hume debió reconocer que la matemática es una ciencia de verdades necesarias, de juicios sintéticos a priori en la terminología de Kant; bastará mostrar cómo son estos posibles y cómo lo mismo sucede análogamente en la física. Lo que importa a Kant es lo que se pueda transponer de este estudio para la metafísica; por eso faltó a Kant la crítica de sus modelos; es una lástima que no la haya hecho; con sus capacidades de análisis habría encontrado cosas muy interesantes que le habrían quizá permitido adelantarse a su época en lugar de dedicarse a justificar el statu quo. De cualquier modo, el valor que Kant atribuye a esas dos obras maestras y el valor de ellas como programa para el trabajo que se propone emprender, consta en las citas que siguen.

En el parágrafo 4 de *Prolegómenos*, escribe Kant:

> Si fuera real la metafísica, que pretende ser ciencia, si se pudiera decir: aquí está la metafísica, no tenéis más que estudiarla… quedaría otra pregunta…: ¿cómo es posible la metafísica? ¿Y cómo debería proceder la razón para llegar a ella? Ahora bien, en este caso, la razón humana no ha sido tan feliz. No se puede presentar un solo libro, como se puede presentar el de Euclides, y decir: esta es la metafísica, aquí tenéis el objeto más noble de esta ciencia… *Prolegómenos* deben apoyarse en algo que se conozca ya como cierto, desde lo cual se pueda proceder con confianza y subir a la fuente, la cual no se conoce todavía, y cuyo descubrimiento, no solamente nos explicaría lo que deseásemos, sino que igualmente, nos manifestaría un contenido de muchos conocimientos que, todos ellos brotan de la misma fuente. Pero, sucede, por fortuna, que, aunque por el momento no podemos aceptar que la metafísica sea verdadera como ciencia, podemos, sin embargo, decir, con seguridad que existen, verdaderamente, ciertos puros conocimientos sintéticos a priori, a saber: la pura matemática y la pura ciencia natural; pues ambas contienen proposiciones que, en parte, son de certeza apodíctica por la mera razón, en parte, por la unanimidad general de la experiencia y, sin embargo, son generalmente reconocidas como independientes de la experiencia. Tenemos, pues, por lo menos, algunos indiscutibles conocimientos sintéticos a priori y no debemos preguntar si son posibles (puesto que son reales), sino solamente cómo son posibles, para poder deducir también, del principio de posibilidad de los conocimientos dados la posibilidad de todos los demás.

Kant hace avanzar el racionalismo. Ya no se trata solamente de que la razón puede conocer porque la matemática es un producto de la razón; mediante un análisis refinado Kant va a tratar de ver cómo la razón ha construido la matemática. Y luego la física. Se podrá inferir después cómo es una ciencia. Los resultados serán la piedra de toque para averiguar si la metafísica quiere ser ciencia cómo debe proceder para serlo. La suerte de la metafísica pende, y su autor está orgulloso del papel que le corresponde en ese drama, del análisis de Kant. Nuestra época es, de modo especial, dice él, la de la crítica. Kant se propone efectuar la crítica de la razón pura. Se trata de decidir la posibilidad o imposibilidad de una metafísica en general y de señalar tanto las fuentes como la extensión y límites de la misma. (AXII). En Platón, la matemática, si bien en el mundo inteligible, es apenas el primer peldaño para el conocimiento en ese mundo, previo al de la verdadera intelección. En Hegel, según se vio en el volumen I capítulo 9 referente al teorema de Pitágoras, la matemática ocupa un rango bien inferior al de la filosofía. En Kant, el papel de la matemática es preponderante. Hegel bosqueja una crítica asaz incompleta, desenfocada, de los procederes de los matemáticos. No hay crítica, ni en Platón, ni en Kant sino un intento, en Kant, de explicación de por qué resulta incontestable este tipo de conocimiento. Esta es la filosofía de la matemática de Kant. Obra de circunstancia, en cuanto no era la meta del filósofo de Königsberg forjar una filosofía de la matemática. Ante la situación, que molesta a Kant, de la metafísica donde cada constructor de sistemas edifica el suyo sobre las ruinas los precedentes, Kant admira la construcción de la matemática o la de la física; nadie contesta los teoremas de Euclides, ni las exposiciones de Newton; más bien son la base firme sobre la cual se continúa la inquisición de las leyes de la naturaleza. Kant desearía la misma suerte para la metafísica; previamente, empero, hay que emprender un análisis imprescindible. "Todos los metafísicos habrán de suspender, solemne y regularmente, su actividad, hasta tanto que hayan contestado suficientemente a la pregunta: ¿Cómo son posibles los conocimientos sintéticos a priori? En esta respuesta están las credenciales que deben presentar si han de ofrecernos algo en nombre de la razón pura". (*Prolegómenos*. 5).

Kant se colocó en la confluencia, por decirlo así, de las teorías del conocimiento de Leibniz y de Hume. En tal encrucijada, su gran preocupación es la de indagar si es posible que concuerden ciertos enfoques que le parecen adquisiciones aceptables de una y otra escuela. No se trata de una simple acomodación, sino de averiguar si un estudio más profundo permitía conciliar ciertos procesos de análisis o de síntesis puestos al descubierto por aquellas dos corrientes filosóficas. A pesar de la primacía que da Kant a la matemática en su teoría del conocimiento, la matemática es allí, apenas, un terreno de prueba, como para la mayoría de los filósofos que han tenido en cuenta la matemática al edificar sus sistemas. Así que algunas explicaciones de Kant no parecen tener mucho que ver con la matemática misma sino que están puestas en la filosofía de la matemática de Kant como para poder estudiar la matemática de tal manera que se pueda sacar provecho para el estudio de análogos problemas en filosofía. En otras palabras, la preocupación de Kant es la filosofía, no la matemática. En el capítulo 15, se subrayarán algunos desaciertos, llamados así desde el punto de vista de la matemática, a los que Kant fue conducido por la segunda intención que lo movía a elaborar su filosofía de la matemática.

La filosofía de la naturaleza de Newton está expuesta en un lenguaje deductivo calcado en *Elementos*. Ambas obras maestras son altamente científicas y permiten prever resultados. Ello motiva la insistencia de Kant en la validez objetiva, versión kantiana del problema de la relación entre matemática y realidad.

Las verdades de la geometría se cumplen exactamente en la realidad. ¿Cómo es esto posible? ¿Legisla el entendimiento sobre la naturaleza? La respuesta de Kant es uno de los rasgos más genuinos de su sistema. Conviene familiarizarse previamente con algunos de los términos más peculiares, relacionados con la filosofía de la matemática, en *Crítica de la razón pura*, única fuente que surte las abundantes citaciones que componen este capítulo, salvo comentarios o ilustraciones de *Prolegómenos*, que no figuran en *Crítica de la razón pura*.

Los grandes conceptos de la filosofía de la matemática de Kant

Los siguientes diez conceptos, dispuestos en pares contrapuestos, pueden permitir entender el pensamiento de Kant. Son ellos:

Analítico	A priori	Concepto	Espacio	Cosa en sí
Sintético	A posteriori	Intuición	Tiempo	Fenómeno

Los cuatro primeros se predican de los *juicios*, por lo cual conviene conocer lo que Kant entiende por estos.

Dice Kant (B141, B142): "Nunca ha llegado a satisfacerme la explicación que dan los lógicos acerca del juicio en general. Según ellos, éste consiste en la representación de una relación entre dos conceptos. No se indica en dicha explicación en qué consiste esa relación. Tal explicación solo conviene a los juicios categóricos, no a los hipotéticos y disyuntivos. Los disyuntivos no contienen una relación entre conceptos sino incluso entre juicios.

Kant indica la relación que constituye el juicio. La unidad subjetiva y la unidad objetiva de las representaciones dadas son puestas en relación por el juicio. Así que un juicio es una relación entre representaciones objetivamente válidas y que se distingue de la relación que guardan entre sí las mismas representaciones. Esta última solo poseería una validez subjetiva. 'Cuando sostengo un cuerpo siento la presión del peso', es diferente de, 'El mismo cuerpo es pesado'. Esta última proposición indica que las dos representaciones se hallan combinadas en el objeto, independientemente del estado del sujeto, no van simplemente unidas en la percepción.

Otras precisiones sobre los juicios se encuentran en B93, B94. El entendimiento es una facultad cognoscitiva no sensible. Si prescindimos de la sensibilidad no podemos tener intuición alguna. Como no hay otro modo de conocer, fuera de la intuición, que el conceptual, resulta que el conocimiento de todo entendimiento humano es conceptual, discursivo, no intuitivo. El entendimiento no puede utilizar los conceptos más que para formular juicios. Como ninguna representación que no sea intuición se refiere inmediatamente al objeto, jamás puede un concepto referirse inmediatamente a un objeto, sino a alguna otra representación de este último (sea tal representación una intuición o sea concepto también). El juicio es, pues, el conocimiento mediato de un objeto y, consiguientemente, representación de una representación del objeto. Podemos reducir todos los actos del entendimiento a juicios, de modo que el entendimiento puede representarse como una facultad de juzgar. Pensar es conocer mediante conceptos. El entendimiento es una facultad de pensar. Con estos preliminares puede presentarse la primera distinción.

Juicios analíticos y juicios sintéticos

En B10, B11 Kant la explica así:

"En todos los juicios en los que se piensa la relación entre un sujeto y un predicado, tal relación puede tener dos formas: o bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está (implícitamente) contenido en el concepto A, o bien B se halla completamente fuera del concepto A, aunque guarde con él alguna conexión. En el primer caso llamo al juicio *analítico*; en el segundo *sintético*. Los juicios analíticos (afirmativos) son, pues, aquellos en que se piensa el lazo entre predicado y sujeto mediante la identidad; aquellos en que se piensa el lazo sin identidad se llamarán sintéticos. Podríamos también denominar los primeros juicios explicativos, y extensivos los segundos, ya que aquellos no añaden nada al concepto del sujeto mediante el predicado, sino que simplemente lo descomponen en sus conceptos parciales, los cuales eran ya pensados en dicho concepto del sujeto (aunque de forma confusa). Por el contrario, los últimos añaden al concepto del sujeto un predicado que no era pensado en él ni podía extraerse de ninguna descomposición suya. Si digo, por ejemplo: 'Todos los cuerpos son extensos', tenemos un juicio analítico. En efecto, no tengo necesidad de ir más allá del concepto que ligo a *cuerpo* para encontrar la extensión como enlazada con él. Para hallar ese predicado, no necesito sino descomponer dicho concepto, es decir, adquirir conciencia de la multiplicidad que siempre pienso en él. Se trata, pues, de un juicio analítico. Por el contrario, si digo: 'Todos los cuerpos son pesados', el predicado constituye algo completamente distinto de lo que pienso en el simple concepto de cuerpo en general. Por consiguiente, de la adición de semejante predicado surge un juicio sintético".

En A8, Kant explicita su pensamiento de otra manera.

"Puedo reconocer de antemano el concepto de cuerpo analíticamente por medio de las propiedades de extensión, de impenetrabilidad, figura, etc., todas las cuales se piensan en dicho concepto. Pero ampliando ahora mi conocimiento y volviendo la mirada hacia la experiencia de la que había extraído este concepto de cuerpo, encuentro que el peso va siempre unido a las mencionadas propiedades. La experiencia, exterior al concepto de cuerpo, hace posible la síntesis del predicado *pesado* con el concepto de *cuerpo*".

Esta explicitación figura luego en B12. En B11, Kant hace la siguiente aseveración general:

"Los juicios de experiencia son todos sintéticos. Sería absurdo, dice Kant, fundar un juicio analítico en la experiencia, ya que para formularlo no tengo que salir de mi concepto. No me hace falta, pues, ningún testimonio de la experiencia. 'Un cuerpo es extenso' es una proposición que se sostiene a priori, no un juicio de experiencia, pues ya antes de recurrir a la experiencia tengo en el concepto de cuerpo todos los requisitos exigidos para el juicio. Solo de tal concepto puedo extraer el predicado, de acuerdo con el principio de contradicción, y, a la vez, solo él me hace adquirir conciencia de la necesidad del juicio, necesidad que jamás me enseñaría la experiencia" (B12).

A priori - a posteriori

Son nociones introducidas en B1, B2, B3, B4, B5, B6. No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. En el orden temporal, ningún conocimiento precede a la experiencia y todo conocimiento comienza con ella.

He aquí lo que Kant entiende por experiencia. La facultad de conocer es despertada mediante objetos que afectan a nuestros sentidos. Así se tienen representaciones de objetos. El entendimiento tiene capacidad para componer estas representaciones. Así se obtiene la materia bruta para las impresiones sensibles. En estas condiciones es posible un conocimiento de los objetos denominado experiencia. Para la noción de experiencia se requieren, entonces, estas cinco nociones: objetos, sentidos, representaciones, composición de representaciones por el entendimiento, impresiones sensibles.

Cuestión

¿Existen conocimientos independientes de la experiencia?

Considérese este ejemplo: alguien que socave los cimientos de su casa puede predecir que esta se caerá, no necesita para saberlo, la experiencia de la caída de su casa. Hay una regla, ella sí extraída de la experiencia, según la cual los cuerpos son pesados y se caen si se les quita el soporte. Gracias a esta regla puede anticipar lo que acontecería con su casa. En conclusión, aunque todo nuestro conocimiento empiece con la experiencia, no por eso procede todo él de la experiencia.

Kant llama conocimiento a priori al que es “absolutamente independiente de toda experiencia, no al que es independiente de esta o aquella experiencia”. Kant llama conocimiento a posteriori o empírico al que solo es posible mediante la experiencia. Pero, a la proposición ‘Todo cambio tiene su causa’ la llama *a priori no pura* dado que contiene el concepto de cambio que solo puede extraerse de la experiencia.

Kant plantea esta cuestión: ¿cómo distinguir un conocimiento a priori de un conocimiento empírico? Y la responde. Kant habla de dos criterios; en realidad, intervienen tres: necesidad, universalidad, no derivabilidad.

En primer lugar, la experiencia enseña que algo tiene estas u otras características, pero no que no pueda ser de otro modo. Una proposición necesaria es un juicio a priori. En segundo lugar, la experiencia no otorga universalidad a sus juicios; solamente una universalidad comparativa, como por inducción: de acuerdo con lo que hasta ahora se ha observado, no hay excepción. Esta universalidad empírica no es más que una arbitraria extensión de la validez: se pasa desde la validez en la mayoría de los casos hasta la validez en todos los casos, como ocurre en ‘Todos los cuerpos son pesados’. Por consiguiente, si se piensa un juicio con estricta universalidad, es decir, de modo que no admita ninguna posible excepción, dicho juicio no deriva de la experiencia, sino que es válido absolutamente a priori.

Necesidad y universalidad son los criterios de un conocimiento a priori. Necesidad y universalidad se hallan inseparablemente ligados entre sí, por conveniencia de la exposición se los presenta a veces separados, pero donde está el uno está el otro. Cada uno de estos criterios es por sí solo infalible.

Se diría que Kant plantea, luego, otra cuestión acerca de si existen tales juicios necesarios y estrictamente universales o juicios puros a priori. Para corroborar su respuesta afirmativa aduce el ejemplo: todas las proposiciones matemáticas son juicios puros a priori. Kant cita de nuevo, esta proposición: ‘Todo cambio ha de tener una causa’. Trata de mostrar por qué este ejemplo es pertinente, como si no estuviera seguro de ello, pues que no adujo razón alguna en cuanto a los juicios matemáticos. Hume deriva el concepto de causa de una repetida asociación entre lo cue ocurre y lo que precede y de la costumbre, es decir, de una necesidad meramente subjetiva, nacida de tal asociación, de enlazar representaciones. Kant no está de acuerdo. El concepto mismo de causa encierra con tal evidencia el concepto de necesidad de conexión con un efecto y el de estricta universalidad de la regla, que dicho concepto de causa desaparecería totalmente si se quisiera derivarlo como hacía Hume. Se observa que el argumento fuerte, aquí, es la no reducibilidad. En B3, había escrito que una proposición necesaria, o juicio a priori, que no deriva de otra que no sea válida, como proposición necesaria, es una proposición absolutamente a priori. La frase es un tanto obscura y no se la cita aquí sino por la mención de la derivabilidad aplicada a proposiciones. En 'Todo cambio tiene una causa', la derivación se refiere al concepto de causa. Este ejemplo, puede tener importancia para la física o la metafísica, pero no mucha para la filosofía de la matemática, dado que tampoco la tendrán las proposiciones absolutamente a priori.

Kant no suministra más ejemplos de existencia de juicios a priori; prefiere pasar a subrayar que tales juicios son indispensables para la experiencia misma. Según Kant, la certeza de la experiencia no estaría garantizada por reglas meramente empíricas, sino que requiere juicios a priori.

Pero, no solamente hay juicios a priori; hay también conceptos a priori. Tomar el concepto empírico de cuerpo; eliminar de él todo lo que tal concepto tiene de empírico: color, dureza o blandura, peso, impenetrabilidad. Hay algo que no puede eliminarse: el espacio que dicho cuerpo ocupaba. Igualmente, en el concepto empírico de un objeto cualquiera, corpóreo o incorpóreo, se pueden suprimir todas las propiedades conocidas por experiencia, salvo aquella mediante la cual se piensa tal objeto como substancia. Estas consideraciones son suficientes según Kant para establecer que espacio y substancia son conceptos a priori.

Antes de Kant, se usaba la nomenclatura: juicio analítico, juicio sintético, juicio a priori, juicio a posteriori. Los analíticos se consideraban igualmente a priori, los sintéticos eran a posteriori. Kant introduce los juicios sintéticos a priori; grosso modo, son como los analíticos en cuanto son a priori y, simultáneamente, como los sintéticos en cuanto son a posteriori. En el cuadro adjunto

	Analíticos	*Sintéticos*
A priori		
A posteriori		

la intersección de la primera línea y la primera columna, la segunda línea y la segunda columna, da la equivalencia dicha, enseñada por los seguidores de Leibniz, por ejemplo. Kant distingue los juicios analíticos o a priori, de los sintéticos a priori; no considera juicios analíticos a posteriori y sí los sintéticos a posteriori, distintos de los sintéticos a priori. Según Kant hay, pues, tres tipos de juicios, analíticos, sintéticos, sintéticos a priori, y centra el interés en la caracterización de los juicios sintéticos a priori.

'Todo lo que sucede tiene su causa' es un juicio sintético a priori para Kant. En este juicio, del concepto sujeto pueden desprenderse juicios analíticos; pero, el concepto predicado 'causa' se halla completamente fuera del concepto sujeto 'lo que sucede'; el concepto 'causa' no está contenido en la representación del concepto 'lo que sucede'. ¿Cómo es posible afirmar que el concepto de causa distinto del concepto de lo que sucede, puede predicarse de este y, más aun, de modo necesario? ¿En qué se apoya el entendimiento para enlazar, de manera necesaria, los dos conceptos? No en la experiencia, que apenas suministraría un mayor número de casos en los que se verifica la atribución, mientras que en el juicio examinado el predicado se liga con necesidad al sujeto. Así, pues, este es un juicio totalmente a priori entre conceptos que no se contienen el uno al otro.

Kant se aplica a mostrar que todos las ciencias teóricas de la razón contienen juicios sintéticos a priori como principios. (B14 - B18). *Los juicios matemáticos son todos sintéticos.* Pero además de ser sintéticos son a priori, ya que conllevan necesidad, cosa que no puede ser dada por la experiencia. En este punto, Kant restringe sus consideraciones a la matemática pura, ciencia de conocimientos puros a priori, es decir, a priori y sin pasar por la experiencia: independientes de la experiencia y obtenidos sin pasar por la experiencia.

La proposición $7 + 5 = 12$ no es analítica. El concepto de 12 no está todavía pensado en el de unión de 7 y 5. Se puede analizar el concepto de esa suma, no se encontrará en tal concepto el 12. Hay que ir más allá de esos conceptos y acudir a la intuición correspondiente a uno de los dos, los 5 dedos de la mano o 5 puntos, por ejemplo, e ir añadiendo sucesivamente al concepto de 7 las unidades del 5 dado en la intuición. De esta manera se ve surgir el número 12. Que 5 tenía que ser añadido a 7 ha sido pensado en el concepto de suma, $7 + 5$, pero no que tal suma fuera igual a 12. Ni en la representación de 7 ni en la de 5, ni en la correspondiente a la unión de ambos, se piensa el número 12. No se piensa el predicado, 12, en la representación del sujeto, 7 y 5. La proposición aritmética es siempre sintética. Lo cual se ve más claramente si se toman números mayores; por más que se examinen los conceptos de los números que se han de sumar, no se encontrará en ellos cuál es la suma. Hay que acudir a la intuición. En B205, vuelve sobre el mismo ejemplo. $7+5 = 12$

es una proposición sintética, pero no es universal sino singular. Kant la llama relación numérica o fórmula numérica.

En B16, Kant sienta el principio de que no es analítico ningún principio de la *geometría.* La proposición 'La línea recta es la más corta entre dos puntos' es sintética. El concepto de recta no contiene magnitud sino cualidad. El concepto 'la más corta' es añadido, ningún análisis hace posible extraerlo del concepto 'recta'. La síntesis de los conceptos es posible gracias únicamente a la intuición.

En el párrafo siguiente, Kant parece echar pie atrás, al decir que principios como: $a = a$ (el todo es igual a sí mismo), $a + b$ es mayor que a (el todo es mayor que la parte) son proposiciones analíticas.

La ciencia natural pura, esto es, la *física*, contiene juicios sintéticos a priori como principios. Ejemplos: 'En toda transmisión de movimiento, acción y reacción serán siempre iguales'. 'En todas las modificaciones del mundo corpóreo permanece invariable la cantidad de materia'. Según Kant, en el concepto de materia no se piensa la permanencia, sino la presencia en el espacio que llena; lo cual sobrepasa el concepto de materia y le añade a priori algo que no era pensado en dicho concepto. La proposición es sintética y a priori, concluye Kant. Luego añade que lo mismo ocurre en el resto de las proposiciones pertenecientes a la parte pura de la ciencia natural.

Y la disciplina que, en realidad interesa a Kant, la *metafísica*, ¿contiene conocimientos a priori? No se la puede considerar como ciencia sino tentativamente, ese es el propósito de *Crítica de la razón pura*, pero, si se la considera como ciencia debe haber en ella conocimientos a priori. La metafísica no consiste simplemente en el análisis de ciertos conceptos forjados a priori, sino, además, en los intentos de ampliar el conocimiento a priori; para ello hay que añadir a los conceptos utilizados algo que no estaba en ellos; lo cual no es posible sino mediante juicios sintéticos a priori; así, pues, según su finalidad, en metafísica no importan sino los juicios sintéticos a priori. Un ejemplo: 'El mundo ha de tener un primer comienzo'.

Concepto - intuición

Nota. Mediante la letra A seguida de cifras romanas o arábigas se indica la paginación de la primera edición de 1781. Mediante la letra B, la de la segunda, 1787. En adelante se anteponen estas letras y cifras a un párrafo para indicar que el texto de Kant es citado literalmente, es como poner comillas al texto que sigue a tales letras y cifras.

B33. La *intuición* es el modo por medio del cual el conocimiento se refiere de manera inmediata a los objetos. Tal intuición tiene lugar en la medida en que el objeto nos es dado. A los seres humanos, un objeto nos es dado si afecta de alguna manera nuestro psiquismo. El resultado de tal afectar es una representación. La capacidad de tener representaciones, o también, la receptividad de tales representaciones se llama *sensibilidad*. Los objetos nos son dados mediante la sensibilidad. La sensibilidad es la única que suministra intuiciones.

Frente a la sensibilidad hay que considerar el *entendimiento*. Por medio del entendimiento, los objetos son pensados. El entendimiento produce *conceptos*. Todo pensar tiene que hacer referencia a intuiciones, por tanto, a la sensibilidad.

B34. El efecto que produce sobre la capacidad de representación un objeto por el que somos afectados se llama *sensación*. La intuición que se refiere al objeto por medio de una sensación se llama empírica. Las representaciones en las que no se encuentra nada perteneciente a la sensación se llaman puras. La forma pura de las intuiciones sensibles se hallará a priori en el psiquismo. Esta forma pura de la sensibilidad se llamará igualmente *intuición pura*.

B35. Al apartar de la representación de un cuerpo lo que el entendimiento piensa de él (substancia, fuerza, divisibilidad, etc.), y al apartar igualmente lo que en dicha representación pertenece a la sensación (impenetrabilidad, dureza, color, etc.) me queda todavía algo de esa intuición empírica, a saber, la extensión y la figura. Ambas pertenecen a la intuición pura y tienen lugar en el psiquismo como mera forma de la sensibilidad, incluso prescindiendo del objeto real de los sentidos o de la sensación. Kant llama estética a la ciencia de los principios de la sensibilidad y la llama trascendental en cuanto dicha ciencia es a priori.

B65. Partiendo de puros conceptos, solo se obtienen conocimientos analíticos, no sintéticos.

B74. La intuición y los conceptos constituyen los elementos de todo conocimiento humano, de modo que ni los conceptos pueden suministrar conocimiento prescindiendo de una intuición que les corresponda de alguna forma, ni tampoco puede hacerlo la intuición sin conceptos. Ambos elementos son, o bien puros, o bien empíricos. Son empíricos si contienen una sensación, la cual presupone la presencia efectiva del objeto. Son puros si no hay en la representación mezcla alguna de sensación. Llámese a la sensación, materia del conocimiento sensible. La intuición pura únicamente contiene la forma bajo la cual intuimos algo. El concepto puro contiene únicamente la forma bajo la cual es pensado un objeto. Los conceptos puros y las intuiciones puras solo son posibles a priori. Los conceptos empíricos y las intuiciones empíricas son posibles únicamente a posteriori.

La intuición humana solo puede ser sensible, es decir, no contiene sino el modo según el cual el ser humano es afectado por los objetos. El entendimiento es la capacidad de pensar el objeto de la intuición. Sin sensibilidad ningún objeto sería dado, sin entendimiento, ninguno sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin conceptos son ciegas. Por ello es tan necesario hacer sensibles los conceptos, es decir, añadirles el objeto en la intuición, como hacer inteligibles las intuiciones, es decir, someterlas a conceptos. El entendimiento nada puede intuir, los sentidos nada pueden pensar. El conocimiento únicamente puede surgir de la unión de ambos (B75).

Espacio - tiempo

B37. Sentido externo e interno son propiedades de nuestro psiquismo. Por medio del sentido externo se representan objetos como exteriores a nosotros y como estando todos en el espacio, dentro del cual son determinadas o determinables su figura, su magnitud y sus relaciones mutuas. Mediante el sentido interno el psiquismo se intuye a sí mismo. Todo cuanto pertenece a determinaciones internas es representado en relaciones de tiempo. El espacio no puede ser intuido como algo interno, ni el tiempo como algo externo.

¿Qué son espacio y tiempo? Son ante todo representaciones, cuyas propiedades Kant va encontrando con mucha dificultad y expresando en un lenguaje bastante enredado.

No podemos representarnos la falta de espacio, sí podemos pensar que no haya objetos en el espacio. Kant infiere de este argumento que el espacio es una condición de posibilidad de los fenómenos y que no depende de los fenómenos, Kant se permite ir mucho más allá, sin añadir más razones. El espacio es una representación a priori y una representación necesaria que sirve de base a todas las intuiciones externas y en la que se basan necesariamente todos los fenómenos externos (B39).

La representación de espacio no puede extraerse de experiencias externas, más bien resulta necesario suponerla para toda experiencia externa (B38).

A25. El espacio no es un concepto discursivo, un concepto universal de relaciones entre cosas, sino una intuición pura. En efecto, solo podemos representarnos un espacio único. Se habla de espacios; pero estos no son sino partes del mismo espacio, ni son anteriores a él como si fuesen sus componentes. En una corta frase: todos los espacios son simultáneos; esto apuntala el argumento de que el espacio es una representación a priori.

B40. Ningún concepto puede pensarse como continente de una multitud de representaciones. Así es, no obstante, como se piensa el espacio, ya que todas sus partes coexisten ad infinitum. Por tanto, el espacio es una intuición a priori y no es un concepto.

De lo dicho, Kant extrae algunas consecuencias.

B42. El espacio no representa ninguna propiedad de las cosas, ni en sí mismas ni en sus relaciones mutuas, es decir, ninguna propiedad inherente a los objetos mismos y capaz de subsistir una vez hecha abstracción de todas las condiciones subjetivas de la intuición. Pues ninguna determinación, sea absoluta o relativa, puede ser intuida con anterioridad a la existencia de las cosas a las que corresponda ni, por tanto, ser intuida a priori.

B42. B43. El espacio no es más que la forma de todos los fenómenos de los sentidos externos, es decir, la condición subjetiva de la sensibilidad. Solo bajo esta condición nos es posible la intuición externa. Solo podemos, pues, hablar del espacio, del ser extenso, etc. desde el punto de vista humano. Si nos desprendemos de la única condición subjetiva bajo la cual podemos recibir la intuición externa, a saber, que seamos afectados por los objetos externos, nada significa la representación del espacio. Este predicado solo es atribuido a las cosas en la medida en que estas se manifiestan a nosotros, es decir, en la medida en que son objetos de la sensibilidad. El espacio abarca todas las cosas que se nos puedan manifestar exteriormente, pero no todas las cosas en sí mismas, sean intuidas o no, y sea quien sea el que las intuya. En efecto, no podemos juzgar si las intuiciones de otros seres pensantes están sometidas a las mismas condiciones que limitan nuestra intuición y que tienen para nosotros validez universal.

B46. No se pueden pensar los fenómenos sin el tiempo. Sí se puede pensar, en cambio, el tiempo sin los fenómenos. El tiempo, pues, es a priori. Solo en él es posible la realidad de los fenómenos. El tiempo es una representación necesaria que sirve de base a todas las intuiciones.

Tanto la coexistencia como la sucesión no serían siquiera percibidas si la representación del tiempo no les sirviera de base a priori. El tiempo no puede, pues, ser extraído de la experiencia.

B47. El tiempo es unidimensional. Tiempos diferentes no son simultáneos sino sucesivos.

El tiempo no es un concepto discursivo sino una forma pura de la intuición sensible.

B48. La originaria representación *tiempo* debe estar dada como ilimitada.

Kant habla de la infinitud del tiempo, pero parece querer aminorar el impacto de dicha expresión. Lo mismo sucede con la infinitud del espacio.

B49. El tiempo no es algo que exista por sí mismo o que inhiera en las cosas como determinación objetiva, es decir, algo que subsista una vez hecha abstracción de todas las condiciones subjetivas de su intuición. El tiempo no es más que la condición subjetiva bajo la cual pueden tener lugar en nosotros todas las intuiciones.

B50. El tiempo no es otra cosa que la forma del sentido interno, esto es, del intuirnos a nosotros mismos y nuestro estado interno. El tiempo no es una determinación de fenómenos externos. No se refiere ni a una figura, ni a una posición, etc., sino que determina la relación entre las representaciones existentes en nuestro estado interior.

El tiempo es una condición formal a priori de todos los fenómenos. El espacio, en cuanto forma pura de toda intuición externa, se refiere solo, como condición a priori, a los fenómenos externos. El tiempo constituye una condición a priori de todos los fenómenos en general, a saber, la condición inmediata de los internos y, por ello mismo, también la condición mediata de los externos. Todos los fenómenos externos se hallan en el espacio y están determinados a priori según las relaciones espaciales; todos los fenómenos, es decir, todos los objetos de los sentidos, se hallan en el tiempo y poseen necesariamente relaciones temporales.

B51. El tiempo únicamente posee validez objetiva en relación con los fenómenos, pero deja de ser objetivo desde el momento en que hacemos abstracción de la sensibilidad de nuestra intuición, es decir, del modo de representación que nos es propio, y hablamos de cosas en general. El tiempo no es más que una condición subjetiva de nuestra humana intuición y en sí mismo, fuera del sujeto, no es nada. Sin embargo, es necesariamente objetivo en relación con todos los fenómenos y, por tanto, en relación con todas las cosas que pueden presentarse en nuestra experiencia. No podemos decir que todas las cosas estén en el tiempo, ya que el concepto de cosas en general prescinde de cómo sean intuidas.

B56. En las últimas líneas de B55 y en B56, Kant escribe afirmaciones que ponen de manifiesto un aspecto de su filosofía de la matemática, a saber, el espacio del geómetra, ya que en todo no hay más que un espacio, es el mismo espacio del físico y del filósofo; es más, es el puente para la validez objetiva que tanto preocupa a Kant.

"Tiempo y espacio, dice Kant, son dos fuentes de conocimiento de las que pueden surgir a priori diferentes conocimientos sintéticos, como lo muestra de modo particularmente brillante la matemática pura en lo referente al conocimiento del espacio y sus relaciones. Tomados juntamente, espacio y tiempo son formas puras de toda intuición sensible, gracias a lo cual hacen posibles las proposiciones sintéticas a priori. Al ser simples condiciones de la sensibilidad, estas fuentes de conocimiento a priori se fijan sus propios límites refiriéndose a objetos considerados tan solo en cuanto fenómenos, pero no representan cosas en sí mismas. Únicamente los fenómenos constituyen el terreno de su validez. Si se va más allá de este terreno, dichas fuentes dejan de usarse objetivamente".

Está claramente afirmada, además, la limitación al campo de la experiencia posible. Y Kant cree firmemente haber encontrado la explicación, hasta tal punto que puede criticar a los sostenedores de la realidad absoluta del espacio y del tiempo. Hay dos modalidades para dicha opinión: la realidad absoluta del espacio y del tiempo es subsistente, "partido que suelen tomar los que investigan matemáticamente la naturaleza", frase con la cual Kant bien puede aludir a Newton y otros físicos, como Euler, que continuaron las investigaciones de Newton y quienes abrazaron la teoría recogida por Newton de sus contemporáneos para integrarla en su sistema del mundo; los partidarios de esta opinión, según Kant, "se ven obligados a admitir dos no-seres eternos y subsistentes por sí mismos (espacio y tiempo) que existen (aunque no exista nada real) solo para contener en sí todo lo real". El otro modo de dicha teoría consiste en considerar la realidad absoluta del espacio y del tiempo como inherente, "partido que toman algunos metafísicos que estudian la naturaleza", frase que puede convenir a Leibniz, y consideran espacio y tiempo como relaciones entre fenómenos coexistentes o sucesivos", frase que también puede convenir a Leibniz, "como relaciones abstraídas de la experiencia"; los sostenedores de esta opinión, según Kant, "tienen que negar la validez, o al menos la certeza apodíctica, a las doctrinas matemáticas a priori respecto de las cosas reales, por ejemplo, en el espacio", frase que de seguro no convendría a Leibniz. La razón de Kant es que al ser abstraídas de la naturaleza, las relaciones serían a posteriori y "la certeza apodíctica no se da a posteriori"; Kant estira un poco más dicha opinión:

"Los conceptos a priori de espacio y tiempo constituyen simples productos de la imaginación, productos cuya fuente ha de buscarse efectivamente en la experiencia; a partir de las relaciones abstraídas de esta última, la imaginación ha elaborado algo que, si bien contiene lo universal de esas relaciones, no puede existir sin las restricciones que la naturaleza ha ligado a ellas".

Podrá verse en el capítulo 15 que la matemática de los albores del siglo XXI está de acuerdo con esta visión de la matemática que rechaza Kant y no con la que propone el filósofo, quien, una vez más, reformula su argumento: "No pueden dar razón de la posibilidad de conocimientos matemáticos a priori, ya que carecen de una intuición a priori verdadera y objetivamente válida, ni hacer concordar de forma necesaria las proposiciones empíricas y las afirmaciones matemáticas". Que la intuición a priori y la concordancia con la realidad no sean indispensables a la visión actual de la matemática, es lo que parece mostrar que la filosofía de la matemática que había forjado Kant tenía más que ver con los problemas de la metafísica que con la explicación racional de la matemática como ciencia.

Cosas en sí - cosas que conocemos

BXXI. *Nota.* El análisis del metafísico separa el conocimiento puro a priori en dos elementos muy heterogéneos: el de las cosas en cuanto fenómenos y el de las cosas en sí mismas.

BXXVII. *Nota.* El conocimiento de un objeto implica el poder de demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad; sea a priori, mediante la razón. Puedo, en cambio, pensar lo que quiera, siempre que no me contradiga, es decir, siempre que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda responder de si, en el conjunto de todas las posibilidades, le corresponde o no un objeto.

Con estas dos notas, que distinguen conocer y pensar, se entiende la recopilación de resultados hecha por el mismo Kant en el prólogo de la segunda edición.

BXXVI. En la parte analítica de *Crítica de la razón pura* se demuestra: que el espacio y el tiempo son meras formas de la intuición sensible, es decir, simples condiciones de la existencia de las cosas en cuanto fenómenos; que tampoco poseemos conceptos del entendimiento ni, por tanto, elementos para conocer las cosas sino en la medida en que puede darse la intuición correspondiente a tales conceptos; que, en consecuencia, no podemos conocer un objeto como cosa en sí misma, sino en cuanto objeto de la intuición empírica, es decir, en cuanto fenómeno. De ello se deduce que todo posible conocimiento especulativo de la razón se halla limitado a los simples objetos de la experiencia. No obstante, hay que dejar siempre a salvo que, aunque no podemos conocer esos objetos como cosas en sí mismas, sí ha de sernos posible, al menos, pensarlos.

Este compendio, no solamente subraya por la mano misma de su autor grandes líneas de *Crítica de la razón pura* sino que, de pasada, permite comprehender el sentido kantiano de cosa en sí y de fenómeno. Apenas se menciona, para que se tenga bien en cuenta lo fundamental de esta distinción; gracias a ella, el sistema kantiano puede aceptar el determinismo en el mundo de los fenómenos y la ausencia del mismo en el mundo de las cosas en sí, para una misma situación; de lo cual se valdrá Kant en la parte concerniente a la fundamentación de la ética en su sistema. Kant sostiene la realidad empírica del espacio y del tiempo en el mundo de los fenómenos y la que él llama idealidad trascendental de los mismos en el mundo de las cosas en sí.

B45. El concepto trascendental de fenómeno en el espacio, recuerda que nada de cuanto intuimos en el espacio constituye una cosa en sí y que tampoco él mismo es una forma de las cosas, una forma que les pertenezca como propia, sino que los objetos en sí nos son desconocidos y que lo que nosotros llamamos objetos exteriores no son otra cosa que simples representaciones de nuestra sensibilidad, cuya forma es el espacio y cuyo verdadero correlato, la cosa en sí, no nos es, ni puede sernos, conocido por medio de tales representaciones.

B52. Negamos al tiempo toda pretensión de realidad absoluta, es decir, que pertenezca a las cosas como condición o propiedad de las mismas, independientemente de su referencia a la forma de nuestra intuición sensible. Las propiedades pertenecientes a las cosas en sí nunca pueden sernos dadas a través de los sentidos. En ello consiste la idealidad trascendental del tiempo. Según esta idealidad, el tiempo no es nada prescindiendo de las condiciones subjetivas de la intuición sensible y no puede ser atribuido a los objetos en sí mismos, independientemente de su relación con nuestra intuición, ni en calidad de subsistente, ni en la de inherente.

B59. Hemos pretendido afirmar que todas nuestras intuiciones no son más que una representación fenoménica; que las cosas que intuimos no son en sí mismas tal como las intuimos, ni sus relaciones tienen en sí mismas el carácter con que se nos manifiestan; que si suprimiéramos nuestro sujeto o simplemente el carácter objetivo de los sentidos en general, todo el carácter de los objetos, todas sus relaciones espaciales y temporales, incluso el espacio y el tiempo mismo, desaparecerían. Como fenómenos, no pueden existir en sí mismos, sino solo en nosotros. Permanece para nosotros absolutamente desconocido qué sean los objetos en sí, independientemente de toda esa receptividad de nuestra sensibilidad. Solo conocemos nuestro modo de percibirlos, modo que nos es peculiar y que, si bien ha de convenir a todos los humanos, no necesariamente ha de convenir a todos los seres. Nosotros únicamente nos ocupamos de nuestro modo de percibir. El espacio y el tiempo son sus formas puras; la sensación es su materia. Las primeras podemos conocerlas solo a priori, es decir, previamente a toda percepción efectiva, y por eso se llaman intuiciones puras. A la segunda se debe, en cambio, lo que en nuestro conocimiento se llama a posteriori, es decir, intuición empírica. El más claro conocimiento del fenómeno de los objetos, que es lo único que de ellos nos es dado, jamás nos haría conocer en qué consisten en sí mismos (B60). En ningún lugar del mundo de los sentidos, ni siquiera en las más profundas investigaciones de sus objetos, nos ocupamos más que de fenómenos (B63).

¿Cómo es posible la matemática pura?

Para responder a la pregunta fundamental de la búsqueda emprendida por Kant: ¿Cómo es posible la metafísica como ciencia? tiene que responder a la pregunta: ¿Cómo es una ciencia? Por ejemplo, ¿cómo es ciencia la matemática? De la Introducción, B14 -B18, queda claro que la matemática está formada por juicios sintéticos a priori. Para Kant, la pregunta formulada equivale a esta otra: ¿Cómo son posibles los juicios sintéticos a priori?

Por ejemplo, ¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori en geometría? Kant piensa la geometría como una ciencia que establece las propiedades del espacio sintéticamente y a priori. Las proposiciones de la geometria son apodícticas, lo cual quiere decir para Kant, que van acompañadas de la conciencia de su necesidad. Podría criticarse a Kant el hecho de dar criterios de tipo psicológico, como lo es cualquier llamado a la conciencia. La conciencia de la necesidad es equiparable al criterio de evidencia cartesiano.

En tales proposiciones geométricas se va más allá de los conceptos, puesto que son proposiciones sintéticas, no analíticas (Ver B65). Pero no son tampoco proposiciones empíricas o derivadas de ellas, porque las proposiciones geométricas tienen universalidad y necesidad, las cuales no son producidas por la experiencia (Ver B64). Kant saca la consecuencia de que para que tal conocimiento sea posible la representación del espacio tiene que ser una intuición, porque el juicio no es analítico, y, tiene que ser a priori, para que haya universalidad y necesidad. Estos requisitos forman los datos de un problema que Kant formula así. Y del que da inmediatamente la solución.

B41. ¿Cómo puede hallarse en nuestro psiquismo una intuición externa que precede a los mismos objetos y en la que podemos determinar a priori el concepto de esos objetos? Evidentemente, solo en la medida en que tal intuición se establezca en el sujeto como propiedad formal de este de ser afectado por objetos y de recibir, por este medio, una representación inmediata de los mismos, es decir, una intuición. La respuesta puede parafrasearse de este modo: a condición de que la forma de la sensibilidad, esto es, espacio y tiempo, sea la intuición que precede a toda intuición. Tal es la solución, tan buscada por Kant, la que en *Prolegómenos* es presentada, quizás, más dramáticamente; transcribo únicamente la formulación de la pregunta y la respuesta.

Prolegómenos. 8. ¿Cómo es posible contemplar algo a priori?
La intuición es una representación en tanto que puede depender de la presencia inmediata del objeto.
Según esto, parece imposible intuir originariamente a priori, porque, entonces, la intuición debería verificarse sin la presencia previa o actual de un objeto al cual se relaciona, y así, no podría ser intuición.

¿Cómo puede la intuición de los objetos, preceder a los objetos mismos? Solamente de un modo es posible que mi intuición preceda a la realidad del objeto y se efectúe como conocimiento a priori, a saber, si no contiene otra cosa que la forma de la sensibilidad que precede en mi sujeto a toda impresión real por medio de la cual soy afectado por el objeto.

De esta manera, para Kant, los juicios sintéticos a priori en geometría son posibles porque espacio y tiempo son formas a priori de la sensibilidad.

Kant advierte que su explicación es la única que hace comprensible la posibilidad de la geometría como juicio sintético a priori. En *Crítica de la razón* *pura*, B64-B65, vuelve sobre estas consideraciones y las complementa con más detalles.

B64. B65. De dónde sacamos semejantes proposiciones y en qué se apoya nuestro entendimiento para llegar a tales verdades absolutamente necesarias y universalmente válidas. Los conceptos empíricos, al igual que aquello en que se basan, la intuición empírica, no pueden dar lugar a proposición sintética alguna, a no ser que sea, a su vez, meramente empírica, es decir, una proposición de la experiencia, una proposición que, consiguientemente, jamás puede contener ni necesidad ni absoluta universalidad, propiedades que constituyen, sin embargo, lo característico de las proposiciones geométricas. El primero y único medio sería llegar a tales conocimientos mediante simples conceptos o mediante intuiciones a priori. Ahora bien, es claro que, partiendo de puros conceptos, solo se obtienen conocimientos analíticos, no sintéticos. Y los requeridos son los sintéticos.

Descartados los conceptos, Kant se dedica a mostrar que se trata de intuiciones a priori. Aduce dos ejemplos: "Dos líneas rectas no pueden encerrar espacio alguno", "Tres líneas rectas permiten construir una figura". Kant dice que al tratar de deducir tales proposiciones a partir de los conceptos componentes, ello no es posible; Kant tiene razón, dado que tales proposiciones son peculiares de la geometría euclidiana; pero esto mismo invalida su conclusión de que hay que acudir a la intuición y de que así procede la geometría. Cuando no había sino una geometría, como en tiempos de Kant, algunas consecuencias podían extraerse intuitivamente. Cuando hay varias geometrías, como es el caso en la geometría actual, el rigor es de rigor; en principio, en una presentación cuidadosa, nada del texto explícito puede dejarse a la intuición. En *Prolegómenos*, Kant da las mismas explicaciones pero abunda en más ilustraciones. He aquí algunas del parágrafo 12.

El geómetra que hace una prueba de igualdad de dos figuras, superponiéndolas, efectúa una proposición sintética relativa a una intuición inmediata.

Una proposición, sin intuición pura a priori no es apodícticamente cierta. Tiene solo una certeza empírica; es como si se dijera: "Se aprecia siempre así y esto solamente hasta el punto al cual se ha extendido nuestra observación". Por esta aseveración se puede apreciar la importancia que tiene en la teoría kantiana la intuición a priori. No hay que olvidar que es el a priori el que sustenta la universalidad y la necesidad.

Que todo el espacio tiene tres dimensiones y, que, en absoluto no puede el espacio tener más, será construido sobre el juicio de que sobre un punto no pueden trazarse más de tres líneas en ángulo recto. Esta proposición no puede, en modo alguno, ser probada por conceptos, sino que se funda, inmediatamente, en la intuición, y en la intuición pura a priori, porque es apodícticamente cierta. Ante afirmaciones de Kant tan perentorias como las transcritas, es de preguntarse qué entendía el filósofo por lo de 'probar por conceptos' y con base en qué criterio sostenía que tal proposición no era susceptible de una tal prueba. Sin dar más explicaciones, pasa a decir, lo que le conviene, que no queda sino la intuición y que esa intuición tiene que ser pura y a priori porque la proposición es apodícticamente cierta. Ya se sabe que lo apodíctico, en Kant, es una llamada a la psicología, es lo acompañado de la conciencia de la necesidad. Tales llamados son sumamente individuales, por lo cual Kant los rechaza en otros lugares. Lo cual no empece a Kant para concluir aquí: Así, pues, en la base de la matemática, existen verdaderamente, puras intuiciones a priori, las cuales hacen posibles sus proposiciones sintéticas y apodícticas. En el parágrafo 10 Kant asegura que es la matemática misma la que establece las intuiciones de tiempo y espacio como base de todos los conocimientos y juicios. Pero, en este parágrafo 12 dice que es la deducción trascendental de los conceptos de espacio y tiempo la que explica la posibilidad de una matemática pura.

El parágrafo 13 de *Prolegómenos* es particularmente notable por la manera como se sirve de ciertos argumentos para apuntalar sus tesis más salientes. Comienza atacando.

Hay quienes no pueden libertarse del concepto de que el espacio y el tiempo son propiedades reales que dependen de las cosas en sí mismas.

Y viene la paradoja de los triángulos esféricos, no satisfactoriamente expuesta, por cierto, como sí lo es la que seguirá. Si dos cosas son completamente iguales debe seguirse que la una puede ser puesta en el lugar de la otra. Sin embargo, los triángulos esféricos de ambos hemisferios, que tienen por base común un arco del ecuador, que tienen iguales los ángulos y los lados, no pueden superponerse, el de un hemisferio sobre el del otro hemisferio. Esta es la consecuencia que extrae Kant: Existe, por tanto, una diversidad interna de los triángulos que ningún entendimiento puede aceptar y que solo se manifiesta por las relaciones exteriores en el espacio.

Esta es otra paradoja: la de derecha-izquierda. ¿Qué puede ser más semejante a mi mano y más igual que su imagen en el espejo? Sin embargo, no puedo colocar la mano que se ve en el espejo en el lugar del original. La imagen especular de la mano derecha es la izquierda.

¿Cómo utiliza Kant este hecho? Así. No existe diferencia interna alguna concebible por cualquier entendimiento y sin embargo las diferencias son internas según los sentidos porque la mano izquierda no puede ser encerrada dentro de los mismos límites que la derecha, el guante de una mano no puede ser usado en la otra. Son semejantes, no son congruentes. ¿Cuál es la solución? Estos objetos no son representaciones de las cosas tales como en sí mismas son y como las reconocería el entendimiento puro sino que son intuiciones sensibles, esto es, fenómenos. La determinación interior de cada espacio se efectúa solamente por la determinación de las relaciones externas con el espacio todo. El 'cada espacio' parece designar un espacio parcial y todas las partes de espacio son simultáneas, según ya se vio. Por eso Kant arguye en seguida que la parte es solamente posible por el todo cuando se trata de puros fenómenos (como en este caso) pero no de las cosas en sí mismas, como objetos del entendimiento puro. Razón que basta a Kant para aseverar luego: Por esto tampoco podemos hacer inteligible por conceptos sino solo mediante relaciones procedentes de la intuición la diferencia entre cosas semejantes e iguales pero incongruentes. Escandaliza a Couturat el hecho de que un problema del entendimiento sea resuelto por la intuición. Por lo demás, la situación expuesta por Kant es paradójica si no se tiene la noción de orientación; los físicos del siglo pasado se valían de juegos de manos, un criterio empírico; los matemáticos precisaron lo que hay que entender por orientación, a principios de este siglo.

Después del parágrafo 13 de *Prolegómenos*, Kant añade una observación, con afirmaciones relativas a la geometría que merecen ser destacadas, porque llevan consigo, notas claves de la filosofía de la matemática de Kant.

La matemática pura, y especialmente, la geometría pura, solamente puede tener realidad objetiva bajo la condición de que concierne a objetos de los sentidos únicamente. Hermann Weyl, por motivos filosóficos, aconsejaba, 1949, a los matemáticos pensar en pequeñas dimensiones. Jean Dieudonné y otros matemáticos eminentes que se han ocupado de la docencia en el nivel secundario, han aconsejado, no sobrepasar en este nivel, la tercera dimensión. Actualmente sería un atrevimiento temerario negar realidad objetiva a la matemática que no concierna a objetos de los sentidos, como escribe

Kant al comenzar su observación, haya o no acuerdo acerca de lo que deba entenderse por realidad objetiva.

Las dos frases que siguen tampoco serían aceptadas actualmente.

"Las proposiciones de la geometría no son determinaciones de un puro ente de nuestra fantasía creadora. Si las proposiciones de la geometría fueran determinaciones de un puro ente de nuestra fantasía creadora no podrían ser referidas con seguridad a objetos reales". Un elocuente contraejemplo es la matemática de la mecánica cuántica. Y habría otros.

Con la siguiente cadena de razonamientos expone Kant su teoría de la concordancia de la geometría con la realidad.

Las proposiciones de la geometría valen de un modo necesario para el espacio y para todo lo que pueda encontrarse en el espacio.
El espacio no es otra cosa que la forma de todas las apariencias externas, bajo la cual solamente pueden sernos dados los objetos de los sentidos.
La forma de la sensibilidad constituye el fundamento de la geometría.
La sensibilidad es el cimiento de la posibilidad de los fenómenos exteriores.

En conclusión, los fenómenos exteriores no pueden contener jamás algo distinto de lo que la geometría les prescribe.

Kant refuerza su argumento de la siguiente manera.

Sería una cosa completamente distinta si los sentidos hubieran de representarse los objetos tal como son en sí mismos. En este caso, de la representación del espacio a priori con todas sus propiedades, no se seguiría que lo mismo hubiera de estar así precisamente dado en la naturaleza.

Se tendría el espacio de los geómetras por pura invención.

Este espacio de invención no tendría validez objetiva alguna,
porque cómo habrían de concordar necesariamente las cosas con la imagen que, por nosotros mismos y de antemano, nos formamos de ellas.
En esta secuencia, la concordancia entre matemática y realidad aparece como clave en el pensamiento de Kant.

Otra secuencia por el estilo es esta que sigue.

Todo objeto exterior de nuestro mundo de los sentidos debe concordar necesariamente con las proposiciones de la geometría.
En efecto: el geómetra se ocupa del espacio.
El espacio es la forma de la intuición externa de la sensibilidad.
Es la intuición externa la que hace posibles los objetos como fenómenos.

Kant menciona el caso de ciertos matemáticos filósofos que llegaron a dudar, no de la exactitud de sus proposiciones geométricas en cuanto conciernen puramente al espacio, sino de la validez objetiva y de las aplicaciones geométricas de los conceptos a la naturaleza. Es porque no reconocían, dice Kant en una frase que ingenuamente uno tomaría por de cuño idealista, que el "espacio del pensamiento hace posible el espacio físico, esto es, la extensión de la materia misma". Kant anota una vez más sus tesis esenciales y concluye: de este modo, y de ningún otro, puede el geómetra asegurar, frente a los embrollos de una metafísica superficial, la indudable realidad objetiva de sus proposiciones.

Comparación entre matemática y metafísica

La cuarta parte de este capítulo tiene por objeto la comparación que interesa a Kant, entre matemática y metafísica. La matemática ofrece, dice Kant, el más brillante ejemplo de una razón que consigue ampliarse por sí misma, sin ayuda de la experiencia. ¿Podrá la razón conseguir extenderse con la misma solidez en metafísica?

Kant formula así su pregunta:

B741. Nos interesa mucho saber si el método para obtener la certeza apodíctica, el método matemático, es idéntico al que persigue la misma certeza en filosofía.

Kant introduce una distinción clave entre las dos ciencias discursivas que son la matemática y la filosofía o metafísica.

B741. B742. El conocimiento filosófico es un conocimiento racional derivado de conceptos; el conocimiento matemático es un conocimiento obtenido por construcción de conceptos. Construir un concepto significa presentar la intuición a priori que le corresponde. Para construir un concepto hace falta, pues, una intuición no empírica que, consiguientemente, es, en cuanto intuición, un objeto singular, a pesar de lo cual, en cuanto construcción de un concepto (representación universal), tiene que expresar en su representación una validez universal en relación con todas las posibles intuiciones pertenecientes al mismo concepto. Construyo, por ejemplo, un triángulo representando, sea el objeto correspondiente a este concepto por medio de la simple imaginación, en la intuición pura; sea, de acuerdo con esta, sobre el papel, en la intuición empírica; pero en ambos casos completamente a priori, sin tomar el modelo de una experiencia. A pesar de que la figura singular trazada es empírica, sirve para expresar el concepto, no obstante la universalidad de este. La razón está en que esa intuición apunta siempre al simple acto de construir el concepto, en el cual hay muchas determinaciones (por ejemplo, la magnitud de los lados y de los ángulos) que son completamente indiferentes; se prescinde, por tanto, de estas diferencias que no modifican el concepto de triángulo.

(Ver el ejercicio 25 que consiste en poner separadamente las múltiples ideas hacinadas en este párrafo).

Filosofía y matemática se asemejan en cuanto ambas se sirven de conceptos, pero difieren inmediatamente en cuanto al modo de trabajar con esos conceptos, así ocasionalmente coincidan en un objeto común de estudio.

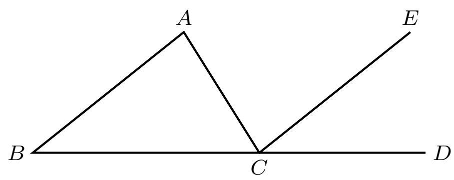
B743. B744. Sin embargo, su modo de tratarlo mediante la razón es completamente distinto en una y otra ciencia. La primera se atiene solo a conceptos universales, mientras que la segunda nada puede hacer con el simple concepto, sino que va inmediatamente en pos de la intuición, en la cual considera el concepto en concreto, pero no empíricamente, sino solo en una intuición que representa a priori, es decir, que ha construido y en la que aquello que se sigue de las condiciones universales de la construcción tiene que ser también universalmente válido respecto del objeto del concepto construido: el concepto en concreto no es un objeto singular, es un prototipo.

La metafísica, según Kant, está condenada a trabajar siempre con solos conceptos, si acaso a ilustrarlos con la mera intuición empírica, lo cual le cierra las puertas al método de trabajo de la matemática que puede construir conceptos gracias a la intuición pura. Hay, pues, una desemejanza entre filosofía y matemática respecto del manejo de los conceptos: la primera es discursiva, la segunda es constructiva. Tal desemejanza se acentúa en las demostraciones debido al diferente empleo de los conceptos. En un pasaje citado con frecuencia, Kant se refiere a la demostración del segundo teorema del ángulo externo en el libro I de *Elementos*. He aquí el teorema.

Elementos I 32. (D). Segundo teorema del ángulo externo.

32. 1. En un triángulo cualquiera, si se prolonga uno de los lados el ángulo exterior es igual a los dos ángulos interiores y opuestos, y los tres ángulos interiores del triángulo son iguales a dos ángulos rectos.

32. 2.



32. 3. **H**: Sea ABC el triángulo, y prolónguese, por ejemplo, BC hasta D.
T: Digo que el ángulo exterior ACD es igual a los dos ángulos interiores y opuestos ABC, BAC, y, los tres ángulos interiores del triángulo: ABC, BCA, CAB son iguales a dos ángulos rectos.

32. 4. Por el punto C, trácese CE paralela a la línea recta AB. (T 31.)

32. 5. Puesto que AB y CE son paralelas y que AC incide sobre ellas, se sigue que los ángulos alternos BAC, ACE son iguales entre sí. (T 29.)
Puesto que AB, CE son paralelas y que BD incide sobre ellas, se sigue que el ángulo exterior ECD es igual al interior y opuesto ABC. (T 29.)
Pero se probó que el ángulo ACE es igual al ángulo BAC;
por lo tanto, todo el ángulo ACD es igual a los dos ángulos interiores y opuestos BAC, ABC.
Añádase el ángulo ACB a cada uno de los anteriores;
entonces, los ángulos ACB, ACD son iguales a los tres ángulos ABC, BCA, CAB.
Ahora bien; los ángulos ACB, ACD son iguales a dos rectos. (T 13.)
Por consiguiente, los ángulos ABC, BCA, CAB son iguales a dos rectos.
Así que, en un triángulo cualquiera, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es igual a los dos ángulos interiores y opuestos, y los tres ángulos interiores del triángulo son iguales a dos ángulos rectos.

32. 6. Simbolización de las proposiciones de la demostración.

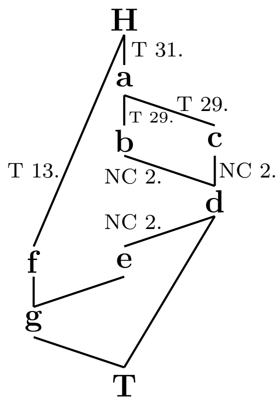
H: ABC es un triángulo.
El lado BC ha sido prolongado hasta D.

T: $\measuredangle ACD = \measuredangle ABC + \measuredangle BAC$.
$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 2$ ángulos rectos.

a: Por el punto C, trazar CE paralela a la recta AB. (**H**. T 31.)
b: $\measuredangle BAC = \measuredangle ACE$. (**a**. T 29.)
c: $\measuredangle ABC = \measuredangle ECD$. (**a**. T 29.)

d: $\measuredangle ABC + \measuredangle BAC = \measuredangle ACE + \measuredangle ECD = \measuredangle ACD$. (**b**, **c**. NC 2.)
e: $\measuredangle ABC + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle ACB$. (**d**. NC 2.)
f: $\measuredangle ACD + \measuredangle ACB = 2$ ángulos rectos. (**H**. T 13.)
g: $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 2$ ángulos rectos. (**e**, **f**.)
T: (**d**, **g**.)

32. 7. Diagrama de la demostración.



He aquí pues, el pasaje de Kant, que alude a esta demostración y que es citado con frecuencia.

B744. Demos al filósofo el concepto de triángulo y dejemos que halle a su manera la relación existente entre la suma de sus ángulos y un ángulo recto. No cuenta más que con el concepto de una figura cerrada por tres líneas rectas y con el concepto de otros tantos ángulos. Por mucho tiempo que reflexione sobre este concepto no sacará ninguna conclusión nueva. Puede analizar y clarificar el concepto de línea recta, el de ángulo o el del número 3, pero no llegar a propiedades no contenidas en estos conceptos. Dejemos que sea ahora el geómetra el que se ocupe de esta cuestión. Comienza por construir en seguida un triángulo. Como sabe que la suma de dos ángulos rectos equivale a la de todos los ángulos adyacentes que pueden trazarse desde un punto sobre una línea recta, prolonga un lado del triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes que, sumados, valen dos rectos. De estos dos ángulos divide el externo trazando una paralela al lado opuesto del triángulo y ve que surge de este modo un ángulo adyacente externo igual a uno interno; y así sucesivamente. A través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición, el geómetra consigue así una solución evidente y, a la vez, universal del problema.

Diversos comentarios que pudieran hacerse a este pasaje se dejan para más adelante. Por el momento, se destaca únicamente el sentido del párrafo: el geómetra tiene a su disposición algo de que no dispone el filósofo, la intuición. Esta permite al matemático realizar diestramente su tarea y reservarle al filósofo el papel de observador de su trabajo. Kant pone la pregunta siguiente.

B746. ¿A qué se deberá tan distinta situación de dos artífices de la razón, de los cuales uno utiliza conceptos y el otro intuiciones que representa a priori conforme a los conceptos?

La respuesta que da Kant es que el matemático se ocupa de proposiciones sintéticas a priori, en las que hay que ir más allá de los conceptos y obtener propiedades que no se hallan en estos. Y concluye:

B747. Sería, por tanto, inútil filosofar, esto es, pensar discursivamente, sobre los triángulos; con ello no lograría en absoluto avanzar más allá de la definición.

Después de esta conclusión desanimante, Kant sigue adelante en su labor crítica demoledora. No solo hay discrepancia en el tratamiento los conceptos sino más profundamente en el método. Ya Descartes y Pascal habían escrito que solo en matemática se hacen demostraciones de veras, idea acaso mucho más antigua. Pues bien, Kant muestra que demostraciones, definiciones, axiomas hay exclusivamente en matemática. También bajo el aspecto del método, la filosofía debe abstenerse de cualquier intento de imitar el modelo matemático. (Tal vez este empeño kantiano indujo a Hegel hacia una opinión muy diferente. Ver: capítulo 9. Complemento a la demostración del teorema de Pitágoras). Dice Kant textualmente:

B754. Es necesario desprenderse de la última ancla de una esperanza fantástica, por así decirlo, y mostrar que la práctica del método matemático es incapaz de reportar el menor beneficio en este tipo de conocimiento, como no sea el de revelar tanto más claramente sus debilidades; que la geometría y la filosofía son dos cosas completamente diferentes, por más que se den la mano en la ciencia de la naturaleza; que, consiguientemente, el procedimiento de una nunca puede ser imitado por la otra. La solidez de la matemática se basa en definiciones, axiomas y demostraciones. Me limitaré a mostrar, dice Kant, que ninguno de estos elementos puede ser, en el sentido en que los toma la matemática, ni suministrado, ni imitado por la filosofía.

Definiciones

B755. Tal como indica la misma palabra, definir no significa propiamente más que ofrecer de modo originario el concepto detallado de una cosa dentro de sus límites.

De acuerdo con estos requisitos, un concepto *empírico* no puede ser definido sino solo explicitado. El concepto no posee nunca unos límites seguros.

La palabra, con las pocas características que le son inherentes, no pretende constituir un concepto de la cosa, sino una simple denominación de la misma. Consiguientemente, la presunta definición no es otra cosa que una determinación de la palabra.

En segundo lugar, tampoco pueden definirse, hablando con propiedad, los conceptos dados a priori, por ejemplo, los de sustancia, causa, derecho, equidad. En efecto, solo puedo estar seguro de que la representación clara de un concepto dado ha sido detalladamente desarrollada cuando sé que tal representación es adecuada a un objeto. Pero como el concepto de este, tal como se da, puede incluir muchas representaciones obscuras que pasamos por alto al analizarlo, aunque las necesitemos siempre al aplicarlo, es siempre dudoso que el análisis de mi concepto haya sido detallado.

B757. Así, pues, como no pueden definirse ni los conceptos empíricos ni los dados a priori, no quedan otros conceptos, para ensayar esta operación, que los pensados arbitrariamente. En este caso puedo siempre definir mi concepto, ya que debo saber qué he pretendido pensar, teniendo en cuenta que yo mismo lo he producido adrede y que no me ha sido dado ni por la naturaleza del entendimiento ni por la experiencia.

No quedan, pues, otros conceptos susceptibles de definición que los que contienen una *síntesis* arbitraria que puede construirse a priori y, consiguientemente, *solo la matemática contiene definiciones*.

B758. En efecto, esta ciencia representa a priori, en la intuición, el objeto que piensa, y es seguro que este no puede contener ni más ni menos que el concepto.

Tenemos que suavizar el rigor que antes nos hizo negar a las explicaciones filosóficas el honroso título de definiciones. Nos limitaremos a observar que las explicaciones filosóficas no son más que exposiciones de conceptos dados, mientras que las definiciones matemáticas son construcciones de conceptos producidos originariamente; las primeras solo se originan analíticamente, por descomposición (sobre cuya compleción carecemos de certeza apodíctica) mientras que las segundas surgen sintéticamente; estas producen, pues, el concepto, mientras que aquellas se limitan a explicarlo.

B759. La definición es descomposición de conceptos dados; en matemática es el medio mediante el cual se da un concepto; por tanto, la matemática comienza por la definición; en filosofía no puede ir la definición sino al final, al concluir la obra.

B759. Puesto que en matemática un concepto se da mediante una definición, no se incluye en ella más que aquello que se pretende que se piense en el concepto.

B760. Propiedad esencial de una definición es el ser exhaustiva. Ahora bien; fuera de la matemática hay la imposibilidad de estar completamente seguros de que el análisis del concepto sea completo; por ello no puede imitarse en la filosofía el método de la matemática a la hora de formular definiciones.

Axiomas

He aquí ahora, por qué, según Kant, tampoco a este respecto puede la filosofía seguir el camino de la matemática. Para Kant, los axiomas son principios sintéticos a priori en cuanto son inmediatamente ciertos. ¿Por qué la filosofía no tiene axiomas?

B760. B761. Un concepto no puede combinarse con otro sintéticamente y , a la vez, de modo inmediato, ya que para salir de un concepto nos hace falta un tercer conocimiento que sirva de medio. Dado que la filosofía no es más que un conocimiento de razón por conceptos, no se encontrará en ella ningún principio que merezca el nombre de axioma. La matemática, en cambio, es capaz de axiomas, debido a que puede, mediante la construcción de conceptos en la intuición del objeto, combinar los predicados de este a priori y de forma inmediata. Pero una proposición sintética formada por meros conceptos, por ejemplo, el principio 'Todo cuanto sucede tiene una causa', nunca puede ser inmediatamente cierta, ya que tengo que buscar un tercer elemento, a saber, la condición de la determinación temporal en una experiencia; partiendo solo de conceptos, no podría conocer directa e inmediatamente semejante principio. *Solo la matemática posee axiomas.*

Demostraciones

B762. Una prueba apodíctica solo puede llamarse demostración en la medida en que sea intuitiva. La experiencia nos enseña lo que es, pero no que no pueda ser de otro modo. Los argumentos empíricos son, pues, incapaces de suministrarnos pruebas apodícticas.

Pero de los conceptos a priori (en el conocimiento discursivo) jamás puede surgir una certeza intuitiva, es decir, una evidencia, por muy apodícticamente cierto que sea el juicio. En consecuencia, *solo la matemática posee demostraciones*, debido a que su conocimiento no deriva de conceptos, sino de la construcción de los mismos, es decir, de la intuición que puede darse a priori en correspondencia con los conceptos. El mismo procedimiento del álgebra, con sus ecuaciones, a partir de las cuales, por reducción, produce la verdad juntamente con su prueba, aunque no es una construcción geométrica, es una construcción característica por la cual se presentan en la intuición los conceptos a través de signos, especialmente los que se refieren a relaciones de magnitud. Aun sin atender a su elemento heurístico, este método garantiza la ausencia de errores en todas las inferencias por el hecho de poner a la vista cada una de ellas.

El conocimiento filosófico, por el contrario, se ve obligado a renunciar a esta ventaja, debido a que siempre tiene que considerar lo universal en abstracto (a través de conceptos), mientras que la matemática puede considerar lo universal en concreto (en la intuición singular) y, a la vez, mediante una representación pura a priori, gracias a lo cual se hacen visibles todos los errores.

Conclusiones

Entre las que interesan a Kant, hay las pertinentes a la matemática y las pertinentes a la filosofía.

Entre aquellas: los juicios sintéticos a priori son posibles porque espacio y tiempo son formas a priori de la sensibilidad. La filosofía trabaja discursivamente con conceptos. La matemática constructivamente.

La exposición que lleva a conclusiones pertinentes a la filosofía como las que, por vía de ejemplo se transcriben en seguida, tiene su sitio indicado en el curso sobre Kant. Se citan aquí solamente para contraponerlas a los resultados a los que llega Kant relativos a la filosofía de la matemática. Es de notar que un juicio (y la metafísica consta de ellos) como 'Todo cambio tiene su causa' tiene la apariencia de un juicio sintético a priori como aquellos de que Kant hace constar la matemática; solo apariencia, según Kant. He aquí algunas de esas conclusiones en cuestión.

B765. La razón pura es incapaz de formar mediante ideas, juicios sintéticos con validez objetiva. (Para el término idea ver la clasificación que hace Kant de las representaciones en B376, B377).

Solo el entendimiento puro es capaz de verdadero conocimiento sintético a priori. La razón pura es incapaz de todo conocimiento sintético (B824).

Conclusiones acerca de la proposición 'Todo cambio tiene su causa'. Es una proposición directamente extraída de conceptos, no es sintética.

Su único uso posible es en el campo enteramente contingente de la experiencia posible.

En el campo de la experiencia posible sí puede ser probada apodícticamente.

En lo tocante a la filosofía de la matemática, son más interesantes ciertos presupuestos que, desde el punto de vista seguido en esta obra, constituyen la herencia de Kant (Ver BXI-BXIV).

Kant habla de la revolución efectuada por 'la idea feliz de un solo hombre', probablemente Tales, sugiere. (Allí Kant consigna una expresión matemáticamente incorrecta, el mencionar 'al primero que demostró el triángulo equilátero'; debería haber escrito: 'al primero que demostró el teorema del triángulo equilátero'. Otros leen isósceles; entonces se referiría al teorema I 5 de *Elementos*. El teorema del triángulo equilátero es el I 1 de *Elementos*).

El primero que demostró el teorema aludido acerca de una especie de triángulo se dio cuenta de que no era lo que veía en la figura lo que había que indagar, como se había hecho hasta entonces (y como hacen aún actualmente quienes en el estudio de la geometría no se sitúan en el plano de los conceptos sino que permanecen en el nivel de la experiencia). Había que extraer propiedades independientes de la experiencia a partir de la concepción propiamente dicha. Así nació la matemática como ciencia.

Análogamente sucedió para el nacimiento de la física como ciencia. Se necesitó una previa revolución de pensamiento, que fue madurando gracias a experimentos como los de Galileo, Torricelli, Stahl, ... "Los investigadores de la naturaleza" "entendieron que la razón solo reconoce lo que ella misma produce", "que la razón tiene que anticiparse con los principios de sus juicios de acuerdo con leyes constantes y que tiene que obligar a la naturaleza a responder sus preguntas". "Las observaciones fortuitas y realizadas sin plan previo no van ligadas a ninguna ley necesaria", "como las que la razón busca y necesita", vale decir, como la explicación racional perseguida. "La razón debe abordar la naturaleza llevando en una mano los principios según los cuales solo pueden considerarse como leyes los fenómenos concordantes, y en otra, el experimento que ella haya proyectado a la luz de tales principios". La razón quiere "ser instruida por la naturaleza", pero, "no lo hará en calidad de discípulo que escucha todo lo que el maestro quiere, sino como juez que obliga a los testigos a responder a las preguntas que él les formula". La física como ciencia nació cuando la razón se propuso "buscar (no fingir) en la naturaleza lo que la misma razón pone en ella, lo que debe aprender de ella", de lo cual la razón no podía saber nada por sí sola.

Entonces Kant se pregunta cómo podría nacer la metafísica como ciencia, teniendo en cuenta los hechos que decidieron del nacimiento de la matemática y de la física como ciencias. La respuesta es su célebre idea de la revolución copernicana. "Se ha supuesto hasta ahora que todo nuestro conocer debe regirse por los objetos". Sin embargo, así no se ha podido ampliar en nada el conocimiento metafísico. "Intentemos, si no adelantaremos más suponiendo que los objetos deben conformarse a nuestro conocimiento".

El impulso de Kant fue morigerado por el hecho de no conocer, debido al desarrollo científico de la época, sino una sola física y una sola geometría. Así, no logró explotar a fondo su magnífica idea. Habrá que esperar la creación de las estructuras; mediante ellas será cierto que "solo conocemos a priori de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas". (Ver capítulo 15).

Complementos

C1. Un enfoque de *Crítica de la razón pura*.

- Espacio y tiempo son las formas a priori de la sensibilidad.
- Formas sintéticas, o principios puros del entendimiento, o categorías son las formas a priori del entendimiento.
- Las formas de la sensibilidad y las del entendimiento no pueden emplearse sin la experiencia.

- Si las formas de la sensibilidad y del entendimiento son válidas en la experiencia solo porque son condiciones necesarias de la experiencia, entonces, no se puede juzgar de su aplicabilidad a objetos que trascienden la experiencia.
- Conclusión: No es posible la metafísica como ciencia.

(RUNES. *Diccionario de filosofía* (1960). 1981. México. Grijalbo. 395 pp. Ver: Kantismo).

C2. *Trascendental*. (Kant. *Crítica de la razón pura*).

Es un adjetivo que se aplica al estudio de las condiciones de la experiencia.

Estética trascendental. Es el estudio de las formas a priori de la sensibilidad.

Una demostración es trascendental si muestra que lo que se demuestra es una condición necesaria indispensable para la experiencia humana. (Ver en **C1** el cuarto punto).

Método trascendental. Análisis de las condiciones de posibilidad de la experiencia y del conocimiento humanos: formas a priori de la intuición, categorías, ideas de la razón.

Trascendente. Todo lo que está más allá de la experiencia posible. (B36. B40. A296. Runes: *Diccionario de filosofía*, citado en **C1**).

Uso trascendental de un concepto: referirlo a objetos que no nos son dados en la intuición y que, consiguientemente, no son sensibles. Uso empírico de un concepto: referirlo solo a fenómenos, es decir, a objetos de una experiencia posible. (B298).

Conocimiento trascendental: posibilidad del conocimiento, uso a priori de este.

No todo conocimiento a priori debe llamarse trascendental sino solo aquel mediante el cual conocemos que determinadas representaciones (intuiciones o conceptos) son posibles o son empleadas puramente a priori y cómo lo son. Ni el espacio ni ninguna determinación geométrica a priori del mismo constituye una representación trascendental. Solo puede llamarse representación trascendental el conocimiento de que tales representaciones no poseen origen empírico, por una parte, y, por otra, la posibilidad de que, no obstante, se refieran a priori a objetos de la experiencia. Sería trascendental el uso del espacio aplicado a objetos en general. Pero si se aplica solo a objetos de los sentidos, tal uso se llama empírico. La diferencia entre lo empírico y lo trascendental solo corresponde a la crítica del conocimiento y no afecta la relación entre este y su objeto. (B80. B81).

Cuestiones

1. Las tentativas de los geómetras para demostrar el postulado de Euclides sobre las paralelas han sido hasta ahora inútiles. Sin embargo, nadie pone en duda este postulado y los teoremas que Euclides deduce. La percepción del espacio encierra una propiedad especial, evidente por sí misma, sin la cual no se puede rigurosamente establecer las propiedades de las paralelas. La idea de la extensión limitada, por ejemplo, del círculo, no contiene nada que dependa de su magnitud absoluta. Pero, si nosotros disminuimos con el pensamiento su radio, nos vemos llevados invenciblemente a disminuir en la misma relación su circunferencia y los lados de todas las figuras inscritas. Esta proporcionalidad me parece ser un postulado más natural que el de Euclides. (Pierre Simon de Laplace. (1749 - 1827)).

   Trate de establecer alguna relación entre esta idea de Laplace y la teoría kantiana. ¿Afirma Laplace que la geometría euclidiana no es deducible por pura lógica? ¿Se necesitaría aceptar una propiedad de los objetos, como cuando se hace física? ¿O una propiedad del sujeto que percibe? ¿Esa propiedad se impondría al sistema deductivo, de manera que si no se la adoptara no se podría hacer la teoría del espacio?

2. La anterior cita de Laplace era, en realidad, un comentario a la frase siguiente del mismo Laplace:

   Si las dimensiones de todos los cuerpos del universo, sus distancias mutuas y sus velocidades decrecieran proporcionalmente, los cuerpos celestes describirían líneas enteramente semejantes a las que describen, de modo que el universo, reducido sucesivamente hasta el espacio más pequeño imaginable, ofrecería siempre las mismas apariencias a sus observadores. Estas apariencias son, pues, independientes de las dimenciones del universo, de modo que la sencillez de las leyes naturales no permite al observador más que conocer relaciones. (Laplace).

¿Afirma Laplace que en realidad se conocen relaciones entre objetos y no los objetos mismos? ¿No los objetos en sí? ¿Podría Kant estar de acuerdo con Laplace? Si lo que Laplace afirma es que el conocimiento fundamental es el de semejanza entre diferentes sucesos, ¿quedan excluidas las geometrías donde no hay semejanza, sino solo congruencia, como instrumentos válidos para el conocimiento que interesa al físico?

3. Según Kant, ¿en qué ciencias hay juicios sintéticos a priori? Ejemplos.

4. ¿Hace Kant alguna crítica de *Elementos*? ¿O acepta, tal cual, la obra de Euclides? ¿Qué papel tienen las figuras en *Elementos*? ¿Qué papel asigna Kant a la intuición en los conocimientos de matemática? ¿Es prudente hacer una filosofía de la matemática con base en un solo libro de geometría, por importante que éste haya sido para muchas generaciones?

5. Explicar esta frase de Bell (*Los grandes matemáticos*, página 361 de la edición española de Losada, Buenos Aires, 1945): "Se creía que Euclides había descubierto una verdad absoluta, una forma necesaria de la percepción humana". ¿Cabe citar esto a propósito de la filosofía de la matemática de Kant?

6. Dice Kant: "Dos lados de un triángulo son mayores que el tercero no se deriva de línea y triángulo, sino de la intuición a priori". Señale sobre la esfera un triángulo que no satisface a la proposición aducida por Kant. ¿Puede criticarse a Kant por no pensar en esto? ¿O tampoco los matemáticos de tiempos de Kant lo habían pensado?

7. Comentar: Quienes aseveran que el mundo no es euclidiano andan tan equivocados como quienes aseveran que sí lo es.

8. ¿Qué problema condujo a Kant a pensar en una filosofía de la matemática?

9. "A ningún sujeto le conviene un predicado que lo contradiga". "Es imposible que una cosa sea y no sea al mismo tiempo". ¿Cómo se relacionan estos dos principios en un juicio?

10. ¿El principio de contradicción puede ser un principio de la metafísica propiamente hablando?

11. Parecido y diferencia entre matemática y metafísica, según Kant.

12. ¿Por qué, según Kant, los principios de la matemática no pueden ser analíticos? ¿Sintéticos a posteriori?

13. Según Kant, la tridimensionalidad del espacio, ¿se prueba? ¿Se intuye? ¿Cómo?

14. En Platón la matemática es una propedéutica para el conocimiento filosófico. En Kant, la matemática es el paradigma del conocimiento. Explicar esta actitud de los dos filósofos.

15. La geometría para Kant es una ciencia que establece sintéticamente las propiedades del espacio. ¿Significa esto que la geometría dependa de la experiencia?

16. No "sería necesario que entre dos puntos hubiese una sola línea recta, sino que sería la experiencia la que lo señalaría en cada caso. Lo que se extrae de la experiencia posee solo una universalidad relativa, es decir, la obtenida mediante inducción. Por consiguiente, podríamos afirmar tan solo que, según lo observado hasta ahora, no se ha encontrado ningún espacio que tenga más de tres dimensiones" (A24). ¿Puede criticarse esta inferencia puesto que el espacio es esencialmente uno (A25)? ¿Condena Kant los conocimientos obtenidos por inducción? ¿O valen menos que los necesarios y universales?

17. Cuando enunciamos un juicio acerca de lo observado en una experiencia no podemos asegurar que lo enunciado por el juicio se cumpla fuera de esa experiencia. El juicio no es universal. Por otra parte, apenas se puede asegurar lo que se haya observado en la experiencia y no que no pueda ser de otro modo. El juicio no es necesario. Ahora bien. Los juicios de la matemática y los de la física de Newton tienen universalidad y necesidad. Kant los llama juicios sintéticos a priori. La matemática y la física de Newton son ciencias puras. Por tanto, las ciencias puras se componen de juicios sintéticos a priori. ¿Es correcto el razonamiento? Dar ejemplos apropiados de los juicios de que se habla aquí.

18. La clasificación de Kant en juicios analíticos, juicios sintéticos a posteriori, juicios sintéticos a priori ¿es caprichosa? ¿O se pueden dar ejemplos irrecusables de cada uno de los tres?

19. ¿Cómo es posible que las cosas concuerden con la imagen que de antemano nos formamos de ellas? Explique cuál es el problema planteado por Kant con esta pregunta.

20. ¿Cómo emplea Kant la paradoja de la imagen especular para argumentar en favor de su propia doctrina?

21. Ver que el enunciado 'Todo cambio tiene una causa' no es de la forma 'S es P'. ¿Por qué es importante esta observación respecto de la teoría kantiana de los juicios?

22. "Qué y cuánto pueden conocer el entendimiento y la razón con independencia de toda experiencia". (AXVII). ¿Qué importancia tiene esta pregunta para Kant? ¿Qué ciencias están interesadas en la respuesta a esta pregunta? ¿Cuáles pueden no estar interesadas?

23. "En la proposición analítica la cuestión está en si realmente pienso el predicado al representarme el sujeto". (B205). Criticar este criterio de Kant. ¿Tiene la claridad que convendría? ¿No hay ambigüedad posible? ¿No apela a supuestos psicológicos?

24. B749. Para juzgar sintéticamente de un concepto hay que ir más allá de él y acudir a la intuición en la que se ha dado, ya que si nos quedáramos en los que se halla contenido en el concepto, el juicio sería simplemente analítico y no constituiría más que una explicación del pensamiento atendiendo a lo realmente contenido en él. Pero puedo ir desde el concepto a la intuición, pura o empírica, correspondiente a él para examinarlo en concreto desde ella y para conocer a priori o a posteriori lo que conviene al objeto del mismo. Lo primero es el conocimiento racional y matemático mediante la construcción del concepto; lo segundo es el conocimiento meramente empírico, que es incapaz de suministrar proposiciones necesarias y apodícticas. Así, podría analizar mi concepto empírico del oro sin ganar nada más que la posibilidad de enumerar lo que realmente pienso con esta palabra. De esta forma introduzco una mejora lógica en mi conocimiento, pero no consigo incrementarlo o añadirle nada. Si ahora tomo la materia que se presenta con este nombre, consigo percepciones que me suministrarán diversas proposiciones sintéticas, pero empíricas. Si se tratara del concepto matemático de un triángulo, lo construiría, es decir, lo daría a priori en la intuición, con lo cual lograría un conocimiento sintético y, además, racional.

B750. *Nota.* Gracias al concepto de causa salgo efectivamente del concepto empírico de un acontecimiento (en el que algo sucede), pero no paso a la intuición que representa el concepto de causa en concreto, sino a las condiciones temporales en general que pueden hallarse en la experiencia conforme a dicho concepto. En consecuencia, procedo simplemente por conceptos, y no puedo hacerlo por construcción de conceptos.

Ver por qué este pasaje es una sinopsis de algunas opiniones peculiarmente kantianas. Considerar con especial cuidado las dos situaciones: triángulo, causa; tratar de ver la diferencia que en ellas ve Kant. ¿Vale la pena tener en cuenta que triángulo es un concepto matemático? (B755 - B760). ¿No son comparables triángulo y causa en lo referente a condiciones temporales?

25. Cuestiones acerca del texto.

B741: Caracterización de conocimiento matemático y de conocimiento filosófico.

¿Qué es construir un concepto?
¿Para construir un concepto es suficiente una intuición empírica?
Una intuición es una representación: ¿singular? ¿Universal?
Un concepto es una representación: ¿singular ¿Universal?

¿A un mismo concepto pueden corresponder diversas intuiciones?
¿A una misma intuición pueden corresponder diversos conceptos?
En la intuición pura, ¿es en la imaginación?
En la intuición empírica, ¿es sobre un papel?
Un triángulo de madera ¿es una intuición pura? ¿Empírica?
¿Construir un concepto es lo mismo que representarlo a priori en la intuición?

¿A priori, en Kant, significa innato, o, independiente de la experiencia? ¿Qué se quiere decir con que la construcción de un concepto debe ser a priori? ¿Kant opone lo singular de una intuición a lo universal de un concepto? ¿Por qué un triángulo dibujado no restringe las consideraciones de un geómetra acerca de triángulos? ¿Acaecería lo mismo si se dijera triángulo rectángulo? ¿De qué caracteres se prescinde en la consideración de un triángulo?

Comparar este pasaje de Kant con el de Platón en *República* 510 d-e.

26. Hay quienes pretenden distinguir filosofía y matemática diciendo que el objeto de la primera es la cualidad, mientras que el de la segunda es la cantidad. ¿Está Kant de acuerdo con esta distinción? ¿Por qué? (B742).

27. Nadie puede obtener una intuición que corresponda al concepto de realidad más que partiendo de la experiencia, nunca puede poseerla a priori, partiendo de sí mismo y antes de tener conciencia empírica de ella. B743. Confrontar con la propia experiencia.

28. No puedo en modo alguno representar en la intuición el concepto de causa en general, como no sea en un ejemplo ofrecido por la experiencia. B742. ¿Hay una concesión al análisis de la causalidad en Hume? Explicar por qué.

29. Kant se propuso establecer los límites y el uso adecuado de la razón. ¿Cumplió Kant este designio en lo tocante a la filosofía de la matemática? Explicar. ¿La filosofía de la matemática de Kant limita la creación matemática? ¿O las aplicaciones de la creación matemática? ¿Es aplicable a la realidad una física teórica que se sirva de 4, o, más dimensiones?

30. El principio supremo de todos los juicios sintéticos. Dice Kant que si un conocimiento ha de tener realidad objetiva, es decir referirse a un objeto y recibir de él significación y sentido, tiene que ser posible que el objeto se dé de alguna forma. Darse un objeto consiste en presentarse tal objeto en la intuición de manera inmediata. Darse un objeto significa referir su representación a la experiencia, sea real o posible. Es, pues, la posibilidad de la experiencia lo que da realidad objetiva a todos nuestros conocimientos a priori. Los juicios sintéticos a priori se refieren, aunque solo mediatamente, a la posibilidad de la experiencia y la validez objetiva de su síntesis se basa únicamente en tal referencia. (B194-l97).

    Ahora bien. Las infinitas dimensiones de los espacios de la mecánica cuántica son "determinaciones de un puro ente de nuestra fantasía creadora". Se pregunta si habrá que referirlas a objetos reales con menos seguridad que aquella con que se hace referencia a las tres dimensiones del espacio que nos rodea. ¿El espacio físico de los físicos es el espacio en el que estamos sumergidos? ¿O es un intento teórico para comprenderlo? ¿Disminuye esto el valor de la aplicación de la teoría?

Bibliografía

1. Immanuel KANT. *Crítica de la razón pura.* (1781. 1787), 1983. Madrid. Alfaguara. *xlviii* + 694 pp.

2. Manuel KANT. *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir.* (1783). Observaciones sobre el sentimiento de lo bello y lo sublime. Crítica del juicio. 1973. México. Porrúa. *xvi* + 416 pp. *Prolegómenos* ocupa 124 pp.

Capítulo 5

Geometrías no euclidianas

Hay algo de verdad en esto de que muchas cosas tienen una época en la que pueden ser encontradas al mismo tiempo en diversos lugares, de la misma manera que las violetas florecen por todas partes en primavera.

[Wolfgang Bolyai, a su hijo Janos Bolyai, quien gestaba su geometría no euclidiana].

Se va a considerar en este capítulo, el epílogo de un trabajo, cuyo desarrollo ocupó a los matemáticos desde, poco más o menos, el año 300 antes de la era actual, hasta los años 1800. Se constituirá en una de las creaciones fundamentales para la lógica, la matemática, la epistemología. Russell escribía que el siglo XIX debía enorgullecerse, ante todo, de la creación de la lógica matemática. En realidad, es difícil asegurar cuál de las grandes invenciones matemáticas del siglo pasado: teoría de grupos, teoría de conjuntos, geometrías no euclidianas, lógica matemática, aritmetización del análisis, etc., haya influido más en la matemática del siglo XX; pero, por ejemplo, la teoría del conocimiento no puede ser la misma antes que después de la creación de dichas geometrías. Ella obligó, en efecto, a lógicos, matemáticos y los filósofos que se dieron por aludidos, a emprender un examen de conciencia crítico acerca de la relación que pueda existir entre sistemas formales y mundo externo, que es cierto, ya se había intentado, pero sobre bases muy distintas.

Los momentos de la evolución de la geometría que culminan en la no euclidiana, van a ser apuntados casi con detalle de especialista en lo que toca a los esfuerzos mentales que costó a los matemáticos dar dicho salto: las hesitaciones de Taurinus, las del mismo Gauss aunque de otro género, o las de Janos Bolyai; y, en contraste, la seguridad de Lobachevski, son datos tan interesantes para el epistemóloqo, de la tendencia que sea, como lo son para el matemático, los resultados obtenidos por ellos, casi a pesar de sus rasgos personales. De los contenidos solo se mencionarán algunos de los más espectaculares. La exposición matemática de la geometría no euclidiana, por elemental que sea, es más complicada que la correspondiente de la euclidiana y necesita más conatos de la imaginación que aquella.

Para Bonola, los fundadores de la geometría no euclidiana fueron cinco: Gauss (1777 - 1855), Schweikart (1780 - 1859), Lobachevski (1793 - 1856), Taurinus (1794 - 1874), Bolyai (1802 - 1860).

Fueron los dos últimos, en realidad, quienes hicieron desarrollos completos de la nueva geometría; por eso se llama, sin mucho error, geometría de Bolyai-Lobachevski a la rama de la geometría no euclidiana primeramente encontrada. La otra fue sugerida por Riemann (1826 - 1866), discípulo de Gauss, y uno de los grandes matemáticos de la historia.

Carl Friedrich Gauss

Fue el primero en llegar a tener una idea clara y distinta de una geometría sin el quinto postulado. Bourbaki adopta por sentado que esto ocurrió en 1816. ¿Cómo se puede tener tal seguridad? Hay tres fuentes.

En primer lugar, su correspondencia con Wolfgang Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus, y, Bessel, la cual abarca desde 1799 hasta 1844.

En segundo lugar, dos artículos muy cortos en el Göttinguische gelehrte Anzeigen (Comunicaciones eruditas de Gotinga), en 1816 y en 1822.

En tercer lugar, notas encontradas entre los papeles de Gauss.

Todo ello figura, según Bonola, en las páginas 157-268 del volumen VIII de las obras completas de Gauss.

Parece que Gauss haya comenzado a pensar en el tema desde los quince años, (1792), lo cual no es de extrañar, dada la precocidad del "príncipe de los matemáticos". Y que también haya intentado demostrar el quinto postulado lo muestra el extracto de una carta (17 XII 1799) a su condiscípulo, amigo de toda la vida y padre de Janos Bolyai, es decir, Wolfgang (Farkas) Bolyai:

En cuanto a mí, ya he hecho algunos progresos en mis trabajos; pero el camino que he escogido no conduce de ninguna manera a la meta que perseguimos, y que tú afirmas haber alcanzado, más bien parece compelerme a poner en duda la verdad de la geometría misma.

He llegado, es verdad, a muchas cosas, que para la mayoría de las gentes constituirían una demostración, pero que, en mi opinión, no prueban, por decirlo así, nada. Por ejemplo, si se pudiera mostrar que es posible un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que toda área dada, entonces, estaría en condiciones de probar toda la geometría de manera absolutamente rigurosa.

Casi todos, es cierto, tomarían esto como axioma; yo no; podría, en efecto, ocurrir que, por lejanos que entre sí estuviesen los vértices de un triángulo. su área fuese, sin embargo, inferior a un límite asignado.

Stäckel y Engel, dos investigadores de la correspondencia de Gauss, llegan a la conclusión de que el príncipe de los matemáticos no logró reconocer la existencia de una geometría sin el quinto postulado, lógicamente inatacable, por una intuición genial, como fue el caso en otras de sus investigaciones, sino gracias a una larga y fatigosa labor antes de vencer el prejuicio heredado.

Estos tempranos intentos, constituirían un primer período en los trabajos de Gauss acerca del quinto postulado.

Un segundo período, después de 1813, estaría marcado por los hechos siguientes. En 1816, en una carta, F. L. Wachter, (1792 - 1817), (discípulo de Gauss, intentó demostrar el quinto postulado y todavía en 1817 creía haberlo conseguido), escribe que el maestro, con quien había tenido una conversación, hablaba de una geometría antieuclidiana. El 20 IV 1816, Gauss expresa en el Göttinguische gelehrte Anzeigen, su convicción de que el quinto postulado no puede ser demostrado. Influido por Schweikart, habla luego de geometria astral. El 28 X 1822, en la revista citada, vuelve a afirmar su convicción acerca de la indemostrabilidad del quinto postulado. En 1824, en carta a Taurinus, le ruega que guarde silencio sobre las comunicaciones que le hace. En carta a Bessel, 27 I 1829, reafirma su convicción de que es imposible demostrar el quinto postulado y dice que no ha publicado nada acerca de esto por temor a “la gritería de los beocios”(das Geschrei des Böotier). En carta a Schumacher, 12 VI 1831, manifiesta la certeza de que la geometría no euclidiana, nombre definitivo para la nueva geometría, no contiene en sí misma ninguna contradicción, aunque a primera vista muchos de sus resultados tengan un aire paradójico. Así, pues, en el segundo período, Gauss alcanza la convicción de la posibilidad de una geometría no euclidiana, le encuentra nombre, y, se verá luego, adelanta algunos desarrollos.

En carta al mismo Schumacher, un mes antes, había escrito Gauss (y esto sería el comienzo del tercer período):

> Hace algunas semanas he comenzado a escribir algunos resultados de mis personales meditaciones, que se remontan en cierto punto hasta unos cuarenta años. Nunca los he puesto por escrito, lo que me ha obligado tres o cuatro veces a empezar de nuevo toda la labor en mi cabeza. No quisiera que esto pereciera conmigo.

Pronto interrumpió Gauss, una vez más, su trabajo. ¿La razón? Wolfgang Bolyai había enviado a Gauss, en enero de 1832, una obra que acababa de publicar y en un apéndice de la cual figuraba el trabajo de su hijo, Janos Bolyai: una especie de manifiesto en docena y media de páginas sobre la ciencia absoluta del espacio en el que se decide sobre la cuestión de la independencia del quinto postulado. El 6 III 1832, Gauss responde así a Wolfgang Bolyai:

> Si empiezo diciendo que no puedo elogiar este trabajo (de Janos), tú quedarás, ciertamente, por un instante maravillado; pero no puedo decir otra cosa; alabarlo sería alabarme a mí mismo. En efecto, todo el contenido de la obra, el camino trazado por tu hijo, los resultados a que llegó, coinciden casi enteramente con mis meditaciones, que han ocupado en parte mi mente de treinta a treinta y cinco años a esta parte. Así, me quedé completamente estupefacto. En cuanto a mi trabajo personal, del cual, hasta aquí, he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tiene ideas claras sobre las cuestiones de que se habla, y yo he encontrado muy pocas personas que presentasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. Para poder tener este interés se necesita ante todo haber sentido muy vivamente lo que esencialmente falta, y, sobre esta materia casi todos están en una completa obscuridad. Al contrario, era mi idea escribir, con el tiempo, todo esto, para que al menos no pereciese conmigo. Y, así, es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy sumamente contento de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable.

Janos Bolyai, en cambio, estuvo sumamente disgustado, al conocer esta respuesta. No quería aceptar que nadie, fuera de él, hubiera podido llegar a la geometria no euclidiana. Sospechó que antes de enviar el libro en el que figuraba el Apéndice (un primer ejemplar del cual, por cierto, enviado a Gauss en junio de 1831 no llegó a su destinación) su padre, Wolfgang, habría enviado resultados de las investigaciones filiales a Gauss, quien habría podido querer apropiárselas. Janos Bolyai se convenció de lo infundado de su sospecha, pero "conservó siempre una injustificable aversión por el eminente geómetra", se lee en Bonola. Sin embargo, en los últimos párrafos de Ciencia absoluta del espacio había citado elogiosamente a Gauss, al apoyarse en uno de los resultados de este, para lograr uno de sus propios espectaculares hallazgos, es a saber, el de la cuadratura del círculo. Por diversas razones, es muy difícil poner en duda la sinceridad de Gauss, quien, por ejemplo, escribe a

Gerling, refiriéndose al Apéndice (llamado, a veces como más arriba, Ciencia absoluta del espacio): "... donde volví a encontrar todas mis propias ideas y resultados desarrollados con una gran elegancia"; y, en cuanto al autor, dice: "Tengo a este joven geómetra por un genio de primera magnitud". Uno podría preguntarse si Gauss modificó posteriormente su juicio. Es curioso, sí, que la noción de paralelismo empleada por Gauss sea la misma de que se sirve Janos Bolyai.

Entre los papeles de Gauss se encontraron dos sinopsis acerca de la teoría de las paralelas ya matemáticamente expuesta. En la primera, se halla una definición y tres teoremas.

Definición (Paralelas)**.** Dos líneas AM y BN son paralelas si cumplen dos condiciones: no se encuentran, y, toda recta que pase por A entre AB y AM encuentra a BN.

Teorema (I)**.** *El paralelismo de dos rectas es independiente de los puntos escogidos sobre las paralelas.*

Teorema (II)**.** *El paralelismo es simétrico.*

Teorema (III)**.** *El paralelismo es transitivo.*

En la segunda sinopsis introduce la noción de puntos correspondientes sobre un par de paralelas AA', BB'. Los puntos A y B son correspondientes si AB hace ángulos internos iguales con las paralelas del mismo lado. Luego, demuestra tres teoremas.

Teorema (I de la segunda sinopsis)**.** *Si A y B son puntos correspondientes sobre sendas paralelas y M es el punto medio entre A y B, la línea MN, perpendicular a AB, es paralela con las dos líneas dadas. Todo punto por el mismo lado de MN que A está más cerca de A que de B.*

Teorema (II de la segunda sinopsis)**.** *Si A y B son puntos correspondientes sobre sendas paralelas y A', B' son otros dos puntos correspondientes sobre las mismas paralelas, entonces, la distancia entre A y A' es igual a la distancia entre B y B'. Y recíprocamente.*

Teorema (III de la segunda sinopsis)**.** *Si A, B, C son puntos sobre sendas paralelas tales que A y B, B y C se corresponden, entonces, A y C se corresponden.*

La noción de puntos correspondientes permite llegar a la de circunferencia, si se considera el haz de rectas, que se encuentran en un punto. Por este punto pasan infinitas rectas. La circunferencia aparece entonces como el conjunto formado por cada punto de cada recta del haz que corresponde al punto por donde pasan todas las rectas, es decir, el punto por donde pasan las infinitas rectas del haz tiene, según la definición de puntos correspondientes, un punto correspondiente sobre cada una de las rectas del haz. La circunferencia es el conjunto de todos estos puntos correspondientes. Es el conjunto o trayectoria ortogonal a las rectas del haz.

Un conjunto de rectas paralelas también es un haz. En la geometría con el quinto postulado, los puntos correspondientes están sobre rectas paralelas, perpendiculares a las rectas del haz.

En la hipótesis de Gauss, tales puntos correspondientes no forman una circunferencia, sino una curva con ciertas propiedades análogas a las de la circunferencia. Es la curva llamada horociclo: posición límite de una circunferencia cuyo radio se vuelve infinito. Tres puntos sobre un horociclo no pueden, pues, ser puntos de una misma circunferencia. Este es el camino para entender por qué Wolfgang Bolyai, el padre de Janos Bolyai, había podido demostrar el quinto postulado a condición de asumir la hipótesis auxiliar: tres puntos no colineales determinan una circunferencia. Si se supone que cada tres puntos no colineales determinan una circunferencia no es posible que puntos correspondientes no determinen una circunferencia; se cierra la posibilidad para la geometría no euclidiana de Bolyai-Lobachevski, queda la de Euclides solamente, esto es, la del quinto postulado. Lo supuesto por Wolfgang Bolyai equivale al quinto postulado; partiendo de aquel puede llegar a este, es decir, demostrarlo.

Gauss había asimilado a su construcción mental otro hecho característico de la geometría de Bolyai-Lobachevski, ya hallado por Lambert y conocido también por Legendre:

> "Es fácil probar que, si la geometría de Euclides no es la verdadera, entonces, de ninguna manera hay figuras semejantes... Sería incluso deseable que la geometría euclidiana fuera falsa, porque en ese caso tendríamos a priori una unidad universal de longitud". (1816. Carta al astrónomo C. L. Gerling. Martin. p. 306).

Gauss encontró, (carta a Taurinus, 8 XI 1824) una cierta constante que interviene en todos los cálculos de la nueva geometría. Aparece en la comunicación informal de Schweikart y explícitamente en los cálculos de Taurinus, Bolyai y Lobachevski. Se la suele llamar constante de Schweikart o de Gauss.

En carta a Schumacher, en 1831, Gauss le comunica la fórmula para la longitud de la circunferencia; si esta tuviera radio r, su longitud sería:

$$\pi k \left(e^{r/k} - e^{-r/k}\right)$$

donde el número π ya no es igual a la relación entre las longitudes de la circunferencia y el diámetro, como en la geometría euclidiana. Por procedimientos justificados en los cursos de cálculo diferencial, el límite de esta expresión cuando k tiende a infinito es $2\pi r$, es a saber, la longitud de la circunferencia en geometría euclidiana. Este es un hecho general. Para obtener las fórmulas de la geometría euclidiana a partir de las de la geometría de Bolyai-Lobachevski, hay que calcular el límite cuando la constante de Gauss tiende a infinito. En otras palabras, la geometría euclidiana aparece como un caso límite, particular, de la geometría de Bolyai-Lobachevski. Es la razón de que Bolyai llamará *absoluta* a su geometría y de que Lobachevski llamará su propia teoría la *pangeometría*, toda la geometría. A ninguno de los dos se le ocurrió pensar que hubiera una tercera.

La posibilidad de otra geometría no euclidiana aparece en una investigación expuesta por Riemann delante de Gauss, en 1854. Riemann distingue los conceptos de ilimitado y de infinito. La explicitación de la geometría correspondiente, la elíptica, fue dada por Klein en 1871.

Ferdinand Karl Schweikart

Jurisconsulto, y matemático aficionado, resumió el resultado de sus investigaciones (que nunca publicó, pero que Gauss conoció por Gerling y aprobó) en las siguientes aseveraciones (1818):

Existen dos tipos de geometría: una geometría en sentido estricto, la euclidiana y una geometría astral.

Los triángulos, en esta última, tienen la particularidad de que la suma de sus tres ángulos no es igual a dos ángulos rectos.

Supuesto esto, se puede demostrar rigurosamente:

a) Que la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.
b) Que esta suma es tanto menor cuanto mayor es el área del triángulo.
c) Que la altura de un triángulo rectángulo isósceles crece continuamente cuando crecen los lados, pero, no puede superar a determinado segmento, ..., la *constante*.

La geometría euclidiana se verifica en la hipótesis de que la constante sea infinitamente grande. Solo entonces es verdad que la suma de los tres ángulos de todo triángulo es igual a dos rectos, y esto se deja demostrar fácilmente, tan pronto como se admite que la constante sea infinitamente grande.

Se sabe que Schweikart conocía los trabajos de Saccheri por Klügel, y los de Lambert.

Franz Adolf Taurinus

Sobrino del anterior; en realidad estuvo siempre convencido de la verdad absoluta del quinto postulado y alimentó la esperanza de poderlo demostrar. No obstante, bajo la influencia de Gauss y de Schweikart, estudió, desde 1820, la teoría de las paralelas y publicó, en 1825, resultados pertinentes a la hipótesis del ángulo agudo.

Volvió a encontrar la constante de Schweikart, pero, como pensaba que era imposible una unidad absoluta de longitud, llegó a la conclusión de que todos los sistemas correspondientes al número infinito de valores de la constante de Schweikart tenían que valer simultáneamente. Esto lo conduce a consideraciones incompatibles con su concepción del espacio y luego a rechazar la hipótesis del ángulo agudo. Tiene que adoptar, pues, una doble posición; no con malicia sino, precisa y curiosamente, para ser consecuente. Rechazar, por una parte, la hipótesis del ángulo agudo; reconocer, empero, por otra, la compatibilidad de las consecuencias que se sacan de ella. Es más. En 1826, muestra cómo se puede construir un sistema analítico para derivar las consecuencias lógicas de la hipótesis del ángulo agudo; sistema de fórmulas aceptado posteriormente por los usuarios con el nombre justo de geometría logaritmicoesférica de Taurinus. Son las fórmulas trigonométricas correspondientes a triángulos trazados sobre una esfera de radio imaginario. He aquí algunos resultados, en los que G es la constante encontrada por Gauss, que es la misma constante de Schweikart, designada por S.

Taurinus reencontró la fórmula de Gauss para la longitud de la circunferencia y también, como lo había establecido ya Gauss, el área máxima de un triángulo, determinación que es posible en la hipótesis del ángulo agudo:

$$\frac{\pi S^2}{\left(\log(1+\sqrt{2})\right)^2}$$

Halló que el área de un círculo de radio r es

$$2\pi G^2\left(\cosh\left(\tfrac{r}{G}\right)-1\right)$$

fórmula en la cual

$$\cosh\left(\tfrac{r}{G}\right)-1=\frac{e^{r/G}+e^{-(r/G)}}{2}-1.$$

Halló que el área de una esfera es

$$4\pi G^2 \operatorname{senh}^2\left(\tfrac{r}{G}\right)$$

donde

$$\operatorname{senh}\left(\tfrac{r}{G}\right) = \frac{e^{r/G} - e^{-(r/G)}}{2}.$$

Halló que el volumen de una esfera es

$$2\pi G^3 \left(\operatorname{senh}\left(\tfrac{r}{G}\right)\cosh\left(\tfrac{r}{G}\right) - \frac{r}{G}\right)$$

Está de acuerdo con Lambert en que la geometría esférica corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso.

Mostró que la geometría con la hipótesis del quinto postulado establece una conexión entre la geometría esférica y la geometría logaritmicoesférica. Y que basta dar a la constante de Gauss, G, valores reales, luego el valor infinito, luego valores imaginarios para hacer el recorrido: geometría sobre la esfera, geometría sobre el plano euclidiano, geometría sobre la esfera de radio imaginario.

Nicolai Ivanovich Lobachevski

Estudió en la Universidad de Kasán y recibió su grado en 1813. Se interesó por el problema del quinto postulado entre 1815 y 1817, como consta por notas para sus cursos; como sus antecesores, intentó, desde luego, demostrarlo; sus investigaciones se parecen a las de Legendre.

En 1823, terminó la preparación de un libro manuscrito, Geometría elemental, que no fue publicado. En él afirma que no se tiene demostración alguna del quinto postulado, pero que tal prueba debe ser posible.

Pero, entre 1823 y 1825, se preocupó por la geometría que puede hacerse, cuando se deja a un lado el quinto postulado.

El 12 (24 en el calendario occidental) de febrero de 1826, pronunció, en la sección de física matemática de la Universidad de Kasán, una conferencia, cuyo manuscrito nunca fue hallado: "Exposición sucinta de los principios de la geometría con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas". En ella exponía una geometría más general que la ordinaria, en la cual era posible trazar por un punto dos paralelas a una misma recta, y, en la cual la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.

Apoderado ya de su idea, Lobachevski expone sus progresos en las publicaciones que se enumeran en seguida.

1829 - 1830: *Sobre los principios de la geometría.* En 67 páginas, en ruso, exponía de nuevo el material de su conferencia de 1826, con algunas aplicaciones de más.

1835: *Geometría imaginaria.* 50 páginas, en ruso.

1835 - 1838: *Nuevos principios de geometría con una teoría completa de las paralelas.* 267 páginas, en ruso.

1836: *Las aplicaciones de la geometría imaginaria a algunas integrales.* 97 páginas, en ruso.

1837: *Geometría imaginaria.* 25 páginas, en ruso.

1840: *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas.* 25 páginas, en alemán. Con este escrito intentaba Lobachevski llamar la atención sobre sus investigaciones.

1855: *Pangeometría o compendio de geometría fundada sobre una teoría general y rigurosa de las paralelas.* 61 páginas. En ruso y en francés.

La última, que dictó ya ciego, es la culminación de su concepción de la geometría. En 1826 se trata de una geometría más general que la de Euclides; en los años siguientes, ella se va convirtiendo en una pangeometría, en toda la geometría, puesto que abarca la geometría conocida hasta entonces (inexplicablemente, no se hace mención de la geometría proyectiva) como un caso particular. Este ambicioso designio, sería hallado en defecto unos años después, dado que la geometría ideada por Riemann es como la contraparte, respecto a la enseñada por Euclides con base en el quinto postulado, de la concebida por Lobachevski y Bolyai con base en la hipótesis de más de una paralela a una recta por un punto exterior a ella en el mismo plano. Riemann excogita la geometría que resulta al postular que no pasa ninguna paralela.

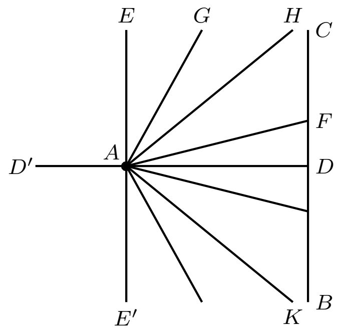
La geometría proyectiva, ideada por Desargues y Pascal, a mediados del siglo XVII, no considera entre sus hipótesis, alguna que la restrinja a cualquiera de las tres posibles posiciones de las geometrías euclidianas o no euclidianas; es más general que ellas; así lo proclaman Cayley y luego Klein hacia los años sesenta del siglo XIX: la geometría proyectiva es la más general de todas las geometrías. Sin embargo, un poco después, hacia finales del mismo siglo, Poincaré inventó las ideas claves para una nueva geometría, que cobija a las anteriores y que, hasta ahora, es la más general de todas las geometrías: la topología. Así, pues, también para los matemáticos, la generalidad es muy relativa: depende de los avances en la investigación.

El punto de partida de Lobachevski es el más indicado para iniciar el estudio de la geometría no euclidiana. Es así. A los matemáticos interesa la existencia y el número de los objetos que resuelven un determinado problema. En este caso, la paralela a una recta dada, por un punto exterior a ella, en el plano determinado por dicha recta y por dicho punto. Ahora bien, los teoremas 27 y 28 del libro I de Euclides garantizan la existencia. La unicidad aparece como un caso límite en el quinto postulado, asumido con muy buen criterio matemático por Euclides, pues, como lo mostró el desarrollo posterior de la geometría, no podía demostrársela, dentro del marco de principios de *Elementos*. Es lícito pensar en lo que sucede entre la existencia y la unicidad. Dado que esta hay que postularla, es interesante para un matemático (cuando este es capaz de desprenderse de la idea de que la geometría se la impone la realidad a su cerebro) averiguar qué consecuencias se pueden sacar si no se la postula. Es lo que osaron suponer los inventores de la primera geometría no euclidiana: hay, no una, sino dos (o más) rectas de un haz plano que no cortan a cierta recta dada que no pertenece al haz pero está en el mismo plano del haz. La pregunta es: ¿Cuáles son las consecuencias lógicas de tal suposición? Es lo que hace Lobachevski en su fascículo de 1840. Vale la pena seguir textualmente el razonamiento del creador.

> Encuentro ciertas imperfecciones en geometría que me parecen ser la razón para que esta ciencia, aparte de su transición a la analítica, no haya podido hacer ningún progreso desde el estado en que nos la dejó Euclides. Entre estas imperfecciones, considero la obscuridad en los conceptos fundamentales de las magnitudes geométricas y en la manera y método de representar la medición de estas magnitudes, y, en fin, la falla importante en la teoría de las paralelas, para llenar la cual han sido inútiles hasta ahora todos los esfuerzos de los matemáticos.

Luego de este preámbulo crítico enuncia y desarrolla su idea.

> Todas las líneas rectas que en un plano salen de un punto, pueden, respecto a una línea recta dada en el mismo plano, dividirse en dos clases: las que la cortan, y, las que no la cortan.



Desde el punto A, trácese sobre la línea BC, la perpendicular AD, y, a esta, trácese la perpendicular AE.

En el ángulo recto EAD, o todas las líneas rectas que salen del punto A van a encontrar la línea DC, como AF, o algunas de ellas, como la perpendicular AE, no encontrarán la línea DC.

No sabiendo si la perpendicular AE es la única línea que no encuentra a DC, vamos a suponer que sea posible que haya aún otras líneas, como AG, que no cortan a DC, por más que se las prolongue.

Al pasar de las líneas que cortan, como AF, a las que no cortan, como AG, debemos tropezar con una línea AH, paralela a DC, una línea frontera, por un lado de la cual todas las líneas AG son tales que no encuentran la línea DC, mientras que, por el otro lado, toda línea recta AF corta la línea DC.

El ángulo HAD, entre la paralela AH y la perpendicular AD, se llama *ángulo de paralelismo*, y se designa $a(p)$, para $AD = p$.

Si $a(p)$ es un ángulo recto, entonces, la prolongación AE' de la perpendicular AE será igualmente paralela a la prolongación DB de la línea DC; hay que observar, además, que respecto a los cuatro ángulos rectos, formados en el punto A por las perpendiculares AE, AD y sus prolongaciones AE', AD', toda línea recta que sale del punto A, ella o a lo menos su prolongación, queda situada en uno de los dos ángulos rectos que miran hacia BC, de manera que, exceptuada la paralela EE', todas las demás, prolongadas suficientemente en ambos sentidos, deben cortar la línea BC.

Si $a(p)$ es menor que $\pi/2$, entonces, por el otro lado de AD y formando un ángulo $DAK = a(p)$ habrá también una línea AK, paralela a la prolongación DB de la línea DC, de tal manera que, bajo esta asunción, debemos también hacer una distinción de lados de paralelismo.

Todas las líneas restantes o sus prolongaciones entre los ángulos rectos que miran hacia BC pertenecen a la clase de las que intersecan, si están situadas dentro del ángulo $HAK = 2\,a(p)$ entre las paralelas; ellas pertenecen, por otra parte, a las que no intersecan, como AG, si están situadas del otro lado de las paralelas AH y AK, en la apertura de uno de los dos ángulos $EAH = (1/2)\pi - a(p)$, $E'AK = (1/2)\pi - a(p)$ entre las paralelas y EE', la perpendicular a AD.

De acuerdo con esto, para la asunción $a(p) = \pi/2$ las líneas solo pueden ser intersecantes, o, paralelas; pero si asumimos que $a(p)$ es menor que $\pi/2$, entonces, debemos admitir dos paralelas, una por un lado, la otra por el otro; además, debemos distinguir entre las líneas restantes, las intersecantes y las no intersecantes.

Para ambas suposiciones sirve como marca de paralelismo el que la línea se vuelva intersecante con la más pequeña desviación hacia el lado donde está la paralela, así que si AH es paralela a DC, toda línea AF corta a DC, por muy pequeño que sea el ángulo HAF.

En la exposición de Lobachevski, el ángulo de paralelismo, $a(p)$, es función de la longitud p de AD. El ángulo de paralelismo $a(p)$ tiende a 90 grados si p tiende a 0, y, tiende a 0 si p tiende a infinito.

En las condiciones puestas, Lobachevski demuestra diversos enunciados.

Teorema (Paralelismo en una dirección)**.** *Si AE es paralela a BC en el punto A, entonces, es paralela a BC en cualquier punto sobre AE.*

Teorema (Simetría del paralelismo)**.** *Si AE es paralela a BC, entonces, BC es paralela a AE.*

Teorema (Transitividad del paralelismo)**.** *Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces, son paralelas entre sí.*

Teorema. *Cuanto más son prolongadas líneas paralelas por el lado en que son paralelas, tanto más se acercan entre sí.*

Según este teorema, las líneas paralelas tienen el carácter de asíntotas.

En la pangeometría de Lobachevski, las paralelas siguen siendo, como en la definición 23 de Euclides, líneas rectas que no se cortan por más que se las prolongue; pero, no son rectas equidistantes, como en Posidonio, sino asintóticas, como lo habían presentido Gémino y otros geómetras en el lento camino hacia la solución del problema ocasionado por el quinto postulado.

Lobachevski se ve en la necesidad de introducir la noción de círculo límite, o, círculo de radio infinito (horociclo) y la de superficie límite o esfera de radio infinito (horosfera): desempeñan, respectivamente, los papeles de la recta y el plano en la geometría euclidiana. La horosfera está formada por infinitos horociclos. Sobre la horosfera existe una geometría análoga a la geometría euclidiana, donde los horociclos se comportan como las líneas rectas de esta.

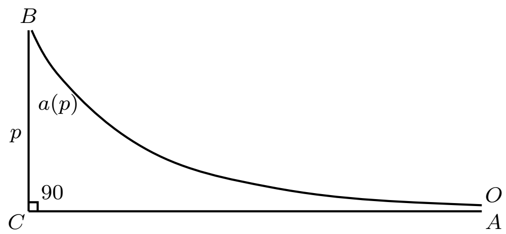
La geometría euclidiana, en particular la trigonometría, vale sobre la horosfera. Este es un resultado importante de Lobachevski, que había sido, por lo menos presentido, por algunos de los predecesores del matemático ruso.

Como constata Bonola (p. 98) la relación

$$e^{-(p/G)} = \tan\bigl(a(p)/2\bigr)$$

es la ecuación clave de la geometría no euclidiana de Bolyai-Lobachevski.

Ella se refiere (Bonola: p. 80, p. 90) a los elementos representados en la siguiente figura



donde $a(p)$ es el ángulo de paralelismo correspondiente a la longitud p, donde G es la constante de Gauss, donde BO y CA son paralelas, y, por tanto, donde el ángulo en A es nulo.

La fórmula, con algunas variantes, fue encontrada en primer lugar por Taurinus, en 1823, y, más o menos al tiempo, por Janos Bolyai; e igualmente por Lobachevski. Las variantes son transformables entre sí; por lo cual, Bonola, p. 90, puede afirmar: la geometría logaritmicoesférica de Taurinus es idéntica con la pangeometría o geometría imaginaria de Lobachevski.

Desde el punto de vista epistemológico es interesante pensar que Taurinus, y Lambert lo había sugerido, investigaba a partir de la trigonometría esférica, utilizando una esfera de radio imaginario, y, números complejos en vez de números reales. En cierta manera, transponía a funciones de números complejos, resultados ya conocidos con funciones de números reales y luego trataba de interpretar lo que obtenía.

En *Nuevos fundamentos de la geometría* escribe Lobachevski:

La infructuosidad de las tentativas, hechas desde la época de Euclides por espacio de dos milenios, despertó en mí la sospecha de que la verdad que se había querido demostrar no estuviese contenida en los datos mismos, y de que para su confirmación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, por ejemplo, de observaciones astronómicas. Habiéndome convencido finalmente de la exactitud de mi conjetura y adquirida la creencia de haber resuelto completamente el difícil problema, escribí, en el año 1826, una memoria sobre este asunto (Exposición sucinta de los principios de la geometría). (*Nuevos fundamentos de la geometría.* 1835).

Así, pues, Lobachevski tiene la idea de esperar una especie de solución de parte de la experiencia para un enunciado que no se ha podido establecer. Esta idea, curiosamente, se puede comparar con la de Kant, cuando enseñaba que la sola lógica no era suficiente para el establecimiento de la geometría, sino que se requería, además, de la intuición, hecho de experiencia interna; tal, empero, que los procesos subjetivos resultaban enteramente de acuerdo con los esquemas de la geometría euclidiana; lo cual llevó a pensar que, según el filósofo de Königsberg, el ser humano es, en cierta manera, naturalmente euclidiano; esta debió de ser la opinión que prevaleció en las academias u otros centros universitarios; para la muestra, Bonola (p. 64, p. 92, p. 121) apunta que la concepción kantiana del espacio fue uno de los obstáculos para la aceptación de la nueva geometría. Por el contrario, la concepción del espacio en Lobachevski tenía que ver toda con la experiencia externa; así, la geometría sería una de las ciencias experimentales. Por la misma época, poco más o menos, disociaba Comte la geometría del resto de la matemática para colocarla cercana a las ciencias naturales. Consecuente consigo mismo, Lobachevski hizo observaciones astronómicas en búsqueda de un hecho experimental concluyente sobre el quinto postulado. Nada más apropiado al problema que el paralaje de las estrellas. Se llama paralaje de una estrella, a la mitad del ángulo según el cual se vería desde la estrella el diámetro de la órbita terrestre. Cuando dicho ángulo es de una décima de segundo, la constante de Gauss (que, desde luego, Lobachevski había reencontrado) debe ser mayor a un millón de veces el diámetro de la órbita terrestre. Para que en la naturaleza se cumpla el quinto postulado, la constante de Gauss debe tomar el valor infinito. En otras palabras, habría que localizar una estrella con paralaje nulo. Esto es, básicamente, imposible hacerlo, dado que las observaciones astronómicas son valederas solamente dentro de ciertos límites. Así, pues, también las estrellas permanecen mudas frente al problema. No sé cual haya sido la reacción de Lobachevski en cuanto al resultado de una experiencia de la cual esperaba tanto. Había escrito:

No hay medio, diferente de la observación astronómica, que se pueda usar para juzgar de la exactitud que atañe a los cálculos de la geometría ordinaria. Tal exactitud es verdaderamente trascendental, como lo he mostrado en una de mis investigaciones, de manera que,

> por ejemplo, en triángulos cuyos lados son alcanzables por nuestras mediciones, la suma de los tres ángulos no es realmente diferente de dos ángulos rectos que por una centésima de segundo.

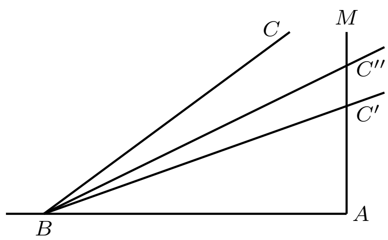
Es muy indicado relacionar este pasaje de Lobachevski con aquel de Gauss en el que da cuenta de las medidas efectuadas por él, del triángulo formado por los montes Brocken, Hohehagen, Inselberg distantes entre sí: Brocken-Hohehagen: 107 km. Brocken-Inselberg: 69 km. Hohehagen-Inselberg: 85 km. Por necesidades de sus trabajos geodésicos, Gauss había sido inducido a inventar el heliotropo, instrumento con espejos móviles para reflejar la luz del sol. (p. 96. W. K. Buhler. *Gauss. A biographical study.* 1981. New York. Springer-Verlag. 208 pp).

Gauss obtuvo casi 15 segundos de exceso sobre 180 grados para la suma de los tres ángulos. No extrajo (por lo menos en el célebre ensayo *Consideraciones generales sobre las superficies curvas*, donde consigna estos datos) ninguna consecuencia sobre la exactitud que tanto preocupa a Lobachevski. El ensayo de Gauss es de 1827. (Alberto Campos. *La teoría gaussiana de las superficies.* pp. 22-66. en A. C. F. Gauss en el bicentenario de su nacimiento. 1983. Bogotá. Departamento de Matemáticas y Estadística. 94 pp)..

Janos Bolyai

Hijo de Wolfgang (Farkas) Bolyai (condiscípulo de Gauss en Göttingen, su amigo y corresponsal de toda la vida). Janos estudió en el Colegio Real de Ingenieros, en Viena, y siguió la carrera militar.

A pesar de los consejos del padre, su primer profesor de matemática, emprendió la tarea de encontrar una demostración para el quinto postulado, entre 1817 y 1822.



Janos Bolyai se hizo muy amigo de su condiscípulo Carl Szász, con quien estuvo pensando mucho en el problema; parece que algunas de las ideas utilizadas por Bolyai se deben a Szász; en particular, la de concebir la paralela por B a una recta AM como la posición límite de una secante BC que gira sobre B en una dirección definida; o, de otra manera, BC es paralela a AM, si BC se desprende de AM. A una tal paralela llamó Bolyai paralela asintótica. También se ocuparon Bolyai y Szász de la línea equidistante de una línea recta y del paraciclo, nombre que dieron a lo que Lobachevski llamó horociclo. El quinto postulado, fue la conclusión de este trabajo conjunto, será derivable cuando se demuestre que el paraciclo es una recta. Hacia 1820, Bolyai, ya solo, creyó haber encontrado, siguiendo el camino de Saccheri y Lambert, la tan buscada prueba. Al darse cuenta de que había cometido errores, cambia de propósito; es entonces cuando escribe:

> No se debe hacer violencia a la naturaleza, ni modelarla en conformidad con cualquier quimera ciegamente formada; sino que se debe observarla razonable y naturalmente, como si uno quisiera de veras la verdad, y, contentarse con una representación de ella cuyo error sea el menor posible.

Así que decidió construir un teoría absoluta del espacio, siguiendo el modelo griego, es decir, deductivamente, pero sin tomar partido a priori sobre la verdad o el error del quinto postulado. El 3 XI 1823, escribe a su padre:

> Ahora he resuelto publicar una obra sobre la teoría de las paralelas, tan pronto como haya puesto en orden el material, y mis circunstancias me lo permitan. No he completado todavía este trabajo, pero el camino que he seguido casi me asegura que alcanzaré la meta, en el caso de que ello sea posible; no lo he logrado aún, pero he hecho descubrimientos tan maravillosos que he llegado a sentirme como confundido por ellos, y que me causaría mucho pesar el que se perdieran. Cuando usted los vea, lo reconocerá usted mismo. Mientras tanto, no puedo decirle más que esto: de la nada he creado un nuevo universo. Lo que le he enviado hasta ahora no es más que una casa de naipes comparada con la torre. Estoy tan persuadido de que esto me dará gloria, como si ya tuviera mi descubrimiento completo.

El padre le responde:

> Si de veras ha tenido usted éxito en la cuestión, es conveniente no perder tiempo para darla a conocer, por dos razones: primero, porque las ideas pasan fácilmente de una persona a otra y alguien puede anticiparse en la publicación; en segundo lugar, hay algo de verdad en esto de que muchas cosas tienen una época, en la que pueden ser encontradas al mismo tiempo en diversos lugares, de la misma manera que las violetas florecen por todas partes en primavera. Además, toda contienda científica es una guerra en serio, en la cual no se puede asegurar cuándo llegue la paz. Así que debemos conquistar cuando somos capaces, dado que la ventaja está siempre del lado del primero que llegue.

En este caso, por lo menos, Wolfgang Bolyai tenía toda la razón pues los progresos de Lobachevski llevaban el mismo ritmo que los de Janos Bolyai.

En 1825, Janos Bolyai envió un resumen de sus conclusiones a su padre, y, a su antiguo profesor en la escuela militar.

En 1829, compuso una exposición, en latín, de cuanto había obtenido; apareció como un apéndice, en 26 páginas, en el primer volumen de una obra de su padre; con frecuencia se lo menciona simplemente como el *Appendix*, dada la longitud de su título, cuya traducción es:

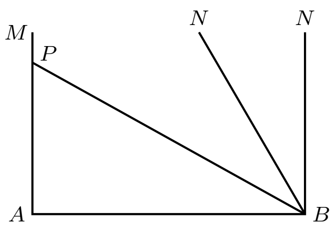
Apéndice, en el cual se muestra la verdadera ciencia absoluta del espacio, independientemente de la verdad o falsedad del axioma de Euclides (la cual nunca podrá ser establecida a priori); se adjunta la cuadratura geométrica del círculo, cuando es falso el axioma de Euclides.

La obra de Bolyai obtuvo permiso de impresión en 1829. En junio de 1831, se envió a Gauss una copia del Apéndice, la cual no llegó a su destino; reenviada en enero de 1832, ocasionó la carta de Gauss ya transcrita. Wolfgang Bolyai la remitió a su hijo Janos, con este comentario:

La respuesta de Gauss respecto al trabajo de usted es muy satisfactoria y redunda en honor de nuestro país y de nuestra nación.

A propósito de la contribución del Príncipe de los Matemáticos a la geometría no euclidiana, ya se dijo cuáles parecen haber sido los sentimientos recíprocos entre Gauss y Janos Bolyai.

En la edición Dover, 1955, de *Geometría no euclidiana*, de Roberto Bonola Ciencia absoluta del espacio, de Janos Bolyai ocupa 42 páginas y se componen de 43 parágrafos. Se destacan, en lo que sigue, algunos de los resultados más dignos de tener en cuenta. Los números se refieren a los respectivos parágrafos en la exposición de Bolyai.



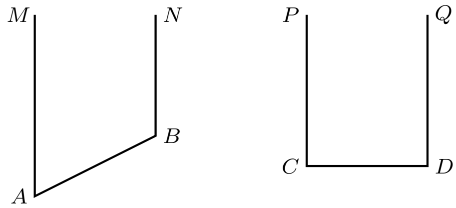
Si el rayo AM no es cortado por el BN, situado en el mismo plano, pero es cortado por cualquier rayo BP comprendido en el ángulo ABN, se dirá que BN es paralela a AM, y, se designará $BN//AM$ (1).

Si una recta es paralela a otra en un punto, es paralela (a la misma recta) en un punto cualquiera (2 y 6).

Puntos como los llamados correspondientes por Gauss (5).

La perpendicular en el punto medio de un segmento cuyos extremos están sobre paralelas, es paralela con ellas (8).

Criterio para el encuentro de planos que contienen rectas que no se encuentran (9).



Si dos puntos son correspondientes con un tercero, son correspondientes entre sí.

Si $BN//AM$ y $CP//DQ$, y, si $\measuredangle MAB + \measuredangle ABN = 1$ ángulo llano, entonces, $\measuredangle DCP + \measuredangle CDQ = 1$ ángulo llano (13).

Si $BN//AM$ y $CP//DQ$, y, si $\measuredangle BAM + \measuredangle ABN < 1$ ángulo llano, entonces, $\measuredangle DCP + \measuredangle CDQ < 1$ ángulo llano (14).

Sea E el sistema de geometría construido sobre la hipótesis de la verdad del quinto postulado, y, F el construido sobre la verdad de la hipótesis contraria.

Lo que no se dice expresamente de E, o, de F, se entiende que es enunciado absolutamente, es decir, es aseverado verdadero, sea E, o, sea F, la realidad (15).

El quinto postulado, la geometría plana, en particular la trigonometría plana se cumplen sobre superficies especiales de la geometría absoluta (21).

La trigonometría esférica es independiente del quinto postulado (26).

Cómo se resuelven problemas en F (32).

Para obtener las expresiones que valen en E, basta calcular, en las expresiones válidas en F, el límite cuando una cierta constante tiende a infinito (32).

Todas las expresiones que se basan en la hipótesis de la realidad de F serán verdaderas absolutamente, aunque sea completamente desconocido si E es o no realidad (32).

Como ejemplos, a partir de algunas fórmulas de la geometría absoluta deduce la correspondiente de la geometría euclidiana (32). Se puede pensar que la emoción producida con estos hallazgos, es la que trataba de comunicar a su padre con aquello de que “de la nada he creado un nuevo universo”. En el número 33, hace algunas reflexiones sobre el significado de los teoremas dados.

Queda por decidir si E, o algún sistema F, es realidad. Todo lo deducido de la hipótesis de la falsedad del quinto postulado [es decir, sin asumir la unicidad de la paralela] es absolutamente verdadero, pues, no depende de hipótesis alguna.

En F es posible construir una unidad natural de longitud. Para los lectores no predispuestos no será inaceptable que, en el caso de que la realidad no sea E sino F, se construye una figura rectilínea equivalente a un círculo (33).

La cuadratura del círculo (43).

Con cada círculo se asocia un cierto ángulo; cuando este es de 45 grados, el área del círculo correspondiente es igual al área del triángulo máximo. Este es un triángulo, cuyos tres ángulos son nulos, ya que: área de un triángulo = $(constante)^2(\pi - \measuredangle A - \measuredangle B - \measuredangle C)$.

En el parágrafo 43, aparece, pues, el resultado espectacular de la cuadratura del círculo, uno de los tres problemas griegos dentro de la geometría euclidiana, es decir, la cuadratura del círculo y la hipótesis Euclides o quinto postulado son incompatibles. En cualquier geometría, anterior o posterior a la de Euclides, que inscriba entre sus postulados uno equivalente al de Euclides, no se podrá construir una figura rectilínea cuadrada, cuya área sea la misma que la de un círculo dado.

... de manera que, o se tiene el postulado de Euclides, o la cuadratura geométrica del círculo, aunque haya quedado sin decidir cuál de las alternativas se presenta en la realidad.

No solo en este caso se puede resolver, en esta geometría, el problema de la cuadratura del círculo sino siempre que el cuadrado de la tangente del ángulo asociado al círculo “es un número entero o una fracción, cuyo denominador (en sus mínimos términos) es un número primo de la forma $2^m + 1$ (en particular $2 = 2^0 + 1$) o también el producto de no importa cuántos números primos de la misma forma, a condición de que si son diferentes de 2, ocurran solo una vez como factores, podemos, gracias a la teoría de los polígonos del ilustre Gauss (hallazgo notable no solo del nuestro sino de cualquier tiempo) construir una figura rectilínea” cuya área sea igual a la de un círculo dado. La razón de que aparezcan los números de Gauss es que al dividir el cuadrado hay que dividir un ángulo llano lo cual no puede efectuarse si no es de acuerdo con dichos números. Más generalmente aun, “cualquier figura rectilínea puede componerse geométricamente como un polígono regular de n lados, si n es uno de lo números de Gauss.

Queda finalmente (para que la cuestión sea completa desde todo punto de vista) por demostrar la imposibilidad de decidir a priori si es E, o algún F (y cuál) la que exista. Esto, sin embargo, se hará en una más conveniente ocasión.

Después de 1831, Janos Bolyai se ocupó de tres problemas.

1. Conexión entre la trigonometría esférica y la trigonometría no euclidiana.
2. ¿Puede probarse rigurosamente que el postulado de Euclides no es una consecuencia de lo que le precede?

3. Volumen del tetraedro en geometría no euclidiana. Resolvió este problema del cual, curiosamente, se había ocupado también Lobachevski.

Respecto al primero de estos problemas, Bolyai encontró un resultado semejante al de Taurinus. Si un determinado parámetro, que puede tomar la forma de la constante de Gauss o de la de Schweikart, varía continuamente desde el dominio real al imaginario, pasando por el infinito, se obtienen, respectivamente, la trigonometría esférica, la euclidiana, y, la no euclidiana (de Bolyai-Lobachevski).

Respecto al segundo, es lastimosa su hesitación: desde el *Apéndice*, retrocede hacia la seguridad de que sí puede probar el quinto postulado (no olvidar en qué condiciones puede tener sentido esta expresión), cree haberlo conseguido debido a un error de cálculo, de lo cual logra darse cuenta. Conoció en 1848 *Las investigaciones geométricas*, de Lobachevski; se propuso escribir un libro acerca de la reforma de los principios de la matemática con el fin de superar al matemático ruso; nunca, empero, escribió tal libro. Habían desaparecido la seguridad y el entusiasmo que lo habían llevado a escribir: "de la nada he creado un nuevo universo". Es esta creación lo que la posteridad le ha tenido en cuenta.

Reflexión sobre la actitud de los cinco fundadores

Taurinus dio crédito a sus cálculos pero nunca estuvo convencido de la nueva geometría; siempre esperó poder demostrar el quinto postulado.

Schweikart admitió la posibilidad, en mundos lejanos, para una geometría diferente a la euclidiana de nuestro mundo ambiente; la otra sería la geometría astral, de los astros. Sus conocimientos algebraicos no le permitieron desarrollar esa otra geometría.

Gauss fue el primero en asegurar la posibilidad de una geometría sin el quinto postulado; ella, empero, no le interesó tanto como para anteponerla a otras de sus extensas y geniales indagaciones.

Bolyai estuvo convencido de la posibilidad de otra geometría; en el *Apéndice* estudia las propiedades geométricas respecto al quinto postulado: cuáles no dependen de él, cuáles sí. Pero quizá nunca volvió a tener tal convencimiento después.

En cambio, Lobachevski tiene una actitud opuesta a las de los cuatro anteriores: una vez persuadido de que no es posible demostrar el quinto postulado, en las condiciones convenidas, se dedica a extraer las consecuencias de la hipótesis de no unicidad de la paralela, a divulgarlas y hasta a poner a prueba, mediante observaciones astronómicas, dichas consecuencias. Escribió varias exposiciones en ruso y, al darse cuenta de la casi nula difusión de sus ideas, hizo publicaciones en francés y en alemán, con el fin de divulgarlas. Es el único de los cinco cuyo convencimiento es pleno en este sentido: no espera la aprobación de Gauss como Schweikart; no duda como Taurinus o como Bolyai; no teme como Gauss (actitud sorprendente de parte de quien tantas ideas nuevas publicó) tener que defender la nueva idea. Para Lobachevski, la pangeometría fue el descubrimiento al que dedicó el resto de su actividad científica, en su vida entera.

El papel de Gauss en el descubrimiento de las geometrías no euclidianas

Gauss estuvo en relación directa o indirecta con cada uno de los otros cuatro creadores, lo cual es digno de anotar.

En efecto, fue consultado por Schweikart (por intermedio de Gerling).

Fue asesor de Taurinus.

Fue gran amigo y corresponsal de Wolfgang Bolyai padre de Janos Bolyai.

Fue colega de su compatriota J. M. C. Bartels (1769 - 1836), en Brunswick, entre 1805 y 1806. En 1807, Bartels fue nombrado profesor en la Universidad de Kazán, fundada en 1805, y allí profesor de Lobachevski. Qué tantas ideas hayan intercambiado los colegas Gauss y Bartels, acerca del quinto postulado, y cuántas le haya comunicado el profesor Bartels a Lobachevski, es otro problema. Nada razonable es la actitud de algunos que se indignan (y esto en particular tratándose de Lobachevski) por la indicación de tales canales de comunicación como si ello atentará contra la originalidad del creador. Cualquier investigación, especialmente la matemática, depende de los logros o tropiezos de investigaciones anteriores; querer comenzar en cero es pretender reconstruir todo lo que se ha hecho hasta entonces: propósito laudable si no fuera por la brevedad de la vida. Lo que cada investigador alcanza a añadir es, generalmente, poco cuando se considera toda la trama de una teoría; ese poco es, empero, imposible sin lo ya inventado por otros, y, es indispensable para lo que se intente inventar luego. De hecho, Lobachevski estudió a fondo la obra de Legendre, dado el párrafo que inserta al comienzo de *La teoría* *de las paralelas* (1840). El alude, para que no quepa duda, a la infructuosa historia del quinto postulado.

Finalmente, fue Gauss el profesor de Riemann, creador de la segunda geometría no euclidiana.

Cuán difícil fue admitir la primera geometría no euclidiana

Se puede estar de acuerdo en que en el año 1832 (nacimiento de la noción de grupo y muerte de Galois) estaban debidamente publicados: *Los principios de la geometría*, de Lobachevski; el *Apéndice*, de Janos Bolyai.

Hubo que esperar, sin embargo, casi 40 años para que Bolyai y Lobachevski fueran reconocidos entre los matemáticos.

Notas bibliográficas acerca de los dos matemáticos, enviadas por Gauss a Gerling, en 1844, incitaron a que este se procurara el *Apéndice*, y, *Las investigaciones geométricas*. Algo semejante sucede con Schumacher. Las referencias de Gauss y su aprobación de los desarrollos de Bolyai y Lobachevski constan en la correspondencia de Gauss y Gerling, y, Gauss y Schumacher, publicada en *Obras completas*, del Príncipe de los Matemáticos, en los años 1860 y siguientes.

En 1866, siendo todavía desconocidos los dos creadores de la primera geometría no euclidiana, se publicó la traducción francesa de *Las investigaciones geométricas*, de Lobachevski, con extractos de cartas entre Gauss y Schumacher. Más de 30 años después de haber visto la primera luz, necesitaba todo el peso de la autoridad de Gauss la exposición de la nueva geometría para despertar el interés del mundo matemático.

Un apoyo más lo constituyó el intento sostenido de Legendre, en los primeros años del siglo XIX, de introducir en textos de enseñanza elemental un tratamiento riguroso de las paralelas.

Es solo a partir de 1867 cuando Bolyai y Lobachevski comienzan a ser mencionados en las publicaciones pertinentes. Incluso fue creado un premio, que tuvo mucho prestigio, por lo menos a principios del siglo XX, con el nombre de Lobachevski. Pero no es lo mismo ser conocido que ser aprobado. El aspecto novedoso, por una parte y por la otra, las implicaciones que era posible prever desde las primeras páginas, en contravía de una larga tradición matemática y filosófica, hacían muy difícil la aceptación de la nueva geometría.

Las reticencias se disiparon con la aparición de dos notables trabajos, el primero de un matemático italiano, el segundo de un matemático alemán:

BELTRAMI Eugenio. *Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea.* Giornale di matematiche. VI. pp. 284-312. 1868. Naples.

KLEIN Felix. *Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie.* Mathematische Annalen. IV. 1871.

Bolyai y Lobachevski habían demostrado que no era posible deducir el quinto postulado de los otros, dado que no se llegaba a ninguna contradicción si se lo substituía por uno diferente. Pero, ¿cómo obtener una conveniente ilustración lo más cercana posible a la geometría habitual, por ejemplo, que atestiguara consistencia? Beltrami piensa en una superficie o cuerpo geométrico de dos dimensiones del espacio euclidiano tridimensional ordinario. ¿Cómo traducir los conceptos geométricos euclidianos de manera que sobre la superficie den la geometría no euclidiana de Bolyai-Lobachevski? En el papel análogo al de las rectas del plano, Beltrami define la geodésica sobre una superficie. La recta en el plano es determinada por dos puntos, sobre la superficie lo es por dos puntos cercanos. Las distancias planas son invariantes mediante congruencias. Sobre la superficie, Beltrami define transformaciones que dejen invariantes las distancias medidas sobre las geodésicas. Al estudiar cuidadosamente las consecuencias de esta condición, Beltrami obtiene que una tal superficie debe tener una propiedad que se expresa diciendo que es de curvatura constante. Intuitivamente, esto quiere decir que la superficie se curva o se separa de un plano, de la misma manera en todas direcciones. Efectivamente, el plano, superficie sobre la cual se realiza la geometría euclidiana, tiene también tal propiedad; más precisamente, es de curvatura constante nula. Los matemáticos conocían ya superficies de curvatura constante: la esfera es de curvatura constante positiva. Hay una superficie de curvatura constante negativa, llamada pseudoesfera. Sobre la primera se realiza una geometría no euclidiana como la de Riemann; sobre la segunda, la de Bolyai-Lobachevski.

Este era el tipo de realización esperado por los matemáticos, suministrado inicialmente por Beltrami y de una manera más completa por Klein. Ahora, el argumento esgrimido por Beltrami podía ser este: si la geometría euclidiana tridimensional es no contradictoria, la geometría no euclidiana bidimensional es no contradictoria. Y, si la geometría bidimensional no euclidiana es contradictoria, entonces, la geometría euclidiana tridimensional es contradictoria. Tal argumentación venció las resistencias de la mayor parte de los matemáticos.

La teoría del conocimiento no puede ser la misma, antes y después de la invención de las geometrías no euclidianas.

Quienes hay que tratan de forzar frases de Aristóteles o de Kant de manera que convengan a uno u otro tipo de geometría. Es de esperar que ya esté suficientemente aclarado, cómo fue de laborioso para los geómetras el llegar a aceptar la coherencia de una teoría por fuera de la de Euclides.

Quienes hay que califican de corriente la aparición de las geometrías no euclidianas; actitud que tiene un mérito: el de hacer contrapeso a la inmensa masa de profanos para la cual la matemática está hecha de una vez por todas. Es bueno recordar, no obstante, que lo corriente hace apenas un poco más de un siglo era considerar la geometría de *Elementos*, como una abstracción de la realidad y por tanto como la única posible. La misma teoría de Kant puede ser interpretada como el intento de mostrar que el ser humano, en cierta manera, es naturalmente euclidiano, en cuanto percibiría euclidianamente. (Léanse algunos pasajes de *Prolegómenos*. Por ejemplo: parágrafo 13. Observación). Los ingentes esfuerzos que costó el tránsito, de la época de la única geometría, correlacionada con la única realidad, a la época de diversas geometrías posibles, merece algo más que una complaciente aquiescencia con la declaración de haberse cumplido así una generalización previsible, una vez ya realizada.

Complementos

I. Algunas opiniones de Poincaré

A propósito de las geometrías no euclidianas son citadas con frecuencia las opiniones de Poincaré; es conveniente recordar algunas de ellas. Se utiliza este texto:

POINCARÉ Henri. *La ciencia y la hipótesis*. (1901). 1945. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 227 pp. Ver especialmente: capítulo III. Las geometrías no euclidianas. Capítulo IV. El espacio y la geometría.

El *convencionalismo*. Para Poincaré, el enunciado 'Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí' es un juicio analítico apriori. ¿Qué tipos de juicios son los axiomas propios de la geometría? ¿Cuál es su naturaleza? ¿Son juicios sintéticos a priori, como decía Kant? No, “porque se nos impondrían con tal fuerza que no podríamos concebir la proposición contraria, ni construir sobre ella un edificio teórico. No habría geometría no euclidiana”. Un ejemplo de juicio sintético, para Poincaré, es el llamado principio de inducción matemática: si un teorema es válido para el número 1; si se ha demostrado que es válido para $n + 1$, con tal que lo sea para n; será válido para todos los números naturales. Imposible intentar construir una falsa aritmética sobre la negación del principio de inducción, como si es posible construir una geometría no euclidiana. Los axiomas de la geometría no son, pues, juicios sintéticos a priori, como el principio de inducción matemática.

¿Serán los axiomas de la geometría, verdades experimentales? Imposible, dado que es una ciencia exacta. La experiencia, dice en la conclusión del capítulo IV, desempeña un papel indispensable en la génesis de la geometría, pero sería un error concluir de ello que la geometría es una ciencia experimental, aun en parte. Las verdades de la geometría se establecen de una vez por todas, no están sometidas a continua revisión. Los axiomas geométricos no son, pues, ni juicios sintéticos a priori, ni hechos experimentales. ¿Qué son, entonces?

Aquí viene la afirmación contundente de Poincaré. Los axiomas son convenciones. Nuestra elección entre todas las convenciones posibles está guiada por los hechos experimentales. pero permanece libre y solo está sometida a la necesidad de evitar contradicción. Los postulados pueden permanecer rigurosamente válidos, aun cuando las leyes experimentales que han determinado su adopción no son más que aproximadas... Los axiomas de la geometría no son sino definiciones disfrazadas. ¿Es verdadera la geometría euclidiana? La pregunta no tiene ningún sentido. Es lo mismo que preguntar si el sistema métrico es verdadero, y, las antiguas medidas falsas; si las coordenadas cartesianas son verdaderas, y, las coordenadas polares falsas. Una geometría no puede ser más verdadera que otra; solamente puede ser más cómoda (Capítulo III).

Espacio euclidiano y *no euclidiano*. Seres cuyo espíritu fuera como el nuestro y que tuvieran los mismo sentidos que nosotros. pero que no hubieran recibido ninguna educación previa, podrían recibir de un mundo exterior, convenientemente elegido, impresiones tales que fueran llevados a construir una geometría distinta de la de Euclides y a localizar los fenómenos de ese mundo exterior en un espacio no euclidiano, o aun en un espacio de cuatro dimensiones. Si nosotros, cuya educación ha sido hecha por nuestro mundo actual, fuéramos bruscamente transportados a ese mundo nuevo, no tendríamos dificultad en relacionar sus fenómenos con nuestro espacio euclidiano. Inversamente, si esos seres fueran transportados al nuestro, serían llevados a relacionar nuestros fenómenos con el espacio no euclidiano. ¿Qué digo? Con un pequeño esfuerzo, nosotros podríamos hacerlo igualmente. Cualquiera que consagrara a ello su existencia, podría quizá llegar a representarse la cuarta dimensión.

Si el espacio geométrico fuera un marco impuesto a cada una de nuestras representaciones, consideradas individualmente, sería imposible representarse una imagen despojada de ese marco y nada podríamos cambiar en nuestra geometría. Opinión esta de Poincaré opuesta a un socorrido argumento de Kant en pro del apriorismo de espacio y tiempo.

Nada nos impide imaginar una serie de representaciones, totalmente semejantes a nuestras representaciones ordinarias, pero sucediéndose según leyes diferentes de aquellas a que estamos acostumbrados. Se concibe entonces que seres cuya educación se hiciera en un medio donde esas leyes fueran así trastornadas, podrían tener una geometría muy diferente a la nuestra.

Supongamos, por ejemplo, un mundo encerrado en una gran esfera y sometido a las siguientes leyes:

- La temperatura no es allí uniforme; es máxima en el centro y disminuye a medida que aumenta la distancia al mismo para reducirse al cero absoluto sobre la superficie por la que está limitado ese mundo.
- Sea R el radio de la esfera y r la distancia del punto considerado al centro de la esfera. La temperatura absoluta es proporcional a $R^2 - r^2$.
- Todos los cuerpos tienen el mismo coeficiente de dilatación, así que la longitud de una regla cualquiera es proporcional a su temperatura absoluta.
- Un objeto transportado de un punto a otro cuya temperatura es diferente, se pone inmediatamente en equilibrio calórico con su nuevo medio.

Consecuencias:

- Un objeto móvil se volverá cada vez más pequeño a medida que se acerque a la superficie esférica límite.
- Aunque este mundo esté limitado desde el punto de vista de la geometría habitual, parecerá infinito a sus habitantes. En efecto, cuando estos quieran acercarse a la superficie límite se enfriarán y se harán cada vez más

pequeños. También los pasos que den serán cada vez más pequeños de manera que no podrán alcanzar jamás la superficie límite.

Si, para nosotros, la geometría es el estudio de las leyes según las cuales se mueven los sólidos invariables, para esos seres imaginarios será el estudio de las leyes según las cuales se mueven los sólidos deformados por esas diferencias de temperatura. En nuestro mundo, los sólidos naturales experimentan iguales variaciones de forma y de volumen debidas al calentamiento o al enfriamiento; se desechan, empero, tales variaciones por ser muy pequeñas e irregulares. En ese mundo hipotético no sería lo mismo y esas variaciones seguirían leyes regulares. Por otra parte, las diversas piezas sólidas que constituirían los cuerpos de sus habitantes sufrirían las mismas variaciones de forma y de volumen.

Una hipótesis más: la luz atraviesa medios de distinta refringencia y de manera tal que el índice de refracción sea inversamente proporcional $R^2 - r^2$.

Consecuencia: los rayos luminosos no serían rectilíneos sino circulares.

Poincaré supone, luego, que un objeto se desplaza, no como un sólido invariable, sino deformándose, como un sólido que experimenta dilataciones desiguales de acuerdo con la ley de temperatura. Estos serían los desplazamientos peculiares de ese mundo no euclidiano. Si un ser sensible se encuentra en la proximidad, sus impresiones serán modificadas por el desplazamiento descrito del objeto, pero podrá restablecerlas moviéndose él mismo de una manera conveniente. Poincaré redondea su construcción de su mundo cerrado no euclidiano con estas consecuencias: las impresiones de los seres sensibles vuelven a ser las mismas que las de seres sensibles en un mundo euclidiano; en particular, las táctiles y las visuales. Estos seres imaginarios serán, pues, como nosotros, inducidos a clasificar los fenómenos y a distinguir entre ellos los cambios de posición susceptibles de ser corregidos por un movimiento voluntario correlativo. Si crean una geometría, no será como la muestra, el estudio de los movimientos de nuestros sólidos invariables; será el estudio de los cambios de posición que hayan así distinguido, esto es, el estudio de los desplazamientos de su geometría. De esta manera no tendrían la misma geometría que nosotros (Capítulo III).

II. Horociclo

Se ensaya aquí dar una idea de la noción de horociclo mediante analogía con dos casos fácilmente entendibles; no se ensaya ir más allá por ser una explicación que requeriría, para ser completa, la introducción de nociones estudiadas pertinentemente en un curso acerca de geometrías no euclidianas.

Se puede considerar un haz, sea

- de rectas por un punto,
- de paralelas como rectas equidistantes,
- de paralelas como rectas que no se encuentran.

Entiéndase por trayectoria ortogonal el conjunto de los puntos correspondientes, según la definición de Gauss en su segunda sinopsis de geometría no euclidiana.

Entonces:

- Los puntos de la trayectoria ortogonal para la primera noción de haz están sobre una circunferencia.
- Los puntos de la trayectoria ortogonal para un haz de paralelas como rectas equidistantes están sobre la recta perpendicular a cada una de las rectas del haz.
- Los puntos de la trayectoria ortogonal para un haz de paralelas como rectas que no se encuentran forman la curva llamada horociclo.

El conjunto de los puntos equidistantes de una recta fija en una geometría con paralelas como rectas equidistantes es una paralela.

El conjunto de los puntos equidistantes de una recta fija en una geometría con paralelas como rectas que no se encuentran es una curva llamada curva equidistante.

III. La cuadratura del círculo en la geometría de Bolyai-Lobachevski

Esbozo de la construcción de la *cuadratura del círculo* en una geometría con la hipótesis del ángulo agudo. Más detalles se pueden ver en Bonola, pp. 107-111.

Construir una paralela a uno de los lados de un ángulo agudo que sea igualmente perpendicular al otro lado del mismo ángulo agudo.

Se sabe que: el área de un triángulo es igual a

$$k^2\,(\pi - \measuredangle A - \measuredangle B - \measuredangle C)\,.$$

El triángulo es máximo cuando: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = 0$, es decir, cuando los ángulos A, B, C del triángulo están en el infinito, porque, entonces, el área de dicho triángulo es igual a $k^2\pi$.

Lambert calculó la fórmula para el defecto de un polígono de n lados; es el número: $2(n-2)$rectos - suma de los ángulos del polígono.
El defecto de un polígono es proporcional al área del polígono.
Para buscar el ángulo del cuadrado cuya área sea $k^2\pi$, se tiene $n = 4$, $2(4-2)$rectos $= 4$ rectos $= 2\pi$, y, el área del cuadrado de ángulo A es $k^2\,(2\pi - 4A)$.
Se debe cumplir, pues, la condición: $k^2\pi = k^2(2\pi - 4A)$.
Condición que determina a A, igual a $(1/4)\pi$.
Con este dato es posible construir un triángulo rectángulo, uno de cuyos ángulos es $(1/4)\pi$, triángulo que es la octava parte del cuadrado hallado.
Hay que construir un círculo cuya área sea igual a la del cuadrado. Para lo cual hay que asociar un determinado ángulo a cada círculo; cuando este ángulo es $(1/4)\pi$, el área del círculo correspondiente es $k^2\pi$.
Esto es, el área del círculo cuyo ángulo asociado es $(1/4)\pi$, es igual al área de un triángulo máximo, igual a la de un cuadrado. Así a un círculo ha sido posible asociar un cuadrado de manera que el área del círculo y del cuadrado sean iguales.

En la geometría de Bolyai-Lobachevski es posible la cuadratura del círculo. Este resultado fue obtenido por Bolyai, quien lo halló tan espectacular que lo hace figurar en el título del *Appendix*. "O es verdadero el quinto postulado, o es verdadera la cuadratura del círculo" es el comentario con el que da su conclusión.

IV. Más acerca del trabajo de Beltrami

Intuitivamente, es claro que en un plano por un punto exterior a una recta no puede pasar sino una recta paralela. Hay que forzar la imaginación en demasía para aceptar los razonamientos de Bolyai, o los de Lobachevski, o los de quien pretenda mostrar con un dibujo, cómo se niega el quinto postulado. Lo que hizo Beltrami fue explicar satisfactoriamente las situaciones en las que se realizan las tres geometrías.

Las geometrías no euclidianas se realizan sobre superficies también llamadas planos como la superficie sobre la cual se realiza la geometría euclidiana.

Tienen en común con el plano euclidiano, tales “planos”, el tener dos dimensiones, propiedad muy general, en la que no se recalca tanto como se debiera, sobretodo cuando se hace el intento de comprender algo de las geometrías no euclidianas. Al hablar de plano se piensa que la rigidez (de una sección plana como la mesa) es tan importante como la propiedad de tener dos dimensiones; en verdad, son muy pocas las propiedades de las superficies que son tan generales como la de tener dos dimensiones.

Dos superficies planas en el sentido de Euclides, coinciden en el sentido de Euclides, porque son rígidas. Una hoja de papel es una sección plana que coincide con una porción de cualquier sección plana rígida, pero también con una porción de la superficie cilíndrica de una botella. Esta coincidencia es una correspondencia uno a uno entre puntos de una sección plana y puntos de una porción de otra sección plana.

Hay correspondencias uno a uno menos patentes, como la de un mapamundi y la de la esfera terrestre; es posible por el hecho de tener ambas superficies dos dimensiones. Cantor y Peano descubrieron correspondencias entre variedades (término técnico) de dimensiones diferentes, pero a costa de otra propiedad tan importante como la de la dimensión, la de la continuidad, o sea la propiedad de que puntos cercanos correspondan a puntos cercanos.

La hoja de papel, que puede extenderse sobre una mesa, o aplicarse sobre la parte cilíndrica de un frasco, se aplica con dificultad sobre una superficie esférica, lo cual no se logra sino, a costa de la continuidad, arrugando partes de la hoja; pero, la superficie esférica tiene dos dimensiones, como la hoja de papel; la diferencia entre una y otra se mide gracias a una propiedad específica llamada curvatura de la superficie; es un número que indica cuánto se separa la superficie de una superficie plana. Así, el plano euclidiano, tiene curvatura cero; por su parte, la esfera tiene curvatura constante positiva; hay superficies con curvatura constante negativa; hay una, en particular, cuyas propiedades admiten comparación con las de la superficie esférica, por lo cual se la llama pseudoesfera. Cada una de estas superficies puede ser dotada de una geometría propia, de manera intrínseca, es decir, sin tener en cuenta elementos exteriores a la superficie.

Precisamente, Beltrami, en 1868, mostró que así como la geometría euclidiana es la geometría propia del plano euclidiano, la geometría de Bolyai-Lobachevski es la geometría propia de superficies de curvatura constante negativa, como la pseudoesfera. La superficie sobre la cual se considera una geometría de Bolyai-Lobachevski se llama a veces plano de la geometría de Bolyai-Lobachevski. De la misma manera, una superficie de curvatura constante positiva, como la esférica, sobre la cual se considera la geometría de Riemann, se puede llamar plano de la geometría de Riemann.

Una propiedad esencial de una superficie (variedad bidimensional en el lenguaje técnico de los geómetras) es que bastan dos coordenadas (como la longitud y la latitud sobre la superficie terrestre, o, como los números abscisa y ordenada sobre el plano de la geometría cartesiana) para determinar un único punto sobre ella. Y recíprocamente. Gracias a esta propiedad de las superficies, de tener dos dimensiones, es posible establecer biyecciones entre tales superficies y luego, biyecciones especiales, llamadas homeomorfismos: son correspondencias biyectivas que a puntos cercanos a uno dado hacen corresponder puntos también cercanos entre sí. Más interesante aun: por este medio es posible establecer correspondencias entre las geometrías de dos superficies diferentes.

Es así como se puede traducir una geometría a otra y, en particular, a la geometría euclidiana. Como sucede en la investigación matemática, el trabajo de Beltrami había sido precedido de otros notables trabajos, especialmente, uno del mismo Beltrami.

Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. Ann. di Mat. T. VII. pp. 185-204. 1866.

Dada una superficie de curvatura diferente de cero, Beltrami inventa una correspondencia con el círculo unidad, $x^2 + y^2 = 1$, en el plano cartesiano euclidiano, de curvatura cero, como ya se dijo, de modo que

- a la fórmula para medir distancias sobre el círculo unidad corresponda una determinada fórmula para medir distancias sobre la superficie dada;
- a los puntos sobe la circunferencia del círculo unidad correspondan los puntos en el infinito de la superficie dada;
- a las cuerdas del círculo unidad correspondan las líneas geodésicas o líneas sobre las cuales se mide la menor distancia sobre la superficie dada; una geodésica es una curva de longitud mínima, como una recta es la menor distancia entre dos puntos;
- a las cuerdas del círculo unidad con un punto común sobre la circunferencia del círculo unidad correspondan las geodésicas paralelas sobre la superficie dada.

Con esta investigación, Beltrami resolvió el problema de traducir propiedades sobre una superficie dada a propiedades sobre el círculo unidad. Resuelto este problema, pudo estudiar la relación entre geometrías no euclidianas y geometría euclidiana. Los resultados fueron publicados en el ensayo

Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Giorn. di Mat. T. VI. pp. 284-312. 1868.

La conclusión capital de los trabajos de Beltrami puede enunciarse así:

Si las geometrías no euclidianas son contradictorias, entonces, también es contradictoria la geometría euclidiana.

Ligada la suerte de las geometrías no euclidianas a la de la misma geometría euclidiana, los geómetras ya no podían seguir considerándolas con la misma indiferencia con la que lo habían hecho hasta entonces. La aceptación de ellas dentro de la matemática traía consigo, entre otros, problemas de fundamentación. Era necesario reexaminar la noción misma de axiomatización de la geometría, el papel de la intuición , y, las posibles consecuencias epistemológicas. Se abre un campo de investigación que se extiende en varias direcciones. En capítulos posteriores se estudiarán aquellos desarrollos que tengan que ver con la axiomatización a la manera de Euclides, que será modificada a fondo y completada.

En el apéndice V, "Sobre superficies de curvatura gaussiana constante", en *Fundamentos de la geometría*, Hilbert completa el trabajo de Beltrami. Según el matemático italiano, sobre una superficie de curvatura constante negativa es posible realizar, *localmente*, un plano, no euclidiano, con la geometría de Bolyai-Lobachevski, si se consideran como rectas las líneas geodésicas y como longitudes y ángulos los de la superficie. *Globalmente*, ¿es posible la misma representación? En 1901, Hilbert mostró que no hay superficies, sin singularidades, analíticas (restricción no esencial), regulares por todas partes y de curvatura constante negativa. Este resultado permite a Hilbert concluir que no es posible realizar, en el espacio de tres dimensiones, mediante una superficie, en el sentido de Beltrami, el plano *completo* de Bolyai-Lobachevski.

Cuestiones

1. ¿La relación “estar en” caracteriza a alguna de las tres geometrías? ¿La relación “estar entre”? ¿La de “ser congruente”? ¿La ausencia de paralelismo caracteriza a alguna de las tres geometrías? La semejanza es propia de una de las tres geometrías. ¿Cuál?
2. Qué es lo que supone en realidad el quinto postulado: ¿Existencia de una paralela? ¿Unicidad de una paralela? ¿El problema de Euclides es la existencia de paralelas, o, la unicidad, o ambas? ¿Por qué es inapropiado llamar postulado de las paralelas al quinto postulado, es decir, al enunciado original de Euclides?
3. ¿En qué teorema necesita Euclides el quinto postulado? ¿Por qué lo necesita? ¿A qué se llama geometría euclidiana? ¿No euclidiana?
4. ¿Las 28 primeras proposiciones del libro I de *Elementos* son válidas en una geometría sin el quinto postulado? ¿Por qué?
5. En la geometría de Riemann no hay paralelas. Por tanto, en esta geometría no es válido el teorema I 27. ¿Por qué? Confirme con un esquema lógico, según lo estudiado en el segundo capítulo, que efectivamente dicho teorema no es válido en la geometría de Riemann.
6. La hipótesis que Proclo ha tomado de Aristóteles, fue demostrada por Saccheri; es demostrable en la geometría de Bolyai-Lobachevski, pero no en la de Riemann. ¿Qué tanto puede ayudar la intuición a prever este resultado?
7. La hipótesis de Proclo de que la distancia entre dos paralelas permanece finita se cumple en la geometría euclidiana, pero no en la de Bolyai-Lobachevski. ¿Qué tanto puede ayudar la intuición a prever este resultado? ¿Hay razones para proscribir la intuición de un texto axiomatizado? ¿Como cuáles?
8. Escribe Proclo de Licia (*Científicos griegos*. II. p. 1174): “Es posible que la prolongación al infinito de rectas no paralelas se produzca en una parte y en la otra no, juntándose en un lado y alejándose cada vez más en el otro”. Trace una figura que traduzca esta anotación de Proclo. ¿Tiene razón Proclo? Compare con las figuras que acompañan las explicaciones de Bolyai o de Lobachevski. ¿Era importante lo que añadía Euclides en la definición 23: “... prolongadas en ambos sentidos...”? ¿Si se suprime esta condición, pasamos de la geometría de Euclides a la de Bolyai-Lobachevski? ¿O hay que añadir la no unicidad de la paralela? ¿Iban por buen camino

los presentimientos de Proclo? ¿Cree usted que es "natural" suponer la no unicidad de la paralela como lo parecía la unicidad? ¿No le parece que lo "natural" es sencillamente aquello a que hemos sido acostumbrados? ¿Si era "natural" por qué fue tan difícil, primero, que algunos geómetras se dieran cuenta de ello; segundo, que los matemáticos lo aceptaran? ¿Lo que ahora parece "natural" floreció espontáneamente en la mente de los creadores o solamente después de un arduo trabajo? Es más: ¿Cómo es que la anotación de Proclo, que ahora nos parece tan precursora y tan inteligente, no puso a pensar a los geómetras, en particular al mismo Proclo, no pudo indicarles la vía hacia la geometría no euclidiana? ¿Estas y otras reflexiones análogas, serán apropiadas únicamente para la geometría? ¿O habrá que hacerlas, acerca de tantas ideas que nos presentan como "naturales"? Indicar algunos ejemplares. Estudiado de este modo, Euclides se convierte en un provechoso ejercicio del aprendizaje de "no tragar entero". En la década del 70, el régimen militar de uno de los países del continente, calificó de subversivos a algunos profesores interesados en la renovación de la enseñanza de la geometría, por querer remover a Euclides, autoridad consagrada por los siglos, de su pedestal en el adoctrinamiento de las juventudes. ¿El estudio que se hace de Euclides propende a criticarlo por gozar de autoridad? ¿O a poner en claro la solidez se las bases sobre las que descansa la autoridad de que ha disfrutado?

9. ¿En qué geometría, la diferencia entre la suma de los ángulos internos de un triángulo y dos ángulos rectos, es proporcional área del triángulo?

10. Bolyai-Lobachevski demostraron la independencia del quinto postulado respecto a los otros supuestos de Euclides, mostrando que si se niega el quinto postulado no se sigue contradicción en el sistema. Comparar este plan con el de Saccheri. ¿Qué se proponía Saccheri? ¿Lo logró?

11. ¿Cuando se dice que se demostró que era imposible resolver afirmativamente el problema del quinto postulado, se quiere decir, el problema tal como estaba puesto. En otras palabras, el quinto postulado no es una consecuencia axiomática de los primeros principios enunciados al comenzar el libro I de *Elementos* (23 definiciones, 4 postulados, 5 nociones comunes) y de las 28 primeras proposiciones del mismo libro I (no olvidar que el quinto postulado es utilizado por Euclides, por primera vez, para demostrar el I 29) así se le añadan algunos detalles requeridos por el rigor no considerados por Euclides. Ello no quiere decir que no se pueda reordenar la exposición axiomática recomenzándola completamente con postulados

diferentes. Entonces, lo postulado por Euclides aparecerá como teorema. La geometría resultante no diferirá sino en la presentación. El número de teoremas será, poco más o menos, el mismo. Howard Eves, en la página 16 del Tomo I de *Estudio de las geometrías* ((1963). Traducción española: 1969. México. UTEHA. $xvii + 417$ pp.) asegura que E. S. Loomis, en un libro llamado *La proposición pitagórica*, ha reunido y clasificado 370 demostraciones del teorema de Pitágoras. A juzgar por lo estudiado hasta ahora, ¿podrá tratarse de 370 axiomatizaciones, por el estilo de la del libro I de *Elementos*, diferentes entre sí? ¿O se tratará de variaciones en las que ciertos teoremas serán refundidos o cambiados de su lugar en la demostración, lo cual hasta cierto punto es posible? Recordar la respuesta a la pregunta: Caminos posibles desde los primeros principios hasta un teorema dado; y desde este hasta el teorema de Pitágoras.

12. A líneas rectas con las propiedades
    1) son coplanares
    2) no tienen puntos comunes
    3) son equidistantes

    les convienen

    a) ¿la definición 23 del libro I?
    b) ¿la definición I 23 y el teorema I 29?
    c) ¿la definición de Posidonio?

    ¿Cuál de las propiedades 1), 2), 3) hay que quitar para que las restantes convengan a rectas de Bolyai-Lobachevski?

13. Gauss dice que “si queremos hacer que la nueva geometría concuerde con los datos de la experiencia” tenemos que hacer tender la constante k al infinito en la fórmula para la longitud de la circunferencia,

$$\pi k \left(e^{(r/k)} - e^{-(r/k)}\right).$$

    Según esto, ¿cuál era la opinión de Gauss acerca de las relaciones entre: geometría euclidiana, experiencia, geometría no euclidiana? (El cálculo del límite no interviene para nada en la respuesta).

14. Se dice que una de las razones que daba Taurinus para su posición ambigua respecto de la geometría no euclidiana a cuyo advenimiento contribuyó, era la de que temía las iras de los kantianos. Verificar que ello era históricamente posible. ¿Qué tipo de motivación es este de Taurinus: psicológico, o, de otro tipo?

15. Criticar la afirmación siguiente: "Los matemáticos no se guían forzosamente por la lógica". ¿Puede tener en ellos más influencias que la lógica, el ambiente u otra consideración? ¿Cómo influyó el aspecto humano de los creadores de las geometrías no euclidianas en la creación de estas? (hay suficientes datos en este capítulo quinto para responder a la pregunta).

16. ¿Habría hoy en día, la misma dificultad para aceptar una teoría que la que tuvieron que vencer los divulgadores, entre ellos los creadores mismos, de la geometría no euclidiana? ¿La aplicabilidad o no aplicabilidad de una teoría son óbice para la difusión de ella? ¿Un gobierno destinará más fácilmente fondos para una investigación que promete aplicaciones inmediatas o para una, teóricamente interesante, pero de aplicaciones inciertas? Comparar estas situaciones con la que describe Platón en *República*. Ver: *De Pitágoras a Euclides*. 409.

17. ¿El globo terrestre es ilimitado? ¿Tiene límites o fronteras? ¿Cuántas dimensiones tiene? ¿Cuáles son las coordenadas de Bogotá? El conjunto de los círculos máximos sobre el globo terrestre es: ¿Finito? ¿Infinito? ¿Numerable? ¿No numerable? ¿Dos puntos sobre el globo terrestre determinan un único círculo máximo? ¿Desde un punto exterior a un círculo máximo existe un único círculo máximo perpendicular a aquél? ¿O dos? ¿O infinitos? ¿Los círculos máximos se cortan siempre en dos puntos? ¿Dos círculos máximos encierran espacio? ¿Qué propiedad análoga a una propiedad de las rectas del plano euclidiano tienen los círculos máximos? Considere el ecuador terrestre y diversos triángulos sobre el globo terrestre: ¿Cumplen el primer teorema del ángulo externo? (I 16). ¿Los paralelos terrestres son círculos máximos? ¿Qué diferencia hay entre el ecuador terrestre y los paralelos? ¿Los paralelos terrestres se cortan? ¿El nombre de paralelos tiene que ver con la geometría de la superficie esférica o con la del plano euclidiano?

18. Según Proclo, el teorema 20 hacía reír a algunos epicúreos; según ellos (testimonio de Proclo, neoplatónico no epicúreo) el teorema 20 no necesitaba demostración, pues, era "conocido" incluso para un asno, dado que al suministrarle forraje, el asno va en línea recta hacia él y no por una línea quebrada triangular. Según Heath, página 287, Savile opinó que tales observadores deberían estar tragando heno con el asno. Proclo, sin embargo, se había tomado el trabajo de rebatirlos. Una cosa es la percepción de la

verdad, otra es la prueba de que efectivamente es una verdad. Imagine sobre la superficie esférica una situación en la que se va mejor por el camino triangular que por el de la línea recta. (Hay por lo menos una).

19. Comentar esta afirmación de Martin, página 244:

    > Pudo haber tomado dos milenios el vindicar a Euclides, pero, ¿fue vindicado? Sabemos ahora que cualquier argumento que se dé para probar el postulado de Euclides dentro de la geometría absoluta, es necesariamente circular, así el argumento sea dado por un matemático, por un filósofo, o por un teólogo.

    ¿Por qué es necesario precisar, como lo hace Martin, que lo que se dice vale para la geometría absoluta, es decir, para el sistema formado por las 28 primeras proposiciones de Euclides.

20. Dice Martin, página 244:

    > Las ramificaciones de la teoría de las paralelas han tenido implicaciones tan importantes sobre la visión del hombre acerca de su relación con su universo y sus dioses, como la que tuvo la teoría heliocéntrica de Copérnico o la teoría darwiniana de la evolución.

    ¿Las tres teorías en cuestión han tenido el mismo tipo de influencia? Considerar, por ejemplo, la influencia de las tres teorías sobre la del conocimiento. Mencionar otras disciplinas sobre las cuales hayan podido influir: sociología, psicología y antropología.

21. Teóricamente, es decir, sin tener en cuenta el inconveniente de los océanos, ¿es posible construir un ferrocarril, uno de cuyos rieles sea el ecuador terrestre? ¿Por qué esta posibilidad ('Experimento mental') no es contraejemplo ni para la geometría euclidiana, ni para la de Riemann?

22. Escribe Gauss, en 1817: "Estoy cada vez más convencido de que no puede ser probada la necesidad de nuestra geometría". ¿A qué geometría se refiere? ¿Qué bastará hacer para mostrar que no puede ser probada tal necesidad? ¿Se logró esto después?

23. La suma de los ángulos de un triángulo geodésico sobre superficie de curvatura positiva constante es mayor que dos ángulos rectos: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$ es mayor que π.

    El área de un triángulo geodésico es proporcional al exceso de la suma de sus ángulos sobre dos ángulos rectos:

    $$S = k^2(\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C - \pi).$$

¿Sobre una esfera de radio k, hay valores máximos para los ángulos en A, en B, en C? (Considerar los tres ángulos al tiempo). ¿Cuál sería, en tal caso, el área de un triángulo? ¿Podrá haber triángulos de área mínima? ¿Triángulos rectángulos equiláteros? ¿Triángulos tales que $S = k^2$? (Geodésico, en este caso, significa que los lados son segmentos de circunferencias máximas).

24. Se cree que Lambert se basó en la fórmula del #23 para el área, cuando sugirió que de cumplirse la hipótesis del ángulo agudo, ocurriría en el caso de una esfera imaginaria, la cual se obtiene al cambiar en la fórmula anterior k por $k\sqrt{-1}$.

    Posteriormente se mostró que:

    La suma de los ángulos de un triángulo geodésico sobre superficie de curvatura negativa constante es menor que dos ángulos rectos: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$ es menor que π.

    El área de un triángulo geodésico es proporcional a la diferencia entre la suma de sus ángulos y dos ángulos rectos:

    $$S = k^2(\pi - \measuredangle A - \measuredangle B - \measuredangle C).$$

    Se puede suponer que los tres ángulos disminuyan simultáneamente hasta hacerse nulos. ¿Cuál es entonces la superficie de este triángulo máximo? (Este triángulo es importante en la demostración que hizo Bolyai de que en la hipótesis del ángulo agudo el problema de la cuadratura del círculo es resoluble afirmativamente). ¿Hay un triángulo de superficie mínima?

25. ¿En la hipótesis del ángulo recto, hay triángulos de superficie máxima? ¿De superficie mínima? ¿Se puede caracterizar la geometría euclidiana mediante una propiedad que tenga que ver con la superficie de los triángulos? (Recordar a Gauss).

Bibliografía

1. A. D. ALEKSANDROV, A. N. KOLMOGOROV, M. A. LAURENTIEV y otros. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Versión española de la versión inglesa del original ruso (1956). 1973. 1976. Madrid. Alianza Universidad. Número 70. Tomo 3. 16. Geometrías no euclidianas. A. D. Aleksandrov. pp. 123-227.
2. Roberto BONOLA. *Non euclidean geometry.* (1906). Traducción inglesa de original italiano. 1912. Dover republication. 1955. $xiv + 268$ pp. with a supplement containing:

   John BOLYAI. *The science of absolute space.* Translator's introduction: xxx pp. Bolyai's text: 70 pp.

   Nicholas LOBACHEVSKI. *Geometrical researches on the theory of parallels.* Translator's introduction: 10 pp. Theory of parallels: 50 pp.
3. Philip J. DAVIS and Reuben HERSH. *The mathematical experience.* 1981. Boston. Birkhäuser. $xix + 440$ pp.
4. George E. MARTIN. *The foundations of geometry and the non euclidean plane.* 1975. New York. Springer-Verlag. $xvi + 509$ pp.

Nota (Sobre la unidad absoluta de longitud). Hay una medida absoluta de ángulos: el ángulo de 2π radianes, o de $360°$, tiene el mismo tamaño de cualquier manera que se lo dibuje. Cualquier otro ángulo es una parte bien definida del primero. No así un segmento, que varía de longitud según la unidad de medida que se considere. En geometría euclidiana, precisamente porque hay semejanza de triángulos, no es posible tener unidad absoluta de longitud. Sí lo es en una geometría con la hipótesis del ángulo agudo, donde solo hay congruencia, al ser posible asociar un segmento con un ángulo, mediante ángulo de paralelismo. La fórmula empleada es: $y = 2 \arctan e^{-(x/k)}$. Las unidades absolutas de longitud resultantes, interpretadas físicamente, pueden ser astronómicas. Por ejemplo: 10^{10} años luz, esto es, diez mil millones de años luz, esto es, 6×10^{23} Km, esto es, unos 100 mil trillones do kilómetros.

Capítulo 6

Boole: análisis matemático de la lógica

No pertenece a la esencia de la matemática el ocuparse de las ideas de número y de cantidad.

[Boole]

En 1847, George Boole (1815 - 1864) compuso *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning.* Volume I. 442-509 pp. en *From Kant to Hilbert. A source Book in the Foundation of Mathematics.* William Ewald, editor. Oxford University Press. 1996. Volume I. $xviii + 648$ pp $+XXVIII$.

A continuación se destacan algunas ideas claves de dicho ensayo.

Introducción

Se puede decir que Boole entra desde la primera frase en el problema, casi en la visión actual: sintaxis y semántica.

He aquí para la sintaxis:

... álgebra simbólica... La validez de los procesos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos que se emplean, sino solamente de las leyes de su combinación.

Ahora para la semántica:

Todo sistema de interpretación que no afecte a la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible, y de ahí que el mismo proceso pueda, bajo un esquema de interpretación, representar la solución de una cuestión sobre las propiedades de los números; bajo otro, la de un problema geométrico; y bajo un tercero, la de un problema de dinámica o de óptica.

Boole anota que este principio es fundamental. Sin embargo, no era lo corriente. La matemática griega se ocupaba de tres temas, esencialmente: figura, magnitud y número. La teoría de magnitudes y las relaciones numéricas correspondientes a la cantidad de magnitud pasan por ser el meollo del análisis.

Las abstracciones del análisis moderno, no menos que los diagramas de la antigua geometría, han reforzado la idea de que la matemática es, esencial y realmente, la ciencia de la magnitud.

Afirma, en seguida Boole. “Esta conclusión no es en modo alguno, necesaria”.

Boole se propone poner a parte el cálculo de la lógica, permaneciendo dentro de lo que él llama análisis.

Existen en el cerebro nociones generales, como la de clase, a las que se puede asignar un símbolo del lenguaje. Es posible pensar, pues, en un cálculo que siga las leyes de los procesos mentales.

Un acto mental, por ejemplo, es separar algunos en una colección de objetos y contemplarlos aparte del resto. Es la noción de clase.

Algunos de los objetos considerados pueden ser examinados respecto de otra relación. Al iterar el procedimiento aparece una operación de iteración de una operación dada o una de sucesión de operaciones diferentes.

Una ley peculiar para Boole consiste en que el “resultado de dos actos sucesivos no es afectado por el orden en que se ejecutan”.

Boole se apresura a dar por descontado que leyes como estas “a algunos les parecerán demasiado obvias para ser contadas entre las verdades necesarias. Y probablemente son advertidas por vez primera en este ensayo”.

Ahora la respuesta para hacer pensar.

Si estas leyes fueran distintas de las que son, el mecanismo entero del razonamiento, e incluso las leyes genuinas y constitución del entendimiento humano, experimentarían un cambio vital. Podría existir una lógica, pero no sería ya la lógica que poseemos.

Boole insiste en la correspondencia entre las leyes del cálculo que él está buscando y que a algunos pueden parecerles de poca monta y las leyes del pensamiento.

Toda peculiaridad que noten en la forma del cálculo representa un rasgo característico correspondiente en la constitución de sus propias mentes.

¿Cuáles innovaciones genuinas anuncia Boole? Las habrá en cuanto a

- la conversión,
- el silogismo,
- el carácter no exclusivo de la conclusión disyuntiva,
- Las soluciones de ecuaciones electivas.

Boole juzga oportuno considerar la cuestión del uso del lenguaje simbólico en matemática.

Se ha llegado a pensar que la simbolización obvia la necesidad de pensar y que el fiarse de fórmulas debilita la facultad de razonar.

Boole considera el alcance de la simbolización en relación con el avance de los conocimientos, por una parte; en relación con la disciplina de la mente por otra.

No se ven cerca los límites del conocimiento. Si el simbolismo permite simplificar lo que se estaba haciendo, entonces, hay que proponerse cuestiones más arduas.

En cuanto a lo segundo, Boole hace ciertas distinciones que lo conducen a pensar por una parte que la simbolización suministra "una disciplina intelectual de alto nivel"; por otra, a poner en guardia "contra el peligro de una confianza irracional en los símbolos".

Al comenzar la introducción, Boole ha observado que una de las circunstancias que lo había decidido a escribir *Análisis matemático de la lógica* fue la discusión que entretenían en revistas dos personalidades inglesas: William Hamilton (1805 - 1865) y Augustus de Morgan (1806 - 1871). Boole no acierta a ir más adelante sin traer a cuento la discusión acerca del papel de la lógica y la matemática en la educación.

Y al otro lado de la discusión, hay una afirmación importante de Boole que debió sonar extraña para sus contemporáneos dado que en las instituciones de educación superior los matemáticos estaban adscritos a las facultades de filosofía. Dice Boole

> … me veo obligado a afirmar que la lógica no forma parte de la filosofía… no debemos asociar ya la lógica y la metafísica, sino la lógica y la matemática… la lógica descansa, como la geometría, en verdades axiomáticas, y sus teoremas están construidos sobre la doctrina general de los símbolos, que constituye el fundamento del análisis reconocido… la lógica de Aristóteles, es una colección de fórmulas de la ciencia, expresadas por otro, aunque (según pienso) menos perfecto, esquema de símbolos.

La última cuestión de que se ocupa Boole tiene que ver sobre si la lógica o la matemática suministran una disciplina perfecta para el intelecto. Boole rechaza tal exclusiva: una cosa es llegar a premisas concretas y otra deducir conclusiones lógicas. Boole opta por "la unión del pensamiento con la acción, en el campo de la lógica práctica, la arena de la vida humana".

Primeros principios

El símbolo 1, o unidad representa el universo, es decir, toda clase concebible de objetos.

Las letras X, Y, Z representan miembros individuales de clases.

El símbolo x opera sobre cualquier dominio seleccionando de ese dominio todos los X que contenga. El símbolo y selecciona todos los individuos de la clase Y. Así sucesivamente

$x = x$ selecciona todos los X, el resultado es la clase X, la clase de la que cada miembro sea un X.

xy representa, sucesivamente, la selección de la clase Y, y la selección a partir de la clase Y, de aquellos individuos de la clase X que estén contenidos en ella; el resultado es la clase cuyos miembros sean tanto X como Y.

El producto xyz representa una operación compuesta cuyos elementos sucesivos son seleccionar la clase Z, seleccionar de ella los individuos de la clase Y, seleccionar del resultado los individuos de la clase X; el resultado final es la clase común a X, Y, Z.

Los símbolos x, y, z son símbolos electivos. Una expresión en la que estén involucrados es una función electiva. Una ecuación cuyos miembros sean funciones electivas es una ecuación electiva.

Las leyes de combinación y sucesión son las siguientes

1. El resultado de un acto de elección es independiente de la agrupación del dominio. Simbólicamente

   $$x(u + v) = xu + xv$$

   donde $u+v$ representa el dominio sin dividir, u y v las partes componentes del mismo. Se dirá que los símbolos son distributivos.

2. Es indiferente el orden en que se ejecute la elección. Si de la clase de los animales son seleccionadas las ovejas y de las ovejas aquellas que tienen cuernos, o si de la clase de los animales son seleccionados los que tienen cuernos, y de estos, aquellos que son ovejas, el resultado será el mismo, a saber, la clase de las ovejas que tienen cuernos. Simbólicamente se expresa

$$xy = yx$$

3. El resultado de un acto de elección dado efectuado dos veces, o cualquier número de veces, es el resultado del mismo acto efectuado una sola vez. Al seleccionar las X, se obtiene una clase en la cual todos los elementos serán X. Lo mismo sucederá si se sigue seleccionando solo X. Simbólicamente

$$xx = x,$$
$$x^2 = x,$$
$$x^n = x$$

   Se dirá que los símbolos son conmutativos.

Hay una tercera ley, la del índice.

Expresión e interpretación

Una proposición es un enunciado que afirma o niega. Una proposición tiene necesariamente dos términos: sujeto, predicado. Están conectados por *es*, *no es*, o por alguna otra modificación del verbo sustantivo.

Boole comienza a mostrar alcance limitado cuando declara que el verbo sustantivo es el único reconocido en lógica y que los otros verbos pueden resolverse por medio del verbo *ser* más un participio. No se vislumbra todavía el cálculo de relaciones.

Una proposición debe ser o afirmativa o negativa y debe ser también o universal o particular. Se tienen así las cuatro proposiciones categóricas:

Universal afirmativa: 'Todos los X son Y'.
Universal negativa: 'Ningún X es Y'.
Particular afirmativa: 'Algunos X son Y'.
Particular negativa: 'Algunos X no son Y'.

no-X es la clase de los que no son X. La clase X y la clase no-X constituyen el universo. La clase no-X está determinada por el símbolo $1 - x$.

El símbolo $y(1 - x)$ representa la clase cuyos elementos son Y pero no son X. El símbolo $(1 - x)(1 - y)$ representa la clase cuyos elementos ni son X ni son Y.

Cómo expresar la proposición 'Todos los X son Y'.

Todos los X se encuentran en la clase Y; seleccionar del universo todos los Y y seleccionar de estos todos los X, es lo mismo que seleccionar del universo todos los X. Simbólicamente

$$xy = y$$

o también

$$x(1 - y) = 0.$$

Cómo expresar 'Ningún X es Y'.

Ningún X es Y es lo mismo que decir que no hay elementos comunes a las clases X y Y. Todos los individuos comunes a esta clases están representados por xy. Por lo tanto, 'Ningún X es Y', es representado por

$$xy = 0.$$

Cómo expresar 'Algunos X son Y'.

Si algunos X son Y, hay algunos términos comunes a X y a Y. Se forma con ellos una clase, V, a la que corresponda el símbolo electivo v, es decir,

$$v = xy.$$

Puede interpretarse como 'Algunos X', o, 'Algunos Y', dado que v incluye todos los términos comunes a la clase X y a la clase Y, añade el texto.

Desafortunadamente, hay que constatar que hasta aquí llega la clarividencia de *Análisis matemático de la lógica*. Para corroborarlo, basta tratar de seguir adelante en el estudio del texto.

Cómo expresar 'Algunos X no son Y.

$$v = x(1 - y)$$

Se interpreta v como 'Algunos X', o, 'Algunos no-Y'.

Boole considera algunas consecuencias del sistema que construye cuando utiliza v. Escribe una reflexión a propósito

En estos casos la diferencia de forma implica diferencia de interpretaciones con respecto al símbolo auxiliar v y cada fórmula es interpretable por sí misma.

Según Boole, "estas diferencias no introducen en el cálculo una perplejidad superflua".

El hecho de que sus continuadores hayan abandonado completamente su operador indica que Boole no acertó en tal elección.

Presenta un cuadro recapitulativo que es conveniente ver para apreciar las dificultades que introduce su operador v.

Proposiciones	*Ecuaciones*	*Condiciones de interpretación*
La clase X	x	
La clase no-X	$1-x$	
'Todos los X son Y' 'Todos los Y son X'	$x=y$	
'Todos los X son Y'	$x(1-y)=0$	
'Ningún X es Y'	$xy=0$	
'Todos los Y son X' 'Algunos X son Y'	$y=vx$	$vx=$ algunos X $v(1-x)=0$
'Ningún Y es X' 'Algunos no-X son Y'	$y=v(1-x)$	$v(1-x)=$ algunos no-X $vx=0$
'Algunos X son Y'	$v=vx$ $vx=vy$ $vx(1-y)=0$	$v=$ algunos X, o, algunos Y $vx=$ algunos X $vy=$ algunos Y $v(1-x)=0$ $v(1-y)=0$
'Algunos X no son Y'	$v=x(1-y)$ $vx=v(1-y)$ $vxy=0$	$v=$ algunos X, o, algunos no-Y $vx=$ algunos X $v(1-y)=$ algunos no-Y $v(1-x)=0$ $vy=0$

La advertencia de Boole, que sigue, no parece aclarar lo que merecería serlo.

Hay que observar que las ecuaciones auxiliares que se dan en la tercera columna no son independientes: están implicadas o en las ecuaciones de la segunda columna o en la condición para la interpretación de v.

Lo menos que puede decirse es que el operador v tiene un papel ambiguo. Boole logra, sin embargo, mostrar que su cálculo da cuenta de la conversión, piedra de toque en la exposición tradicional de la lógica. A ello están dedicadas cinco páginas.

En la siguiente sección de su ensayo, Boole se ocupa del silogismo. Se vale sistemáticamente de la teoría aristotélica del silogismo. No hay dificultad mientras no haya proposiciones particulares.

Boole pone el ejemplo del silogismo en barbara. La notación de teoría de conjuntos ayuda actualmente a la comprensión del desarrollo de Boole. Boole dado que se tienen las inclusiones $Z \subset Y \subset X$ escribe:

- 'Todos los Y son X', simbólicamente

$$y(1 - x) = 0.$$

- 'Todos los Z son Y', simbólicamente

$$z(1 - y) = 0.$$

El cálculo algebraico implica, de la primera ecuación

$$y = yx;$$

de la segunda

$$0 = z - zy = 0 = z - z(yx) = z - (zy)x = z - (z)x = z - zx = z(1 - x) = 0;$$

es decir

'Todos los Z son X'

Una verificación clara como esta debió encender el entusiasmo de quienes se propusieron continuar la obra de Boole. Boole dio el impulso inicial con su exposición teórica refrendada, en parte, con un cálculo satisfactorio. El resto va a ser obra de otros lógicos, ingleses todos ellos, quienes en pocos años crearon los complementos faltantes para obtener, finalmente, la magnífica estructura que luego recibió el nombre de álgebra de Boole.

Conviene reseñar, así sea brevemente, otras inquietudes de Boole.

En el mismo ensayo, una sección tiene que ver con las proposiciones hipotéticas. En ellas lo que se considera

> no son objetos, ni clases de objetos, sino las verdades de proposiciones, a saber, de aquellas proposiciones elementales que están incorporadas en los términos de las premisas hipotéticas.

A los símbolos X, Y, Z que representan proposiciones se asignan símbolos electivos.

> El universo hipotético, 1, abarcará todos los casos y cúmulos de circunstancias concebibles. El símbolo electivo x asignado a cualquier dominio que exprese tales casos seleccionará aquellos en los que la proposición X es verdadera. Al limitarse a observar una determinada proposición X dejando de lado cualquier otra consideración, solo son concebibles dos casos, que la proposición sea verdadera o que sea falsa. Como quiera que estos casos conjuntamente agotan el universo de la proposición, y, como el primero está determinado por el símbolo electivo x, el segundo lo estará por el símbolo $1 - x$.

Para dos proposiciones X, Y el número total de casos imaginables es

X verdadera, Y verdadera	xy
X verdadera, Y falsa	$x(1-y)$
X falsa, Y verdadera	$(1-x)y$
X falsa, Y falsa	$(1-x)(1-y)$

La suma algebraica de las dos primeras posibilidades es x, símbolo electivo para el caso más general de ser verdadera X. La suma algebraica de las dos últimas posibilidades es $1 - x$, expresión electiva apropiada al caso más general de ser X falsa. La suma de los cuatro casos es el universo hipotético, es decir, 1.

Para ilustrar el caso de tres proposiciones Boole considera: X, 'llueve'; Y, 'graniza'; Z, 'hielo'. Son, entonces, ocho los casos posibles.

1. 'Llueve, graniza, hiela'	xyz
2. 'Llueve y graniza pero no hiela'	$xy(1-z)$
3. 'Llueve y hiela, pero no graniza'	$xz(1-y)$
4. 'Hiela y graniza, pero no llueve'	$yz(1-x)$
5. 'Llueve, pero no graniza, ni hiela'	$x(1-y)(1-z)$
6. 'Graniza, pero no llueve, ni hiela'	$y(1-x)(1-z)$
7. 'Hiela, pero no graniza, ni llueve'	$z(1-x)(1-y)$
8. 'No llueve, no graniza, no hiela'	$(1-x)(1-y)(1-z)$

La suma de los ocho casos posibles es 1.

Boole muestra cómo funciona algebraicamente la expresión de las proposiciones hipotéticas.

- Dado que el símbolo $1 - x$ selecciona aquellos casos en que la proposición X es falsa, para indicar que es verdadera basta escribir
$$1 - x = 0, \quad \text{es decir,} \quad x = 1.$$
- Si X es siempre falsa, entonces, $x = 0$.
- Si X, Y son simultáneamente verdaderas, el símbolo electivo es xy; así que
$$xy = 1.$$
- Si X, Y son simultáneamente falsas, entonces basta escribir que el símbolo electivo de la negativa satisface a
$$(1 - x)(1 - y) = 1;$$
de donde
$$x + y = xy.$$
- Si, o la proposición X es verdadera, o la proposición Y es verdadera, basta expresar que no es verdadero que ambas sean falsas, es decir,
$$(1 - x)(1 - y) = 0;$$
de donde
$$x + y = xy + 1.$$
- Boole enuncia una regla general para una proposición que presente casos diferentes exclusivos de modo que alguno sea verdadero. La suma de las expresiones algebraicas de los diversos casos posibles se hace igual a la unidad. De ellos por ser exclusivos solo resultará verdadero uno de ellos. Las expresiones de los casos no posibles no entran en la expresión considerada y se iguala cada una a cero. Así

X verdadero, Y falso, es decir,	$x(1 - y)$;
X falso, Y verdadero, es decir,	$y(1 - x)$;
X verdadero, Y verdadero, es decir,	xy

La suma de los tres casos es

$$x + y = xy + 1.$$

Pero, debido a la disyunción, solo se consideran los dos primeros casos. La suma de ellos es

$$x + y = 2xy + 1.$$

- Boole considera el caso en que, o X no es verdadera, o Y no es verdadera, sin que los miembros sean excluyentes. Basta completar el caso anterior, añadiendo esta posibilidad, es decir

$$x(1 - y) + y(1 - x) + (1 - x)(1 - y) = 1.$$

El resultado es $-xy = 0$. Boole consigna el resultado como $xy = 0$, donde las dos proposiciones son excluyentes, contra la hipótesis; sin embargo, no hay interpretación alguna en el texto, para mejor entender el resultado.

- Para expresar el condicional si X es verdadera, entonces, Y es verdadera se transcribe

$$x(1 - y) = 0.$$

- Si X es verdadera, entonces, Y no es verdadera, se transcribe

$$xy = 0;$$

Boole anota que

Si X es verdadera, Y no es verdadera

y la disyuntiva

o X no es verdadera, o Y no es verdadera

son proposiciones equivalentes.

- Transcribe, para expresar el condicional

si X no es verdadera, Y no es verdadera

$$(1 - x)y = 0.$$

En un subtítulo de la sección dedicada a las proposiciones hipotéticas, Boole transcribe algunos silogismos hipotéticos.

◇ Silogismo disyuntivo

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ O } X \text{ es verdadera, o } Y \text{ es verdadera, es decir,} & x+y-2xy=1, \\ \bullet\ X \text{ es verdadera} & x=1, \\ \cline{2-2} \bullet \text{ Por lo tanto, } Y \text{ no es verdadera} & y=0. \end{array}$$

Boole dice que, formadas las ecuaciones de las premisas, se elimina el símbolo que aparezca más de una vez. Lo cual, en lo que sigue, se hace dando los valores 1, 0 que correspondan a la transcripción algebraica.

◇ Silogismo condicional constructivo

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ Si } X \text{ es verdadera, } Y \text{ es verdadera, es decir,} & x(1-y)=0; \\ \bullet\ X \text{ es verdadera} & x=1, \\ \cline{2-2} \bullet \text{ Por lo tanto, } Y \text{ es verdadera} & y=1. \end{array}$$

◇ Silogismo condicional destructivo

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ Si } X \text{ es verdadera, } Y \text{ es verdadera, es decir,} & x(1-y)=0; \\ \bullet\ Y \text{ no es verdadera} & y=0, \\ \cline{2-2} \bullet \text{ Por lo tanto, } X \text{ no es verdadera} & x=0. \end{array}$$

◇ Dilema constructivo simple (premisa menor exclusiva)

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ Si } X \text{ es verdadera, } Y \text{ es verdadera, es decir,} & x(1-y)=0; \\ \bullet \text{ Si } Z \text{ es verdadera, } Y \text{ es verdadera, es decir,} & z(1-y)=0; \\ \bullet \text{ O } X \text{ es verdadera, o } Z \text{ es verdadera} & x+z-2xz=1. \end{array}$$

Boole da la respuesta $y = 1$, no da el procedimiento; puede ser el siguiente

$$\begin{aligned} x &= 1+2xz-z, && \text{(tercera ecuación)} \\ 0 &= x(1-y) = x-xy, && \text{(primera ecuación)} \\ &= 1+2xz-z-(1+2xz-z)y \\ &= 1+2xz-z-y-2xzy+zy \\ &= (1-y)+2xz(1-y)-z(1-y)=(1-y). && \text{(segunda ecuación)} \end{aligned}$$

◇ Dilema constructivo complejo (premisa menor no exclusiva)

- Si X es verdadera, Y es verdadera, es decir, $x(1-y)=0$;
- Si W es verdadera, Z es verdadera, es decir, $w(1-z)=0$;
- X es verdadera, o W es verdadera $x+w-xw=1$.

La respuesta de Boole es $y+z-zy=1$, que expresa que o Y es verdadera, o Z es verdadera, sin que los miembros sean no exclusivos.

◇ Dilema destructivo complejo (premisa menor exclusiva)

- Si X es verdadera, Y es verdadera, es decir, $x(1-y)=0$;
- Si W es verdadera, Z es verdadera, es decir, $w(1-z)=0$;
- o Y no es verdadera, o Z no es verdadera $y+z-2yz=1$.

Boole indica que se han de eliminar y, z y que la respuesta es $xw=0$. Multiplicando algebraicamente las dos primeras ecuaciones va obteniendo efectivamente

$$\begin{aligned} 0 &= xw - xyw - xwz + xywz \\ &= xw(1-y) - xwz(1-y) \\ &= (1-y)(xw - xwz) = (1-y)(1-z)xw \\ &= (1+yz-y-z)xw = 0 \end{aligned}$$

Se puede hacer una discusión sobre la base de la tercera ecuación dada por el problema.

Conclusión de Boole para la ecuación $xw=0$: o X no es verdadera, o Y no es verdadera, sin que haya exclusividad, es decir, ambas X, Y pueden no ser verdaderas.

Análogamente

◇ Dilema constructivo complejo (premisa menor no exclusiva)

- Si X es verdadera, Y es verdadera, es decir, $x(1-y)=0$;
- Si W es verdadera, Z es verdadera, es decir, $w(1-z)=0$;
- O Y no es verdadera, o Z no es verdadera $yz=0$.

Boole sugiere eliminar y, z. La respuesta es $xw = 0$, es decir, la conclusión es como en el caso anterior.

Observación. Que los miembros de la premisa menor de un dilema sean exclusivos o no, los miembros de la conclusión disyuntiva no son exclusivos. "Quizás este detalle ha escapado a los lógicos" comenta Boole.

Boole añade todavía un ejemplo de que su cálculo tiene más alcance.

◇ Si X es verdadera, entonces, o Y es verdadera, o Z es verdadera, es decir,

$$x(1 - y - z + yz) = 0;$$

Y no es verdadera, es decir, $y = 0$;
por lo tanto, si X es verdadera, Z es verdadera, es decir,

$$x(1 - z) = 0.$$

Boole pone punto final a esta subsección con una aclaración importante. Boole acentúa el caracter operatorio de su cálculo, que no es exclusivo de la lógica. Según el editor, Ewald, la investigación de Boole en lógica era una extensión de la que había realizado ya en ecuaciones diferenciales. Escribe Boole:

Cada proposición expresable en un lenguaje puede ser representada mediante símbolos electivos, y, las leyes de combinación de estos símbolos son en todos los casos los mismos; pero en una clase de ejemplos los símbolos se refieren a colecciones de objetos, en la otra, a las verdades de las proposiciones que intervienen.

Haciendo uso a fondo de uno de los axiomas de su sistema, el de idempotencia, Boole desarrolla propiedades de las funciones electivas: obtiene notables relaciones.

Sin embargo, en la última sección, donde se ocupa de soluciones de las ecuaciones electivas tiene que emplear el operador, nada satisfactorio, que traducía en su sistema, lo pertinente al cuantificador particular. Aparecen, además "coeficientes numéricos y fraccionarios y otras expresiones cuya significación lógica es, para decir lo mínimo, incierta" (Prior). Es una lástima. El impulso para estas indagaciones no había surgido solamente en lógica; provenía de sus indagaciones anteriores en ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones electivas "son necesariamente lineales y sus soluciones guardan una cercana analogía con las dos ecuaciones diferenciales lineales, hay símbolos electivos arbitrarios, en las primeras y constantes arbitrarias en las segundas.

En la página siguiente reconoce, no obstante que aunque la comparación pueda proseguirse, aporta más a la curiosidad que a la utilidad. Pero, no se priva de mostrar que en su cálculo, puede aplicarse elegantemente a ecuaciones simultáneas, el método de los multiplicadores de Lagrange.

En el epílogo, alude a discusiones de sus coetáneos, de Morgan y Hamilton, acerca de si la función de la matemática es responder al *qué* o al *por qué*; lo que está relacionado con la doctrina aristotélica según la cual las premisas son causa de la conclusión. Boole rechaza tal opinión.

En la introducción al ensayo de Boole, Ewald, el editor, recuerda lo que Boole habría pensado posteriormente de su ensayo "publicación apresurada (y por eso) lamentable", comparada con la de 1854, *Una investigación acerca de las leyes del pensamiento*. Sin duda es más interesante, *Análisis matemático de la lógica*.

Capítulo 7

Antecedentes de la formalización hilbertiana

En numerosas ocasiones hemos sido conducidos a considerar objetos matemáticos de una determinada especie, así como morfismos que ligan estos objetos. Hay en ello un fenómeno que domina la matemática y que remonta, después de perfeccionamientos y abstracciones sucesivas, al 'Programa de Erlangen', de Félix Klein. En este, se definía una 'geometría' por un grupo de transformaciones G operando sobre un conjunto E (espacio), siendo el objeto de esta geometría el estudio de las propiedades de las 'figuras' de E invariantes respecto a las transformaciones de G: en la visión moderna, el conjunto E es preciso substituirlo por objetos de una cierta especie y las transformaciones por los morfismos que los ligan.

[Paul DEDECKER. *Variedades diferenciables y espacios fibrados*. 1969. Caracas. Universidad Central de Venezuela. $xx + 321$ pp]

Los propósitos de desarrollo para este capítulo son los siguientes.

1. Aprovechar parte del ensayo de Nagel en el que muestra cómo ciertos conceptos de la geometría rebosaron hacia el resto de la matemática.

2. Exponer otro paso en la evolución de la geometría: el que lleva a relacionar el desenvolvimiento de la geometría con el concepto de transformación. Abarca el período demarcado por dos publicaciones fundamentales. La primera, 1795, *Géométrie descriptive*, de Monge. La segunda, 1872, el 'Programa de Erlangen', de Félix Klein. Bourbaki, p. 165, califica este periodo como edad de oro de la geometría.

3. Ver como el mayor conocimiento de la geometría conduce a que Klein y Russell, para citar solo a dos pensadores de la matemática en el siglo XIX, critiquen algunos procedimientos de Euclides. Bourbaki adhiere a algunas críticas y formula otras.

4. Invitar a leer el extenso capítulo en el que Guillaume expone algo particularmente interesante para la intención del presente volumen, a saber, que había matemáticos que se adelantaban a pensar en la formalización hilbertiana.

5. Después de las geometrías no euclidianas había que precisar y ampliar los fundamentos para la geometría, obra que inicia Pasch y culmina Hilbert.

En lo que sigue, por geometría elemental se entiende, no solo la geometría expuesta por Euclides en *Elementos*, continuada por Apolonio, por Descartes, por Fermat; sino también, la geometría desarrollada por Desargues, Pascal, Monge, Carnot, Gergonne, Brianchon, Poncelet, Möbius, Chasles, Steiner, Staudt, Plücker, Grassmann, Cayley y Pasch. Abarca todo el desarrollo desde la geometría sobre el campo de los números reales hasta la geometría sobre un campo de base cualquiera.

Evolución lógica de conceptos a partir de la geometría

El desenvolvimiento de la geometría axiomática impulsado por el problema del quinto postulado, de lo cual se trazaron algunos rasgos salientes a lo largo del capítulo 5, está franqueado por otras dos corrientes de pensamiento que van a desbordar el campo de la geometría para pasar al de la matemática en general. Una de esas corrientes es la que comienza en Descartes y aumentando con bastante lentitud alcanza la plenitud con la puesta de las transformaciones al servicio de la geometría en el 'Programa de Erlangen'. La otra surge de la intensa investigación en geometría proyectiva a lo largo del siglo XIX: se hace manifiesta la eficacia de ciertos procedimientos; depurados lógicamente se convierten en instrumentos matemáticos. En el excelente artículo de Nagel, citado en la Bibliografía, aparecen destacados unos cuantos. Ambas corrientes de pensamiento serán coronadas por la concepción de Pasch.

¿Cuál era la concepción tradicional de la geometría?

La geometría es una ciencia cuantitativa, una ciencia de la extensión del espacio.

Geometría: parte de la mecánica universal que con toda exactitud propone y demuestra el arte de la medida. (Newton. Prefacio de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*).

La geometría, como la aritmética, son ciencias innatas y están presentes en nosotros virtualmente, de tal manera que podemos encontrarlas ahí si procedemos con atención y ponemos en orden lo que ya tenemos en la mente, sin que haya que emplear verdad alguna aprendida por experiencia o por tradición. (Leibniz).

Si la geometría es innata, es entonces, verdad absoluta, inamovible.

También para Euler, la extensión es el objeto de la geometría: el objeto de la geometría son todas las cosas consideradas únicamente bajo el aspecto de la extensión.

Todas las propiedades deducidas en geometría a partir de la noción de extensión deben verificarse en los cuerpos en cuanto son extensos.

Euler entabla polémica con quienes no tienen la misma opinión:

La extensión tratada en geometría, según ellos, es una abstracción, de la cual nada puede concluirse para los objetos reales. Así que cuando se demuestra que los tres ángulos de un triángulo son iguales a dos rectos, esta es una propiedad válida solamente para un triángulo abstracto y no para uno realmente existente.

Euler aduce las consecuencias que de allí podrían extraerse. Si no fuera permitido concluir de los objetos formados por abstracción a los objetos reales, ningún razonamiento podría subsistir, dado que en él siempre se concluye de lo general a lo particular.

Todavía en 1858, Whewell defendía la idea de Kant según la cual los axiomas de la geometría "se siguen de la idea de espacio", entendido este como "la forma gracias a la cual es moldeado el conocimiento derivado de nuestra sensación". Parece que tal idea de espacio haya sido derivada de la metafísica platónica durante el siglo XVI.

Intuición, visualización han sido comúnmente asociadas con geometría y no solo entre profanos en geometría. Poncelet hacía notar a este respecto que, mientras así sea, no puede haber independencia formal. Kant había fundado su filosofía, no solo de la geometría, sino de la matemática, sobre la lógica y la intuición; al parecer el álgebra no estaría sujeta a la intuición como la geometría; en realidad, piensa Kant, lo está, dado que garantiza sus inferencias, precisamente al poner el cálculo de ellas a la vista. La conclusión de Poncelet es que la geometría sintética está en inferioridad respecto de la cartesiana. El álgebra procede según reglas generales, sin tener que dar una interpretación a cada paso. "El álgebra no es simplemente la ciencia de la cantidad sino la ciencia de las operaciones algorítmicas". Aparece así una primera revisión de la concepción tradicional de la geometría. Poncelet mismo y otros distinguidos geómetras van a emplear sistemáticamente ciertas maneras de proceder que, convenientemente generalizadas, pasan a ser instrumentos matemáticos.

Los seres de razón

En realidad Poncelet aumenta el ámbito de la geometría en tres direcciones: la ya indicada del álgebra algorítmica; luego, con un principio que él llama de continuidad, que repercutió en las indagaciones posteriores en geometría; en tercer lugar, con la construcción de un nuevo sistema en el que los términos de la geometría tradicional son empleados en sentido más amplio; por ejemplo, una recta corta siempre a una circunferencia en dos puntos, llamados ideales si no son obtenidas como raíces reales de una ecuación. Una recta y un círculo de la geometría ordinaria no siempre se cortan: en el nuevo dominio, ciertas cosas llamadas *rectas* y ciertas cosas llamadas *círculos* tienen siempre en común algo llamado *punto de intersección*; los términos corrientes se siguen empleando pero con una modificación de sentido entre los algebristas del Renacimiento, las raíces imaginarias habían surgido para que la aplicación de las reglas de cálculo fuera uniforme, para evitar excepciones; la geometría da un paso análogo solo varios siglos después (Nagel. 20). Según el mismo Poncelet, los seres de razón "fueron desechados o mal comprendidos por los antiguos, pero actualmente se han hecho tan familiares que tenemos tanta confianza en ellos como en las verdades generalmente admitidas por probadas mediante el más riguroso método". Se ha completado así un paso seguro hacia la matemática de Hilbert y luego, de Bourbaki.

Poncelet se dio cuenta de una consecuencia de su planteamiento, como esta relativa a la existencia de los seres matemáticos: aún si las *configuraciones* resultantes no pueden ser construidas *geométricamente*, deben ser tenidas como existentes, dado que no se requiere visualización, esto es, interpretación mediante figuras visualizables, para los *signos abstractos* del cálculo geométrico, cuyas interconexiones formales están determinadas unambiguamente, como no se las requiere para el cálculo algebraico. El principio era tan novedoso que al parecer el mismo Poncelet, mientras se acostumbraba, tenía que echar mano de la pragmática sentencia de D'Alembert:

Seguid adelante, ya vendrá la fe. (Allez en avant, et la foi vous viendra).

No es raro, pues, que Cauchy haya llegado a escribir acerca del principio de continuidad: "Hablando estrictamente, el principio no es más que una inducción atrevida".

Nagel se esfuerza en mostrar que los seres de razón en geometría, como los del álgebra, pasaron por tres etapas: símbolo, postulado, construcción (Nagel. 25).

Es de anotar, de pasada, que de la creación de Poncelet de los entes de razón en geometría, podía extraerse la consecuencia de que la geometría no versa forzosamente sobre relaciones espaciales.

En una extensa nota (35, pp. 164-165) Nagel narra las hesitaciones de Chasles cuando intenta fijar el carácter de los imaginarios; y las da como muestra de la confusión provocada por aquellos seres de razón, sin existencia real, con los cuales se razona, sin embargo, como con los objetos reales y palpables, o con sus representaciones. Esta parece una buena ocasión para traer a cuento la reflexión de Condillac (Nagel. 27) acerca de la relación entre las cosas y los nombres de las cosas:

> Somos llevados a separar propiedades comunes de los objetos a los que son inherentes... y a darles nombres. Así, hay palabras que representan colores, olores, sabores, etc. Tales palabras no designan individuos, ni colecciones de individuos sino solamente la manera como los objetos nos afectan. Pero, puesto que originalmente son las cosas las representadas por palabras, somos llevados a suponer que todas las palabras expresan cosas que existen independientemente y en realidad. Así, uno habla de la circularidad de una figura y pregunta qué pasa con la circularidad de un aro circular cuando el aro es destruido. Tal realidad, atribuida erróneamente a puras concepciones de la mente, han sido la causa de disputas vanas. Al crear la palabra *blanco* o *blancura* no hemos hecho más que unir en una y la misma clase todos los objetos en los cuales aparece tal color.

Por este camino, Condillac se coloca en posición pionera al subrayar la relación entre ciencia y lenguaje.

Así como un buen simbolismo en álgebra facilita el trabajo, así un buen lenguaje, aunque no constituya por sí mismo una ciencia, facilita su progreso.

Una ciencia es un lenguaje bien construido. En el siglo XX se ha destacado mucho más la relación entre lenguaje y ciencia; esta será, ante todo, un lenguaje cuidadosamente construido, por tanto, artificial, al que se exige una coherencia, muy descuidada en el lenguaje corriente.

Los entes de razón van a ser particularmente importantes en la construcción metamatemática de Hilbert.

Definición implícita

Es otra componente indispensable en la formalización de Hilbert. Fue introducida por Gergonne quien, de paso, adhería a la opinión ya citada de Condillac. ¿Qué entiende Gergonne por definición explícita? Es una convención que establece

> una identidad entre el sentido de dos expresiones, de las cuales una más simple es nueva y arbitraria, mientras que la otra, más compleja, se compone de palabras cuyo sentido está fijado ya por el uso, ya por una convención anterior.

Es siempre una definición de palabras, no de cosas, es convencional. Teóricamente prescindible, dado que el término definido puede ser siempre reemplazado por la expresión que lo define (uno de los preceptos de Pascal), la definición explícita es prácticamente ineludible debido a nuestra limitación psicológica que requiere una notación compacta para captar el sentido de una idea complicada (Nagel. 28). Las definiciones explícitas tienen limitaciones. No es posible, por ejemplo, definir todas las palabras porque se caería en la circularidad. Los nombres de los individuos no pueden ser definidos explícitamente. ¿Cómo llegar, entonces, a entender los nombres de estos? Solo atendiendo a las circunstancias en las que las palabras son empleadas. Se asigna un significado a una expresión, no mediante definición nominal o extensiva (ostensiva), sino mediante especificación detallada de las relaciones en que está con otras expresiones, las reglas de operación entre todas ellas y las condiciones de aplicación a que están sujetas. Este es el modo empleado para conocer el sentido de una palabra cuando ya se sabe el de otras. Estas expresiones que revelan el significado de una palabra que contienen mediante el significado ya sabido de otras palabras que también contienen, es lo que Gergonne llama *definición implícita* de la palabra en cuestión (Nagel. 29). Es, en particular, lo que había sucedido con los imaginarios de la geometría, lo que obligará paulatinamente a los matemáticos a abandonar la concepción tradicional de su ciencia. La geometría se convertirá en un sistema simbólico sin referente específico (no es el marco kantiano para la geometría) para los términos definidos solamente de manera implícita (Nagel. 30). Son llamados *términos no definidos* o nociones primitivas.

Ciencia general de las formas puras

Fue una idea del matemático alemán Grassmann, en su obra de 1844, *Ausdehnungslehre*. En un pasaje tuvo que distinguir entre suma de longitudes y suma de longitudes dirigidas. Pensó entonces en la ciencia general de las formas puras en la que se prescindía conscientemente de cualquier interpretación o contenido (Nagel. 32). Según Grassmann, hay ciencias formales y ciencias reales. La matemática pura es la ciencia de las formas en general. Grassmann avanza en la caracterización de los conceptos que ha creado.

Las pruebas en las ciencias formales no salen del dominio del pensamiento sino que permanecen completamente dentro del campo de combinaciones de los diferentes actos del pensamiento.

Según una manera de pensar en la que no ha sido seguido, asigna los axiomas a las ciencias reales y las definiciones a las ciencias formales. Se manifiesta, empero, como precursor con la caracterización que hace de las ciencias formales como ciencias cuyos únicos principios de procedimiento son las reglas de la lógica y como ciencias cuyos teoremas no versan *sobre* fase alguna del universo existente sino *sobre* todo aquello que es postulado por el pensamiento.

La matemática pura es la ciencia del ser especializado generado por el pensamiento. El ser especializado, así entendido, se llama una forma de pensamiento, o simplemente una forma, así que la matemática pura es la doctrina de las formas.

De ninguna manera es la matemática *la ciencia de la cantidad*, designación que excluye el aspecto combinatorio y que incluso a la aritmética es aplicada en un sentido impropio. Puesto que la matemática pura no es una ciencia natural, la cuestión de verdad, fuera de la verdad lógica, es irrelevante. Toda su obra *Ausdehnungslehre* (teoría de la extensión o de la magnitud extensiva) es desarrollada sistemáticamente mediante *elementos* y *operaciones*; sobre *elementos* es posible hacer *operaciones* con reglas de cálculo y propiedades que Grassmann estipula de la manera más abstracta y cuidadosa posible; es quizá la primera vez que ello sucede en la historia de la matemática. Un elemento es considerado como una especialización de una forma, distinto de otras especializaciones.

No se asigna a un elemento otro significado que este. No interesa cuál es el tipo de especialización de un elemento, porque es una especialización sin contenido real; ni interesa en qué sentido un elemento es diferente de otro, lo único especificado es el ser diferente de otro, sin asignar contenido real a la diferencia (Nagel. 33. 34).

¿Y qué tiene que ver todo esto con la geometría? La conocida hasta ese entonces, ciencia del espacio, es matemática aplicada. "La geometría no debe ser considerada como una rama de la matemática, en el mismo sentido en que lo es la aritmética o la teoría combinatoria, porque la geometría se refiere a algo dado por la naturaleza, es a saber, al espacio". Como la cinemática y la mecánica, la geometría es una aplicación de la matemática pura al mundo real y sensible. Se requiere una intuición del espacio para la geometría, pero no es una intuición a partir de los objetos del espacio si no "una que nos es dada simultáneamente con el funcionamiento de nuestros sentidos respecto del mundo sensible". ¿Estará pensando Grassmann en intuiciones a priori? Grassmann piensa que debe haber una rama de la matemática que desarrolle autónomamente y de modo abstracto las relaciones que la geometría predica del espacio; en la cual, desde luego, faltarán los axiomas, punto de partida de las ciencias reales, en particular los referentes a las intuiciones espaciales, pertinentes a la matemática aplicada; los fundamentos de esa teoría deberán tener la evidencia de los de la aritmética y no habrá limitación de dimensión. En 1877, escribió Grassmann:

> Mi *Ausdehnungslehre* es la fundamentación abstracta de la doctrina del espacio (geometría): no depende de la intuición espacial y es una disciplina puramente matemática cuya aplicación suministra la ciencia del espacio. Esta última ciencia, puesto que se refiere a algo dado en la naturaleza (el espacio) no es una rama de la matemática sino una aplicación de la matemática a la naturaleza. Es necesario una rama de la matemática en la cual la idea de una magnitud que varía continuamente abarque la noción de las diferencias que corresponden a las dimensiones del espacio. Mi *Ausdehnungslehre* es tal rama de la matemática. No obstante, sus teoremas no son simplemente una formulación en lenguaje abstracto de las proposiciones de la geometría: mientras la geometría está limitada a las tres dimensiones del espacio, esta ciencia abstracta no tiene tal limitación (Nagel. 35).

Grassmann es llevado a desbordar la concepción del espacio ordinario y a pensar una teoría mucho más general. ¿Pesaba tanto la idea tradicional de la geometría que le impidió desligar a la geometría del marco estrecho de las tres dimensiones y concebirla por lo menos con el alcance de su teoría de la extensión? Sea como sea, es uno de los primeros matemáticos (Nagel asegura que el primero, pero no es posible olvidar lo cerca que estuvieron de tal concepción matemáticos como Lagrange, Abel, Galois, Cauchy, años antes de 1844) en darse cuenta de que la matemática tiene que ver exclusivamente con estructuras formales; quizás, sí fue el primero en no solo expresar claramente la idea sino en ponerla lúcidamente en práctica. Su teoría de la extensión no es más ni es menos que el álgebra lineal actual. Pero, los coetáneos de Grassmann no lo entendieron y todavía hoy se dice que la exposición de Grassmann era abstrusa; fue dejada completamente de lado por quienes hubieran podido hacerla conocer del público. Como ello tiene que ver con la dificultad para abandonar la concepción tradicional entonces de la geometría, por razones filosóficas, se transcriben algunos detalles, ojalá interesantes especialmente para quienes siguen creyendo que la concepción de la geometría cabe todavía en los marcos kantianos, por ejemplo; habría que subrayar en las citas que vienen lo relativo a la intuición. Así, una reacción es la de Apelt, profesor de filosofía en Jena, en una carta al matemático Möbius: "¿Ha leído usted la notable *Ausdehnungslehre* de Grassmann? Me parece que en el fondo de ella hay una falsa filosofía de la matemática. El carácter esencial del conocimiento matemático, el ser intuitivo, parece completamente excluido en esa obra. Una teoría abstracta de la extensión, como a la que Grassmann propende, puede ser desarrollada con conceptos únicamente; empero, la fuente del conocimiento matemático se encuentra, no en los conceptos, sino en la intuición". Möbius, en su respuesta, declara que no ha ido muy lejos en la lectura del libro porque "permanece demasiado apartado de toda intuición, rasgo esencial del conocimiento matemático" y rehusa escribir una nota de presentación; no fue el único. Una reseña que apareció, era escrita por el mismo Grassmann. Nagel (57) trata de explicar por qué la obra de Grassmann haya sido ignorada por filósofos y matemáticos, en parte por posiciones filosóficas asumidas por Grassmann en la misma obra, en parte por la enseñanza kantiana de la indispensabilidad de la intuición para la matemática. Grassmann procede a la manera de Gergonne: trabaja sobre elementos sin referentes, de los cuales es posible llegar a saber lo que pongan de manifiesto las operaciones entre los elementos. La novedad y la consecuente dificultad de la obra de Grassmann, dice Nagel, consiste en que no refiere su investigación a un contenido específico, contenido que solamente será colegible de las definiciones implícitas. La geometría proyectiva inspiraba a Grassmann, pero no eran las configuraciones proyectivas su materia prima de trabajo única. Su abstracta ciencia versa sobre cualquier cosa que pueda ser una interpretación válida para los términos definidos implícitamente.

Nagel insiste una vez más en el hecho de que para introducir los elementos imaginarios en la geometría, Monge y Poncelet procedieron postulacionalmente; Grassmann mediante definición implícita; Chasles y sobre todo von Staudt mediante construcción (38).

Según von Staudt, los elementos imaginarios son introducidos por vía de generalización, con el fin de levantar las restricciones sobre ciertas operaciones. Este procedimiento tiene inconvenientes que von Staudt se propone evitar.

En geometría cartesiana se dice que un punto es imaginario cuando no todas sus coordenadas son número reales. Pero este es el lenguaje del álgebra aplicado a la geometría; hay que establecer que un punto imaginario, como un punto real, es independiente del sistema coordenado. ¿Dónde está el punto imaginario si se hace abstracción del sistema coordenado?

Von Staudt construyó ciertos conjuntos de puntos a los cuales pudo extender relaciones definidas para los puntos ordinarios. La derivación de los teoremas depende por completo de las relaciones que se supone que hay entre los términos y no de la interpretación que se haga de dichos términos. Tal extensión hizo posible trabajar con aquellos conjuntos de puntos o configuraciones de manera análoga a como se trabajaba con los puntos de la geometría euclidiana. Dicho de otro modo: hay ciertas relaciones formales, una estructura común a los puntos, por una parte; a los conjuntos de puntos, por la otra. Es un inicio en el camino hacia la matemática estructural actual; así Hamilton define un número complejo como una pareja de números reales. La geometría deja de ser, paulatinamente, una ciencia de la cantidad o una ciencia de la extensión, pero, era todavía una ciencia que se ocupaba de puntos en el sentido tradicional desde Euclides. La liberación de esta coyunda necesitó, en primer lugar, del hallazgo del principio de dualidad.

Principio de dualidad

Fue Gergonne, el primer matemático en darse cuenta, en el primer cuarto del siglo XIX, de la propiedad de dualidad. A propósito del teorema: $V-A+C=2$, para vértices, aristas y caras de los poliedros, anotó:

No hay teorema de este tipo para el que no corresponda otro, derivado del primero por simple intercambio de las palabras *caras* y *vértices*.

Ejemplo: En todo poliedro el número de caras que tiene un número impar de aristas es siempre par. En todo poliedro el número de vértices que tiene un número impar de aristas es siempre par. Una formulación bien clara del principio de dualidad es el que sigue (1826):

Un hecho en extremo sorprendente de la geometría, que no depende en manera alguna de relaciones métricas es este: Todos los teoremas son duales. Es decir, a cada teorema de la geometría plana corresponde necesariamente otro, obtenido de aquel, mediante simple intercambio de las dos palabras *punto* y *línea*; en la geometría del espacio se intercambian las palabras *punto* y *plano* cuando se quiere obtener la forma correlativa de un teorema dado.

Gergonne desarrolló bastante su idea, en diversos artículos. Hace la observación digna de destacar, de que no empleaba diagramas por el convencimiento de que "aquí lo importante es la deducción lógica" (Nagel. 47). Parte de su trabajo está dedicado a comparaciones entre las demostraciones de enunciados duales. Presenta, por ejemplo, dos conjuntos de axiomas, en sendas columnas, de manera que hay dualidad entre los dos conjuntos, los cuales generan dos sistemas de proposiciones. En uno, punto es el elemento de base mientras líneas rectas y planos son definidos por puntos. En el otro sistema, son los planos los elementos de base y, puntos y rectas se definen mediante plano. Para cada enunciado en la prueba de cualquier teorema en uno de los sistemas hay un enunciado dual en la prueba del dual en el segundo sistema. Para Gergonne esto manifiesta la identidad estructural de las dos deducciones. Si los términos *punto*, *recta*, *plano* son vaciados de los contenidos ordinarios, es decir, si se los considera como variables, sin significado específico, los dos sistemas exhiben un idéntico modelo de interrelaciones entre elementos cualesquiera. Pensó muy bien que dos sistemas de enunciados tienen propiedades lógicas comunes, si se prescinde del significado de los enunciados. Sin embargo, es curioso que no haya ligado el principio de dualidad con otra de sus ideas de valor: los axiomas en geometría no son enunciados verdaderos o falsos sino definiciones implícitas que pueden tener significados diferentes (Nagel. 48). Tan brillantes ideas no fueron, por cierto, obstáculos para que Gergonne se enredara en una incoherente polémica sobre prioridad, con Poncelet, quien había llegado igualmente a concebir un principio análogo (Nagel. 50). De esta discusión (Nagel. 51-53), en la que intervinieron, además de Gergonne y Poncelet, geómetras como Steiner y Chasles, queda clara, una vez más en la historia de la matemática, la dificultad que hay en desgajar una nítida noción de un conglomerado matemático. No hubo inspiración de sobra sino una ardua labor, esta vez coronada por el éxito del principio de dualidad de la geometría proyectiva posterior. Había que dejar de pensar que la materia prima de la geometría comprende forzosamente los puntos. Para Chasles, la dualidad se explica mejor mediante la comprensión de las correspondencias entre conjuntos. Gracias a estas, apropiadamente escogidas, una teoría sobre un conjunto puede constituirse en geometría sobre otro conjunto por medio de una transformación que habrá que establecer. Empieza a vislumbrarse, en Chasles, la geometría como teoría de las transformaciones de los años posteriores; deja de ser una teoría de la extensión y de su medida; ni es una teoría de la magnitud, como hasta entonces se pensaba; la geometría es más bien una teoría del orden. Esto intuía ya Chasles hacia 1837.

Principio de reciprocidad de Plücker

A la par de la escuela francesa, la escuela alemana, Plücker, Möbius, ..., investiga acerca de los mismos temas. Plücker logra dar un cimiento algebraico al principio de dualidad. Observa la ecuación de la recta en un plano, llevada a la forma: $ux + vy + 1 = 0$. Si u, v son números reales cualesquiera, pero fijados, la recta es el conjunto de los puntos de coordenadas x, y tales que $ux+vy+1 = 0$. Cada pareja u, v genera así una recta. Pero, piensa Plücker, análogamente puede considerarse la pareja fija x, y y la pareja variable u, v; en tal caso se obtiene el conjunto de las rectas que pasan por el punto (x, y). En el primer caso, una recta es un conjunto de puntos; en el segundo, un punto es determinado por un conjunto de rectas. Plücker toma la noción de recta como elemento básico de la geometría y punto como elemento derivado. En tres dimensiones, punto y plano juegan el mismo papel que punto y recta en dos dimensiones, respecto de la ecuación de un plano en tres dimensiones: $ux + vy + wz + 1 = 0$. Cada teorema de geometría proyectiva acerca de puntos puede ser doblado, análogamente, por un teorema acerca de rectas en el plano, acerca de planos en el espacio. En esta simetría consiste el principio de dualidad (Nagel. 57). Plücker encuentra en el principio de dualidad enunciado por la escuela francesa, limitaciones dignas de ser corregidas. Considera ecuaciones de grado mayor que uno y erige el principio de reciprocidad. En el plano, la ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1 = 0$ representa una cónica, completamente determinada, cuando se conocen los cinco números reales: a, b, c, d, e. Las variables de coordenadas de punto son x, y; los puntos son los elementos de base de la geometría; una cónica es un conjunto de puntos. Pero cuando los elementos de base de una geometría son las rectas, un punto es determinado por un conjunto de ellas. Plücker propone tomar las cónicas como elementos de base para una geometría. Toda configuración plana quedará especificada mediante relaciones entre cónicas, como lo es mediante relaciones entre puntos, cuando los puntos son los elementos de base; o mediante relaciones entre rectas cuando estas son los elementos de base (Nagel . 58). La idea de Plücker trajo consigo un cambio en la manera de considerar la dimensión: la del plano, por ejemplo, depende de los elementos de los cuales se predica; el plano es dos dimensional respecto de los puntos y de las rectas; pero, es de dimensión cinco respecto de las cónicas, porque cinco coordenadas independientes determinan una cónica única, como dos números determinan un punto único o una recta única. El principio de reciprocidad de Plücker exhibe dualidades entre configuraciones que tengan la misma dimensión; así, es más general que el principio de Gergonne y Poncelet, que solo pone de manifiesto dualidades entre punto y recta, en dos dimensiones, o entre punto y plano en tres dimensiones. Gergonne no podía generalizar su principio porque lo creía una propiedad absoluta de la extensión, solo predicable, por tanto, en dos o en tres dimensiones (Nagel. 59).

Nagel (60) traza un interesante paralelo entre la obra de Grassmann y la de Plücker. El primero desarrolló una geometría n-dimensional, el segundo mostró cómo acostumbrarse a mirar el espacio tenido por 3-dimensional, por ejemplo, como un espacio n-dimensional. Así, un espacio de Plücker, como el usual 2-dimensional con las cónicas como elementos de base de una geometría, viene a tener las mismas propiedades formales que un espacio de cinco dimensiones de Grassmann. Recíprocamente, un espacio n-dimensional de Grassmann puede ser considerado como el usual espacio 3-dimensional cuando ciertas configuraciones en aquel se toman como elementos de este.

Es así como poco a poco se fue abriendo paso la concepción de la *geometría* como una disciplina *formal* sobre variables que no requieren ser interpretadas para el desarrollo de la teoría; dicha geometría abstracta, sin contenidos, puede ser aplicada, es decir, tener realizaciones diversas, que tienen todas una misma explicación.

Hacia la noción matemática de transformación

En 1639, dos años después de *Géométrie*, de Descartes, circuló entre entendidos un proyecto en borrador, firmado por Gérard Desargues, ingeniero, matemático y arquitecto francés, en el que se ensayaba presentar la perspectiva, usada en particular por los grandes pintores de la época, como un medio para hacer geometría. Por entonces, solo Pascal pudo hacer una contribución más, al enunciar, 1640, el teorema del hexagrama místico, uno de los más grandes teoremas que dejó a la matemática, a partir del cual, según se dice, podía explicar toda la geometría que concerniera a las secciones cónicas.

En el siglo XVIII, Euler se dio cuenta de un hecho importante que enunció así:

Un desplazamiento plano es una rotación, o una translación, o una translación seguida de una simetría.

Habría que esperar, sin embargo, hasta la que llama Bourbaki "edad de oro de la geometría" elemental para que los barruntos de los precursores, Desargues y Pascal, se convirtieran, después de muchos desarrollos, en la geometría proyectiva. Muy diversos matemáticos intervinieron con sus ideas en dicho proceso. Se enumeran unos cuantos para ilustrar, una vez más, el hecho de que el alumbramiento matemático, en una disciplina ya bien constituida como era la geometría, necesitó aun el concurso de muchos esfuerzos intelectuales.

La Hire y Newton habían empleado las transformaciones proyectivas planas: $x' = a/x$, $y' = y/x$.

Newton, en su *Enumeración de las líneas de tercer orden* había empleado transformaciones afines planas.

Más tarde, Euler y Clairaut habían empleado las afinidades: $x' = ax$, $y' = by$.

Monge hacía teoría de lo que actualmente se llama proyección, que incorporaba a sus cursos de la Escuela Normal y de la Escuela Politécnica, y que aplicaba en arquitectura y en ingeniería.

Con todo, durante años, la obra más importante, dentro de esta tendencia, fue *Traité des propriétés projectives de figures*, 1822, de Jean Victor Poncelet.

"Poncelet hace del espacio proyectivo el marco general para todos los fenómenos geométricos" (Bourbaki. p. 165)... "Uno de los procedimientos sistemáticos de demostración, empleado por Poncelet hasta la saciedad, consiste en reducir por proyección las propiedades de las cónicas a las del círculo, método aplicado ocasionalmente por Desargues y Pascal". (Bourbaki. p. 167).

Otro aporte importante fue el de August Ferdinand Möbius, con su obra *Barycentrische Calcul*, 1827, donde muestra, por ejemplo, que la transformación homográfica comprende como casos particulares a los desplazamientos, las similitudes y las afinidades.

En 1832, el matemático suizo Jacob Steiner considera seis formas proyectivas fundamentales y muestra cómo pasar de una a otra.

En 1837, el matemático francés Michel Chasles publicó su *Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Una de las afirmaciones más notables de Chasles es esta:

Tómese una figura cualquiera del espacio y una de sus propiedades comunes; aplíquese a esta figura uno de los modos de transformación y váyanse teniendo en cuenta las diversas modificaciones o transformaciones que experimenta el teorema que expresa tal propiedad; se tendrá una nueva figura y una propiedad de esta figura que corresponderá a la de la primera... Este medio que posee la geometría reciente permite multiplicar indefinidamente las propiedades geométricas.

(Citado por Russo en su edición francesa del 'Programa de Erlangen'). Quizá sea más interesante aún la afirmación de Chasles destacada por Bourbaki (p. 171).

> Hoy en día, cualquiera puede presentarse, tomar una verdad conocida cualquiera, y someterla a los diversos principios generales de transformación; sacará de ahí otras verdades, diferentes o más generales; y con estas podrá iterar el procedimiento; de suerte que podrá multiplicarse, casi indefinidamente, el número de nuevas verdades deducidas de la primera... Así puede quien quiera, en el estado actual de la ciencia, generalizar y crear en geometría; el genio ya no es indispensable para añadir una piedra al edificio.

El trazo decepcionado de Chasles en la última frase es lo de menos; lo interesante es que esto haya sido publicado en 1837, cuando Cayley tenía apenas 16 años y Klein no había nacido todavía.

Poncelet había introducido la distinción entre propiedades métricas (las de la geometría euclidiana) y propiedades proyectivas. "No es sin duda exagerado ver en esta separación una de las más netas manifestaciones, de la época, de lo que debía llegar a ser la noción moderna de estructura" (Bourbaki. p. 168). Para Poncelet, las propiedades proyectivas son las más generales, todas las otras propiedades, deben ser simples corolarios" de estas (Bourbaki. p. 158). Análogamente, Chasles distingue entre las propiedades descriptivas "concernientes a las formas y situaciones" de las figuras, y, las propiedades métricas "concernientes a las magnitudes". Hubo quienes pensaran que las geometrías afín y proyectiva eran ramas más pobres de la geometría métrica, por carecer de la noción de medida. Esta confusión de ideas se disipará con el desarrollo de ideas que culmina en el 'Programa de Erlangen'. En 1859, Arthur Cayley, puso en claro que "tanto la geometría afín como la métrica pueden considerarse como casos particulares de la proyectiva: 'la proyectiva es toda la geometria'" (Klein. Geometría. p. 179).

El 'Programa de Erlangen', de Klein

Debe de escribirse entre comillas, porque, en realidad, Klein nunca escribió trabajo alguno con tal título. El programa presentado por Klein, 1872, al entrar a formar parte de la Facultad de Filosofía y del Senado de la Universidad de Erlangen, se titulaba: *Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen. Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas.* Es el conocido como 'Programa de Erlangen'. Klein avanza un gran trecho respecto de Poncelet, quien había extendido carta de ciudadanía en geometría a la noción de transformación. Desde unos 25 años antes, los progresos del álgebra lineal habían permitido forjar la noción de invariante. Es Klein quien viene a darse cuenta de que

> los teoremas de la geometría clásica no son otra cosa que la expresión de relaciones idénticas entre invariantes o covariantes del grupo de las similitudes, los de geometría proyectiva expresan las identidades entre covariantes del grupo proyectivo. Es la tesis magistralmente expuesta por Félix Klein en el célebre ‘Programa de Erlangen’. (Bourbaki. p. 170).

La idea valiosa de Klein estuvo en hacer énfasis en la estructura del conjunto de transformaciones; desde unos 40 años antes se conocía la estructura de grupo, gracias a Galois. Entonces Klein se da cuenta de que es la noción clave para la geometría: “De las nociones necesarias para las consideraciones que siguen, la más esencial es la de grupo de transformaciones del espacio”. (Parágrafo 1). He aquí algunas aseveraciones que constituyen la substancia del programa:

> Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por naturaleza, estas propiedades son, en efecto, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su magnitud absoluta, y en fin también del sentido en el que sus partes están dispuestas… Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones con similitud y las por simetría no alteran, pues, las propiedades de las figuras, ni tampoco las transformaciones compuestas de las precedentes. Llamamos grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones. Las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: Las propiedades geométricas son caracterizadas por su invariación relativamente a las transformaciones del grupo principal. Hagamos abstracción de la figura material que, desde el punto de vista matemático, no es esencial, y no veamos en el espacio más que una multiplicidad de varias dimensiones… Por analogía con las transformaciones del espacio, podemos hablar de transformaciones de la multiplicidad; ellas forman también un grupo… Como generalización de la geometría [de Euclides] se pone entonces esta cuestión general: Dados, una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiar sus elementos desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo. O también: Dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, desarrollar la teoría de los invariantes relativos a este grupo.

Las últimas afirmaciones son las más citadas cuando se quiere acentuar la esencia del programa de Klein. Están extractadas del primer parágrafo. Klein no deja de mencionar las multiplicidades (actualmente se dice variedades para el preciso concepto matemático surgido de diversas investigaciones) de un número cualquiera de dimensiones, ni el hecho capital de que el grupo de transformaciones se escoge arbitrariamente, de lo cual resulta gran generalidad. En el parágrafo 3 está esta otra afirmación, que varios geómetras ya habían presentido:

> La geometría proyectiva no nació de veras sino cuando se volvió costumbre considerar como enteramente idéntica a la figura primitiva y a todas aquellas que se obtienen de ella por proyección; y, enunciar las propiedades proyectivas de tal manera que se ponga en evidencia su independencia respecto de las modificaciones causadas por la proyección. Esto era lo mismo que tomar como base de consideraciones, el grupo de las transformaciones proyectivas; se encontraba así creada la diferencia entre las geometrías proyectiva y ordinaria.

La relación entre los dos grupos, el que llamó principal y el proyectivo, así como entre otros grupos introducidos, permite a Klein, dedicar el resto de su memoria a ilustrar su idea fundamental mediante "una secuencia de bellas aplicaciones", como él mismo dice en el parágrafo 5.

Así, pues, grosso modo, Apolonio hizo la teoría de los lugares sólidos. Descartes y Fermat crearon el lenguaje matemático apropiado para estudiar, no solo lugares planos y sólidos, sino muy diversos tipos de curvas. Poncelet introduce la noción matemática de transformación en geometría, presentida ya por algunos geómetras. Galois trabaja con la noción matemática de grupo. Klein muestra que la esencia de la geometría está en la estructura del grupo de transformaciones.

El matemático francés Henri Poincaré expresó con mucha convicción su concepción de la geometría al culminar esta etapa de su evolución:

> La geometría no es otra cosa que el estudio de un grupo. La geometría no es más que el conocimiento de las relaciones mutuas de esas transformaciones, o, para usar el lenguaje matemático, el estudio de la estructura de grupo formado por esas transformaciones, es decir, del grupo de los movimientos de los cuerpos sólidos.

Por allí mismo, Poincaré resuelve una dificultad: la verdad de la geometría de Euclides no es incompatible con la de la geometría de Lobachevski, porque la existencia de un grupo no es incompatible con la de otro.

Desde luego, desde el punto de vista de teoría de grupos, Poincaré tiene razón; hay, sin embargo, una observación que se impone.

Geometría es el estudio de las geometrías. Una geometría es una tripla (C, G, I) formada por un conjunto no vacío, un grupo, un conjunto de propiedades de los elementos formados a partir de los elementos de C, invariantes (las propiedades) respecto de G. Fijado el conjunto y el grupo se siguen, sin más las propiedades invariantes. El conjunto C, es tradicionalmente llamado espacio de la geometría; sus propiedades y supuestos básicos dependen de las circunstancias del geómetra; no son las mismas en todos los casos.

Si el geómetra quiere obtener la geometría de Euclides, sobre $\mathbb{R}^n$ considera el llamado producto escalar euclidiano.

Para desarrollar una geometría métrica algebraicamente, se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con un producto escalar; las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ que dejan invariante el producto escalar determinan el grupo apropiado para la geometría; la geometría queda constituída por el conjunto de propiedades invariantes respecto del grupo; así se obtiene la tripla que informa la geometría.

Para obtener la geometría plana euclidiana se consideran $\mathbb{R}^2$ y el producto escalar euclidiano $\big\langle (x,y),(x',y')\big\rangle = xx' + yy'$.

Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ que dejan invariante este producto

$$\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= bx + ay, \qquad a^2 + b^2 \neq 0, \end{aligned}$$

forman el grupo de las similitudes. Si $a^2 + b^2 = +1$ se obtiene el subgrupo de las rotaciones, uno de los grupos de la geometría euclidiana plana. Hubiera podido considerarse a $\mathbb{R}^2$ con el grupo de las rotaciones y se habría llegado igualmente a tener la tripla que conforma una geometría.

Si se piensa $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar

$$\big\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle = x_1x_2 - y_1y_2,$$

al proceder de manera análoga a la ya considerada del producto escalar euclidiano se obtiene la versión algebraica de una geometría cuyo grupo es determinado como el de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ que no alteran este segundo producto escalar.

Ahora bien. La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos en geometría euclidiana y menor que dos rectos en geometría de Bolyai-Lobachevski: resultan dos enunciados que tienen el mismo sujeto, (la suma de los ángulos de un triángulo), el mismo atributo (dos ángulos rectos) y modos de atribución diferente (igual a, menor que). Los enunciados son contradictorios, no caben dentro del mismo sistema formal. El solo hecho de que puedan existir grupos diferentes no permite explicar la contradicción.

Hay que observar que no solo los grupos son diferentes, sino que operan sobre espacios diferentes; sea que se dé por adelantado el espacio estructurado apropiadamente para que pueda operar el grupo; sea que no se dé espacio ya listo para la acción del grupo sino que se deje a este moldear la estructura del espacio, las geometrías resultantes son distintas. Para explicar la misma situación (cuestión o problema) Poincaré puede preceder por convención (como le place decir): por razones de simplificación en el manejo de los datos, por mayor extensión de los resultados, o por otras, puede ser que convenga elegir determinado grupo con preferencia a otro; la situación no cambia debido a la elección; pero, el lenguaje resultante, sí; no se pueden mezclar en un solo sistema formal dos explicaciones que contengan proposiciones contradictorias, como sucedería en el ejemplo de las geometrías. Distinguir netamente las dos explicaciones no sería óbice para un eventual enriquecimiento comprensivo de la situación por el hecho de disponer de más de una explicación.

La decadencia ineluctable de la investigación en geometría elemental según Bourbaki

Se puede compendiar la herencia de Klein tocante a estos temas en tres sentencias: Los teoremas geométricos de *Elementos* son invariantes respecto a transformaciones denominadas desplazamientos o isometrías. Estas transformaciones admiten la estructura de grupo. Hacer geometría consiste en averiguar cuáles son las propiedades invariantes de una determinada situación o sistema matemático respecto de un grupo de transformaciones dado. Mediante la aplicación de tales ideas, se llega a una clasificación racional y "estructural" de los teoremas de la "geometría", según el grupo del cual dependen.

Bourbaki piensa que la geometría elemental adquiere de este modo una "despiadada claridad" que la "aja bruscamente" y le hace perder "todo su brillo". Ya se pueden

> formular métodos generales que, en principio, permiten escribir todos los covariantes algebraicos de manera puramente automática; victoria que, ipso facto, señala la muerte, como campo de investigación, de la teoría clásica de los invariantes y de la geometría elemental, la cual se convirtió prácticamente en un simple diccionario. Para el matemático profesional, la mina está agotada, dado que ya no hay allí más problemas de estructura, que puedan repercutir sobre otras partes de la matemática; este capítulo de la teoría de grupos y de sus invariantes puede ser considerado como cerrado hasta nueva orden (pp. 171-172).

La nueva orden se daría, desde luego, en el caso de que brotara una pregunta que no pudiera responderse con los medios al alcance de la geometría elemental.

Después del ‘Programa de Erlangen’, las geometrías euclidiana y no euclidianas, desde el punto de vista puramente algebraico, se convirtieron en simples lenguajes, más o menos cómodos, para expresar los resultados de la teoría de las formas bilineales, cuyos progresos van a la par de los de la teoría de invariantes (p. 172).

Geometría elemental: vivencia de una teoria matemática

Hay una suerte de desquite para la inevitable decadencia. Bourbaki, el mismo que declara acabado el inquirir en geometría elemental, indica igualmente la superación con creces para tal situación. Gran parte de la más avanzada matemática actual tiene un aspecto marcadamente geométrico, no solo en cuanto a la exposición axiomática, descrita grosso modo por el epígrafe de este capítulo, sino también en cuanto que como casos particulares cobija las situaciones consideradas en geometría elemental, cuando la mayoría de los matemáticos (pues algunos de ellos conservan malos recuerdos de Euclides) comienzan a ir más allá del horizonte de la geometría elemental, se puede decir que tratan de proceder por analogía, como si la geometría elemental se les quedara para siempre como la mejor vivencia de una sencilla teoría matemática. No es de extrañar, pues, la última frase del capítulo dedicado por Bourbaki a la historia de la geometría elemental:

Superada como ciencia autónoma y viviente, la geometría clásica se transfigura así en un lenguaje universal de la matemática contemporánea, de una flexibilidad y de una comodidad incomparables (p. 174).

Nota. ¿Qué influencia tuvo el ‘Programa de Erlangen’ en la investigación y en la docencia? Según Elie Cartan, tal proyecto orientó inmediatamente la investigación en geometría. Pero, en educación, según Bourbaki (p. 172)

esta ineluctable decadencia de la geometría (euclidiana o proyectiva), no fue advertida durante largo tiempo por los contemporáneos, y hasta 1900, esta disciplina continuó figurando como rama importante de la matemática, de ello da testimonio, por ejemplo, el lugar que ocupa en la Enzyklopädie.

(Bourbaki se refiere a la célebre *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.* 1901 - 1935. Leipzig. Teubner. 20 volúmenes).

Hasta los años 50 de nuestro siglo y salvo en Alemania, el ‘Programa de Erlangen’ no tuvo ninguna influencia en la enseñanza de la geometría elemental, ni en el nivel secundario, ni en el universitario.

Críticas a Euclides

Lobachevski comienza su Teoría de las Paralelas, con esta crítica:

Encuentro ciertas imperfecciones en geometría y creo que ellas son la razón para que esta ciencia, aparte de su transición a la analítica, no haya podido hacer ningún adelanto desde el estado en que nos la dejó Euclides.

Pertenecientes a tales imperfecciones, considero, en primer lugar, la obscuridad en los conceptos fundamentales de las magnitudes geométricas y en los modos y métodos de representar la medida de tales magnitudes; y, en segundo lugar, la brecha importante en la teoría de las paralelas, para rellenar la cual han sido vanos todos los esfuerzos que los matemáticos han realizado.

Si la geometría, entonces, no ha cambiado prácticamente desde Euclides, y, en ella se observan fallas, estas provienen prácticamente desde Euclides. Según Blanché

Euclides, para las numerosas generaciones que se han nutrido de su substancia, ha sido quizá menos un profesor de geometría que un profesor de lógica (Brunschvicg).

A fuerza de frecuentar *Elementos*, a propósito de la deducción, desde el punto de vista de la geometría o del de la lógica, se aprendió no solo lógica o geometría, sino también a ver lo que faltaba a *Elementos* para ser axiomático, en el sentido que tiene este epíteto desde *Fundamentos de la geometría.* Signo de la relatividad de las cosas, *Elementos* había significado, no obstante, durante más de 20 siglos, la geometría en concreto o la lógica en acto. "More geometrico ha venido a significar more logico", escribe Blanché pensando en "Ethica ordine geometrico demonstrata"(ordine, no more). En cambio, hay cierta compasiva ironía en Bourbaki cuando escribe que Spinoza "tal vez obraba de buena fe al exponer la ética a la manera de los geómetras".

Mucho se ha escrito, acerca de la perfección o imperfección de *Elementos.* Basta citar dos opiniones extremas. Newton, como otros científicos de su época, o posteriores, se proponía imitar en sus obras expositivas, al, para él, modelo no superado, ni superable. En contraposición. Bertrand Russell escribe:

Es seguro que de los postulados de Euclides no puede deducirse la geometría que Euclides dedujo de ellos.

Entre quienes tomaron a Euclides al pie de la letra, está Kant, quien de allí extrajo consecuencias que echarían a perder su filosofía de la matemática, dado que las geometrías no euclidianas, creadas posteriormente es cierto, no se ajustan a ella.

Es importante conocer en detalle, algunas de las críticas formuladas a *Elementos*.

Elementos ha tenido un papel primordial en la historia del pensamiento por haber sido el primer sistema axiomatizado y durante más de 20 siglos el único, y, por tanto, paradigma de argumentación sistemática. Muchos se han resistido a aceptar las imperfecciones o han tratado de disculparlas con razones nimias. Para que no se las tome a la ligera, se aducen a continuación juicios escogidos de Proclo, Klein, Russell y Bourbaki. No se tendrán en cuenta sino las críticas al aspecto axiomático: disposición de los primeros principios, de los teoremas, etc.

En cuanto a postulados y axiomas, Proclo de Licia intenta hacer una síntesis de lo que seguramente fue muy discutido en las escuelas helenísticas. Según Proclo, hay tres interpretaciones posibles relativas a la distinción de las dos nociones. La primera, ve entre postulado y axioma la misma relación que entre problema y teorema. El postulado afirma la posibilidad de una construcción; según este primer criterio, los postulados 1, 2 y 3 de Euclides son apropiados. No lo es el cuarto. Y el quinto está entre postulado y axioma. Es postulado en cuanto hace posible la construcción del punto de intersección de dos rectas, cuando estas rectas, cortadas por una transversal, forman dos ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos.

La segunda interpretación da a los postulados una significación para la geometría, mientras que los axiomas o nociones comunes tendrían que ver tanto con la geometría como con la aritmética.

La tercera interpretación, basada en Aristóteles, hace del axioma algo evidente por sí mismo. Un postulado es aquello que sin ser un axioma, es admitido sin demostración.

De acuerdo con la segunda y la tercera interpretación, los postulados y axiomas están bien escogidos.

Críticas de Klein

El matemático y geómetra distinguido Félix Klein, en sus conferencias para los futuros profesores de enseñanza secundaria, conocidas con el título de "Matemática elemental desde un punto de vista superior", dedica 29 páginas, de la traducción española, a una crítica de *Elementos*.

Según Klein, pese a “la enorme fama y difusión”, *Elementos* exige “una severa crítica”. ¿A qué se debe el “exagerado aprecio” de *Elementos*? A un “concepto equivocado de la cultura griega” que consiste en creer que “los resultados obtenidos por los griegos pueden considerarse como intangibles y eternos”. Por el contrario, “puede asegurarse que no existe ningún ramo de la cultura en el que sus conocimientos constituyen la cúspide de nuestras aspiraciones”. Se afirma dogmáticamente que “el sistema geométrico por ellos construido es de una perfección imposible de sobrepasar”. Y no se para ahí, sino que se ha llegado hasta un “culto” de *Elementos*, “en donde se cree ver la base de todo sistema geométrico completo”. Lo que es cierto es que en matemática y no solo en geometría, la obra de los griegos ha sido superada. ¿Cómo se fundamenta esta última observación?

Para comenzar, *Elementos* es “una introducción al estudio de la geometría de la matemática en general, con la tendencia a tratar esta según las ideas de la escuela platónica, como preparación para estudios filosóficos generales. Ello explica el cuidado puesto en la conexión lógica y el descuido de las aplicaciones”. “Euclides sobrepasó en algunas partes los conocimientos teóricos de su tiempo” pero es falso asimilar *Elementos* a algo así como la totalidad de la matemática griega. Basta comparar con Arquímedes, el primer matemático griego. Arquímedes desarrolla “el sentido del cálculo numérico”. En segundo lugar, Arquímedes se interesa por todo tipo de aplicaciones, mientras Euclides prescinde a tal punto de las aplicaciones, que ni siquiera menciona la regla y el compás. Postula que se puede trazar una circunferencia “pero no emplea una sola palabra en mostrar cómo se hace. En esto, Euclides sigue las ideas de ciertas escuelas filosóficas antiguas, que consideraban las aplicaciones prácticas como algo manual e impropio de la ciencia”. En tercer lugar, “Arquímedes fue un gran investigador que en cada uno de sus escritos avanza un paso más sobre lo ya conocido, mientras que *Elementos* de Euclides se reduce a recoger y sistematizar los materiales ya existentes”. Y el procedimiento de exposición de Arquímedes era el genético, indicaba “el proceso mental seguido” y no el rígido encadenamiento de *Elementos*. Es más. Parece que investigadores y expositores, más que de “la cristalizada forma euclidiana de exposición”, se valían de la genética. En el mismo Museo de Alejandría circulaban los Hipomnemata, apuntes de las conferencias orales.

A esta oposición que hace Klein entre Euclides y Arquímedes se contrapone la opinión de que tampoco el ilustre hijo de Siracusa estaba realmente interesado en las aplicaciones de la matemática sino que más bien se resignaba a ellas para no defraudar la confianza de sus conciudadanos y la esperanza de estos de que gracias a los inventos de Arquímedes podrían librarse de ser uncidos al yugo de los romanos.

Volviendo al punto de vista general, *Elementos* se resiente de tres carencias: la del álgebra, la de los números negativos y la de los números complejos. Su álgebra de figuras, en la que se construía a partir de segmentos, era particularmente complicada. No hay, pues, ni facilidad, ni flexibilidad, ni generalidad. Para lograr esta, tenían que considerar muchos casos particulares. En el libro primero, la demostración del segundo caso de igualdad de triángulos (I 26) está duplicada debido a que se puede considerar de dos maneras la igualdad de lados de dos triángulos que se comparan. Y la solución de cada uno de los dos casos está apoyada sobre teoremas diferentes. Desde el punto de vista algebraico tal duplicidad desaparece. Las situaciones resueltas por los teoremas 1, 2, 3 (este particularmente complicado) se resuelven más facilmente en otras axiomatizaciones. Véase ahora un ejemplo tomado del libro segundo, referente a la aritmética elemental y al álgebra de las magnitudes geométricas. Un producto es el producto de dos segmentos, considerado como un rectángulo. Para sumar dos de estos productos, es preciso transformar los dos rectángulos en otros dos equivalentes y de bases iguales para que la suma resulte un rectángulo.

Ante las exageraciones en la apreciación de *Elementos* que confunden el valor absoluto de ellos con su valor histórico, Klein estudia especialmente la parte del libro que tiene que ver con los fundamentos de la geometría.

La definición de punto no puede aceptarse porque un punto no queda determinado por la propiedad apuntada por Euclides en su definición. Tampoco puede aceptarse la definición de línea. En particular, la definición de recta da pie a varias interpretaciones. Si quiere decir que los puntos de la recta conservan la misma dirección, hay que tomar la idea de dirección como no definida. Si quiere decir que la recta se comporta como una barra rígida, es decir, que coincide consigo misma luego de movimientos que intervienen en las demostraciones, hay que introducir, como noción previa, la de movimiento.

Euclides hace uso de postulados que no ha enunciado. Afirma, por ejemplo, que dos circunferencias se cortan cuando pasa cada una por el centro de la otra.

Al cuarto postulado le caben varias interpretaciones. Algunos comentadores piensan que, puesto que Euclides no menciona el movimiento, el postulado 4 se propone introducir la noción de movimiento. Otros, empero, piensan que, si algo se proponía Euclides, era desterrar la noción de movimiento. Necesitaría, en tal caso, la noción abstracta de congruencia. Si tal es la idea del postulado cuarto, ¿por qué lo hace solo para los ángulos y olvida completamente los segmentos?

El sistema euclidiano de postulados es, pues, incompleto.

En cuanto a los axiomas o nociones comunes, los tres primeros y el quinto son de tipo lógico; mientras que el cuarto da la superponibilidad como criterio para la igualdad, "pero deja subsistir la duda de si presupone o no, la noción de movimiento".

No se ha podido hacer claridad en cuanto a la diferencia entre axiomas y postulados en Euclides.

En cuanto a los teoremas, una construcción tan sencilla como es la de "llevar un segmento dado sobre otro a partir de uno de sus extremos", necesita de tres proposiciones en *Elementos*. Porque para poder llevar un segmento (proposición 3) necesita mostrar que puede recortarlo de otro mayor (proposición 2) y para esto necesita mostrar que puede construir un triángulo equilátero (proposición 1). Tanto rigor para justificar el transporte de un segmento y en el teorema 4, primer caso de igualdad de triángulos, se hace el transporte de ángulos sin ninguna explicación. Inconsecuencia de método, afirma Klein.

Euclides supone también que una recta continúa siéndolo después de ser llevada. Certeza intuitiva. E inconsecuencia, en cuanto no todo queda establecido con el mismo rigor lógico. Ha debido mostrarlo, como para el primer problema, o postularlo, pero no asumir implícitamente la posibilidad de movimiento de las figuras geométricas sin cambio de tamaño, ni de forma: un hecho de tanto bulto no se puede suponer. O si es así, porque las circunstancias no exigen ser demasiado estricto, por ejemplo, entonces, sobran igualmente las tres primeras proposiciones.

En definitiva, concluye Klein, el primer caso de igualdad de triángulos queda sin demostrar dada la ambigüedad respecto al movimiento. "Podemos afirmar, por tanto, que en el primer libro de Euclides existen tantos defectos esenciales que de ningún modo puede considerarse como la completa satisfacción de un ideal". Anota Klein un defecto más. Las magnitudes (segmentos, ángulos, áreas, etc.) están consideradas en valor absoluto. En consecuencia, las proposiciones no pueden ser generales y hay que estudiar diversos casos particulares.

La más severa crítica de Klein es esta: "Nuestra objeción principal contra Euclides consiste en que su geometría carece de axiomas de ordenación". Son ellos relaciones de posición que hacen el papel de los signos en el cálculo algebraico; sin tales relaciones "el ideal del encadenamiento rigurosamente lógico no puede ser alcanzado".

Crítica de Bertrand Russell a *Elementos*

En las páginas 31-35 de *Educación geométrica* hay transcritos algunos conceptos desfavorables a *Elementos* de Euclides. Y en las páginas 35-38 algunos favorables. Conceptos concernientes a Euclides como maestro de geometría. Dado que en este capítulo interesan las imperfecciones lógicas de *Elementos*, se transcribe la severa crítica de Russell:

> Los rígidos métodos empleados por los geómetras modernos depusieron a Euclides de su pináculo de validez. Hasta hace muy poco tiempo se creía (como sir Henry Savile observó en 1621) que Euclides tenía solo dos fallas: la teoría de la paralelas y la de la proporción. Hoy sabemos que estos son casi los únicos puntos en que Euclides se halla a cubierto de objeciones. En cambio, sus primeras ocho proposiciones encierran un sinfín de errores. Es decir, no solo es dudoso que sus axiomas sean verdaderos, cosa relativamente desprovista de importancia, sino que es seguro que sus proposiciones no se deducen de los axiomas que él enuncia. La prueba de sus proposiciones requiere un número de axiomas mucho mayor, que Euclides emplea inconscientemente. Aún en la primera de sus proposiciones, en la cual construye un triángulo equilátero sobre una base dada, emplea dos círculos que se supone se intersecan. Pero ningún axioma explícito nos asegura que se intersecan, y, en algunas clases de espacio no siempre lo hacen. Es harto dudoso que nuestro espacio pertenezca o no a una de esas clases. De esta suerte, Euclides deja por entero de probar su tesis en su misma proposición primera. Y como por cierto es un autor nada fácil y terriblemente pesado, no posee ya sino un interés histórico.

¿Cómo habrían influido sobre Kant, de haberlas conocido, reflexiones como estas? El filósofo que las conoce debe pensar en cómo una obra paradigmática llega a dejar de serlo, no por efectos de la moda, sino al producirse un refinamiento de los razonamientos como consecuencia del desarrollo de la lógica, debida, a su vez, al desarrollo de la geometría.

Síntesis bourbakista de las críticas a Euclides

Elementos de historia de la matemática, de Bourbaki, edición de 1969, se ocupan de la obra de Euclides por lo menos 26 veces. Se van citar exclusivamente los lugares que tengan que ver con imperfecciones axiomáticas. Ello reforzará los conceptos de Klein y Russell, si hay necesidad, contra quienes, filósofos, matemáticos u otros, han tomado o toman a *Elementos* de Euclides como un modelo insuperable, sin querer tener en cuenta la evolución axiomática de la geometría.

Para comenzar, Bourbaki reconoce "la sólida armadura lógica de *Elementos*". Advierte, sin embargo, que el rigor puede conducir a la rigidez y le pone, de paso, una mala nota, a este respecto, a Arquitas de Tarento a quien se atribuye el contenido del libro VIII de *Elementos*.

"Si es cierto, como ha sido plausiblemente sostenido, que el libro VIII de Euclides nos ha conservado una parte de la aritmética de Arquitas, no es sorprendente ver allí la rigidez de razonamiento un tanto pedantesca cuya aparición no falla nunca en toda escuela matemática que descubre o cree descubrir el rigor".

Bourbaki adhiere a la opinión bien sustentada del matemático holandés e historiador de la matemática B. L. van der Waerden.

Lo curioso es que Bourbaki mencione "el postulado de las paralelas" y "el gran número de críticas y de intentos de demostración de que había sido objeto". En efecto, se vio ya que el postulado enunciado por Euclides no da pie (el cual hay que buscar en alguno de sus equivalentes muy posterior) para llamarlo, de las paralelas. Por otra parte, no fue una falla, sino una auténtica destreza de Euclides; la prueba está en que hubo que esperar a que pensadores del siglo XIX, evaluados los vanos intentos anteriores, se decidieran a tomar otro camino y encontraran, así, que era posible un triple escogimiento. No hay por qué achacar a Euclides el que haya sido tan difícil comprender que no hay una sino tres geometrías posibles y que habría que desandar el camino hasta cuando Euclides tomó una de las posibilidades, para darse cuenta de que había dos más. Bourbaki anota igualmente, luego de hablar de imperfección, el hecho de que continuadores o comentadores hayan ensayado demostrar otros postulados para reducirlos a teoremas como el de la igualdad de ángulos rectos, de lo cual no es responsable Euclides. Justificadamente alista Bourbaki las siguientes imperfecciones.

Ciertas definiciones son insuficientes: la de recta, la de plano.

Crítica de Clavio: falta un postulado que garantice la existencia de la cuarta proporcional utilizada implícitamente por Euclides en varios pasajes.

Crítica de Leibniz: Euclides se vale de la intuición, cuando admite, por ejemplo, que círculos que pasan el uno por el centro del otro tienen un punto común (I 1).

Crítica de Gauss: la noción "estar entre", que tiene un papel importante en las construcciones euclidianas, no está definida. Los desplazamientos, utilizados, principalmente para los tres casos de igualdad de triángulos, han sido introducidos subrepticiamente, pues, ni son primeros principios, ni son teoremas.

Esta introducción implícita había sido anotada ya por Peletier, comentador de Euclides en el siglo XVI.

Estas críticas prohija Bourbaki en la página 28 del libro citado.

La máxima "todas las cosas son números" de los primeros pitagóricos puede ser considerada como la traza de una primera tentativa para reducir la geometría y el álgebra a la aritmética. El descubrimiento de los irracionales señala el fracaso de dicha tentativa. Un segundo ensayo de síntesis toma como base la geometría; pero, la aritmética queda por fuera de tal síntesis. Lo muestra el hecho de que Euclides, después de haber desarrollado la teoría general de las proporciones entre magnitudes cualesquiera, "desarrolla independientemente la teoría de los números racionales, en lugar de considerarlos como casos particulares de las razones de magnitudes" (p. 35).

Euclides se aleja del empirismo hacia la axiomatización; en este sentido demuestra, por ejemplo, la conmutatividad del producto de dos números racionales. "Sin embargo, este progreso va acompañado en Euclides de un estancamiento y, a veces, de un retroceso en lo que concierne a la técnica del cálculo algebraico. La preponderancia aplastante de la geometría paraliza todo desarrollo autónomo de la notación algebraica: los elementos que entran en los cálculos deben ser, cada vez, "representados" geométricamente; además, las dos leyes de composición que intervienen no son definidas sobre el mismo conjunto (la adición de razones no está definida de manera general y el producto de dos longitudes, no es una longitud, sino un área); de ello resulta una carencia de agilidad que hace casi impracticable el manejo de las relaciones algebraicas de grado superior al segundo" (pp. 68-69).

Parece ser que, por razones más filosóficas que matemáticas, Platón habría puesto aparte las construcciones llamadas "por regla y compás", es decir, aquellas en las que no intervienen como curvas auxiliares sino rectas y círculos. En todo caso, Euclides, en *Elementos*, se limita exclusivamente a tratar problemas resolubles de esta manera; circunstancia que contribuyó no poco sin duda a fijar la atención de los matemáticos sobre estos problemas durante los siglos que siguieron (p. 93).

Incidentalmente da Bourbaki su opinión sobre el estilo de Euclides. Es a propósito del libro X, donde el geómetra alejandrino estudia las relaciones algebraicas entre números irracionales obtenidos mediante combinaciones de varios radicales cuadráticos (p. 95):

Todo ello expresado en el lenguaje geométrico habitual de *Elementos*, que hace le exposición particularmente tupida e incómoda.

Hay todavía otras imperfecciones anotadas por Bourbaki.

La definición de ángulo dada por Euclides merece tan poca cosa de parte de Bourbaki que, para aludir a ella, escribe entre comillas la palabra definición. La encuentra vaga e inutilizable, como las que Euclides ha dado para recta y para plano (p. 159).

Euclides no ha despejado la noción de orientación aunque utilice sin axioma ni definición el hecho de que una recta parta el plano en dos regiones (p. 159).

La idea de grupo de las rotaciones planas aparece de manera muy imperfecta, mediante la adición (introducida, ella también, sin explicación por Euclides) de ángulos no orientados de semirrectas, en principio, definida únicamente cuando la suma es a lo más igual a dos ángulos rectos. Hay, no obstante, por lo menos, dos pasajes (XI 20 21) donde Euclides habla de ángulos cuya suma puede exceder dos rectos, a propósito de las desigualdades satisfechas por las caras de un tetraedro. En estos dos pasajes parece, por tanto, que Euclides se ha dejado llevar por la intuición mucho más allá de lo que autorizan sus propias definiciones (pp. 159-160).

Los desplazamientos son conocidos por Euclides; por razones, empero, que ignoramos, parece experimentar una neta repugnancia a hacer uso de ellos; por ejemplo, en los casos de "igualdad de triángulos": se tiene la impresión de que no emplea la noción de desplazamiento sino por no haber sabido formular un axioma apropiado (p. 160).

Estas son, pues, las imperfecciones lógicas de *Elementos* anotadas por Bourbaki.

Algunos antecesores de la formalización hilbertiana

Pueden señalarse ciertos pasajes en la historia de la matemática interpretables como anticipos de lo que va a ser la obra formalizadora de Hilbert. Ocurre con frecuencia, en historia, encontrar en los antiguos algo así como premoniciones de realizaciones posteriores. Pascal discurría alguna vez acerca de este acontecer. Nunca debe olvidarse, empero, que las circunstancias históricas jamás vuelven a ser las mismas. Lo que para Hilbert se convertirá en una necesidad, era para su lejano antecesor un presentimiento, quizás genial, pero no forzado todavía por el desenvolvimiento matemático.

Así sucede con el carácter fundamental de la formalización que considera la matemática como un inventario de formas vacías. En la historia que hace Guillaume de la axiomática y la lógica, se hallan elocuentes presagios, cuya recensión es forzoso consignar aquí, por ser anteriores a Hilbert y para que no distraigan demasiado la atención en los capítulos 8, 9, 10, dedicados a la reseña de la creación hilbertiana; en el capítulo 10 habrá que ocuparse de algunas opiniones de Poincaré, contemporáneas de los trabajos de Hilbert y de algunas de Hermann Weyl, posteriores.

Descartes, (pp. 355-356), evoca la idea de una

> matemática universal... ciencia general que explica todo lo que se puede buscar en lo tocante al orden y la medida sin aplicación a una materia particular.

El gran predecesor es Leibniz, (ver el capítulo 3 del presente volumen) quien concibe una "matemática universal, ciencia general de la cualidad" (por oposición a la "matemática especial, ciencia general de la cantidad"), que también llama *lógica matemática* o "cálculo de razonamiento" y que requiere una "lengua característica universal" en la cual, a semejanza del álgebra, cada idea se representa mediante un carácter. Estaba influido por el arte para convertir infieles, de Raimundo Lulio y por Hobbes, quien decía: "Toda operación de nuestro espíritu es un cálculo". Con gran optimismo, que parece haberse temperado paulatinamente, escribe Leibniz frases como estas:

> Nunca se podrá poner fin a las controversias... si no se sabe pasar de razonamientos complicados a algunos cálculos sencillos, y, de palabras con significaciones vagas e inciertas a caracteres bien determinados. Porque puede suceder que todo paralogismo no sea más que un error de cálculo; y que un sofisma no sea en realidad otra cosa que un solecismo o un barbarismo, que sería fácilmente refutado por las leyes mismas de esta gramática filosófica.

Indica igualmente Leibniz que "para no caer en faltas" habrá que concretarse a "no hacer sino argumentos in forma", "aquellos donde se concluye por la fuerza de la forma". Más aún: se busca que la lengua característica tenga una forma visible y fácilmente reconocible, dado que "las lenguas comunes, aunque muy útiles para el razonamiento, están, sin embargo, sujetas a muchos equívocos y no puede construirse con ellas un cálculo tal que los errores de razonamiento puedan ser descubiertos gracias a la formación y a la construcción misma de las palabras…" (Guillaume. pp. 356-357).

Fue también Leibniz quien enunció lo que sigue:

La matemática universal es la lógica de la imaginación; se ocupa de todo aquello que en la imaginación es susceptible de determinación exacta.

De seguro, Leibniz alude a la matemática sin contenido, que Hilbert inventará de nuevo. Más cercana todavía del pensamiento hilbertiano está la aseveración de Leibniz:

Poner caracteres en el lugar de las cosas, para desembarazar el espíritu.

Desafortunadamente, los textos de Leibniz atinentes a lógica no pudieron influir en el desarrollo de esta disciplina, sepultados como estuvieron en la biblioteca de Hannover hasta comienzos del siglo XX. Por ello los lógicos tuvieron que recrear las ideas ya muy bien concebidas por Leibniz.

Claramente se expresa también Condillac en esta magnífica frase: "El arte de razonar consiste en una lengua bien hecha". Y menciona la matemática,

ciencia bien tratada, cuya lengua es el álgebra.

Es de Condillac la descripción que sigue:

Las operaciones no se hacen sino sobre los signos… Cuando nos dan una ecuación, la transformaremos, sin tener necesidad de saber lo que significan las letras que la componen. Si lo sabemos, no pensaremos en ello; y solo cuando la operación se habrá acabado, será cuando se pondrán los valores en vez de las letras.

Al paso que Condillac insiste en que "estas operaciones son puramente mecánicas", Hilbert insistirá en la vacuidad de las fórmulas o formas, vale decir, en la carencia de contenido de ellas.

Guillaume anota que son diversos los autores que han asociado el álgebra con el lenguaje simbólico. Woodhouse escribe en 1801:

El álgebra es un lenguaje, o un sistema de caracteres o signos, inventado con el fin de facilitar la comparación y la combinación de las ideas.

El matemático hace completamente abstracción de la naturaleza de los objetos y de la significación de sus relaciones; le incumbe enumerar estas relaciones y compararlas entre ellas (Gauss. Guillaume. p. 361).

Cuando solo se emplean letras, las características funcionales no comunican significación alguna, salvo aquélla de la que depende la fuerza del razonamiento (Babbage, en 1821. Guillaume. p. 358).

No pertenece a la esencia de la matemática, el ocuparse de las ideas de número y cantidad (Boole, en 1854).

No se concebiría otra manera de pensar en quien tuvo la idea de exponer algebraicamente la lógica. Comparada con las ideas expresadas antes de él, la actitud de Boole, en 1847, fue la de pasar a las acciones. Sus predecesores lo habían dicho claramente, pero, no lo habían hecho. Boole realiza el proyecto. Ya habla en el lenguaje del álgebra; faltan, no obstante, algunos pasos evolutivos antes de llegar a la metamatemática.

Hankel, como un eco de Grassmann, declara (1867):

La matemática es puramente intelectual, una pura teoría de formas, cuyo objeto no es la combinación de magnitudes sino de cosas del pensamiento, a las cuales pueden corresponder objetos o relaciones efectivas, sin que tal correspondencia sea necesaria (En 1867).

Es este desprendimiento de la verdad material de las proposiciones lo que constituye la llamada matemática pura. Ella es consagrada como estudio de los sistemas formales, en gran parte, por la invención de Hilbert, la metamatemática. Pero, por las afirmaciones transcritas, es manifiesto que el concepto estaba bien determinado en la mente de pensadores de siglos anteriores al mismo siglo XIX, siglo que, según Russell, debería enorgullecerse de la creación de la matemática pura. Es curioso que gentes de las postrimerías del siglo XX sean tan reacias a hacer una distinción tan provechosa para el estudio de la historia de la matemática. Es difícil de superar, en cualquier época la claridad de ideas del filósofo escocés Dugald Stewart, quien en 1813 (p. 19. Blanché. *L'axiomatique*) describía con toda precisión lo que después se llamó matemática pura:

En matemática, los razonamientos... tienen por objeto, no constatar verdades concernientes a existencias reales, sino determinar la filiación lógica de las consecuencias que se siguen de una hipótesis dada. Si, partiendo de esta hipótesis, razonamos con exactitud, es manifiesto que nada podrá faltar para la evidencia del resultado, porque dicho resultado se limita a afirmar una conexión necesaria entre la suposición y la conclusión... No se puede decir de tales proposiciones que sean verdaderas o falsas, al menos en el sentido en que ello se dice de proposiciones relativas a los hechos... Cuando de tales proposiciones se dice que algunas de ellas son verdaderas, otras falsas, estos epítetos tienen que ver únicamente con la conexión de ellas con las proposiciones dadas, no con su relación con cosas existentes o con futuros sucesos.

Otro caso de anticipación del formalismo que entra como componente en la teoría de la demostración de Hilbert es el de los matemáticos analistas Heine y Tomae. En *Desarrollo de la lógica*, de los esposos Kneale, se encuentra la transcripción de un párrafo de un tratado de Tomae, sobre variable compleja, 1898. Dice así:

> La concepción formal de la aritmética acepta límites más modestos que su concepción lógica. No se pregunta qué sean o hayan de ser los números, sino qué es lo que en la aritmética se exige de ellos. Para el formalista, la aritmética es un juego con signos que decimos vacíos. Esto quiere decir que no poseen otro contenido (en el juego calculatorio) que el que les es asignado por su comportamiento en relación con ciertas reglas de combinación (reglas de juego). El jugador de ajedrez hace un uso similar de sus piezas: les asigna una serie de propiedades que determinan su conducta en ese juego, y las piezas en cuestión se reducen a actuar como signos externos de dicha conducta.

Tomae observa que la diferencia importante entre la aritmética y el ajedrez consiste en la aplicabilidad de la primera. Merece tenerse muy en cuenta esta otra observación de Tomae.

> El punto de vista formal permite desemberazarnos de toda suerte de dificultades metafísicas, y esta es la principal ventaja que en definitiva nos proporciona.

No es la primera vez, tampoco la última, que aparece la idea de desembarazar el texto matemático mismo de contenidos o de consideraciones no pertinentes al puro cálculo con formas.

Entre los matemáticos que atacaron este tipo de formalismo está Frege; puede verse su argumentación en el resumen de Kneale, pp. 418-421. El interés de las fórmulas matemáticas está en su aplicabilidad; pero la matemática formal de Tomae es tan aplicable como el ajedrez; un puro juego no puede ser considerado como una rama de la matemática.

Según el segundo argumento de Frege hay en la teoría de Tomae algo subrepticiamente tomado de la aritmética ordinaria. Según el resumen de Kneale, avanzaría Frege hasta decir que para combatir el tufillo de petición de principio, habría que distinguir entre el juego de Tomae y la teoría de ese juego. ¿Frege habría experimentado un claro presentimiento de la metamatemática? Es curioso que Frege centre su ataque sobre fórmulas como "$a + b = b + a$", incesantemente traídas a cuento por Hilbert.

En tercer lugar, critica Frege la confusión de los formalistas de su tiempo entre número y numeral, es decir, el no poner cuidado en que "a es la menor raíz de la ecuación" es diferente de "a designa la menor raíz de la ecuación". La distinción entre uso y mención (una de las más duraderas contribuciones de Frege) puede ser a veces inofensiva, pero es indispensable en una discusión de los fundamentos, sobre todo adelantada desde el enfoque de los formalistas.

Una cuarta objeción tiene que ver con la presentación de Tomae, la cual, por lo que transparenta en la redacción de Kneale, tenía por lo menos un punto vulnerable, por falta de precauciones que sí tomarán formalistas posteriores.

Peano y la axiomática

Es alrededor de Peano, observa Guillaume, donde se encontrará la mejor expresión de lo que había llegado a ser la axiomática unos años antes del advenimiento de la escuela de Gotinga. Podría hablarse de la herencia con la que puede contar la escuela alemana.

Peano, habiendo asimilado a Grassmann, axiomatizó diversas partes de la matemática; por ejemplo, los espacios vectoriales, 1888. La presentación axiomática de la aritmética fue el objeto de tantos de sus cuidados que, en particular, los axiomas de esta reciben el nombre de postulados de Peano, aunque esencialmente figuran ya en un célebre escrito de Dedekind, del año anterior a aquel de la publicación de Peano. Los matemáticos habían logrado liberarse de la coyunda que era la axiomatización a la manera de Euclides y disfrutaban haciendo uso de la libertad conseguida. (Es, hasta cierto punto, paradójico que un realista al estilo de Platón, como Cantor, haya sido quien haya escrito: “La esencia de la matemática consiste en su libertad ”).

Un campo que fue muy cultivado con ensayos de axiomatización fue la geometría. Una primera selección por hacer aquí, era la de cuántas y cuáles ideas primitivas tomar. En el cuadro adjunto se ilustra con lo que prefirieron cuatro matemáticos (además de su interés por la geometría tienen en común la primera letra del apellido).

Pasch	*Peano*	*Pieri*	*Padoa*
Punto	Punto	Punto	Punto
Segmento recto	Segmento	Movimiento	Distancia
Estar entre	Movimiento		

No hay que apresurarse a decir que los puntos sean necesarios en geometría.

Parece que sea Pieri quien mejor haya explicitado el propósito axiomatizador de la escuela de Peano. Entre 1894 y 1899 tenía en cuenta para los axiomas de la geometría, los dos caracteres de independencia y compatibilidad; los mismos sobre los que acentuará también Hilbert. Para Pieri, la matemática (y cualquiera otra disciplina que se construya por el medio axiomático) es hipotético deductiva, es decir, una disciplina que se ocupa básicamente de las formas proposicionales del tipo "Si... entonces...". Unos pocos años más tarde, 1903, Bertrand Russell, comenzará su obra *Los principios de la Matemática*, con la frase:

> Matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma "p implica q", donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni p ni q contienen ninguna constante, excepto las constantes lógicas.

Hipotético deductiva quiere decir: 'Si esto, entonces, aquello', de tales hipótesis se siguen tales tesis; si se cambian las premisas, cambian las conclusiones. La validez del sistema deductivo está en que el encadenamiento de las implicaciones se ajuste a las reglas adoptadas. Fuera de los principios asumidos explícitamente ningún enunciado está legítimamente dentro del sistema si no ha sido derivado de los principios asumidos mediante las reglas adoptadas. Nada tiene que ver el significado de los términos empleados, sacados del lenguaje corriente y los cuales admiten en él diversas interpretaciones. Cuantas más, mejor, parece decir Padoa, otro discípulo de Peano, pues, ello indica que la formalización ha tenido éxito, al alcanzar mucha abstracción y, por tanto, una explicación que conviene a muchas situaciones. Así que los significados de las voces empleadas pierden su importancia. Consideraciones de este tipo abundan en la conferencia de H. Wiener, a la salida de la cual se produjo la anécdota de Hilbert, 1891, con la cual se da comienzo al capítulo décimo del presente volumen.

El programa de Pasch

En el capítulo I de *El valor de la ciencia* (1905) escribía Poincaré:

> Euclides ha elevado un sabio andamiaje en el que sus contemporáneos no podían encontrar defectos. En esta vasta construcción, cada una de sus piezas es debida, sin embargo, a la intuición...

Este severo juicio, equiparable al ya citado de Russell un poco antes, por boca de un matemático de la talla de Poincaré, declara la caducidad del modelo axiomático para la geometría propuesto por Euclides; la evolución de la geometría exige una concepción de la geometría que cobije igualmente a la no euclidiana.

Abundan las figuras en *Elementos*. Casi una por cada teorema. Y los más rígidos expositores de la geometría euclidiana a la manera de Euclides son generalmente excelentes dibujantes de figuras. Se corre el riesgo de llegar a creer que la figura es esencial:

Anteriormente, tanto los filósofos como los matemáticos sostenían que las pruebas geométricas dependían de la figura (Russell).

El hecho que aduce Kant para mostrar que los matemáticos trabajan con la intuición y los filósofos no, es, como ya se vio, que los matemáticos trazan figuras y razonan sobre ellas. Platón había notado también esta costumbre de los matemáticos; pero, estos, para Platón, iban pensando al trazar el triángulo de la exposición, en el triángulo ideal, del que es solo una copia la figura acerca de la cual aquellos razonan. Kant lo entendió como algo más, como algo inherente a la naturaleza del ser humano. No hizo una crítica respecto a si la figura que acompaña, en Euclides, la demostración del teorema es indispensable para la demostración del teorema o si solo constituye una ayuda; su aguda capacidad inquisitiva hubiera podido conducirlo a la conclusión formulada por Russell: “En los mejores libros no se encuentra figura alguna” y más meritoriamente aun, practicada por Lagrange, quien, en el prefacio de su *Mecánica analítica*, 1788, advierte que no hay figuras en su obra y muestra, con hechos, que se puede escribir un libro de física sin ellas. Lo que los libros con figuras dicen, son propiedades de las figuras, con base en las cuales habría que entender relaciones no representables apropiadamente. El dibujo puede alejarnos de dichas relaciones o hacer pensar en otras que, en el momento, no interesan; puede hacer que parezca trivial una observación que no lo es de ninguna manera, como esta: si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, entonces, está toda contenida en el plano. Es de notar que los libros de filosofía no suelen ilustrarse con figuras mientras que muchos de matemática sí. Quizás Kant comenzó su reflexión a partir de hechos como este. Pero Russell enunció precisamente un pertinente criterio.

Eliminando la figura resulta factible descubrir todos los axiomas que se necesitan.

Una figura en *Elementos* es una construcción plana que por el hecho de ser plana ya no permite entender lo que es posible más generalmente sobre superficies de dos dimensiones y tales son no solamente los planos sino igualmente las superficies cóncavas y las convexas. La figura eclipsa la circunstancia de tener como base una superficie cuya propiedad topológica de tener dimensión dos es más importante que aquella que la figura pone delante de los ojos, métrica, según la cual la superficie no se curva, o se curva hacia dentro o hacia fuera.

Una figura es una construcción para la intuición, una imagen escrita, una muestra de que un determinado enunciado es imaginable; el dibujo plano es la traza de tal imaginabilidad sobre una superficie plana. Una figura no es un enunciado y en un sistema formal, escrito con signos que le son propios, no hay sino enunciados. Eso lo entendió muy bien Pasch, "el padre del rigor en geometría" (Hans Freudenthal citado en: H.C. Kennedy. *The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano*) lo cual explica la formulación de su programa: abandono de todo llamado a la intuición.

El esfuerzo de Pasch es el más serio, el más conscientemente asumido antes de Hilbert, el más acorde con la evolución de la geometría, y provocado por ella. Para Pasch, la geometría proviene de la observación de la naturaleza y el éxito de la aplicación de la geometría radica en que su origen esté en los objetos empíricos. Pero, no necesita la experiencia sino para el impulso inicial. A partir de allí, la geometría debe proceder de manera totalmente deductiva. Hay conceptos primitivos y conceptos derivados; estos serán siempre definidos con ayuda de los conceptos introducidos inicialmente; y, al emplearlos, hay que tener presente la definición, si no, la demostración no será posible.

Los conceptos primitivos no serán definidos; ninguna explicación puede reemplazar el único medio que lleva a la comprensión de los conceptos simples, no reducibles a otros: la referencia a los objetos apropiados de la naturaleza.

Igualmente, las relaciones entre los objetos matemáticos deben corresponder a hechos de experiencia, aunque no sean tomadas directamente de ella, sino derivadas. Hay los primeros principios, basados de manera inmediata sobre observaciones que se repiten, seguramente, desde tiempo inmemoriales.

Los primeros principios deben contener el material empírico de la matemática que se quiere elaborar de tal manera que no haya que apelar ulteriormente a la aprehensión de los sentidos.

Las otras relaciones serán derivadas a partir de los primeros principios. Serán los teoremas.

Pasch: la geometría como ciencia pura; la geometría como ciencia natural.

Así, el matemático alemán asume dos actitudes, que parecen contraponerse, en lo relativo a la fundamentación de la geometría. La geometría es una ciencia natural, en lo tocante a fuente y validez; en cuanto ciencia pura es un sistema hipotético deductivo cuyos axiomas son definiciones implícitas de los términos que contiene. Empirista de viejo cuño, lo llama Nagel, porque consideraba que la verdad de sus proposiciones iniciales (nucleares, escribe Pasch) estaría asegurada por hechos observables. La verdad empírica de los teoremas estaría garantizada por la evidencia de las proposiciones iniciales. Como Mill, trata de hallar la certeza de los axiomas en su fuente sensorial más bien que en la verificación de las consecuencias. Para Pasch, la geometría como ciencia pura está completamente aparte de la geometría como ciencia natural (Nagel. 62.63).

En cuanto a la geometría como ciencia pura, Pasch fue quizá quien primero explicitó, con toda claridad, las circunstancias para un desarrollo deductivo, usuales en la redacción actual de la matemática:

> Si la geometría ha de ser de veras deductiva, la deducción debe ser en todos sus pasos independiente del sentido de los conceptos geométricos, ni más ni menos que como debe ser independiente de los diagramas; legítimamente, solo deben ser tenidas en cuenta las relaciones especificadas en las definiciones y proposiciones introducidas. Durante la deducción es útil y legítimo, pero en manera alguna necesario, pensar en el significado de los términos; de hecho, el que sea necesario hacerlo así, manifiesta que la prueba es inadecuada.

Parece que el partir de la pura sensación haya inducido a Pasch a insistir en la necesidad de la formalización de la geometría; nadie antes había recalcado como él sobre tal punto. Cada quien es consciente del riesgo que corre el geómetra que usa diagramas o imágenes; muy pocos, empero, se dan cuenta de las trampas que uno mismo se pone cuando usa términos del lenguaje común para denotar conceptos geométricos, pues tales vocablos llevan consigo otros sentidos que pueden empañar el rigor de la exposición. Pasch alimenta la desconfianza respecto del lenguaje ordinario: aunque sea posible filtrar las imágenes sensibles y controlar incluso su representación mental hay que precaverse de la influencia de las palabras usadas para describir los conceptos geométricos. Según Guillaume, habría podido Pasch adherir al pensamiento de Frege: "Una de las tareas de la filosofía es la de quebrantar la dominación de la palabra sobre el espíritu humano". Hay que formalizar el conjunto de las proposiciones nucleares, enseña Pasch, esto es, reemplazarlas por expresiones en las que los conceptos geométricos figuran solamente mediante signos cuya única función es la de servir de lugares vacíos, que eventualmente pueden ser llenados. Se obtiene de tal manera un marco que encierra un tablero en blanco, en el que, no obstante, se está expresando algo: la estructura del conjunto de las proposiciones nucleares; y esta es la única tarea de la geometría pura.

> Un enunciado B' es consecuencia de uno B únicamente porque la derivación a partir de B es completamente independiente de los significados de los conceptos geométricos que ocurren en ella, de manera que la prueba puede se efectuada completamente sin soporte de diagrama alguno, real o imaginario, sin ninguna especie de *intuición*. Una demostración que no satisfaga esta condición no es una demostración matemática.

Este elocuente pronunciamiento, tomado por Nagel de *Matematik und Logik*, 1915, continúa sobre la misma línea de pensamiento diseñada por Pasch en las lecciones acerca de la nueva geometría, 1882 (Nagel. 67). En la visión formal de la geometría, los *términos* han de ser tomados como conceptos hipotéticos y las *proposiciones* como proposiciones hipotéticas. Ya para aplicar la geometría, hay que interpretar los *términos* como objetos específicos; los axiomas se convierten entonces en proposiciones acerca de dichos objetos, y como proposiciones, pueden ser verdaderas o falsas (Nagel. 68).

La filosofía de la geometría, de Pasch, tiene que ver con un doble problema: la geometría como ciencia demostrativa y la geometría como ciencia natural. La primera es formalista: un desarrollo de la geometría requiere únicamente de las reglas de la lógica. Esto es un rompimiento con la tradición, entre los filósofos y entre los matemáticos, de que la geometría ha menester de la intuición, sea esta sensorial o pura. Respecto de la segunda, Pasch dio una explicación genética de los axiomas. Es un empirista en cuanto cree que los axiomas son sugeridos por el material sensorio, que los axiomas de la geometría aplicada formulan relaciones entre los cuerpos; más aún, la verdad de los axiomas es establecida por observaciones de los cuerpos sensibles. Es así como llega a la conclusión de que la geometría aplicada es una ciencia natural, no del espacio o de la extensión, como tales, sino de los cuerpos (Nagel. 69)

El libro de Pasch fue el primero en el que se consideraba la geometría como un sistema de relaciones lógicas entre variables. En adelante, los tratados rigurosos de geometría, empezarán numerando los términos primitivos o no definidos, y, las relaciones primitivas o no demostradas. Los demás términos serán definidos y las demás proposiciones serán probadas únicamente respecto de tal base primitiva (Nagel. 70).

Pasch hizo avanzar la investigación de los fundamentos de la geometría; en particular, su tratamiento de la relación *estar entre* será adoptada enteramente por Hilbert; igualmente, la intención del programa de Pasch, que este no alcanzó a llevar a término. Con la misma visión axiomática se requería una visión más total de la geometría que hiciera posible una síntesis de los diversos trabajos emprendidos por diferentes geómetras y alguien con mucha autoridad matemática para aunar esfuerzos dispersos. En la vía evolutiva de los fundamentos de la geometría, después Pasch, solo alguien como Hilbert podía impulsar el movimiento.

Cuestiones

1. ¿En cuanto a invención, qué hay de verdaderamente importante en geometría, entre Euclides y Descartes?
2. 1637. *Géométrie* de Descartes: el hito que marca el comienzo de la Edad Moderna en matemáticas. ¿Por qué?
3. Idea clave de Descartes (y también de Fermat): reemplazar puntos por parejas de números, en el plano. Curvas por ecuaciones. Propiedades de las curvas por propiedades algebraicas de las ecuaciones. ¿Por ejemplo?
4. Enunciado del teorema de Pitágoras en *Elementos*. ¿Enunciado correspondiente en geometría de Descartes?
5. ¿Qué relación hay entre la geometría de Descartes y el cálculo diferencial e integral de Leibniz y Newton?
6. ¿Los antiguos griegos intuyeron procedimientos como los del cálculo infinitesimal?
7. ¿Leibniz, Newton y los demás creadores del cálculo infinitesimal siguieron el método de Euclides o el de Descartes para constituir dicho cálculo?
8. ¿Qué tiene que ver la primera edición de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de Newton, con *Elementos*?
9. Triángulo, polígono rígido. ¿Algo une estos dos conceptos?

Acerca de la comparación de Poncelet entre *Elementos*, de Euclides, y, *Géométrie*, de Descartes

10. La geometría analítica ofrece medios generales y uniformes para proceder a la solución de las cuestiones que se presentan en la investigación de las propiedades de las figuras. La marcha de la geometría de Euclides depende completamente de la sagacidad de quien la emplea (Poncelet).

    ¿Está de acuerdo con tal afirmación? Compare con su propia experiencia en álgebra.

11. Los resultados de la geometría de Euclides están limitados al estado particular de la figura que uno considera (Poncelet).

    ¿Hay ejemplos de ello en los textos de su experiencia? ¿Puede citar un ejemplo estudiado en *Elementos*?

12. En la geometría de Euclides, la figura es descrita, nunca se la pierde de vista (Poncelet).

    Cite dos ejemplos que confirmen esta afirmación. ¿Cree que haya ejemplos en contrario? ¿Tal hecho es positivo? ¿Negativo? ¿Tiene que ver algo con la presentación axiomática?

13. En la geometría de Euclides, siempre se razona sobre magnitudes, sobre formas reales y existentes, jamás se extraen consecuencias que no puedan representarse, en la imaginación o a la vista, por objetos sensibles; uno se detiene desde el momento en que estos objetos dejan de tener una existencia positiva y absoluta, una existencia física (Poncelet).

    Cite ejemplos en favor de estas aseveraciones. ¿Cuál es el aspecto positivo de ellas? ¿Podría decirse que en ello está la herencia de Euclides? ¿Hay alguna relación con Kant?

14. En la geometría de Euclides, el rigor es llevado hasta el punto de no admitir las consecuencias de un razonamiento, establecido en una cierta disposición general de los objetos de una figura, para otra disposición igualmente general de estos objetos y que tuviera toda la analogía posible con la primera; en esta geometría restringida, uno está forzado a retomar toda la serie de razonamientos primitivos, desde el instante en que una línea, un punto, han pasado de la derecha a la izquierda de otro (Poncelet).

    Infirme o confirme con ejemplos esta argumentación. Muestre que dado que en *Elementos* no hay orientación definida, el razonamiento resulta generalmente independiente de la figura que suele acompañarla.

Apreciación de Chasles acerca de *Géométrie*, de Descartes

(Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en géométrie. 1875).

15. La geometría de Descartes establece, por una sola fórmula, propiedades generales de familias enteras de curvas (Chasles).

    ¿Cómo está relacionado el estudio de la parábola con la fórmula resolutiva de la ecuación de segundo grado? ¿Toda fórmula es la traducción de una propiedad?

16. Hasta la geometría de Descartes, no se había estudiado sino propiedades particulares de algunas curvas, tomadas una a una, y siempre por medios diferentes que no establecían ninguna ligazón entre curvas distintas (Chasles).

    ¿Hay, en *Elementos*, rectas? ¿circunferencias? ¿círculos? ¿Hay allí mismo, curvas diferentes de rectas y circunferencias? Euclides enuncia el teorema de Pitágoras (I 47) en estos términos:

    En triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto.

    ¿Puede hablarse en este caso de familias de triángulos? ¿O de un triángulo rectángulo cualquiera? ¿Hay diferencia entre un triángulo rectángulo cualquiera del plano, y, una familia de triángulos rectángulos? Si la hay, cite un ejemplo de familia. ¿En qué sentido no hay ligazón en Euclides entre curvas diferentes? ¿En qué sentido sí la hay en la geometría de Descartes? Cite sendos ejemplos. ¿Está en el espíritu de Euclides el estudiar una figura particular, por ejemplo, la que se describiría como una circunferencia de radio 1 y centro en el origen?

Hacia la aparición de las transformaciones en geometría

17. Poncelet contrapone la generalidad de la geometría de Descartes a las limitaciones de la geometría de Euclides. ¿Acaso Euclides no se preocupó por la generalidad? Euclides hace dos enunciados de cada teorema: uno no referido a la figura, el otro sí. ¿Puede interpretarse esto como una preocupación por la generalidad del enunciado? En tal caso, ¿tendría razón la crítica de Poncelet? O, ¿hay otro aspecto que la justifique?

18. La antigua geometría está erizada de figuras. La razón es sencilla. No había principios generales y abstractos, así que cada cuestión tenía que ser tratada concretamente, sobre la figura misma objeto de dicha cuestión; únicamente al verla podían descubrirse los elementos necesarios para la demostración o para la solución buscada (Poncelet).

    ¿Encuentra suficiente la explicación de Poncelet para la abundancia de figuras? ¿No puede la figura hacer pasar por alto un detalle del enunciado?

19. Poncelet pone un problema así: buscar, por métodos propios de la geometría, es decir, sin recurrir al álgebra, la manera de aplicar el razonamiento, haciendo abstracción de la figura, y obtener así el mismo grado de generalidad de la geometría de Descartes.

¿Se nota que Poncelet echa de menos un rasgo de la geometría de Euclides en la de Descartes? ¿O un rasgo de la geometría de Descartes en la de Euclides? ¿Que hay algo incompleto en cada una de las geometrías? ¿Es indispensable que algún geómetra tenga tal conciencia para que se produzca un paso en la evolución? ¿Hay allí, alguna alusión a las transformaciones?

20. Chasles, luego de un análisis análogo, concluye:

> ¿Reflexionando sobre los procedimientos del álgebra y buscando las causas de las enormes ventajas que aporta a la geometría, no se percibe que debe una parte de sus ventajas a la facilidad de las transformaciones que se aplican a las expresiones que se introdujeron al comienzo? Transformaciones cuyo secreto y cuyo mecanismo constituyen la genuina ciencia y es el objeto constante de las investigaciones del analista. ¿No es natural que se busque introducir en forma similar en la geometría pura transformaciones análogas realizadas directamente sobre las figuras propuestas y sobre sus propiedades?

¿Concuerda Chasles con Poncelet, en la idea de que hay algo que falta a la geometría expuesta por Euclides? ¿Qué es lo que falta? ¿Ambos geómetras están de acuerdo? ¿Chasles menciona las transformaciones de las figuras o de las expresiones? ¿Está latente la misma idea en Poncelet? ¿Qué importancia da Chasles a las transformaciones? ¿Aparecen las transformaciones en Euclides? ¿Puede citar la demostración de algún teorema donde se usen?

Grupos de transformaciones

21. Euler mostró que los movimientos y simetrías de las figuras están ligados a los cambios de coordenadas. ¿Tiene sentido esta afirmación respecto a la, así llamada, geometría analítica (la geometría de Descartes)? ¿Respecto a la, así llamada, geometría sintética (como la geometría de Euclides)? ¿Refuerza tal afirmación la idea de que las transformaciones llegaron a la geometría, gracias a que Descartes introdujo el álgebra en la geometría?

22. Euler demostró que todo desplazamiento plano es, o una rotación, o una translación, o una translación seguida de una simetría. Hacer un dibujo ilustrativo de cada caso.

23. Poncelet y Chasles tienen una concepción intuitiva de las transformaciones. Klein y Lie una estructural. Poncelet y Chasles ponen figuras en

relación. Klein y Lie estudian las relaciones entre tales relaciones; las relaciones entre las figuras resultan del hecho de que las transformaciones forman grupos. Ilustrar estos enunciados, en cuanto sea posible.

24. Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Estas propiedades son independientes de la situación ocupada en el espacio por las figuras, de su tamaño, del sentido en que están dispuestas. Las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariación respecto a las transformaciones de un grupo (Klein).

    ¿La relación algebraica que traduce el teorema de Pitágoras es invariante respecto al grupo afín? ¿Símil? ¿Isométrico? ¿Lo importante en dicha relación es la forma? ¿El tamaño? Hacerse las mismas preguntas respecto a los casos de congruencia y semejanza de triángulos.

25. Este es el problema central de la geometría, según Klein:

    Dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta, estudiar los entes desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo.

    ¿Cómo podría caracterizarse la geometría de Euclides? ¿Estudia propiedades de las figuras? ¿Enuncia y demuestra hechos generales? ¿Qué quiere decir "demostrar"? ¿Desde este punto de vista puede haber diferencia entre las distintas concepciones de la geometría? ¿Está relacionada la geometría de Euclides con una especie de conocimiento físico? ¿Por qué?

26. Otra manera de decir lo mismo:

    Dada una (variedad) multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta, desarrollar la teoría de los invariantes relativos a este grupo (Klein).

    Clasificación de las geometrías: topológica, proyectiva, afín, símil, isométrica. Multiplicidad, invariante principal. Relaciones entre los cinco grupos y entre las cinco geometrías. ¿Cuál es la más general? ¿La más rica? ¿En la enseñanza básica, la preocupación central debe estar en los entes u objetos? ¿en las estructuras? ¿La geometría actual por cuál de tales aspectos se preocupa?

27. El álgebra emplea signos abstractos, representa magnitudes arbitrarias mediante letras que no tienen valores fijados y que permiten que las magnitudes sean lo más indeterminadas en lo posible; consecuentemente, el álgebra opera y razona igualmente bien sobre signos de no existencia como sobre signos de cantidades reales. Las conclusiones extraídas tienen que poseer, por tanto, esta misma generalidad y poder abarcar todos

los casos posibles, para todos los valores de las letras involucradas. Es así como obtenemos ciertas expresiones notables, entes de razón, al parecer posesión exclusiva del álgebra (Poncelet. *Traité des propriétés projectives de figures.* 1822. 1867?).

Mostrar algunos entes de razón encontrados en su personal experiencia matemática. ¿Las raíces imaginarias de una ecuación son de ese tipo? Mostrar por qué sí, o, por qué no. Comparar estos entes de razón con los de Kant (Capítulo 4) y tenerlos en cuenta para el Capítulo 10 donde Hilbert utilizará la misma dicción.

28. Ver que la ecuación de un plano que no pasa por el origen (dimensión 3) puede escribirse así: $Ax + By + Cu = 1$. Con base en esta ecuación tratar de ver por qué punto y plano pueden corresponderse según el principio de reciprocidad de Plücker. ¿Cómo es la correspondencia según el principio de dualidad de Gergonne y Poncelet?

29. Nagel hace la siguiente observación: a pesar de que Hilbert pone como epígrafe a *Fundamentos de la geometría* un pensamiento kantiano, la obra de Hilbert ha fortificado una filosofía de la matemática decididamente antikantiana. El objetivo de *Fundamentos de la geometría* es un cuidadoso análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales; pero, el método empleado para alcanzar tal objetivo excluye completamente la intuición. De la geometría tradicional no ha quedado más rastro que la terminología tradicional. Darse cuenta de si la observación de Nagel es acertada o no. ¿Por qué? (Ver capítulo 8).

30. Hacer un comentario de la observación de Russell de que para saber cuántos axiomas se requieren para una construcción geométrica determinada hay que comenzar por prescindir de las figuras.

31. ¿Se hubiera podido esperar que *Elementos* careciera de imperfecciones?

32. ¿La axiomatización de la geometría podía ser independiente del desarrollo de la lógica? ¿Por qué?

33. ¿La arquitectura se ha desarrollado dependiente o independientemente de la geometría axiomatizada?

34. ¿Cuáles imperfecciones anotaba Lobachevski a la geometría redactada por Euclides?

35. ¿Qué significa la expresión 'geometría euclidiana' en el lenguaje corriente? ¿Significa lo mismo para un matemático actual? Es decir, ¿para un geómetra actual, geometría euclidiana es la geometría como aparece en *Elementos* o, es la geometría con una propiedad especificada en *Elementos*? ¿Cuál, por ejemplo? ¿Este rasgo característico de la geometría euclidiana depende de la presentación que dio Euclides a la geometría?

36. Brunschvicg afirma, sin más, que numerosas generaciones estudiaron *Elementos* para estudiar la lógica aplicada a la geometría. ¿Cierto? ¿Falso? ¿Por qué?

37. ¿Ordine geométrico, como subtítulo de *Ethica*, de Spinoza, significa ordine logico? ¿Esta pregunta tiene relación con la pregunta anterior?

38. ¿En qué consiste la ironía de Bourbaki a propósito de la intención de Spinoza de construir la Ethica ordine geometrico?

39. ¿Qué relación hay entre la exposición de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de Newton, y la exposición de *Elementos*, de Euclides? ¿Por qué en Kant aparecen asociadas estas dos obras? ¿Qué importancia tienen para Kant?

40. ¿Según su experiencia en la lectura de *Elementos*, tiene razón Russell al opinar sobre ellos?

41. ¿Qué relación hay, según Klein, entre *Elementos* y la totalidad de la matemática griega?

42. ¿Arquímedes y Euclides tienen la misma posición respecto al método genético?

43. ¿Qué crítica hace Klein a la definición de punto dada por Euclides?

44. ¿Por qué dice Klein que el sistema de postulados dado por Euclides es incompleto?

45. ¿Por qué dice Klein que hay en Euclides inconsecuencias de método?

46. ¿Cuál dice Klein que es su objeción principal contra Euclides?

47. Componer una frase con las expresiones 'relaciones de posición' y 'signos del cálculo algebraico'.

48. ¿Por qué dice Russell que Euclides no posee ya sino un interés histórico?

49. ¿Por qué dice Russell que es una cosa relativamente desprovista de importancia el que los axiomas de Euclides sean verdaderos?

50. ¿Según Russell es Euclides un modelo de expositor?

51. Bourbaki recuerda diversas críticas a *Elementos*, hechas por eminentes maestros. ¿Cuál es la de Gauss recogida por Bourbaki?

52. ¿Qué consecuencias tiene, según Bourbaki, la preponderancia, en *Elementos*, de la geometría respecto del álgebra?

53. ¿A qué se debió que se haya dado importancia especial a los problemas de construcción con regla y compás? ¿Era justificable ponerlas aparte? Históricamente, ocasionaron indagaciones importantes desde el punto de vista matemático. ¿Es aceptable esta justificación a posteriori? ¿Hay, en *Elementos*, otro tipo de construcciones que las susodichas con regla y compás?

54. ¿Cómo le parece a Bourbaki la definición de ángulo dada por *Elementos*?

55. ¿La noción de desplazamiento, o superposición, está introducida en *Elementos*, mediante una definición, un postulado, una noción común, un teorema? ¿Había otra manera de introducirla?

56. Cuál es el aspecto positivo de las figuras en los libros? ¿Cuál es el aspecto negativo?

57. ¿Por qué dice Russell que eliminando la figura es factible descubrir los axiomas que se necesitan? ¿"Olvidaría" Euclides algunos axiomas debido a las figuras?

58. ¿Según Voltaire, hay imaginación en la matemática? ¿Y según Weierstrass? (Ver: Moritz, citado en el Capítulo 15).

59. ¿En qué consistía el programa de Pasch? ¿Qué relación tenía con *Elementos*? ¿Con las geometrías no euclidianas? ¿Con el programa de Hilbert?

60. Explique el apotegma: "Un sistema axiomatizado se construye a partir de la intuición; aparte, empero, de la intuición".

61. Euclides da ciertas definiciones que no emplea, por ser inutilizable, dice Bourbaki, de una de ellas. Leibniz critica este proceder: ¿Cómo estar axiomáticamente seguros de que los entes de la definición son los mismos que los de la demostración?

62. Euclides no define movimiento, ni lo postula; por tanto, las demostraciones en las que emplea este concepto son defectuosas.

    Euclides no define "estar entre", ni lo asume; por lo tanto, la demostración, del teorema 16, por ejemplo, es defectuosa; hay que ver que un determinado punto y determinado segmento están dentro de un ángulo.

    ¿Un enunciado evidente, que no está entre los primeros principios, necesita demostración? ¿Una recta que pasa por un punto interior a un círculo, corta al círculo? ¿Es evidente este enunciado? ¿Necesita demostración? Si una recta corta a un círculo, ¿pueden hallarse los puntos de intersección: siempre, en un plano cartesiano con coordenadas racionales? ¿siempre, en un plano cartesiano con coordenadas reales?

63. Comparar la actitud del autor de *Elementos*, con la de Arquímedes, quien asumió los tres siguientes enunciados como postulados (La esfera y El cilindro).

    - De todas las líneas con extremos comunes, la línea recta es la menor (Postulado 1).
    - De todas las superficies con el mismo perímetro plano, la superficie plana es la menor (Postulado 3).
    - De dos líneas o superficies o cuerpos desiguales, el mayor puede hacerse menor que la cantidad obtenida por un número conveniente de repeticiones del menor (Postulado 5).

    ¿Por qué era de esperar que en *Elementos* se hubiera procedido de manera similar a como procedió Arquímedes en este pasaje de su obra?

64. Si se prescinde de las definiciones de punto, recta, plano, ángulo plano, cambia en algo la demostración del teorema de Pitágoras en el libro I de *Elementos*? ¿Es esto una cualidad? ¿Un defecto? Explicar por qué (Desde el punto de vista axiomático).

65. ¿Las definiciones de Euclides se proponen declarar la esencia de las cosas? Compare con la teoría de Aristóteles. ¿Un diccionario declara la esencia de las cosas? ¿O trata de hacer una descripción de las propiedades de la cosa definida? ¿Habrá diferencia? ¿Evitan los diccionarios el círculo vicioso en sus descripciones? ¿Qué diferencia debe haber entre las definiciones de un sistema axiomático y las descripciones del diccionario? En el lenguaje corriente una palabra tiene diferentes acepciones: ¿en un sistema axiomático dado, puede utilizarse una palabra con diversos significados?

66. **Complemento.** Euclides debería haber mostrado la existencia de algo que poseyera todos los atributos de la noción de superficie plana, dada por la definición del libro I. No aparece, empero, proposición alguna acerca de la naturaleza del plano como tal, antes del libro XI, aunque su existencia se supone en los libros I-IV, VI. Ni en el mismo libro XI hay intento alguno de construcción del plano.

    Se ha querido explicar este proceder así:

    Euclides supone la existencia del plano tal como fue definido en la definición 7 del libro I.

    Euclides define también puntos y rectas, cuya existencia no demuestra.

    En ello estaría de acuerdo con algunos textos de Aristóteles, quien dice que se definen puntos y rectas, pero se admite su existencia. La pregunta surge, sin embargo: ¿Por qué Aristóteles no menciona el plano? Es cierto que el Estagirita no escribe un tratado de matemática, necesita ilustraciones únicamente y sus ejemplos son tomados todos de la geometría plana nunca de la del espacio. Se demuestra la existencia de todas las cosas geométricas que no sean puntos y rectas, de las cuales se da definición; pero se supone la existencia: ¿había que poner el plano al lado de estos? Crelle en su artículo *Zur Theorie der Ebene* (Academie der Wissenschaften. 1834) indica que, dado que el resto casi de toda la geometría se pasa en el plano y que ya la proposición I 1 necesita la correcta concepción del plano, Euclides ha debido dar a este tema, tanta extensión, por lo menos, como al de las paralelas, que por cierto supone el primero (Heath. pp. 172-173. Libro citado en el capítulo 9 del volumen I).

Bibliografía

1. BOURBAKI, Nicolás. *Éléments d'histoire des mathématiques.* (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp.

2. CAMPOS, Alberto. *René Descartes.* pp. 32-68. *Notas de matemática.* No. 24. Octubre 1987.

3. ENRIQUES, Federico. *Para la historia de la lógica.* Traducción española: 1948. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 280 pp.

4. GUILLAUME, Marcel. *Axiomatique et logique.* Chapitre XIII. pp. 315-430. Abrégé d'histoire des mathématiques. Tome II. 1978. Paris. Hermann. $vii + 472$ pp.

5. KLEIN, Félix. Geometría. Volumen II de *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Traducción española: Madrid. Biblioteca Matemática (No aparece año de publicación). 328 pp.

6. LE PROGRAMME D'ERLANGEN. (1872). 1974. París. Gauthier-Villars. $xiv + 72$ pp. Préface de Jean Dieudonné, pp $ix - xiv$. Félix KLEIN: Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes, pp. 3-44. François Russo: Groupes et géométrie. La genèse du Programme d'Erlangen de Felix Klein, pp. 47-72.

7. NAGEL, E. *The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry.* 1939. Osiris. Vol. 7. pp. 142-222. (Los números entre paréntesis, citados a veces, indican parágrafos en la memoria de Nagel).

8. PIAGET, Jean. GARCÍA, Rolando. *Psychogenèse et histoire des sciences.* 1983. Paris. Flammarion. 310 pp. Traducción española: *Psicogénesis e historia de la ciencia.* 1982. México. Siglo XXI. 252 pp.

Capítulo 8

Hilbert: *Fundamentos de la geometría*

...Grundlagen der Geometrie, de Hilbert, 1899, libro que por la lucidez y la profundidad de la exposición, se convirtió en seguida, con toda justicia, en la carta magna (charte) de la axiomática moderna, hasta hacer olvidar a sus predecesores.

[Bourbaki. *Éléments d´histoire des mathématiques.* p. 29].

Introducción

En este capítulo, se intenta una familiarización con una de las obras en la que culmina el desarrollo de la geometría euclidiana: *Fundamentos de la geometría.*

En los capítulos anteriores, se ha tratado de dar cuerpo a la idea de que la axiomática y la geometría, inicialmente fundidas la una en la otra (otra manera de decirlo: durante más de 20 siglos, la única disciplina expuesta axiomáticamente era la geometría) han evolucionado; en el presente capítulo se muestra la meta de dicha evolución.

Fundamentos de la geometría es el fruto de la evolución mencionada. Tanto en *Elementos*, la obra de partida, como en *Fundamentos de la geometría*, la obra de llegada, el tema central es la geometría euclidiana plana pero, una buena parte, tanto en extensión como en cuanto a fundamentación, en ambas obras, tienen que ver con la geometría en tres dimensiones. Hilbert sintetiza resultados sobresalientes de *Elementos* y del desenvolvimiento histórico de estos; tal síntesis le permite: explicar ciertas cuestiones que habían quedado suspendidas al lado de los intentos de prueba del quinto postulado, por una parte; por otra, responder a interrogantes planteados por la crítica de *Elementos*, subsecuente a la superación de estos por la invención de las geometrías no euclidianas.

La extensión cuantitativa de las dos obras no es comparable: 465 teoremas en Euclides contra 68 teoremas en Hilbert. Cualitativamente, Hilbert va mucho más lejos que el geómetra alejandrino; para comenzar, asume que es una obra de base, por ello figura en el título la palabra fundamentos; como tal, asienta firmemente, no solo la geometría euclidiana, sino también las no euclidianas, y otras posibles a nivel elemental. Con esta obra, Hilbert encuentra la respuesta a problemas que lo preocupaban desde unos 10 años antes y que rondaban en el ámbito matemático desde los trabajos de Beltrami. Históricamente, no sería difícil hallar trazas de investigaciones precursoras acerca de los fundamentos de la geometría, y no solo de las posteriores a las de las geometrías no euclidianas. Algunas de ellas, como las de Pasch o las de Legendre, hacen parte, con nombre propio, de *Fundamentos de la geometría*.

A la síntesis descrita en la obra de Hilbert, se llegó, 1899, durante un seminario especializado, dirigido por Hilbert, en la Universidad de Gotinga (Göttingen), famosa por lo menos desde Gauss, y de la cual Hilbert fue profesor durante 35 años.

No es un libro fácil dado que trata con todo rigor, cuestiones fundamentales. El rigor consiste en no dar cabida a las figuras con el papel que desempeñan en Euclides de suplir por algunos postulados o por pasos de una demostración; se puede prescindir de las pocas que aparecen en *Fundamentos de la geometría* sin que el texto demostrativo se convierta en indescifrable.

La geometría griega suministró el primer paradigma de axiomatización de un conjunto de conocimientos; cuando ese paradigma caducó, suministró también el segundo. Ambas obras deben ser tenidas en cuenta no solo la primera, cuando se trata de saber en qué consiste un conocimiento axiomático. Es lo que se pretende al proponer el estudio, del primer capítulo de *Fundamentos de la geometría*, siquiera hasta donde comience a ser posible compararlo, con algún conocimiento de causa, con el libro I de *Elementos*.

He aquí la INTRODUCCIÓN, escrita por Hilbert:

> *Así, pues, todo conocimiento humano*
> *comienza con intuiciones,*
> *de allí pasa a conceptos*
> *y termina con ideas.*
>
> (Kant. *Crítica de la razón pura.* B 355).

La organización secuenciada de la geometría, como la de la aritmética, puede hacerse con pocas y sencillas proposiciones fundamentales. Estas proposiciones fundamentales se llaman axiomas de la geometría.

El establecimiento de los axiomas de la geometría y la investigación de su cohesión es un problema que ha sido tratado, desde los tiempos de Euclides, en numerosos y excelentes trabajos de la literatura matemática. Dicho problema va a parar en el análisis lógico de nuestra intuición espacial.

El presente trabajo es un nuevo ensayo para construir la geometría sobre un sistema completo de axiomas lo más sencillo posible, y, para deducir de él los más importantes teoremas, de manera tal que se ponga de relieve el papel de los distintos grupos de axiomas y el alcance de cada axioma en cuanto a las consecuencias que de él pueden derivarse.

Constance Reid, dice, en la biografía de Hilbert, que nunca se supo realmente cuál era la posición del maestro respecto a la filosofía de Kant, con quien comparte ciudad natal. No hay que tomar la frase epígrafe como una profesión de kantismo, necesariamente; se verá en qué sentido dicha frase es como una caja de resonancia de la manera como Hilbert entiende hacer geometría al leer, unas líneas después, que tal indagación descansa finalmente sobre el análisis lógico de nuestra intuición del espacio. Ahora bien; el análisis lógico, puramente conceptual, se hace a partir del material intuitivo; es, empero, puramente formal, emplea como materia prima, si así puede decirse, unas formas, bastante análogas, por cierto, a las ideas de Kant. Es claro que el pensamiento del filósofo es como un eco del proyecto del matemático. Que no hay que insistir demasiado en la ortodoxia de Hilbert respecto a Kant lo muestra, por ejemplo, la presentación que hace Piaget en las páginas 183-189 de su *Introducción a la epistemología genética*, basada en un artículo de Hilbert, ya al final de su carrera, en 1931. En realidad, como matemático, al proceder a axiomatizar la geometría, prácticamente solo va a distinguir entre lo axiomático y lo no axiomático; esto, son las intuiciones espaciales; aquello, el análisis lógico.

Cuestiones

1. ¿Por qué compara Hilbert a la geometría con la aritmética?

2. Antes, en Euclides, hay aritmética; ¿se referirá a ella, Hilbert? O, ¿a la teoría de números desarrollada por sus coterráneos principalmente, Weierstrass, Dedekind, Cantor?

3. ¿Sostiene Hilbert la distinción entre axiomas y postulados?

4. ¿La geometría axiomatizada consiste en poner de manifiesto los axiomas de la geometría y en averiguar sus conexiones? ¿Esta disciplina había sido ya cultivada antes de Hilbert? ¿Hilbert va a contribuir a su enriquecimiento?

5. Explicitar someramente la relación entre "el análisis lógico de nuestra intuición del espacio" (en lo que consiste, para Hilbert, hacer geometría) y el epígrafe puesto por Hilbert en la Introducción.

6. ¿Hacer geometría euclidiana será para Hilbert lo mismo que para otros geómetras? ¿Por qué sí, o, por qué no?

7. ¿El hecho de que esta obra de Hilbert sea el resultado de un trabajo de seminario puede dar una idea de la dificultad de la axiomatización o de que puede ser un trabajo de equipo? Comparar esta situación con la que resultaría de una hipótesis según la cual no habría existido Euclides sino que *Elementos* serían el resultado de una labor conjunta de varios matemáticos alejandrinos.

8. La expresión empleada por Hilbert *folgerichtigen Aufbau* puede traducirse según el diccionario: organización secuenciada, estructuración secuenciada, estructuración lógica. ¿Por qué puede convenir cada una de ellas al trabajo de Hilbert? ¿Cuál es la construcción de la geometría proseguida por Hilbert?

9. Hilbert recalca dos condiciones que debe cumplir el sistema que se propone concluir. Leer de nuevo la Introducción para ver cuáles son. En algunas ediciones, Hilbert requería igualmente la independencia de los axiomas. ¿Es indispensable esta en un sistema formal? ¿Actualmente, son todavía

estas las condiciones para un sistema axiomático? O, ¿se han impuesto otras? (La respuesta puede postergarse hasta después del estudio del capítulo relativo a Gödel).

10. ¿Se propone hacer Hilbert una abundante deducción de teoremas? ¿Deberán aparecer, por ejemplo, tantos teoremas como en *Elementos*? O, ¿tiene Hilbert otra intención? ¿Cuál? ¿Importan a Hilbert las consecuencias de cada grupo de axiomas? ¿Y las de cada axioma? ¿Esta meta está ya en *Elementos*, o, es hallazgo de Hilbert?

Nota. El texto de *Fundamentos de la geometría* será indicado **con letra pequeña**, como la mayoría de los citados que en el presente volumen es propósito destacar.

Los elementos de la geometría y los cinco grupos de axiomas

(Parágrafo 1)

Pensamos tres distintos sistemas de cosas: a las cosas del primer sistema las llamamos *puntos* y las designamos por A, B, C, …; a las cosas del segundo sistema las llamamos *rectas* y las designamos por a, b, c, …; a las cosas del tercer sistema las llamamos *planos* y las designamos por α, β, γ, …

Los puntos reciben también el nombre de *elementos de la geometría lineal*; los puntos y las rectas el de *elementos de la geometría plana*; los puntos, las rectas y los planos el de *elementos de la geometría espacial* o del *espacio.*

Pensamos ciertas relaciones mutuas entre puntos, rectas y planos, relaciones que designamos con expresiones como ‘estar situado’, ‘entre’, ‘congruente’.

La descripción de estas relaciones exacta y cumplida para fines matemáticos se efectúa mediante los *axiomas de la geometría.*

Los axiomas de la geometría pueden ser clasificados en cinco grupos; cada uno de estos grupos expresa ciertos hechos fundamentales de nuestra intuición considerados en conjunto.

Denominamos estos grupos de axiomas de la siguiente manera:

I	1 - 8	Axiomas de *pertenencia.*
II	1 - 4	Axiomas de *ordenación.*
III	1 - 5	Axiomas de *congruencia.*
IV		Axioma de *paralelismo.*
V	1 - 2	Axioma de *continuidad.*

Cuestiones

1. ¿Es digno de apuntar que Hilbert escriba 'pensamos' y no emplee otra expresión como 'consideramos'?

2. ¿Cuáles son los términos no definidos?

3. ¿Entre los términos no definidos hay relaciones? ¿O concebimos que hay relaciones? ¿Cuál es la diferencia? ¿Cómo se expresan estas relaciones? ¿Cuántas son?

4. ¿La descripción de dichas relaciones para fines matemáticos, se hace con ayuda del diccionario? ¿De la gramática? ¿De los axiomas de la geometría? ¿Cuál es la diferencia? ¿Ello hace de la geometría axiomatizada una lengua aparte de la corriente?

El grupo de axiomas I: axiomas de pertenencia

(Parágrafo 2)

Los axiomas de este grupo producen un *enlace* entre las cosas introducidas antes, puntos, rectas, planos. Dicen así:

I 1. Dados dos puntos A, B hay siempre una recta, a, a la cual pertenece cada uno de los dos puntos A, B.

I 2. Dados dos puntos A, B no hay más de una recta, a la cual pertenece cada uno de los dos puntos A, B.

Aquí, y en lo que sigue, bajo las expresiones dos, tres, ... puntos, rectas, planos hay que entender siempre puntos, rectas, planos diferentes.

En lugar de 'pertenecer' usaremos también otras locuciones, por ejemplo: 'a pasa por A y por B', 'a une a A con B', 'a une a A y B', 'A está sobre a', 'A es un punto de a', 'hay un punto A sobre a', etc.

Si A está sobre la recta a, y, además sobre otra recta b, empleamos también las locuciones: 'las rectas a y b se cortan en A', 'tienen el punto A común', etc.

I 3. Sobre una recta, hay siempre al menos dos puntos. Hay por lo menos tres puntos no situados en línea recta.

I 4. Dados tres puntos A, B, C no situados sobre la misma recta, hay siempre un plano al cual pertenecen cada uno de los tres puntos. Para cada plano hay siempre un punto que pertenece al plano.

Empleamos las expresiones: 'A está situado en α'; 'A es un punto de α', etc.

I 5. Dados tres puntos A, B, C no situados sobre la misma recta hay no más que un plano al cual pertenece cada uno de los tres puntos.

I 6. Cuando dos puntos A, B de una recta a están sobre un plano α, cada punto de la recta pertenece al plano α.

En tal caso decimos: 'la recta a está en el plano α', etc.

I 7. Cuando dos planos tienen un punto común, tienen al menos todavía un punto más en común.

I 8. Hay al menos cuatro puntos no situados en un plano.

El axioma I 7 expresa que el espacio no tiene más de tres dimensiones; por el contrario, el I 8, que el espacio no tiene menos de tres dimensiones.

Los axiomas I 1-3 pueden llamarse los *axiomas planos del grupo I*, para distinguirlos de los axiomas I 4-8 a los cuales califico de *axiomas espaciales del grupo I.*

De los teoremas que se siguen de los axiomas I 1-8, mencionamos solamente estos dos:

Teorema 1. *Dos rectas de un plano tienen uno o ningún punto común. Dos planos o no tienen punto común o tienen una recta común, sin tener otro punto común. Un plano y una recta no situada en el plano tienen un punto común o ninguno.*

Demostración. En un plano, hay tres posiciones relativas posibles para un par de rectas: no tienen punto común, tienen un punto común, tienen dos puntos comunes. Si dos rectas tienen dos puntos comunes, entonces no pueden distinguirse según los axiomas I 1-2. En conclusión, dos rectas distintas en un plano tiene uno o ningún punto común. Es la primera parte del teorema.

En el espacio, hay dos posiciones relativas posibles para dos planos: no tienen punto común, tienen un punto común. Si dos planos tienen un punto común, entonces, tienen otro punto común, según el axioma I 7; pero dos puntos determinan una recta, según los axiomas I 1-2; además, la recta pertenece a ambos planos, según el axioma I 6; así que si dos planos tienen un punto común, tienen también una recta común. Dos planos no pueden tener un tercer punto común, situado fuera de la recta común, porque dos puntos de la recta y el tercer punto fuera de la recta, determinarían un plano, a saber el plano en cuestión, según los axiomas I 3-5, por tanto, los planos no serían distintos. En conclusión, dos planos en el espacio, o no tienen punto común, o tienen una recta común. Esta es la segunda aseveración del teorema.

En el espacio, hay tres posiciones relativas posibles para una recta y un plano: no tienen punto común, tienen un punto común, tienen dos puntos comunes; pero si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, entonces, cada punto de la recta pertenece al plano, es decir, la recta está contenida en el plano (I 6). En conclusión un plano y una recta no contenida en él, o tienen un punto común o no tienen punto común. Esto prueba la tercera afirmación del enunciado. □

Teorema 2. *Por una recta y un punto no situado en ella, así como también por dos rectas distintas con un punto común, hay siempre un único plano.*

Demostración. Dada una recta y un punto fuera de ella, dos puntos cualesquiera de la recta y el tercero dado fuera de ella, son tres puntos, no colineales, los cuales determinan un único plano, según los axiomas I 4-5.

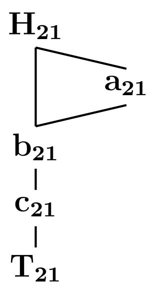
Dadas dos rectas con un punto común, al tomar sendos puntos, diferentes del común, sobre cada una de las rectas, se tienen tres puntos no colineales, los cuales determinan un único plano, según los axiomas I 4-5. □

Para la transcripción de la demostración anterior, el primer índice de las letras que intervienen tiene que ver con el número del teorema; el segundo índice con el número de la afirmación.

Paráfrasis 1

$\mathbf{H_{21}}$: a es una recta. A es un punto. El punto A no pertenece a la recta a.
$\mathbf{T_{21}}$: Por la recta a y por el punto A pasa un mismo plano.

$\mathbf{a_{21}}$: B, C son dos puntos de la recta a. ($\mathbf{H_{21}}$. I 3)
$\mathbf{b_{21}}$: A, B, C no están sobre la misma recta. ($\mathbf{H_{21}}$. $\mathbf{a_{21}}$)
$\mathbf{c_{21}}$: A, B, C determinan un plano único. ($\mathbf{b_{21}}$. I 4-5)
$\mathbf{T_{21}}$: ($\mathbf{c_{21}}$)



Paráfrasis 2

$\mathbf{H_{22}}$: a, b son rectas distintas.
a, b tienen un punto común O.

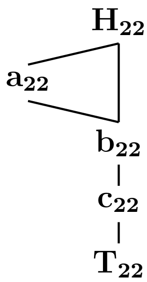
$\mathbf{T_{22}}$: Las rectas a, b determinan un único plano.

$\mathbf{a_{22}}$: A es un punto de la recta a, distinto de O.
B es un punto de la recta b, distinto de O. ($\mathbf{H_{22}}$. I 3)

$\mathbf{b_{22}}$: A, B, O no están sobre la misma recta. ($\mathbf{H_{22}}$. $\mathbf{a_{22}}$)

$\mathbf{c_{22}}$: A, B, O determinan un único plano. ($\mathbf{b_{22}}$. I 4-5)

$\mathbf{T_{22}}$: ($\mathbf{c_{22}}$)



Cuestiones

Para apreciar en qué se parecen y en qué se diferencian las dos obras claves en la evolución de la geometría, es a saber, *Elementos*, de Euclides, y, *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, es indispensable considerar la mayor cantidad de detalles disponibles. Las cuestiones o comentarios que figuran en seguida, como otros ya consignados antes o que vendrán después, son apenas sugerencias para dicha comparación, que no puede tener otra base que un serio estudio de los dos textos.

1. ¿Los puntos, rectas, planos, de Hilbert son los de Euclides o los descritos por los textos de geometría o por los diccionarios? ¿O, para comenzar, solamente entes de los cuales apenas no interesa sino el nombre? ¿Cómo se puede llegar a saber qué es lo que hay que entender por los vocablos *punto*, *recta*, *plano* en *Fundamentos de la geometría*?

2. ¿Qué relaciones se pueden decir de: un punto y una recta, un punto y un plano, una recta y un plano? ¿Pertenecer, se puede predicar de un

punto respecto de un punto, de una recta respecto de una recta, de un plano respecto de un plano? Si la respuesta es sí, indicar cuál de los ocho axiomas enunciados permite formar tales relaciones.

3. Cada una de las siguientes frases es una perífrasis de alguno de los ocho axiomas de pertenencia. Indicar cuál.

   Por cada dos puntos hay al menos una recta.
   Por cada dos puntos hay a lo más una recta.
   Dos puntos distintos determinan una única recta.
   A cada recta pertenecen por lo menos dos puntos.
   Hay al menos tres puntos no alineados o colineales.
   El plano no es unidimensional.
   Hay al menos un plano que pasa por tres puntos no colineales.
   Hay a lo más un plano que pasa por tres puntos no colineales.
   Tres puntos no alineados determinan un único plano.
   Recta contenida en un plano.
   El espacio de la geometría que se va a construir no tiene más de tres dimensiones.
   El espacio de la geometría que se va a construir no tiene menos de tres dimensiones.

4. ¿Se contentó Hilbert con la intuición de que habla Kant para atribuir tridimensionalidad al espacio o prefirió postularla? ¿Habría podido hacerlo Hilbert? ¿Tienen Kant y Hilbert el mismo designio al tratar la geometría axiomatizada? ¿Es la misma axiomatización?

5. ¿Hay en *Fundamentos de la geometría* el mismo número de dimensiones que en *Elementos*?

6. ¿Cuáles son las posibles posiciones relativas de dos rectas en un plano, según el teorema 1?

7. ¿Es posible, según los axiomas, que dos planos en el espacio tengan un único punto común?

8. ¿Cuántas posibles posiciones relativas pueden tener una recta y un plano en el espacio? ¿Se puede hablar de planos paralelos? ¿O de rectas paralelas? ¿O, de una recta paralela a un plano? (Se entiende que la pregunta se refiere a los axiomas vistos).

9. ¿Una recta y un punto pueden determinar un plano?

10. ¿Cuándo dos rectas pueden determinar un plano? ¿Dos rectas pueden determinar un punto? ¿Dos planos pueden determinar un punto? ¿Dos planos pueden determinar una recta? ¿Tres planos pueden determinar un punto?

11. ¿Los postulados o axiomas enuncian las relaciones lógicas o las relaciones intuitivas entre los términos no definidos?

12. ¿La definición implícita de los términos no definidos (explícitamente) consiste en que su sentido es fijado por el uso que de ellos prescriben los axiomas?

13. ¿Qué parentesco hay entre los siguientes pares de enunciados?

    Dos puntos determinan una recta.
    Dos planos determinan una recta.
    Tres puntos no colineales determinan un plano.
    Tres planos que no tengan una recta común determinan un punto.
    (Sugerencia: ¿Cómo se intercambian punto y plano?).

14. ¿Hay alguna correspondencia entre los axiomas planos I 1-3 y la solución de sistemas lineales en dos ecuaciones y dos incógnitas? ¿Blanché (parágrafo 9) compara un sistema de postulados a un sisma de ecuaciones; en qué sentido vale la comparación? ¿Cómo corresponden las incógnitas a los términos no definidos? (Blanché. Ver Bibliografía al final del presente volumen).

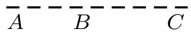
El grupo de axiomas II: axiomas de ordenación

(Parágrafo 3)

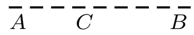
Los axiomas de este grupo definen el concepto “entre” y hacen posible sobre la base de este concepto la *ordenación* de los puntos sobre una recta, en el plano y en el espacio.

Explicación. Los puntos de una recta están en ciertas relaciones entre sí, para cuya descripción se emplea especialmente la palabra *entre*.

II 1. Cuando un punto B está situado entre un punto A y un punto C, son A, B, C tres puntos distintos de una recta y además también B está situado entre C y A.



II 2. Dados dos puntos, A y C, hay siempre al menos un punto B sobre la recta AC, de tal modo que C está situado entre A y B.



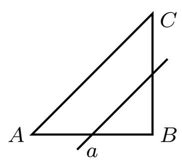
II 3. De tres puntos cualesquiera de una recta no hay más que uno situado entre los otros dos.

Aparte de estos axiomas lineales de ordenación empleamos además un axioma de orden plano.

Explicación. Consideramos sobre una recta a, dos puntos A y B; damos el nombre de *segmento* al sistema de ambos puntos A y B, lo designamos con AB o con BA. Los puntos entre A y B se llaman puntos del segmento AB o también situados *al interior* del segmento AB; los puntos A, B se llaman *extremos* del segmento AB. El resto de los puntos de la recta a se dicen situados *al exterior* del segmento AB.

II 4. Sean A, B, C tres puntos no situados sobre una recta y a una recta en el plano ABC, que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C: cuando la recta a pasa por un punto del segmento AB, pasa también por un punto del segmento AC o por un punto del segmento BC.

Expresado intuitivamente: si una recta entra en el interior de un triángulo también vuelve a salir de él. Se puede demostrar que ambos segmentos AC y BC no pueden ser cortados por la recta a.

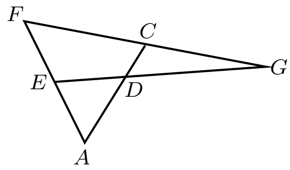


Consecuencias de los axiomas de pertenencia y de ordenación

(Parágrafo 4)

Teorema 3. *Dados dos puntos A y C hay siempre por lo menos un punto D sobre la recta AC, situado entre A y C.*

Demostración. Por el axioma I 3 hay un punto E no situado sobre la recta AC y por el axioma II 2 hay sobre AE un punto F tal que E es un punto del segmento AF. Por el mismo axioma y por el II 3 hay sobre FC un punto G que no pertenece al segmento FC. Por el axioma II 4 la recta EG también debe cortar al segmento AC en un punto D. $\square$



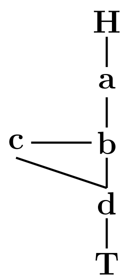
Paráfrasis

H: A, C son puntos.
T: Hay sobre la recta AC al menos un punto D entre A y C.

a: Hay un punto E exterior a la recta AC. (**H**. I 3)
b: Sobre AE hay un punto F tal que E sea un punto de AF. (**a**. II 2)
c: Sobre FC hay un punto G exterior al segmento FC. (**b**. II 2-3)
d: Respecto del triángulo ACF, la recta EG corta al lado AC en un punto AD.
D está entre A y C. (**b**, **c**. II 4. Explicación § 3).

T: (**d**).

Diagrama de la demostración.

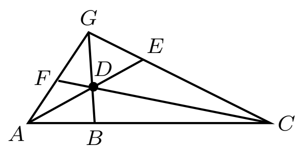


Cuestión

Mostrar cómo la demostración del T 3 no depende del dibujo. Pueden colocarse las letras donde sea posible situarlas según el texto; el dibujo se adapta a la demostración y ayuda así a la intuición.

Teorema 4. *De tres puntos de una recta hay siempre uno situado entre los otros dos.*

Demostración. (A. Wald). Sea A no situado entre B y C, y C no situado entre A y B. Unimos un punto D no situado sobre la recta AC con B y por el axioma II 2 escogemos sobre la línea de unión un punto G de modo que D está situado entre B y G. De la aplicación del axioma II 4 al triángulo BCG y a la recta AD resulta que las rectas AD y CG se cortan en un punto E situado entre C y G; análogamente resulta que las rectas CD y AG pasan por un punto F situado entre A y G. Al aplicar ahora el axioma II 4 al triángulo AEG y a la recta CF se ve que D está entre A y E, y mediante aplicación del mismo axioma al triángulo AEC y a la recta BG se obtiene que B está situado entre A y C. □



Paráfrasis

H: A, B, C son tres puntos de una recta.
A no está entre B y C.
C no está entre A y B.

T: B está entre A y C.

a: D es un punto exterior a AC. (**H**. I 3)
b: Trazar la recta que pasa por B y por D (**a**. I 1-2)
c: G es un punto de BD tal que D está entre B y G. (**b**. II 2)
d: BCG es un triángulo. (**c**. I 4-5)
e: Respecto del triángulo BCG, la recta que pasa por A y por D corta al lado CG en un punto E. E está entre C y G. (**c**, **d**. II 4)
f: AEG es un triángulo. (**c**, **e**. I 4-5)
g: Respecto del triángulo AEG, la recta CD corta al lado AG en un punto F. F está entre A y G. (**f**. II 4)
h: Respecto del triángulo AEG, la recta FC corta al lado AE en un punto D. D está entre A y E (**e**, **f**, **g**. II 4).
i: AEC es un triángulo. (**e**. I 4-5)
j: Respecto del triángulo AEC, la recta GB corta al lado AC en el punto B. B está situado en el interior de AC. (**c**, **h**, **i**. II 4)
T: (**j**).

Observación. Las proposiciones **d**, **f**, **i** podrían suprimirse. En la paráfrasis del teorema 3 no se explicitaron. La noción de triángulo no ha sido introducida explícitamente. Hilbert lo hará en el parágrafo 4. La demostración puede ilustrarse progresivamente, así:

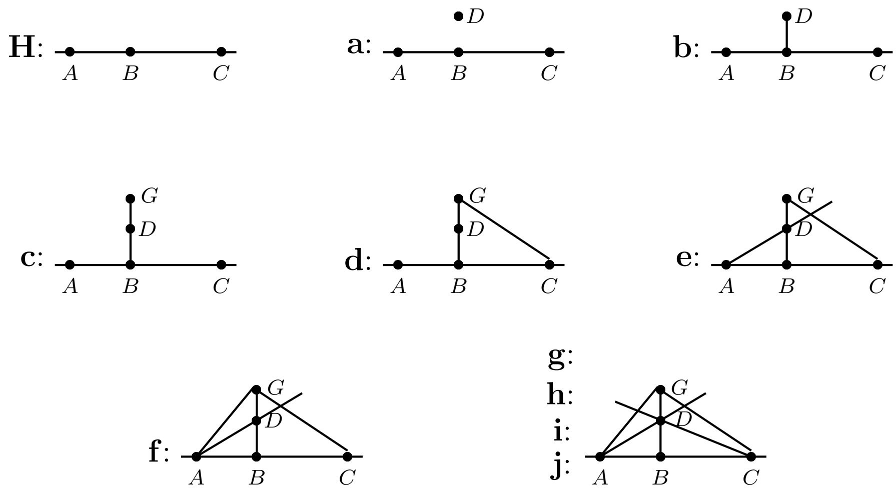
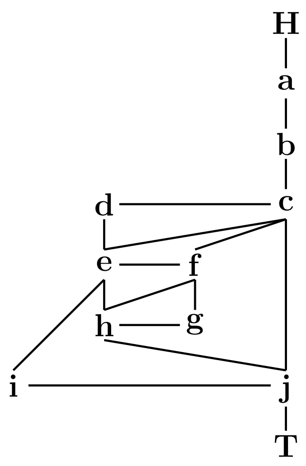


Diagrama de la demostración.



La idea de la demostración del teorema 4 es esta: se quiere mostrar que un determinado punto es interior a un determinado segmento. El medio escogido es la aplicación del axioma II 4. Si se dispone de un triángulo y una recta que entra y sale del triángulo sin pasar por los vértices del triángulo entonces, los puntos en que la recta corta a los lados del triángulo son interiores.

Pueden esquematizarse los pasos de la demostración del teorema 4 así:

D es exterior a AC,
D es interior a BG,
E es interior a CG,
F es interior a AG,
D es interior a AE,
B es interior a AC.

Con estas proposiciones se pueden construir proposiciones más complejas del tipo: si el antecedente entonces el consecuente. O también: el consecuente porque el antecedente. La demostración del teorema 4 es de A. Wald.

Cuestión

Indicar el triángulo y la recta que mediante el axioma II 4 permiten asegurar respectivamente que los puntos E, F, D, B son interiores, en la demostración del teorema 4.

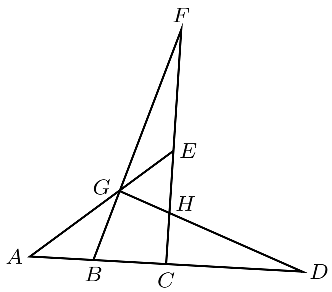
Teorema 5. *Dados cuatro puntos cualesquiera de una recta, pueden siempre ser designados mediante A, B, C, D de manera que el punto designado por B esté situado entre A y C, y, entre A y D; y que el punto designado por C esté entre A y D, y, entre B y D.*

Demostración. Si B pertenece al segmento AC, y C al segmento BD, entonces, los puntos B y C pertenecen al segmento AD.

Por los axiomas I 3 y II 2 se puede escoger un punto E exterior a la recta dada y un punto F tal que E esté entre C y F. La aplicación iterada de los axiomas II 3 y II 4 muestra que los segmentos AE y BF se cortan en un punto G y además que la recta CF corta al segmento GD en un punto H. Este punto H pertenece al segmento GD; por el contrario, según el axioma II 3, E no está sobre el segmento AG; según el axioma II 4, la recta EH corta al segmento AD; así que C es punto del segmento AD. Simétricamente, se demuestra que B pertenece a este segmento. □

Nota. Dados A, B, C, D hay que mostrar que

B está entre A y C.
B está entre A y D.
C está entre A y D.
C está entre B y D.



El texto escrito (tanto en alemán como en español) muestra 5.1, o, primera parte:

- B está entre A y D.
- C está entre A y D.

5.2, o, segunda parte:

- C está entre B y D.

Queda por mostrar que

- B está entre A y C.

El texto en alemán 5.2 dice que hay que mostrar que

- B está entre A y D.

Lo cual ya se tiene en 5.1.

Paráfrasis de 5.1

5.1. Demostración de parte del teorema.
H: A, B, C, D son cuatro puntos de una recta.
B es interior al segmento AC.
C es interior al segmento BD.
T: B es interior al segmento AD.
C es interior al segmento AD.

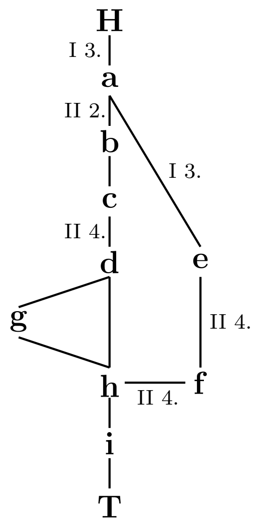
5.1. Demostración de parte del teorema

a: E es un punto exterior a la recta dada. (**H**. I 3)
b: F es un punto tal que E está entre C y F. (**a**. II 2)
c: F, B, C no están sobre la misma recta. (**b**, **H**)

d: Respecto del triángulo BCF, la recta que pasa por A y por E corta al segmento BF en un punto G. El punto G está entre B y F, y, entre A y E. (**c**. II 3, II 4)
e: A, E, C no están sobre la misma recta. (**a**, **H**)
f: Respecto del triángulo AEC, la recta que pasa por D y por G corta al segmento EC en un punto H. El punto H está entre E y C y entre G y D. (**e**. II 3, II 4)
g: A, D, G no están sobre la misma recta. (**d**, **H**)
h: Respecto al triángulo ADG, recta EH encuentra al lado AD del mismo triángulo en el punto C. (**d**, **f**, **g**. II 4)
i: C está entre A y D. (**h**. II 3)
T: (**i**)

Análogamente se mostraría que B está entre A y D.

Diagrama de la demostración 5.1.



La idea de la demostración 5.1 es como la del teorema 4. Para asegurar que ciertos puntos son interiores se muestra sucesivamente que

E es exterior a AD (**a**)
E es interior a CF (**b**)
G es interior a AE (**d**)
H es interior a GD (**f**)
C es interior a AD (**i**)

Demostración de 5.2. Si B pertenece al segmento AC y C pertenece al segmento AD, entonces, C pertenece al segmento BD y B al AD.

Escogemos un punto G fuera de la recta dada y un punto F tal que G esté entre B y F. Por los axiomas I 2 y II 3, la recta CF no corta ni al segmento AB ni al segmento BG por tanto por el axioma II 4, no corta tampoco al segmento AG. Puesto que C está sobre el segmento AD, la recta CF encuentra al segmento GD en un punto H. Por los axiomas II 3 y II 4, la recta FH encuentra al segmento BD en el punto C. Por tanto C pertenece al segmento BD. El resto de la afirmación 2 se sigue de 1. □

Paráfrasis de 5.2

H: B pertenece al segmento AC.
C pertenece al segmento AD.

T: C pertenece al segmento BD.
B pertenece al segmento AD.

a: G es un punto exterior a la recta dada. (**H**. I 3)
b: F es un punto tal que G es interior al segmento BF. (**a**. II 2)
c: CF no corta al segmento AB. (**b**, **H**. II 3)
d: CF no corta al segmento BG. (**b**, **H**. II 3)
e: CF no corta al segmento AG. (**c**, **d**. II 4)
f: A, D, G no están sobre la misma recta. (**a**)
g: Respecto del triángulo ADG, la recta CF corta al lado DG en un punto H. H está entre D y G. (**a**, **e**, **f**. II 4)
h: B, D, G no están sobre la misma recta. (**a**)
i: Respecto del triángulo BDG la recta FH corta al lado BD en el punto C. (**g**, **h**. II 4)
j: C está entre B y D. (**i**)
T: (**j**).

Figura para 5.2.

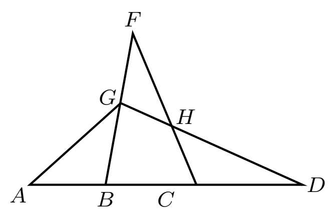
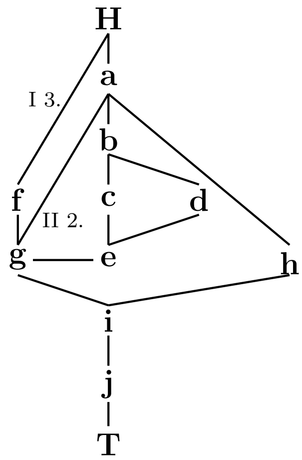


Diagrama de la demostración de 5.2.



Idea de la demostración: La recta CF pasa por el punto C interior al segmento AD, y no encuentra al triángulo ABG, por tanto, encuentra al lado DG del triángulo ADG en un punto H y al mismo lado DG del triángulo BDG. Por tanto, el punto C pertenece al segmento BD.

Cuestión

En 5.2 mostrar que el punto B pertenece al segmento AD.

Para terminar la demostración del teorema 5 se consideran cuatro puntos que van a ser designados por las letras P, Q, R, S. En principio, las letras se podrían escoger de $4! = 24$ maneras. Siempre habrá uno de los puntos entre otros dos. Esta situación fija se puede traducir por la condición de que la letra Q esté siempre entre P y R. Las posibilidades quedan reducidas a ocho. Cuatro de estas son la imagen especular de las otras cuatro. Basta por tanto considerar: $PQRS$, $PQSR$, $PSQR$, $SPQR$. Son las posibles maneras de señalar un cuarto punto, cuando los otros tres ya han sido señalados. Para $PQRS$ se tiene:

$$\begin{array}{c} Q \text{ está entre } P \text{ y } R \\ R \text{ está entre } Q \text{ y } S \end{array}$$

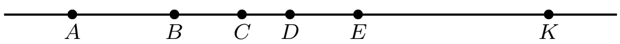
Por tanto Q y R están entre P y S.

Esta situación corresponde al teorema 5.1. Análogamente, las otras tres corresponden al teorema 5.2. Lo cual termina la demostración del teorema.

Nota. El teorema 5 figuró como axioma en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*. El matemático E. H. Moore mostró (1902. *Transactions of the American Mathematical Society*) que era una consecuencia de los axiomas I 1-3, y, II.

Teorema 6 (Generalización del teorema 5). *Dado un número finito de puntos cualesquiera sobre una recta, siempre pueden estos ser designados con A, B, C, D, E, ..., K de manera que el punto designado mediante B esté situado entre A, por un lado y C, D, E, ..., K por el otro; que el punto designado mediante C esté entre A y B por un lado, y D, E, ..., K por el otro; que D este situado entre A, B, C por un lado, y E, ..., K por el otro; y así sucesivamente. Fuera de esta designación solamente la designación opuesta K, ..., E, D, C, B, A goza de las mismas propiedades.*

Observación. Hilbert escribe el enunciado del teorema sin decir nada sobre la demostración. Aunque se puede intuir fácilmente la generalización, la redacción de esta, sería inextricablemente complicada, como se puede prejuzgar por las demostraciones de los teoremas 3, 4, 5. Se puede intentar demostrar el teorema para cinco puntos.

Ilustración para el teorema 6: 

Teorema 7. *Entre dos puntos cualesquiera de una recta existen infinidad de puntos.*

Hilbert no da indicación alguna para la demostración de este importante teorema. Importante, para el geómetra quien debe disponer de infinitos puntos sobre una recta; importante, además, desde el punto de vista epistemológico por tratarse de un infinito.

Si la demostración del teorema 6 que concierne a puntos cualesquiera es prácticamente imposible de escribir (aunque claramente concebible desde el punto de vista teórico) con mayor razón la del teorema 7 que concierne a infinitos puntos.

Es pertinente la aplicación indefinida de los axiomas 2 y 3, y de los teoremas 3 y 4. Conceptualmente se llega a la densidad del conjunto de puntos sobre la recta. Entre dos puntos hay un tercero, entre el primero y el tercero hay un cuarto y así indefinidamente. Por otra parte, dados dos puntos hay un tercero exterior a ellos y uno puede recomenzar la consideración anterior, etc. Estos teoremas no son constructivos, demuestran existencia; son de los no aceptados por la escuela intuicionista.

Se puede pensar en un argumento por reducción al absurdo. Entre dos puntos no hay infinitos puntos, sino solo un número finito de puntos. Entonces, habría finalmente dos puntos entre los que no habría más puntos, lo cual contradice al teorema 4. Pero tampoco la reducción al absurdo es válida para la escuela intuicionista.

Teorema 8. *Toda recta, a, situada en un plano, separa los puntos de este plano, que no pertenecen a la recta, en dos semiplanos con las siguientes propiedades: todo punto P de uno de los semiplanos determina con cada punto R del otro de los semiplanos, un segmento PR al interior del cual pertenece un punto de la recta a; por el contrario, dos puntos, P y Q cualesquiera del mismo semiplano determinan un segmento PQ, al cual no pertenece ningún punto de a.*

Hilbert no da idea alguna para la demostración del teorema 8. A continuación, se transcribe parte de la demostración que aparece en la página 51 de Efimov (Nikolai Efimov. *Higher geometry.* 1978 . English Edition: 1980. Moscú. Mir. 560 pp.).

Demostración. Hipótesis

- a es una recta del plano.
- A es un punto de la recta a.
- P es un punto que no pertenece a la recta a.
- K es el conjunto de los puntos Q del plano, no situados sobre la recta a, tales que el segmento PQ no encuentra a la recta a. P es un punto de K.
- K' es el conjunto de los puntos R no situados sobre la recta a tales que el segmento PR encuentra a la recta a.

Entonces

- K es no vacío. Entre los puntos P y A, hay por lo menos un punto P' (T 3) y PP' no contiene ningún punto de a.
- K' no es vacío. Existe por lo menos un punto R tal que A está entre P y R (H, II 2). R pertenece a K'.
- Los conjuntos K y K' no tienen elementos comunes. Si S perteneciera a K y a K', por pertenecer S a K el segmento PS no tendría punto alguno de la recta dada; y por pertenecer S a K' el segmento PS tendría un punto de la recta a. Los consecuentes de estos condicionales son contradictorios, por tanto, hay que negarlos; de donde se concluye que S no puede pertenecer a K y a K'.
- Así, pues, los tres conjuntos, a, K, K' son disyuntos.

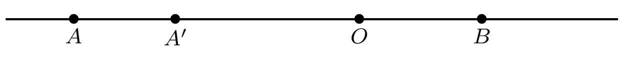
- Dado cualquier punto del plano, que no pertenezca a la recta a, es posible determinar siempre a qué conjunto pertenece, según PS contenga (pertenece a K') o no contenga (pertenece a K) un punto de la recta a.
- Dos puntos P', P'' del conjunto K determinan un segmento que no puede contener puntos de la recta a. Si a P', P'' perteneciera un punto de la recta dada, a, y si P, P', P'' fueran no colineales entonces, uno de los segmentos PP', o PP'' debería contener un punto de a (II 4); lo cual contradice las suposiciones. Si P, P', P'' fueran colineales se llegaría a la misma conclusión, debido a II 2, II 3, T 4.
- Dados dos puntos R', R'' del segundo conjunto K' el segmento $R'R''$ no contiene puntos de la recta a. En efecto, si P, R', R'' están sobre la misma recta, esta corta una sola vez a la recta a; para que se cumpla la condición que define a R', R'' como elementos del conjunto K', el punto de intersección con la recta a, común a PR' y a PR'' debe pertenecer a PR' y no a $R'R''$.

Si P, R', R'' no están sobre la misma recta, por la determinación de K', los segmentos PR', PR'' contienen un punto de la recta y se cumple el axioma II 4; no se cumple si $R'R''$ tiene un punto común con la recta a.

Finalmente, dados un punto P' de K y un punto R' de K' el segmento $P'R'$ contiene un punto de la recta a. Si P, P', R' están sobre la misma recta, PP' no contiene punto de la recta a y PR' contiene uno. Si P, P', R', no están sobre la misma recta entonces PP' no contiene punto de la recta a, PR' contiene un punto de la recta a; se cumple II 4 cuando $P'R'$ contiene un punto de la recta a (ver mayores detalles en Efimov). □

Explicación. Los puntos P, Q están situados en el plano a un mismo lado de la recta a; y los puntos P, R están situados en el plano a distinto lado de la recta a.

Explicación. Sean A, A', O, B cuatro puntos de una recta a, de manera que O esté entre A y B, pero no entre A y A'; entonces se dice: los puntos A y A' están situados en la recta a, al mismo lado del punto O, y los puntos A y B están situados en la recta a, a distinto lado del punto O.



Todos los puntos situados a un mismo lado de O en la recta a, reciben el nombre de *semirrecta* salida de O; con lo cual, cada punto de una recta parte a esta en dos semirrectas.

Explicación. Un sistema de segmentos AB, BC, CD, ..., KL que une al punto A con el punto L recibe el nombre de *línea quebrada*; esta quebrada es designada brevemente $ABCD \dots KL$. Los puntos interiores de los segmentos AB, BC, CD, ..., KL y los A, B, C, D, ..., K, L se llaman, en conjunto, puntos de la línea quebrada. En el caso especial de que los puntos A, B, C, D, ..., K, L estén situados en un plano y de que el punto L coincida con A, la quebrada recibe el nombre de *polígono* y se designa como polígono $ABCD \dots K$. Los segmentos AB, BC, CD, ..., KA se llaman *lados* del polígono. Los puntos A, B, C, D, ..., K se llaman *vértices* del polígono. Los polígonos con 3, 4, ..., n vértices tienen por nombres respectivos trivértice, cuadrivértice,..., n-vértice.

Explicación. Si todos los vértices de un polígono son distintos unos de otros, si ningún vértice del mismo es punto interior de alguno de los lados y si dos lados no adyacentes no tienen punto común, el polígono se llama *simple*.

Teorema 9. *Todo polígono simple contenido en un plano, separa los puntos de este, no pertenecientes a los lados del polígono, en dos regiones, una* interior *y otra* exterior, *con las siguientes propiedades: si A es un punto del interior y B un punto del exterior, toda línea quebrada que una A con B, tiene, al menos, un punto común con el polígono. Por el contrario, si A y A' son dos puntos interiores o si B y B' son dos puntos exteriores, entonces existen líneas quebradas que unen tales puntos y que no tienen ningún punto común con el polígono. Existen rectas en el plano que pasan completamente por el exterior del polígono; por el contrario, no existen rectas pertenecientes enteramente al interior del polígono.*

Teorema 10. *Todo plano separa los puntos del espacio que no le pertenecen en dos semiespacios con las siguientes propiedades: cada uno de los puntos A de uno de los semiespacios con cada uno de los puntos B del otro de los semiespacios, determina un segmento AB, al interior del cual pertenece un punto del plano; por el contrario, dos puntos cualesquiera A, A' del mismo semiespacio determinan un segmento AA' que no contiene punto alguno del plano.*

Explicación. Utilizando las designaciones de este teorema 10, se dice que los puntos A, A' están situados en el espacio al mismo lado del plano; y que los puntos A, B están situados en el espacio a distinto lado del plano.

Cuestiones

1. En el lenguaje ordinario es correcto decir que en una mesa redonda B está situado entre A y C. ¿Prohíbe este empleo en la geometría que se construye, alguno de los cuatro axiomas de ordenación?

2. Hacer una figura para el enunciado del axioma de Pasch, según la interpretación intuitiva que da Hilbert.

3. Pasch, como otros matemáticos de la segunda mitad del siglo pasado, se había propuesto expulsar a la intuición de la geometría. ¿En qué sentido se la debe expulsar? ¿En qué sentido no se la puede expulsar?

4. ¿Por qué Hilbert incluye figuras en su exposición? ¿Los axiomas de Hilbert bastan para deducir los teoremas? ¿O hay que servirse de figuras, como en el caso de Euclides?

5. Hacer una figura para cada uno de los enunciados de los teoremas 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

6. ¿Qué tiene que ver el teorema 10 con la ordenación de los elementos en el espacio? ¿Hilbert enunció algún axioma específico para la ordenación de los puntos en el espacio? ¿Cuáles son los axiomas para la ordenación de los elementos en una recta? ¿Y en el plano?

7. Cada vez que se encuentra una demostración, dentro de un sistema formal determinado, para una relación que figuraba como axioma, ¿es necesario que deje de ser axioma? ¿Con qué condición del sistema formal tiene que ver este hecho?

8. ¿Hay que hacer más demostraciones cuando se tienen más axiomas o cuando se tienen menos axiomas?

   La pregunta admite respuestas, desde dos enfoques contrapuestos. Uno de ellos es cuantitativo: al asumir más axiomas se obtiene una teoría más rica; es posible considerar más enunciados para demostrar. El otro aspecto es cualitativo: con menos axiomas, hay que demostrar más (hay que trabajar más) para establecer los enunciados fundamentales de una teoría que cuando se han asumido más axiomas.

9. Compare los nombres: trivértice, trilátero, triángulo. ¿Designan conceptos diferentes? ¿Acentúa cada uno un aspecto del mismo concepto? ¿Habría otro aspecto que permitiera suministrarle otro nombre? ¿Esta consideración es análoga a la de los nombres del mismo concepto en diferentes idiomas?

Cuestiones concernientes para una demostración del teorema 9

1. Analogías con la demostración del teorema 8.

2. Partes que difieren en la demostración del teorema 9 (si se la compara con la del 8).
3. Definir un primer conjunto K de los puntos interiores.
4. Mostrar que K no es vacío.
5. Definir un segundo conjunto K' de los puntos exteriores.
6. Mostrar que K' no es vacío.
7. Mostrar que dos elementos interiores cumplen la condición que determina al conjunto K.
8. Mostrar que dos puntos exteriores cumplen la condición que determina a K'.
9. Mostrar que un punto exterior y uno interior determinan una recta que tiene un punto común con el polígono.
10. ¿La demostración es análoga enteramente a la del teorema 8 o supone dicho teorema?

Cuestiones preparatorias para una demostración del teorema 10

1. Hay analogía entre los enunciados de los teoremas 8 y 9. ¿En qué consiste? Trate de explicitarla en dos columnas, en la primera de las cuales aparece *recta*, y al frente en la segunda *polígono simple*, etc.
2. Hay de nuevo tres conjuntos disyuntos. ¿Cuáles son? ¿Cómo están determinados? ¿De esta determinación se sigue que los conjuntos son disyuntos?
3. ¿Cómo se muestra que cada uno de los tres conjuntos es no vacío?
4. ¿Cómo se muestra que todos los puntos del espacio quedan clasificados?
5. ¿Cómo se muestra que cada par de elementos del primer conjunto cumple la condición que determina al conjunto?
6. ¿Cómo se muestra que cada par de elementos del segundo conjunto cumple la condición que determina al segundo conjunto?
7. Escribir el enunciado correspondiente a un par de elementos que no pertenecen al mismo conjunto. Mostrarlo.

8. ¿Difiere fundamentalmente la demostración del teorema 10 de la del teorema 8? ¿Analogías?

9. ¿Se trata de establecer condicionales directos y de aplicar el primer esquema estoico? ¿O de emplear la reducción al absurdo?

10. Diagramas de las demostraciones parciales.

El grupo de axiomas III: axiomas de congruencia

(Parágrafo 5).

Los axiomas de este grupo definen el concepto de congruencia, y con este, también el de movimiento.

Explicación. Los segmentos están entre sí en ciertas relaciones, para cuya descripción sirven las palabras *congruente* o *igual*.

III 1. Si A, B son dos puntos de una recta a y además es A' un punto de la misma o de distinta recta a' puede encontrarse siempre sobre un lado determinado de a', un punto B' tal que el segmento AB sea congruente o igual al segmento $A'B'$. Con signos: $AB \equiv A'B'$.

Este axioma proporciona la posibilidad del *transporte* de segmentos. Su unicidad se demostrará más adelante.

El segmento fue definido sencillamente como sistema de dos puntos A, B y designado por AB o BA. De este modo, el orden de los dos puntos no se tuvo en cuenta en la definición. De aquí que las fórmulas

$$AB \equiv A'B', \qquad AB \equiv B'A', \qquad BA \equiv A'B', \qquad BA \equiv B'A'$$

tengan la misma significación.

III 2. Si un segmento $A'B'$ y un segmento $A''B''$ son congruentes con el mismo segmento AB, también el segmento $A'B'$ es congruente con el $A''B''$. Dicho brevemente: si dos segmentos son congruentes con un tercero, son congruentes entre sí.

Puesto que la congruencia o igualdad se introduce en la geometría por medio de este axioma, no es a primera vista enteramente evidente que todo segmento sea congruente consigo mismo. Este hecho empero, se deduce de los dos primeros axiomas de congruencia: transportemos el segmento AB sobre cualquier semirrecta; si el segmento AB es congruente a $A'B'$, por ejemplo, la aplicación del axioma III 2 a las congruencias $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$ conduce a $AB \equiv AB$.

Con base en esto y además con la aplicación del axioma III 2, resulta la *simetría* y la *transitividad* de la congruencia de segmentos; esto es, la validez de los teoremas:

Si $AB \equiv A'B'$ se tiene también $A'B' \equiv AB$.
Si $AB \equiv A'B'$ y $A'B' \equiv A''B''$ se verifica a su vez $AB \equiv A''B''$.

Como consecuencia de la simetría en la congruencia de segmentos, podemos expresarnos de este modo: dos segmentos son congruentes entre sí.

Para ver mejor como Hilbert aplica III 1 y III 2, puede transcribirse el enunciado de III 2, así:

$$\text{Si } \begin{bmatrix} A'B' \equiv AB \\ A''B'' \equiv AB \end{bmatrix} \text{ entonces } A'B' \equiv A''B''.$$

Entonces, para mostrar que todo segmento es congruente consigo mismo, basta aplicar III 2, así:

$$\text{Si } \begin{bmatrix} AB \equiv A'B' \\ AB \equiv A'B' \end{bmatrix} \text{ entonces } AB \equiv AB.$$

Para mostrar la simetría de la relación de congruencia, se aplica III 2 así:

1. $A'B' \equiv A'B'$ (Reflexividad).
2. $AB \equiv A'B'$ (Hipótesis de simetría de $\equiv$)
3. $A'B' \equiv AB$ (III 2 aplicado en 1 y 2).

Este razonamiento en tres pasos muestra que si $AB \equiv A'B'$ entonces $A'B' \equiv AB$, es decir, que la relación de congruencia, $\equiv$, es simétrica. El razonamiento es muy sencillo; para apreciar su corrección, conviene darse cabal cuenta de la propiedad de los argumentos, es decir, de las indicaciones dadas entre paréntesis.

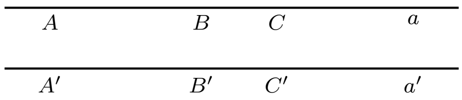
Para demostrar la transitividad de la relación de congruencia, el esquema del razonamiento puede transcribirse así:

1. $\left.\begin{array}{r} AB \equiv A'B' \\ A'B' \equiv A''B'' \end{array}\right\}$ (Hipótesis de transitividad de $\equiv$)
2. $AB \equiv A'B'$ (III 2 aplicado en 1)
3. $A''B'' \equiv A''B''$ (Reflexividad de $\equiv$)
4. $AB \equiv A''B''$ (Conclusión de 2 y 3 de acuerdo con III 2).

De la hipótesis, $AB \equiv A'B'$ y $A'B' \equiv A''B''$, se ha podido llegar, gracias a lo ya obtenido, a la conclusión $AB \equiv A''B''$.

III 3. Sean AB y BC dos segmentos de la recta a sin puntos comunes, y, por otra parte, $A'B'$, $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta a o sobre otra distinta a' asimismo sin puntos comunes; si es entonces $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$, es también siempre $AC \equiv A'C'$.

Este axioma expresa el postulado de la *adicionabilidad* de segmentos.



Del mismo modo que se trata el transporte de segmentos, se trata el de ángulos. Además de la posibilidad del transporte, hay que exigir axiomáticamente la *univocidad*; por el contrario, la transitividad y adicionabilidad son demostrables.

Explicación. Sea α un plano cualquiera y h, k dos semirrectas distintas que parten de un punto 0 de α y que pertenecen a rectas distintas. Al sistema de estas dos semirrectas lo llamamos un *ángulo* y lo designamos $\measuredangle(h, k)$ y también $\measuredangle(k, h)$.

Las semirrectas h, k reciben el nombre de *lados* del ángulo, y el punto 0 se llama vértice del ángulo.

Esta definición excluye a los ángulos llanos y a los cóncavos.

Las semirrecta h puede pertenecer a la recta $\overline{h}$ y la semirrecta k a la $\overline{k}$. Las semirrectas h y k, consideradas conjuntamente con el punto 0, dividen el plano en dos regiones: todos los puntos que quedan con h al mismo lado de $\overline{k}$ y con k al mismo lado de $\overline{h}$, se dice que están situados en el *interior* del ángulo $\measuredangle(h, k)$; los demás puntos se dicen situados en el *exterior* o fuera de este ángulo.

Se ve fácilmente, fundándose en los axiomas I y II, que ambas regiones contienen puntos, y que un segmento que una dos puntos del interior del ángulo queda, por completo, en dicha región interior. Con la misma facilidad se demuestran los siguientes hechos.

Si un punto H está situado en h y uno K en k, el segmento HK queda completamente en el interior del ángulo (h, k). Una semirrecta que parta de 0 está enteramente en el interior o en el exterior del ángulo; una semirrecta contenida en el interior del ángulo corta al segmento HK.

Si A es un punto de una de las regiones y B uno de la otra región, toda quebrada que una A con B, o pasa por 0, o tiene con h o con k, al menos un punto común; si, por el contrario, son A y A' puntos de la misma región, existe siempre una quebrada que une A con A', que ni pasa por 0, ni por puntos de las semirrectas h, k.

Explicación. Entre los ángulos hay ciertas relaciones designadas por los términos *congruente* o *igual*.

III 4. Dados un ángulo $\measuredangle(h, k)$ en un plano α, una recta a' en un plano β, y una de las regiones de β determinadas por a'; representemos por h' una semirrecta de a' que parte de $0'$.

Entonces, existe en el plano β una única semirrecta k' tal que $\measuredangle(h, k)$ sea congruente, o igual, con $\measuredangle(h', k')$ y tal que todos los puntos interiores del ángulo $\measuredangle(h', k')$ estén situados en la región dada con respecto a a'. Se escribe: $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k')$. Todo ángulo es congruente consigo mismo, es decir, siempre es $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h, k)$.

Podemos decir abreviadamente: todo ángulo puede ser transportado de manera unívocamente determinada a un plano dado, en una región dada y con una semirrecta dada.

Así como no consideramos en los segmentos la dirección, tampoco tenemos en cuenta en la definición de ángulo el sentido de rotación. Por tanto, las notaciones

$$\measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(h',k'), \quad \measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(k',h'), \quad \measuredangle(k,h) \equiv \measuredangle(h',k'), \quad \measuredangle(k,h) \equiv \measuredangle(k',h')$$

significan lo mismo.

Explicación. Un ángulo de vértice B sobre cuyos lados están situados, respectivamente, los puntos A y C, se designa por $\measuredangle ABC$, o con más brevedad $\measuredangle B$.

III 5. Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican las congruencias

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C',$$

también verifican la congruencia: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.

La noción de triángulo fue dada en el parágrafo 4.

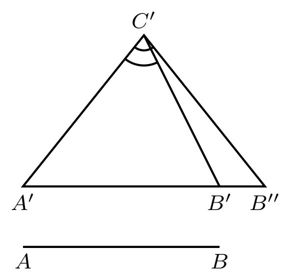
[Aquí, y en lo que sigue, es supuesto que los vértices de un triángulo no son colineales].

Cambiando la notación resulta que con las mismas hipótesis del axioma, se verifican las congruencias $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$.

Los axiomas III 1-3 contienen solo proposiciones sobre la congruencia de segmentos; pueden denominarse, por tanto, axiomas lineales del grupo III.

El axioma III 4 contiene enunciados acerca de la congruencia de ángulos. El axioma III 5 es un ligamento entre los conceptos de congruencia de segmentos y de ángulos.

Los axiomas III 4 y III 5 contienen proposiciones sobre los elementos de la geometría plana y pueden por ello llamarse los axiomas planos del grupo III.



La univocidad del transporte de segmentos se deduce de la univocidad del transporte de ángulos recurriendo al axioma III 5. Supongamos, en efecto, que el segmento AB se transporte de dos maneras distintas sobre una semirrecta que parta de A', llegando hasta B' y B''. Elijamos un punto C' fuera de la recta $A'B'$; tenemos las congruencias

$$A'B' \equiv A'B'', \quad A'C' \equiv A'C', \quad \measuredangle B'A'C' \equiv \measuredangle B''A'C';$$

luego, según el axioma III 5 es $\measuredangle A'C'B' \equiv \measuredangle A'C'B''$, lo que está en contradicción con la univocidad del transporte de ángulo exigido por el axioma III 4.

Cuestiones

1. ¿Qué axioma contiene proposiciones sobre la congruencia de ángulos?
2. ¿Qué axioma relaciona la congruencia de segmentos con la congruencia de ángulos?
3. ¿Enuncia el axioma III 5 alguno de los casos de "igualdad" de triángulos de Euclides?
4. ¿Qué postula el axioma III 3?
5. ¿La adicionabilidad de segmentos se postula o se define?
6. ¿Se ha postulado o definido la adición de ángulos?
7. ¿Se ha postulado la congruencia de triángulos?
8. ¿Se ha definido la congruencia de triángulos?
9. ¿Se ha postulado o sea ha definido la congruencia de un ángulo consigo mismo?
10. ¿La relación de congruencia de segmentos tiene las tres propiedades que caracterizan una relación de equivalencia: reflexividad, simetría, transitividad? Precisar si por un axioma o por demostración.
11. Pregunta análoga respecto a la congruencia de ángulos.
12. ¿La univocidad del transporte de segmentos se postula o se demuestra?
13. ¿Y la univocidad del transporte de ángulos?
14. ¿Cuál de estos axiomas había enunciado Euclides? Citarlo.
15. ¿Menciona Hilbert el movimiento de los segmentos o de los ángulos?
16. ¿Qué tiene que ver la superponibilidad de las figuras de Euclides con la congruencia de Hilbert? ¿La postula Euclides, o la define? ¿La emplea?

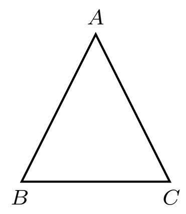
Consecuencias de los axiomas de congruencia

(Parágrafo 6).

Explicación. Dos ángulos se llaman *suplementarios* si tienen el mismo vértice, un lado común y lados no comunes situados sobre una misma recta. Dos ángulos se llaman *opuestos por el vértice* si tienen el mismo vértice y lados correspondientes situados sobre una misma recta a distinto lado del vértice. Un ángulo se llama *recto* si es congruente con su suplementario.

Teorema 11. *En un triángulo con dos lados congruentes, los ángulos opuestos a ellos son congruentes. Brevemente: los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.*

El teorema se sigue del axioma III 5 y de la última parte del axioma III 4.



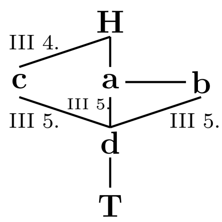
Paráfrasis

H: ABC es un triángulo.
$AB \equiv AC$.

T: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB$.

En los triángulos ABC, ACB
a: $AB \equiv AC$. (**H**)
b: $AC \equiv AB$. (**a**. Simetría de $\equiv$)
c: $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle BAC$. (**H**. III 4)
d: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB$. (**a**, **b**, **c**. III 5)
T: (**d**)

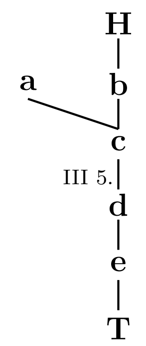
Diagrama de la demostración.



Otra forma

a: Si $\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ \measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C' \end{cases}$ entonces $\begin{cases} \measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C' \\ \measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B' \end{cases}$ (III 5)
b: $AB \equiv AC$ (Triángulo isósceles). (**H**)
c: $AB \equiv A'B' \equiv AC \equiv A'C'$. (**a**, **b**)
d: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C' \equiv \measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$. (**c**. III 5)
e: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB$. (**d**)
T: (**e**)

Diagrama de la demostración.



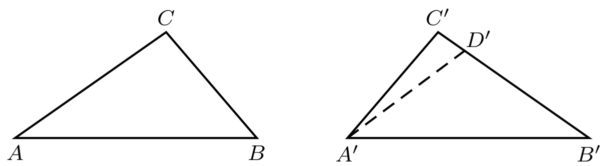
Explicación. Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$, cuando se cumplen todas las congruencias

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle A', \quad \measuredangle B \equiv \measuredangle B', \quad \measuredangle C \equiv \measuredangle C'.$$

Teorema 12 (Primer teorema de congruencia de triángulos)**.** *Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$, en el caso en que sean válidas las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \measuredangle A \equiv \measuredangle A'.$$



Demostración. (Paráfrasis de la dada por Hilbert).

H: ABC, $A'B'C'$ son triángulos.
$AB \equiv A'B'$.
$AC \equiv A'C'$.
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$.

T: ABC, $A'B'C'$ son triángulos congruentes.

a: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.
$\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$. (**H**. III 5)

Argumentación por reducción al absurdo para mostrar que los terceros lados son congruentes.

H': ABC, $A'B'C'$ son triángulos.
$AB \equiv A'B'$.
$AC \equiv A'C'$.
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$.
Existe D' sobre $B'C'$ tal que $BC \equiv B'D'$.

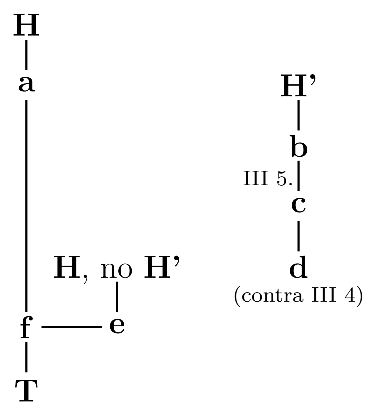
b: BCA, $B'D'A'$ son triángulos.
$BA \equiv B'A'$. (**H'**)
$BC \equiv B'D'$. (**H'**)
$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'D'$. (**H'**)

c: $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'D'$. (**b**. III 5)
d: $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. (**H**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'D'$. (**c**)
Estas dos proposiciones contradicen el axioma III 4. No existe D'.

e: $BC \equiv B'C'$. (**b**, **c**, **d**)
f: ABC, $A'B'C'$ son triángulos.
$AB \equiv A'B'$. (**H**)
$AC \equiv A'C'$. (**H**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$. (**a**)
$\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$. (**a**)
$BC \equiv B'C'$. (**e**)

T: (**f**) □

Diagrama de la demostración.



Observación. La idea para la demostración por absurdo del teorema 12 consiste en llegar a contradecir el axioma III 4 de unicidad de transporte del ángulo.

Teorema 13 (Segundo teorema de congruencia de triángulos)**.** *Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$ en el caso de que sean válidas las congruencias*

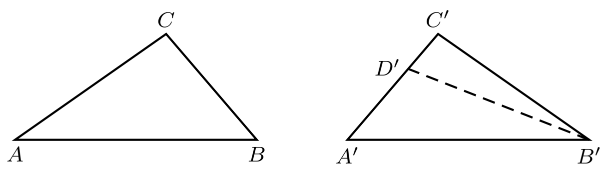
$$AB \equiv A'B', \quad \measuredangle A \equiv \measuredangle A', \quad \measuredangle B \equiv \measuredangle B'.$$

Hilbert no indica demostración para este teorema. Se puede pensar en la siguiente:

Demostración. (Paráfrasis)

H: ABC, $A'B'C'$ son triángulos.
$AB \equiv A'B'$.
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$.
$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.

T: ABC, $A'B'C'$ son triángulos congruentes.



Argumentación por reducción al absurdo para mostrar que $AC \equiv A'C'$.

H': $AB \equiv A'B'$. (**H**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. (**H**)
$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$. (**H**)
$AC \not\equiv A'C'$.

a: Existe D' sobre $A'C'$ tal que $AC \equiv A'D'$. (**H'**)
$BA \equiv B'A'$. (**H'**)

b: ABC, $A'B'D'$ son triángulos.
$AB \equiv A'B'$. (**H**)
$AC \equiv A'D'$. (**a**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'D'$. (**H**)

c: ABC, $A'B'D'$ son triángulos congruentes. (**b**. T 12, T 13)

d: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'D'$. (**c**. III 5)

e: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$. (**d**)
$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$. (**H**)

d y **e** contradicen a III 4. Por tanto, no hay D' supuesto en **H'**.

f: **H**, no **H'**. (**a** - **e**)
g: ABC, $A'B'C'$ son triángulos.
$AB \equiv A'B'$. (**H**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. (**H**)
$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$. (**H**)
$\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$. (III 5)
$AC \equiv A'C'$. (**f**)
$BC \equiv B'C'$. (T 12)

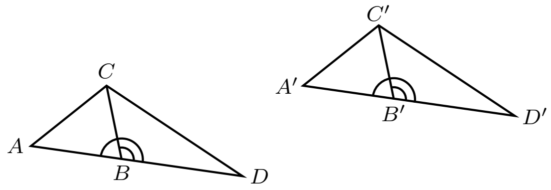
T: (**g**) □

Diagrama de la demostración.

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{H} & & & \mathbf{H'} \\
| & & & | \\
| & & & \mathbf{a} \\
| & & & | \\
| & & & \mathbf{b} \\
| & & \text{T 12.} & | \\
| & & & \mathbf{c} \\
| & & \text{III 5.} & | \\
| & & & \mathbf{d} \\
| & & & | \\
\mathbf{f} & & & \mathbf{e} \\
| & & & \text{(contra III 4)} \\
\mathbf{g} & & & \\
| & & & \\
\mathbf{T} & & &
\end{array}$$

Observación. La idea de la demostración por absurdo del teorema 13 consiste en llegar a contradecir el axioma III 4 de unicidad de transporte del ángulo.

Teorema 14. *Si un primer ángulo es congruente con un segundo ángulo, entonces, el suplemento del primero es congruente con el suplemento del segundo.*



Demostración. (Paráfrasis de la dada por Hilbert).

H: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.

T: El suplemento CBD del primero es congruente con el suplemento $C'B'D'$ del segundo.

a: A', C', D' son puntos tales que
$AB \equiv A'B'$
$CB \equiv C'B'$
$DB \equiv D'B'$. (III 1)

b: $AB \equiv A'B'$. (**a**)
$BC \equiv B'C'$. (**a**)
$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$. (**H**)

c: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. (**b**. T 12)

d: $AC \equiv A'C'$.
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. (**c**)

e: $AD \equiv A'D'$. (**a**. III 3)

f: $AC \equiv A'C'$. (**d**)
$AD \equiv A'D'$. (**e**)
$\measuredangle CAD \equiv \measuredangle C'A'D'$. (**d**)

g: $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$. (**f**. T 12)

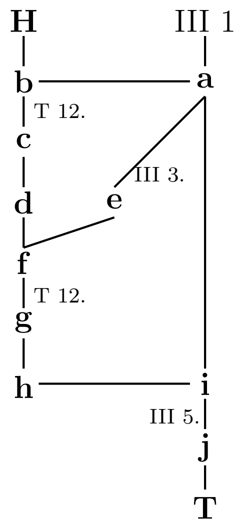
h: $CD \equiv C'D'$.
$\measuredangle ADC \equiv \measuredangle A'D'C$. (**g**)

i: $BD \equiv B'D'$. (**a**)
$CD \equiv C'D'$. (**h**)
$\measuredangle BDC \equiv \measuredangle B'D'C'$. (**h**)

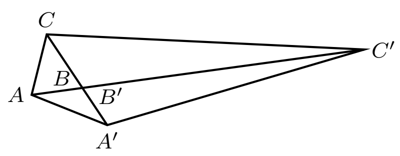
j: $\measuredangle CBD \equiv \measuredangle C'B'D'$. (**i**. III 5)

T: (**j**). $\square$

Diagrama de la demostración.



Congruencia de los ángulos opuestos por el vértice.



Si ABC, $A'B'C'$ son triángulos tales que

$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C',$$

entonces, el ángulo suplementario al primero, $\measuredangle CB'C'$, es congruente al suplementario al segundo, $\measuredangle AB'A'$, es decir,

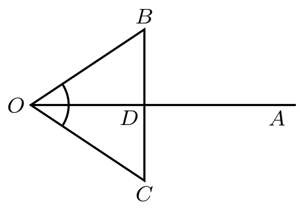
$$\text{si } \measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C', \text{ entonces } \measuredangle CBC' \equiv \measuredangle ABA'. \text{ (T 14)}$$

Ahora bien los ángulos ABA', CBC' son *ángulos opuestos por el vértice.* Así que ángulo opuestos por el vértice son congruentes.

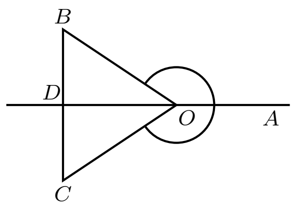
Teorema (Existencia del ángulo recto)**.** *Sea OA una semirrecta, entonces, sobre OA se pueden construir ángulos rectos.*

Ilustración para el teorema.

Caso en que el punto D coincide con el punto O.



Caso en que el punto D no coincide con el punto O.



Demostración. (Paráfrasis de la indicada por Hilbert).

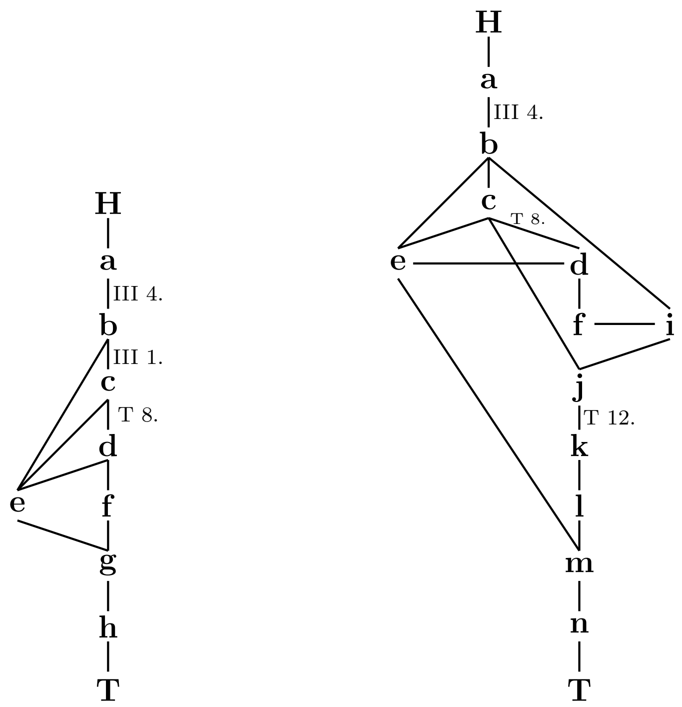
H: OA es una semirrecta.
T: Sobre OA se pueden construir ángulos rectos.
a: AOB es un ángulo con vértice en O y lados OA, OB. (**H**. Definición de ángulo)
b: AOC es el ángulo tal que $\measuredangle AOC \equiv \measuredangle AOB$. (**a**. III 4)
c: C es un punto tal que $OB \equiv OC$. (**b**. III 1)
d: El segmento BC corta a la recta OA en un punto D. (**c**. T 8)
e: B, D, C son puntos sobre la misma recta. (**b**, **c**, **d**)
f: O el punto D coincide con O, o no coincide. (**d**)
g: Si D coincide con O, entonces, los puntos B, $D = O$, C están sobre la misma recta. (**e**, **f**)
h: $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle AOC = 1$ ángulo recto. (**g**)
T: (**h**)

Si el punto D de la semirrecta OA no coincide con O, entonces,

i: $\measuredangle DOB (= \measuredangle AOB) \equiv \measuredangle DOC (= \measuredangle AOC)$. (**f**, **b**)
j: $OB \equiv OC$. (**c**, **i**)
$OD \equiv OD$. (**c**, **i**)
$\measuredangle DOB \equiv \measuredangle DOC$. (**c**, **i**)
k: Los triángulos DOB, DOC son congruentes. (**j**. T 12)
Basta argumentar con III 5, como lo hace Hilbert.
l: $\measuredangle ODB \equiv \measuredangle ODC$. (**k**)
m: Los ángulos ODB, ODC son suplementarios porque tienen:
el mismo vértice D,
un lado común OD,
los lados no comunes DB, DC sobre la misma recta. (**e**, **l**)

n: $\measuredangle ODB \equiv \measuredangle ODC = 1$ ángulo recto. (**m**)
T: (**n**) □

Diagrama de la demostración.

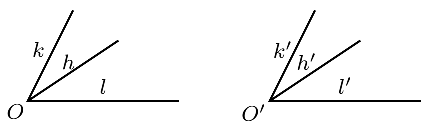


Teorema 15. *Sean h, k, l tres semirrectas de un plano, salidas de un punto O y h', k', l' tres semirrectas de otro o del mismo plano, salidas del punto O' tales que si h, k están del mismo lado o de lados distintos de l, entonces, h', k' estén del mismo lado o de lados distintos de l', respectivamente. En tales condiciones si*

$$\measuredangle(h,l) \equiv \measuredangle(h',l'), \qquad \measuredangle(k,l) \equiv \measuredangle(k',l')$$

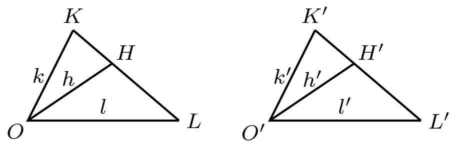
entonces, $\measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(h',k')$.

Figura en el caso en que h, k están por el mismo lado de l.



H: h, k, l son semirrectas de un plano salidas de un punto O del plano.
h', k', l' son semirrectas del mismo o de otro plano salidas de un punto O'.
$\measuredangle(h,l) \equiv \measuredangle(h',l')$.
$\measuredangle(k,l) \equiv \measuredangle(k',l')$.

T: $\measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(h',k')$.



15.1 Demostración. (Paráfrasis de la dada por Hilbert).

a: h está en el interior de $\measuredangle(k,l)$, o k está en el interior de $\measuredangle(h,l)$.
Se va a considerar h al interior de $\measuredangle(k,l)$. (Definición de ángulo). (**H**)

b: K, K', L, L' son puntos de las semirrectas k, k', l, l', respectivamente tales que
$OK \equiv O'K'$
$OL \equiv O'L'$. (**H**. I 3, III 1)

c: La semirrecta h corta el segmento KL en un punto H.

d: H' es un punto de h' tal que $OH \equiv O'H'$. (**c**. III 1)

e: $OH \equiv O'H'$. (**b**, **d**)
$OL \equiv O'L'$. (**b**, **d**)
$\measuredangle HOL \equiv \measuredangle H'O'L'$. (**H**)

f: Los triángulos OHL y $O'H'L'$ son congruentes. (**e**. T 12)

g: $\measuredangle OLH \equiv \measuredangle O'L'H'$.
$HL \equiv H'L'$. (**f**)

h: $OK \equiv O'K'$. (**b**, **d**)
$OL \equiv O'L'$. (**b**, **d**)
$\measuredangle KOL \equiv \measuredangle K'O'L'$. (**H**)

i: Los triángulos OKL y $O'K'L'$ son congruentes. (**h**. T 12)

j: $\measuredangle OKL \equiv \measuredangle O'K'L'$. (**i**)
$KL \equiv K'L'$. (**i**)

k: $H'K'$ están del mismo lado de l'. (**j**. III 4)

l: H' pertenece a $K'L'$. (**c**, **e**, **g**, **k**)

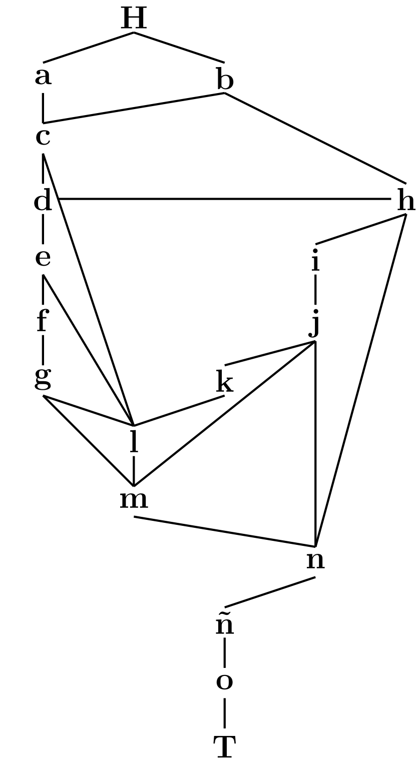
m: $K'L' \equiv K'H' + H'L'$. (**g**, **j**, **l**. III 3)

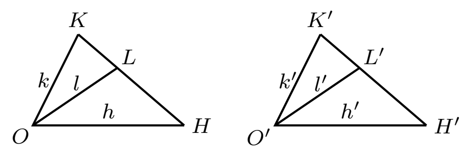
n: $OK \equiv O'K'$. (**h**)
$HK \equiv H'K'$. (**m**. III 1)
$\measuredangle OKL \equiv \measuredangle O'K'L'$. (**j**)
ñ: Los triángulos OHK, $O'H'K'$ son congruentes. (**n**. T 12)
o: $\measuredangle HOK \equiv \measuredangle H'O'K'$. (**ñ**)
T: (**o**) □

El por qué de cada uno de los pasos en la demostración 15.1.

a: Se puede tomar la recta h dentro de $\measuredangle(k, l)$ porque lo permite la noción de ángulo.
b: K, K', L, L' son puntos tales que $OK \equiv O'K'$, $OL \equiv O'L'$ escogidos para formar triángulos que satisfagan condiciones de congruencia.
c: La recta h corta al segmento KL en un punto H.
d: H' es el punto de $K'L'$ tal que $OH \equiv O'H'$.
e: Los triángulos HLO y $H'L'O'$ cumplen las condiciones para aplicar el teorema 12.
f: HLO, $H'L'O'$ son triángulos congruentes.
g: Los ángulos OLH, $O'L'H'$ son congruentes. Los lados LH, $L'H'$ son congruentes.
h: Los triángulos KLO, $K'L'O'$ cumplen las condiciones para aplicar el primer teorema de congruencia de triángulos.
i: Los triángulos KLO, $K'L'O'$ son congruentes.
j: Los ángulos LKO, $L'K'O'$ son congruentes.
k: Los puntos H', K' están por el mismo lado de la semirrecta l'.
l: El punto H' pertenece al segmento $K'L'$.
m: Se tiene de manera única $K'L' \equiv K'H' + H'L'$.
n: Los triángulos HKO, $H'K'O'$ cumplen las condiciones para aplicar T 12.
ñ: Los triángulos HKO, $H'K'O'$ son congruentes.
o: Los ángulos HOK, $H'O'K$ son congruentes como se intentaba demostrar.

Diagrama de la demostración 15.1





15.2. Demostración. Si h, k están situados a lado y lado de l, y por tanto h', k' al lado y lado del l' entonces la demostración es como sigue:

a: La semirrecta l está en el interior del $\measuredangle(k, h)$. (**H**)
b: K, K', H, H' son puntos de las rectas k, k', h, h' tales que
$OK \equiv O'K'$
$OH \equiv O'H'$. (**H**. I 3, III 1)
c: La semirrecta l corta al segmento KH en un punto L. (**a**)
d: L' es un punto de l' tal que $OL \equiv O'L'$

e: $OH \equiv O'H'$. (**b**, **d**)
$OL \equiv O'L'$. (**b**, **d**)
$\measuredangle HOL \equiv \measuredangle H'O'L'$. (**H**)

f: Los triángulos HOL, $H'O'L'$ son congruentes. (**e**. T 12)
g: $\measuredangle LHO \equiv \measuredangle L'H'O'$.
$HL \equiv H'L'$. (**f**)

h: $OK \equiv O'K'$. (**b**, **d**)
$OL \equiv O'L'$. (**b**, **d**)
$\measuredangle KOL \equiv \measuredangle K'O'L'$. (**H**)

i: Los triángulos OKL, $O'K'L'$ son congruentes. (**h**. T 12)
j: $\measuredangle OKL \equiv \measuredangle O'K'L$. (**i**)
$LK \equiv L'K'$. (**i**)

k: Los puntos H', K' están de lado y lado de la recta l. (**j**. III 4)
l: El punto L' es un punto del segmento $H'K'$. (**c**, **e**, **g**, **k**)
m: $K'H' \equiv K'L' + L'H'$. (**g**, **j**, **l**. III 3)
n: $OK \equiv O'K'$. (**h**)
$HK \equiv H'K'$. (**m**. III 3)
$\measuredangle OKL (= \measuredangle OKH) \equiv O'K'L' (= \measuredangle O'K'H')$. (**j**)

ñ: Los triángulos OHK, $O'H'K'$ son congruentes. (**n**. T 12)
o: $\measuredangle HOK \equiv \measuredangle H'O'K'$. (**ñ**). □

Observaciones. 1. En uno y otro caso hay que construir la demostración de manera que se empleen en un momento dado la hipótesis sobre los ángulos.

2. La segunda parte se construyó de manera que el diagrama de la demostración es el mismo que para la primera parte.

3. La demostración de la segunda parte puede construirse de tal modo que se aplique el teorema 13.

4. Para estas construcciones es muy útil tanto el recorrido analítico como el sintético. El analítico, de la tesis hacia las hipótesis, "¿cuál puede ser el antecedente para un consecuente dado?", es muy indicado para deshacerse de la idea de arbitrariedad de una demostración; es cierto que el método sintético sirve igualmente. "Traedme los enunciados de los teoremas que ya encontraré yo las demostraciones" (decía Crisipo).

5. No olvidar que, en resumen, lo que se hace puede entenderse así:

$$\begin{array}{ll} \bullet\ \text{lo primero} & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{Premisas}} \\ \bullet\ \text{si lo primero entonces lo segundo} & \\ \hline \bullet\ \text{lo segundo} & \text{Conclusión} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bullet\ \text{lo segundo} & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{Premisas}} \\ \bullet\ \text{si lo segundo entonces lo tercero} & \\ \hline \bullet\ \text{lo tercero} & \text{Conclusión} \end{array}$$

No olvidar igualmente que el antecedente es suficiente para el consecuente.

Así para inferir la proposición b
es suficiente haber podido inferir a;
pero, puede haberse partido de a'.
Por el contrario, de a se sigue b necesariamente.
Igualmente de a' se seguiría b necesariamente.

Teorema 16. *Sea el ángulo (h, k) del plano α congruente con el ángulo (h', k') del plano α' y sea l una semirrecta de α que parta del vértice del ángulo (h, k) y vaya por el interior de este ángulo. Existe siempre una única semirrecta l' del plano α' que sale del vértice del ángulo (h', k'), que vaya por el interior de él y que verifique*

$$\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l'), \qquad \measuredangle(k, l) \equiv \measuredangle(k', l').$$

Paráfrasis del enunciado de Hilbert

H: (h, k) es un ángulo en un plano.
(h', k') es un ángulo en otro o en el mismo plano.
$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k')$.
l es una semirrecta que parte de O y es interior al ángulo (h, k).

T: Existe una semirrecta l', única, que sale de O', interior a $\measuredangle(h', k')$
$\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l')$.
$\measuredangle(k, l) \equiv \measuredangle(k', l')$.

Hilbert no da demostración. Se puede dar la que sigue:

Demostración.

a: A, A', B, B' son puntos de las rectas h, h', k, k', tales que
$OA \equiv O'A'$,
$OB \equiv O'B'$. (**H**. I 3, III 1).

b: $OA \equiv O'A'$. (**a**)
$OB \equiv O'B'$. (**a**)
$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k')$. (**H**)

c: Los triángulos OAB, $O'A'B'$ son congruentes. (**b**. T 12)

d: $AB \equiv A'B'$.
$\measuredangle OAB \equiv \measuredangle O'A'B'$. (**c**)
$\measuredangle OBA \equiv \measuredangle O'B'A'$. (**c**)

e: C es el (único) punto de AB donde l corta a AB. (**a**, **H**. T 8)

f: C' es el (único) punto de $A'B'$ tal que $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$. (**d**, **e**. III 1)

g: La semirrecta que parte de O' y corta a $A'B'$ en el punto C' es única e interior a $\measuredangle(h', k')$. (**f**. Definición de ángulo)

h: $OA \equiv O'A'$. (**a**)
$AC \equiv A'C'$. (**f**)
$\measuredangle OAC \equiv \measuredangle O'A'C'$. (**d**)

k: Los triángulos OAC, $O'A'C'$ son congruentes. (**h**. T 12)

l: $\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l')$. (**k**)

T: (**g**, **l**)

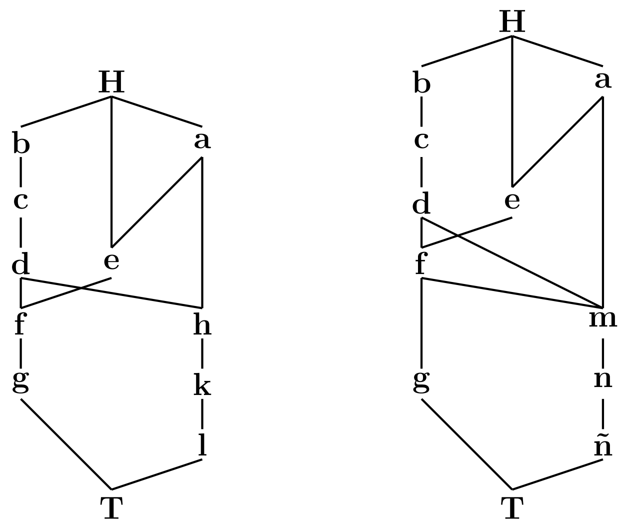
m: $OB \equiv O'B'$. (**a**)
$BC \equiv B'C'$. (**f**)
$\measuredangle OBC \equiv \measuredangle O'B'C'$. (**d**)

n: Los triángulos OBC, $O'B'C'$ son congruentes. (**m**. T 12)

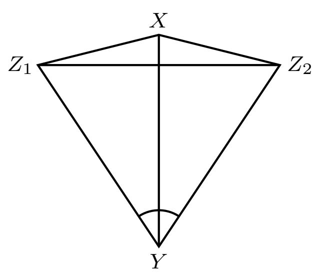
ñ: $\measuredangle(k, l) \equiv \measuredangle(k', l')$. (**n**)

T: (**g**, **ñ**) □

Diagrama de la demostración.



Teorema 17. *Sean los puntos Z_1 y Z_2, situados a distinto lado de una recta XY y supongamos válidas las congruencias $XZ_1 \equiv XZ_2$, $YZ_1 \equiv YZ_2$. Se verifica también que el ángulo XYZ_1 es congruente con el ángulo XYZ_2.*



Paráfrasis del enunciado y de la demostración de Hilbert

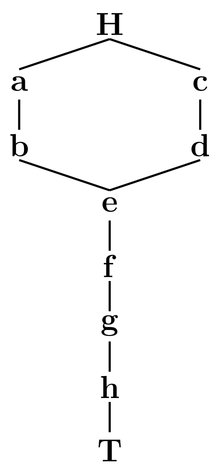
H: X, Y son puntos sobre y una recta.
Z_1, Z_2 son puntos a distinto lado de XY.
$XZ_1 \equiv XZ_2$, $YZ_1 \equiv YZ_2$.

T: $\measuredangle XYZ_1 \equiv \measuredangle XYZ_2$.

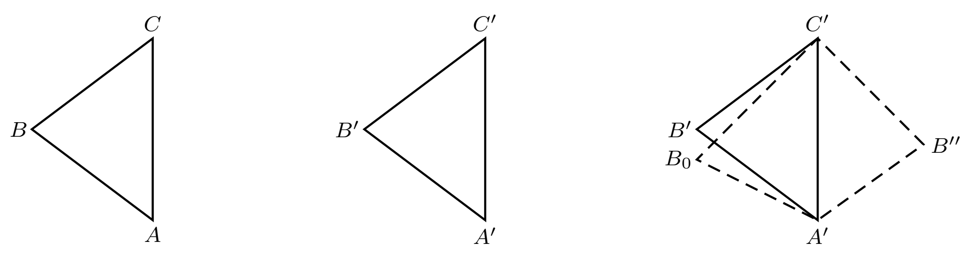
a: $XZ_1 \equiv XZ_2$. (**H**)
b: $\measuredangle XZ_1Z_2 \equiv \measuredangle XZ_2Z_1$. (**a**. T 11)

c: $YZ_1 \equiv YZ_2$. (**H**)
d: $\measuredangle YZ_1Z_2 \equiv \measuredangle YZ_2Z_1$. (**c**. T 11)
e: $\measuredangle XZ_1Y \equiv \measuredangle XZ_2Y$. (**b**, **d**. T 15)
f: $XZ_1 \equiv XZ_2$. (**H**)
$YZ_1 \equiv YZ_2$. (**H**)
$\measuredangle XZ_1Y \equiv \measuredangle XZ_2Y$. (**e**)
g: A los triángulos XZ_1Y, XZ_2Y se puede aplicar el axioma III 5. (**f**)
h: $\measuredangle XYZ_1 \equiv \measuredangle XYZ_2$. (**g**)
T: (**h**)

Diagrama de la demostración.



Teorema 18. *Si en dos triángulos los lados correspondientes son congruentes, entonces, los triángulos son congruentes.*



Paráfrasis del enunciado y de la demostración de Hilbert

H: $AB \equiv A'B'$.
$AC \equiv A'C'$.
$BC \equiv B'C'$.

T: Los triángulos ABC, $A'B'C'$ congruentes.

a: Transportar AC sobre $A'C'$ y el ángulo BAC de lado y lado de $A'C'$. (**H**. III 4)
b: B_0 es un punto de la región, respecto de $A'C'$, en que está B', tal que $A'B_0 \equiv AB$. (**a**. III 1)
c: B'' es un punto de la región opuesta, tal que $A'B'' \equiv AB$. (**a**. III 1)
d: $AB \equiv A'B_0$.
$AC \equiv A'C'$.
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B_0A'C'$. (**H**, **a**,**b**)

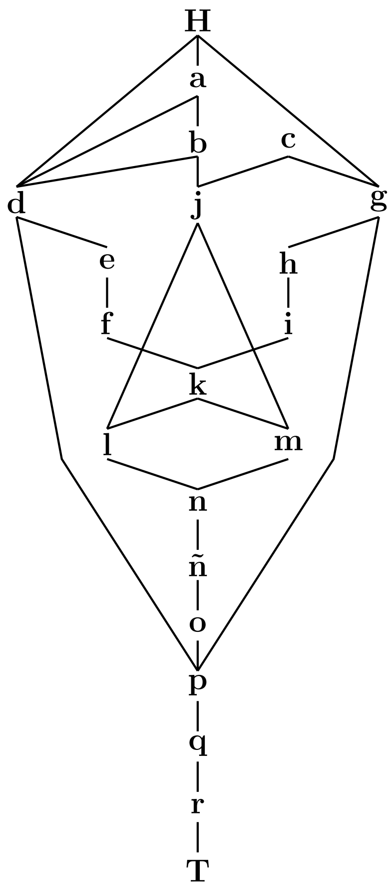
e: Los triángulos ABC, $A'B_0C'$ son congruentes. (**d**. T 12)
f: $BC \equiv B_0C'$. (**e**)
g: $A'B'' \equiv AB$. (**H**, **c**)
$A'C' \equiv AC$. (**H**, **c**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B''A'C'$. (**H**, **c**)

h: Los triángulos $A'B''C'$, ABC son congruentes. (**g**. T 12)
i: $B''C' \equiv BC$. (**h**)
j: $AB \equiv A'B' \equiv A'B_0 \equiv A'B''$. (**H**, **b**, **c**)
k: $BC \equiv B'C' \equiv B_0C' \equiv B''C'$. (**H**, **f**, **i**)
l: A los triángulos $A'B''C'$ y $A'B_0C'$ se puede aplicar el teorema 17. (**j**, **k**)
m: A los triángulos $A'B''C'$ y $A'B'C'$ se puede aplicar el teorema 17. (**j**, **k**)
n: $\measuredangle B''A'C' \equiv \measuredangle B_0A'C'$. (**l**, **m**)
$\measuredangle B''A'C' \equiv \measuredangle B'A'C'$.
ñ: $\measuredangle B_0A'C' \equiv \measuredangle B'A'C'$. (**n**. III 4)
o: $A'B_0 \equiv A'B'$. (**ñ**)
p: $\measuredangle B'A'C' \equiv \measuredangle BAC$. (**d**, **g**, **o**)
q: $AB \equiv A'B'$. (**H**)
$AC \equiv A'C'$. (**H**)
$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. (**p**)

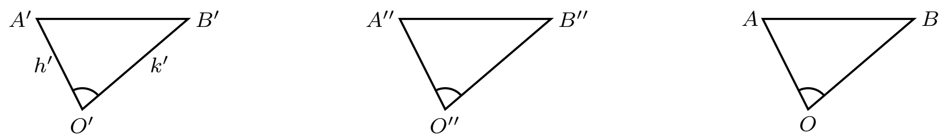
r: Los triángulos ABC, $A'B'C'$ son congruentes. (**q**. T 12)
T: (**r**)

Idea central de la demostración: Al aplicar un triángulo sobre el otro, solamente pueden coincidir de una manera.

Diagrama de la demostración.



Teorema 19. *Si dos ángulos, $\measuredangle(h',k')$, $\measuredangle(h'',k'')$, son congruentes con un tercero, $\measuredangle(h,k)$, también el ángulo, $\measuredangle(h',k')$, es congruente con el segundo, $\measuredangle(h'',k'')$.*



Nota. 1. Este teorema, que corresponde al axioma III 2, puede enunciarse así: ángulos congruentes con un tercero son congruentes entre sí.

2. La siguiente demostración es de A. Rosenthal. Math. Annalen. Tomo 71.

Demostración.
H: (h,k), (h',k'), (h'',k'') son ángulos dados.
$\measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h,k)$.
$\measuredangle(h'',k'') \equiv \measuredangle(h,k)$.

T: $\measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h'',k'')$.

a: Los puntos O, O', O'' son los vértices de los tres ángulos dados. (**H**)

b: A, A', A'' son puntos respectivamente sobre uno de los lados de cada uno de los tres ángulos dados tales que
$O'A' \equiv OA$.
$O''A'' \equiv OA$. (**H**, **a**. III 1)

c: B, B', B'' son puntos respectivamente sobre el otro de los lados de cada uno de los tres ángulos dados tales que
$O'B' \equiv OB$.
$O''B'' \equiv OB$. (**H**, **a**. III 1)

d: $O'A' \equiv OA$, $O''A'' \equiv OA$. (**H**, **b**, **c**)
$O'B' \equiv OB$, $O''B'' \equiv OB$. (**H**, **b**, **c**)
$\measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h,k)$, $\measuredangle(h'',k'') \equiv \measuredangle(h,k)$. (**H**, **b**, **c**)

e: Los triángulos $O'A'B'$, OAB son congruentes. Los triángulos $O''A''B''$, OAB son congruentes. (**d**. T 12)

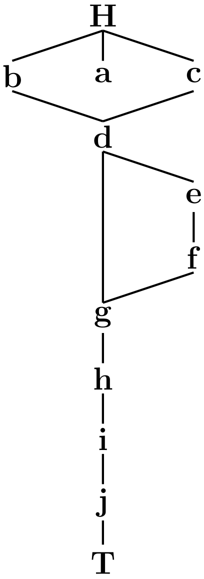
f: $A'B' \equiv AB$, $A''B'' \equiv AB$. (**e**)

g: $O'A' \equiv OA$, $O''A'' \equiv OA$. (**d**, **f**)
$O'B' \equiv OB$, $O''B'' \equiv OB$. (**d**, **f**)
$A'B' \equiv AB$, $A''B'' \equiv AB$. (**d**, **f**)

h: $O'A' \equiv O''A''$. (**g**. III 2, transitividad de $\equiv$)
$O'B' \equiv O''B''$. (**g**. III 2, transitividad de $\equiv$)
$A'B' \equiv A''B''$. (**g**. III 2, transitividad de $\equiv$)

i: Los triángulos $O'A'B'$, $O''A''B''$ son congruentes. (**h**. T 18)
j: $\measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h'',k'')$. (**i**)
T: (**j**) $\square$

Diagrama de la demostración.



Consecuencia del Teorema 19. (Simetría de la congruencia de ángulos).*La simetría de la congruencia de ángulos se enuncia así:*

$$\text{Si } \measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(h',k'), \text{ entonces, } \measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h,k).$$

Una propiedad se postula o se demuestra. No se postuló la simetría de la congruencia de segmentos ni la de la congruencia de ángulos; ya fue mostrado como se deriva la primera a partir del axioma o postulado III 2. Para derivar la simetría de la congruencia de ángulos se utiliza el teorema 19, cuya hipótesis es

$$\measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h,k), \quad \measuredangle(h'',k'') \equiv \measuredangle(h,k)$$

donde los ángulos son tres cualesquiera dados y cuya conclusión es

$$\measuredangle(h',k') \equiv \measuredangle(h'',k'').$$

Si se toman los ángulos así:

- el primer ángulo (h,k) es el ángulo (h',k'),
- el segundo ángulo (h',k') es el mismo (h',k'),
- el tercer ángulo (h'',k'') es el ángulo (h,k),

entonces, la conclusión se lee así: **T**: $\measuredangle(h', k') \equiv \measuredangle(h, k)$.

Se tiene por lo tanto, el enunciado de la simetría para la congruencia de ángulos. O como aclara el texto de Hilbert: Si un ángulo es congruente con otro, los dos ángulos son congruentes entre sí.

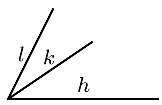
Además: "En particular, desde ahora, pueden expresarse los teoremas 12-14 en forma simétrica". He aquí tales enunciados.

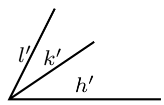
T 12. Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$ cuando son válidas las congruencias: $A'B' \equiv AB$, $A'C' \equiv AC$, $\measuredangle B'A'C' \equiv \measuredangle BAC$.

T 13. Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$ cuando son válidas las congruencias $A'B' \equiv AB$, $\measuredangle B'A'C' \equiv \measuredangle BAC$, $\measuredangle A'B'C' \equiv \measuredangle ABC$.

T 14. Si un ángulo $A'B'C'$ es congruente con un ángulo ABC, entonces, el ángulo suplementario al primero, $C'B'D'$, es congruente con el suplementario al segundo, CBD.

Teorema 20 (Fundamento para la comparación de la magnitud de los ángulos)**.** *Sean dos ángulos cualesquiera (h, k) y (h', l'). Si al transportar al ángulo (h, k) sobre h' del lado de l', resulta una semirrecta interior k', el transporte del ángulo (h', l') sobre h, del lado de k, da una semirrecta exterior l. Y recíprocamente.*





Paráfrasis del enunciado y de la demostración de Hilbert

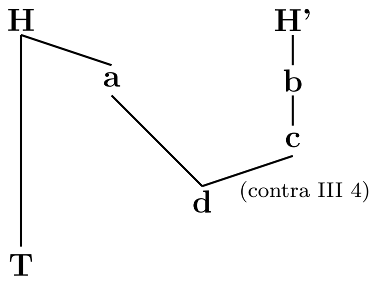
H: (h, k), (h', l') son ángulos.
k' es una semirrecta, interior a (h', l'), tal que $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k')$.

T: Existe una semirrecta l tal que k es semirrecta interior al ángulo (h, l).

a: $\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l')$. (**H**)
H': **H**
no **T**

b: no **T** $\Leftrightarrow$ existe l interior a (h, k). (**H'**)
c: Existe l'', interior a (h', k') tal que $\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l'')$. (**b**. T 16)

d: $\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l')$. (**a**)
$\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l'')$. (**c**)
$l' \neq l''$. (contra III 4).
T:



Ejercicio. Redactar la recíproca del teorema 20 y su demostración.

Si dados los ángulos (h, k) y (h', l') existe k' interior al ángulo (h', l') tal que $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k')$ entonces, se dice que el ángulo (h, k) es inferior al ángulo (h', l'); en símbolos: $\measuredangle(h, k) < \measuredangle(k', l')$.

Si la semirrecta k' fuere exterior a (h', l') se diría que el ángulo (h, k) es superior al (h', l'), en símbolos: $\measuredangle(h, k) > \measuredangle(h', l')$.

Así, dados dos ángulos α y β se tiene solo uno de los tres casos:

- $\alpha < \beta$ y $\beta > \alpha$
- $\alpha \equiv \beta$
- $\alpha > \beta$ y $\beta < \alpha$.

La comparación de magnitud de ángulos es transitiva, es decir, de cada uno de los tres pares de hipótesis

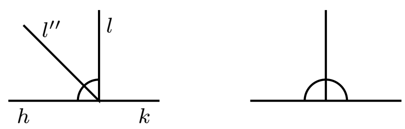
- $\alpha > \beta \quad \beta > \gamma$
- $\alpha > \beta \quad \beta \equiv \gamma$
- $\alpha \equiv \beta \quad \beta > \gamma$

se sigue: $\alpha > \gamma$.

La comparación de la magnitud de segmentos tiene propiedades análogas, que resultan de los axiomas II, III 1-3 y de la unicidad del transporte de segmentos.

Observación. Hilbert demuestra el teorema 21, con base en la comparación de la magnitud de ángulos (T 20) y observa que Euclides colocó, equivocadamente, al teorema 21 entre los axiomas. (Es el postulado IV en *Elementos*, diferente, desde luego, del axioma o noción común IV). Una nota al pie de la página 23 de la edición alemana (nota que figura igualmente en la traducción francesa, p. 31) precisa que la idea de la demostración aparece ya en Proclo, comentador de Euclides, sin utilización del contenido del teorema 14, sino de la hipótesis de que por transporte, la imagen de un ángulo recto es un ángulo recto. En la página 27 de la edición española, hay una anotación según la cual Legendre demostró este teorema con la suposición de que los ángulos forman un conjunto continuo.

Teorema 21. *Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.*



Paráfrasis del enunciado y de la demostración del teorema 21 en Hilbert

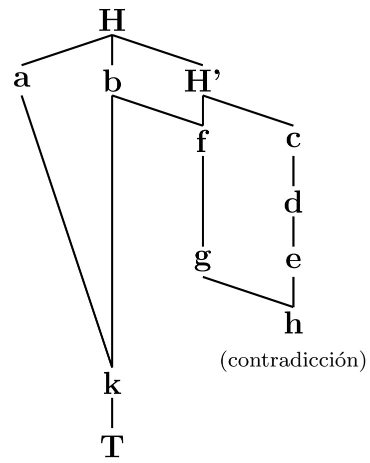
Adaptada de una idea de Proclo.

H: (h,l), (k,l) son ángulos rectos.
T: $\measuredangle(h,l) \equiv \measuredangle(k,l)$.

a: (h,l), (k,l) son ángulos rectos, es decir, congruentes con su suplementario, $\measuredangle(h,l) \equiv \measuredangle(k,l)$.
b: (h',l'), (k',l') son ángulos rectos, es decir, congruentes con su suplementario $\measuredangle(h',l') \equiv \measuredangle(k',l')$.
H': **H**.
$\measuredangle(h,l) \not\equiv \measuredangle(k',l')$
c: existe l'', semirrecta entre h y l tal que $\measuredangle(h,l'') \equiv \measuredangle(h,l')$. (**H'**)
d: $\measuredangle(h,l'') < \measuredangle(h,l)$
$\measuredangle(h,l) \equiv \measuredangle(k,l)$
$\measuredangle(k,l) < \measuredangle(k,l'')$. (**a**, **c**. T 20)
e: $\measuredangle(h,l'') < \measuredangle(k,l'')$. (**d**)

f: $\measuredangle(h, l'') \equiv \measuredangle(h', l')$. (**c**)
$\measuredangle(h', l') \equiv \measuredangle(k', l')$. (**b**)
$\measuredangle(k', l') \equiv \measuredangle(k, l'')$. (T 14)
g: $\measuredangle(h, l'') \equiv \measuredangle(k, l'')$. (**f**)
h: Las proposiciones **e**, **g** son contradictorias.
k: $\measuredangle(h, l) \equiv \measuredangle(h', l')$.
T: (**k**).

Diagrama de la demostración del teorema 21.



Observación. Hilbert había anotado que el teorema es sencillo, sin embargo, la demostración ha resultado complicada porque para obtener una contradicción ha habido que construir sendas situaciones donde se aplique el teorema 14, por una parte, el 20 por otra; así, ha habido que desdoblar la situación inicial, en la cual solo había un par de ángulos rectos, y considerar dos pares de ángulos rectos; con el auxilio del segundo par se pueden aplicar los teoremas 14 y 20. La construcción está hecha de manera que la conclusión solo depende del par inicial.

La idea de la demostración se puede describir así: dos ángulos rectos son congruentes. Si se tiene un par de ángulos rectos hay que mostrar que son congruentes. Si se tiene un segundo par de ángulos rectos (cada uno congruente con su suplementario) es posible suponer que el primer ángulo recto del segundo no es congruente con el primer ángulo del primer par. Entonces se sigue una contradicción.

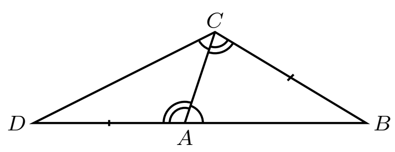
Explicación. Un ángulo que es mayor que su suplemento o sea mayor que un ángulo recto se llama *ángulo obtuso.*

Un ángulo que es menor que su suplemento, o sea menor que un ángulo recto se llama *ángulo agudo.*

Un teorema fundamental que en Euclides tiene ya un papel importante y del cual se sigue una serie de importantes consecuencias es el *teorema del ángulo exterior.*

Explicación. $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$, $\measuredangle CAB$, ángulos de un triángulo ABC, se llaman ángulos del triángulo. Los suplementos de estos ángulos se llaman *ángulos externos.*

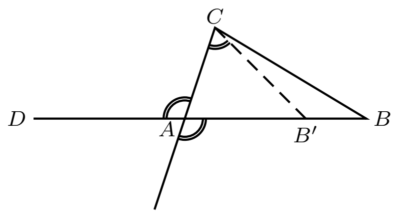
Teorema 22 (Teorema del ángulo externo)**.** *Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos no adyacentes a él.*



Demostración. Sea CAD un ángulo externo del triángulo ABC. Puede ser escogido D de modo que $AD \equiv CB$. Demostramos primero que $\measuredangle CAD \neq \measuredangle ACB$. En efecto, si fuera $\measuredangle CAD \equiv \measuredangle ACB$, por la congruencia $AC \equiv CA$ y por el axioma III 5, se tendría: $\measuredangle ACD \equiv \measuredangle CAB$.

Por los teoremas 14 y 19 se seguiría entonces que el ángulo ACD sería congruente con el suplemento del ángulo ACB.

Por el axioma III 4 estaría D sobre la recta CB, en contra del axioma I 2. Así que $\measuredangle CAD \neq \measuredangle ACB$.



Ahora bien. No puede ser que $\measuredangle CAD < \measuredangle ACB$. Porque entonces el transporte del ángulo externo CAD sobre CA con vértice en C, del lado en que está B, haría ir uno de los lados por el interior del ángulo ACB, lado que cortaría al AB en un punto B'. En el triángulo $AB'C$, el ángulo externo CAD sería congruente con el ángulo ACB'. Pero esto, ya se ha mostrado, no es posible. Queda solamente la posibilidad: $\measuredangle CAD > \measuredangle ACB$.

Análogamente se obtiene que el ángulo opuesto por el vértice del ángulo CAD es mayor que el ángulo ABC y por la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice y la transitividad de la comparación de magnitudes de ángulos resulta que

$$\measuredangle CAD > \measuredangle ABC$$

con lo cual el enunciado queda completamente demostrado. □

Paráfrasis de la demostración de Hilbert del teorema del ángulo externo

H: ABC es un triángulo.
CAD es ángulo externo del triángulo ABC.

T: $\measuredangle CAD > \measuredangle ABC$.
$\measuredangle CAD > \measuredangle ACB$.

a: $\measuredangle CAD \not\equiv \measuredangle ACB$.

H': **H**.
$\measuredangle CAD \equiv \measuredangle ACB$.

a': $AD \equiv BC$. (III 1)
$AC \equiv CA$. (III 2 consecuencia)
$\measuredangle CAD \equiv \measuredangle ACB$. (**H'**)

b': A los triángulos ACB y CAD se puede aplicar III 5. (**a'**)

c': $\measuredangle ACD \equiv \measuredangle CAB$. (**b'**. III 5)

d': CAD es ángulo suplementario del ángulo CAB. (**H'**)

e': El ángulo suplementario del ángulo CAD $\equiv$ ángulo suplementario del ángulo ACB. (**c'**, **d'**. T 14)

f': Ángulo $ACD \equiv$ ángulo suplementario del ángulo ACB. (**e'**. T 19)

g': D está sobre la recta que pasa por B y por C. (**f'**)

h': Los puntos B y D determinan dos rectas distintas: la que pasa por C y por D y la que pasa por A y por D. (**H**, **g'**)

i': **h'** contradice al axioma I 2. (**h'**)

b: $\measuredangle CAD > \measuredangle ACB$.

H': **H**
$\measuredangle CAD < \measuredangle ACB$.

a': Existe B' tal que $\measuredangle CAD \equiv \measuredangle ACB'$. (**H'**)

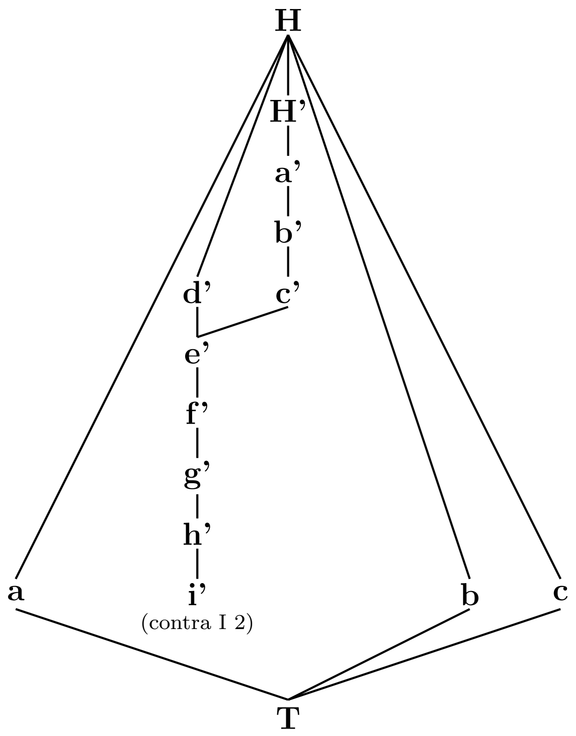
b': Imposible. (**a**)

c: $\measuredangle CAD > \measuredangle ABC$.
(Trasponer el razonamiento **a-b**).

T: (**a**, **b**, **c**).

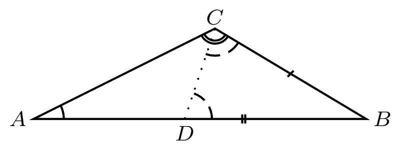
Observación. La idea de la demostración es: el ángulo externo es mayor que uno interior no adyacente porque al suponer que es igual se sigue contradicción y al suponer que es menor se vuelve una segunda vez a suponer que es igual. Este tipo de argumentación tiene parentesco con la empleada por Euclides, I 17. En *Elementos* hay dos teoremas del ángulo externo: I 16, I 32.

Diagrama de la demostración.



Algunas consecuencias del teorema del ángulo externo

Teorema 23. *En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.*

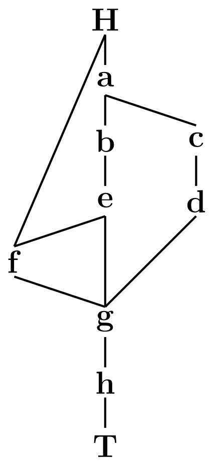


Demostración. (Paráfrasis de la dada por Hilbert).

H: ABC es un triángulo tal que $AB > BC$.
T: $\measuredangle ACB > \measuredangle BAC$.

a: D es un punto entre A y B tal que $BD \equiv BC$. (**H**. III 1)
b: BCD es triángulo isósceles. (**a**)
c: BDC es ángulo externo del triángulo ADC. (**a**)
d: $\measuredangle BAC < \measuredangle BDC$. (**c**. T 22)
e: $\measuredangle BDC \equiv \measuredangle BCD$. (**b**. T 11)
f: CD es interior al ángulo BCA. (**a**, **e**)
g: $\measuredangle BAC < \measuredangle BDC \equiv \measuredangle BCD < \measuredangle BCD + \measuredangle DCA \equiv \measuredangle BCA$. (**d**, **e**, **f**. T 20)
h: $\measuredangle BAC < \measuredangle BCA$. (**g**)
T: (**h**) □

Diagrama de la demostración.



Teorema 24. *Un triángulo con dos ángulos iguales o congruentes es isósceles.*

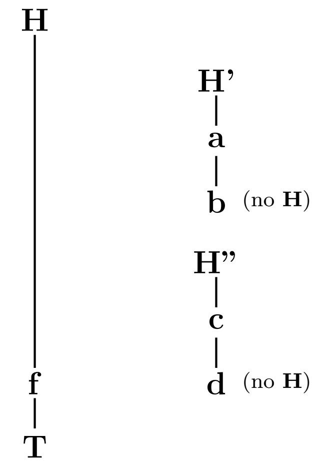
Observación. Hilbert hace la anotación de que el enunciado de este teorema es el recíproco del teorema 11 y que es una consecuencia inmediata del teorema 23. Lo cual puede hacerse manifiesto de la siguiente manera:

H: ABC es un triángulo tal que $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB$.
T: $AB \equiv AC$.

H': **H**.
$AB > AC$.

a: $\measuredangle ACB > \measuredangle ABC$. (**H'**. T 23)
b: no **H**. (**a**)
H": **H**
$AC > AB$.
c: $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. (**H"**. T 23)
d: no **H**. (**c**)
f: $AB \equiv AC$.
T: (**f**).

Diagrama de la demostración.



Observación. Hilbert escribe que con base en el teorema del ángulo externo, se obtiene de manera sencilla, un complemento al segundo teorema de congruencia de triángulos. Es la segunda parte del teorema 26 del libro I de *Elementos*. Puede hacerse la misma demostración de Euclides.

Teorema 25. *Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes en el caso de que se satisfagan las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad \measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B', \qquad \measuredangle BCA \equiv \measuredangle B'C'A'.$$

Teorema 26. *Todo segmento es bisecable.*

Paráfrasis de la demostración de Hilbert

H: AB es un segmento.
C, D son puntos situados a lado y lado de AB.

(h, k) es un ángulo tal que $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle BAC \equiv \measuredangle ABD$.
$AC \equiv BD$.

T: Hay un punto E entre A y B tal que $AE \equiv EB$.

a: CD corta a AB en un punto E. (**H**. T 3)
b: E es distinto de A y de B. (**a**. T 22)
c: B es exterior a AE. (**b**)

H': **H**.
B está entre A y E, en B_1.
$\mathbf{c}_1$: AB_1D es ángulo externo del triángulo B_1ED. (**H'**)
$\mathbf{c}_2$: $\measuredangle AB_1D > \measuredangle B_1ED$. ($\mathbf{c}_1$. T 22)
$\mathbf{c}_3$: B_1ED es ángulo externo del triángulo ACE. (**H'**)
$\mathbf{c}_4$: $\measuredangle B_1ED > \measuredangle B_1AC$. ($\mathbf{c}_3$. T 22)
$\mathbf{c}_5$: $\measuredangle AB_1D > \measuredangle B_1ED > \measuredangle B_1AC$. ($\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_4$. T 20)
no **H**. (Imposible)

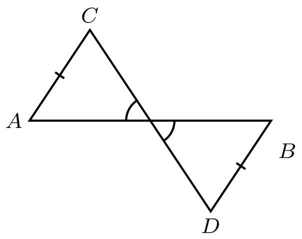
c: B es exterior a AE. (**b**. Demostración por absurdo)
d: A es exterior a EB. (**b**. Trasponer la argumentación en **c**)
e: E está entre A y B. (**c**, **d**. T 4)
f: $\measuredangle AEC \equiv \measuredangle BED$. (**e**. T 14 - ángulos opuestos por el vértice)
g: $AC \equiv BD$. (**H**)
$\measuredangle EBD \equiv \measuredangle EAC$. (**H**)
$\measuredangle BED \equiv \measuredangle AEC$. (**f**)

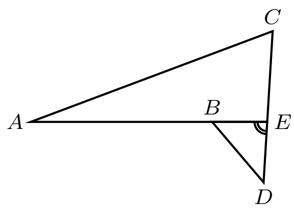
h: Los triángulos ACE y BDE son congruentes. (**g**. T 25)
i: $AE \equiv EB$. (**h**)
T: (**i**).

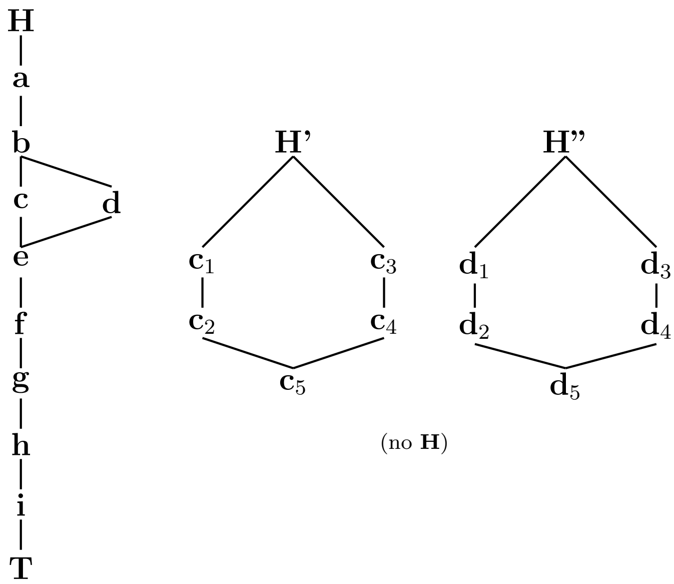
Observación. Este es el teorema 10 de *Elementos*.

Diagrama de la demostración.
Consecuencia de los teoremas 11 y 26.

Todo ángulo es bisecable. (*Elementos*. I 9).







Observación. Hasta aquí Hilbert ha hecho teoría de congruencia de segmentos y de ángulos referida posteriormente a triángulos. Ahora la va a extender a *figuras planas* en general (T 27) y a *figuras en el espacio* (T 28). Baste aquí ver el detalle de lo concerniente a las figuras planas dado el parentesco de temas con los de los teoremas del libro I que intervienen en la demostración del teorema de Pitágoras.

Explicación. Sean

- A, B, C, D, $\ldots$, K, L puntos de una recta a.
- A', B', C', D', $\ldots$, K', L' puntos de una recta a'.
- $AB \equiv A'B'$.
  $AC \equiv A'C'$.
  $BC \equiv B'C'$.
  $\ldots$.
  $KL \equiv K'L'$.

Se dice que:

- La serie de puntos A, B, C, D, $\ldots$, K, L es congruente con la serie de puntos A', B', C', D', $\ldots$, K', L' o que las dos series de puntos son congruentes entre sí.
- Los pares: A y A'; B y B'; $\ldots$; L y L', se llaman puntos *correspondientes* de las series puntuales congruentes.
- ¿Hubiera bastado dar las congruencias $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ para concluir por el axioma III 3 que $AC \equiv A'C'$?

Teorema 27. *Si la primera de dos series puntuales congruentes A, B, $\ldots$, K, L y A', B', $\ldots$, K', L' está ordenada de tal manera que B está entre A por un lado y C, D, $\ldots$, K, L por el otro; C entre A, B por un lado, y, D, $\ldots$, K, L por el otro; y así sucesivamente. Entonces, los puntos A', B', $\ldots$, K', L' están ordenados de la misma manera, es decir, B' está entre A' por una parte y C', D', $\ldots$, K', L' por la otra; C' entre A', B' por una parte, y, D', $\ldots$, K', L' por la otra; y así sucesivamente.*

El tema del Teorema 27 se refiere al orden sobre un par de rectas, como todo lo referente al orden, no figura en *Elementos*.

Hilbert no da la demostración; es en principio sencilla en cuanto la idea clave no puede ser otra que la de combinar el orden y la congruencia, más concretamente, hay que entrelazar el teorema 6, referente al orden, con los primeros tres axiomas de congruencia. Se vio, empero, a propósito del teorema 6 que la redacción puede volverse compleja debido a la indeterminación del número de puntos.

De cualquier modo no debe perderse de vista la idea para construir la demostración. Hay que mostrar que si la primera secuencia de puntos está ordenada de acuerdo con el teorema 6, entonces, la segunda secuencia hecha con extremos de segmentos congruentes con la primera, está igualmente ordenada de acuerdo con el teorema 6.

Explicación. Un número finito cualquiera de puntos se llama una *figura*. Si todos los puntos de la figura están en un plano, la figura se llama *plana*.

Dos figuras se dicen *congruentes*, cuando sus puntos pueden ordenarse por parejas de tal manera que las parejas de *segmentos* y *ángulos* resultantes de aquella ordenación sean entre sí congruentes.

Las figuras congruentes tienen, según los teoremas 14 y 27, las siguientes propiedades:

Si tres puntos de una figura están sobre una recta, entonces, en cada figura congruente los puntos correspondientes están sobre una recta.

La ordenación de puntos en planos correspondientes sobre rectas correspondientes es la misma en figuras congruentes. Lo mismo vale para secuencias de puntos correspondientes sobre rectas correspondientes.

El teorema de congruencia más general para el plano y para el espacio se expresa como sigue:

Teorema 28. *Si* $(A, B, C, \ldots, L)$ *y* $(A', B', C', \ldots, L')$ *son dos figuras planas congruentes y* P *representa un punto del plano de la primera, se puede encontrar siempre un punto* P' *en el plano de la segunda figura, de tal suerte que* $(A, B, C, \ldots, L, P)$ *y* $(A', B', C', \ldots, L', P')$ *sean, a su vez, congruentes. Cuando la figura* $(A, B, C, \ldots, L)$ *contiene, al menos, tres puntos no situados en línea recta, la construcción de* P' *solo es posible de una manera.*

Hilbert no da demostración para el teorema. Para escribirla completa parece no haber sino el problema de la indeterminación del número de letras, como en los teoremas 6 y 27. La unicidad de la construcción de P se debe a la presencia de un ángulo, si hay tres puntos no alineados.

Una situación análoga a la del teorema 28 es la del teorema 29 que enuncia para tres dimensiones lo que el 28 para dos dimensiones.

El teorema 29 tiene mucho alcance como lo precisa el mismo Hilbert: todos los hechos espaciales de la congruencia y con ellos las propiedades del *movimiento* en el espacio se derivan de los 17 axiomas de incidencia, orden y congruencia.

Teorema 29. *Si* $(A, B, C, \ldots, L)$ *y* $(A', B', C', \ldots, L')$ *son dos figuras congruentes y* P *es un punto cualquiera, se puede encontrar siempre un punto* P' *tal que las figuras* $(A, B, C, \ldots, L, P)$ *y* $(A', B', C', \ldots, L', P')$ *sean congruentes. Cuando la figura* $(A, B, C, \ldots, L)$ *contiene, al menos, cuatro puntos no situados en el mismo plano, la construcción de* P' *solo es posible de una manera.*

El grupo de axiomas IV: axioma de las paralelas

(Parágrafo 7).

Sea α un plano cualquiera, a una recta cualquiera en α, A un punto en α exterior a a. Tracemos en α una recta c que pase por A y corte a a; después en α una recta b por A, de tal suerte que la recta c corte a las rectas a y b bajo ángulos correspondientes iguales. Se deduce fácilmente del teorema (22) del ángulo exterior, que las rectas a, b no tienen ningún punto común, esto es, en un plano por un punto A exterior a una recta a se puede trazar siempre una recta, la cual no corta a la recta a. [Teorema I 27 de *Elementos*: existe por lo menos].

Explicación. Dos rectas se llaman paralelas, cuando están en un plano y no se cortan.

El axioma de las paralelas dice ahora:

IV. (Axioma de Euclides). Sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a: en el plano determinado por a y A existe a lo más una recta que pasa por A y no corta a a.

De acuerdo con lo que antecede y con base en el axioma de las paralelas, reconocemos que por un punto exterior a una recta hay exactamente una paralela a esa recta.

El axioma de las paralelas es equivalente a la siguiente proposición:

Si dos rectas a, b en un plano no encuentran a una tercera recta c del mismo plano, tampoco se encuentran entre sí. En efecto: si a, b tuvieran un punto común, A, se tendría en el mismo plano dos rectas a, b que pasan por A y que no cortan a c; lo cual contradice al axioma de las paralelas. Inversamente, dicho axioma IV se puede deducir de una manera igualmente sencilla del anterior resultado. [Por ello se dice que son equivalentes].

El axioma de las paralelas es un axioma plano.

La introducción del axioma de las paralelas simplifica los fundamentos y aligera la construcción de la geometría en proporción importante. Es decir, si añadimos el de las paralelas a los axiomas de congruencia llegamos con facilidad a los conocidos resultados:

Teorema 30. *Cuando dos paralelas son cortadas por una tercera recta, entonces los ángulos correspondientes y alternos son iguales. Y recíprocamente, la congruencia de los ángulos correspondientes, o de los alternos, tiene como consecuencia que las rectas sean paralelas. [Primera y segunda parte del teorema I 29 de* Elementos*].*

Teorema 31. *Los ángulos de un triángulo suman dos rectos. [Tercera parte del teorema I 29 de* Elementos*].*

Explicación. Dado un punto M cualquiera en un plano a, se llama *circunferencia* al conjunto de todos los puntos A en a tales que los segmentos MA son congruentes entre sí. El punto M se llama *centro* de la circunferencia.

Fundándose en la anterior definición se deduce fácilmente, con ayuda de los grupos de axiomas III - IV, los conocidos teoremas sobre la circunferencia, en especial el de la posibilidad de construcción de una circunferencia por tres puntos dados cualesquiera no alineados, así como el teorema sobre la congruencia de todos los ángulos inscritos en una circunferencia sobre la misma cuerda y el teorema de los ángulos del cuadrilátero inscrito.

Cuestiones

1. ¿Adopta Hilbert el enunciado de Euclides para el quinto postulado? ¿Alguno de sus substitutos? ¿Cuál?
2. ¿La proposición equivalente que cita Hilbert tiene algo que ver con el enunciado de Proclo?
3. ¿Esta vez está bien decir axioma de las paralelas?
4. Comparar los teoremas 30 y 31 con los correspondientes de Euclides.
5. Igualmente la definición de circunferencia con la de Euclides.

El grupo de axiomas V: axiomas de continuidad

(Parágrafo 8).

V 1. (Axioma de la medida o de Arquímedes). Si AB y CD son dos segmentos cualesquiera, existe un número n tal que el transporte del segmento CD repetido n veces a partir de A sobre la semirrecta determinada por B conduce a un punto situado por el otro lado de B.

V 2. (Axioma de la compleción lineal). El conjunto de los puntos de una recta provisto de las relaciones de orden y de congruencia, no es susceptible de ampliación alguna en la que sean válidas las relaciones precedentes y las propiedades fundamentales de orden lineal y de congruencia deducidas de los axiomas I-III y del axioma y V 1.

Se tienen así, en conjunto, los siguientes tres tipos de propiedades:

- ordenación: axiomas II 1-3, y, teorema 5.
- congruencia: axiomas III 1-3.
- unicidad del transporte de segmentos.

En caso de haber ampliación del conjunto de puntos, las relaciones de ordenación y congruencia deben seguir valiendo sobre el conjunto aumentado.

Se observa que el axioma I 3 se mantiene luego de cada extensión y que la conservación de la validez del teorema 3 a través de las repetidas ampliaciones es una consecuencia de la conservación del axioma de Arquímedes V 1.

El cumplimiento del axioma de compleción está supeditado de manera esencial al hecho de que entre los axiomas cuyo mantenimiento se exige esté el de Arquímedes. Se puede mostrar, en efecto: a un conjunto de puntos de una recta que satisface a los axiomas y teoremas de ordenación y congruencia citados antes pueden añadirse siempre puntos de tal modo que en el conjunto ampliado obtenido se cumplan los axiomas en cuestión. Un axioma de compleción, cuando solamente se mantuvieran los axiomas y teoremas susodichos, pero no el de Arquímedes o alguno otro equivalente, conduciría a una contradicción.

Ambos axiomas de continuidad son axiomas lineales.

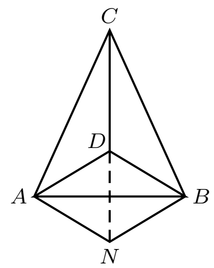
Teorema 32 (Teorema de la compleción)**.** *Los elementos (puntos, rectas, planos) de la geometría constituyen un conjunto que no es susceptible de ampliación alguna mediante puntos, rectas y planos con el mantenimiento de los axiomas de pertenencia, ordenación, congruencia y Arquímedes, precisamente todos juntos.*

Demostración. Los elementos existentes antes de la ampliación son designados como elementos antiguos y como nuevos los provenientes debido a la ampliación.

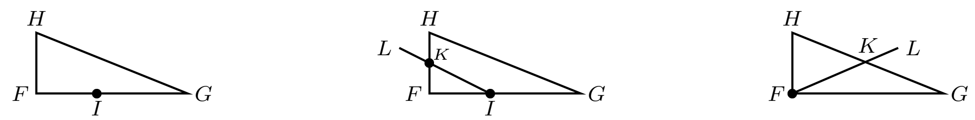
El supuesto de nuevos elementos conduce inmediatamente al supuesto de un punto nuevo, N. □

Paráfrasis de la demostración de Hilbert

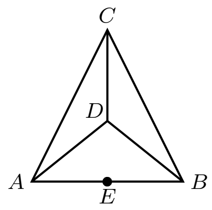
H': Existen puntos nuevos L, N.
a: Existen cuatro puntos no coplanares A, B, C, D. (I 8)
b: (Hipótesis) A, B, N no son colineales.
c: A, B, N y A, C, D determinen planos distintos. (**a**, **b**. I 4-5)
d: Los planos ABN y ACD tienen otro punto común E, distinto de A. (**c**. I 7)
e: E no pertenece a la recta AB.
f: Si E es un punto antiguo, entonces, en el plano antiguo, ABE, hay un punto nuevo, N. (**e**)
g: Si E es un punto nuevo, entonces, hay un punto nuevo, E, en el plano antiguo, ACD. (**e**)



h: F, G, H son puntos antiguos no colineales. I es un punto antiguo del segmento FG.



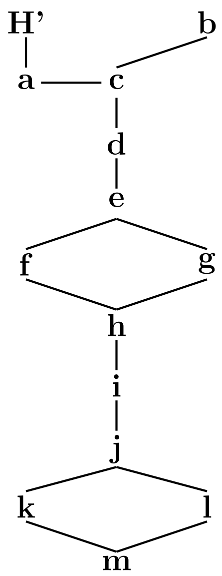
i: IL es la recta determinada por el punto antiguo I y el nuevo L. (**h**. I 1-2)
j: Las rectas IL, FH o las rectas IL, GH se cortan en un punto K. (**i**. II 4)
k: Si K es punto antiguo, entonces, la recta antigua IK tiene un punto nuevo, L. (**j**)
l: Si K es un punto nuevo, entonces, hay un punto nuevo en una de las rectas antiguas FH, GH. (**j**)
m: **k** y **l** contradicen el axioma de la compleción lineal. Lo cual es imposible.



Demostración de la proposición **e**, por reducción a imposible.

e': E pertenece a la recta AB.
e": Los puntos AE pertenecen al plano ACD. (**d**)
e"': El punto B de la recta AE pertenece al plano ACD. (**e'**, **e"**)
e"": Los puntos A, B, C, D son coplanares. (**e"'**. Contra **a**)

Diagrama de la demostración del teorema 32.



(contra V 2)

Por tanto, no **H'**.

Nota. La proposición **h** estudia tanto la situación descrita por la proposición **f**, como por la proposición **g**. Esta tiene lugar en un plano; así que F, G, H hacen ahora el papel de una terna formada a partir de los cuatro puntos A, B, C, D. El problema es: ¿puede haber un punto nuevo en un plano antiguo? La idea de la demostración consiste en reducir esta consideración a la imposible (contradice el axioma V 2) de si puede haber un punto nuevo sobre una recta antigua.

El mantenimiento de algunos axiomas puede no ser exigido pero es necesario postular el del axioma I 7. Es posible mostrar, en efecto, que a un conjunto de elementos pueden añadirse puntos, rectas y planos de manera que se satisfagan los axiomas, salvo el I 7. Así, un axioma de compleción que no esté condicionado por el axioma I 7 o por uno equivalente, conduciría a una contradicción.

El axioma de la compleción no es una consecuencia del axioma de Arquímedes. En efecto: el solo axioma de Arquímedes no es suficiente para mostrar que mediante la utilización de los axiomas I-IV, nuestra geometría sea idéntica con la geometría analítica cartesiana ordinaria (véanse los parágrafos 9 y 12 de Fundamentos de la Geometría). Por el contrario, al adjuntar el axioma de compleción, aunque este axioma no contenga ningún enunciado acerca del concepto de convergencia, es posible establecer la existencia de un límite análogo a una cortadura de Dedekind y el teorema de Bolzano sobre la existencia de puntos de condensación y con ello la identificación de la geometría resultante con la geometría cartesiana.

Con las consideraciones precedentes, el postulado de la continuidad resulta disociado en dos componentes esencialmente distintas, es a saber, en el axioma de Arquímedes, al cual compete preparar el postulado de continuidad, y en el axioma de compleción, que constituye la parte capital del sistema entero de los axiomas.

Notas. 1. En la traducción de la séptima edición alemana, podía leerse el siguiente encarecimiento del axioma V 2:

> “Quiero decir: no es posible añadir a este sistema de puntos otros puntos, de modo que en el conjunto que se obtiene por la ampliación queden satisfechos todos los axiomas. La conservación de todos los axiomas debe comprenderse de este modo: después de la ampliación, deben continuar siendo válidos todos los axiomas en el sentido expuesto, esto es, en tanto que dos relaciones consideradas entre los puntos no sean alteradas... Así, por ejemplo, si un punto A antes de la ampliación ha de estar situado entre dos, B y C, también estará lo mismo después de la ampliación; y segmentos congruentes, seguirán siéndolo con la ampliación”.

(Al transcribir la traducción, se han cambiado algunas palabras para estar acorde con la versión presentada directamente del texto alemán de 1987).

2. Sistemáticamente, se transcribe ‘conjunto de puntos’, cuando el texto original dice System der Punkte o expresiones equivalentes. Parece que no se conoce explicación de por qué Hilbert no adoptó en esta obra el término adoptado por Cantor para ‘conjunto’, sino que siempre escribe ‘System’.

3. "Compleción. f. Acción y efecto de completar. Calidad y condición de completo. (1984. *Diccionario de la lengua española.* Real Academia Española)".

   No figuran ni en este diccionario, ni en el *Diccionario panhispánico de dudas*, 2005, voces que tratan de poner en uso traductores y tratadistas: completez, completud, completitud.

Complemento

Es digna de conocer la sencilla narración que hace Dedekind de su personal estudio de la continuidad que culminó en las cortaduras de Dedekind a las que alude Hilbert. Hela aquí tomada de un célebre trabajo. pp. 10-20. Richard Dedekind. *Essays on the theory of numbers.* (1872). 1963. Dover Publications New York. 115 pp.

Así como los números negativos y los racionales son formados mediante una nueva creación y así como las leyes de operación con estos números deben y pueden ser reducidas a las leyes de operación con números naturales, de manera análoga debemos tratar de definir completamente los números irracionales mediante los números racionales únicamente. La cuestión es cómo hacerlo.

La comparación del dominio de los números racionales con una recta conduce al reconocimiento de la existencia de huecos y de una cierta incompleción o discontinuidad de aquellos, mientras que la línea recta tiene compleción, ausencia de huecos y continuidad. ¿En qué consiste tal continuidad? Todo depende de la respuesta a esta pregunta y solo mediante ella obtendremos una base científica para la investigación de *todos* los dominios continuos. Mediante vagas observaciones acerca de la conexión ininterrumpida en las partes más pequeñas obviamente nada se gana; el problema es indicar una característica precisa de continuidad que pueda servir como base para deducciones válidas. Durante largo tiempo estuve reflexionando sobre esto en vano, pero encontré finalmente lo que estaba buscando. Este descubrimiento será, quizás, diferentemente apreciado por diferentes personas; la mayoría puede que aprecie su meollo como un lugar común. Consiste en esto. En la sección precedente se llamó la atención sobre el hecho de que cada punto de la recta produce una separación de la misma en dos porciones tales que cada punto de una porción queda a la izquierda de cada punto de la otra porción. Encuentro que la esencia de la continuidad está en la conversa, es decir, en el siguiente principio:

Si todos los puntos de la recta pertenecen a dos clases tales que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces, existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases; esto corta la recta en dos partes.

No erraré si supongo que cada quien dará por sentada la verdad de este enunciado; la mayoría de mis lectores quedará contrariada al saber que gracias a la observación de este lugar común es como se obtiene el secreto de la continuidad. Puedo decir que me alegra si cada cual encuentra el principio anterior tan obvio y tan en armonía con sus propias ideas acerca de la recta; en cuanto a mí, soy completamente incapaz de aducir una prueba cualquiera de su corrección y nadie puede hacerlo. La asunción de esta propiedad de la recta no es otra cosa que un axioma mediante el cual atribuimos a la recta su continuidad, mediante el cual encontramos continuidad en la recta.

A partir de las últimas observaciones es suficientemente obvio cómo el conjunto discontinuo de los números racionales puede ser completado hasta formar un dominio continuo.

Se supone dada una separación cualquiera del conjunto de los números racionales en dos subconjuntos, la cual tiene solamente esta propiedad característica de que cada número del primer subconjunto es menor que cualquier número del segundo. Se la llama *cortadura.* Se puede decir que cada número racional produce una cortadura; tal cortadura posee, además, la propiedad de que o entre los números del primer subconjunto existe uno que es el mayor, o entre los números del segundo uno que es el menor. Recíprocamente, si una cortadura posee esta propiedad, ella es producida por el número racional mayor o menor.

Ahora bien, es fácil mostrar que existen infinidad de cortaduras no producidas por números racionales.

En esta propiedad de que no todas las cortaduras sean producidas por números racionales consiste la incompleción o discontinuidad del conjunto de los números racionales.

Así, pues, siempre que haya que considerar una cortadura no producida por número racional se crea un nuevo número, el número irracional que se considera completamente definido por la cortadura. Se dice que el número corresponde a la cortadura o que produce la cortadura.

El conjunto de los números reales es continuo, es decir, se tiene el siguiente teorema:

Si el conjunto de todos los números reales es separado en dos subconjuntos tales que todo número del primero es menor que cualquier número del segundo, entonces, existe un único número real que produce tal separación.

Cuestión

Comparar el concepto de cortadura de Dedekind con las sucesiones aproximantes de $\sqrt{2}$ construidas por los matemáticos griegos. ¿Por qué es interesante tal comparación?

Cuestiones

1. El hecho de que Hilbert haya pasado el enunciado 32 de axioma a teorema ¿invalida las demostraciones que Hilbert había realizado a partir del axioma inicial? ¿Por qué?

2. Ilustre figurativamente el enunciado V 1.

3. Tome un segmento que mida trece unidades de longitud y otro que mida dos. ¿Cuántas divisiones hay que hacer para verificar el V 1?

4. Puede reemplazarse el V 1 por este otro enunciado: ¿Dados dos segmentos, existe siempre un múltiplo de uno de ellos que es mayor que el otro? ¿En vez de múltiplo se puede usar submúltiplo?

5. El axioma de Arquímedes (en realidad fue Eudoxio de Cnido quien primero lo enunció) equivale a la afirmación: es posible hacer corresponder a cada punto de una recta un número real. Es el V 1. El axioma de la compleción es equivalente a la afirmación: se puede establecer una inyección entre los puntos de una recta y los números reales. Este es el axioma de Cantor. Entre los dos se afirma: existe una biyección entre números reales y puntos de una recta. Esta es la base de la geometría aritmetizada de Descartes y Fermat. ¿En geometría hay revolución? ¿o evolución?

6. Considerar una esfera. Interpretar "punto", "recta", "plano" en los axiomas de Hilbert, de la siguiente manera:

   "Punto" como punto de la esfera.
   "Recta" como segmentos que unen dos puntos distintos de la esfera.
   "Plano" como porciones de plano euclidiano que intersecan la esfera.

   Ver cuáles de los axiomas espaciales se cumplen con este modelo.

7. Considerar un círculo dibujado sobre material flexible. Interpretar en los axiomas de Hilbert, así:

   "Punto" como punto del círculo dado.
   "Recta" como cuerda, es decir, segmento que une dos puntos del círculo.

   Ver cuáles de los axiomas planos se cumplen en este modelo. Considerar una transformación del material flexible que no lo rompa ni lleve a coincidir a dos de sus puntos. ¿Cuáles de los axiomas se cumplen?

   Experimento mental. Si el material flexible pudiera extenderse indefinidamente al apoyar sobre el centro del círculo inicial, entonces, ¿la superficie exterior resultante podría servir para interpretar a cuál de las tres geometrías?

8. ¿La noción de triángulo rectángulo equilátero es contradictoria?

9. Considérense los conjuntos:

$$E = \{1,2,3,4\}$$
$$R = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$
$$P = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

Si se entiende por "punto"un elemento de E, por "recta"un elemento de R, por "plano"un elemento de P, entonces, ¿cuáles de los 20 axiomas se cumplen? Escribir todos los casos.

10. Frente a cada una de las nueve nociones siguientes escribir las nociones y los tipos de postulados que son axiomáticamente anteriores.

a. Ángulo.
b. Ángulo suplementario.
c. Ángulo agudo, obtuso, recto.
d. Circunferencia.
e. Estar en lados diferentes respecto de un punto sobre una recta.
f. Estar en lados diferentes respecto de una recta sobre un plano.
g. Estar en lados diferentes respecto de un plano en el espacio.
h. Segmentos y puntos interiores de un segmento.
i. Figuras congruentes.

Ejemplo:

	Polígono	
Polígono simple	Vértice	I
	Punto interior	II

11. ¿Aparecen los cinco tipos de axiomas? ¿Cuáles no aparecen?

12. Inicialmente "punto", "recta", "plano" son términos variables. ¿En qué sentido lo son? ¿Son dados tales términos con un contenido intuitivo? ¿Cambiaría el desarrollo hilbertiano de la geometría si se cambiaran por otros los tres vocablos dichos?

13. La independencia recíproca de los axiomas es establecida por Hilbert (*Fundamentos de la geometría*. Capítulo II) mediante interpretación de los elementos del sistema formal. ¿Habría tal interpretación si no hubiera términos variables y relaciones variables?

14. ¿Puede decirse que las relaciones mutuas dadas entre "puntos", "recta", "plano" son relaciones variable? ¿Qué otros ejercicios de este mismo capítulo están relacionados con esta misma pregunta? ¿Por qué?

15. ¿Los elementos de la geometría "punto", "recta", "plano"son especificados de manera distinta a la del requerimiento de satisfacer las relaciones mutuas asumidas? ¿Expresa cada uno de los cinco agrupamientos de axiomas hechos de la intuición espacial? ¿Lo afirma el mismo Hilbert? ¿Dónde? ¿Pueden intervenir estos hechos de la intuición en la derivación lógica de los teoremas? ¿Si la respuesta a esta pregunta fuese positiva, habría alguna diferencia entre las obras cumbres, *Elementos* y *Fundamentos de la geometría*? ¿Por que? ¿Cuál es papel de los axiomas? ¿Podrá ser otro que el de especificar las diferentes combinaciones permisibles entre los elementos de la geometría? ¿Por qué?

Visión del conjunto del capítulo I de *Fundamentos de la geometría.* (Edición 13)

Parágrafo 1

Términos no definidos: punto, recta, plano.

Relaciones entre punto, recta, plano: estar situado, entre, congruente, paralelo, continuo.

Parágrafo 2

Axiomas (= postulados), I 1-8, de enlace, incidencia, pertenencia.

Axioma I 1. Dos puntos determinan a lo menos una recta.

Axioma I 2. Dos puntos determinan a lo más una recta.

Axioma I 3. Hay a lo menos dos puntos en línea recta.
Hay a lo menos tres puntos no en línea recta (no colineales).

Axioma I 4. Tres puntos no colineales determinan a lo menos un plano.

Axioma I 5. Tres puntos no colineales determinan a lo más un plano.
A cada plano pertenece a lo menos un punto.

Axioma I 6. Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, entonces, todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

Axioma I 7. Si dos planos tienen un punto común, entonces tienen a lo menos un tercer punto común. Es decir: el espacio no tiene más de tres dimensiones.

Axioma I 8. Existen a lo menos cuatro puntos no situados en un plano (no coplanares). Es decir: el espacio no tiene menos de tres dimensiones.

Teorema 1. Posiciones relativas de rectas y planos.

Teorema 2. Determinación de un plano.

Parágrafo 3

Axiomas (= postulados) de orden.

Axioma II 1. Se dice que un punto está entre otros dos solamente cuando los tres puntos están en línea recta.

Axioma II 2. Dados dos puntos, sobre la recta determinada por estos, existe a lo menos un punto exterior a los dos dados.

Axioma II 3. De tres puntos cualesquiera sobre una recta hay a lo más uno situado entre los otros dos.
Segmento: extremos, interior y exterior.

Axioma II 4. (Axioma de Pasch). Si puntos pertenecientes a una recta son también puntos interiores de un triángulo, entonces, la recta interseca dos de los lados del triángulo y tiene también puntos exteriores al triángulo.

Parágrafo 4

Teorema 3. Entre dos puntos dados, hay por lo menos un punto.

Teorema 4. De tres puntos dados, hay por lo menos uno entre los otros dos.

Teorema 5. Posiciones relativas de cuatro puntos colineales dados.

Teorema 6. Posiciones relativas de un número finito de puntos colineales dados.

Teorema 7. Entre dos puntos dados, hay infinitos puntos.
Estar a un lado de una recta en un plano.
Estar a distinto lado de una recta en un plano.
Semirrecta. Lados de un polígono, vértices.
Línea quebrada. Trivértice, cuadrivértice, ..., n-vértice.
Polígono. Polígono simple.

Teorema 9. Todo polígono plano simple particiona los puntos del plano al cual pertenece. Punto interior, punto exterior de un polígono simple.

Teorema 10. Todo plano particiona los puntos del espacio.
Estar al mismo lado de un plano.
Estar a distinto lado de un plano.

Parágrafo 5

Axiomas de congruencia.

Axioma III 1. Posibilidad de transportar segmentos (existencia). Se demuestra unicidad del transporte de segmentos.

Axioma III 2. Si dos segmentos son congruentes con un tercero son congruentes entre sí. Se demuestra:
- todo segmento es congruente consigo mismo,
- simetría de la congruencia,
- transitividad de la congruencia.

Axioma III 3. Posibilidad de adicionar segmentos.
Ángulo, vértice, lados, interior, exterior de un ángulo.

Axioma III 4. Posibilidad de transportar ángulos (existencia).
El ángulo transportado es único (unicidad)
Todo ángulo es congruente consigo mismo.

Axioma III 5. Si en sendos triángulos son congruentes dos pares de lados y el ángulo comprendido correspondientes, entonces, también son congruentes los otros dos ángulos correspondientes.

Se demuestra la transitividad del transporte de ángulos y la adicionabilidad de ángulos.

Parágrafo 6

Ángulos suplementarios.
Ángulos opuesto por el vértice.
Ángulo recto.

Teorema 11. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.
Triángulos congruentes.

Teorema 12. Primero de congruencia de triángulos: LAL.

Teorema 13. Segundo de congruencia de triángulos: ALA.

Teorema 14. Ángulos suplementarios de ángulos congruentes, son congruentes.
Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Existencia del ángulo recto.

Teorema 15. Si dos ángulos son congruentes y si sendas partes de los mismos ángulos son congruentes, entonces, las partes restantes son igualmente congruentes.

Teorema 16. Si dos ángulos son congruentes y si una semirrecta interior divide al primero, entonces, existe una única semirrecta interior al segundo que lo divide de tal manera que las partes de uno y otro ángulo sean congruentes.

Teorema 17. Simetría de puntos respecto de una recta lleva a simetría de ángulos.

Teorema 18. Tercero de congruencia de triángulos: LLL.

Teorema 19. Dos ángulos congruentes con un tercero son congruentes entre sí.

Teorema 20. Comparación de magnitudes de ángulos. Ángulo mayor o menor que otro. Irreflexividad, antisimetría, transitividad en estas relaciones entre ángulos.
Comparación de magnitud en segmentos.

Teorema 21. Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.
Ángulo obtuso. Ángulo agudo.

Teorema 22. Teorema del ángulo exterior.

Teorema 23. En todo triángulo, al mayor lado se opone el mayor ángulo.

Teorema 24. Un triángulo con dos ángulos congruentes es isósceles.

Teorema 25. Complemento al segundo teorema de congruencia de triángulos: LAA (un ángulo está junto al lado congruente, el otro ángulo no).

Teorema 26. Todo segmento es bisecable.
Todo ángulo es bisecable.
Series de puntos congruentes entre sí.

Teorema 27. Dos series puntuales congruentes tienen el mismo orden.

Figura: conjunto finito de puntos.
Figura plana.
Figuras congruentes.

Teorema 28. Si dos figuras planas son congruentes y se añade un punto a la primera, se puede añadir un punto a la segunda de manera que las dos figuras sigan siendo congruentes.

Teorema 29. Teorema, análogo al 28, para el espacio.
Todos los hechos espaciales de congruencia y las propiedades de movimiento en el espacio son consecuencia de los agrupamientos de axiomas I, II, III.

Parágrafo 7

Existe por lo menos una paralela a una recta dada, por un punto exterior a la recta dada.

Axioma IV (o de Euclides). En el plano determinado por una recta y un punto exterior a ella, existe a lo más una paralela a la recta.
La paralela a una recta por un punto exterior a ella.

Teorema 30. Si dos paralelas son cortadas por una secante, entonces, los ángulos alternos externos son congruentes entre sí, los ángulos alternos internos son congruentes entre sí, y, recíprocamente. Igualmente en cuanto a los ángulos correspondientes.

Teorema 31. Los ángulos de un triángulo suman dos rectos.
Circunferencia. Centro de una circunferencia.
Constructibilidad de una circunferencia por tres puntos no colineales.
Congruencia de todos los ángulos inscritos sobre la misma cuerda.
Teorema de los ángulos de un cuadrilátero inscribible.

Parágrafo 8

Axioma de la medida o axioma de Arquímedes. V 1.

Axioma de la compleción lineal. V 2.

Teorema 32. Teorema de la compleción espacial.

Con el axioma de la compleción lineal, se logra demostrar la existencia de una frontera correspondiente a una cortadura de Dedekind, y, el teorema de Bolzano referente a la existencia de puntos de condensación.

Con los cinco agrupamientos de axiomas se obtiene una geometría idéntica a la cartesiana.

Bibliografía

1. HILBERT, David. *Grundlagen der Geometrie.* Mit Supplementen von Prof. Dr. Paul Bernays. 13 Auflage. Mit 129 Abbildungen. 1987. Stuttgart. B.G. Teubner. $vii + 271$ S.

2. HILBERT, David. *Les fondements de la géométrie.* Édition critique avec introductions et compléments préparée par Paul ROSIER. Ouvrage publié avec le concours du CNRS (France). 1971. Paris. Dunod. $xv + 311$ pp. (Con base en la décima edición alemana, 1968).

3. HILBERT, David. *Fundamentos de la geometría.* 1953. Madrid. Publicaciones del Instituto "Jorge Juán"de Matemáticas. $vii + 319$ pp. (Traducción de la séptima edición alemana. 1930).

* * * *

Nota. Hasta 1930, hubo siete ediciones en cada una de las cuales Hilbert hizo modificaciones, a veces importantes. Paul Bernays, colaborador de Hilbert entre 1917 y 1933, sustituyó al maestro en las ediciones octava, novena y décima. En 1987, B.G. Teubner, Stuttgart, hizo la edición número 13, que reproduce la décima de Bernays, 1972.

Capítulo 9

Axiomatización a la manera de Hilbert

Hilbert enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente.

[Dieudonné].

Hay la geometría expuesta a la manera de Euclides, a saber, la de *Elementos*, y la de los libros que imitan la redacción de aquellos. Hay, desde 1899, la geometría euclidiana expuesta a la manera de Hilbert. El fondo es el mismo, la forma es diferente. En este capítulo, se trata de poner en claro en qué consiste la diferencia; y por qué es perfectamente justificado hablar de axiomatización a la manera de Euclides y de axiomatización a la manera de Hilbert.

Comparación de *Elementos* con *Fundamentos de la geometría*

Una vez compuesto *Elementos*, por Euclides, *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, era una necesidad axiomática. En efecto, el quinto postulado era solamente una de las opciones que Euclides tenía a la mano; y se puede decir, sin exageración, que estaba en la naturaleza de la investigación geométrica, el que se vislumbraran algún día los otros casos posibles. Una vez encontrados estos y estudiadas sus consecuencias, tenía que producirse un examen del estatuto del sistema euclidiano desde el punto de vista lógico y provocar determinados ajustes.

El primero de estos que hay que anotar es el de identificar las nociones de postulado y de axioma, dado que nadie había logrado hacer manifiesta la diferencia entre las dos.

En las ediciones más reconocidas de *Elementos*, aparecen en estricto orden: definiciones, postulados, axiomas o nociones comunes, teoremas. Quizá este orden quiera indicar la marcha desde lo más concreto, definiciones de objetos, hasta los principios más generales, las nociones comunes a diversas disciplinas. Por el contrario, en Hilbert, los axiomas o postulados toman el primer lugar que conservan sistemáticamente: el papel de los axiomas en la construcción de Hilbert es preponderante. Las definiciones quedan relegadas a un segundo plano; hay una contraposición, que debe sorprender cuando la consideración es atenta, con la lógica y la matemática tradicionales, en las que las definiciones tienen la función capital de declarar la esencia de las cosas según el decir de Aristóteles. Desde Hilbert, las definiciones son apenas indicadores de cuándo se va a emplear una abreviatura en lugar de un enunciado.

En Euclides no se advierten los términos no definidos. En Hilbert, puntos, rectas, planos, aparecen, de entrada, como sistemas de objetos pensados, en el sentido de imaginados, sin precisión alguna de naturaleza. Aristóteles había consignado ya que no todo puede ser definido; Euclides parece haberlo olvidado al confeccionar definiciones de las que no se servirá posteriormente. Los intentos para definir, a la manera clásica, dichas tres nociones básicas han sido repetidos incontinentemente. Hilbert opta, para algunos camino de facilidad, por tomarlas como primitivas.

Pero, con estos solos elementos no se puede hacer geometría. Hay que imaginar que hay entre ellos ciertas relaciones. Hilbert escoge cinco: "estar en", "estar entre", "ser congruente", "ser paralelo", "ser continuo". Si se quiere entender bien la obra de Hilbert, asimilada por la matemática posterior, no hay que tomar estas cinco expresiones en el sentido del lenguaje ordinario o intuitivo. En adelante, habrá que distinguir este nivel y el del sistema formal; se hablara de lenguaje ordinario o corriente o del sentido común, y, de lenguaje formalizado; este es un lenguaje especial que se construye con palabras del lenguaje corriente, despojándolas de las acepciones que tengan en este y usándolas únicamente como se diga explícitamente al construir el sistema formal; inicialmente, pues, las palabras tomadas del lenguaje ordinario están desprovistas de significado; para acentuar ese aspecto se las escribe entre comillas, sobre todo en los comienzos. Por ejemplo, "estar entre" se utiliza en el lenguaje cotidiano para objetos colocados en línea recta como para objetos arreglados en circunferencia. En el sistema de Hilbert habrá que suspender el entender la expresión en uno u otro sentido mientras las reglas de la construcción no lo declaren. Cuando no se puede prescindir de la intuición, debido al hábito, deben emplearse símbolos, como $f(a, b)$, sobre los cuales no se guarda ningún prejuicio de significado. En realidad, un sistema formal puede escribirse completamente en símbolos. Hilbert no lo hizo en *Fundamentos de la geometría*, cuyas 135 páginas en traducción española, están escritas completamente en palabras castellanas; apenas si se emplean algunas comillas o letras de tipo especial. Hilbert escribió algunos pasajes en solo símbolos, para dar ejemplos en *Elementos de lógica teórica* (página 53 y siguientes) o en la obra que es continuación de esta en lo relativo a la fundamentación de la matemática, titulada *Grundlagen der Mathematik*.

No se pueden hacer frases con los ocho elementos que ya se tienen (tres nociones primitivas y cinco relaciones) porque no se tienen todavía reglas de sintaxis. Escribe Hilbert: "La descripción completa de estas relaciones... resulta de los axiomas de la geometría". Esta es la idea principal: son los axiomas los que hacen posible la descripción. Esto no es lo que sucede en el lenguaje cotidiano (¡cuántos bien hablados hay que ignoran la sintaxis!) luego los puntos suspensivos deben de estar en lugar de un detalle importante. Efectivamente. "Hecha exactamente y con fines matemáticos". En el lenguaje ordinario, una conversación se entabla fácilmente, se comienza a describir un sentimiento, a narrar una experiencia, etc. En el lenguaje axiomático hay que hacer varias previsiones. En primer lugar, se precisa la sintaxis. Como todos los matemáticos hasta entonces, Hilbert utiliza la lógica clásica, es decir, la lógica tradicional de Aristóteles y la Escolástica, enriquecida abundantemente por investigadores matemáticos desde 1847, año de la primera publicación lógica de Boole. Hilbert utiliza, pues, las posibilidades de esta lógica clásica; no hace enunciados específicos fuera de la nítida declaración introductoria.

> El poner de manifiesto los axiomas de la geometría y averiguar sus conexiones es problema que... queda reducido al análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales.

En la naturaleza misma del método propugnado por Hilbert está el que los axiomas definan implícitamente los términos y las relaciones asumidas como primitivas. Lo afirma explícitamente para el segundo agrupamiento de axiomas.

> Los axiomas de este grupo definen el concepto "entre" y posibilitan la ordenación de puntos sobre una recta, en un plano y en el espacio.

Hilbert hace una división de los 20 axiomas en cinco agrupamientos que puede ser mirada retrospectivamente como la culminación de un proceso de ideas.

En el Libro I de *Elementos*, cuyo hilo conductor es la demostración del teorema de Pitágoras, pueden distinguirse tres partes:

I 1-26 : estudio de rectas y triángulos.
I 27-33: estudio del paralelismo.
I 33-47: estudio de relaciones entre áreas.

La primera parte no depende del quinto postulado y es válida por tanto para la geometría de Bolyai-Lobachevski y en parte para la de Riemann.

Todavía a principios del siglo XIX no se sabía decir cuál era la posición relativa entre la geometría euclidiana (y las dos no euclidianas) y la geometría proyectiva. Pero ya para Cayley en 1859 era claro que "la geometría proyectiva es toda la geometría". Antes de terminar el siglo, Poincaré hubiera podido añadir una plataforma: la geometría topológica es toda la geometría. En escritos del geómetra italiano Federico Enriques puede verse subrayada la diferencia entre propiedades métricas, propiedades proyectivas y propiedades topológicas.

Así, pues, la división en cinco agrupamientos de los axiomas y propiedades de la geometría es el coronamiento de un proceso evolutivo.

	Lineales	*Planos*	*Espaciales*	#	*Geometría*
Enlace, incidencia, pertenencia		I 1-3	I 4-8	8	Proyectiva
Ordenación	II 1-3	II 4		4	Topológica
Congruencia	III 1-3	III 4-5		5	Euclidiana
Paralelismo		IV		1	Afín
Continuidad	V 1-2			2	Topológica
#	8	7	5	20	

Cuadro sinóptico de los axiomas lineales, planos, espaciales.

El sistema de axiomas de Hilbert puede ser considerado desde el punto de vista de las cinco agrupaciones de axiomas, correspondientes a las cinco relaciones primitivas (enfoque horizontal en un cuadro sinóptico); pero hay otro punto de vista (enfoque vertical) que Hilbert distingue cuidadosamente (actitud que tiene su punto de apoyo en la historia de otros ensayos de axiomatización) el de si los axiomas conciernen a puntos sobre la recta, a planos, o a todo el conjunto de elementos de la geometría.

Con la intención de apreciar *Fundamentos de la geometría*, desde diversos enfoques, luego de seguir minuciosamente parte de su desarrollo, en el capítulo VIII de la obra presente, se hizo al terminar dicho capítulo octavo, una especie de compendio en el parágrafo titulado "Visión de conjunto del capítulo I". Para evitar el escape de enfoques, por lo menos de los más obvios, vale la pena insistir en el cuadro comparativo (Rossier p. 50) que detalla el riguroso tratamiento de los axiomas de congruencia para segmentos, por una parte, para ángulos, por otra. En dicho cuadro, que aparece a continuación, III 1 indica que la propiedad en cuestión es introducida por medio del primer axioma de congruencia; en cambio Teorema (III 2) indica que la propiedad pudo ser demostrada utilizando el segundo axioma de congruencia.

Congruencia	*Segmentos*	*Ángulos*
Existencia	III 1	III 4
Unicidad del transporte	Teorema (III 4-5)	III 4
Reflexividad	Teorema (III 4-5)	III 4
Simetría	Teorema (II 2)	Teorema (III 4-5)
Transitividad parcial	III 2	Teorema (III 4-5)
Transitividad total	Teorema (III 2)	Teorema (III 4-5)
Aditividad	III 3	Teorema (III 3-5)

Cuadro sinóptico acerca del tratamiento riguroso de la congruencia.

Contrasta la explicación de Hilbert de los primeros principios con la presentación asaz confusa que tienen los mismos en *Elementos*. Es comentario bien conocido el que asegura que las enumeraciones que conocemos de postulados y nociones comunes no son de Euclides, sino que fueron antepuestas por estudiosos, sea al darse cuenta de giros de lenguaje muy empleados en *Elementos* y que hacían como el papel de goznes en una argumentación, sea como fruto de la experiencia en las escuelas que llevaría a concluir una argumentación de manera convincente para los oyentes, al apoyarse sobre algunos principios destacados. A este respecto es un hecho elocuente el que no figure el mismo número de principios en las diversas ediciones primitivas de Euclides y el que se haya adoptado cinco postulados y cinco nociones comunes, sobre la autoridad del texto establecido por Heiberg, no sobre la de algún texto antiguo, como hubiera debido ser, tratándose del punto capital de los principios.

El problema de la no contradicción de los axiomas en la geometría de Hilbert

En el capítulo II de *Fundamentos de la geometría*. Hilbert pone un problema, que como el del quinto postulado, se va a convertir en un factor de un proceso evolutivo que va a culminar con los teoremas de Gödel.

En la concepción filosófica de la ciencia que enmarca la axiomatización a la manera de Euclides, los primeros principios son enunciados absolutamente evidentes concernientes a la realidad; se cree que por tanto, no pueden ser contradictorios. Dado el modo como ha escogido los axiomas, Hilbert juzga pertinente mostrar que el sistema resultante no puede ser contradictorio. Esto da origen al problema de la no contradicción para cualquier construcción axiomática. Vale la pena recordar que Beltrami se había servido de un argumento de no contradicción para instar al reconocimiento de las geometrías no euclidianas. He aquí el enunciado de la solución de Hilbert:

> Los cinco agrupamientos de axiomas establecidos en el capítulo I no están en contradicción unos con otros, esto es, no es posible por medio de silogismos deducir de ellos hechos que contradigan a algunos de los axiomas expuestos.

La solución está dada por un teorema metageométrico, que resuelve una dificultad surgida de la construcción axiomática de la geometría: Consiste en formar

> con los números reales un sistema de entes que satisfagan todos los axiomas de los cinco agrupamientos.

Es lo que posteriormente se llamará construir un modelo o dar una interpretación o encontrar una realización para una teoría formalmente expuesta, en este caso la geometría del capítulo I de *Fundamentos de la geometría*. Hay que dar contenido a los términos no definidos y verificar que con tal interpretación las formas proposicionales del sistema se convierten en proposiciones verdaderas.

Considera para ello “todos aquellos números algebraicos que salen del número 1, al aplicar un número finito de veces las cuatro operaciones” y una quinta, la de extraer raíces cuadradas de números que se escriben como la suma de dos cuadrados de números reales.

En las páginas que siguen se va a ver cómo se verifican los axiomas del sistema de Hilbert al ser representados en el sistema de los números reales.

La interpretación considerada por Hilbert: la geometría cartesiana interpretación para la geometría de Hilbert

Piénsese que un *punto* (capítulo I de *Fundamentos de la geometría*) es una pareja de números reales y que una *recta* es el sistema de las razones $u : v : w$ de una tripla de números reales u, v, w donde u, v no son nulos al mismo tiempo. Si el punto se designa mediante la pareja (x, y) de números reales, la relación de estar situado el punto sobre la recta se escribe: $ux + vy + w = 0$.

¿Cómo se verifican los axiomas planos de *pertenencia*? Ya se puede averiguar si en el modelo se cumple I 1: dos puntos determinan por lo menos una recta. ¿Los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ determinan una única recta? ¿Cuál? Determinar una recta es conocer los coeficientes u, v, w. Los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ permiten hacerlo; basta escribir que la recta pasa por estos dos puntos, o, lo que es lo mismo, reemplazar en la fórmula de la recta, las letras x, y por 1, 0 y luego por 0, 1; se obtiene: $u(1) + v(0) + w = 0$, es decir, $u + w = 0$; después: $u(0) + v(1) + w = 0$. De las dos ecuaciones: $u + w = 0$, $v + w = 0$, se obtiene: $u = -w$, $v = -w$. Al reemplazar en la fórmula para la recta, se tiene: $(-w)x + (-w)y + w = 0 = (-w)(x + y - 1) = 0$. En general, $w = 0$; por tanto, como uno de los factores debe ser 0, se obtiene: $x + y - 1 = 0$, ecuación no indeterminada, como la general de la recta, sino que conviene a una única recta del plano. Todo punto (x, y) que haga de esta relación, $x + y - 1 = 0$, una identidad, pertenece a la recta.

Se verifica igualmente el segundo axioma plano de enlace: dos puntos determinan a lo más una recta. En efecto, la ecuación $x + y - 1 = 0$ no depende de ningún parámetro, en este caso, de ninguna de las letras u, v, w. En particular, el parámetro w no modifica la determinación hecha: el conjunto de los puntos verificantes de $x + y - 1 = 0$ es también el conjunto de los puntos verificantes de $w(x + y - 1 = 0)$, porque $w0 = 0$.

Se verifica la primera parte del tercer axioma plano de enlace: existen por lo menos dos puntos en línea recta. En efecto, los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ están alineados pues ambos satisfacen la mismas ecuación $x + y - 1 = 0$. Se verifica análogamente la segunda parte del tercer axioma: existen por lo menos tres puntos no en línea recta. En efecto, los puntos $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ no están en línea recta, dado que la recta no pasa por el origen.

Estas determinaciones pueden hacerse con toda generalidad, es decir, para pares de puntos cualesquiera.

Considérense los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$.

La expresión $x_1y_2 - x_2y_1$ es diferente de 0 si las abscisas son diferentes y una de las ordenadas, por lo menos, no es 0.

Esto sucede si uno de los puntos, por lo menos, no está situado sobre el eje de las abscisas.

Dicha expresión es también diferente de 0 si las ordenadas son diferentes y una de las abscisas, por lo menos, no es nula. Esto sucede si uno de los puntos, por lo menos, no está situado sobre el eje de las ordenadas.

Uno de los puntos puede estar sobre el eje de las abscisas y el otro sobre el de las ordenadas. Esto simplifica los cálculos. Es la manera más cómoda de escoger los puntos determinantes.

El número real $x_1y_2 - x_2y_1$ puede llamarse el determinante de la pareja de puntos determinantes. Si el determinante es diferente de 0, la recta corta a ambos ejes coordenados. Si el determinante es 0, la recta es paralela a uno de los ejes coordenados. Si P_1 y P_2 designan al mismo punto, el determinante es también 0. En los cálculos que siguen se supone que el determinante no es 0.

P_1 y P_2 están sobre la misma recta si $ux_1 + vy_1 + w = 0$, $ux_2 + vy_2 + w = 0$. Verificar que de estas dos ecuaciones se sigue

$$u = \frac{(y_1 - y_2)\, w}{(x_1y_2 - x_2y_1)}, \qquad v = \frac{(x_2 - x_1)\, w}{(x_1y_2 - x_2y_1)}.$$

Reemplazando en la fórmula $ux + vy + w = 0$, se obtiene

$$\left[\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1y_2 - x_2y_1}\right) x + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1y_2 - x_2y_1}\right) y + 1\right] w = 0$$

donde w es, en general, un número real no nulo. Por tanto, la recta determinada por los puntos P_1 y P_2 tiene como ecuación:

$$\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1y_2 - x_2y_1}\right) x + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1y_2 - x_2y_1}\right) y + 1 = 0.$$

¿Qué número se obtiene si se reemplaza a x por x_1, a y por y_1? ¿Y si se reemplaza (x, y) por (x_2, y_2)?

También se verifica, en esta determinación general, la segunda parte del axioma I 3, dado que, en general, los puntos $(x, 0)$, $(0, y)$, $(0, 0)$ son tres puntos distintos que no están alineados si el producto xy no es nulo.

Así, pues, en el modelo se verifican los tres axiomas planos de enlace.

¿Cómo se verifica el axioma de *paralelismo*? Considérense dos rectas: $ux + vy + w = 0$, $u'x + v'y + w' = 0$. Para que estas rectas tengan un punto común, es decir, se corten, es suficiente y necesario que exista una pareja de números reales x_0, y_0 que satisfaga al sistema en dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las ecuaciones de las rectas, vale decir al sistema:

$$ux_0 + vy_0 + w = 0, \qquad u'x_0 + v'y_0 + w' = 0.$$

Sea $u \neq 0$, entonces, $x_0 = \dfrac{-w - vy_0}{u}$.

Al reemplazar en la segunda ecuación, se obtiene:

$$y_0(uv' - u'v) = u'w - uw'.$$

Si $uv' - u'v \neq 0$, entonces, es posible despejar a y_0:

$$y_0 = \frac{u'w - uw'}{uv' - u'v};$$

y también a x_0; se obtiene

$$x_0 = \frac{vw' - v'w}{uv' - u'v}.$$

Al reemplazar estas expresiones de x_0, y_0 en el sistema, se ve que ellas hacen del sistema de igualdades uno de identidades; que, por tanto, la única solución está dada por estas expresiones.

Considérese de nuevo la expresión

$$y_0(uv' - u'v) = u'w - uw'.$$

Si $uv' - u'v = 0$, entonces, no es posible continuar la determinación de y_0, ni, por tanto, la de x_0. No existe el par pedido de números reales que satisfaga el sistema. Pero, se pueden sacar algunas consecuencias.

De $uv' - u'v = 0$, se obtiene, siempre que $uv \neq 0$,

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}.$$

Y la segunda ecuación del sistema se transforma así:

$$0 = u'x + v'y + w' = u'x + \frac{u'v}{u}\, y + w' = \frac{uu'x + u'vy + uw'}{u} = 0.$$

De donde: $u'(ux + vy) + uw' = 0$.

Hay que distinguir dos casos, según que: $u'w - uw'$, segundo término de la ecuación que se está discutiendo, sea nulo o no.

Si $u'w - uw' = 0$, entonces, $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{w'}{w}$. $\left(\text{Ya se tenía: } \dfrac{u'}{u} = \dfrac{v'}{v}\right)$.
Por tanto: $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{v'}{v} = \dfrac{w'}{w}$. Las dos ecuaciones representan la misma recta, se dice también que las dos rectas coinciden.

Si $u'w - uw' \neq 0$, entonces, las rectas son diferentes.
Ahora bien, dos rectas coplanares, sin punto común a distancia finita, son *rectas paralelas.*
Así, pues, las rectas de ecuaciones

$$ux + vy + w = 0, \qquad u'(ux + vy) + uw' = 0, \qquad w \neq uw'$$

son paralelas. En particular, si $u' = u$, $w' \neq w$, las rectas $ux + vy + w = 0$, $ux + vy + w' = 0$ son paralelas.

Falta mostrar que la paralela por un punto exterior es única. Para ello, sea (x_0, y_0) un punto que no está sobre la recta $ux + vy + w = 0$ y que está sobre la recta paralela $u'(ux + vy) + uw' = 0$. Para la primera recta se tiene: $ux_0 + vy_0 + w \neq 0$; para la segunda $u'\,(ux_0 + vy_0) + uw' = 0$. De ahí se sigue: $w \neq -\,(ux_0 + vy_0)$; y de la segunda: $\dfrac{uw'}{u'} = -\,(ux_0 + vy_0)$. Por tanto: $\dfrac{uw'}{u'} \neq w$, de manera única; así que la paralela por el punto (x_0, y_0) es única. Lo mismo sucede para cada punto no situado sobre la recta dada. Por tanto, en el modelo se verifica el axioma IV de paralelismo.

¿Cómo se verifican los axiomas de *ordenación*? Los números reales forman un conjunto ordenado. Así que para los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... de una recta es posible definir un orden, según que las secuencias

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots$$

sean crecientes o decrecientes.

Ejercicio 1. Dar ejemplos de rectas en las que:

a) tanto la secuencia de las abscisas como la de las ordenadas son crecientes;
b) la secuencia de las abscisas es creciente y la de las ordenadas decreciente;
c) la secuencia de las abscisas es decreciente y la de las ordenadas creciente;
d) tanto la secuencia de las abscisas como la de las ordenadas son decrecientes.

La verificación de los axiomas de ordenación se dejan corno ejercicios que se enuncian a continuación.

Ejercicio 2. Verificar que si P_1, P_2, P_3 son puntos de una recta y si P_2 esta entre P_1 y P_3, entonces, también está P_2 entre P_3 y P_1.

Ejercicio 3. Dados dos puntos P_1 y P_2, mostrar que sobre la recta que determinan, existe por lo menos un punto P_3 tal que P_2 esté entre P_1 y P_3.

Ejercicio 4. Dados tres puntos P_1, P_2, P_3 sobre una recta, verificar que solo uno de ellos está entre los otros dos.

Ejercicio 5. Dados tres puntos P_1, P_2, P_3 no situados sobre la misma recta, escribir las ecuaciones de las rectas determinadas respectivamente por los pares P_1 y P_2, P_1 y P_3, P_2 y P_3. Mostrar que una recta que corte, por ejemplo, a la recta determinada por P_2 y P_3, en un punto diferente de P_2, y, de P_3, corta a una de las otras dos rectas.

Ejercicio 6. Explicar por qué cada uno de estos ejercicios es la verificación de cada uno de los axiomas de ordenación.

¿Cómo se realizan los axiomas de *congruencia*? Una de las críticas más frecuentes al trabajo de Euclides es la referente al tratamiento que el maestro alejandrino dio a la igualdad de figuras. Bourbaki, por ejemplo, adhiere a la crítica de que Euclides parezca resignarse a la superposición como la usa, por no haber tenido a su disposición una idea mejor. En tal proceder, Euclides manifiesta la carencia de un método para manejar una cuestión tan clave en su geometría como es la de la 'igualdad'. Tal proceder general no apareció sino en el siglo XIX. Hubo, es cierto, el intento en el siglo XVII, de Desargues y de Pascal, de hacer geometría de manera distinta a la de los helénicos. Recomenzó Monge, 1795, a emplear la proyección para resolver cuestiones en geometría. Fue Poncelet, empero, quien la erigió como sistema y la impuso entre los procedimientos matemáticos. Se requería todavía la noción de función, hecha matemática por Dirichlet, 1829, y la de grupo, establecida por Galois, 1832.

Baste partir, aquí, de la noción intuitiva de correspondencia entre elementos de dos conjuntos o de un mismo conjunto. Piénsese en una correspondencia en la que a cada elemento corresponde un único elemento y en la que cada elemento es imagen de un único elemento. Se la llama biyectiva, o simplemente, biyección.

Considérese una biyección mediante la cual los puntos del plano cartesiano se corresponden entre sí. Esta noción es demasiado general. Considérense biyecciones que permitan obtener los resultados de Euclides. Para lo cual conviene preguntarse, qué es, en el fondo, el propósito de Euclides de mostrar la 'igualdad' de dos figuras. A principios del siglo XX ha llegado a ser claro que, para el modo de ver actual, lo que Euclides perseguía era mostrar que las propiedades geométricas de las figuras consideradas son independientes de la posición de las figuras en el espacio. Basta, en tal caso, pensar en biyecciones que hagan corresponder entre sí, las figuras consideradas por Euclides, rectilíneas o circulares. Son suficientes las biyecciones que hagan corresponde puntos con puntos, segmentos con segmentos de igual longitud, ángulos. Se obtiene, así, lo que Hilbert llama: transporte de segmentos y transporte de ángulos. He aquí el caso más sencillo.

Las biyecciones planas más sencillas son aquellas que se describen, en ejes coordenados cartesianos rectangulares mediante las ecuaciones:

$$x' = x + e$$
$$y' = y + f$$

donde todas las letras designan números reales. Se llaman *traslaciones* en el plano cartesiano.

Para obtener la imagen por una *traslación*, de un punto, basta sumar a la abscisa del punto original, x, el primer elemento, e, de la pareja (e, f) que define la traslación; y a la ordenada, y, del punto original, el segundo elemento, f, de la traslación. Gráficamente, basta desplazar la abscisa, x, del punto original, sobre el eje de las abscisas, hasta la abscisa $x + e$. Sobre la paralela al eje de las ordenadas que pasa por $x + e$, se desplaza la ordenada y hasta la ordenada $y + f$.

Puede hacerse primero el desplazamiento sobre el eje de las ordenadas, desde y hasta $y+f$; luego, por la paralela del eje de las abscisas que pasa por $y+f$, hacer el desplazamiento, desde la abscisa x hasta la abscisa $x + e$. Puede procederse independientemente: desplazamiento sobre el eje de las abscisas, desplazamiento sobre el eje de las ordenadas; y trazar luego, por $x + e$, la paralela al eje de las ordenadas; por $y + f$, la paralela al eje de las abscisas; el punto de encuentro de estas dos paralelas es el punto imagen, (x', y'), del punto original, (x, y').

Propiedad. *Dado un par de puntos cualesquiera, existe una única traslación que transforma el uno en el otro.*

Propiedad. *Toda traslación transforma una recta cualquiera en una recta paralela.*

En efecto, la ecuación $ux'+vy'+w' = 0$ se transforma mediante una traslación en

$$0 = u(x + e) + v(y + f) + w' = ux + vy + (ue + vf + w') = 0.$$

Esta imagen de la recta original es paralela a la recta original, dado que: $w' = ue + vf + w'$, y que u, v no pueden ser nulos simultáneamente.

Se sigue de esta propiedad que las traslaciones planas transforman rectas paralelas en rectas paralelas. En otras palabras, el paralelismo es invariante respecto a las traslaciones. Este es uno de los invariantes fundamentales de la geometría afín.

Propiedad. *Las traslaciones del plano transportan los ángulos, esto es: la imagen de un ángulo por una traslación es un ángulo que no se diferencia del primero, sino por su posición en el plano. O también: los ángulos son trasladados sin deformación.*

Propiedad. *Las traslaciones planas transforman entre sí las figuras rectilíneas, paralelamente.*

En efecto, transportan segmentos en segmentos paralelos y ángulos en ángulos de lados paralelos.

Distancia. (Definición) Sean: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. Longitud del segmento con extremos P_1 y P_2, o distancia entre los puntos P_1 y P_2, es el valor positivo de la raíz cuadrada de: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Este número se designa por: $d\,(P_1, P_2)$.

Isometría. (Definición) Es una biyección euclidiana plana que no modifica la distancia.

El segmento original es congruente con el segmento imagen isométrica del mismo.

Propiedad. *Las traslaciones transforman isométricamente. En efecto, sean:*
$P_1 = (x_1, y_1)$ *transformado en* $P_1' = (x_1', y_1')$*;*
$P_2 = (x_2, y_2)$ *transformado en* $P_2' = (x_2', y_2')$*.*
Entonces:

$$\begin{aligned}\Big(d\big(P_1', P_2'\big)\Big)^2 &= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 \\ &= (x_2 + e - x_1 - e)^2 + (y_2 + f - y_1 - f)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \Big(d\,(P_1, P_2)\Big)^2.\end{aligned}$$

Propiedad. *Toda traslación transforma isométricamente las circunferencias.*

En efecto, el conjunto de los puntos (x, y) tales que $x_2 + y_2 = r_2$ es transformado en el conjunto de los puntos (x', y') tales que $(x' - e)^2 + (y' - f)^2 = r^2$. Es decir, la circunferencia con centro en el origen y radio r es transformada en la circunferencia con centro en (e, f) y radio r. O, lo que es lo mismo, el conjunto de los puntos equidistantes del origen, con distancia r, es transformado en el conjunto de los puntos equidistantes del punto (e, f), con distancia r. La circunferencia solo cambia de centro.

En *resumen*, las traslaciones planas transforman isométricamente puntos en puntos, rectas en rectas paralelas, segmentos en segmentos de la recta imagen, rectas paralelas en rectas paralelas, figuras rectilíneas en figuras rectilíneas, círculos en círculos, triángulos en triángulos, polígonos en polígonos.

Rotaciones. (Definición) La interpretación en el modelo cartesiano para el transporte de segmentos y de ángulos mediante la transformación llamada traslación, logra imágenes paralelas de los elementos iniciales. Las traslaciones no permiten girar las figuras. Para lograr estos giros y poder aseverar que un segmento o un ángulo dado pueden desplazarse de un sitio cualquiera del plano a otro sitio cualquiera, Hilbert se vale de las rotaciones sobre un punto, con un determinado ángulo, aplicables a segmentos como a ángulos.

Considérese el plano cartesiano, es decir, el plano con el referencial cartesiano ortogonal XOY, con segmento unidad el segmento cuyos extremos son los puntos: $O = (0, 0)$, $U = (1, 0)$.

Sea $P = (a, b)$ un punto cualquiera distinto del origen. Por tanto,

$$d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

El punto $P' = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ está sobre la circunferencia de radio 1 ya que

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Trigonométricamente, se tiene entonces que:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \measuredangle UOP',$$
$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen} \measuredangle UOP'.$$

Se requiere una transformación que deje fijo el origen O y aplique el segmento OU sobre el segmento OP'.

Puede concebirse tal transformación como una biyección del plano cartesiano sobre sí mismo, con un punto fijo, el origen, que, en particular, desplaza todas la rectas que pasan por el origen en el ángulo UOP'. Es una rotación de centro el punto invariante O y ángulo UOP'.

Se puede pensar también que una rotación es una transformación definida por un ángulo dado, aplicación que a ángulos hace corresponder ángulos de mismo vértice con lados rotados en el ángulo dado.

Dado que el punto, O, del referencial cartesiano se ha escogido como centro de la rotación, no queda para escoger sino el ángulo de rotación. Dada una pareja cualquiera de números reales, no ambos nulos, se admite en esta exposición que existe un ángulo A tal que

$$\cos A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \operatorname{sen} A = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Recíprocamente, dado un ángulo B, se admite en esta exposición que existe una pareja (c, d) tal que

$$\cos B = \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}, \qquad \operatorname{sen} B = \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Por la rotación de ángulo UOP', un punto $Q = (x, y)$ del plano cartesiano, distinto del origen, tendrá por imagen en punto $Q' = (x', y')$. El segmento OQ rotará hasta el segmento OQ', de manera que $\measuredangle QOQ' = \measuredangle UOP'$.

En coordenadas cartesianas, la transformación requerida tiene esta expresión:

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) x - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) y = x\cos A - y \operatorname{sen} A \\ y' &= \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) x + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) y = x \operatorname{sen} A - y\cos A \end{aligned}$$

$Q = (x, y)$ es el punto inicial, $Q' = (x', y')$ es el punto final o imagen. Si el punto inicial es $(1, 0)$, la imagen es

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

como era de esperar, pues se trata del ángulo UOP'.

El punto final de la rotación, está sobre el mismo círculo que el punto inicial. En efecto:

$$\begin{aligned} x'^{\,2} + y'^{\,2} &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right) x^2 + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) y^2 - \frac{2abxy}{a^2+b^2} \\ &+ \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) x^2 + \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right) y^2 + \frac{2abxy}{a^2+b^2} \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right) x^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right) y^2 = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Además, por la rotación de ángulo UOP', el punto imagen de P' está sobre el círculo unidad. En efecto:

$$\begin{aligned}
x'^{\,2}+y'^{\,2} &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\\
&+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\\
&=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^4+b^4-2a^2b^2+4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}\\
&=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=1.
\end{aligned}$$

La transformación así concebida cumple el axioma III 4 en la interpretación sobre el plano cartesiano ortogonal con el referencial ya conocido; puede parafrasearse así:

En el plano cartesiano, dado el ángulo UOP' sea $Q=(x,y)$ un punto cualquiera distinto del origen.

Entonces:

Los puntos O, Q determinan una única recta que divide al plano en dos regiones disyuntas.
Sobre la región situada respecto de OQ en el sentido contrario al de las agujas del reloj, existe, un único punto $Q'=(x',y')$ y una única semirrecta a partir de O, que pasa por Q', tales que $\measuredangle QOQ'=\measuredangle UOP'$.
Todos los puntos interiores del ángulo QOQ' pertenecen a la misma de las regiones determinadas por la recta que pasa por O y por Q.

En una sola frase: todo ángulo puede ser transportado, de manera unívocamente determinada, a una región dada del plano, dados el vértice y uno de los lados.

El hecho de que la imagen, mediante una rotación, de un punto, esté sobre el mismo círculo que el punto inicial, tiene un importante significado: la distancia del punto inicial al origen y la del punto final al origen son dadas por el mismo número real, es decir, son iguales. En otras palabras: la distancia es invariante respecto de una rotación. Así, pues, tanto las traslaciones como las rotaciones dejan la distancia invariante. Son isometrías. Como la distancia es el invariante característico de la geometría euclidiana, las rotaciones y las traslaciones son las transformaciones propias de la geometría euclidiana, en cuanto conservan la distancia (es de observar que las traslaciones se emplean en geometrías más generales no construidas con base en la noción de distancia). Componiendo traslaciones y rotaciones se obtienen todas las transformaciones indispensables para establecer la geometría euclidiana. Por otra parte, las transformaciones isométricas precisan la idea no bien fijada de Euclides, de superponer figuras como criterio de igualdad.

La noción común 4 de *Elementos*: "Cosas que coinciden son iguales entre sí" es reemplazada convenientemente por cinco axiomas de congruencia, donde la indeterminada "cosa" es restringida a "segmento" y "ángulo"; y donde "igual", que se predica de tantas cosas, deja su lugar a un término que se apropia el lenguaje geométrico, "congruente", con el uso que le dio Hilbert. En resumen, puntos, rectas, segmentos, ángulos, circunferencias son conjuntos estables mediante traslaciones y rotaciones. Las transformaciones permiten a los geómetras actuales reemplazar la figura aislada de los geómetras de Alejandría, por todas las que le correspondan mediante una transformación euclidiana, vale decir, una biyección que conserve la distancia y por tanto el tamaño. La figura, casi inmodificable de los helenos en cuanto que una modificación de ella conlleve una modificación en la demostración, pierde importancia, frente al conjunto de las transformaciones permisibles o propias de la geometría. Entre estas forman subgrupos, las isometrías que dejan invariante un elemento de la geometría, un punto, por ejemplo, una recta o un triángulo. Entre los elementos de la geometría se forman subconjuntos: dos elementos de la geometría pertenecen al mismo subconjunto, si existe una isometría que transforma el uno en el otro. Dos triángulos isósceles pertenecen al mismo conjunto de triángulos isósceles si existe una isometría mediante la cual se correspondan biyectivamente sus puntos, por tanto, sus lados y sus ángulos. Es el lenguaje que substituye la superposición de *Elementos.* Si en vez de isometrías se tiene como transformaciones las similitudes (geometría símil), se pueden hacer enunciados, como aquel, precursor, de Platón en el diálogo *Timeo*: "Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes". Los matemáticos no llegaron fácilmente a ver claramente cómo precisar las ideas de Euclides en cuanto a la superposición como criterio de igualdad. Llegan a ello en el siglo XIX y no es seguro que las costumbres matemáticas se hayan amoldado enteramente a las consecuencias. La superposición de Euclides, arraigada en la intuición como un movimiento hasta el punto de conservar tal nombre en la geometría rigurosamente redactada, pone a los matemáticos en un camino lentamente recorrido hasta llegar a las clases de equivalencia, definidas en el siglo XX gracias a meras correspondencias biyectivas. Es la evolución de una idea geométrica desde Euclides hasta Bourbaki. "Y es que para comprender a Euclides, yo habría debido comprender a Hilbert, Artin y Bourbaki", escribió el lógico Jean Blaise Grize (*Palabras para un método* 19-24. Psicología y Epistemología genética. Temas piagetianos. Buenos Aires. Proteo. 382 pp.).

Así completa Hilbert su prueba relativa de no contradicción de los fundamentos de la geometría que ha construido. Consiste en interpretar los axiomas de la geometría mediante operaciones con números reales. Puesto que no hay contradicción en la teoría de los números reales, se sigue que la construcción teórica de la geometría hecha por Hilbert no es contradictoria.

Complementos desde el punto de vista del 'Programa de Erlangen'

Una *traslación* plana, es la transformación que al punto (x, y) hace corresponder el punto (x', y') tal que

$$\begin{aligned} x' &= x + e \\ y' &= y + f \end{aligned}$$

donde e, f son números reales cualesquiera; de esto se sigue que el conjunto de las traslaciones del plano es infinito; el conjunto admite la estructura de grupo.

Decir que el conjunto de las traslaciones planas tiene una estructura de grupo, significa para un matemático, desde 1832, que cualesquiera sean los números reales, salvo mención expresa en contrario, designados por las letras: x, y, e, f (a veces tildadas), se tienen las siguientes cuatro propiedades.

1. La composición de dos traslaciones cualesquiera determina una traslación. Lo cual quiere decir que de

$$\begin{aligned} x'' &= x' + e', \qquad \text{y} \qquad x' = x + e \\ y'' &= y' + f', \qquad \text{y} \qquad y' = y + f \end{aligned}$$

se obtiene la translación determinada de manera única:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + e' = (x + e) + e' = x + (e + e') = x + e'' \\ y'' &= y' + f' = (y + f) + f' = y + (f + f') = y + f''. \end{aligned}$$

2. Existe una única traslación que deja el punto cualquiera, (x, y) invariante. Basta buscar la pareja (e, f) tal que

$$x' = x + e = x, \qquad \text{y,} \qquad y' = y + f = y.$$

La pareja buscada es $(0, 0)$. Traslación neutra o elemento neutro del grupo.

3. Por cada traslación, existe una única traslación, llamada inversa de la primera, tal que al componer la traslación con su inversa, se obtenga la la traslación neutra. Así, la inversa de la traslación

$$x'' = x' + e, \qquad y'' = y' + f$$

es la translación

$$x' = x - e, \qquad y' = y - f$$

dado que se obtiene al componer, la translación neutra:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + e = (x - e) + e = x + 0 = x \\ y'' &= y' + f = (y - f) + f = y + 0 = y. \end{aligned}$$

4. Las traslaciones son asociativas, es decir, dadas

$$\begin{aligned} x''' &= x'' + e'', \qquad & x'' &= x' + e', \qquad & x' &= x + e \\ y''' &= y'' + f'', \qquad & y'' &= y' + f', \qquad & y' &= y + f \end{aligned}$$

se pueden efectuar las dos primeras, luego la tercera; o, componer la primera con el resultado de la segunda y la tercera; es decir,

$$\begin{aligned} x''' &= x'' + e'' = (x' + e') + e'' = \big((x + e) + e'\big) + e'' = e + \big(e' + (x + e'')\big) \\ y''' &= y'' + f'' = (y' + f') + f'' = \big((y + f) + f'\big) + f'' = f + \big(f' + (y + f'')\big) \end{aligned}$$

En estos cálculos, se empleó varias veces la conmutatividad y la asociatividad de los números reales.

Porque el conjunto de las traslaciones planas tiene estas cuatro propiedades se dice que admite una estructura de grupo. Goza, además, de una quinta propiedad, la conmutatividad:

Dadas dos traslaciones cualesquiera, se obtiene:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + e' = (x + e) + e' = x + (e + e') = x + (e' + e) = (x + e') + e \\ y'' &= y' + f' = (y + f) + f' = y + (f + f') = y + (f' + f) = (y + f') + f. \end{aligned}$$

El orden en el que se efectúen las traslaciones no altera el resultado.

Ahora se puede afirmar que el conjunto de las traslaciones planas tiene una estructura de grupo conmutativo.

Dada una recta cualquiera del plano, mediante el grupo de traslaciones del plano se obtiene un conjunto infinito, el de las imágenes de la recta dada mediante cada uno de los infinitos elementos del grupo de las traslaciones; se trata de un subconjunto del plano formado por todas las rectas del plano paralelas a la recta dada. Lo que se dice apropiadamente de una recta del conjunto se dice de cada una de las rectas del conjunto; por ejemplo, si una de las rectas del conjunto interseca al eje de las ordenadas, todas las otras rectas del conjunto intersecan al eje de las ordenadas, o lo que es lo mismo, ninguna de las rectas del conjunto es paralela con el eje de las ordenadas.

Resulta que, según la idea de Descartes, $x - y = 0$ es la ecuación de la diagonal principal en un sistema coordenado ortogonal; y, según la idea de Klein, respecto del grupo de las traslaciones, con la recta de ecuación $x' - y' = 0$, hay que asociarle el conjunto descrito por la ecuación

$$0 = x' - y' = (x + e) - (y + f) = x - y + (e - f);$$

el cual es infinito dado que cada una de las letras e, f designa un número real cualquiera. O visto de otra manera, la recta $x - y + (e - f) = 0$ corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, e - f)$; puede hacerse $f = 0$, con lo cual a cada recta del plano paralela a la recta $x - y = 0$ corresponde un único número real, e, de manera que la traslación $x' = x + e$, $y' = y$ transforma la recta $x' - y' = 0$ en la recta paralela $x - y + e = 0$. El conjunto de las traslaciones opera transitivamente sobre un conjunto de rectas paralelas, es decir, fijadas dos rectas del conjunto, existe una traslación que lleva la una en la otra.

Análogamente, el conjunto de las traslaciones opera transitivamente sobre el conjunto de las circunferencias del plano de radio fijado: dadas dos circunferencias con centros diferentes, pero con el mismo radio, existe una traslación del plano que lleva una circunferencia sobre la otra. Se dice que respecto del grupo de las traslaciones, no es posible distinguir una circunferencia de otra del mismo radio, con centros diferentes, desde luego.

Pueden hacerse consideraciones análogas respecto del grupo de las *rotaciones*

$$x' = x \cos a - y \operatorname{sen} a$$
$$y' = x \operatorname{sen} a + y \cos a$$

Mediante rotaciones y traslaciones, se desarrolla, algebraicamente, toda la geometría euclidiana plana; así esta resulta ser, el conjunto de las propiedades invariantes respecto del grupo de las traslaciones y de las rotaciones. Este es el punto de vista de Klein.

El problema de independencia de los axiomas en la geometría de Hilbert

Viene luego el segundo problema: investigar si todos los axiomas son independientes entre sí.

Se prueba que no es posible derivar por medio de silogismos ninguna parte esencial de un determinado grupo de axiomas.

El axioma de las paralelas es independiente de los demás axiomas. El argumento es particularmente sencillo:

De los puntos, rectas y planos de la geometría cartesiana ordinaria, se eligen como elementos de una geometría espacial los puntos y las porciones de rectas y planos contenidos en el interior de una esfera fija haciendo intervenir las congruencias en esta geometría por medio de las transformaciones lineales de la geometria ordinaria que cambia la esfera en sí misma. Se reconoce que en esta geometría no euclidiana son válidos todos los axiomas menos el IV.

Puesto que ha sido demostrada la posibilidad de la geometría ordinaria, se deduce con lo dicho la posibilidad de la geometría no euclidiana.

Hilbert anota que en un sistema geométrico donde se cumplan los axiomas I-III y el V 1, el enunciado del axioma de las paralelas o no se ajusta a sistema alguno formado por una recta y un punto exterior a ella o se aplica exactamente a cada uno de tales sistemas.

Al tratar la independencia de los axiomas de congruencia, Hilbert construye una geometría en la que se cumplen los diez y nueve axiomas I, II, III 1-4, V pero no el III 5; lo cual muestra la independencia de este último axioma.

El primer axioma de continuidad o axioma de Arquímedes, V 1, es independiente de los otros axiomas. Hilbert construye una geometría no arquimediana (ya Veronese había compuesto una) en la que se satisfacen los demás axiomas, lo cual muestra la independencia del primer axioma de continuidad.

Igualmente es independiente el segundo axioma de continuidad o axioma de la plenitud lineal.

Hilbert no insiste acerca de la demostración de independencia de los dos primeros agrupamientos de axiomas. Es conveniente tener en cuenta la advertencia de que “los axiomas de los grupos I y II sirven de fundamento en nuestra representación a los restantes”. La independencia axiomática se refiere a que no sea posible “derivar ninguna parte esencial de un determinado grupo” o correspondiente a un determinado axioma sino mediante dicho grupo o dicho axioma. Lo de que sirve de fundamento puede entenderse con esta aclaración que se lee en la página 239 de *Geometry and the Imagination*:

> Los axiomas de orden nos permiten definir los conceptos de: *segmento*, *ángulo*, *estar en lados diferentes de un punto sobre una recta*, *semirrecta*, *estar en lados diferentes de una semirrecta en el plano*.

La independencia tiene más que ver con la demostración que con la posibilidad de reducir un concepto a otros o de poderlo determinar gracias a otros.

Aunque el problema de independencia de los axiomas aparezca en *Fundamentos de la geometría* a la altura del de no contradicción, no tiene en manera alguna, la misma importancia. Si un, sistema resulta contradictorio, entonces, es obligatorio desecharlo; mientras que pocos sistemas entre los empleados por los matemáticos satisfacen la propiedad de independencia, esta tiene que ver con la economía de hipótesis en el sentido de que, en igualdad de condiciones un sistema independiente de axiomas tiene menos axiomas que uno con hipótesis superpuestas, es decir, que contribuyan a fijar los mismos supuestos. Sin embargo, la economía de hipótesis va en sentido contrario al de la economía de desarrollo: mientras menos se postula, más pruebas hay que hacer.

Combinatoria de los agrupamientos de axiomas

Grosso modo, las geometrías que se indican en seguida, se basan sobre las combinaciones de axiomas anotadas al frente. No hay que olvidar, sin embargo, que una geometría es determinada por el conjunto de base y por el grupo que opera sobre dicho conjunto; por lo cual, los enunciados (que figuran en *Fundamentos de la geometría* de los axiomas tendrán algunas modificaciones para el desarrollo apropiado de las geometrías correspondientes.

Sin los axiomas de pertenencia, no hay geometría posible; generalmente, tanto los axiomas de pertenencia como los de ordenación intervienen en la construcción de la geometría.

Geometría proyectiva: I, II, V.
Geometría afín: I, II, IV, V.
Geometría euclidiana tridimensional: I, II, III, IV, V.
Geometría de Bolyai-Lobachevski: I, II, III, IV (fuertemente modificado), V.
Geometría de Riemann: I, II, III, IV (negado), V.
Geometría euclidiana multidimensional: I 1-6, I 7-8 (modificados), II, III, IV, V.

Es posible pensar en una geometría con base en I, II, V o con base en I, III, V es decir, la agrupación V supone la II, o la III.

Si como elementos de la geometría se consideran solamente conjuntos de puntos y como transformaciones se consideran no solo las lineales sino todas las biyecciones tales que ellas y sus inversas sean continuas se obtiene una geometría (en el sentido de Klein) muy general, llamada topología. Las transformaciones admiten una estructura de grupo, el grupo de los homeomorfismos. Un invariante fundamental es el llamado conjunto abierto. Un subgrupo del *grupo de los homeomorfismos* es determinado mediante la condición de estabilidad de los puntos alineados: si tres puntos pertenecen a una recta, entonces, las imágenes están en línea recta. Tal subgrupo se llama *grupo proyectivo*. Los elementos de este grupo no transforman generalmente, rectas paralelas en rectas paralelas; así que se considera el conjunto de las proyectividades para las cuales se establece el paralelismo, dicho conjunto admite una estructura de grupo, es el *grupo afín*. Por los elementos de este grupo no es en general estable el ángulo; se forma entonces el conjunto de las afinidades mediante las cuales no se alteran los ángulos; dicho conjunto forma un subgrupo, llamado *grupo símil*. No todas las similitudes dejan las distancias invariantes. Las similitudes que dejan las distancias invariantes admiten una estructura de grupo, llamado *grupo isométrico*. Dado que los grupos forman una cadena por contenencia, les propiedades estables respecto a ellos se subordinan de las menos generales, las isométricas, a las más generales, las topológicas.

Cuadro sinóptico de cinco geometrías

Estas cinco geometrías son especialmente importantes en el desarrollo de la matemática desde cualquier enfoque bajo el que se lo considere. En particular, desde el de Klein: los grupos aparecen ordenados por la relación de contenencia, lo cual ocasiona la subordinación de las geometrías correspondientes. Este hecho capital, desde el punto de vista del estructuralismo matemático fue destacado igualmente por los partidarios del estructuralismo filosófico. (Generalmente uno y otro estructuralismos se desarrollan independientemente; lo cual no tiene nada de extraño, puesto que el matemático data de 1832, cuando Galois forjó la estructura de grupo, o por lo menos de 1872, cuando Klein concibió la geometría en relación con un grupo; mientras que el estructuralismo que se extendió a las Ciencias Humanas data de 1916, fecha de la publicación póstuma de Curso de Lingüística general, de F. de Saussure). Piaget se sirvió frecuentemente del hecho anotado para ilustrar pasajes tanto de su psicología como de su epistemología genética.

Un hecho curioso, puesto en claro por investigaciones de la escuela de Piaget, es el de que, a pesar de que en las costumbres de las grandes civilizaciones primitivas y en la misma construcción teórica alejandrina la primera geometría que se manifiesta sea la euclidiana, sin embargo, las primeras percepciones geométricamente estructuralizables en la evolución mental de los niños sean las que tienen que ver con la posición, es decir, con la topología.

He aquí el cuadro sinóptico de las cinco geometrías:

Espacio	*Grupo*	*Geometría*	*Invariante fundamental*
Topológico	Homeomorfismos	Topológica	Abierto
Proyectivo	Proyectividades	Proyectiva	Alineación
Afín	Afinidades	Afín	Paralelismo
Afín euclidiano	Similitudes	Símil	Ángulo (forma)
Afín euclidiano	Isometrías	Isométrica	Distancia (tamaño)

Formalismo en *Fundamentos de la geometría*

La presentación de *Fundamentos de la geometría* es eminentemente formalista, en el sentido que esta palabra tiene en Hilbert y Bourbaki: cálculo lógico con formas proposicionales y términos no definidos, susceptibles de determinaciones concretas. Por otra parte, la combinatoria de agrupamientos de axiomas, o de axiomas, permite a Hilbert mostrar los senderos que llevan a diversas geometrías: "Hilbert enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente" (Dieudonné). La libertad de interpretación para los términos no definidos en *Fundamentos de la geometría* termina cuando se tomen los veinte axiomas en conjunto. Es lo que quiere decir este pasaje de Hilbert:

> Existen infinidad de geometrias que satisfacen a los axiomas I-IV, V 1; pero solo una, la geometría cartesiana en la cual es válido, al mismo tiempo, el axioma V 2.

Al tomar los veinte axiomas en conjunto respecto del campo de los números reales, en el plano por ejemplo, resulta de manera única, la geometría cartesiana, es decir, los términos no definidos no son ya susceptibles de otras interpretaciones que las de punto y recta a que uno se ha acostumbrado en *Elementos.*

En una dimensión, un punto es un número real. Hay tantos puntos sobre la recta como números reales hay. En el plano, un punto es una pareja de números reales. Hay tantos puntos sobre el plano como parejas hay de números reales. Una figura de *Elementos* es equiparable con una ecuación en geometría cartesiana. Las propiedades de la ecuación son reinterpretables como propiedades de la figura, pero desde luego independientes de esta, que solo tiene que ver con la intuición, mientras que las propiedades de la ecuación son derivables de la situación matemática misma.

Vale la pena insistir en este hecho que constituye parte de la herencia de Hilbert en matemática: si se consideran los diez y nueve axiomas I-IV, V 1 (no el V 2) hay infinitas geometrías posibles dado que como conjuntos de puntos, pueden considerarse infinitos conjuntos finitos de puntos, o conjuntos infinitos numerables de puntos. Con solo añadir el axioma V 2, de la compleción lineal, la única geometría posible que resulta es la cartesiana de tres dimensiones. Para obtener geometrías de más dimensiones, habría que modificar el axioma I 8. Es lo que resulta hecho, sin dificultad, cuando se hace geometría cartesiana a partir del álgebra lineal.

Contenido de los otros cinco capítulos a grandes rasgos

En el capítulo tercero, la teoría de las proporciones, y en el cuarto, la teoría del contenido superficial del plano, Hilbert desarrolla las consecuencias de los axiomas lineales y planos, es decir, la geometría implicada por los axiomas I 1-3, II, III, IV.

En los capítulos quinto, el teorema de Desargues, y sexto, el teorema de Pascal, Hilbert desarrolla las consecuencias de los axiomas I, II, IV, V. Un espectacular resultado del capítulo sexto es que la conmutatividad de la multiplicación está ligada al postulado de Arquímedes, no se sigue, sin más, de los demás axiomas sino mediante el axioma V 1.

En el capítulo séptimo, las construcciones geométricas fundadas en los axiomas I-IV, Hilbert muestra qué problemas elementales de construcción son resolubles con base en los diez y ocho axiomas I-IV. Aparecen las construcciones efectuadas en el libro primero de Euclides.

La demostración de un teorema no está determinada de manera única

Es útil llamar la atención sobre varios sucesos en la composición de *Fundamentos de la geometría*.

El enunciado del teorema 5 figuraba como axioma en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*. En 1902, E. H. Moore publicó en *Transactions of the American Mathematical Society*, una deducción de dicho enunciado a partir de los axiomas planos de incidencia y ordenación.

El enunciado 'Dos ángulos congruentes con un tercero son congruentes entre sí' figuraba como axioma en las primeras ediciones. A. Rosenthal dio una demostración (*Mathematische Annalen*. Tomo 71). La forma modificada de los axiomas I 3, y, I 4 es también debida a A. Rosenthal, Math. Ann. 69. El teorema 32, de la compleción espacial, figuraba inicialmente como axioma. Paul Bernays, colaborador de Hilbert, mostró que bastaba asumir la compleción lineal.

La presentación de las condiciones exigidas de orden lineal y de congruencia, ligadas al enunciado del axioma V 2, publicadas a partir de la séptima edición alemana, fue hecha por F. Bachmann.

Hay otro suceso digno de anotar aquí. En el capítulo tercero, para establecer la teoría de las proporciones, Hilbert tuvo necesidad de demostrar un teorema que él llamó de Pascal.

Teorema 40, o, teorema de Pascal. Sean respectivamente A, B, C y A', B', C', dos ternas de puntos situados sobre dos rectas que se cortan y distintos todos ellos del punto de intersección. Si CB' es paralela a BC' y CA' es paralela a AC', entonces, BA' también es paralela a AB'.

Importa fijar la atención, no sobre la demostración misma, bastante complicada, sino, sobre el hecho de que otros matemáticos hayan podido demostrar el mismo teorema partiendo de condiciones bien diferentes a las de Hilbert, como lo muestra el esquema de dichas demostraciones.

La demostración de Hilbert emplea los trece axiomas: I 1-3, II, III, IV.

La demostración de Schur emplea los diez y siete axiomas: I, II, III. Es de notar la ausencia del axioma de la paralela en un teorema acerca de paralelas.

La demostración de Hjemslev emplea los doce axiomas: I 1-3, II, III. Comparada con la de Schur, continúa en esta demostración la ausencia del axioma de la paralela, y, se añade, además, la de los axiomas espaciales.

La demostración de un teorema nunca es única. Y mientras menos suponga la hipótesis, más largo es el camino que hay que recorrer para llegar a la tesis.

Investigaciones complementarias de Max Dehn

Estas investigaciones fueron completadas por un discípulo de Hilbert, Max Dehn. *Die Legendreschen Sätze über Winkelsume in Dreieck*. 1900. Math. Ann. Band 53. pp. 405-439, quien, mediante una reformulación para generalizarlos de los axiomas de ordenación de manera que la otra geometría no euclidiana, la de Riemann, quedará cobijada, y, con base en solo los tres primeros grupos de axiomas, obtiene resultados espectaculares, como estos:

Si en un triángulo, la suma de los ángulos es mayor, igual o menor que dos rectos, lo mismo sucede en todo triángulo.

Si

- Se admite una infinidad de paralelas a una recta por un punto exterior a ella.
- No se admite el axioma de Arquímedes.

entonces

- No se puede demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor que dos rectos.
- Existe una geometría, en la cual se puede trazar una infinidad de paralelas a una recta por un punto y en la cual se pueden demostrar los teoremas de la geometría de Riemann.

- Existe una geometría en la cual hay una infinidad de paralelas a una recta por un punto exterior a ella y en la cual son válidos, sin embargo, los teoremas de la geometría euclidiana.

Si se supone que no hay paralelas a una recta por un punto exterior a ella, se deduce siempre que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

Si se supone el axioma de Arquímedes, entonces, el axioma de las paralelas puede ser reemplazado por la condición de que la suma de los ángulos de un triángulo sea igual a dos rectos.

Dehn demostró también que la hipótesis del ángulo obtuso es compatible con la hipótesis de una línea recta abierta en una geometría no arquimediana y que en una arquimediana no hay tal compatibilidad.

La combinación de axiomas enseñada por Hilbert explica, en primer lugar, algunos episodios de la historia de la geometría; pero, en segundo lugar, cambia radicalmente la concepción tradicional de que la geometría era una mera descripción del mundo físico (Euclides, Descartes, Comte, ...); no solo ensancha de manera insospechada el ámbito de sus consideraciones, sino que permite comprender que hacer geometría consiste en derivar cuantas consecuencias sean posibles mediante el uso de la lógica como único instrumento admitido, a partir de enunciados asumidos con el objeto específico de hacer geometría. Por allí mismo fue posible llegar a entender la matemática como una generalización del programa de la geometría: "Hilbert enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente", (Dieudonné).

Ruptura de la unidad de la geometría

Si la negación del quinto postulado implica contradicción, no se puede hacer una geometría con la negación del quinto postulado. Habría habido, en tal caso, dos caminos: no tomar en consideración ni el quinto postulado, ni su negación y se obtendría una primera geometría; o, tomar el quinto postulado para obtener una segunda geometría.

Ahora bien, lo que la obra de Saccheri muestra es que no aparece contradicción si se niega el quinto postulado. Se puede negar el quinto postulado asumiendo que por un punto exterior a una recta, en el plano determinado por el punto y por la recta, pasa menos de una paralela, es decir, no pasa paralela alguna; o, asumiendo que pasa más de una paralela. Aparecen, entonces, tres caminos, según se niegue de la una o de la otra manera o se asuma el quinto postulado. Hasta la invención de las geometrías no euclidianas no se concebía que las tres hipótesis pudieran dar sistemas coherentes, ni, mucho menos, que pudieran ser independientes. Ello chocaba el sentir común de los entendidos. La verdad es adecuación entre el entendimiento y la realidad. "No habiendo más que una verdad de cada cosa, quien la encuentra sabe todo lo que se puede saber de ella" (Descartes. *Discurso del método*). La matemática, en particular, la geometría, es una parte de esa verdad; aunque no se haya logrado consenso acerca de qué es la realidad, la geometría que resulta es única. Negar el quinto postulado es negar que la geometría euclidiana, es decir, la geometría, la única geometría, sea verdadera. Desde este punto de vista es curioso que nadie, antes de Saccheri, se haya propuesto legitimar el quinto postulado, utilizando, como el geómetra italiano, una argumentación por reducción al absurdo. Cuán arraigado estaba el sentimiento de unidad de la geometría lo muestra el hecho de que Saccheri, al no encontrar contradicción por el lado del prejuicio que lo guía, la inventa, contraviniendo a los principios de la lógica; o el caso dramático de Taurinus, quien hace el esfuerzo de crear un aparejo analítico para una geometría que, en su opinión, no puede ser verdadera.

La verdad única, correspondiente a la realidad única, explica la dificultad que se presentó luego para acometer el proyecto más atrevido de crear la geometría no euclidiana, y, con mayor razón, la dificultad para aceptar un razonamiento que tiene toda la apariencia de uno coherente, sencillamente porque contraría algunos de los principios del sentido común de la época.

Hay que dramatizar este trozo de la historia del axioma y la geometría. Porque, con la misma ligereza con la que se rechazaba antes de Bolyai-Lobachevski, la geometría que pugnaba por salir a la luz, con la única ayuda de la lógica y contra todas las baterías del sentido común, se oye a veces, minimizar la aventura de la gestación no euclidiana con la leve aseveración de que era una generalización natural. Y claro que es una generalización; que haya sido, o no, natural depende de un ponerse de acuerdo sobre lo que se entiende por natural. El hecho es que ella supuso dar al traste con unos cuantos prejuicios; uno de los cuales, puede llamarse ontológico, profesa que una disciplina que se llame geometría debe describir la realidad, como se creía que lo hacia la geometría de Euclides. Algunos de los que más insisten en lo de la generalización natural anhelan salvaguardar la unidad de la geometría de manera que sea como un reflejo de la realidad, con el solo designio de no tener que cambiar de teoría del conocimiento, aquella en la que la geometría, en general, la matemática, era prototipo de verdad absoluta. La geometría axiomatizada por Euclides encuadraba dentro del realismo tradicional, pero lo mismo hubiera sucedido con otra axiomatización, de haberla habido, con tal de ser la única conocida, es decir, con tal de que satisficiera la triple unidad: una sola realidad, una sola verdad, una sola geometría.

Una atenta reflexión acerca de lo que significa el hecho de que haya sendas demostraciones, cada una en condiciones apropiadas, para cada uno de los tres enunciados:

La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.
La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos

permite ver que, siendo estos enunciados contradictorios entre sí, no puede haber un sistema axiomático que los contenga. Se impone la búsqueda de la coherencia; y esta se halla con el sencillo procedimiento de construir sendas axiomatizaciones. Habrá tres sistemas axiomáticos, cada uno con su coherencia interna, sin que haya que construir otro sistema donde los tres sean coherentes entre sí. Habrá tres geometrías. Se rompe la unidad de la geometría. La geometría de Euclides ya no será más la única geometría.

Axiomática formal o abstracta, axiomática material o concreta

Esta nomenclatura es apenas otra manera de indicar observaciones anteriores. La axiomatización a la manera de Euclides es una especie de física. Cuando Euclides habla de puntos, rectas, planos habla de abstracciones en sentido aristotélico, idealizaciones de objetos físicos, de los cuales se han tomado sus nombres y algunas de sus propiedades. Un teorema de Euclides debe realizarse físicamente: es lo que se llama una axiomática concreta. Los términos se refieren a objetos determinados y las proposiciones a propiedades de esos objetos. Es una axiomática de contenidos.

IX p. 16. Por el contrario, la axiomática de Hilbert es una axiomática de formas de enunciados, o como se dice comúnmente, de formas o funciones proposicionales. La atención no se enfoca hacia el fondo o contenido de los enunciados sino hacia los encadenamientos de tales enunciados, se construyen cadenas de signos de acuerdo con reglas estrictas adoptadas. La axiomática de Hilbert es una axiomática abstracta, apartada de los contenidos con un gesto análogo al de quien abstrayendo aristotélicamente se queda voluntariamente con algunas de las propiedades de los objetos físicos sobre los que practica la abstracción. La axiomatización a la manera de Hilbert contiene términos no definidos y relaciones no demostradas.

A partir de una axiomática formal se obtiene una axiomática concreta dándole a los términos primitivos o no definidos una interpretación de manera que todas las funciones proposicionales que han sido demostradas se conviertan en proposiciones verdaderas. Se habla también de realización o de modelo.

Frege: incompatibilidad de realismo platónico y formalismo

Frege, quien para algunos es un lógico a la altura de Aristóteles, atacó ásperamente a Hilbert por este aspecto formal de su axiomática que Frege no quiso aceptar. Frege apoyaba su exposición del logicismo sobre una profunde convicción de realismo y de la justeza de las tesis de Kant, acerca de la geometría: "Al llamar sintéticas a priori a las verdades de la geometría, Kant ha descubierto su verdadera esencia", escribía Frege en 1884. Hace notar Mosterín la contraposición entre la actitud de Frege como teorizante de la geometría, no propiamente investigador en geometría, y como lógico. Adhiere a la doctrina de Kant sobre la geometría, que por inercia que tuvieran las opiniones recibidas, ya debería haber comenzado a ser revaluada, más si se considera la capacidad analizadora de Frege, debido a que ya desde 1868 no cabía duda acerca de la coherencia de las nuevas geometrías; Frege ha criticado la concepción kantiana de la aritmética y por su obra de lógico ha mostrado con los hechos que Kant estaba equivocado cuando juzgaba que la lógica había salido perfecta de la obra de Aristóteles; hubiera sido de esperar que Frege no aceptara la opinión de Kant sobre la geometría sin una buena dosis de criticismo. De manera inexplicable, excluye a la geometría de su programa logicista, lo cual tenía que hacer, desde luego, si estaba de acuerdo con Kant.

Con estos supuestos, Frege sostuvo una agria polémica con Hilbert, que Jesús Mosterín presenta en:

Jesús Mosterín. *La polémica de Frege y Hilbert acerca del método axiomático*. pp. 111-130. Conceptos y teorías en la ciencia. 1984. Madrid. Alianza Universidad. 200 pp.

Desde luego, Frege había entendido muy bien el propósito de Hilbert, pero no estaba de acuerdo con él. Frege proponía comparar la teoría axiomática de Hilbert con un sistema de ecuaciones con varias incógnitas. Lo cual era muy acertado y en consonancia con la intención de Hilbert. Cada sistema de conceptos que satisfaga la teoría es como una solución de esas ecuaciones. Por eso confunde la cuestión polémica de Frege a Hilbert: "Quién nos dice que este sistema de ecuaciones tenga alguna solución y que esta sea unívoca?". Que el sistema admite en particular una solución bien determinada está escrito en el segundo capítulo de *Fundamentos de la geometría*: es la solución euclidiana, obtenida cuando se toman los veinte axiomas. Pero lo más interesante es que admite otras, para obtener las cuales basta suprimir uno o varios axiomas. Este es, precisamente, el valor de la invención de Hilbert. Es la axiomatización a la manera de Hilbert; la axiomática abstracta, que es mejor llamar formalizada. La otra es la axiomatización a la manera de Euclides; o, la axiomática concreta. Lo que cuesta trabajo comprender es por qué Frege admite únicamente la segunda y desecha la primera. Ve claramente la diferencia y describe sin titubeos el meollo del formalismo de Hilbert. Escribe, de nuevo a propósito de *Fundamentos de la geometría*: "Si las palabras *punto*, *recta*, etc. no designan nada, sino que se limitan a indicar la generalidad como las letras en la aritmética, sería muy útil para una más clara comprensión de la situación que empleásemos efectivamente letras". Es una observación que merece tenerse en cuenta: el formalista Hilbert, el partidario del signo ante todo, raramente escribió páginas en símbolos, como sí lo hicieron, y hasta qué punto, los logicistas Russell y Whitehead. Se ha hecho a Hilbert la crítica de no haber sido suficientemente explícito, por lo menos en algunos textos claves, en la separación entre el lenguaje matemático y el metalenguaje que hubiera podido indicar con unos cuantos ejemplos que mostrarán toda la extensión del proyecto y toda la delicadeza que a veces requería el manejo de los dos lenguajes. Quizá sea Gödel, no miembro de la escuela de Hilbert, el primero que haya destacado, en su trabajo más importante, la complejidad a la que puede dar lugar la conciencia de estos matices. En el pasaje citado Frege esclarece la situación, apenas unos años después de la publicación de *Fundamentos de la geometría*. Es cierto que Hilbert había gratificado a Frege con una versión más de la anécdota de 1891; el 29 XII 1899 le escribía así:

> Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y, sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc. cualquier sistema de cosas, por ejemplo, el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc. y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces, también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como el de Pitágoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos.

De la correspondencia citada por Mosterín se hace manifiesto que de la discusión epistolar no salía nada en limpio; tal vez por ello, Hilbert la suspendió. Frege, en diversos escritos, siguió atacando la axiomática abstracta de Hilbert, desde el punto de vista de la axiomática concreta. Es increíble que Frege haya escrito cosas como las siguientes:

> ¡Absurdo! Una mera formulación sin contenido no puede ser probada (1906). De que los pseudoaxiomas [así llama Frege a los axiomas formalistas, es decir, sin contenido] no expresan idea alguna se sigue además que no pueden ser premisas de una cadena de inferencias. Con los pseudoaxiomas no tenemos todavía ninguna idea y, por lo tanto, tampoco premisa alguna.
>
> Una inferencia no pertenece al campo de los signos, sino que es un acto de enjuiciamiento, que se realiza sobre la base de juicios anteriores según leyes lógicas. Cada premisa es una idea reconocida como verdadera y en el juicio inferencial se reconoce igualmente una cierta idea como verdadera.

Si un lógico, de la talla de Frege, escribía estas cosas, se necesitaba toda autoridad intelectual de Hilbert para sostener la explicación formalista de la matemática. Frege murió en 1925. Alguien asevera que Frege rechazó antes de morir cuantas habían sido sus convicciones más profundas y que por ello merece ser admirado. Sin embargo, entre sus papeles se encontró una condenación de la geometría no unívoca en perfecta coherencia con su actitud ante la axiomática. Si la única matemática válida es una matemática de contenido, no puede haber sino una geometría válida.

> Nadie puede servir a la vez a dos señores. No es posible servir a la vez a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euclidiana es verdadera entonces la geometría no euclidiana es falsa; y si la geometría no euclidiana es verdadera entonces la geometría euclidiana es falsa. Si por un punto exterior a una recta pasa siempre una paralela a esa recta y solo una, entonces para cada recta y para cada punto exterior a ella hay una paralela a esa recta que pasa por ese punto y cada paralela a esa recta por ese punto coincide con ella. Quien reconoce la geometría euclidiana como verdadera, debe rechazar como falsa la no euclidiana, y quien reconoce la no euclidiana como verdadera, debe rechazar la euclidiana. Ahora se trata de arrojar a una de ellas, a la geometría euclidiana o a la no euclidiana, fuera de la lista de las ciencias y de colocarla como momia junto a la alquimia y a la astrología. ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la euclidiana o a la no euclidiana? Esa es la cuestión.

¿Lleva siempre el realismo a ultranza a estos callejones sin salida? En cuanto Hilbert ensayaba fundamentar la geometría euclidiana no consideró sino tres dimensiones. ¿Qué habrá pensado Frege de un mayor número de dimensiones en geometría por lo menos?

Hilbert utilizó la deducción a partir de axiomas, es la herencia de Pitágoras aunque no constituida en forma sino con Euclides. Hilbert hace consciente el tránsito entre la geometría como un solo sistema deductivo fuertemente anclado en el realismo y las diversas geometrías que se obtienen mediante combinaciones de axiomas, enunciados con base en las intuiciones espaciales, pero sin el contenido de tales intuiciones. Enseñó a pensar axiomáticamente, en cuanto mostró que los teoremas no son verdades naturales, sino "verdades" independientemente de aquello con que se puedan llenar las fórmulas, dependientes únicamente de las articulaciones entre tales fórmulas desde unas cuantas fórmulas inicialmente dadas y de manera lógica exclusivamente. Platón afirmaba que el matemático no puede desprenderse de las hipótesis, vale decir, que las verdades matemáticas están determinadas por las premisas; pero en Platón son verdades en sentido absoluto. La herencia de Hilbert está en saber que esas verdades no son absolutas sino relativas, cambian al cambiar las hipótesis. Era forzoso llegar a esta explicación una vez admitida la coherencia por separado de cada una de las tres geometrías. Sin abandonar el realismo platónico, no es posible aceptar coherentemente las tres geometrías. Es la conclusión lógica de Frege.

Cómo fue posible que algunos geómetras demostraran un postulado, el quinto de Euclides

La combinatoria hilbertiana de axiomas permite explicar este hecho. Quienes intentaron demostrar el quinto postulado y lo lograron, tuvieron que añadir algo. Puesto que el éxito los acompañó, en lo añadido introdujeron algo que facilitó la tarea. No se atuvieron a las hipótesis. Bonola transcribe los enunciados de algunos de tales "añadidos", se les designa con la letra **h** para recalcar que se trata de hipótesis.

$\mathbf{h}_1$. Los ángulos internos, formados por dos paralelas sobre un mismo lado de una transversal, suman dos ángulos rectos (Ptolomeo).

$\mathbf{h}_2$. Dos líneas rectas paralelas son equidistantes (Definición de Posidonio).

$\mathbf{h}_3$. Si una línea recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra (Proclo).

$\mathbf{h}_3'$. Dos líneas rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí (*Elementos* I 30).

$\mathbf{h}_3''$. Por un punto exterior a una línea recta, puede trazarse una única paralela a esa recta (Enunciado al que dan los libros el nombre de axioma de Playfair, físico y matemático escocés, l788 - 1819, pero que es mucho más antiguo).

$\mathbf{h}_4$. Dado un triángulo, puede construirse otro triángulo de tamaño cualquiera, semejante al triángulo dado (Wallis).

$\mathbf{h}_5$. Por tres puntos, no colineales, puede siempre trazarse un círculo (Wolfgang Bolyai).

$\mathbf{h}_6$. Por un punto entre las líneas que determinan un ángulo, puede siempre trazarse una línea recta, que corta a las dos líneas (Lorenz. 1791).

$\mathbf{h}_7$. Si una línea recta r es perpendicular a una transversal AB, y una recta s corta a AB en ángulo agudo, entonces, las perpendiculares desde puntos de s hasta r son menores que AB, por el lado en que AB hace ángulos agudos con s (Nasir Edin).

$\mathbf{h}_8$. El conjunto de los puntos equidistantes de una línea recta es una línea recta (Clavio).

$\mathbf{h}_9$. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos (Saccheri)

Hipótesis equivalentes al quinto postulado

Tales enunciados deben modificar las condiciones iniciales puesto que hacen posible, en cada caso, deducir lo que sin ellos no es posible. Efectivamente, tales enunciados introducen en el sistema de postulados un enunciado equivalente a aquel que se intenta demostrar, en el preciso sentido siguiente:

Si en un sistema axiomático del cual A, B, C, …, H son hipótesis, los enunciados M y N son tales que

$$\begin{aligned}&\text{de } \big((A,B,C,\dots,H),M\big) \text{ se sigue } N,\\ &\text{de } \big((A,B,C,\dots,H),N\big) \text{ se sigue } M.\end{aligned}$$

entonces, los enunciados M y N son *equivalentes* respecto de las hipótesis $(A,B,C,\dots,H)$.

Si un sistema axiomático del cual A, B, C, ..., H son hipótesis es tal que

$$\text{de } \big((A, B, C, \dots, H), M\big) \text{ no se sigue } N,$$
$$\text{de } \big((A, B, C, \dots, H), N\big) \text{ no se sigue } M.$$

entonces M y N no son equivalentes respecto de $(A, B, C, \dots, H)$.

Se podrían establecer algunas equivalencias.

Los enunciados $\mathbf{h}_3'$, $\mathbf{h}_3''$ son equivalentes, cada uno puede derivarse del otro.

Las siete hipótesis

$$\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_2,\ \mathbf{h}_3,\ \mathbf{h}_4,\ \mathbf{h}_5,\ \mathbf{h}_6, \text{ quinto postulado}$$

son equivalentes respecto a los tres agrupamientos de axiomas de enlace, de ordenación, de congruencia, de Hilbert.

Las tres hipótesis

$$\mathbf{h}_7,\ \mathbf{h}_8,\ \mathbf{h}_9$$

son equivalentes respecto a los tres agrupamientos de enlace, de congruencia, de ordenación.

Nótese que sin los axiomas de continuidad, V, se tienen las equivalencias de las siete primeras hipótesis entre sí, y, de las tres últimas hipótesis entre sí; pero no de las diez hipótesis entre sí.

Las diez hipótesis

$$\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_2,\ \mathbf{h}_3,\ \mathbf{h}_4,\ \mathbf{h}_5,\ \mathbf{h}_6,\ \mathbf{h}_7,\ \mathbf{h}_8,\ \mathbf{h}_9, \text{ quinto postulado}$$

son equivalentes en el sistema axiomático formado por los agrupamientos hilbertianos de incidencia, ordenación, congruencia, continuidad. En tal caso se tiene, desde luego, la geometría euclidiana.

La hipótesis $\mathbf{h}_9$ no solo es compatible con la geometría euclidiana, sino con una geometría

- no arquimediana
- sin quinto postulado
- en la que una infinidad de rectas que pasan por un punto no cortan una determinada línea recta.

Recapitulación

Con *Elementos*, la geometría había suministrado el primer paradigma de axiomatización. (Se usa paradigma en lugar de modelo, término que con el sentido de interpretación o realización se impone cada vez más como tecnicismo). Con *Fundamentos de la geometría*, suministró una vez más la geometría el nuevo paradigma de axiomatización. Se tiene así, axiomatización a la manera de Euclides de la geometría euclidiana, y, axiomatización a la manera de Hilbert de la misma geometría euclidiana, suficientemente diferenciadas, propósito enunciado al comenzar el capítulo.

	Bolyai - Lobachevski	*Euclides*	*Riemann*
Modelo euclidiano	Círculo del plano euclidiano	Plano euclidiano	Superficie de una esfera dada
Punto	Punto dentro del círculo modelo	Punto del plano euclidiano	Punto sobre una superficie esférica dada
Línea recta	Cuerda del círculo modelo	Rectas del plano euclidiano	Círculos máximos de la superficie esférica
Longitud de la recta	Infinita	Infinita	Ilimitada infinita
Postulado I de Euclides	Sí	Sí	No
Postulado III de Euclides	Sí	Sí	Sí
Postulado IV de Euclides	Sí	Sí	Sí
Postulado V de Euclides	No	Sí	No
Axiomas I 1-3 de Hilbert	Sí	Sí	No

Axiomas II de Hilbert	Sí	Sí	No
Axiomas III de Hilbert	Sí	Sí	Sí
Postulado II de Euclides	Sí	Sí	Sí
Axiomas IV de Hilbert	No	Sí	No
Axiomas V de Hilbert	Sí	Sí	Sí
Hipótesis de Saccheri	Ángulo agudo	Ángulo recto	Ángulo obtuso
Un punto divide a una recta en dos	Sí	Sí	No
Dos rectas distintas	Se cortan a lo más en un punto	Se cortan a lo más en un punto	Siempre se cortan en dos puntos
Si una recta corta a una de dos paralelas	Puede o no cortar a la otra	Corta a la otra paralela	No hay paralelas
Dos rectas perpendiculares a una tercera	Son paralelas	Son paralelas	Se cortan
Suma de los ángulos de un triángulo	Es menor que π	Es igual a π	Es mayor que π
Longitud de la circunferencia divida por el radio	Es mayor que 2π	Es igual 2π	Es menor que 2π

Cuadratura del círculo	Sí	No	
Área del triángulo	$k^2\left(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}\right)$ Proporcional al defecto de la suma de los ángulos	Independiente de la suma de los ángulos	$k^2\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi\right)$ Proporcional al exceso de la suma de los ángulos
Ángulo de paralelismo	Menor que un ángulo recto	Igual a un ángulo recto	No hay
Existen triángulos de área arbitrariamente grande	No	Sí	No
Semejanza	No	Sí	No
Curvatura del modelo	Menor que 0	Igual a 0	Mayor que 0
Dos triángulos con ángulos correspondientes iguales	Son congruentes	Son semejantes	Son congruentes
Aplicaciones	Teoría de la visión. Teorías físicas. Etc.	Teorías físicas. Construcciones a nivel microscópico	Relatividad. Teorías físicas. Navegación.

Cuadro comparativo de tres geometrías.

Cuestiones

1. ¿Qué es postulado en Euclides? ¿Qué es noción común en Euclides? ¿Qué es postulado o axioma en Hilbert?
2. ¿Había alguna razón histórica para llegar a no distinguir entre axioma y

postulado? ¿La evidencia tiene importancia en Hilbert como criterio para seleccionar axiomas?

3. En Euclides hay una gradación: definiciones, postulados, nociones comunes; como quien dice: objetos geométricos, enunciados acerca de estos objetos geométricos, enunciados acerca de objetos más generales que los geométricos. ¿Guarda Hilbert la misma disposición para los primeros principios?
4. ¿Cuál es el papel de las definiciones en Hilbert?
5. ¿Hay términos no definidos en Euclides? ¿en Hilbert? ¿Había alguna razón histórica para que Hilbert tomara tales términos no definidos?
6. ¿Cuántas y cuáles son las relaciones no definidas en Hilbert?
7. ¿Cómo se distingue nivel intuitivo y nivel formal, en cuestión de definiciones? ¿Y en cuanto a los términos no definidos? ¿En cuanto a las relaciones no definidas?
8. ¿La formalización supone indispensablemente la simbolización?
9. ¿Cómo se guía el geómetra para el manejo de los términos no definidos *punto*, *recta*, *plano*? ¿Y para el manejo de las relaciones dadas? ¿Cómo se fija el empleo de "estar entre", por ejemplo? Análoga cuestión para las otras relaciones dadas.
10. Comparar el lenguaje corriente y el lenguaje de un sistema formal. Parentesco. Diferencias.
11. ¿Qué califica Hilbert como "análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales"?
12. ¿Qué acepción da un diccionario corriente para la palabra *geometría*? ¿Coincide esta acepción con la concepción de Hilbert?
13. Según Brunschvicg, "Euclides, para las numerosas generaciones que se han nutrido de su substancia, ha sido menos quizá un profesor de geometría que un profesor de lógica". (*Las etapas de la filosofía matemática.* £ 49). ¿Ha sido Euclides profesor de geometría? ¿Ha sido profesor de lógica y en qué grado, según el autor citado? ¿En qué sentido ha sido profesor de lógica? ¿Durante alguna época, Euclides era tomado solamente por el aspecto lógico? ¿O por el aspecto axiomático? En este caso, ¿debería *Elementos*, de Euclides, ceder, el puesto a *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert?

14. ¿Cómo determina Hilbert el alcance de cada agrupación de axiomas? (Hay un texto de Bourbaki, citado, que puede servir de ayuda para componer la respuesta).
15. ¿Las geometrías de Bolyai-Lobachevski y de Riemann aparecen como casos particulares en la construcción de Hilbert?
16. ¿Qué nociones hay definidas en el capítulo I de *Fundamentos de la geometría*?
17. ¿Qué problemas aparecen enunciados en el capítulo II de *Fundamentos de la geometría*?
18. ¿Cómo está enunciado el problema de no contradicción de la geometría construida por Hilbert?
19. ¿Cuántas geometrías satisfacen los diez y nueve axiomas I-IV, V 1?
20. ¿Cuántas geometrías satisfacen los veinte axiomas I-V?
21. ¿En qué consiste el problema de independencia de los axiomas?
22. ¿Cómo demuestra Hilbert la independencia del axioma de las paralelas?
23. ¿Cómo demuestra Hilbert la independencia del axioma III 5?
24. ¿Qué es una geometría no arquimediana?
25. Puede definirse las nociones: "segmento", "ángulo", "estar en lados diferentes de un punto sobre una recta", "semirrecta", "estar en lados diferentes de una recta en un plano" ¿sin los axiomas de enlace? ¿De orden? ¿De congruencia? ¿De paralelismo? ¿De continuidad? (Examen detallado para cada noción).
26. ¿Algunas respuestas en 25, pueden explicar por qué Hilbert no muestra la independencia de las agrupaciones de axiomas I y II? ¿Cómo?
27. ¿Qué falta en el enunciado

    Si en un triángulo, la suma de los ángulos es mayor, igual, menor que dos ángulos rectos, entonces…

    para tener uno de los teoremas de Max Dehn?
28. Enunciar otro teorema de Max Dehn.
29. Componer un tercer teorema de Mex Dehn con los elementos de frase:

    No existencia de paralelas a una recta.
    Suma de los ángulos de un triángulo mayor que dos rectos.

30. Qué detalle histórico tienen en común estos tres pasajes de *Fundamentos de la geometría*:

    El teorema 5 (consecuencia de los axiomas de ordenación).
    El enunciado: 'Dos ángulos congruentes con un tercero son congruentes entre sí'. Es el teorema 19 de Hilbert.
    El teorema 32 o teorema de la compleción.

31. ¿Es única la demostración de un teorema? (Dentro del mismo sistema formal).
32. ¿Es única la solución de un problema bien puesto? ¿Es único el método para encontrar la solución de un problema?
33. ¿Por qué se pensaba, antes de las geometrías no euclidianas, que no podía ser que la euclidiana no fuera la única? ¿Desargues y Pascal no habían pensado ya en la geometría proyectiva?
34. Cite ejemplos de enunciados que son teoremas en dos, o en tres geometrías. Cite ejemplos de enunciados que no son teoremas sino en una de las tres geometrías (la euclidiana y las dos no euclidianas).

35. Comte (*Curso de filosofía positiva*. Lección segunda. Consideraciones generales sobre la jerarquía de las ciencias positivas) dice:

    > Las matemáticas se deben dividir en dos grandes ciencias cuyos caracteres son esencialmente distintos: la matemática abstracta o cálculo, tomando esta palabra en su más amplia extensión, y las matemáticas concretas, que se componen, por un lado, de la geometría general y, por otro, de la mecánica racional.
    >
    > La geometría y la mecánica deben considerase como verdaderas ciencias naturales, basadas, como las restantes en la observación, aunque, por la extrema simplicidad de sus fenómenos, implican un grado infinitamente más perfecto de sistematización, lo cual ha hecho desconocer algunas veces el carácter experimental de sus primeros principios. Pero, estas dos ciencias físicas tienen de particular que en el estado actual del espíritu humano, son y serán siempre empleadas como método más que como doctrina.

    ¿Las "intuiciones espaciales" que entran en la concepción de la geometría de Hilbert satisfarían la referencia a la observación y a la experimentación exigidas por Comte? ¿Según lo que aparece en *Fundamentos de la geometría*, será para Hilbert la geometría una ciencia física? ¿Qué papel pueden tener la observación y la experimentación en la concepción de Hilbert? Comte terminó su curso hacia 1838. ¿Es teóricamente posible que haya tenido noticia de la geometría de Bolyai-Lobachevski? ¿Prácticamente?

36. ¿Por qué se dice que la axiomática de Euclides es concreta y la de Hilbert abstracta?
37. ¿Cómo se pasa de una axiomática formal a una concreta?
38. ¿A qué se llama una realización, una interpretación, un modelo de una teoría formal?
39. ¿Qué modelo presenta Hilbert para la geometría con los veinte axiomas?
40. ¿Qué es matemática pura? ¿Qué es aplicación de la matemática, o, matemática aplicada?
41. ¿Estaba de acuerdo Frege con la filosofía matemática de Kant en cuanto a la geometría? ¿En cuanto a la aritmética? ¿Admite en ambas disciplinas los juicios sintéticos a priori de Kant? ¿Qué distinción hace?
42. ¿Estuvo de acuerdo Frege con la intención de *Fundamentos de la geometría*? ¿Sobre qué argumentaba?
43. "amor", "ley", "deshollinador" se pueden emplear en lugar de "punto", "recta", "plano"? ¿De quién procede el par de ejemplos? ¿Lo que se quiere acentuar con ellos es la que la geometría es una axiomática formal o una axiomática concreta? ¿Por qué?
44. "Cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos". "Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente". ¿Qué trata de hacerle entender Hilbert a Frege?
45. Según Frege, "una afirmación sin contenido no puede ser probada". ¿La aritmética empleada por Frege es una teoría material, es decir, con contenido? ¿Para qué necesitaba Frege los juicios sintéticos a priori en geometría? ¿Cuál es la opinión de Hilbert al respecto?
46. ¿Podía aceptar Frege las geometrías no euclidianas? ¿Las aceptó? ¿Cómo se expresa?
47. ¿A qué se puede llamar la herencia de Euclides en lo tocante a axiomática?
48. ¿A qué se puede llamar la herencia de Hilbert en lo tocante a axiomática?
49. ¿Son compatibles el realismo platónico y la coherencia de las tres geometrías: euclidiana, Bolyai-Lobachevski, riemann?
50. Representar gráficamente las equivalencias, entre las hipótesis históricas $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_9$.

51. Verificar que las tres rectas

$$x - y + 1 = 0, \qquad x - y = 0, \qquad x - y - 1 = 0$$

son paralelas. Hallar la intersección de cada una de ellas con el eje de las ordenadas. Verificar, en tal situación, que por un punto exterior a una recta, en el plano, pasa una única paralela a dicha recta. ¿Qué enunciado es este?

52. Describir el interés que puede tener en el estudio de *Fundamentos de la geometría*, cae uno de los especialistas en geometría, lógica, epistemología?

53. ¿Por qué es más larga la lista de los axiomas en Hilbert que la de los postulados en Euclides?

54. Enunciados que Hilbert había tomado inicialmente como axiomas pudieron ser demostrados. Cite casos. ¿Cómo puede ser explicado un hecho como ese?

55. "No son las figuras las que dan la prueba a los geómetras. La fuerza de la demostración es independiente de la figura dibujada, que no se utiliza más que para facilitar la comprensión de lo que se quiere decir y para fijar la atención; son las proposiciones universales, es decir, las definiciones, los axiomas, y los teoremas ya demostrados los que hacen el razonamiento y lo contendrían aún cuando la figura no existiera" (Leibniz, citado, parágrafo 49, en: Brunschvicg. *Las etapas de la filosofía matemática.* (1929, tercera edición francesa). Traducción española. 1945. Buenos Aires. Lautaro. 633 pp.). Comparar esta opinión con la de Platón (*República* 513) y con las de Russell citadas en el capítulo VII. ¿Se aviene la opinión de Leibniz con la construcción de los conceptos en Kant? ¿O está más cerca de la concepción axiomática de Hilbert?

56. Bourbaki, presenta de la siguiente manera la obra de Hilbert, *Fundamentos de la geometría*:

> ... libro que, por la lucidez y la profundidad de la exposición, debía convertirse bien pronto, y con justicia, en el módulo de la axiomática moderna, hasta hacer olvidar a sus predecesores. En efecto, no contento, con dar un sistema completo de axiomas para la geometría euclidiana, Hilbert clasifica estos axiomas en diversos agrupamientos de naturaleza diferente, y se dedica a determinar el alcance exacto de cada uno de estos agrupamientos, no solo mediante el desarrollo de las consecuencias lógicas de cada uno de ellos por separado, sino más aún con la discusión de las diversas geometrías" obtenidas al suprimir o modificar algunos de los axiomas (la de Lobachevski y la de

Riemann no aparecen ya sino como casos particulares). Pone así, claramente en relieve, en un dominio considerado hasta entonces como uno de lo más cercanos a la realidad sensible, la libertad de que dispone el matemático en la selección de sus postulados. A pesar de la desazón producida en más de un filósofo por estas "metageometrías" con propiedades tan extrañas, la tesis de los "Grundlagen" fue rápidamente adoptada de manera casi unánime por los matemáticos; H. Poincaré, de quien no se puede sospechar de parcialidad en favor del formalismo, reconoció en 1902 que los axiomas de la geometría son convenciones, para las cuales la noción de "verdad" como se la entiende de costumbre, no tiene sentido. La "verdad matemática" de este modo reside únicamente en la deducción lógica a partir de las premisas puestas arbitrariamente por los axiomas.

¿Está Poincaré de acuerdo con Frege o con Hilbert?
¿Cómo se ve que los matemáticos aceptan la tesis de Hilbert?
¿Demoró mucho Frege para desechar sus propias opiniones?
¿Cuáles son los aciertos que Bourbaki anota para el libro de Hilbert? Ilustrar con lo estudiado en este capítulo. ¿Bastaba este párrafo de Bourbaki para apreciar la obra de Hilbert? ¿Por qué sí? O, ¿por qué no?
Personalmente, ¿qué ideas cree que han sido muy repetidas al comparar la obra de Euclides con la de Hilbert? Nombre tres, por lo menos. ¿Son ellas coherentes entre sí? ¿Cuál es la importancia de ellas para la epistemología? ¿Por qué?

Bibliografía

Los tres títulos citados en la bibliografía del capítulo 8 más

1. BONOLA, Roberto. *Non euclidean geometry.* (1906). (1912). 1955. Dover reprint. *xiv* + 268 pp. + 120 pp.

2. BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques.* (1969). 1974. Paris Hermann. 379 pp.

Capítulo 10

El segundo problema de Hilbert. La no contradicción de la matemática. Metamatemática

Nadie debe poder expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.

[Hilbert. 1925. *Acerca del infinito*].

Introducción

El despliegue natural del pensamiento matemático vivió una de sus etapas más notables entre 1879 y 1931, a la cual podemos referirnos como la del problema de los fundamentos de la matemática. Y no es que antes nadie se hubiera preocupado de un asunto que, en el siglo XX aparece tan capital, sino que esta vez el problema se presentó dentro de la matemática misma, como un evento natural de su desarrollo; es una crisis de crecimiento, no una ocasionada por algún filósofo que, por curiosidad o por oficio, se hubiera asomado con espíritu crítico a la fragua matemática. De haber sido esta la causa, quizá no habría afectado con tanta profundidad a casi todos los pensadores de esta disciplina, la mayor parte de los cuales ni siquiera habría aceptado, antes de la crisis, que hablara seriamente quien afirmara que también la matemática necesita examinar sus basamentos. Tal era la convicción de que las verdades de la matemática eran absolutas.

En este capítulo, se trata de ver el desenvolvimiento del crítico período, que, desde luego, los matemáticos convirtieron en una cuestión más para la indagación, de la cual habrían de salir con más poderosos instrumentos y con una más amplia visión de su pujante ciencia.

El movimiento había tomado ya un aspecto muy concreto en el proyecto de Pasch, de separar la intuición de la geometría, o en el más radical de Frege (1879) de separar la intuición de la matemática. Mediante el cálculo ideográfico, dice Frege (Heijenoort, p. 55), puede verse "cómo el pensamiento puro, sin tomar en consideración contenido alguno de los sentidos o de alguna intuición pura a priori, es capaz, a partir del solo contenido que resulta de su propia constitución, de dar a luz proposiciones que, a primera vista, parecen posibles únicamente con base en la intuición". Nada de juicios sintéticos a priori kantianos, todos los juicios de la matemática son analíticos, válidos más allá de cualquier dominio intuitivo. La exposición sistemática emprendida por Frege y otras ideas en estrecha conexión con aquella, harán que el pensamiento de Frege sea estudiado con intensidad posteriormente. Baste recordar, como indicación, que es el lógico a quien los esposos Kneale dedican el mayor número de páginas en su excelente obra *Desarrollo de la lógica*. Son, empero, otros matemáticos los que adelantan la discusión acerca del problema de los fundamentos: Russell, Poincaré, Brouwer, Hilbert y su escuela.

En este capítulo se trata de contar la indagación organizada y realizada por Hilbert. Porque, en primer lugar, con ella prosigue Hilbert en la misma línea de trabajo que llevaba al componer *Fundamentos de la geometría*. En segundo lugar, porque Hilbert dedicó años de trabajo investigativo (principalmente a partir de 1917) al estudio en profundidad de diversos aspectos de la cuestión, que interesan desde el punto de vista de la epistemología. Porque, en tercer lugar, con las contribuciones de Hilbert, la axiomática se desprende de la geometría y se constituye en una disciplina sui generis, llamada por Hilbert mismo, la teoría de la demostración y, posteriormente, metamatemática.

Es interesante conocer la lista de una docena de trabajos dedicados por Hilbert a la fundamentación, y, por lo menos, el extracto de algunas de las más vigorosas ideas expresadas por Hilbert. Como jalones, se indicarán los años respectivos de aquellos.

1891. 'Mesa, taburete, vaso de cerveza'

"Mesa, taburete, vaso de cerveza" en vez de "punto, recta, plano". Hay una anécdota, muy conocida en el medio geométrico, que muestra a las claras, cuán distante era ya, en 1891, la axiomatización de la geometría euclidiana como la pensaba Hilbert, de la axiomatización de la misma geometría euclidiana, como la había hecho Euclides.

En una sala de espera, en Berlín, discutía Hilbert con dos geómetras (si no me equivoco, A. Schenflies y E. Kötter) acerca de la axiomática de la geometría y expresó su concepción, según su peculiar manera cortante, mediante la sentencia: uno debe siempre poder decir: "mesa, taburete, vaso de cerveza" en lugar de "punto, recta, plano".

Es esta una ocurrencia reveladora de la quintaescencia del método axiomático de la manera como Hilbert comenzaba a concebirlo y como va a proponerlo, años después, en oportunidades diversas a la consideración de los matemáticos. "Puras combinaciones de signos en las que importa únicamente el encadenamiento", para expresarlo en los términos de Bourbaki (p. 16) a propósito de la concepción de Leibniz, similar a la de Hilbert y que hubiera podido antecederla a guisa de modelo, si hacia finales del siglo XIX ya hubiera sido desenterrada la rica herencia del filósofo y matemático alemán.

Hay que observar que Hilbert no se había salido de la línea de trabajo seguida en otros campos de la matemática en donde ya había descollado como matemático de primer orden. Fue su investigación acerca de las formas invariantes (1890. *Über die Theorie der algebraischen Formen.* Math. Ann. 36. p. 473), la que lo lanzó a la fama de que puede gozar un matemático. Era este un campo intensamente cultivado entonces; fue a Hilbert, empero, a quien correspondió demostrar un teorema fundamental (finitud de base para formas invariantes) y disminuir, debido a las consecuencias del teorema, el interés en la teoría. Según Dieudonné (Jean Dieudonné and James Carrell. *Invariant theory. Old and New.* 1971. New York. Academic Press. *viii* + 85 pp.) el artículo de Hilbert es el primero escrito en el que sería luego el estilo del álgebra moderna, por el enfoque de conceptos, no de cálculo; y por los métodos empleados. Paul Gordan, "rey de los invariantes" (Reid, p. 29), quien había demostrado, 1868, un caso particular del teorema, comentó a propósito del estilo matemático de Hilbert ya en 1890: "Esto ya no es matemática, es teología". Sin embargo, es esta concepción la que va a imponerse, y no solamente en álgebra, sino en gran parte de la matemática. Se lee en Dieudonné (p. 295):

Antes de Hilbert, nadie había podido realizar tal programa [exponer a plena luz los resortes lógicos de las demostraciones geométricas, desposeyéndolas de todo llamado a la intuición] con tanta decisión y claridad, y, nadie había puesto en relieve el principio fundamental de que, en matemática, no cuenta la naturaleza propia de los objetos estudiados; son las relaciones que tienen estos entre si, las que únicamente son importantes.

Esta manera de exponer la matemática va a ser consagrada unos años más tarde, en 1899.

1899. *Fundamentos de la geometría*

En la introducción de esta obra, Hilbert afirma que su investigación se propone encontrar "un sistema completo de axiomas, lo más sencillo posible", es decir, subraya la compleción y la economía, como caracteres salientes del sistema formal que ha concebido para la geometría. Es curioso, sin embargo, que las propiedades que le merecen capítulo aparte, el segundo, son la incontradiccionabilidad de los axiomas, y, la recíproca independencia de los mismos. Más aún. De la investigación de Hilbert sobre la fundamentación de la geometría, el aspecto que va a tener prolongamientos, en profundas investigaciones, es el de la no contradicción, que, dadas las circunstancias de la crisis de los fundamentos, Hilbert extiende a toda la matemática.

Beltrami, Klein y Poincaré demuestran la no contradicción de las geometrías no euclidianas mediante un razonamiento cuyo esquema es la implicación: si la geometría de Bolyai-Lobachevski es contradictoria, entonces, la geometría euclidiana es contradictoria. Por contrarrecíproca: dado que la geometría euclidiana es no contradictoria, resulta que la geometría de Bolyai-Lobachevski también es no contradictoria. Bertrand Russell, entre otros, ha observado que el geómetra Euclides hace geometría física; procede por abstracción, en el sentido aristotélico, es decir, a partir del mundo físico; algunas de las definiciones del libro primero no son sino una trabajosa descripción de una intuición (piénsese en las de recta o de plano) y los postulados están ahí por evidentes, según la concepción griega de los primeros principios. Se está copiando del mundo externo, incluso, al parecer, con el quinto postulado (lo cual, como ya se vio, no será aceptado de manera unánime). En estas condiciones, no hay lugar para ciertos problemas, como el de no contradicción de los postulados del sistema, puesto que se supone que la realidad no puede ser contradictoria.

Muy otra es la situación de Hilbert, quien, ha tomado términos del lenguaje corriente, les ha vaciado el contenido con el que en aquél se los utiliza; y quien ha escogido los axiomas, no por ser autoevidentes, sino por una confluencia de razones, unas fruto del análisis sobre los avatares de *Elementos*, de Euclides, otras pendientes de las metas visadas por Hilbert al acometer su propia axiomatización de la geometría. El proyecto ambicioso de Hilbert es que la validez de la construcción se asiente sobre la coherencia lógica del sistema.

La no contradicción se prueba de manera relativa o de manera absoluta, según se proceda desde fuera o desde dentro del sistema formal. Para su axiomatización de la geometría, Hilbert da una prueba relativa de no contradicción como ya se vio en el capítulo IX de la obra entre manos.

Si hubiera contradicción en la geometría fundada en el capítulo I de *Fundamentos de la geometría*, la habría también en el campo de los números reales. Como no hay contradicción en este campo, entonces, "en la geometría plana cartesiana, son válidos todos los axiomas lineales y planos" de los cinco agrupamientos de axiomas.

Esta es la prueba relativa de no contradicción; está basada en la suposición de que no hay contradicción en el campo de los números reales.

1900. París. Los veintitrés problemas matemáticos

Segundo problema La no contradicción de los axiomas de la aritmética.

¿Quién garantiza que no hay contradicción en la teoría de los números reales? ¿Quién avala al aval? Nadie ha probado que no hay contradicción en dicha teoría. He aquí un problema para los matemáticos del siglo XX naciente. El segundo de los veintitrés que propuso Hilbert en el segundo congreso internacional de matemáticos, París, 1900; resuelto treinta años más tarde.

El tema de la conferencia de Hilbert es la investigación matemática, lo que ella significa para el crecimiento tanto de un matemático como de la matemática misma; la importancia de plantear bien los problemas; y, la confianza inconmovible en que todo problema bien planteado tendría tarde o temprano una solución "porque en matemáticas no hay ignorabimus", no es posible la ignorancia perpetua.

Antes del enunciado del problema es conveniente transcribir un pasaje cuyo contenido enuncia las especificaciones de la escuela de Hilbert para la solución de un problema matemático:

Debe ser posible establecer que una solución es correcta mediante un número finito de pasos, basados sobre un número finito de hipótesis implicadas en las condiciones del problema, las cuales deben ser siempre formuladas exactamente. El requisito de la deducción lógica mediante un proceso finito es sencillamente el requisito del rigor en el razonamiento. Este requisito del rigor, que ha llegado a ser proverbial en relación con la matemática, corresponde a una necesidad filosófica general de nuestro entendimiento...

Es de notar que Hilbert se vale, en alemán, de un vocablo tomado del latín, *finite*, que no pertenece al lenguaje usual, es decir, que no se lo encuentra en los diccionarios alemanes corrientes. Algunas traducciones inglesas echan mano de la voz *finitary*, que tampoco figura en los diccionarios ingleses más usuales. Para estar en la misma tónica de señalar que se está exigiendo algo que requiere ser indicado con una dicción ajena al lenguaje común, se puede emplear el término *finitista*. Se escribirá, pues, *proceso finito*, donde Hilbert escribe *finite Prozesse* y *finitismo* para designar uno de los requisitos exigidos por Hilbert y su escuela para cualquier solución al problema de los fundamentos. Podrían utilizarse también neologismos como *finitista*, *finitario*, *finitarista*.

Para plantear el segundo de los veintitrés problemas, Hilbert presenta sumariamente lo que constituye la fundamentación axiomática de una ciencia:

Cuando se trata de investigar los fundamentos de una ciencia, debe establecerse un sistema de axiomas que contenga una descripción completa y exacta de las relaciones existentes entre los términos no definidos de dicha ciencia. Los axiomas así asumidos son las definiciones de los términos no definidos y ninguna afirmación que concierne a la ciencia cuyos fundamentos se están poniendo a prueba se considera válida a menos que pueda ser derivada a partir de los axiomas mediante un número finito de pasos lógicos.

Hechas estas cuidadosas advertencias a propósito del lenguaje, Hilbert enuncia el problema de la independencia de los axiomas; luego, el de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética:

Quiero señalar el siguiente como el más importante entre todos los problemas que pueden plantearse respecto a los axiomas: probar que no son contradictorios, esto es, que un número finito de pasos lógicos con base en ellos nunca pueden conducir a resultados contradictorios.

En la explicación con la que acompaña el enunciado del problema recuerda Hilbert la prueba relativa de no contradicción presentada por él en el segundo capítulo de *Fundamentos de la geometría* (esbozada en el capítulo anterior) mediante un modelo constituido sobre los números reales; observa luego que para demostrar la no contradicción de la teoría de los números reales se requiere una prueba directa o absoluta. Manifiesta que está convencido de que es posible hallar tal prueba de compatibilidad "mediante un estudio cuidadoso y una conveniente modificación de los métodos conocidos de razonamiento. ¿Qué significa no contradicción?

Si a un concepto se le asignan atributos contradictorios, sostengo que, matemáticamente, el concepto no existe.

Ejemplo del mismo Hilbert: no existe un número real cuyo cuadrado sea igual a -1. Vale la recíproca siguiente:

Pero, si puede probarse que los atributos asignados a un concepto, al aplicarles un número finito de procesos lógicos, no pueden tener por consecuencia una contradicción, sostengo que la existencia matemática del concepto queda probada ipso facto. Así, en el presente caso, concerniente a los axiomas de los números reales en aritmética, la prueba de la compatibilidad de los axiomas es al mismo tiempo la prueba de la existencia matemática del sistema completo de los números reales.

Hilbert hace en seguida, una anotación claramente dirigida a los partidarios de Kronecker, quien aseguraba, entre otras cosas, que eran inútiles los trabajos de los matemáticos en lo referente a los números reales, dado que estos números no existen:

Desde luego, cuando se haya hecho una prueba satisfactoria de la compatibilidad de los axiomas, las dudas, que han sido de vez en cuando expresadas, en cuanto a la existencia del sistema completo de los números reales quedarán totalmente sin fundamento.

Añade una precisión respecto a lo que él entiende por números reales en el contexto de la fundamentación. No es el contenido constituido por todas las posibles sucesiones de números racionales o por las leyes según las cuales se comportan algunas de estas sucesiones,

sino más bien, un sistema de cosas cuyas relaciones mutuas son gobernadas por los axiomas asumidos, sistema en el cual son válidas únicamente aquellas relaciones que pueden ser derivadas a partir de los axiomas mediante un número finito de pasos lógicos. Entiendo que, solamente en este sentido es defendible, desde un punto de vista estrictamente lógico, el continuo, es decir, la totalidad de los números reales.

Así queda enteramente planteado el segundo problema de Hilbert. Es de admirar la madurez de la ideas expresadas, lo cual se logra mejor cuando se conoce, aunque sea poco, el desarrollo que ellas tuvieron hasta el último artículo citado de Hilbert (en la bibliografía de este capítulo), el de 1931. Para comprender bien la historia que sigue, hay que tener muy en cuenta que Hilbert se ocupa mucho más de la forma que del contenido; es lo que quiere decir la insistencia en la lógica, la forma, y la última advertencia leída, en la cual Hilbert ha explicitado su concepción de los números reales como sistema formal. Es el camino hacia la formalización hilbertiana, o axiomatización a la manera de Hilbert: cálculo lógico con formas desprovistas de contenido.

Toda la escuela de Hilbert había colaborado en la determinación del tema para la conferencia del maestro en París. En particular, Hermann Minkowski, notable matemático y quizá el más grande amigo que Hilbert haya tenido, había escrito:

> Más fascinante sería el intento de tratar de ver hacia el futuro y de hacer una lista de los problemas en los cuales podrían trabajar los matemáticos durante la próxima centuria. Con tal tema, su conferencia podría ser memorada décadas más tarde.

Este vaticinio de Minkowski fue acertado. Habría podido predecir también que quienes contribuyeran, aunque fuera en parte, a la solución de alguno de los problemas, sería clasificado inmediatamente como matemático de clase. Fue equivocado el pronóstico del mismo Minkowski sobre una polémica que no tuvo lugar (¿debido a los filósofos?), a propósito del problema de no contradicción:

> Es muy original, proponer como problema para el futuro, aquello que los matemáticos habían creído durante mucho tiempo poseer ya completamente: los axiomas de la aritmética. ¿Qué va a decir el gran número de legos presentes en la conferencia? ¿Crecerá su consideración por nosotros? ¿Habrá, pues, también, una pelea con los filósofos?

No hubo contienda con los filósofos, pero sí entre los matemáticos mismos: la pendencia de los fundamentos, 1928, (Grundlagenstreit, irreverentemente calificada por Einstein de batracomiomaquia), Brouwer-Hilbert, se originó en la divergente concepción de los protagonistas. (pp. 17-31. *The Mathematical Intelligencer*. V 12. N 4. 1990. Dirk van Dalen. *The war of the frogs and the mice or the crisis of the Mathematische Annalen*). Se puede pensar que hubo dos acaecimientos que debilitaron la combatividad inflexible hasta los años treinta: la teoría de la relatividad, de Einstein, con interpretación favorable al formalismo (el mismo Einstein lo hizo, ver: circunstancias 57, 58, 59 en Síntesis, capítulo XV de la obra entre manos); los teoremas de Gödel, con la interpretación aceptada por quienes se han ocupado de la cuestión, de que ellos hacen irrealizable el sueño de Hilbert. Actualmente, el problema se muestra menos inquietante; o faltan líderes con más ideas pertinentes. Se dijera que cada matemático interesado en fundamentos escoge eclécticamente entre las grandes corrientes lo que le conviene, sin análisis muy profundos, únicamente con la intención de conformar enfoques aparentemente coherentes que provean un piso para sus quehaceres acostumbrados.

1899. Sobre el concepto de número

(Apéndice VI de *Fundamentos de la geometría.* pp. 224-249)

Este es un artículo muy interesante de Hilbert, del mismo año de *Fundamentos de la geometría* y complemento natural de esta obra, por lo cual ha venido a formar parte de ella, en calidad de apéndice. Es interesante, porque el tema es por tercera vez (a más del libro dicho y de los problemas matemáticos) el método axiomático. Las grandes ideas de este trabajo son las siguientes.

A partir de la unidad, se da origen a los otros números naturales. Al considerar las operaciones sobre los naturales, para que la substracción sea siempre posible, se da origen a los números negativos. Análogamente, para que la división entre naturales no nulos sea siempre posible, su crean los números racionales. Y, entre otras cosas, para que la extracción de raíces de racionales positivos sea siempre posible se crean los números reales.

Este es el *método genético*: el concepto más general de número real se obtiene por sucesivas ampliaciones a partir de los números más sencillos.

Otro procedimiento es el que ha seguido Hilbert, con el mismo objetivo, en *Fundamentos de la geometría.* Comienza por la hipótesis de la existencia de todos los elementos de los que se va a ocupar: números en el capítulo III. Puntos, rectas, planos en el capítulo I. En este último caso, se consideran relaciones, llamadas axiomas, entre tales elementos: enlace, ordenación, congruencia, paralelismo, continuidad. Se demuestra que de la aplicación de estos axiomas no puede seguirse contradicción; y, en segundo lugar, que forman un sistema completo, es decir, "que tales axiomas son suficientes para la demostración de todos los teoremas geométricos". Este es el método axiomático. Como en el discurso de París, se trata de un sistema de cosas, supuestas y con ciertas relaciones que se suponen vigentes entre ellas, expresadas mediante axiomas; y ninguna otra relación se considera perteneciente o predicable de entidades del sistema, si no puede ser derivada dentro del sistema mismo, vale decir, si no es expresable con los signos del sistema o si no es manejable con las reglas del sistema.

En París, afirma que la única manera de defender lógicamente el continuo, es por el método axiomático; en el artículo que nos ocupa no habla de una vía única, sino de preferencia.

Mi opinión es esta: a pesar del alto valor pedagógico y heurístico del método genético, merece, sin embargo, la preferencia el método axiomático para la representación definitiva de nuestro conocimiento y su plena seguridad lógica.

Naturalmente, para el concepto de número hay el correspondiente desarrollo por el método axiomático.

Imagínese un sistema (Hilbert no dice "conjunto") de entes, llámeselos números; imagínese ciertas relaciones entre estos números; imagínese "que estas relaciones se ajustan exacta y completamente" a las condiciones descritas como sigue.

Hay diez y ocho axiomas que se distribuyen en cuatro agrupamientos: seis axiomas de enlace, seis axiomas de cálculo, cuatro axiomas de ordenación, dos axiomas de continuidad.

Los axiomas de enlace y de cálculo, de tipo algebraico, indican sencillamente que los números forman un grupo aditivo, un grupo multiplicativo, y, un campo. Hilbert no emplea la noción de estructura.

Aparecen en seguida, las propiedades referentes al orden.

Decir que un número a es menor que uno b, quiere decir, que $b - a$ es un número positivo. Las propiedades concernientes están dadas por cuatro axiomas.

- Dados dos números diferentes, hay uno que es mayor que el otro y ningún número es mayor que el mismo número.
- La relación mayor es transitiva.
- Si b es mayor que a, entonces, $b + c$ es mayor que $a + c$.
- Si b es mayor que a, y, c es positivo, entonces, bc es mayor que ac.

El primero de los axiomas de continuidad se llama de Arquímedes. Dados dos números diferentes, existe siempre un múltiplo del menor que supera al mayor.

El segundo axioma de continuidad se llama de la plenitud. En las condiciones anteriores, es decir, para que los diez y siete axiomas enunciados se cumplan, los números forman un sistema de entes que no es susceptible de ampliación alguna.

En *Fundamentos de la geometría* (cuyo parágrafo 13 expone los diez y ocho axiomas anteriores) Hilbert había señalado la compleción y la sencillez o economía como características del sistema axiomático que se proponía construir; en realidad, dedicó el capítulo II a mostrar la compatibilidad y la independencia de los axiomas. En el presente artículo consigna que no todos los axiomas son independientes. Así, la existencia de cero descansa sobre la asociatividad de la adición; la de uno, sobre la asociatividad de la multiplicación, la conmutatividad de la adición es consecuencia de la asociatividad de la adición y de la distributividad. En efecto,

$$(a+b)(1+1) = (a+b)1+(a+b)1 = a+b+a+b = a(1+1)+b(1+1) = a+a+b+b,$$

de donde

$$a + b + a + b = a + a + b + b,$$

de donde

$$b + a = a + b,$$

conmutatividad de la adición.

La conmutatividad de la multiplicación depende del axioma de Arquímedes.

El sistema axiomático así construido para los números reales coincide con el sistema usual de números que están acostumbrados a utilizar los matemáticos intuitivamente.

Es de suma importancia para la línea de pensamiento que se sigue en esta obra, destacar el penúltimo párrafo de este artículo de Hilbert.

> Las reflexiones que se han hecho respecto de la existencia del contenido de todos los números reales y conjuntos infinitos pierden todo valor… el conjunto de los números reales [es] un sistema de entes cuyas relaciones recíprocas están dadas por el sistema… finito y cerrado.

En esto consiste la axiomatización a la manera de Hilbert: todo está dado por el sistema. Se usan términos del lenguaje corriente pero sin su contenido. Nuevos enunciados pertenecen al sistema "cuando pueden deducirse de aquellos axiomas por un número finito de silogismos". Este es el núcleo de la escuela de Hilbert de la fundamentación de la matemática, descrito fielmente ya en 1899. Como en el caso de la geometría, la axiomatización a la manera de Hilbert tiene que ver con una especie de cálculo lógico con formas proposicionales, es decir, con proposiciones desprovistas de contenido.

Pero esta vez, Hilbert no puede demostrar la no contradicción del sistema axiomático de los números reales, es precisamente, el segundo problema para proponer en París. En una nota, añadida posiblemente en la séptima edición de *Fundamentos de la geometría*, 1930, pero antes del teorema fundamental de Gödel, 1931, Hilbert escribe que la demostración de la compatibilidad "exige esencialmente nuevos métodos de razonamiento y constituye un problema capital de mi nueva teoría de la demostración". Más adelante se verá que la teoría de la demostración, sencillamente llamada método axiomático por Hilbert en 1900, será cultivada, defendida y desarrollada por Hilbert, principalmente a partir de 1917 y hasta el final de su actividad científica, hasta convertirla en la metamatemática.

Es de notar que los más connotados discípulos de Hilbert, los Bourbaki, han expuesto gran parte de la matemática conocida en la manera axiomática de Hilbert, añadiendo el uso sistemático de estructuras, como después se verá; su exposición, empero, estaba dirigida a los investigadores y no a los enseñantes; no obstante, muchos de estos quisieron enseñar y componer libros de texto a la manera de Bourbaki; la reacción contra tal conducta se acentuó en los años setenta; en los ochenta, aparecieron libros y estudios en los que se destaca, de nuevo, "el alto valor heurístico y pedagógico del método genético". Con toda razón y para que la actitud de regreso a las fuentes sea más concienzudamente adoptada se ha dado mucha importancia a la historia de la matemática, de la cual, por lo menos, debe de quedar en claro que una cosa es la génesis de los conocimientos matemáticos y muy otra su exposición axiomática. Bourbaki nunca alentó, desde luego, la idea de que se convirtieran sus fascículos en libros de texto. "Su lectura no supone, en principio, ningún conocimiento matemático particular, sino solamente una cierta habituación al razonamiento matemático y una cierta capacidad de abstracción", dicen en el modo de empleo del tratado; este tiene una parte que se refiere a la génesis de los conocimientos, a saber, las notas históricas, las cuales, en volumen separado componen *Elementos de historia de la matemática*, la mejor guía para seguir el rastro de una idea, cuando tal idea da lugar a un desarrollo.

1904. Sobre los fundamentos de la lógica y de la aritmética

(*Fundamentos de la geometría*. Apéndice VII. pp. 250-263).

Über die Grundlagen der Logik und Aritmetik. Verhandlungen des 3. Internationalen Matematiker-Kongresses in Heidelberg. Leipzig. 1905. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. pp. 174-185).

Hilbert inicia su discurso ante el tercer congreso internacional de matemáticos, en Heidelberg, haciendo notar el acuerdo que se ha producido en las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría, en clara alusión al efecto de su obra de 1899. No ocurre lo mismo, añade Hilbert, en relación con la aritmética: “Todavía están frente a frente, irreducibles, las opiniones de los investigadores”. Lo más grave es que la prueba de la compatibilidad de los axiomas para la geometría podía hacerse descansar sobre la compatibilidad de los axiomas para otra disciplina, más elemental, si se quiere. No se puede hacer algo por el estilo para la aritmética. Posteriormente se ha examinado, en efecto, que habría habido que demostrar la compatibilidad, sea para los axiomas de la aritmética, sea para los de la teoría de conjuntos, sea para los de la lógica. En caso de que se lo hubiera logrado en una de las tres disciplinas, habría sido posible extender el resultado a las otras dos. El mismo examen llega a la conclusión de que habría sido mucho más difícil lograr dicha prueba respecto de la lógica o de la teoría de conjuntos que respecto de la aritmética, con ser esta ya tan difícil.

Hilbert dibuja ante sus oyentes el paraje desolador de la fundamentación de la aritmética.

Las dificultades comienzan con Kronecker, quien se contenta con poner la noción de número entero, sin preguntarse qué hay debajo de ella, como cimiento de todo el edificio.

Helmholtz mantiene un punto de vista empirista, opinión que Hilbert ya da por refutada, dado que la experimentación no puede garantizar la posibilidad o la existencia de un número tan grande como se quiera. “Los objetos de nuestra experiencia, por muy extensa que [esta] sea, están situados aún por debajo de un límite finito”.

Christoffel y otros, son conscientes de que sin número irracional todo el análisis queda condenado a la esterilidad, pero el remedio propuesto por ellos no refuta a Kronecker.

Frege se ha propuesto fundar la aritmética con los solos recursos de la lógica tradicional. Ha hecho un estudio cuidadoso del concepto de número y del papel que juega el principio de inducción matemática en la teoría de números. No obstante, en la exposición de Frege existe la posibilidad de formar el concepto de conjunto de todos los conjuntos, que como Russell advirtió, ya tarde, al mismo Frege, conduce a paradojas. “Las concepciones y los medios de investigación de la lógica tradicional no han alcanzado las severas exigencias que plantea la teoría de conjuntos”, añade Hilbert, en frase que parece una premonición de los sucesos por venir.

Los estudios sobre el concepto de número tienen, precisamente, el doble objetivo de aclarar las paradojas que ya se han presentado y de mostrar cómo evitarlas en lo futuro.

Respecto a Dedekind, Hilbert afirma que "ha reconocido con claridad" los problemas de la fundamentación y que "de manera sumamente sagaz, se dedicó a la estructuración de una teoría de los números enteros"; no le parecen "practicables y seguros", empero, los caminos seguidos por Dedekind para la demostración de la existencia del infinito, dado el papel que juega en ella el concepto de la totalidad de entes.

Por último, Cantor, como los anteriores, ha avizorado el peligro, pero ha creído evitarlo con un criterio puramente subjetivo.

Frente a tal suma de resultados negativos, Hilbert anuncia su programa de salvación, p. 252.

> Pienso que todas las dificultades que hemos tocado pueden salvarse y que es posible llegar a un riguroso y satisfactorio fundamento del concepto de número por un método que denomino axiomático.

Pasa Hilbert a exponer una de las maneras que ideó para tratar de esquivar las dificultades, la cual manera es de carácter técnico. Pero, antes de ello, apunta una de aquellas ideas generales cuya caza interesa particularmente en estas notas. Tiene que ver con la petición de principio subrayada tan notoriamente por Poincaré en 1908; la cual seguramente había sido advertida ya antes, pues Hilbert, 1904, escribe, aludiendo inequívocamente al logicismo:

> Se caracteriza a la aritmética como una parte de la lógica y, la más de las veces, se toma como hipótesis en los fundamentos de aquella las ideas lógicas básicas tradicionales. Tan solo, al considerar con atención el problema, se repara que en la representación corriente de las leyes de la lógica ya están aplicados conceptos aritméticos fundamentales, como el de conjunto, parcialmente también el de número, de modo especial en el sentido de cantidad. Así, vamos a parar a un dilema, y, por tanto, para evitar paradojas es preciso un desarrollo parcial y simultáneo de lógica y aritmética.

A pesar del aplauso de Poincaré por esta concesión de Hilbert, ella no prosperó después. Uno de los mejores textos de lógica que se han escrito es el del propio Hilbert en colaboración con su discípulo Achermann; en él, la lógica es desarrollada independientemente de la aritmética. Es cierto, empero, que en la obra de Hilbert de 1934, en colaboración con otro de sus discípulos, Paul Bernays, haya un desarrollo más parejo, sin que sea una tendencia que haya hecho escuela.

La opinión de Poincaré respecto del conjunto del trabajo de Hilbert que él (Poincaré murió en 1912) alcanzó a conocer, fue definitivamente adversa; lo encontraba lleno de reticencias que le parecían un mal signo. Sin embargo, otros interesados en el problema, entre ellos Hermann Weyl, han reconocido esta memoria como el primer esbozo de la teoría de la demostración. Observaciones como esta:

> ... el principio creador... autoriza siempre la formación de nuevos conceptos con toda amplitud sin más limitación que la de evitar contracicciones

abundan, y son de destacar como peculiares de la escuela de Hilbert; unas, ya están maduradas, como la del finitismo; otras apenas surgen, como la de que "la demostración misma se ha de considerar precisamente como una formación matemática". Para rebatir las críticas de Poincaré habrá de ir separando, poco a poco, dos lenguajes que todavía en las dos primeras décadas del siglo XX aparecían mezclados: matemática y metamatemática.

1917. Axiomatisches Denken. (El pensamiento axiomático)

(Sociedad Matemática Suiza. 11 IX 1917. Zurich. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Band III. S. 146-156).

En la ruda batalla que libró Hilbert, durante los treinta primeros años del siglo, esta es quizá la ocasión en la que prima el optimismo, donde tal vez no se perciba sino confianza en el poder de la razón humana que ha logrado los magníficos progresos que Hilbert exhibe delante de su auditorio, durante casi toda la conferencia. La consolidación de tales conocimientos exige que se los exponga valiéndose del método axiomático. Todo el discurso está constituido por una serie de ilustraciones de este tema central. El título era, pues, altamente apropiado; cuando Hermann Weyl llamó a su maestro "el campeón de la axiomática" debió de pensar especialmente en esta apología del método axiomático. Algunas ideas salientes de esta conferencia son las siguientes.

Cuando los hombres de ciencia se hayan decidido por el método axiomático deberán tener en cuenta que hay que llenar dos condiciones. La primera, echar una ojeada hacia la independencia dentro del sistema axiomático. En segundo lugar, ofrecer una garantía de que el sistema está exento de contradicción. Hay que hacer un examen particular de los axiomas desde este punto de vista doble.

Especialmente mencionado aparece el problema que lo preocupa desde 1900, por lo menos, mostrar que la teoría de los números reales está libre de contradicción. Anota que gracias a Weierstrass y a Dedekind, el problema se desplaza mediante conceptos de la teoría de conjuntos, al demostrar la no contradicción de la teoría de números naturales. Pero, ya no es posible retroceder más, con pruebas relativas de no contradicción. Para la aritmética o para la teoría de conjuntos se necesita una prueba absoluta de no contradicción.

> Solo en dos casos no es evidentemente practicable el camino de la reducción a un dominio más especial, es a saber, cuando se trata de los axiomas de los números reales mismos y de las bases de la teoría de conjuntos; en efecto, fuera de la lógica no se tiene ya ninguna disciplina a la cual se pudiera entonces hacer apelación. Pero, puesto que la prueba de no contradicción es un problema insoluble, parece entonces necesario, axiomatizar también la lógica y asignar luego, la teoría de números y la teoría de conjuntos como partes de la lógica. (S. 153).

La pregunta sobre la no contradicción en la teoría de los números naturales o en la de conjuntos no solo interesa a estas teorías sino también a un amplio dominio donde se encuentran cuestiones de las más difíciles de la teoría del conocimiento que tienen que ver con la matemática: solubilidad de cada problema matemático; control ulterior de los resultados de una investigación matemática; criterio de sencillez para una demostración matemática; relaciones entre contenidos, por una parte, y, formalismo en lógica y matemática, por otra; decisión de una cuestión matemática mediante un número finito de operaciones.

Para el final reserva Hilbert una confesión de fe en el papel del método axiomático, que lo acerca a la manera de pensar de su coterráneo Kant, cuando este medía la cantidad de ciencia en una disciplina mediante la cantidad de matemática en ella presente. Dice Hilbert en la página 154:

> Creo: todo cuanto en general puede ser objeto del pensamiento científico, cae, en tanto esté maduro para la construcción de una teoría, bajo el método axiomático y por ende, indirectamente bajo la matemática... Gracias al método axiomático, la matemática parece destinada a un papel de líder de la ciencia en general.

Lo que Hilbert tiene en mente, y lo explicitará posteriormente, es que el matemático por su avezamiento para resolver problemas matemáticos lógicamente, estará en condiciones de ser árbitro cuando se trate de resolver dificultades de axiomatización de cualquiera otra disciplina científica. Esta posición de Hilbert está de acuerdo con la actitud respecto a la matemática del racionalismo filosófico y que, grosso modo, podría compendiarse así: el filósofo racionalista tiene absoluta confianza en la razón humana, porque la matemática, prototipo de las verdades absolutas, es producto acabado de la razón humana.

1922. Neubegründung der Mathematik

(Refundamentación de la matemática. Conferencias en Copenhague y Hamburgo. Primavera de 1922. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Band III. S. 157-177).

Todo parece indicar que la crisis de los fundamentos iba tan mal como la situación política. Dedekind y Frege habían renunciado a continuar sus trabajos tendientes a la resolución de problemas de fundamentos, debido al impacto de las paradojas. Se había visto que la jerarquía de los tipos lógicos socavaba, en realidad, la teoría aritmética del continuo.

L. E. J. Brouwer se doctoró, 1907, con una tesis acerca de la fundamentación de la matemática. En algunas ideas había sido precedido por Kronecker; pero, a estas y a otras más da un profundo desarrollo, que constituiría el núcleo para el intuicionismo como una filosofía de la matemática. Brouwer piensa, además que la geometría no euclidiana invalida la teoría kantiana del espacio, al contrario de Frege. También, al revés de Frege, y de Whitehead y Russell, sostiene que la aritmética, y toda la matemática fundada sobre ella, ha de ser derivada de la intuición del espacio, (Kneale. p. 626). (Tanta insistencia en la intuición no debe de inducir a pensar que las investigaciones con las que Brouwer brilló en matemática pura están al ras de lo corrientemente estimado intuitivo). He aquí tres de sus ideas fuertes (Beth. p. 410).

Los axiomatizadores de la matemática son culpables de inconsistencia. En efecto, aceptan la consistencia de un sistema axiomático como garantía de existencia de un sistema de entes matemáticos que cumplen los axiomas; al tiempo que apelan a la existencia de sistemas de entes matemáticos intuitivamente construidos, en sus pruebas de consistencia.

Como consecuencia de su análisis, Brouwer rechaza la teoría de conjuntos de Cantor y los trabajos posteriores, como el de Zermelo, que tratan de completar la teoría.

Al contrario de Frege, Russell y Hilbert que asignan un gran papel a la lógica, Brouwer la reduce a su mínima expresión. Según él, nada tiene que ver la lógica con la matemática; es solamente una imitación del lenguaje matemático, estenográfica, mecánica y fiel, pero fuera de la matemática misma; no es más que un instrumento imperfecto, utilizado por los matemáticos para comunicarse sus resultados con el fin de que estos puedan ser más fácilmente recordados. La lógica, tanto la tradicional como la simbólica, es una ciencia empírica, que pertenece más bien a la etnografía que a la psicología; la matemática depende de la psicología.

Entre los más distinguidos matemáticos que se doctoraron con Hilbert estaba Hermann Weyl. En lo tocante a filosofía matemática, Weyl se fue alejando cada vez más de su maestro, hasta llegar a convertirse con Heyting en epígono del intuicionismo. No fue llamado el buldog de Brouwer, pero hubiera podido serlo, dice Constance Reid. Años después, escribía Weyl:

> L. E. J. Brouwer nos había abierto los ojos, con su intuicionismo y nos había hecho ver qué lejos va la matemática generalmente aceptada, más allá de enunciados para los cuales se pueda reclamar un real significado y una verdad que tenga base en la evidencia.

En 1919, escribió un artículo que, comenzando por el título, debió caer tan bien a Brouwer como mal a Hilbert: *El círculo vicioso en la fundamentación actual del análisis.* Weyl mismo menciona, 1944, un artículo suyo *Sobre la nueva crisis de los fundamentos de la matemática*, 1921, como indicativo de la inquietud reinante entre quienes se interesaban en los fundamentos.

Hilbert debió de considerar las ideas de Brouwer, tan peligrosas por lo menos, como las de Kronecker, ya que habían podido seducir a un matemático de la talla de Weyl. Para evitar que sucediera lo mismo con otros matemáticos, decidió atacar frontalmente las ideas defendidas por Brouwer y Weyl. Parece haberlo hecho dos veces, en Copenhague y en Hamburgo, durante la primavera de 1922. He aquí algunos apartes del discurso.

> Surge el problema de mostrar la no contradicción de los axiomas; es este un problema conocido, en el que no he dejado de pensar desde hace años.
>
> Matemáticos notables y altamente meritorios, Weyl y Brouwer, buscan la solución del problema por un camino que en mi opinión es errado.
>
> Lo que hacen Weyl y Brouwer es, en principio, lo mismo que marchar sobre los senderos ya hollados por Kronecker; es tal su manera de fundamentar la matemática que echan por la borda cuanto les parece incómodo y que establecen una dictadura de la interdicción a la manera de Kronecker. Pero esto se llama cortar en pedazos nuestra ciencia y mutilarla, y, siguiendo a tales reformadores corremos el peligro de perder una gran parte de nuestros más valiosos tesoros. Weyl y Brouwer proscriben el concepto general de número irracional, de función, inclusive de función numérica, los números de Cantor de clases de números superiores, etc.; el teorema de que entre infinitos números enteros siempre hay un mínimo,

y, aún, el principio lógico del tercero excluido; así, la afirmación: o hay un número finito de números primos o uno infinito, es ejemplo de aseveración o conclusión en entredicho.

Pienso que, del mismo modo que Kronecker no logró entonces suprimir el número irracional (del cual Weyl y Brouwer, sea dicho de paso, permiten conservar un fragmento) mucho menos podrán lograrlo ahora Weyl y Brouwer; no; Brouwer no es, como pretende Weyl, la revolución, sino solamente la repetición, con medios desuetos, de la tentativa de golpe que, en su tiempo había emprendido Kronecker, de una manera mucho más decidida, y que, sin embargo, fracasó totalmente. Mucho menos tendrán éxito ahora cuando estamos bien apertrechados gracias a Frege, Dedekind y Cantor.

Otras consideraciones interesantes hace Hilbert. Una de ellas es el rechazo de la opinión de Poincaré según la cual el principio de inducción completa es una propiedad de nuestro espíritu. Eso sería una divina dádiva, al estilo de las de Kronecker.

El remedio que propone Hilbert es, de nuevo, la teoría de la demostración ya propuesta en Heidelberg, 1904, y, en esencia, en los trabajos de 1899. Se puede recuperar la objetividad elemental, formalizando los enunciados y las demostraciones matemáticas, gracias al lenguaje de la lógica, y tomando luego tales fórmulas y demostraciones como objetos de estudio, a su vez. Hay una parte completamente intuitiva, a partir de la cual se hace la construcción y hay también una parte completamente formal. En cuanto a la primera, *En el principio estaba el signo* es una máxima que afirma aquí y en repetidas ocasiones. ¿Cuál es el sentido profundo de tal máxima? Este: no solo la matemática pura sino todo pensamiento científico se edifica sobre una base íntegramente intuitiva de signos concretos. La transcripción que sigue es my indicada para familiarizarse con estas aseveraciones del formalismo, concepción de la matemática como estudio de formas, sin contenidos, constituidas cuidadosamente a base de signos:

El signo 1 es un número.
Un signo que comienza con 1, termina con 1, y, tal que entre los dos, 1 sigue siempre a 1, es igualmente un número. Estos signos de número, que son números y que componen completamente a los números, son el objeto de nuestra consideración, pero están desprovistos de significado.

Se usan otros signos que sí significan algo y que sirven para la comunicación; por ejemplo, el signo 2, como abreviatura del signo de número $1 + 1$. Es de notar la insistencia de Hilbert sobre la importancia del aspecto figurativo:

Una demostración es una figura, que como tal debe sernos intuible, y que se compone de deducciones según el esquema

$$\begin{array}{l} S \\ \underline{S \;\rightarrow\; T} \\ \quad\quad\; T \end{array}$$

donde cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas S, $S \rightarrow T$: o es un axioma, es decir, resulta directamente de un axioma; o coincide con la fórmula final de una deducción anterior, es decir, se obtiene mediante utilización de una tal fórmula final.

Acto seguido, Hilbert asume el relativismo que resulta de su teoría de la demostración. En efecto, ¿qué significa, ahora, que una fórmula sea demostrable?

Por consiguiente, una fórmula es demostrable si es un axioma o la fórmula final de una demostración o si se obtiene directamente al aplicar un axioma o una fórmula final.

Se entiende que la noción de "demostrable" es relativa, pues depende del sistema de axiomas que sirve de base. Tal relativismo es natural y necesario.

Se acaba la matemática, sostén por tantos siglos del racionalismo, como sistema de verdades absolutas. Las verdades matemáticas son aquellas fórmulas para las cuales existe una demostración. Una demostración no existe sino dentro de un sistema formal, una demostración lo es únicamente respecto del sistema formal donde está constituida. Una demostración depende, en especial, de los axiomas de los que se deriva. Las verdades de los sistemas formales son del tipo hipotéticodeductivo: de unas hipótesis se deducen unas verdades; de otras hipótesis, otras verdades. Es, indudablemente, para pesar de algunos, un relativismo total. Natural, en cuanto se ha llegado a él debido a las necesidades de la investigación, por un desarrollo normal, que Hilbert se permite llamar natural, atributo que podría interpretarse equivocadamente. Bastaba decir necesario. Los dos adjetivos están ahí para significar lo mismo: evolución del escudriñamiento acerca del problema de la fundamentación.

1922. Die logischen Grundlagen der Mathematik

(*Los fundamentos lógicos de la matemática.* Septiembre. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Band III. S. 178-191).

Es una exposición de la parte técnica de sus conferencias en Copenhague y en Hamburgo. La idea de la primera frase es citada con frecuencia.

> Mis investigaciones sobre una nueva fundamentación de la matemática se proponen nada menos que hacer desaparecer de manera definitiva cualquier duda acerca de la seguridad de las deducciones matemáticas.

Se citan estas palabras para poner de manifiesto cuán ambicioso era el proyecto de Hilbert y también cuán infundado, si se tiene en mente lo que resultará de los teoremas de Gödel. Más adelante, aparece, quizás por primera vez, el vocablo metamatemática:

> Para la matemática propiamente dicha así formalizada, sobreviene una, en cierta manera, nueva matemática, una *metamatemática*, necesaria para la consolidación de aquella, en la cual (en contraste con las deducciones puramente formales de la propia matemática) la conclusión en cuanto al contenido tiene que ver con la utilización, aunque exclusivamente para la prueba de no contradicción de los axiomas.

> En esta metamatemática se opera con las demostraciones de la matemática propiamente dicha y estas últimas constituyen, el objeto de la investigación en cuanto al contenido. Dentro de la teoría hay, pues, por una parte, obtención de nuevas fórmulas demostrables a partir de los axiomas mediante deducciones formales; y, por otra, introducción de nuevos axiomas junto con la prueba de no contradicción mediante deducciones en cuanto al contenido.

Se tiene un estudio con contenidos, la metamatemática, acerca de un estudio sin contenidos, la matemática, se podría decir, si es que una tal esquematización no es demasiado simplista. ¿Cuál es la relación de estos procedimientos con la verdad?

> Los axiomas y los enunciados demostrables, es decir, las fórmulas, son representaciones de los conceptos que constituyen los procedimientos acostumbrados de la matemática anterior, pero no son ellas mismas las verdades en sentido absoluto. Como verdades absolutas hay que considerar más bien los juicios acerca de la demostrabilidad y la no contradicción en el sistema formal, realizables gracias a mi teoría de la demostración.

1925. Sobre el infinito

(Sociedad Matemática de Westfalia. 4 VI 1925. Münster. *From Frege to Gödel.* On the infinite. pp. 367-392. Ediciones abreviadas: Apéndice VIII. *Fundamentos de la geometría.* pp. 264-287. *Philosophy of mathematics.* pp. 134-151).

Esta conferencia ha sido uno de los trabajos más leídos de Hilbert. En la presentación que de ella se hace en *From Frege to Gödel*, se dice que es una de las más comprensivas de las ideas de Hilbert respecto a la fundamentación.

El tema es el infinito, tema digno para honrar la memoria de Weierstrass, quien substituyó lo infinitamente pequeño por un proceso que Hilbert exalta como modelo para el finitismo o finitarismo, por el que va a propender. La tarea que ahora se propone Hilbert es la de reconocer que lo infinito en el sentido de totalidad acabada es meramente apariencia, modo de hablar.

El conferencista comienza refiriéndose a la literatura, a veces "fuertemente agitada por disparates e irreflexiones... por ejemplo, cuando con el sentido de condición de restricción se acentúa que en la matemática rigurosa solamente es admisible una demostración con un número finito de silogismos: como si alguien, en alguna ocasión, hubiese logrado emplear una infinidad de ellos". Es difícil saber exactamente a quién vaya dirigida la observación y si su intención es irónica: tiene sentido hablar de restringir ciertos procesos a un número finito de pasos, como el de tomar axiomas; tratándose, empero, de silogismos, lo único que tiene sentido es que se hagan en número finito; el reparo iría, pues, hacia repetidores no cuidadosos de las consignas de la escuela.

Hilbert mismo nunca precisó demasiado en qué consistía el finitarismo, aunque este aparece fácilmente mencionado en los escritos del matemático alemán. Se hizo notar la presencia de tal idea en el artículo de 1899, *Sobre el concepto de número*, escrito en el año anterior al del enunciado del segundo problema de París. Se ha subrayado la insistencia de Hilbert en este concepto. Mediante él, Hilbert aceptaba que las críticas, prohijadas por la línea de pensamiento que va de Kronecker, hasta la escuela intuicionista, eran, en parte, aceptables: someter la matemática a las restricciones propugnadas por aquellos, no; a la construcción de la matemática, sí. Es curioso que la más neta descripción que suele darse del procedimiento finitista sea la que ha dado alguien no perteneciente al círculo de Gotinga, aunque en espíritu y de hecho haya sido uno de los grandes cultivadores de la teoría de la demostración. Es a saber, Jacques Herbrand, (1908 - 1931), lógico francés tan precoz como Galois, muerto a causa de una caída en los Alpes; los seis últimos meses los había pasado en Gotinga, a donde fue después de haber pasado su tesis en Francia. Es cierto que en *From Frege to Gödel*, página 619, se advierte que el epíteto *intuicionista*, empleado por Herbrand, era corrientemente identificado con el *finitista* de la escuela de Hilbert; lo cual se justifica por lo ya dicho. Es el mismo Herbrand quien afirma que Hilbert emprendió la tarea de resolver problemas metamatemáticos "únicamente por razonamientos intuicionistas". No obstante, Hilbert y Bernays, 1934, no usan una dicción por la otra. He aquí la descripción de Herbrand (datada en Gotinga, el 14 VII 1931; el accidente acaeció el 27 VII 1931).

Por un argumento intuicionista entendemos un argumento que satisface a las siguientes condiciones.

En él, nunca consideramos más que un número finito dado de objetos y de funciones; estas funciones están bien definidas, y su definición hace posible el cálculo de sus valores de manera general; nunca enunciamos que un objeto existe sin dar los medios para construirlo; nunca consideramos la totalidad de todos los objetos de una colección infinita; y cuando decimos que un argumento (o un teorema) es cierto para todo x, queremos decir que, para cada x tomado en particular, es posible repetir el argumento general en cuestión, que debe ser considerado meramente como el prototipo de estos argumentos particulares. (*From Frege to Gödel*. p. 622).

Hay otras objeciones que molestan a Hilbert; por ejemplo, que alguien solicite una como autorización para introducir una noción, cuando ya se ha mostrado que ella no es contradictoria. Así procedían antaño, replica, quienes no querían admitir los números complejos, por la razón de que las magnitudes imaginarias no existen. Contesta a otro reproche, así:

A la manera de quienes ven fantasmas, otro objetor ha visto contradicciones, aun antes de que alguien hubiera hecho cualquier enunciado, es a saber, en el mundo concreto de la sensación, cuyo 'funcionamiento consistente' se supone.

Hilbert ha creído siempre que los enunciados solamente, y los supuestos que puedan traducirse a enunciados, pueden contradecirse, y, que el parecer de que los hechos se contradigan es un buen ejemplo de una manera descuidada de pensar.

Otra cosa son las paradojas de la teoría de conjuntos. La encontrada por Russell y Zermelo echó a pique una obra de fundamentación de Frege y provocó el retiro de Dedekind de la misma palestra. Se han enderezado ataques desde diversos flancos no solo contra la teoría de conjuntos de Cantor ("esta teoría es, pienso yo, el más fino producto del genio matemático y una de las realizaciones supremas de la actividad humana puramente intelectual") sino también contra conceptos ya bien probados cuyo uso ha llegado a ponerse en entredicho. No es una parte, es todo el edificio, lo que está en peligro.

Hay que admitir que la situación en la que nos encontramos actualmente respecto de las paradojas es a la larga intolerable. Basta pensar: en matemática, parangón de la exactitud y de la verdad, las nociones mismas y las inferencias, las que aprende cada quien, enseña y usa, conduciendo a lo absurdo! ¿Dónde podría encontrarse exactitud y verdad si no las hay siquiera en el pensamiento matemático?

La angustiosa formulación de esta pregunta parece revelar un transfondo de la actitud filosófica de Hilbert respecto de la matemática. Si no hay seguridad intelectual en matemática, no la hay en ninguna otra parte.

Viene en seguida, un llamado a la serenidad, gracias a la tabla de salvación que el orador trae consigo.

Hay, sin embargo, una manera completamente satisfactoria de escapar a las paradojas sin cometer traición a nuestra ciencia. Las intenciones que nos ayudarán a encontrar el camino y la meta que nos proponemos alcanzar son estas.

1. Vamos a investigar cuidadosamente aquellas maneras de formar nociones y aquellos modos de inferencia que sean prometedores. Vamos a nutrirlos, a fortificarlos y a hacerlos útiles, dondequiera que haya aunque sea la menor señal de éxito. Nadie debe poder expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

2. En todas partes de la matemática, debemos establecer para nuestras deducciones la misma certeza que existe en la teoría elemental de números, de la cual nadie duda y en la cual las contradicciones y paradojas que se presenten son debidas únicamente a nuestra negligencia.

Con estas dos consignas, Hilbert pone manos a la obra de mostrar que el recurso contra la crisis de los fundamentos, propuesto por él desde más de veinte años antes, a saber, el método axiomático o teoría de la demostración, con adiciones capitales, es cierto, exigidas por nuevas dificultades surgidas de los trabajos de Poincaré, Brouwer, Weyl, ..., es perfectamente satisfactorio.

Hilbert adhiere a la doctrina fundamental de Kant, según la cual la matemática se ocupa de un contenido que es independiente de la lógica, razón por la cual no puede establecerse el fundamento de la matemática a partir de mera lógica. Esta es, para Hilbert, la explicación de que Frege y Dedekind hayan fallado. Nuestro uso de la lógica no podría ser el que es, si no hubiera ya algo dado en nuestra representación: “Ciertos objetos extralógicos concretos, intuitivamente presentes como experiencia inmediata, anterior al pensamiento”.

Para que se pueda tener confianza en la inferencia lógica, debe ser posible abarcar completamente tales objetos en todas sus partes; y sus propiedades, diferencias, secuencias y contigüidades deben aparecer en las mismas condiciones que los objetos, como un dato que no solamente no es susceptible de reducción, sino que no necesita reducción.

Hilbert considera que “esta posición filosófica básica es requisito para la matemática y en general para todo pensamiento científico”.

En matemática, este supuesto lo componen los signos concretos mismos, los cuales, por su forma, cumplen la condición de ser reconocibles a simple vista.

Para exponer la última versión de su teoría de la demostración, Hilbert va a razonar por analogía, apoyándose sobre lo que sucede en teoría de números. Puede esta ciertamente ser construida como teoría finitista, es decir, mediante consideraciones intuitivas referentes al contenido. Igualmente, un requisito que hay que lograr para la validez del procedimiento matemático buscado es el de que se tenga de él una garantía de tipo finitista. Ello es posible si se procede como al construir la teoría de números finitista, dado que se dispone de la misma especie de marco finitario de la mente, a saber, la conexión con el mundo concreto.

En teoría de números se tienen los numerales: 1, 11, 111, ... Cada numeral es reconocido intuitivamente por el hecho de que consta solo de 1. El objeto propio de nuestro estudio son los numerales mismos, los cuales se consideran sin ningún significado; pero, hay que añadir otros signos que sí lo tienen y sirven para la comunicación. Así, el signo 2 es una abreviación del numeral 11, el signo 3 es una del numeral 111, etc. Del mismo modo, se usan los signos $+$, $=$, y otros.

$2+3=3+2$ sirve para comunicar el hecho de que $2+3$ y $3+2$, cuando se tiene en cuenta que son abreviaciones, son el mismo numeral, esto es, el numeral 11111.

Similarmente, desde este punto de vista, $a+b=b+a$, es la comunicación escueta de que el numeral $a+b$ es el mismo que el numeral $b+a$. La corrección en cuanto al contenido de la comunicación puede ser garantizada mediante una inferencia referente al contenido. En esto consiste el tratamiento intuitivo atinente al contenido.

Desde luego, no todo pensar puede hacerse de esta manera intuitiva. He aquí un contraejemplo. Sea p el mayor número primo conocido. Se puede probar, siguiendo a Euclides, que entre $p+1$ y $p!+1$ existe un nuevo número primo. Este enunciado está de acuerdo con el punto de vista finitista. El 'existe' es meramente una abreviación de la proposición: '$p+1$, o, $p+2$, o, ..., o, $p!+1$ es un número primo'. Todavía se puede hacer una descomposición en dos proposiciones: 'Existe un número primo que es mayor que p', 'El mismo número primo es menor que $p!+1$'. La primera proposición puede afirmarse sola y es aceptable en el punto de vista finitista desde que p siga siendo el mayor número primo conocido. Pero, si se afirma solamente que existe un número primo mayor que un número primo p cualquiera, entonces, esta aseveración suelta, no ya en el contexto dado antes, es un salto al transfinito. Una afirmación de existencia sobre una totalidad finita es correcta desde el punto de vista finitista. No sucede lo mismo, si hay que pasar al infinito, a menos de una investigación especial. En el ejemplo dado, se encuentra el transfinito al extraer de una proposición de existencia una proposición parcial que no es una disyunción. Análogamente, se encuentra una proposición transfinita al tratar de negar un enunciado que se cumple para numerales cualesquiera. Así, cualquiera sea el numeral a, se cumple que $a + 1 = 1 + a$. Desde el punto de vista finitista no es posible negar tal enunciado. Esto trae una consecuencia particularmente grave. Si no es posible, finitísticamente hablando, negar el enunciado citado, entonces, a este enunciado no se le puede aplicar la alternativa de que o es satisfecho para todo numeral, o es refutado por un contraejemplo. No vale, pues, en el punto de vista finitístico, la lógica de Aristóteles. Habría que ponerse a estudiar una especie de lógica finitística. O, por el contrario, proponerse no renunciar a la lógica de Aristóteles, dado que es imposible apartarse del uso de negar enunciados, de formar juicios parciales, o de emplear el principio del tercero excluido.

¿Qué hacer? "Recordemos que somos matemáticos". Y que como tales, podemos acudir al método genial de los elementos ideales, que ya ha servido en otros apuros. Fue así, como se introdujo el elemento ideal o imaginario i = raíz cuadrada de -1, para que el enunciado que afirma la existencia y el número de raíces de una ecuación tomara su más sencilla forma. Añádanse, pues, proposiciones ideales a las finitistas de que ya se dispone con la intención expresa de mantener la lógica aristotélica ordinaria.

¿Cuáles son las proposiciones ideales? Se podrían señalar pasajes de la matemática elemental en los que se va más allá de lo intuitivo. La teoría de números, intuitiva, no tiene por qué incluir el cómputo con letras; se utilizan letras en vez de numerales y se efectúa el cálculo algebraico con ellas. En lugar de enunciados concernientes a numerales, se tiene fórmulas, ellas mismas objetos concretos para nuestra intuición, y, en lugar de una prueba de una proposición con contenido de la teoría de números se tiene la derivación de una fórmula a partir de otra.

Desde el punto de vista finitista, $a+b = b+a$ es admisible en cuanto se tenga indicación respecto al contenido; por ejemplo, cuando a, b son numerales específicos. Sin tal referencia precisa, $a+b = b+a$ debe ser mirada como una fórmula que no comunica contenido alguno, y cuya relación con el enunciado finitista $2+3 = 3+2$, consiste en el hecho de que cuando a, b son reemplazadas en la fórmula por los numerales 2, 3 se obtiene el enunciado en cuestión. Este, empero, es ya un procedimiento de prueba, por sencillo que parezca. En conclusión: a, b, $+$, $=$, $a + b = b + a$, son como los numerales 1, 11, 111, ... en cuanto se los considera sin significado alguno, y, en cuanto de la fórmula $a + b = b + a$ pueden obtenerse otras, a las cuales se considera con significado, al interpretarlas como comunicaciones de enunciados finitistas. Concluye Hilbert:

Al generalizar esta concepción, la matemática se convierte en un inventario de fórmulas de dos tipos: el primero, la de aquellas a las cuales corresponden las comunicaciones con significado de enunciados finitistas, en particular, ecuaciones numéricas y desigualdades; el segundo, la de las fórmulas que no significan nada por sí mismas y que son los elementos ideales de nuestra teoría.

Hilbert ha respondido así a la pregunta que se había planteado sobre los enunciados ideales. Según la concepción finitista, las proposiciones finitistas que únicamente contienen numerales "son inmediatamente intuitivas y directamente inteligibles"; a ellas se les puede aplicar la lógica aristotélica sin tomar precauciones especiales. Había también las proposiciones finitistas problemáticas, por ejemplo, las que no podían separarse en proposiciones parciales. Por fin, han sido introducidas las proposiciones ideales con la expresa intención de que todas las leyes de la lógica se puedan aplicar siempre. Pero, estas proposiciones ideales, o lo que es lo mismo, fórmulas, no significan nada por sí mismas, no son proposiciones finitistas; por tanto, no se les puede aplicar las operaciones lógicas de manera que haya referencia al contenido. La única manera de salir de este nuevo apremio es mediante la formalización de las operaciones lógicas y de las demostraciones matemáticas. Afortunadamente, existe ya el cálculo lógico, con miras a la comunicación es cierto, pero, en el espíritu de nuestra tarea, podemos permitirnos "despojar también los signos lógicos de todo significado, como ya se hizo con los de la matemática y declarar que las fórmulas del cálculo lógico no significan nada en sí mismas, sino que son proposiciones ideales". Las proposiciones matemáticas y las operaciones entre ellas se representan ordinariamente mediante el lenguaje lógico; lo que se hace ahora es desproveer de su significado a dichos signos lógicos e incluso a los símbolos de las operaciones, de manera que hasta las inferencias lógicas toman el aspecto de fórmulas.

Con este proceder, se obtiene, finalmente, en lugar de la ciencia matemática de contenidos que se comunica gracias al lenguaje ordinario, un inventario de fórmulas formadas con signos lógicos y matemáticos que se siguen unas a otras según reglas definidas. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y, a la inferencia de contenido corresponden las reglas según las cuales unas fórmulas siguen a otras; es decir, la inferencia de contenido es reemplazada por la manipulación de signos según ciertas reglas.

Así se completa la transición del tratamiento intuitivo al formal, por una parte, en lo tocante a los axiomas, por otra, en lo tocante al cálculo lógico.

Inicialmente, los axiomas eran considerados como verdades fundamentales; en la axiomática moderna y desde hace ya tiempo, como meras relaciones entre las nociones.

¿Y cómo hay que entender una prueba matemática formalizada? Como una figura que, como tal, debe ser accesible a nuestra intuición. Consiste en inferencias que componen el esquema

$$\begin{array}{l} S \\ \underline{S \rightarrow T} \\ \qquad\; T \end{array}$$

donde S, y, $S \rightarrow T$, cada una, o es un axioma, o resulta de un axioma mediante substitución, o es la última fórmula de una inferencia anterior, o resulta de esta mediante substitución. "Una fórmula es demostrable si es la fórmula final de una demostración".

Este es el esbozo que hace Hilbert de su teoría de la demostración en 1925. Propone en seguida un sistema de axiomas, pero, como él mismo observa, esos pueden ser escogidos arbitrariamente, por lo cual, hay muchas elecciones posibles. Falta, sin embargo, una condición esencial, lo cual Hilbert se apresura a reconocer, a saber, la prueba de consistencia. La extensión que se ha hecho del dominio inicial mediante adición de elementos ideales, será legítima si no acarrea contradicción, es decir, si las relaciones de la extensión restringidas al dominio inicial (olvidándose de los elementos ideales) no producen contradicción en él.

Sin explicación satisfactoria, aparece, allí, la siguiente afirmación de Hilbert:

Es también una agradable sorpresa descubrir que al mismo tiempo hemos logrado resolver un problema que ha atormentado a los matemáticos durante largo tiempo, es a saber, el de probar la consistencia de los axiomas de la aritmética. Efectivamente, siempre que se utiliza el método axiomático, surge el problema de probar la consistencia.

No hay aclaración alguna al respecto en la sexta edición de *Fundamentos de la geometría*, 1930; ni en el texto de Benacerraf y Putnam; en el de Heijenoort hay una nota que dice que Hilbert emplea "axiomas aritméticos" a veces como axiomas para los números reales, a veces como axiomas para la teoría de números. Desde luego, si estuviera visada la teoría llamada aritmética de Peano, la afirmación de Hilbert sería precisamente la negación de uno de los teoremas de Gödel, 1931. Podría pensarse que Hilbert se refiere a las demostraciones parciales logradas mediante fuerte restricción del quinto postulado de Peano, por Ackermann, von Neumann, y más tarde, por Herbrand, antes del teorema de Gödel. Sin embargo, la euforia en los términos de Hilbert parece referirse al segundo problema de Hilbert, en toda su extensión.

Comprensiblemente, Hilbert hace de dicha aseveración un argumento en favor de su teoría de la demostración que completa con la siguiente expresión de optimismo:

> Lo que nos aconteció dos veces, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos, no puede acontecernos una tercera vez, ni nunca más.

Los matemáticos van a poder, ahora sí, encarar problemas como no lo habían podido hacer antes. Más aun:

> La matemática en cierta manera se constituye en un tribunal de arbitraje, una especie de corte suprema para decidir cuestiones de principio, a partir de una base concreta sobre la que cada cual podrá estar de acuerdo, dado que cada enunciado puede ser controlado.

Para que no nos quede ninguna duda acerca de la confianza de Hilbert en este cálculo de inspiración leibniziana, el conferencista repite casi palabra por palabra su credo de París, que precedía allí, el enunciado de los problemas:

> Todo problema matemático [más adelante añade: "bien puesto"] puede ser resuelto.
> En matemática no hay ignorancia perenne.
> Todo problema matemático bien enunciado es resoluble es un lema general que pertenece a la metamatemática, como quiero llamar a la teoría de las pruebas formalizadas con referencia al contenido.

Puede decirse que tal es el sentir de muchos matemáticos: aunque no hagan tan clara profesión de fe, obran como si ella fuera su norma de acción.

Estas fueron algunas de las ideas, entre las más comprensibles y entre las más pertinentes al diseño de *Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki*, expuestas por Hilbert en esa célebre conferencia, con un tema, el infinito, apropiado para honrar la memoria de Weierstrass, el gran analista: "En cierto sentido el análisis matemático no es más que una sinfonía del infinito" (Hilbert).

1927. Los fundamentos de la matemática

(The foundations of mathematics. *From Frege to Gödel.* pp. 464-479. Copia abreviada: Apéndice IX de *Fundamentos de la geometría.* pp. 288-309).

Hilbert comienza esta conferencia recordando que cinco años antes (1922) ya había tenido la oportunidad de exponer el tema de la fundamentación ante el mismo seminario matemático de Hamburgo y que, desde entonces, ininterrumpidamente, se ha seguido ocupando del tema.

> Con esta nueva manera de proveer una fundamentación para la matemática, que puede llamarse apropiadamente, una teoría de la demostración, persigo una finalidad importante: la de resolver de una vez por todas los problemas referentes a la fundamentación de la matemática tal como están puestos actualmente, mediante la conversión de cada proposición matemática en una fórmula que pueda verse concretamente y derivarse con todo rigor; y así reconstruir las definiciones e inferencias matemáticas de tal manera que sean irrefutables... Creo poder lograr completamente tal finalidad por medio de mi teoría de la demostración, aunque se requieran todavía muchos esfuerzos para alcanzar su perfeccionamiento.

En la primera parte de esta conferencia, Hilbert retoma cada uno de los temas tratados en la anterior acerca del infinito, algunos al pie de la letra, algunos con precisiones apreciables. Baste recordar sumariamente.

La matemática no puede fundamentarse sobre la sola lógica.
Hay un material inmediatamente intuible, garantía de la fiabilidad en los procedimientos matemáticos.
En matemática, el material intuible son los signos concretos, cuya forma los hace reconocibles al instante.
La matemática es un repertorio de fórmulas.
Las fórmulas de este repertorio difieren de los enunciados matemáticos ordinarios en que en ellas aparecen también los signos lógicos.
Los axiomas son los bloques para la construcción del edificio formal de la matemática.
Una demostración es un esquema inmediatamente intuible.
Una demostración, como un numeral, es un objeto concreto e inspeccionable.
Una fórmula es demostrable si es la última de una demostración.
Los axiomas y las proposiciones demostrables son copias de los pensamientos que constituyen la matemática conocida.

Hechas estas aserciones, cuya conexión se vio en la conferencia *Sobre el infinito*, Hilbert se extiende luego en la exposición de una posible selección de axiomas y en la concepción formalizada de la definición. Recalca, una vez más, en la posición de la teoría de números intuitiva respecto de una exposición algebraica. Recuerda, finalmente, que distingue dos tipos de proposiciones: reales e ideales; luego, la razón que se tiene para introducir tal distinción; la necesidad de probar, en tal caso, la consistencia; y, los bienes que se derivan de la concepción de las proposiciones ideales que hacen de la teoría de la demostración la piedra angular del sistema axiomatizado.

La segunda parte de la conferencia es polémica. Argumenta contra Poincaré, Russell y Whitehead, Brouwer.

Poincaré niega "la posibilidad de una prueba de consistencia para los axiomas de la aritmética". (Hilbert ha reafirmado en esta conferencia que, gracias a la teoría de la demostración, es posible probar la consistencia de los axiomas de la aritmética; ya se dijo oportunamente que esto no podía ser más que un pensar con el deseo). Sostiene Poincaré que "la consistencia del método de inducción matemática no podría probarse nunca, salvo... mediante el método de inducción matemática", es decir, salvo si se comete petición de principio.

Hilbert contraataca. Hay dos tipos de inducción que intervienen al establecer los fundamentos de la aritmética: una inducción con referencia al contenido; otra, la inducción propiamente hablando, o inducción formal. Mediante la primera se hace, por ejemplo, la construcción intuitiva de los enteros a partir de los numerales y las consideraciones relacionadas ya vistas. Por la concepción misma de la teoría de la demostración estos dos tipos de inducción son inconfundibles, salvo para Poincaré, aunque es cierto que el matemático francés no conoció sino un primer esbozo, el de 1904, de la teoría de la demostración.

Hilbert encara seguidamente a Russell y Whitehead. Reconoce que la de ellos es una obra con amplitud de miras, pero que la fundación de la matemática que alcanzan, descansa sobre dos axiomas, el del infinito y el de reducibilidad, la descalificación de los cuales es apenas enunciada por Hilbert: "Ambos axiomas son genuinas asunciones con referencia al contenido carentes de prueba de consistencia".

Llega el turno al tercer jefe de escuela, el matemático holandés, Brouwer, quien, "como Kronecker en su tiempo, declara que los enunciados de existencia, todos, carecen de significado por sí mismos, a menos que contengan también la construcción del objeto que se asegura que existe; según él, hay títulos sin valor y su uso hace que la matemática degenere en un juego".

A la afirmación de Brouwer respecto a las pruebas de existencia, Hilbert opone la existencia de pruebas de existencia. Aduce el ejemplo del teorema de existencia, del propio Hilbert, de una base de formas para la teoría de los invariantes (1896), así como otros ejemplos históricos. "De hecho, la matemática está repleta de ejemplos que refutan la aserción de Brouwer en cuanto a los enunciados de existencia", a partir de los cuales, por cierto, es posible obtener pruebas finitistas, como las exigidas por Brouwer.

Gracias a las pruebas de existencia es posible "expresar de manera uniforme todo el contenido en pensamiento de la matemática" y de tal manera que "se hacen claras, al mismo tiempo, las interacciones entre los hechos y proposiciones individuales". No hay entonces para qué requerir la interpretabilidad de cada fórmula y puede cumplirse una de las condiciones para la construcción de una teoría, la de no retroceder a la intuición o a la significación durante su desarrollo. Hilbert plasma su idea al respecto en esta frase: "En mi teoría de la demostración solamente las proposiciones reales son directamente verificables". Recuérdese que hay además, las proposiciones ideales.

Hilbert retoma la defensa de las demostraciones de existencia. El valor de ellas está precisamente en que no se estudian las construcciones una por una, sino que se fija la atención en la idea fundamental, la que es común a todas ellas.

> Puras demostraciones de existencia son las que de veras han hecho época en el desarrollo histórico de nuestra ciencia. Pero no son consideraciones como estas las que pueden perturbar a un devoto intuicionista.

¿Qué responde Hilbert al reproche de Brouwer de que la matemática se convierte en un juego de fórmulas? En primer lugar, dicho juego es válido matemáticamente hablando. Pero, además, hay en él una aspecto filosófico:

> Porque el juego de fórmulas se efectúa de acuerdo con ciertas reglas definidas, en las cuales va expresada la técnica de nuestra manera de pensar. Estas reglas forman un sistema cerrado que puede ser descubierto y puesto de manifiesto de una vez por todas.

Y lo que añade revela el sentido filosófico que tiene la metamatemática para Hilbert:

> La idea fundamental de mi teoría de la demostración no es otra que la de describir la actividad de nuestro pensamiento, hacer un protocolo de las reglas según las cuales procede realmente nuestro pensamiento.

Estas frases de Hilbert no deberían molestar, en principio a los intuicionistas, bastante afectos a la psicología. Hilbert hace, empero, las salvedades del caso: nada de psicologismo.

De nuevo, un ataque directo contra Brouwer:

> Es parte de la tarea de la ciencia, la de liberarnos de la arbitrariedad, el sentimiento, y los hábitos y la de protegernos del subjetivismo que ya se había hecho sentir en la visión de Kronecker, y, me parece, halla su culminación en el intuicionismo.

El tercer punto, sobre el cual Hilbert quiere expresar claramente su punto de vista, es el relativo al principio del tercero excluido. Respecto a la exclusión de este por los intuicionistas, ya había dicho Hilbert, por lo menos en una conferencia anterior, lo que aquí se repite con las mismas palabras, que "sería lo mismo que proscribir el telescopio al astrónomo, o el uso de sus puños al boxeador". Añade algo más grave aún: "Prohibir los enunciados de existencia y el principio del tercero excluido equivale a abandonar enteramente la matemática". Este símil, calificado, posteriormente por Kreisel como inepcia, mereció, no obstante, ser citado por Weyl. Actitudes que muestran que los matemáticos juzgan diversamente la del propio Hilbert. Quien seguramente está exagerando. Desde 1920, existen lógicas de más de dos valores, sin principio del tercero excluido. El desarrollo ulterior reivindica por lo menos el derecho a considerar tales lógicas en igualdad de condiciones que la de dos valores. ¿En qué sirven aquellas al desenvolvimiento de la matemática? Los ensayos que Hilbert conoció no le convencieron:

> Comparado con la inmensa expansión de la matemática moderna, ¿qué significan los retazos miserables, los escasos resultados aislados, incompletos y desconexos que han obtenido los intuicionistas?

Hilbert da término a su conferencia de esta manera:

> La matemática es una ciencia sin presuposiciones. Para su fundamentación no tengo necesidad de Dios, como Kronecker; ni del supuesto de una especial aptitud de nuestra inteligencia afinada con el principio de inducción matemática, como Poincaré; ni de una intuición primordial, como Brouwer; ni, finalmente, de los axiomas de infinitud, reducibilidad o compleción, como Russell y Whitehead.

1928. Problemas en la fundamentación de la matemática

(*Fundamentos de la geometría*. Apéndice X. pp. 310-319).

En septiembre, se reunió en Bolonia, el octavo Congreso Internacional Matemático. El tres, Hilbert desplegó ante dicha audiencia, el estado de las perquisiciones adelantadas bajo su directa inspiración. Luego de una rápida ojeada al último decenio que "ha sido para la ciencia matemática un período de espléndido florecimiento", afirma que "por razón de tan halagüeño estado de cosas, crece en el matemático el deber especial que tiene de consolidar su ciencia en los propios fundamentos".

Para entrar en materia, rinde pleitesía a "los grandes clásicos y creadores de la investigación de los fundamentos": Cantor, Frege, Dedekind, Zermelo. Lamenta, de paso, que los caminos abiertos por este último "genial intérprete contemporáneo" de los maestros nombrados antes, hayan sido "abandonados bajo la presión de opiniones decisivas", como las de Poincaré, "inventivo maestro, quien por una malhadada concepción del razonamiento inductivo cerraba el camino al progreso"; Poincaré resucitó ideas ya superadas de Kronecker, así "nuestra querida ciencia fue conturbada durante veinte años por una pesadilla fatal". No obstante, ahora se vislumbra algo. "Saludo como a un despertar, como a una luminosa aurora rosada, el que en los últimos tiempos una serie de jóvenes matemáticos han vuelto sobre los problemas de Zermelo". Su optimismo vuelve a ensombrecerse. "Nunca es posible alcanzar una solución definitiva de los problemas fundamentales por medio del procedimiento axiomático". En efecto, hay en los axiomas de Zermelo, hipótesis que se refieren a contenidos, que habría que demostrar, porque, de lo contrario, la matemática, con tal tipo de hipótesis, "pierde su carácter de absoluta seguridad" y cae en lo problemático. Con la teoría de la demostración, que convierte cada enunciado matemático en una fórmula concretamente manifiesta y deducible con todo rigor, las cuestiones fundamentales salen del mundo real y se trasladan al dominio de la matemática pura.

Hilbert menciona, también esta vez, los trabajos relativos a la no contradicción y algunos buenos efectos que se seguirían de su obtención. Como anota Heijenoort, página 489, ya para el año 1927, Hilbert y sus colaboradores no habían calibrado las dificultades que había que vencer todavía antes de poder probar la consistencia de la aritmética y del análisis. El propósito de la tesis de Ackermann, 1924, era demostrar la consistencia del análisis. Teniendo en cuenta los puntos débiles que en ella encontró, von Neumann construyó, 1927, una prueba de consistencia para la aritmética de primer orden en la que la inducción no se aplica sino a fórmulas sin cuantificadores, es decir, a una parte solamente de la aritmética de Peano. La comunicación de Hilbert trasunta demasiado optimismo acerca de estos trabajos (anotación hecha ya en dos ocasiones). En la escuela de Hilbert se anhelaba alcanzar una prueba para la aritmética de primer orden, sin restricciones, es decir, para la llamada aritmética de Peano, no solo para una parte de ella, gracias a alguna conveniente extensión de los argumentos de Ackermann y de von

Neumann. A nadie rozó el presentimiento de que ello no fuera posible. Al final de la conferencia de 1927, hay una afirmación que, a posteriori, uno juzga arriesgada:

> Es la prueba de consistencia la que determina el alcance efectivo de mi teoría de la demostración y la que constituye su esencia.

Era muy temprano todavía para ver que las dos cosas eran totalmente independientes. De no haber sido este el caso, no se le dedicaría un detallado capítulo a la metamatemática.

Quizá haya que medir la importancia de esta conferencia por el hecho de que con ella contribuyó Hilbert al advenimiento de la respuesta para su problema fundamental. En efecto, enunció en ella cuatro problemas, la solución de uno de los cuales, suministrará la respuesta tanto esperada. Dos de los problemas tienen que ver con la propiedad de estar exento de contradicción; los otros dos con la de plenitud o compleción del sistema de axiomas para la teoría de números y para el análisis del sistema de las reglas lógicas: con el tercer problema está ligado este otro:

> Si una proposición está libre de contradicción es demostrable.

Heijenoort, página 481, considera que el siguiente pasaje es una respuesta a uno de los reproches de Poincaré:

> Cuando quiero averiguar si una fórmula, tomada como axioma, conduce a una contradicción, la cuestión es si alguien me puede presentar una prueba que conduzca a contradicción. Si tal prueba no me es presentada, tanto mejor, me ahorro la molestia de examinarla. Si alguien me presenta una, tengo el derecho de seleccionar partes de ella, y de considerarlas aisladamente, y, en particular, de descomponer los numerales que figuran en ella compuestos y construidos; esto, de ninguna manera, es una inferencia de n, a, $n+1$.

Hay todavía un acto de confianza más, por parte de Hilbert, en el poder de la teoría de la demostración. Este. Quedan, es cierto, muchos problemas, pero ya no hay peligro de confusión, puesto que se sabe cómo resolverlos, “de una manera matemáticamente precisa y unívoca”.

Termina recordando sus más íntimas convicciones filosóficas, es a saber, una confianza absoluta en la razón humana cuando resuelve problemas matemáticos:

> ¿Qué ocurriría con la verdad de nuestro saber y con la existencia y progresos científicos si ni siquiera en matemática se diera la verdad segura? La teoría de la demostración nos proporciona el sentimiento profundo de la convicción de que a la inteligencia matemática no se le ponen fronteras y de que es capaz de escudriñar hasta las leyes del propio pensar.

. . . en matemática no existe el nunca lo sabremos. . .

Nuestra inteligencia no está impulsada por una especie de arte misteriosa, sino que solamente obra según reglas completamente establecidas, que son al mismo tiempo la garantía para la absoluta objetividad de sus juicios.

1931. Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre

(Los fundamentos de la teoría de números elemental. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Band III. S. 192-195).

En esta publicación corta Hilbert reafirma sus formulaciones anteriores más notables, tanto, las que tienen que ver con la rigurosa exposición de su metamatemática (lo cual no tiene nada de extraño) como las concernientes al alcance matemático y filosófico del problema de la no contradicción: esto, el mismo año en que será publicado el teorema de Gödel que da al traste con las extrapolaciones que hacía Hilbert a partir del supuesto de que el problema de la no contradicción tendría la solución positiva que la escuela de Gotinga ansiaba.

Ya la segunda conferencia citada de 1922 terminaba con la anotación confiada de que una vez arreglado el problema de los fundamentos podría acometerse la demostración de no contradicción en el análisis matemático y en la teoría de conjuntos. En diversas ocasiones había expresado Hilbert, concisa pero concretamente (de acuerdo con su lema de los problemas bien puestos) cuán cerca se estaba de la meta; cuáles serían, lograda esta, los beneficios; y, cuáles serían los proyectos que habría que acometer de inmediato.

Esta vez, 1931, Hilbert cree que su sueño está próximo a realizarse; asegura que, por fin, la demostración de no contradicción elaborada por Ackermann y von Neumann ha sido llevada tan adelante que se sigue de ella la no contradicción para la teoría de números elemental. El hecho de que la respuesta va a ser negativa, anulará lo que hay de esperanza en estos propósitos de Hilbert; de ninguna manera, la teoría de la demostración, tan sistemáticamente elaborada, la nueva axiomática.

Epílogo

Este recorrido por las principales memorias de Hilbert sobre la fundamentación de la matemática muestra (como a los protagonistas de esta historia) la complejidad del problema lógico de la matemática.

Con *Elementos*, de Euclides, se tenía un modelo axiomático. Se exponía matemáticamente, cuando la exposición se acercaba a la de *Elementos*. Spinoza quiere decir que expone la ética axiomáticamente, pero no usa la expresión *ordine axiomatico* sino la bien conocida *ordine geometrico demonstrata* porque cuando se trata de axiomática, la mención de *Elementos* es inequívoca, es el paradigma. La axiomatización a la manera de Euclides se refiere a un contenido. El matemático alejandrino trabaja con abstracciones de tipo aristotélico: de los objetos conocidos se consideran únicamente unos pocos caracteres: el tamaño y la forma en *Elementos*. Los teoremas son verdaderos con el criterio general de verdad en la escuela aristotélica, vale decir, si los enunciados concuerdan con lo que, ingenuamente, se entiende por realidad. Kant había extendido carta de ciudadanía a una concepción que, con tantos siglos de madurez, parecía merecerla. Pero, el descubrimiento de las geometrías no euclidianas, a los pocos años, acabó con la tranquilidad de conceptos. Se hizo necesario escudriñar a fondo el concepto de axiomatización. Desde el punto de vista geométrico, la labor la efectúan Cayley, Beltrami y Klein. Desde el punto de vista axiomático, es diseñada y acometida por Pasch, en el terreno de la geometría; extendida a la axiomatización de otros terrenos de la matemática, en los que había florecido la axiomatización, casi espontáneamente, por Frege, Peano, Russell, ... Es Hilbert quien culmina la obra con *Fundamentos de la geometría*. En esta aparece el problema de la no contradicción que el mismo Hilbert enuncia, luego, para toda la matemática. Después de cantidad de esfuerzos y de mucho ingenio, se pudo ver que la demostración de no contradicción obligaba a distinguir entre matemática y metamatemática. Hilbert la creó y consolidó; la llamó inicialmente teoría de la demostración y posteriormente metamatemática. Consiste, grosso modo, en el examen, desde el punto de vista lógico, del texto mismo, como cuando en la lengua materna se estudia una lengua extranjera. La metamatemática es un estudio que se refiere a un contenido; el contenido consiste de un texto matemático dado; el texto matemático mismo carece de contenido. Es un estudio semántico de un texto sintáctico. En un papel análogo al de la crítica respecto a un texto literario, pero va mucho más lejos, en cuanto procede sistemáticamente, y, se puede decir con una imagen, en un plano paralelo a aquel en el que se desenvuelve la matemática misma y de modo igualmente paralelo al del texto matemático mismo.

El desarrollo de la lógica después de 1930 es en gran parte el de la metamatemática.

Se pone punto final a este recorrido por los textos de Hilbert con el testimonio de Alfred Tarski, citado por Constance Reid, en la página 218 de su biografía del matemático alemán:

> Hilbert merecidamente será llamado el padre de la metamatemática. Porque fue él quien la creó como ente independiente, quien luchó por su derecho a la existencia, con el respaldo de toda su autoridad como gran matemático; fue él quien diseñó su futuro rumbo y quien le confió aspiraciones y grandes tareas. Es cierto que el infante no colmó todas las esperanzas del progenitor, no surgió como un niño prodigio. Pero, se desarrolló juicioso y saludable, hasta convertirse en un miembro normal de la gran familia matemática, y no creo que el padre tenga razón alguna para avergonzarse de su progenie.

Sinopsis de algunas contraposiciones en la solución del segundo problema de Hilbert de la no contradicción de la matemática

Intuitivo	Formal
Signos para la comunicación con referencia a contenido	Fórmulas sin significado, es decir, sin referencia a contenido
Finitismo	Tratamiento finitista de las proposiciones transfinitas de la matemática clásica.
Verdad como vivencia de evidencia	No se trata de verdad, sino de consistencia.
Inferencia entre proposiciones	Inferencia entre funciones proposicionales. Manipulación de signos de acuerdo con reglas dadas.
Verdades fundamentales como axiomas de una axiomática material, de contenido	Axiomas: relaciones entre nociones. Definición implícita de Gergonne.
Matemática con referencia a contenido, comunicada mediante el lenguaje corriente.	Matemática: inventario de fórmulas (Hilbert). Matemática: sistema de las fórmulas demostrables (Hilbert). Matemática: ciencia de los sistemas formales (H. B. Curry. 1951).

Teoría de números. Proposiciones reales: $2+3=3+2$. Ecuaciones e inecuaciones numéricas.

Algebra elemental. Proposiciones ideales: $a+b=b+a$.

Brouwer: expulsar de la matemática las proposiciones sin significado.

Hilbert convierte un sistema de proposiciones con significado en un juego con fórmulas sin significado, pero un juego que nunca lleva a contradicción (Weyl).

La propuesta de Brouwer ocasiona mutilación de la matemática clásica.

Hilbert se propone salvar toda la matemática clásica.

Matemática clásica: fundada sobre el número real.

Matemática moderna: fundada sobre la noción de estructura (Bourbaki).

Complementos

Complemento 1. Acerca de la solucionabilidad de todo problema

Es probablemente este importante hecho (que antiguos y difíciles problemas, como la prueba del axioma de las paralelas, la cuadratura del círculo, la solución de la ecuación de quinto grado por radicales, hayan tenido finalmente soluciones completamente satisfactorias y rigurosas, aunque en sentido diferente a aquel en que se hacían los intentos) junto con otras razones filosóficas, las que dan origen a la convicción (compartida por todos los matemáticos, pero que ninguno ha sustentado todavía por medio de una prueba) de que cada problema matemático definido debe necesariamente ser susceptible de una clarificación exacta, sea en la forma de una real respuesta a la cuestión preguntada, o, mediante la prueba de la imposibilidad de la solución, y con ello del necesario fracaso de todos los esfuerzos... Por inaproximables que ciertos problemas puedan parecernos y así nos demos cuenta de que nos encontramos sin recurso alguno frente a ellos, sentimos, no obstante, la firme convicción de que la solución de tales cuestiones debe encontrarse mediante la aplicación de un número finito de procesos puramente lógicos.

¿Es este axioma de la solucionabilidad de todo problema una peculiaridad característica del pensamiento matemático únicamente, o es posiblemente una ley general inherente a la naturaleza de la mente, la de que todas la cuestiones que se ponen deben tener una respuesta?

Esta convicción de la solubilidad de todo problema matemático es un poderoso incentivo para el investigador. Escuchamos dentro de nosotros una insistente incitación: aquí está el problema, busca la solución. Puedes encontrarla por puro razonamiento, porque en matemática no hay ignorancia perenne. (Hilbert. *Problemas matemáticos*. París. 1900).

Seguramente, esta es una expresión de la propia experiencia de Hilbert. Para Brouwer, la creencia hilbertiana en la resolubilidad de cualquier problema matemático está ligada al sostenimiento del principio del tercero excluido. Bourbaki se refiere a ella en estos términos:

Deberá distinguirse cuidadosamente el problema de la decidibilidad, de la creencia, compartida por numerosos matemáticos y expresada a menudo vigorosamente por Hilbert en particular, de que para toda proposición matemática, se terminará algún día por saber si es verdadera, si es falsa, o si es indecidible. Esto es un puro acto de fe, cuya crítica escapa a nuestra discusión. (*Éléments d'histoire des mathématiques*. p. 62).

Complemento 2. Poincaré y la metamatemática de Hilbert

En la filosofía de la matemática de Kant resultaba que el matemático no puede probar sus proposiciones con la sola lógica, sino que tiene que valerse, además, de la intuición pura para lograrlo: es lo que Kant parece haber puesto en claro de su estudio de *Elementos* de Euclides.

Un siglo más tarde, Pasch se propone expulsar a la intuición del terreno de la geometría. Poco más o menos al mismo tiempo Frege, y, después Russell, se proponen derivar toda la matemática de la mera lógica.

Poincaré toma partido por la filosofía de Kant. "Para edificar una ciencia cualquiera, es menester algo más que la lógica pura". "La intuición debe conservar su papel como complemento, iba a decir, como contrapeso o antídoto de la lógica". Arremete violentamente contra Couturat, quien había escrito que en los trabajos de Russell y Peano estaba zanjado el debate entre Leibniz y Kant, que no hay juicios sintéticos a priori (juicios no analíticos, no reducibles a identidades), que la matemática puede obtenerse a partir de la sola lógica, y, que la intuición no desempeña ningún papel. Parece haberse cumplido, así, una especie de programa de Pasch generalizado: expulsar a la intuición de los terrenos de la matemática. Poincaré afirma, por el contrario, que no se puede pasar de la lógica a la matemática, sin valerse de la matemática misma, es decir, sin petición de principio.

Burla burlando Poincaré hace un elogio de *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert. "He aquí un libro que me parece muy bueno, pero que no recomendaría a ningún alumno de liceo... Pensándolo bien, podría hacerlo sin temor, pues no creo que prolongara mucho tiempo su lectura". (*Ciencia y método.* II). El método axiomático de Hilbert, de definir mediante postulados, provoca unas cuantas ironías de Poincaré. "¿Qué son punto, recta, plano? No solamente no sabemos nada, sino que tampoco debemos tratar de saberlo. No tenemos necesidad y cualquiera que no hubiera visto jamás ni un punto, ni una recta, ni un plano, podría hacer tanta geometría como hacemos nosotros". (*Ciencia y método.* III). Naturalmente, Poincaré habla también el lenguaje formalista: "¿qué son punto, recta, plano? No lo sabemos, y, no tenemos que saberlo; incluso sería inconveniente que tratáramos de saberlo; todo lo que tenemos derecho a saber es lo que nos enseñan los axiomas". (*Ciencia y método.* II).

La definición por axiomas es la definición implícita de Gergonne. Los axiomas definen implícitamente ciertos términos que se han tomado sin definición, verdaderas variables como las incógnitas de un sistema de ecuaciones indeterminado, pero con la condición de que el sistema de axiomas, como el sistema de ecuaciones, no sea incompatible. Es, pues, obligatorio demostrar la no contradicción. A estos axiomas que resultan definiendo, los llama Poincaré definiciones disfrazadas y da un ejemplo. "Los otros axiomas de la geometría no bastan para definir completamente la distancia; la distancia será entonces, por definición, entre todos los tamaños que satisfagan a los otros axiomas, aquel que es tal que el postulado de Euclides sea verdadero". (*Ciencia y método.* III. 3).

Si el logicismo tiene razón, los postulados de Peano constituyen la definición implícita de cero, número, sucesor.

Es doctrina conocida que toda definición implica un axioma, o una demostración, que afirme o establezca la existencia del objeto definido. "En matemática, existir no puede tener más que un sentido: exento de contradicción" (Poincaré). Si se tiene un sistema de axiomas y se demuestra que los axiomas no implican contradicción, habrá derecho para considerar que estos sirven para definir implícitamente. Ideas como esta obligan a no considerar a Poincaré como un intuicionista, sino como a un pensador de la matemática a mitad de camino entre intuicionismo y formalismo. Bastante lejos del formalismo, es cierto, como cuando ataca a Hilbert del modo que sigue.

Para mostrar que una definición no entraña contradicción basta mostrar que existe un objeto que concuerde con la definición, es decir, en este caso, para el que sean verdaderos los axiomas. Esto no es posible con los postulados de

Peano sino considerando todos los números naturales. No queda, entonces, sino verificar que entre las consecuencias, no puede haber dos contradictorias. Pero el número de consecuencias, en este caso, es infinito, lo cual hace la verificación directa imposible y no quedaría sino invocar el principio de inducción, es decir, cometer una petición de principio. La conclusión de Poincaré es que están equivocados quienes crean haber arruinado la filosofía kantiana de la matemática. Con la sola lógica es imposible hacer matemática, es necesario valerse de la intuición. Y la intuición fundamental para el matemático es el principio de inducción matemática, verdadero juicio sintético a priori. Con esta mediación de la intuición, la lógica ya no será estéril (acusación renovada de Poincaré contra la logística definida por Couturat) ni tendrá que encarar el precipicio de una petición de principio.

Hilbert no podía conocer en 1904 la completa argumentación anterior de Poincaré, la cual aparece en *Ciencia y método*, 1908, como recopilación de artículos publicados en diversas revistas importantes. Es al revés. Poincaré comenta la conferencia de Hilbert en Heidelberg y no de la manera más elogiosa. "Lo que reprocho a Hilbert no es el haber recurrido (un matemático de raza como él no podía no ver que necesitaba una demostración y que era la única posible), sino el haber recurrido sin reconocer el razonamiento por recurrencia" (*Ciencia y método.* p. 149).

Antes de que Hilbert lograra la distinción entre matemática y metamatemática, Poincaré había ya visto que era necesario diferenciar un principio de inducción para secuencias intuitivas de signos y un principio de inducción dentro del sistema formal. Alegaba que era posible una demostración de consistencia que justificara el segundo, pero que no era posible pensar en una prueba similar para el primero.

Hilbert le da la respuesta unos diez y siete años más tarde, 1922. En el caso intuitivo, dice Hilbert, no se tiene inducción matemática. Considera los numerales. Intuitivamente, están construidos como secuencias de signos 1. Muestra que la adición de numerales es conmutativa. Añade luego Hilbert:

> Quiero enfatizar particularmente que esta prueba es un procedimiento que descansa... exclusivamente sobre la composición y la descomposición de numerales [en consecuencia, de solo secuencias de signos 1] y que es esencialmente diferente del principio que, como principio de inducción matemática o inferencia de n a $n+1$, juega un papel tan prominente en la matemática superior.

No obstante, el principio de inducción matemática continuó dando qué hacer a los matemáticos de la escuela de Gotinga. En 1924, Ackermann coloca la inducción matemática entre los métodos transfinitos de inferencia cuestionables y hace hincapié en que la metamatemática tiene que ver únicamente con objetos concretamente dados, a los cuales se aplican métodos de inferencia finitista.

En la escuela de Hilbert se quisiera hacer evidente que los métodos metamatemáticos no van más allá de lo concretamente dado. Hilbert llega a escribir que los argumentos en donde figura "todo" pertenecen a los modos transfinitos de inferencia, no a los que tienen carácter finitista (den Character des Finiten). Posición difícil de sustentar, escribe Heijenoort, página 481, dado que la metamatemática también tiene que hacer enunciados universales; pues, como Poincaré había notado, una prueba de consistencia para un sistema dado, envuelve todas las proposiciones que son demostrables en el sistema.

Pero Herbrand, 1930, piensa que la inducción matemática tiene carácter finitista: en metamatemática, un argumento inductivo "nunca es más que la indicación, en una fórmula, de un procedimiento que ha de ser aplicado un cierto número de veces en cada caso particular". Según el mismo Herbrand, en la célebre descripción del finitismo (o finitarismo), cuando se dice que un argumento vale para todos los elementos de un conjunto, se quiere decir, que es posible repetir el argumento general en cuestión para cada uno de dichos elementos. Heijenoort relaciona este pasaje con lo que sucede en la práctica matemática: el caso paradigmático es el que resulta descrito; para todos los demás se procedería análogamente. Supone que Hilbert pensaba soslayar de esta manera en la argumentación metamatemática, el empleo del principio mismo de inducción matemática. En álgebra, cuando se quiere probar que un grupo es conmutativo, se consideran dos elementos arbitrarios del grupo y razonando sobre ellos dos como elementos del grupo se muestra que no importa el orden en que se los componga; dado que no se ha supuesto nada que los distinga de otros elementos del grupo, el argumento vale para todos los pares.

Complemento 3. Weyl y la metamatemática de Hilbert

Weyl, quien en 1921, había sido convencido por los razonamientos de Brouwer, reconoce, desde 1927, la significación y el alcance de esta obra de Hilbert, que la presión de las circunstancias había hecho inaplazable.

Brouwer, como todos, requería que los teoremas de la matemática fueran 'proposiciones reales'en el sentido de Hilbert, verdades significativas... Que desde tal punto de vista solo una parte, un trozo miserable, de la matemática clásica era defendible es un hecho amargo pero inevitable. Hilbert no podía aceptar tal mutilación... Tuvo éxito al salvar la matemática clásica gracias a una radical reinterpretación de su significado sin reducir su inventario, es a saber, gracias a la formalización, que le permitió transformarla de un sistema de resultados intuitivos a un juego de fórmulas que se hace según reglas fijas.

Antes de construir Hilbert su teoría de la demostración todos pensaban la matemática como un sistema de verdades con referencia a contenido, significativas y evidentes.

En comentario a la conferencia de Hilbert de 1927, Weyl escribió (Heijenoort. p. 483):

Todos quienes fuimos testigos de este desarrollo estamos llenos de admiración por el genio y la resolución con las que Hilbert, a través de su teoría de la demostración de la matemática formalizada, coronó la obra principal de su vida axiomática.

Y, como me place afirmarlo, no hay nada que me separe de Hilbert en la apreciación epistemológica de la nueva situación así creada.

Con esta declaración se puede dar por terminada la disidencia de Weyl. En lo fundamental, por lo menos. Por ejemplo, en que con el procedimiento de Hilbert se evita el círculo vicioso que Weyl había advertido en los fundamentos mismos del análisis, en 1919. En 1944, en el recenso de la obra de Hilbert, fallecido el año anterior, Weyl escribe:

En respuesta a los intuicionistas que miraban como un defecto el que "gran parte de la matemática generalmente aceptada esté más allá de las proposiciones que pueden tener un real significado", Hilbert abandona completamente cualquier significado y maneja enunciados que encajan dentro de una forma lógica pero que están desprovistos de contenido.

Hilbert se dio cuenta de que los enunciados matemáticos mismos no podían ser el tema de una investigación matemática cuya meta era responder a la cuestión de su consistencia, a menos que redujera los mismos a meras fórmulas.

El proceso de deducción mediante el cual fórmulas ya obtenidas dan origen a nuevas fórmulas, debe ser descrito sin referencia a significado alguno de las fórmulas, el cual no ayuda en nada al proceso de derivación, sino que más bien es un estorbo.

Mientras que en *Fundamentos de la geometría* el significado de los términos geométricos había perdido su importancia, aunque los conservaban los términos lógicos, *y*, *no*, *si... entonces...*, ahora había que borrar cualquier traza de significado.

Y en 1950 (A half century of mathematics) da este compendio:

Trató de salvar la matemática clásica convirtiéndola de un sistema de proposiciones con significado en un juego de fórmulas sin significado, y, mostrado que este juego nunca conduce a dos fórmulas que se contradicen. Su meta es la consistencia, no la verdad.

En su recensión de 1944, escribió también Weyl:

> Debió haber sido difícil para Hilbert, el axiomatizador, reconocer que la visión de la consistencia se alcanzara más bien por un razonamiento intuitivo que se basa en la evidencia y no en los axiomas. La aritmética elemental puede fundamentarse en el tipo de razonamiento intuitivo que el mismo Hilbert describe, pero necesitamos el aparato formal de variables y cuantificadores para investigar el infinito... Hilbert prefiere, por tanto, hacer una división. Formalista estricto en matemática, estricto intuicionista en metamatemática.

Es interesante anotar, pese a todo, que aún en los últimos escritos de Weyl parecen remanecer algunas de las inquietudes de Brouwer. El mismo Weyl confesaba en 1946 que la "crisis" había tenido una considerable influencia práctica en su vida matemática: le había constreñido a indagar en campos tenidos por relativamente "seguros", a más de constituirse en constante avenamiento de su entusiasmo y determinación en la prosecución de su labor investigativa.

Cuestiones

1. "El suministro de problemas en matemática es inexhaustible, y tan pronto como un problema es resuelto, otro en gran número vienen es seguida a colmar el lugar". ¿Puede ilustrar esta aseveración de Hilbert (*Problemas matemáticos*) con el conocimiento que usted posee de la matemática y de la lógica? Recuerde lo estudiado en geometría griega, y, también la historia del quinto postulado. ¿Sucede lo mismo en filosofía? ¿Se ocupó Kant de resolver los problemas de Leibniz y de Hume? (En el caso en el que ellos no los hubieran resuelto, se entiende). ¿Vuelve un filósofo a plantearse los problemas de sus antecesores? Ilustrar la respuesta.

2. "Desde que una rama de la ciencia ofrezca abundancia de problemas, ella está viva; escasez de problemas es presagio de extinción o de cese de desarrollo independiente" (Hilbert. *Problemas matemáticos*).

   ¿Sucede algo análogo en filosofía? Es el hecho de resolver problemas lo que enriquece tanto al matemático como a la matemática. ¿Sucede lo mismo en filosofía? ¿O es más bien la actitud de cuestionamiento la que mantiene activa a la filosofía? ¿Es de desear que haya muchos problemas que discutir para que la filosofía esté viva?

3. “De la misma manera que toda empresa humana requiere ciertos objetivos, así también la investigación matemática requiere problemas”. (Hilbert. *Problemas matemáticos*).

   ¿Puede extenderse esta afirmación a todo tipo de investigación? Examinar, desde este punto de vista, la actitud indagativa en el campo del arte, de las ciencias físicas, químicas, naturales, humanas.

4. “Es mediante la solución de problemas como el investigador comprueba el temple de su acero; encuentra nuevos métodos y perspectivas nuevas y alcanza un horizonte más amplio y más libre”. (Hilbert. *Problemas matemáticos*).

   Se dice que la práctica hace al artesano. ¿Esta misma es la idea del texto? ¿Podría decirse, según Hilbert, que la práctica de resolver problemas hace al matemático? Comparar con la filosofía.

5. “La adopción del método científico en filosofía nos obliga, si no me equivoco, a abandonar la esperanza de resolver muchos de los más ambiciosos y humanamente interesantes problemas de la filosofía tradicional. Deja algunos de ellos, aunque sin grandes esperanzas de que sean resueltos con éxito, para las ciencias especiales, y demuestra que otros son de tal índole que nuestras facultades resultan esencialmente incapaces de resolverlos”. (Bertrand Russell. *El método científico en filosofía*).

   Comparar el pensamiento de Russell con el de Hilbert respecto a la resolución de problemas en filosofía y en matemática. ¿Se ocupa la filosofía de la resolución de problemas? (juzgar por el texto de Russell). ¿Hay problemas insolubles en filosofía? La aserción de Hilbert, “No hay ignorancia perenne en matemática”, (el desenvolvimiento del problema de no contradicción, por ejemplo, posterior, mostró que sí hay ignorancia perenne a propósito de algunas cuestiones) ¿es equivalente a decir que no hay problemas insolubles en matemática?

6. El principio del tercero excluido es aceptable para conjuntos finitos, según Brouwer, no para infinitos. En efecto, si el conjunto es finito, es posible, por lo menos en principio, (mediante una calculadora, podría decirse actualmente), una verificación. Si el conjunto es infinito, la verificación es, también por principio, imposible. ¿Aparecen los diez dígitos de la numeración arábiga, en su orden, en el desarrollo decimal de π? En los desarrollos

que se conocen (por muchos millares de cifras decimales que tengan) no han aparecido los diez dígitos en orden. Es posible, tanto que aparezcan en algún lugar de desarrollo, todavía no alcanzado, como que no aparezcan nunca, aunque se calculen millones de cifras. Como no hay contradicción en los términos de la pregunta, según la doctrina de Hilbert la respuesta debe ser que sí existen dichos diez dígitos en orden en el desarrollo decimal de π. La respuesta de Brouwer es totalmente diferente. Puesto que el desarrollo decimal de π tiene infinitas cifras, el principio del tercero excluido no es aplicable en este caso. Y la pregunta carece de significado. ¿Había pensado usted que problemas tan claramente enunciados pudieran conducir a respuestas contrapuestas? Trate de buscar una situación análoga en filosofía. Brouwer no tenía razón. Ver: The Mathematical Intelligencer. Volume 20. Number 1. Winter 1998. pp. 14-15.

7. "Una prueba formalizada, como un símbolo numérico, es un objeto concreto y visible. Podemos describirlo completamente". Alguien le pregunta a usted si puede ser de Hilbert esta afirmación. Trate de explicarle por qué sí o por qué no.

8. En su memoria *Sobre el infinito*, escribe Hilbert que los axiomas son como bloques de construcción para el edificio formal de la matemática. Explique en qué sentido. ¿En la axiomatización a la manera de Euclides tienen los axiomas el mismo papel?

9. Dice Hilbert: "El sistema de las fórmulas demostrables, es decir, la matemática". Discutir esta caracterización de la matemática. ¿Coincide con la idea que el profano puede hacerse de la matemática? Dice Bourbaki: "Desde los griegos, quien dice matemática, dice demostración". Según esto, ¿coincide Bourbaki con Hilbert? ¿Tal acepción cobija toda la matemática? ¿La de los mayas, por ejemplo? ¿O la que se inventó en Mesopotamia? ¿Por que sí, o, por qué no? ¿A qué opinion adhiere usted? ¿Por qué?

10. "Ni la matemática, ni otras ciencias, pueden ser fundamentadas sobre la mera lógica; más bien, como una condición para el uso de las inferencias lógicas y para la ejecución de las operaciones lógicas, algo debe sernos ya dado en nuestra facultad representativa, ciertos objetos concretos extralógicos intuitivamente presentes como experiencia inmediata a todo pensamiento". (Hilbert. 1927). Comparar esta opinión con la de Kant.

11. "El infinito no se realiza en parte alguna". ¿Qué sería, entonces, el realismo en matemática? ¿Según el realismo, debería encontrarse alguna realidad infinita? Recordar algunos de los argumentos de Aristóteles contra el infinito actual, en lo que tienen que ver con la sentencia escrita entre comillas.

12. "El infinito, ni existe en la naturaleza, ni es admisible como fundamento para el pensamiento racional: armonía notable entre el ser y el pensar". ¿En qué consiste la armonía notable señalada por Hilbert?

13. "En contraste con los esfuerzos de Frege y Dedekind, estoy convencido de que ciertos conceptos intuitivos y cierta visión son condiciones necesarias para el conocimiento científico, que la lógica sola no es suficiente" (Hilbert). ¿Cuál es la opinión del logicismo a este respecto?

14. "El derecho a operar con el infinito solo puede adquirirse finitísticamente" (Hilbert). Expresar el mismo pensamiento con otras palabras. Comparar este pasaje de la historia de la matemática, con aquel de la eliminación de lo infinitamente pequeño efectuada por Weierstrass. ¿Qué papel desempeñan los números en uno y otro caso?

15. "Al infinito no le queda otro papel que el de ser meramente una idea, si uno entiende idea en el sentido kantiano, un concepto de razón que trasciende toda experiencia y que completa lo concreto en una totalidad" (Hilbert). El infinito así entendido ¿es un elemento ideal en el sentido de Hilbert? ¿Es una idea platónica? ¿Es un elemento idealizado?

16. Durante largo tiempo fue dominante la opinión de que el mundo es infinito; en tiempo de Kant y aun después, nadie abrigaba duda alguna acerca de la infinitud del espacio. Aducir algún texto de Kant al respecto. ¿Se basaba Kant en la doctrina de Newton, al respecto?

17. "Las pruebas de existencia llevadas a cabo mediante el principio del tercero excluido son frecuentemente muy llamativas a causa de su sorprendente brevedad y elegancia" (Hilbert). Trate de ver que la demostración de que raíz cuadrada de 2 es un irracional, mediante el tercero excluido, cumple la apreciación de Hilbert. Consideración análoga respecto a la demostración de Euclides para el enunciado que afirma que dado un número primo siempre hay uno mayor. Trate de ver cómo el principio del tercero excluido puede reducir una demostración al mínimo. Tendrá que ver el hecho de que haya solamente dos valores?

18. Las proposiciones que solo contienen numerales, como: 3 es mayor que 2, $2 + 3 = 3 + 2$, $2 = 3$, $1 \neq 1$ son para Hilbert proposiciones finitistas, es decir, inmediatamente intuibles y directamente inteligibles. ¿Cuándo es $a + b = b + a$ una proposición finitista? ¿Cuándo es $a + b = b + a$ una proposición ideal? ¿Dónde está la diferencia?

19. Morris Kline (p. 1208. *The mathematical thought from ancient to modern times*) cita esta observación de Weyl:

    > La matemática de Hilbert puede ser un lindo juego con fórmulas, más divertido todavía que el ajedrez; pero qué va a importar eso para el conocimiento, dado que sus fórmulas de entrada carecen de significado material en virtud del cual puedan expresar verdades intuitivas.

    Esta crítica está hecha desde el enfoque intuicionista. ¿Por qué? ¿Es justificada? ¿La habría admitido Poincaré? ¿Weyl pensó siempre de esta manera respecto de la metamatemática de Hilbert?

20. Ya en 1894 sostenía Poincaré que el razonamiento matemático por recurrencia es irreducible a la lógica. Es, según el matemático francés, un juicio sintético a priori, aceptado por una intuición directa y fundamental del número natural. Compare con lo que Kant entiende por juicio sintético a priori. ¿Coinciden las dos concepciones? ¿O Poincaré ha modificado la concepción de Kant? ¿Es el principio de inducción matemática, como se le llama igualmente, un juicio sintético a priori en el sentido de Kant? ¿Todo juicio sintético a priori, de Kant, es un juicio sintético a priori, con las características que le da Poincaré al postulado quinto de Peano o principio de inducción matemática? Los juicios sintéticos a priori de Kant ¿están por dentro o por fuera de la lógica? ¿Los de Poincaré?

21. ¿Cómo podrían situarse Kant y Poincaré respecto al logicismo?

22. Según Poincaré, el principio de recurrencia es una colección infinita de silogismos en cascada. De aquí saca la conclusión: toda tentativa de justificación lo supone. ¿Se podría indicar cómo?

23. Según Poincaré, el principio de recurrencia es el único instrumento que permite pasar de lo finito a lo infinito. Comparar esta opinión con la de Aristóteles cuando afirma que los matemáticos no necesitan del infinito.

24. Al volverse rigurosa, la ciencia matemática toma un carácter artificial; olvida sus orígenes históricos; se ve cómo pueden resolverse los problemas; pero ya no se ve cómo y por qué aparecen (Poincaré). Relación de esta opinión con lo que Hilbert llama método genético y método axiomático.

25. ¿Son del mismo tipo las influencias que pueden tener Hilbert y Poincaré en la filosofía de la matemática?

26. Bourbaki, página 34, cita la siguiente anticipación de D'Alembert (Encyclopédie. Définition):

    > Puede dársele a las palabras el sentido que se quiera. Se podría, al fin y al cabo, tratar elementos de geometría de manera exacta, aunque ridícula, llamando triángulo a aquello que ordinariamente se llama círculo.

    Justificar la aserción de D'Alembert. ¿Son las palabras inherentes a las cosas?

27. Guillaume cita tres frases de Poincaré y añade que Poincaré pudo afirmarlas sin contradecirse. Trate de explicar por qué. Helas aquí:

    > El razonamiento matemático no se vuelve riguroso sino cuando la forma pura ha sido vaciada de toda materia.

    > Al reducir el pensamiento matemático a una pura forma, seguramente se lo mutila.

    > La lógica y la intuición tienen cada una un papel necesario. Ambas son indispensables. La única que puede darnos certeza, la lógica, es el instrumento de la demostración. La intuición es el instrumento de la invención (Poincaré).

    ¿Hasta qué punto es aceptable la opinión de Poincaré? Compararla con le de Bergson, para quien la intuición tiene la virtud de aprehender la unicidad y la novedad que pertenece siempre a cada instante. Comparar con Russell, quien admite que hay algo nuevo y único en cada instante, no captable por conceptos intelectuales, pero tampoco por intuición, sino por el contacto directo de la sensación. Para Russell, la intuición es un aspecto y un desarrollo del instinto, pero totalmente inepta tan pronto como las circunstancias ambientales cambien y exijan algún modo de acción inhabitual. Darse cuenta de que estas dos opiniones son contrapuestas. La de Poincaré ¿coincide con alguna de ellas? Para Bergson el intelecto solo pueda referirse a las cosas en cuanto se asemejan a experiencias pasadas. ¿Lleva esta opinión al irracionalismo que profesa la primacía de la intuición respecto de la inteligencia? Examinar de nuevo la opinión de Poincaré para ver hasta dónde se la puede aceptar y por qué razones.

Bibliografía

1. BETH, E. W. *The foundations of mathematics.* 1959. Amsterdam. North Holland. 1966. Revised edition. New York. Harper and Row. $xxviii + 741$ pp.
2. BENACERRAF, Paul and PUTNAM, Hilary. *Philosophy of mathematics. Selected readings.* Edited by P. E. and H. P. 1964. Englewood Cliffs. New Jersey. Prentice Hall. $vii + 536$ pp.
3. BLANCHÉ, Robert. *L'axiomatique.* 1959. Paris. PUF. 102 pp. Traducción española: *La axiomática.* México. UNAM. 89 pp. 1965.
4. BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques.* (1969). 1974. Paris Hermann. 379 pp. Traducción española: Colección Universidad. 18. Alianza. 1972. 1976. (del original francés de 1974). 401 pp.
5. CAMPOS, Alberto. *David Hilbert.* Notas de Matemática. No. 23. Abril 1981. pp. 69-92.
6. CAVAILLÈS, Jean . *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques.* (Thèse 1937). 1981. Paris. Hermann. 199 pp.
7. DIEUDONNÉ, Jean. *David Hilbert.* pp. 291-297. *Les grands courants de la pensée mathématique.* 1962. (Deuxième édition). Paris. Blanchard. 559 pp.
8. GUILLAUME, Marcel. *Axiomatique et logique.* pp. 315-430. Chapitre XIII. Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700-1900. Tome II. 1978. Paris. Hermann.
9. HEIJENOORT, Jean van. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic 1879-1931.* 1967. Cambridge (Massachusetts). Harvard University Press. $viii + 660$ pp.
10. HILBERT, David. *Fundamentos de la geometría.* Traducción española: 1953. Madrid. Publicaciones del Instituto Jorge Juán. 319 pp. (Traducción de: *Grundlagen der Geometrie.* 7 Auflage. Leipzig. B. G. Teubner. 1930).
11. HILBERT, David. *Gesammelte Abhandlungen.* Band III. (1935). Berlin. Springer.

12. HILBERT, David y ACKERMANN, Wilhelm. *Elementos de lógica teórica*. 1975. Madrid. Tecnos. 213 pp. (Grundzüge der theoretischen Logik. 6. Auflage. Springer-Verlag. 1972. I Auflage. 1928).
13. HILBERT, David y BERNAYS, Paul. *Grundlagen der Mathematik*. 1934. Erster Band. 1939. Zweite Band. Berlin. Springer.
14. HILBERT, David. Mathematical problems. pp. 1-34. *Mathematical developments arising from Hilbert problems*. Proceedings of symposia in pure mathematics. Volume XXVIII. Part I. 1976. Providence. Rhode Island. American Mathematical Society. $xii + 310$ pp. (Los problemas de Hilbert. Primera Parte. pp. 23-55. *Lecturas Matemáticas*. Vol. II. No. 1. Abril. 1981. Bogotá. Segunda parte. pp. 171-198. *Lecturas Matemáticas*. Vol. II. No. 2. Agosto. 1981. Bogotá).
15. KNEALE, William and Martha. *El desarrollo de la lógica*. 1972. Madrid. Tecnos. 705 pp.
16. POINCARÉ, Henri. *La ciencia y la hipótesis*. (1902). Traducción española. 1945. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 227 pp.
17. POINCARÉ, Henri. *El valor de la ciencia*. (1905). Traducción española. 1946. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 173 pp.
18. POINCARÉ, Henri. *Ciencia y método*. (1908). Traducción española. 1946. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 231 pp.
19. POINCARÉ, Henri. *Últimos pensamientos*. (Póstumo. 1913). Traducción española. 1946. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 165 pp.
20. REID, Constance. *Hilbert*. 1970. Berlin-Heidelberg. Springer-Verlag. $xi + 290$ pp.
21. WEYL, Hermann. *Comments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics*. 1927. pp. 480-484 del libro citado de Van Heijenoort.
22. WEYL, Hermann. *David Hilbert and his mathematical work*. 1944. BAMS. 50. pp. 612-654.
23. WEYL, Hermann. *A half century of mathematics*. The American mathematical monthly. 58. pp. 523-553. 1951. October.
24. WEYL, Hermann. Gesammelte Abhandlungen. Band IV. 1968. Springer-Verlag. pp. 464-494.

Capítulo 11

Gödel: limitaciones internas de los sistemas formales

Ningún sistema formalizable puede demostrar, con sus propios medios, que esté exento de contradicción interna: no se trata de una posición filosófica o de una actitud intelectual plausible, sino del resultado de una prueba matemática rigurosa de un género extremadamente complejo.

[John von Neumann. Tribute to Dr. Gödel. pp. $ix - x$. Symposium papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel. 1969. Springer-Verlag. New York. $xii + 195$ pp.].

Conceptos clave para los resultados de Gödel

Las investigaciones de Hilbert y su escuela sobre la metamatemática y sobre las consecuencias que fueron ocasionando para la lógica y la matemática, fueron expuestas, de manera sistemática, en dos obras que han tenido gran influencia.

- HILBERT, David y ACKERMANN, Wilhelm. *Grundzüge der theoretischen Logik*. 1928. Berlin. Springer. $viii + 120$ pp. Traducción española de la sexta edición alemana (1972): *Elementos de lógica teórica*. 1975. Madrid. Tecnos. 213 pp.
- HILBERT, David y BERNAYS, Paul. *Grundlagen der Mathematik*. 1934. Vol. 1. Springer. Berlin. xii+471 pp. Vol. 2. 1939. Berlin. Springer. xii+498 pp.

El hecho de que la segunda obra no haya sido traducida a otra lengua, no parece haberle menguado influencia. La primera, en cambio, tuvo diversas ediciones, traducidas a varios idiomas. Ha sido modificada y enriquecida por Ackermann, hasta la sexta edición alemana, Springer-Verlag, 1972. Es todavía, prototipo de buenos textos de lógica, sobre todo cuando se tiene interés en la fundamentación de la matemática. Desde luego, ambas obras asimilaron los resultados posteriores, incluso los adversos, al proyecto fundamental de Hilbert, que tanto contribuyeron a promover.

En este capítulo, se trata de narrar, someramente, la culminación, 1931, del proceso iniciado cincuenta años antes, 1879, con la obra de Frege, proceso en el que, luego del examen de la axiomatización a la manera de Euclides, se crea la axiomatización a la manera de Hilbert y se determinan sus límites. Sin este relato, el cuadro evolutivo de la axiomática quedaría incompleto, puesto que no hubo solamente un perfeccionamiento de los métodos demostrativos, sino también una limitación que nace del sistema mismo y que tiene, por tanto, cardinal importancia para la filosofía de la matemática, por el hecho de que la limitación es intrínseca, irremediable, pudiera decirse. No depende de que se abrace tal o cual filosofía de la matemática, o, de que no se abrace ninguna; es inherente al sistema formal.

El resultado más espectacular e inesperado fue el de Gödel, 1931. Se trata de llegar a apreciar el enunciado y sus consecuencias, con base en exposiciones del mismo Gödel; no se trata de seguir los detalles de la demostración, que son altamente técnicos. Afortunadamente, a pesar de la reconocida parquedad de los escritos de Gödel, hay pasajes donde el célebre lógico se toma el trabajo de explicar en lenguaje corriente, los puntos culminantes de su indagación. Se goza de la rara suerte de tener en español una primera y una segunda edición, aumentada, de sus obras completas, que, excepcionalmente, no llegan a quinientas páginas.

Antes de dedicarse al estudio de algunos pasajes de dicho texto, es conveniente fijar la atención sobre algunos conceptos clave para la mejor comprehensión del significado y del alcance de los enunciados de Gödel. Son de notar específicamente los que siguen.

Metamatemática.
Axiomas de Peano.
Los cuatro cálculos de la lógica.
Compleción.

Consistencia.
Decidibilidad.
Validez universal.
Principia Mathematica.
Axioma de reducibilidad y teoría unificada de tipos lógicos.
Axioma de elección para todos los tipos.
Axioma de infinitud.

Resultados metamatemáticos

Hay que recalcar que los resultados de Gödel son metamatemáticos. El texto demostrativo, la deducción, es lo matemático; el estudio de lo matemático es lo metamatemático. Con mayor concisión y contenido precisado: el sistema formal es lo matemático; el estudio del sistema formal es lo metamatemático. En el texto mismo, no es cuestión de verdad o de falsedad, sino de relaciones derivables a partir de unas dadas. La relación que haya o no, entre verdades y relaciones deducibles, es el cometido de la metamatemática.

Inicialmente, la metamatemática no estaba axiomatizada, en el sentido de organizada deductivamente. Incluso, en Bolonia, 1928, von Neumann criticó a Tarski por haber axiomatizado también la metateoría (pp. 53 y 52. Lakatos. Matemáticas, ciencia y epistemología. 1981. Madrid. Alianza Editorial. 360 pp.). En cambio, los trabajos de Gödel, de dos años después, están rigurosamente axiomatizados.

Sistema formal

Gödel da una precisa descripción de sistema formal, que concuerda, en particular, con lo ya investigado hasta entonces por Hilbert al respecto, y, que grosso modo constituye lo que se entiende en matemática actual por dicha noción.

> Un *sistema formal matemático* es un sistema de signos junto con reglas para su utilización.

Los signos individuales se llaman *signos primitivos.*

Filas de signos son secuencias finitas de signos primitivos.

Se define una clase de filas de signos llamadas *fórmulas* y una clase de fórmulas llamadas *axiomas*.

Puede haber un número finito o infinito de axiomas.

Se especifica, además, una serie de reglas, llamadas de *reglas de inferencia*.

Si R es una de estas reglas, R define la relación de *inferencia inmediata por* R entre un conjunto de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ llamadas *premisas* y una fórmula dada, B, llamada *conclusión* (usualmente con $n = 1$, o, $n = 2$).

Las reglas de inferencia y las definiciones de las fórmulas y los axiomas deben ser constructivas, esto es, para cada regla de inferencia debe haber un procedimiento finito para determinar si una fórmula B es inferible inmediatamente, por tal regla, de las fórmulas $A_1, \ldots, A_n$. Y, del mismo modo, debe existir un procedimiento finito para determinar si una fila de signos, C, dada, es una fórmula o un axioma.

Se dice que una fórmula, B, es *inferible inmediatamente* de las fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ si B es inferible inmediatamente de $A_1, \ldots, A_n$ por alguna de las fórmulas de inferencia.

Una secuencia finita de fórmulas será una *deducción* (específicamente, una deducción de la última fórmula de la secuencia) si cada fórmula de la secuencia es un axioma o es inferible inmediatamente de una o más fórmulas precedentes.

Una fórmula es *deducible* si existe una deducción de ella.

La definición de Gödel está en la línea de Hilbert. Aparece en las páginas 151-152 de su obra completa. Es interesante ver cómo Gödel subraya varias veces aspectos de los sistemas formales. Por ejemplo, en la página 89:

> La propiedad característica de los sistemas formales en el sentido propio del término, consiste en que en ellos el razonamiento puede ser, en principio, completamente reemplazado por operaciones mecánicas.

La idea inicial venía de Pasch, quien puso en claro que las operaciones que componen las deducciones deben ser únicamente de tipo lógico. Hilbert distingue con precisión el lenguaje del metalenguaje, pero, casi no se vale de símbolos, lo cual condujo a que fuera a veces mal comprendido. Uno de los flancos del rigor en Gödel consiste en tener presente tal jerarquía de lenguajes, que lo lleva a emplear signos diferentes para lo que ingenuamente se creería la misma operación en el lenguaje y en el metalenguaje correspondiente. En la página 180, se lee:

Puede definirse un sistema formal simplemente como un procedimiento mecánico para producir filas de signos, llamadas fórmulas deducibles.

Allí mismo, un poco después, se lee:

El concepto de sistema formal, cuya esencia consiste en la substitución del razonamiento por operaciones mecánicas con filas de signos...

En las primeras líneas de su artículo más célebre, *Sobre proposiciones formalmente indecidibles...*, p. 55, se lee:

El progreso de la matemática hacia una exactitud cada vez mayor ha llevado a la formalización de amplias partes de ella, de tal modo que las deducciones pueden llevarse a cabo según unas pocas reglas mecánicas.

Gödel se refiere fundamentalmente a *Principia Mathematica*, de Russell y Whitehead. Los sistemas afines, a los cuales alude también frecuentemente, son: Sistema axiomático de conjuntos, de Zermelo-Fraenkel; Sistema axiomático de conjuntos, de von Neumann; sistemas diversos construidos en la escuela de Hilbert con miras a la misma indagación acerca de los fundamentos de la matemática. Refiriéndose a los primeros, afirma, en el lugar citado, que son sistemas "tan amplios que todos los métodos usados hoy en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia" (p. 56). (En este pasaje Gödel parece interesado en mostrar que sus investigaciones tienen toda la extensión que cubra *Principia Mathematica*, prácticamente toda la matemática. Es de notar de pasada, que a esta afirmación de amplitud se opone, por lo menos en cierto sentido, la que figura en la página 100: "Parece dudoso que algunos de los sistemas formales construidos hasta ahora, como el de *Principia Mathematica*, sea tan abarcador, o incluso que exista uno tan abarcador de manera que en él 'estén formalizados todos los medios finitarios de prueba' "). Escribe igualmente:

Las fórmulas de un sistema formal (aquí nos limitamos a *Principia Mathematica*) externamente consideradas, son secuencias finitas de signos primitivos (variables, constantes lógicas, paréntesis, signos de puntuación) y se puede precisar fácilmente qué filas de signos primitivos son fórmulas y cuáles no. Análogamente, desde un punto de vista formal, las deducciones no son sino secuencias finitas de fórmulas (con ciertas propiedades explicitables).

En la página 20, se lee una concisa y precisa caracterización de la formalización

... de un modo puramente formal, es decir, sin hacer uso del significado de los símbolos.

De las transcritas es la descripción más lograda. Se usan a veces, para explicar el aspecto formal, expresiones que parecen confundirlo con la simbolización, quizá utilizada tan profusamente como en *Principia Mathematica*. Hilbert, el creador del formalismo, no es formalista en tal sentido; ni lo es su gran continuador, Bourbaki. Ellos son formalistas, en el pleno sentido de la palabra, cuando en su exposición no entra para nada, el contenido de las formas con las cuales están calculando lógicamente, el significado de los símbolos, si es que los están empleando. En el capítulo sobre Bourbaki, se verá que el maestro francés se vale ordinariamente, de un lenguaje semiformalizado.

Uno de los rasgos característicos de los sistemas formales es el papel que dan a las definiciones:

> ... una fórmula escrita sin abreviaturas, es decir, sin hacer uso de las definiciones.
>
> Las definiciones solo sirven para abreviar la escritura y por tanto son, en principio, superfluas. (p. 56).

Es conveniente contraponer esta visión de la definición, con la esencialista acostumbrada desde Aristóteles, por lo menos. Es de notar, sin embargo, que curiosamente en la práctica matemática, la definición parece continuar en el papel de declarar la esencia de las cosas. Bourbaki (Descripción de la matemática formal), casi en las mismas palabras de Gödel, dice:

> Los textos corrientes utilizan símbolos abreviadores que no pertenecen a la matemática formal. La introducción de estos símbolos es el objeto de las definiciones. Su empleo no es teóricamente indispensable y se presta con frecuencia a confusiones que solo un cierto hábito permite evitar.

Es explicable la confusión, dado que los nuevos conceptos son introducidos, como en los libros anteriores al formalismo, mediante definiciones, que el lector puede no considerar como abreviación de una cierta secuencia de signos sino como el acto de darle nombre a cosas existentes con las propiedades dichas al dar la definición.

Axiomas de Peano

Se los puede leer hoy, hasta en los textos para matemática secundaria. Son cinco axiomas, a partir de los cuales se propuso Peano derivar la teoría de los números. Peano reconoció que estos enunciados fueron tomados de Dedekind. Caben matices en el enunciado del quinto postulado. Se adopta aquí la siguiente redacción.

1. Cero es un número natural.
2. Cada número natural tiene un sucesor natural.
3. Cero no es sucesor de ningún natural.
4. Números naturales con el mismo sucesor son iguales.
5. Si a un conjunto de naturales pertenecen el cero y el sucesor de cualquier natural que esté en el conjunto, entonces, al conjunto pertenecen todos los naturales.

El enunciado del primer postulado es una proposición, si cero designa al natural 0, como sucede en el contexto de Peano. Posteriormente, Russell hizo ver que los términos no definidos en Peano: cero, número, sucesor podían ser generalizados; entonces, el primer postulado de Peano ya no es una proposición, o enunciado del cual tiene sentido decir que es verdadero o falso, sino una función o forma proposicional, es decir, un enunciado en el cual figura una variable.

Los postulados segundo, tercero, cuarto se refieren a números naturales cualesquiera, no a naturales determinados; por lo tanto, son funciones proposicionales. La condición que se impone a las variables que figuran en estas funciones proposicionales, de solo ser reemplazadas por números naturales, asegura que se obtendrán siempre proposiciones verdaderas. Esta determinación de la extensión se llama una *cuantificación*, en este caso, de variables.

En el enunciado del quinto postulado no solo se trata de números naturales cualesquiera, sino, además, de una propiedad cualquiera de números naturales; para que ello sea manifiesto, baste considerar una segunda lectura de dicho quinto postulado:

Dada una propiedad cualquiera;
si un determinado natural posee tal propiedad;
si, del hecho de que un natural posee la propiedad, se sigue que el sucesor inmediato de dicho natural también tiene la propiedad;
entonces, todos los naturales tienen la propiedad.

Los cuatro cálculos

En el libro de Hilbert-Ackermann, citado al principiar este capítulo, aparece la división cuadripartita de la lógica en cuatro cálculos: proposicional, conjuntista, restringido de predicados, generalizado de predicados.

El cálculo proposicional es el cálculo que se hace sobre un conjunto cuyos elementos son proposiciones, como la aritmética es el cálculo que se hace sobre un conjunto cuyos elementos son números.

El cálculo de conjuntos es el cálculo que se hace sobre un conjunto cuyos elementos son conjuntos. El cálculo silogístico, parte esencial de la lógica tradicional (desde Aristóteles hasta Boole) es apenas una aplicación del cálculo de conjuntos.

El cálculo restringido de predicados es el cálculo que se hace sobre un conjunto cuyos elementos son funciones proposicionales, o mejor, para justificar el nombre, cuyos elementos son predicados, con variables libres o con variables cuantificadas. Los postulados segundo, tercero, cuarto, de Peano son elementos propios de este cálculo.

El cálculo generalizado de predicados es el cálculo que se hace sobre un conjunto cuyos elementos son predicados con varias variables, unas concernientes a elementos, otras a predicados.

El quinto postulado de Peano es un elemento del cálculo generalizado de predicados, ya que no solo interesa conocer, para su enunciado correcto, la extensión de las variables individuales, sino también la de la variable de predicado. Se dice: cualquiera sea la propiedad...

La nomenclatura anterior es la de Hilbert. Ordinariamente, al conjunto de los tres primeros cálculos se los denomina lógica de primer orden o cálculo de primer orden. Esta denominación es particularmente importante para enunciar con toda precisión los resultados de Gödel. El cálculo generalizado de predicados es una concepción hilbertiana. Hubo matemáticos que se opusieron a ella; las limitaciones, empero, no están reservadas a este cálculo muy general. Por la investigación del lógico Church, 1936, también el cálculo restringido de predicados resulta limitado.

Metamatemática de los cuatro cálculos

Cada uno de los cuatro cálculos puede ser considerado como un sistema formal, es decir, con sus elementos constituyentes: signos, axiomas, reglas de formación, reglas de transformación o deducción o derivación.

Cada uno de los cuatro cálculos debe de ser examinado metamatemáticamente; especialmente en lo referente a tres aspectos, que se presentan a continuación con diversos nombres, dado que no hay una nomenclatura que haya logrado imponerse; los nombres no son forzosamente sinónimos. He aquí, pues, tres de las condiciones para un sistema formal:

- Coherencia, compatibilidad, consistencia, no contradicción.
- Compleción, categoricidad.
- Decidibilidad, validez universal, cumplibilidad.

Un sistema formal es *consistente*, si y sólo si, hay alguna fórmula del sistema, no deducible en el sistema.

Variaciones de la misma idea son las que siguen.

Un sistema formal es inconsistente, si y sólo si, toda fórmula del sistema es deducible (sinónimos: demostrable, derivable, teorema) en el sistema.

En un sistema formal consistente, no hay ninguna fórmula del sistema tal que tanto ella como su negación sean deducibles dentro del sistema. Esta es una concepción, llamada sintáctica, de la consistencia. Las reglas de transformación, la sintaxis del sistema, no permiten derivar de los axiomas, una fórmula y su negación.

Recíprocamente, un sistema formal es inconsistente, si y sólo si, hay alguna fórmula en el sistema tal que ella y su negación son deducibles en el sistema.

Para que un sistema sea inconsistente, es suficiente que dentro de él, sea deducible la fórmula: $0 \neq 0$.

Hay una caracterización, llamada semántica, de la consistencia. Un sistema formal es consistente si en él todos los teoremas son tautologías, es decir, proposiciones siempre verdaderas.

Compleción

Someramente, Gödel hace una caracterización de este concepto, en la página 152.

> El sistema formal será *completo* si para cada fórmula A, o es deducible A, o es deducible la negación de A.

En el Suplemento, página 99, hay una descripción más completa.

> Un sistema formal se llama completo si cada proposición expresable con los signos del sistema es formalmente deducible a partir de los axiomas del sistema, es decir, si para cada tal proposición, A, existe una secuencia finita de inferencias acordes con las reglas del cálculo lógico que empieza con algunos axiomas y termina con la proposición, A, o con la proposición negada, no A.

Decidibilidad

Una relación *indecidible* en un sistema formal es una relación tal que ni ella, ni su negación, es deducible en el sistema.

El problema de la decidibilidad consiste en saber si, en un determinado sistema formal, existe un procedimiento universal que permita decidir, en un número finito de pasos, si una relación es decidible, es decir, deducible o no en el sistema.

Para resolver este problema ("sin duda el más ambicioso de todos los que pone la metamatemática", según Bourbaki, p. 62) se requiere inventar un algoritmo, análogo a los creados por los matemáticos para resolver problemas menos ambiciosos: extraer raíces cuadradas, o cúbicas; obtener el máximo común divisor o algoritmo de Euclides; etc. Se llegaron a crear algoritmos para la solución del problema de la decisión en sistemas lógicos sencillos, es decir, "para formalismos con pocos signos primitivos y pocos axiomas" (Bourbaki). Para el problema general, empero, los resultados más conocidos son negativos. Según Bourbaki, ni siquiera se ha logrado un acuerdo acerca de lo que hay que entender por "procedimiento universal".

Por lo anterior queda en claro lo que sigue.

Todo sistema formal completo es decidible.

La solución del problema de la decisión da la solución del problema de la no contradicción, dado que bastaría aplicar el procedimiento universal a una relación y a su negación, para estar seguros de que ambos no son teoremas, esto es, de que el sistema formal no es contradictorio.

Textura, terminología, simbolismo

En su primer trabajo, 1930, *La compleción de los axiomas del cálculo funcional lógico*, Gödel empleó la contextura de *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. Cálculo funcional lógico es lo mismo que cálculo lógico de primer orden. En ese primer trabajo, tesis, Gödel anota cómo completa la armazón de *Principia Mathematica* con la terminología y el simbolismo de Hilbert-Ackermann:

En terminología y simbolismo este trabajo sigue a Hilbert-Ackermann (1928): *Elementos de lógica teórica*. Según esta obra, el lenguaje de la lógica de primer orden contiene las fórmulas que se pueden formar a partir de las variables proposicionales y las variables de predicado (es decir, variables de propiedades o relaciones) de primer tipo, mediante las operaciones *o*, *no*, *para todo*, *existe* donde la variable en los prefijos *para todo* x, *existe* x solo pueden referirse a individuos, no a relaciones.

Una tal fórmula se llama válida (o tautología) si resulta un enunciado verdadero siempre que substituyamos las variables proposicionales por proposiciones determinadas y las variables de predicado por relaciones determinadas.

La estructura considerada por Gödel es la de *Principia Mathematica*: los axiomas de todo el sistema, la teoría de los tipos simples, el axioma de reducibilidad, el axioma de elección, el axioma de infinitud. Rastreando, se encuentra qué enunciado utiliza Gödel de las últimas capitales nociones.

Por "teoría de los tipos simples" entiendo la doctrina que dice que los objetos del pensamiento se dividen en tipos, a saber, individuos, propiedades de individuos, relaciones entre individuos, propiedades de tales relaciones, etc. (con una jerarquía similar para las extensiones).

Las proposiciones de la forma: 'a tiene la propiedad f', 'b está en la relación R con c', etc., no tienen significado si a, b, c, R, f no son de los tipos adecuados. Los tipos mixtos (tales como las clases que contengan individuos y clases de individuos) y, por tanto, también los tipos transfinitos (tales como la clase de todas las clases de tipos finitos) quedan excluidos. (p. 307).

Gödel recuerda, apoyándose sobre citas bibliográficas de Ramsey y Tarski, que la teoría de tipos simples basta para evitar las paradojas epistemológicas.

La noción de impredicatividad es el puente para pasar de la teoría de los tipos simples al axioma de reducibilidad.

Se llama definición *impredicativa* de un objeto a aquella tal que para la definición del objeto se vale de un conjunto al cual pertenece el mismo objeto que se define. Tal definición es aparentemente circular. Para excluir las definiciones impredicativas dentro de un tipo dado, Russell creó la teoría ramificada de los tipos, según la cual, los tipos por encima del tipo cero, están separados en órdenes. Para el tipo 1, las propiedades definidas sin mencionar totalidad alguna pertenecen al orden 0, y, las propiedades definidas valiéndose de la totalidad de las propiedades de un orden dado, pertenecen al orden más alto que sigue. Esta separación en órdenes obligaba a cercenar partes de la matemática; por lo cual Russell enunció el *axioma de reducibilidad*, vale decir, para impedir tal cercenamiento: para cada propiedad perteneciente a un orden por encima del menor, existe una propiedad coextensiva (esto es, poseída por exactamente los mismos elementos) de orden 0. Si se considera que solo existen propiedades definibles, entonces, el axioma significa que para cada definición impredicativa, dentro de un tipo dado, hay una definición predicativa equivalente. (p. 50. Stephen KLEENE. (1952). 1974. *Introducción a la metamatemática*. Madrid. Tecnos. 494 PP.).

El *axioma de elección* permite realizar un número infinito de actos de elección:

Dado un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos disyuntos, existe un conjunto que tiene un único elemento en común con cada uno de los conjuntos.

Se enuncia también diciendo

El producto (¡atención! no la intersección sino el producto cartesiano) de conjuntos no vacíos es no vacío.

El axioma de *infinitud* aparece así en Gödel, página 55:

Hay exactamente una cantidad infinita numerable de individuos.

¿Por qué Gödel toma como base *Principia Mathematica*? Era, desde luego, una obra cimera, síntesis de los trabajos de Frege, Peano, Russell, Whitehead y otros lógicos notables. Por este aspecto era igualmente una obra representativa. No era, empero, una obra perfecta. En un artículo, 1944, consagrado a la filosofía de Russell, anota Gödel defectos. "... un paso atrás en comparación con Frege". "Lo que falta, ante todo, es una presentación exacta de la sintaxis del formalismo" (*Obras completas*. p. 298).

Gödel, en cambio, hace una descripción muy detallada de los elementos axiomáticos. Las cuarenta y cinco definiciones de su trabajo de 1931 sorprendieron a más de un estudioso. Quizá fue una reacción ante la falla apuntada a *Principia Mathematica*. Quizá no fue esto, sino que quiso acentuar el rigor de su construcción dada la espectacularidad de los resultados. En la tesis, 1930, figuraba ya esta advertencia: "No todas estas reglas están explícitamente formuladas en Russell-Whitehead, pero todas ellas son continuamente usadas en las deducciones" de dichos autores. (p. 21).

En el trabajo de 1931, emplea, en realidad, el sistema de *Principia Mathematica*, pero modificado; modificaciones acerca de las cuales dice Gödel: "Solo sirven para simplificar la prueba y en principio son prescindibles". Así se anticipa a cualquier crítica que tuviera la pretensión de invalidar la aplicabilidad de las conclusiones de Gödel a todos los sistemas construidos a la manera del de Whitehead-Russell.

En el enunciado mismo del teorema de Gödel se alude indispensablemente a la aritmética. ¿Por qué indispensablemente? El problema de la no contradicción de la matemática había sido reducido en la escuela de Hilbert a la búsqueda de una prueba absoluta de no contradicción para la aritmética desarrollable a partir de los axiomas de Peano, para la lógica, o, para la teoría de conjuntos. Como prueba absoluta de carácter finitista debería hacerse en una teoría más elemental que las nombradas. Siendo más elemental, la teoría debía poder reflejarse o representarse dentro de una de estas teorías. Gödel tuvo la idea de servirse de la paradoja del mentiroso como guía para construir un lenguaje que hablara de sí mismo, pero evitando a toda costa la paradoja. El procedimiento constituye lo que desde entonces se llama la aritmetización de la sintaxis. Hay una somera explicación del mismo Gödel, página 57.

Para las consideraciones metamatemáticas resulta indiferente qué objetos usemos como signos primitivos. Usemos números naturales como tales signos. Es decir, asignemos biunívocamente números naturales a los signos primitivos.

Consiguientemente, una fórmula será una secuencia finita de números naturales y una deducción será una secuencia finita de secuencias finitas de números naturales. Los conceptos o enunciados metamatemáticos se convierten así en conceptos (respectivamente enunciados) sobre números naturales o sucesiones de números naturales.

El procedimiento proporciona una imagen isomorfa del sistema de *Principia Mathematica* en el dominio de la aritmética.

Todas las argumentaciones metamatemáticas pueden ser referidas a esa imagen isomorfa.

Por "fórmula", "proposición", "variable", etc., siempre hemos de entender los objetos correspondientes de la imagen isomorfa.

Una última explicación, del mismo Gödel, página 99, antes de leer el texto propiamente dicho.

Proposiciones aritméticas: aquellas en que no aparecen más nociones que $+$, $\cdot$, $=$ (adición, multiplicación, identidad, referidas a los números naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados solo a variables de números naturales (por lo cual en las proposiciones aritméticas no aparecen más variables que las de números naturales).

El artículo más célebre de Gödel es, al mismo tiempo, uno de los escritos extraordinarios del siglo XX por diversos aspectos: novedad de la presentación, avance en la evolución de la lógica, trabajos de investigación subsecuentes, implicaciones epistemológicas, etc. Referencia:

Kurt Gödel. Über formal unentscheibare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Monatshefte für Mathematik und Physik. 173-198. 1931. [*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines*].

Había sido compuesto por Gödel en 1930, después de su tesis. La revista lo recibió el 17 XI 1930. Lo publicó en su número 38.

El siguiente resumen apareció en las páginas 149-151, número 2, de la revista Erkenntnis, 1931-1932, como un suplemento. (*Obras completas.* pp. 98-100).

Los editores de Erkenntnis me han pedido que resuma los resultados de mi trabajo *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines.*

Este trabajo trata de problemas de dos tipos, a saber, en primer lugar de la cuestión de la compleción de los sistemas formales de la matemática, y, en segundo lugar, de la cuestión de las pruebas de consistencia para tales sistemas.

En el trabajo se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las proposiciones aritméticas, suponiendo que, a partir de los axiomas del sistema formal en cuestión no sean deducibles proposiciones aritméticas falsas, es decir, refutables respecto a su contenido.

Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay proposiciones aritméticas indecidibles, con tal que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales).

De lo dicho se sigue en especial que hay proposiciones aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática, por ejemplo, en *Principia Mathematica* (con axioma de reducibilidad, de elección y de infinitud), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y en la de von Neumann, y, en los sistemas formales de la escuela de Hilbert.

> Lo primero que hay que hacer notar respecto a los resultados sobre las pruebas de consistencia es que aquí se trata de la consistencia en el sentido formal (o hilbertiano), es decir, la consistencia es considerada como una propiedad puramente combinatoria de ciertos sistemas de signos y de sus "reglas de juego". Ahora bien, los hechos combinatorios pueden ser expresados con los símbolos de los sistemas formales matemáticos, como *Principia Mathematica*. Por eso, el enunciado de que un cierto sistema formal S es consistente frecuentemente puede ser expresable con los símbolos de ese sistema (en especial vale esto para los sistemas antes mencionados).
>
> Lo que puede afirmarse es lo siguiente:
>
> Para todos los sistemas formales, para los que anteriormente se ha afirmado la existencia de proposiciones aritméticas indecidibles, el enunciado de la consistencia del sistema en cuestión es una de las proposiciones indecidibles en ese sistema. Es decir, una demostración de la consistencia de uno de estos sistemas, S, solo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en S.
>
> Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como la buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios, es decir, intuicionísticamente aceptables, de prueba.

Incidentalmente, Gödel enunció en diversas ocasiones las conclusiones de su trabajo principal. Una de ellas, en la comunicación que publicó el boletín de la Academia de Ciencias de Viena, 1930; resume sus resultados, refiriéndose al sistema de *Principia Mathematica*, con las modificaciones que hizo a dicho sistema para facilitar las demostraciones, como al sistema S, así:

> El sistema S no es completo, es decir, en él hay proposiciones A, que pueden ser efectivamente indicadas, tales que ni A, ni la negación de A, son deducibles.
>
> Hay problemas indecidibles, con la sencilla estructura (Existe x)(Fx) donde x varía sobre los números naturales y F es una propiedad (incluso decidible) de los números naturales.

Incluso si admitimos en la metamatemática todos los medios lógicos de *Principia Mathematica* (en especial, el cálculo lógico de orden superior y el axioma de elección) no hay ninguna prueba de consistencia para el sistema S (y aun menos la hay si restringimos de alguna manera los medios de prueba).

Una prueba de consistencia del sistema S solo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no estén formalizados en el sistema mismo.

Resultados análogos valen también para otros sistemas formales, como el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos.

En una postdata, 1964, al texto de su curso en Princeton, 1934, (O. C. p. 180) comienza Gödel con un párrafo que coincide con la nota añadida, 1963, a su artículo *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* (O. C. p. 89). Luego de advertir que gracias a la obra de Turing "ahora se puede dar una definición precisa, adecuada e incuestionable del concepto general de sistema formal", escribe

se puede probar rigurosamente que en cualquier sistema formal que contenga una cierta cantidad de teoría numérica finitaria existen proposiciones aritméticas indecidibles y que no se puede probar la consistencia del sistema en el mismo sistema.

Allí mismo (O. C. p. 181) con una lapidaria concisión:

No hay ningún algoritmo para decidir relaciones en las que aparezcan a la vez $+$ y $\times$.

Con todo detalle, en la introducción a su artículo fundamental (O. C. p. 56):

En ambos sistemas (*Principia Mathematica*, teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel o de von Neumann) hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas y reglas.

Más precisamente, hay proposiciones indecidibles, en las que, además de las constantes lógicas: *no*, *o*, *para todo*, $=$ no aparecen más nociones que adición y multiplicación, ambas referidas a números naturales y en las que los prefijos 'cualquiera sea x' se refiere solo a números naturales.

Una formulación más se encuentra en la página 152, dentro del texto del curso de Princeton:

> ... un sistema formal que pueda expresar todos los enunciados de la aritmética como fórmulas no es completo.

Comparación con el trabajo de tesis: *compleción del cálculo restringido de predicados*. Según Mosterín, traductor y presentador de Gödel en español, en la primera edición, 1928, de *Elementos de lógica teórica*, se leía que no estaba resuelta la cuestión de la compleción para el cálculo restringido de predicados. Este fue el tema escogido por Gödel para su investigación de grado.

Paul Bernays había demostrado que el cálculo proposicional es completo.

Gödel demuestra en su tesis, 6 II 1930, el teorema:

> Toda fórmula válida del cálculo restringido de predicados es deducible.

Por tanto, la respuesta a la cuestión es afirmativa.

A fines del mismo año 1930, muestra que el cálculo generalizado de predicados es incompleto. Hay resultados de esos dos trabajos que se contraponen de tal modo que el mismo Gödel no puede menos que destacarlo. En la tesis ha mostrado que cada fórmula del cálculo restringido de preciados o es válida o posee un contraejemplo. Ahora muestra que no siempre es posible establecer la existencia de tal contraejemplo. Fórmulas decidibles en el cálculo restringido de predicados, pueden no serlo en el generalizado.

Idea de la construcción de Gödel

Se trata, en seguida, de reducir a frases, lo más cortas y explícitas que sea posible, la idea de la construcción (altamente técnica) de Gödel, sirviéndose, a más del texto de Gödel, del capítulo VII del libro de Nagel y Newman, *El teorema de Gödel* (1958. Traducción española: 1970. Madrid. Tecnos. 140 pp.).

Gödel muestra cómo construir una fórmula aritmética G que representa la declaración metamatemática 'La fórmula G no es demostrable'.

Gödel muestra que

$$G \text{ es demostrable, si y solo si, no } G \text{ es demostrable.}$$

Ahora bien. Si G y no G son demostrables, entonces, el cálculo es inconsistente.

Por tanto, el cálculo es consistente, si y solo si, no son demostrables G y no G.

Pero, si ni G ni no G son demostrables, entonces, el cálculo es incompleto.

Por tanto, si el cálculo es consistente, entonces, es incompleto.

Puesto que G declara que G no es demostrable, si G no es demostrable, entonces, es metamatemáticamente verdadera.

Se tiene, pues, una proposición verdadera, metamatemáticamente hablando, que no es matemáticamente deducible.

Verdad y demostrabilidad no coinciden. No se pueden demostrar todas las verdades aritméticas a partir de los axiomas.

Por otra parte, G es indecidible, dado que no se puede demostrar ni G ni no G. El cálculo, por ser incompleto es indecidible. Lo más curioso es que una de las fórmulas indecidibles es precisamente la que declara la consistencia del sistema. Estas son las grandes líneas para derivar esta última conclusión.

Sea A la fórmula que representa la declaración metamatemática: la aritmética es consistente.

Considérese la proposición condicional: 'Si A entonces G'.

Si se tuviera los dos teoremas:

- A
- Si A entonces G

por el primer esquema de inferencia estoico se tendría que G es demostrable.

Pero, si la aritmética es consistente, G no es demostrable.

Ahora, se tiene:

- Si A entonces G
- No G

Por tanto, A no es demostrable, por el segundo esquema de inferencia estoico, puesto que suponemos que la aritmética es consistente.

Pero, A es una fórmula del cálculo.

Por tanto, si la aritmética es consistente, su consistencia no puede ser demostrada por ningún razonamiento metamatemático representable dentro del formalismo de la aritmética.

Gödel mismo observa ante tal resultado:

> El análisis preciso de esta extraña situación conduce a resultados sorprendentes respecto a las pruebas de consistencia de sistemas formales. (1931. O. C. p. 59).

Gödel señala la analogía de su argumentación con la antinomia de Richard o con la de Epiménides y aclara que cualquier antinomia epistemológica podría ser usada para obtener una prueba similar de la existencia de proposiciones indecidibles. Advierte, empero, que no se comete en manera alguna círculo vicioso:

> Se limita a afirmar que una fórmula determinada no es deducible. Solo posteriormente (y, por así decirlo, por casualidad) resulta que esta fórmula es precisamente aquella que expresa ese mismo enunciado.

Indica Gödel que el mismo método de prueba

> es aplicable a cualquier sistema formal que, en primer lugar, interpretado naturalmente, disponga de medios de expresión suficientes para definir los conceptos que aparecen en la argumentación (especialmente el concepto de "fórmula deducible") y en el cual, en segundo lugar, cada fórmula deducible sea verdadera en la interpretación natural.

En particular, puede trasladarse paso por paso el procedimiento de su demostración a la teoría axiomática de conjuntos, por ejemplo; y si se supone que esta sea consistente, entonces, no hay prueba alguna de su consistencia que pueda ser formalizada dentro de la misma teoría de conjuntos.

Este resultado va en sentido contrario al de la búsqueda de Hilbert de una prueba absoluta de no contradicción para la matemática. A este propósito, Gödel escribe al final de su trabajo principal que estos resultados

> no se oponen al punto de vista formalista de Hilbert. En efecto, este punto de vista solo supone la existencia de una prueba de consistencia llevada a cabo por medios finitarios y sería concebible que hubiera pruebas finitarias que no fuesen representables

en el sistema para el cual se busca la no contradicción. Sin embargo, los métodos finitistas en los que pensaba Hilbert tenían que ver especialmente con la aritmética y por tanto su formalización tendría que hacerse dentro de la teoría de números cuya demostración de no contradicción se buscaba precisamente. Por el teorema de Gödel, el programa no es realizable, por lo menos allí donde le interesa a la escuela de Hilbert.

En la Postdata del texto de su curso en Princeton (O. C. p. 181) estampa una importante consecuencia desde el punto de vista filosófico:

> Téngase en cuenta que los resultados mencionados no establecen límites de la capacidad de la razón humana, sino más bien de las posibilidades del puro formalismo en matemática.

En una nota, Gödel desvirtúa específicamente un argumento de Turing, 1937, en tal sentido.

Nagel y Newman, en el capítulo VIII, *Reflexiones finales*, del ya citado libro *El teorema de Gödel*, se diría que diluyen la enfática declaración de Gödel. En realidad, el libro de Nagel y Newman es de 1958 y la Postdata de 1964. Ello indica simplemente que el punto en cuestión ha sido muy debatido.

Los resultados de Gödel tienen implicaciones para todo el conocimiento humano en cuanto este es axiomatizable, no para conocimientos intuitivos o no axiomatizables, ni para la razón humana misma. Los productos de la razón humana no caben dentro de un mismo sistema formal. En cierta manera se recupera la libertad de creación que se tenía antes de tan ardua discusión, gracias a que no hay un sistema formal, sino todos los sistemas formales que se quiera, cada uno con sus teoremas válidos en el interior del sistema; el sistema formal, por tanto, ya no es prototipo de verdad absoluta, ya no hay verdades absolutas garantizadas lógicamente; la matemática ya no da tales garantías; la razón humana ya no puede asegurar con base en la matemática que se conozcan tal tipo de verdades, como lo pretendía el racionalismo. Tal consecuencia estaba latente en la existencia de las geometrías no euclidianas y había sido lógicamente establecida con la operancia de los sistema formales de Frege o de Hilbert. Lo que añade Gödel es que ni siquiera se puede estar seguro, lógicamente, de no contradicción dentro del sistema formal individualmente considerado. Pero, salvo este incómodo detalle, la lógica sigue siendo indispensable como control de calidad para la construcción del sistema formal.

Así, por ejemplo, las máquinas computadoras funcionan gracias a los sistemas formales. Los sistemas formales tienen limitaciones. Tales limitaciones son superadas por la razón humana, en cuanto es capaz de darse cuenta de ellas y en cuanto es capaz de distinguir una fórmula verdadera pero no deducible, de una que tenga los dos caracteres. Esta última distinción escapa a la máquina, en cuanto esta solo sea capaz de procesos deducibles y no de iniciativa inteligente que le permitiera ver que la fórmula no calculada es válida.

Así culmina el desarrollo de la axiomática que se había iniciado en *Elementos*, de Euclides; surge el problema del quinto postulado que conduce las investigaciones hasta las geometrías no euclidianas; en el nuevo estatuto para una axiomatización de la geometría o *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, surge el problema de la no contradicción del sistema; Hilbert lo resuelve relativamente con la suposición de no contradicción de los números reales; surge la necesidad de una prueba absoluta; garantía de que una cadena de pruebas relativas de no contradicción no es un retroceso infinito; Gödel demuestra que tal prueba es imposible.

Cuadro sinóptico de algunos resultados concernientes a los sistemas formales

En el cuadro siguiente aparece el nombre del matemático y el año en el que publicó el resultado decisivo referente al problema indicado en el encabezamiento de la columna dentro del cálculo indicado en el encabezamiento de la línea. Así: "Löwenheim. 1915", indica que Löwenheim resolvió en 1915 el problema de la decidibilidad del cálculo de conjuntos. Los paréntesis "(H-A. p. 70)" envían a la página 70 del libro *Elementos de lógica teórica* de Hilbert y Ackermann, donde se da la información un poco más detallada. No siempre aparecen en los autores citados las demostraciones. Para estas y otras informaciones puede consultarse:

- KLEENE. *Introduction to metamathematics.* 1952. Amsterdam. North-Holland. Traducción española: 1974. Madrid. Tecnos. 494 pp.
- LADRIÈRE. *Limitaciones internas de los formalismos.* Traducción española: 1969. Madrid. Tecnos. 545 pp.

Hay que tomar todas las precauciones al hacer estas consultas, dado que la terminología varía con frecuencia y que los problemas iniciales, al ser mejor estudiados, se ramifican en diversidad de otros, con el consiguiente aumento de más terminología técnica.

Problema de / **Cálculo**	*No contradicción*	*Compleción*	*Decidibilidad*
Proposicional		Sí Post. 1921 (H-A. p. 39) (Kleene. p. 135)	
Conjuntista			Sí Löwenheim. 1915 (H-A. p. 70)
Restringido de predicados, o, de primer orden	Sí (H-A. p. 116)	Sí Gödel. 1930 (H-A. p. 121)	No Church. 1936 (H-A. p. 139)
Generalizado de predicados, o, de orden superior		No Gödel. 1931. (H-A. p. 168)	

Complemento 1. Observa van Heijenoort (p. 594. *From Frege to Gödel*)

Los resultados de Gödel llevan finalmente a una profunda revisión del programa de Hilbert.

Pueden hacerse ciertas consideraciones que muestran que no se trataría únicamente de una revisión. El ensayo de Hilbert intentaba confinar la intuición al dominio bien precisado de la metamatemática. Esa intuición se reducía fundamentalmente al signo:

En el principio es el signo

pensaba Hilbert. Para salvar la idea de Hilbert no quedaba sino ampliar la intuición a más que el dominio del signo. Fue así como Gentzen, 1936, empleando intuitivamente la inducción sobre los ordinales transfinitos de Cantor dio una demostración metamatemática de la consistencia de la aritmética. Era una prueba de consistencia, pero ya no absoluta como la que esperaba Hilbert.

La cuestión preocupa todavía a Gödel en 1958. Escribió *Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario* (O. C. pp. 404-411). Sugiere otra manera de superar "la indemostrabilidad de la consistencia de un sistema formal con medios de prueba más reducidos que los del sistema mismo". Adelanta cierto número de detalles; pero, en definitiva, tal sugerencia para ir más allá del marco de la matemática finitista en el sentido de Hilbert, no parece haber sido concretada posteriormente.

Por intuitivos que fueran, ya no tienen tales intentos el tipo de intuición que se perseguía dentro del proyecto de Hilbert: una intuición inmediata, de signos, directamente relacionada con las primeras experiencias (escolares, si así quiere decirse) en matemática; este otro tipo de intuición, comparado con el primero, ya no tiene en común con él más que el nombre. Piénsese en una intuición de ordinales transfinitos de Cantor, como en el recurso de Gentzen; o en una intuición, como la que proponía Bernays en 1935 con la misma intención de superación, intuición sobre conceptos no procedentes de la intuición, específicamente que no tuviera que ver con propiedades de objetos concretos como las combinaciones de signos (una especie de intuición de segundo orden); o en las funciones computables de un tipo determinado, propuestas por Gödel en 1958. Estos tres esbozos tenían el designio de traspasar el marco de la matemática finitista, de Hilbert, según la expresión de Bernays. Más sencillo que cualquiera de los tres, es aceptar que el programa de Hilbert de la matemática finitista no es realizable y tratar de ver cuáles son las consecuencias de reconocer tal hecho escueto.

Una de ellas es la respuesta negativa al segundo problema de Hilbert acerca de la demostración de no contradicción de la teoría de números reales. Hilbert pedía una prueba absoluta, es decir, no relativa, que no descansara sobre la hipótesis de no contradicción de otra teoría; prueba absoluta que debería haber sido hecha, además, con medios más sencillos, vale decir, con una teoría más elemental que la de los números reales. Ello no se logra, por consiguiente.

Por otra parte, Hilbert se proponía expulsar las dudas, ocasionadas por las paradojas, acerca de la matemática como una verdad inatacable. Desde luego, este propósito, de mayor alcance filosófico, tampoco se logra. Es de presumir que en un momento dado, los matemáticos a quienes preocupan estos problemas de fundamentación, debieron sentirse sin base sólida para proseguir sus indagaciones. No se sabe si todos hayan adoptado una actitud pragmática, como la que, se verá después, asumió Bourbaki.

Una tercera consecuencia merece destacarse. En el artículo *Sobre el infinito*, adhirió Hilbert a la opinión de Kant según la cual

> las matemáticas disponen de un contenido que les es asegurado independientemente de toda lógica y que, por tanto, no pueden fundarse en absoluto sobre la sola lógica.

Es curioso que el resultado de Gödel admita, respecto a este pensamiento, doble interpretación. Por una parte, puesto que no se logra la fundamentación interna, dentro del sistema formal, parece que haya que conseguirla externamente, con base en la intuición. La matemática se construiría con la lógica, no a partir de la lógica (contra el logicismo de Frege, Dedekind, Russell) sino de un material intuitivo. Por otra parte, es este designio precisamente el que habría fracasado, porque el objeto del finitismo de Hilbert era asentar el cálculo lógico sobre la intuición primera del signo, a saber, sobre una intuición lo más elemental posible.

Para la matemática básica de la escuela y aún para la de los primeros años universitarios, bastan los signos. Más, cuando se entra a estudiar la matemática axiomáticamente, hay que asumir ciertos enunciados, los axiomas, cuyo material debe ser intuitivo, en opinión de Brouwer y los intuicionistas; o debe ser construido dentro de la sola lógica, en opinión del logicismo. En cierto modo, Hilbert quería dar razón a las dos partes, si es que ellas lo eran: prueba de no contradicción dentro del mismo sistema cuya consistencia se ensaya demostrar; métodos constructivos aceptables por los intuicionistas. En suma, ninguna de las tres grandes tendencias de la filosofía de la matemática en la primera parte del siglo XX, salió ganadora de la indagación de Gödel, aunque haya quienes crean que la única perdedora haya sido el formalismo, quizás por la sinonimia que a veces se da entre formalismo y sistema formal; no hay, en realidad, sino una relación de vecindad, bastante estrecha, es cierto, no solo entre las dos palabras sino también entre los dos conceptos. Ninguna de las tres filosofías es capaz de imaginar la manera de expulsar las paradojas del terreno de la matemática. Sino que hay que proteger a esta convenientemente con axiomas que dejen las paradojas fuera del sistema.

Complemento 2. Van Heijenoort examina de la siguiente manera la significación epistemológica del teorema de Gödel.

La noción de sistema formal, introducida por Frege en 1879, había llegado a ser el modelo aceptado en la fundamentación de la matemática. Adoptaba el ideal aristotélico de deducción perfecta desde primeros principios. Este ideal se hace añicos si la matemática no puede ser completa y consistentemente formalizada. La matemática no puede encerrarse dentro de un solo sistema formal.

Dado que la matemática ha sido mirada con frecuencia como el modelo del conocimiento racional al cual deberían acercarse las demás ciencias, los teoremas de Gödel desbordan el campo matemático y pasan a tener significado para el sistema completo del conocimiento humano. Significar, seguramente que no puede mantenerse el antiguo ideal del sistema deductivo. Sin embargo, las ciencias diferentes de la matemática están tan lejos de la formalización que esta conclusión casi no tiene consecuencias fuera de la matemática. Hasta aquí van Heijenoort.

No se puede estar de acuerdo con tal opinión sino en parte: epistemológicamente, el sistema formal no será más el ideal aristotélico; pero, para el matemático que trabaja, el sistema formal es un instrumento formidable; la lógica le permite hacer control de calidad de cuanto produce; los matemáticos habían llegado a creer que era un utensilio perfecto, no sospechaban que tuviera limitaciones; es Gödel quien las pone de manifiesto, pero eso no invalida al sistema formal como instrumento de trabajo; ¿cuál instrumento no tiene limitaciones? El de usos ilimitados seguramente no existe.

Quizás van Heijenoort no haya sido suficientemente claro, y su idea no sea la de demeritar el sistema formal, dado que hace su defensa frente a los demasiado partidarios de la intuición. Los resultados de Gödel hacen surgir cuestiones en cuanto al papel de la formalización y su relación con la intuición. Los números naturales que no pueden ser determinados unívocamente por un sistema formal, son, no obstante, perfectamente determinados para la intuición y como objetos del pensamiento. Nadie confunde un número natural con un polinomio. Los teoremas de Gödel parecen forzar a los partidarios de la intuición a pujar más fuerte contra los sistemas formales, con argumentos como el de esta laya: debe de haber algo intrínsecamente incorrecto en la formalización dado que no puede caracterizar los números naturales, cuando la intuición los distingue con claridad.

Este argumento, es el mismo van Heijenoort quien lo dice, tiene varias fallas. La aprehensión intuitiva parece tan clara debido a que no se han precisado los términos. Se tienen al frente unos cuantos números y luego se dice sin mayor examen: “repetidamente”, “y así en adelante”, o se escriben tres puntos. Para cuestiones prácticas basta con esto. Lejos se está, empero, de la noción de número. Ahora bien, esta noción es indispensable. Los números no sirven solamente para contar; se requiere a veces hacer declaraciones acerca de todos los números y establecer su uso correcto. Entonces, el principio de inducción es indispensable y este envuelve la noción de conjunto o de propiedad. Estos contratiempos hacen palidecer la pretendida claridad intuitiva. La intuición no puede llevarnos a un entendimiento a fondo de los números naturales, ni mucho menos de otras partes de la matemática. Basta hacer ligeros ensayos de precisión en el lenguaje, para ver la confusión y la obscuridad. El matemático del siglo XVIII usaba demasiado confiadamente la intuición; la investigación posterior ha enseñado a los matemáticos a ser mucho más precavidos que sus predecesores.

He aquí la conclusión de van Heijenoort:

El alcance de los resultados de Gödel respecto a los problemas epistemológicos es aún incierto. Ninguna duda acerca de que estos resultados y otros análogos de "limitación" han puesto de manifiesto una nueva e inesperada situación concerniente a los sistemas formales. Pero, más allá de estas conclusiones precisas y casi técnicas, no aportan un mensaje filosófico que no sea ambiguo. En particular, de ninguna manera deben ser invocados para establecer la primacía de algún acto de intuición que dispensara de la formalización.

Cuestiones

1. El teorema de Gödel establece la existencia de proposiciones indecidibles dentro de ciertos sistemas formales. Cuando se resuelven sistemas de ecuaciones lineales aparecen tres casos: el sistema tiene una única solución, el sistema es indeterminado, el sistema es imposible. En dos dimensiones: dos rectas se cortan en un punto, dos rectas coinciden, dos rectas son paralelas. ¿Hay alguna analogía entre esta situación algebraica y la considerada por Gödel, en la que resultan proposiciones indecidibles?

2. Para el par formado por una fórmula y su negación, una de las dos es deducible, la otra no. Un sistema formal con esta propiedad se llama un sistema ¿completo? ¿decidible?

3. Semánticamente hablando, en un sistema completo, todas las tautologías son teoremas. Comparar con la caracterización semántica de un sistema consistente: todos los teoremas son tautologías.

4. ¿Es correcta la siguiente caracterización? Un sistema formal es incompleto, si y solo si, hay en él alguna fórmula tal que ni ella ni su negación son deducibles en el sistema.

5. ¿Basta que no se haya podido probar que una determinada fórmula es un teorema del sistema formal, para declarar que la fórmula es indecidible? ¿La conjetura de Goldbach es indecidible?

6. Ilustrar con ejemplos la siguiente descripción de Kleene (p. 132)

   Un teorema de consistencia determina que, a lo más, tales y cuales fórmulas son demostrables. Un teorema de compleción determina que, por lo menos, tales y cuales fórmulas son demostrables.

7. ¿"Válido" y "deducible" significan lo mismo para el cálculo restringido de predicados? es decir, ¿toda fórmula universalmente válida es deducible?

8. ... se plantea la cuestión de si el sistema de axiomas y principios de deducción... basta realmente para deducir cada teorema, o, si es posible pensar en enunciados verdaderos (y quizás también demostrables según otros principios) que no puedan ser derivados en el sistema considerado.

   ¿Cuál de los tres problemas queda planteado: no contradicción, compleción, decidibilidad?

9. ¿Insiste Gödel en los signos al definir el concepto de sistema formal?

10. Compare los diversos enunciados que incidentalmente dio Gödel de sus resultados. Escoja el más completo. Indique por qué es el más completo.

11. Qué procedimiento utilizado por Gödel puede describirse así:

    Es posible establecer entre los enunciados de la aritmética y las proposiciones del sistema formal una correspondencia tal que a un teorema de la aritmética corresponda una proposición verdadera del sistema (Ladrière. p. 68).

12. ¿Qué describe Kleene (pp. 49-50) mediante un proceso que puede esquematizarse de la manera que sigue. ¿Puede aplicarse a los números naturales? Si la respuesta es sí, indicar cómo.

    Objetos primitivos o individuales: tipo 0. (Cosas dadas no sujetas al análisis lógico).
    Propiedades de individuos: tipo 1.
    Propiedades de propiedades de individuos: tipo 2.
    Propiedades de tipo 1 que no mencionen totalidad alguna: orden 0.

Propiedades definidas usando la totalidad de propiedades de un orden dado: orden inmediato superior.

13. ¿Un sistema formal completo es decidible? ¿Por qué?

14. ¿Cuándo se dice que un sistema formal es decidible?

Bibliografía

1. GÖDEL, Kurt. (1906 - 1978). *Obras completas.* 1981. Madrid. Alianza Universidad. 286. Introducción, traducción y notas de Jesús MOSTERÍN. 430 pp. [Las citas de este capítulo se refieren a esta primera edición]. Segunda edición. Madrid. Alianza Universidad. 286. 469 pp.

Capítulo 12

Bourbaki: matemática mediante estructuras

BOURBAKI: *matemático francés,*
de nombre griego
y padre alemán.

¿Quién es Bourbaki?

Una descripción concisa es la del Petit Robert (*Dictionnaire universel des noms propres.* 1983): "BOURBAKI (Nicolas). Autor policéfalo formado (1933) por jóvenes matemáticos de la Escuela Normal Superior, cuyos miembros fundadores fueron Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, André Weil. Además de algunos artículos, Bourbaki publicó desde 1940 una gigantesca obra de referencia: *Éléments de mathématique*, editada en forma de monografías con noticias históricas reunidas en *Éléments d'histoire des mathématiques* (1969). Bourbaki considera la matemática moderna en sus fundamentos para edificarla sobre bases axiomáticas rigurosas según el pensamiento de Hilbert; codifica y clarifica el lenguaje matemático gracias a la lógica formal y a la teoría de conjuntos (Cantor, Dedekind); unifica esta ciencia mediante el establecimiento de estructuras comunes a sus diversas ramas".

¿Cuál es la obra Bourbaki?

Es la axiomatización a la manera de Bourbaki. O también: la formalización de la matemática. Es la concepción de la matemática a la manera de Hilbert, realizada concretamente mediante estructuras. Resulta una exposición unificada de todas las ramas básicas de la matemática, que descansa sobre sólidos fundamentos. Cuando Bourbaki reflexiona sobre la obra realizada puede formular la pregunta: ¿Las matemáticas? O ¿la matemática?

Ciertos trozos de historia de la matemática pueden interpretarse ahora como intentos de unificación. Así el aritmetismo de los pitagóricos: "Todas las cosas son número". Sin embargo, lo discreto y lo continuo se oponen radicalmente: los pitagóricos concebían a la aritmética como el estudio de lo discreto y a la geometría como el de lo continuo; ambas ciencias eran cultivadas por ellos; el descubrimiento de los inconmensurables en la segunda dio al traste con ese primer intento. Hubo otros. "Constituye un rasgo común de las diversas tentativas por integrar en un todo coherente el conjunto de las matemáticas (ya se trate de Platón, de Descartes o de Leibniz, del aritmetismo o de la logística del del siglo XIX) el que hayan sido hechas en conexión con un sistema filosófico más o menos ambicioso, que partía siempre de ideas a priori sobre las relaciones de la matemática con el doble universo del mundo exterior y del mundo del pensamiento". Tal no es el punto de partida para Bourbaki, ni se siente competente para tratar las relaciones de la matemática con lo real o con las grandes categorías del pensamiento; se propone permanecer en el interior de la matemática y desde allí tratar de responder a la cuestión de unificación. Debido a la extensión de los conocimientos matemáticos, sería muy difícil desgajar lo que tienen en común tales conocimientos, que ningún matemático está en condiciones de abarcar. Por fortuna, la evolución interna de la matemática ha llevado a una consideración sistemática de los procedimientos existentes en las distintas disciplinas matemáticas y es así posible una caracterización que no tiene su base en lo que sea común a los conocimientos matemáticos, ni en la presentación externa del acervo, ni siquiera en los procedimientos empleados internamente, sino que se fundamenta sobre estructuras comunes a diferentes contextos matemáticos. Es el estructuralismo matemático, que no tiene mayor cosa que ver con el filosófico que estuvo de moda en Francia durante los años 50 y posteriormente. El estructuralismo matemático viene madurándose desde las obras de Lagrange, Abel, Galois, Cayley, Klein, Lie, ... y una gran parte de las investigaciones de la escuela alemana de la segunda mitad del siglo XIX. Muy específicamente, Klein había logrado explicar en qué consiste la geometría, mediante la estructura de grupo. Bourbaki, en cierta manera llena a fondo el mismo programa y logra explicar en qué consiste la matemática, utilizando sistemáticamente la noción de estructura.

La obra de Bourbaki es, pues, la axiomatización a la manera de Bourbaki; quien, desde luego, no emplea esta terminología sino la de *método axiomático*; dado que también Euclides y Hilbert hicieron axiomatización, esta locución parecía no separar convenientemente lo peculiar de la obra de cada uno de ellos, por lo que es preferible la de axiomatización a la manera de Bourbaki.

Bourbaki menciona igualmente las expresiones *formalismo* y *método formalista* para poner en guardia contra las confusiones. "El carácter externo de la matemática es su presentación que toma el aspecto de una "larga cadena de razones" de que hablaba Descartes; toda teoría matemática es un encadenamiento de proposiciones, que se deducen las unas de las otras en conformidad con las reglas de una lógica…". Empero, si el *razonamiento deductivo* fuera un principio unificador para la matemática, lo sería para la biología y la física el uso del método experimental. Deducir a partir de premisas, forma exterior que el matemático da a su pensamiento para poder comunicarlo, es el lenguaje propio de la matemática. Codificar este lenguaje, ordenar el vocabulario y clarificar su sintaxis es uno de los aspectos del método axiomático o axiomatización a la manera de Bourbaki, llamado *formalismo lógico* o *logística.* El propósito esencial de la axiomatización a la manera de Bourbaki es la inteligibilidad de la matemática, cuya realización consiste en la búsqueda de razones de fondo de las interconexiones entre dos o más teorías matemáticas; tales interconexiones son posibles si existen ideas comunes entre tales teorías, hay que discernir esas ideas y explicitarlas.

Papel de la lógica en matemática

El formalismo lógico es un aspecto, pero puede llegar a ser considerado tan importante, que el mismo Bourbaki, comienza la Introducción a su tratado fundamental con esta sentencia: "Desde los griegos, quien dice matemática dice demostración". El matemático puede trabajar intuitivamente, como todo creador, pero el fruto de su trabajo, en cuanto está destinado a ser comunicado, toma el aspecto que le suministra la lógica. A pesar de las vicisitudes en las relaciones entre la lógica y la matemática a lo largo de la historia de de ambas disciplinas, ha llegado a ser un truismo (término empleado por

Bourbaki) que la lógica "es inseparable de una explicación coherente de los amplios fundamentos sobre los que debe estar cimentada la matemática". La lógica pasó del campo de la filosofía al de la matemática, prácticamente desde 1847, con la primera obra de Boole. Sin embargo, las conexiones internas entre ambas son muy profundas: "Se dice que la lógica existe fuera de la matemática. No obstante, cuanto fuera de la matemática sea reducible a pura lógica, puede mostrarse con un examen detenido, que no es más que un esquema estrictamente matemático, casi siempre combinatorio". Propiamente hablando, "el razonamiento lógico o (lo que creo que es lo mismo) el razonamiento matemático solo es posible gracias a un proceso de abstracción mediante la construcción de un modelo matemático". "Para nosotros, matemáticos, la lógica es, nada más ni nada menos que la gramática del lenguaje que usamos, lenguaje que ha de existir antes de que la gramática pueda ser construida". "Debe haber demostraciones, antes de analizar la estructura de una demostración. Sin que llegue a afirmar, como los intuicionistas de Brouwer, que la lógica es un mero apéndice de la matemática, Bourbaki sí afirma que la lógica se edifica poco a poco con base en el modelo matemático. El momento final del desarrollo lógico es la creación de lenguajes formalizados.

Lenguaje formalizado

Un texto matemático puede estar axiomatizado a la manera de Euclides, es decir, concreta; o a la manera de Hilbert, es decir, abstracta. El texto axiomatizado puede aparecer completamente simbolizado, es el caso de *Principia Mathematica*, de Whitehead y Russell. Un texto formalizado no está forzosamente escrito en símbolos o signos. *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, es el modelo por antonomasia, del formalismo y está escrito en lenguaje corriente del que se han abstraído los contenidos o acepciones dadas por el diccionario. Un texto está formalizado si está expresado en lenguaje convencional, con un reducido número de 'palabras' invariables puestas unas al lado de otras según una sintaxis compuesta por un pequeño número de reglas inviolables. Ejemplos del mismo Bourbaki: la descripción usual de una partida de ajedrez, una tabla de logaritmos. Un texto formalizado requiere una atención mecánica (algo así como la de quien revisa la corrección ortográfica de un escrito) para verificar que el texto cumple las reglas de composición del lenguaje adoptado. Solo importa la observancia de las reglas de la sintaxis. En cambio, un texto no formalizado requiere una atención mayor, pues, por ejemplo, los abusos de intuición o los razonamientos por analogía pueden pasar desapercibidos en una lectura no cuidadosa. El rigor se mide por la corrección sintáctica. "Propiamente hablando, el método axiomático es el arte de redactar textos cuya formalización es fácil de concebir", es decir, textos cuya "traducción al lenguaje formalizado no sería más que un ejercicio de paciencia (sin duda muy penoso)".

Para Bourbaki, "uno de los rasgos originales de la matemática contemporánea es el empleo sistemático del método axiomático como medio de descubrimiento". Algunas ventajas del método son estas. El poder dar contenidos múltiples a los términos no definidos de un texto formalizado es una ocasión de enriquecimiento para la intuición del matemático. En segundo lugar, el método permite disociar los diversos aspectos de una situación matemática para estudiarlos con mayor propiedad. Es el aspecto estructural de la matemática actual. Los números reales, por ejemplo, pueden ser estudiados desde el punto de vista algebraico o de propiedades de las operaciones; o desde el punto de vista del orden o de la disposición de unos números respecto de otros; desde el punto de vista de la topología o de las propiedades de ciertos subconjuntos de un conjunto de partes de un conjunto.

Se creyó en un tiempo que algunas ramas de la matemática dependían de intuiciones peculiares que suministrarían sus puntos de partida. Si así fuera, se requeriría un lenguaje formalizado para cada una de tales ramas. Pero, ahora se sabe hacer derivar casi toda la matemática de una fuente única, la teoría de conjuntos. El objetivo de Bourbaki es "exponer los principios de un lenguaje formalizado único, indicar cómo se podría redactar en este lenguaje la teoría de conjuntos, hacer ver luego cómo se insertan en ella las diversas ramas de la matemática".

Bourbaki tiene su manera personal de utilizar el método axiomático, es la axiomatización a la manera de Bourbaki. Ella es heredada de Hilbert en cuanto al formalismo: es heredada de Klein y otros en cuanto al empleo sistemático de las estructuras. Klein había expuesto la geometría mediante la estructura de grupo. Bourbaki se propone exponer la matemática mediante estructuras; por el empleo de más de veinte de ellas logra establecer los fundamentos de por lo menos la matemática conocida hasta mediados del siglo XX.

Lenguaje estructural

Grosso modo, una estructura está compuesta por:

- uno o varios conjuntos no vacíos;
- una e varias operaciones entre elementos de un conjunto, o una o varias aplicaciones entre elementos de conjuntos;
- un conjunto de axiomas o condiciones que deben cumplir, por principio, las operaciones o las aplicaciones.

El método axiomático estructuralista, "dividirá las dificultades para resolverlas mejor", como exigía Descartes de un método eficaz para la investigación en las ciencias; en opinión de Bourbaki, el método axiomático, tal como se propone ponerlo en práctica en *Éléments*, cumple el programa cartesiano, en cuanto para alcanzar la finalidad de extraer lo que pueden tener en común dos o más teorías, comienza por disociar los grandes cauces de las demostraciones; destaca a cada uno de ellos dándole la categoría de principio abstracto; desarrolla las consecuencias que este implica con tal papel; regresa luego a la teoría de donde había sido aislado para estudiarla ahora mucho más eficientemente.

Es así como, en la visión esquemática apuntada antes para una estructura, puede destacarse la componente constituida por las operaciones. El estudio de las propiedades comunes a las operaciones de distintas estructuras es el aspecto algebraico de la investigación acerca de las estructuras. Se tiene de esta manera, uno de los tres grandes tipos de estructuras: *las estructuras algebraicas.*

Si más bien se hace el estudio sistemático de las propiedades que pueda haber en común para ciertas posiciones relativas (interesantes desde el punto de vista matemático, desde luego) de los elementos de un conjunto respecto de otros elementos, en particular, las que intuitivamente toman la disposición de puntos sobre una recta o sobre rectas quebradas con algunos vértices comunes, se tiene el estudio de las *estructuras de orden.*

El estudio de la propiedades comunes a muchas situaciones matemáticas de subconjuntos de un conjunto culmina en la teoría de las *estructuras topológicas.*

Que los matemáticos llegaran a darse cuenta de la importancia de las llamadas estructuras para el trabajo matemático fue el fruto de una lenta evolución en el enfoque de la profusión de cálculos que suele acompañar la solución de muchos problemas. Actualmente, sin embargo, gracias al esfuerzo de varias generaciones de matemáticos, la construcción de una estructura sigue un procedimiento sabido. En el caso de la estructura algebraica de *grupo* se parte de un conjunto no vacío y de una operación entre los elementos del conjunto. Al ir añadiendo propiedades se va obteniendo la estructura.

Magma	$\begin{cases}\text{Conjunto}\\ \text{Operación}\end{cases}$	
Magma asociativo	$\begin{cases}\text{Conjunto}\\ \text{Operación}\end{cases}$	• Asociativa
Monoide	$\begin{cases}\text{Conjunto}\\ \text{Operación}\end{cases}$	• Asociativa • Con elemento neutro
Grupo	$\begin{cases}\text{Conjunto}\\ \text{Operación}\end{cases}$	• Asociativa • Con elemento neutro • Inversible
Grupo conmutativo	$\begin{cases}\text{Conjunto}\\ \text{Operación}\end{cases}$	• Asociativa • Con elemento neutro • Inversible • Conmutativa

La operación asocia con cada par de elementos del conjunto un único tercer elemento del mismo conjunto: se dice, en general, que la operación es interna. Añadir propiedades significa suponer que la operación satisface un axioma más, requerir que la operación cumple una condición más. Así, añadir axiomas es enriquecer las posibilidades de la situación matemática; se dice, enriquecer la estructura.

Si el conjunto es el de los números naturales y la operación es la adición, se obtiene un monoide, ya que la adición entre naturales es una operación interna, con elemento neutro, asociativa; no se tiene grupo, ya que la adición entre naturales no es inversible; el monoide es sí conmutativo. Si el conjunto es el de los números enteros y la operación es la adición, entonces, se tiene una estructura de grupo conmutativo. Análogamente sucede cuando se toma uno de los conjuntos formados por los números racionales, o los reales, o los complejos con la adición apropiada en cada caso. En cambio si se considera el conjunto de los enteros con la operación multiplicación de enteros se obtiene un monoide conmutativo, pero no un grupo, dado que la multiplicación de enteros no es una operación inversible. Si se considera el conjunto de los enteros con la doble estructura de grupo conmutativo respecto de la primera operación y de monoide conmutativo para la segunda operación se obtiene la estructura que los matemáticos designan como un anillo conmutativo con elemento neutro, a condición de que se añada un axioma que garantice la compatibilidad de las dos operaciones sobre el mismo conjunto; es el axioma de distributividad, según el cual no importa el orden en que se realicen las dos operaciones involucradas. El conjunto de los racionales, sin el elemento neutro de la adición, con la multiplicación de racionales como operación, constituye una estructura de grupo conmutativo. El conjunto de los racionales con las dos operaciones, con el apropiado axioma distributivo, tiene una doble estructura de grupo conmutativo; se dice entonces que se tiene una estructura de campo conmutativo. Es el campo racional; este nombre designa sencillamente que en el conjunto de los racionales son posibles las cuatro operaciones. De manera análoga, se obtienen el campo real y el campo complejo. Definiendo apropiadamente las dos operaciones, se puede obtener una estructura de campo sobre el conjunto de los restos de la división por un número primo. Pero no solamente con operaciones numéricas se obtienen grupos. En este rasgo puede verse la generalidad de la estructura de grupo. Puede considerarse el conjunto de los movimientos de los elementos de un conjunto o de configuraciones formadas con elementos del mismo; por ejemplo, el conjunto formado por los puntos del plano, las figuras planas y las aplicaciones del plano en sí mismo que no cambien ni la forma ni el tamaño de las configuraciones, tiene una estructura de grupo no conmutativo respecto de una operación llamada composición de movimientos (aplicaciones). Poincaré prestó especial atención al conjunto de los movimientos de un niño que transporta sus juguetes de un sitio a otro en su habitación.

Una relación de *orden* es también una relación entre dos elementos de un conjunto, pero, no exige que la relación determine, de manera única, un elemento asociado; ni tampoco, que esté definida (como sí en las estructuras algebraicas) por todas partes, es decir, pera cualquier par de elementos del conjunto. Si lo está, el orden se llama total; si no, parcial. Sea R una tal relación de orden. Se escribe: xRy pare indicar que x está en la relación R con y. Se cumplen los tres axiomas:

a) Para todo x se tiene xRx.
b) Si xRy, y, yRx entonces $x = y$.
c) Cualesquiera sean x, y, z si xRy, y, yRz entonces xRz.

La relación 'menor o igual que' es una relación de orden total en cada uno de los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales; no lo es entre números complejos.

La relación 'está contenido en' es una relación de orden parcial entre conjuntos.

La relación 'divide a' es una relación de orden parcial entre naturales.

La estructura llamada *red* está formada por un conjunto C, parcialmente ordenado, tal que para cada par de elementos x, y de C haya una cota inferior, $\text{ínf}(x, y)$, y una cota superior, $\sup(x, y)$. La relación 'está contenido en' queda bien definida en el conjunto de las partes de un conjunto no vacío. Ahora bien; dados dos subconjuntos de este conjunto existe siempre la intersección de los dos, cota inferior, y la unión de los dos subconjuntos, cota superior. El primero es un conjunto contenido en ambos, el segundo es un conjunto que los contiene a ambos. Aquel es el mayor subconjunto y éste el menor con tal propiedad. Así, pues, el conjunto de las partes de un conjunto tiene una estructura de red respecto de la relación 'estar contenido en' que se predica entre conjuntos. Otro ejemplo. El conjunto de los naturales sin el cero es ordenado parcialmente por la relación 'divide a'. Dados dos naturales, su máximo común divisor es el mayor natural que los divide a ambos; su mínimo común múltiplo es el menor natural que es divisible por ambos. Los naturales sin el cero tienen, pues, una estructura de red respecto de la relación de divisibilidad; la cota inferior es el máximo común divisor, la superior es el mínimo común múltiplo.

Las estructuras topológicas tienen que ver con el estudio de las nociones de límite, vecindad, continuidad. La topología ha sido llamada, geometría intrínseca de conjuntos. Un ejemplo del abstracto tipo de consideraciones de los topólogos puede ser la caracterización del plano concebida por Hilbert, 1902 (Apéndice IV. *Fundamentos de la geometría.* Ver la referencia completa en el capítulo VIII del libro entremanos).

El plano es un sistema de entes que se llaman puntos. Cada punto A determina un sistema parcial de puntos, al cual pertenece él mismo, y que recibe el nombre de entorno del punto A.

Los puntos de un entorno pueden representarse biunívocamente en el plano numérico por los puntos de un cierto dominio de Jordan. El dominio de Jordan se denomina una imagen de aquel entorno.

Cada dominio de Jordan contenido en una imagen y en el interior del cual esté situado el punto A es, a su vez, una imagen de un entorno de A. Si tenemos distintas imágenes de un entorno, la transformación biunívoca que permite pasar de uno a otro de los correspondientes dominios de Jordan, es una transformación continua.

Si B es un punto cualquiera del entorno de A, también es este entorno un entorno de B.

Dados dos entornos de un punto A, existe siempre otro entorno de A que es común a los dos primeros.

Si A y B son dos puntos cualesquiera de nuestro plano, existe siempre un entorno de A que, a la vez, contiene el punto B.

Los topólogos plantean cuestiones como estas: ¿Cómo queda asociada a cada punto del plano una familia de vecindades? ¿Es posible cubrir el plano con un conjunto numerable, o con un conjunto finito de vecindades? ¿Cómo construir a partir del plano, conjuntos estructurados cada vez más generales (con más dimensiones, por ejemplo)? Obtienen así las variedades sobre las cuales hay cuestiones que generalizan algunas de la geometría, como estas: ¿Si se hace una transformación entre variedades, como las que se pueden hacer sobre una lámina elástica, se dispone sobre la variedad transformada de una estructura semejante? ¿Qué no cambia, qué es invariante por una transformación? ¿El conjunto de transformaciones entre las variedades tienen alguna estructura?

Se obtienen nuevos conocimientos o los antiguos aparecen bajo una nueva luz. Un ejemplo de esto último. En *Timeo*, menciona Platón el teorema: todos los poliedros regulares son inscribibles en la esfera. Una rama de la topología ha mostrado que en los cuerpos platónicos, los cinco poliedros regulares, el número de vértices, menos el número de aristas, más el número de caras, es constante e igual a dos. Es este un teorema del carácter más general posible, que hubiera sido quizás del agrado del jefe de la Academia, dada su propensión a ocuparse de relaciones numéricas; entre los elementos de los poliedros, por ejemplo, el número de triángulos rectángulos de una cara. Por otra parte, si imaginamos un poliedro regular inscrito en una esfera, entonces mediante el radio de la esfera se hace corresponder a cada punto del poliedro un punto de la esfera y recíprocamente a cada punto de la esfera un punto del poliedro, es decir, la esfera y el poliedro se corresponden biyectivamente; además, la correspondencia es tal que los puntos de un entorno o vecindad de un punto del poliedro son aplicados sobre un entorno o vecindad del punto que le corresponde sobre la esfera; y recíprocamente. En lenguaje técnico, los matemáticos dicen que la proyección según el radio es bicontinua. Reuniendo las condiciones de biyección y de bicontinuidad dicen que la proyección radial es un homeomorfismo. Hay otras superficies, fuera de la esfera y de los poliedros regulares, que tienen las dos propiedades anteriores; el elipsoide de revolución, por ejemplo. Tales superficies forman un conjunto bien determinado: el de las superficies homeomorfas con la esfera. Un aro, un neumático, o, como dicen los matemáticos, un toro, no pertenecen a dicho conjunto. La clasificación de las superficies interviene, a su vez, en la solución de otras cuestiones. Una que desafió a los matemáticos durante más de cien años era la de saber cuántos colores son necesarios y suficientes para colorear un mapa. Más o menos rápidamente pudieron mostrar que se necesitan cuatro; solamente hasta 1978, gracias al trabajo, durante más de mil horas de una computadora, se vio que bastan cuatro. El problema está resuelto; la solución, empero, no es un teorema de geometría topológica, no es deducida a partir de axiomas, sino de una combinatoria de posiciones.

¿Qué es desarrollar una teoría axiomática? “Hacer la teoría axiomática de una estructura dada, es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, *con exclusión de toda otra hipótesis* acerca de los elementos considerados (en particular, toda hipótesis sobre su ‘naturaleza’ propia)”. Hay que tener muy en cuenta, debido al uso tradicional corriente de la noción de axioma o postulado, que ni en la axiomatización a la manera de Hilbert, ni en la de Bourbaki, axioma es una verdad evidente, mucho menos una verdad que no necesita demostración, sino un enunciado en el lenguaje de la teoría, que se toma sin demostración (no se puede demostrar todo, según Aristóteles) como válido.

Economía de pensamiento

El método axiomático concebido de esta manera es altamente eficaz y permite ahorrar esfuerzos. Porque las estructuras son “herramientas para el matemático; una vez que ha discernido entre los elementos que estudia, relaciones que satisfacen a los axiomas de una estructura de tipo conocido, dispone automáticamente de todo el arsenal de teoremas generales relativos a las estructuras de este tipo”, cuando antes casi todo dependía de la iniciativa del investigador individual. Por ello compara Bourbaki al método axiomático en cuestión con el sistema Taylor para la organización del trabajo en las fábricas.

Estructuras madre – Estructuras múltiples

Tradicionalmente, las disciplinas matemáticas se ordenaban unas al lado de otras: álgebra, análisis, teoría de números, geometría. Bourbaki introduce el principio ordenador de la jerarquía de estructuras, que vayan de lo simple a lo complejo, de lo general a lo particular. Una estructura general es, puede decirse, pobre en axiomas; ella puede ser enriquecida al añadirle axiomas, pues cada uno trae consigo "su cosecha de nuevas consecuencias". Estas consecuencias valen sobre un ámbito menor que las llamadas generales, dado que cada axioma introduce una restricción.

Hay, por una parte, las estructuras que Bourbaki, a guisa de símil, llama estructuras-madres y que muy bien podrían denominarse igualmente estructuras simples; ya han sido mencionadas, son las algebraicas, las ordinales, las topológicas. Hay, por otra parte, las estructuras múltiples, en las que intervienen, a la vez, dos o más estructuras simples, no simplemente yuxtapuestas, sino combinadas orgánicamente, mediante axiomas que garantizan la compatibilidad de las operaciones. Así, por ejemplo, sobre los números racionales o sobre los números reales, la adición y la multiplicación determinan sendas estructuras de grupo conmutativo; para la presencia simultánea de las dos estructuras se requiere el axioma de distributividad de la multiplicación respecto de la adición; aquella propiedad que en los años secundarios ocasiona una serie de ejercicios sobre 'disolución de paréntesis' o sobre 'sacar en factor'. El enriquecimiento de estructuras produce una gran diversidad.

Ejemplo. Si a la estructura de grupo se añade el axioma suplementario según el cual la operación ha de ser conmutativa, se obtiene la teoría de grupos conmutativos. Esta teoría ya no cobija a todos los grupos (la teoría pierde en extensión) pero es más rica en el sentido de que tiene más teoremas que aquella (la teoría gana en comprensión). En lugar de añadir la exigencia de conmutatividad, puede añadirse el axioma, vale decir la condición, de que el número de elementos del conjunto sobre el cual se va a construir la estructura de grupo sea finito; la teoría obtenida al desarrollar las consecuencias lógicas de los cinco axiomas, es la teoría de los grupos finitos. En esta teoría figura, en particular, el teorema de Feit-Thompson: todo grupo finito simple no conmutativo tiene un número par de elementos. (Un grupo es simple si no contiene subgrupo diferente al de la identidad). Según Dieudonné (pp. 206-207. *Le choix bourbachique.* 1977. Paris. Bordas. 306 pp.) su demostración se hace por el absurdo, examinando lo que serían las propiedades de un grupo de orden impar (es decir, con un número impar de elementos) lo más pequeño posible, hasta obtener una contradicción; tal demostración requiere todos los recursos de la teoría de grupos, es la más larga (250 pp.) y la más compleja de las de la matemática en la actualidad. Se pueden añadir simultáneamente los dos axiomas, de conmutatividad y de finitud. Al desarrollar las consecuencias de esta teoría con seis axiomas, se obtiene a teoría de grupos finitos conmutativos, la cual contendrá no solamente los teoremas correspondientes a las de los grupos finitos y los grupos conmutativos, sino, además, otros que hace posible la presencia simultánea de los dos axiomas añadidos. Para que a un conjunto con una operación le convenga esta teoría tiene que cumplir las tres condiciones de ser grupo, ser conmutativo, tener un número finito de elementos. Como se requieren más condiciones, la teoría tiene menos extensión, no cobija a todos los grupos; como hay, empero, más relaciones entre sus elementos, hay también más posibilidad de enunciados que puedan convertirse en teoremas, es decir, que puedan derivarse lógicamente de los axiomas; por tanto, la teoría será más rica porque tendrá más resultados.

Esbozo esquemático, idealizado, estereotipado

Así considera el mismo Bourbaki su propia descripción de las grandes líneas de la matemática actual.

Es esquemático, porque al detallar, las cosas no ocurren de manera tan simple y regular.

Idealizado, porque se está muy lejos de haber reconocido y delimitado la parte exacta de cada una de las grandes estructuras; hay numerosos resultados que no se ha sabido ubicar respecto de las estructuras conocidas.

Estereotipado, porque nada hay más alejado del método axiomático que una concepción estática de la ciencia; de ninguna manera debe creerse que se ha pretendido describir un estado definitivo de esta.

Evolución de las estructuras

Las estructuras no son inmutables, ni en su número, ni en su esencia; es muy posible que el desarrollo ulterior de la matemática aumente el número de estructuras fundamentales, y revele la fecundidad de nuevos axiomas, o de nuevas combinaciones de axiomas. Las estructuras conocidas no son, en manera alguna, edificios acabados. Sería sorprendente que se hubieran agotado ya todas las consecuencias que se puede extraer de los axiomas. Bourbaki compara la vida interna de la matemática a una gran ciudad, cuyos suburbios no cesan de crecer, de manera un poco caótica sobre el terreno circundante, mientras que el centro se reconstruye periódicamente, siguiendo un plan cada vez más claro y una disposición cada vez más majestuosa, echando abajo los viejos barrios y sus laberintos de callejuelas, para lanzar hacia la periferia, avenidas cada vez más directas, más amplias y más cómodas. Así ha sucedido desde el año -450 (mitad del siglo V antes de la era actual), aproximadamente, cuando el 'canon' ideal de un texto matemático aparece ya más o menos estipulado.

Estructuras univalentes y multivalentes

Las axiomatizaciones de la aritmética, de Dedekind y de Peano, y, la de la geometría, de Hilbert, tenían que ver con teorías univalentes, es decir tales que el sistema global de sus axiomas las determinaba enteramente, y no susceptibles de aplicarse a ninguna otra diferente; en contraste, la teoría de grupos es multivalente, el sistema global de axiomas no la determine, sino que admite muy diversas interpretaciones o realizaciones o modelos. El conjunto reducido al solo elemento neutro para la adición entre reales admite estructura de grupo; igual sucede con el elemento neutro para la multiplicación. También, el conjunto de las rotaciones de un cuadrado, al rededor del centro determinado por el cruce de las diagonales, conjunto de cuatro elementos, es un grupo. El conjunto de las infinitas rotaciones de un círculo alrededor de su centro es un grupo. La estructura determinada por cuatro axiomas se aplica tanto a conjuntos finitos como a conjuntos infinitos; desde luego, no interesa para nada la naturaleza de los elementos del conjunto sobre el cual se obtiene un grupo. Es esta una de las consideraciones para que Poincaré haya declarado la estructura de grupo como la quinta esencia de la matemática moderna. En las teorías particulares los elementos resultan más individualizados; así es en la matemática clásica, aun ya engastada en la visión actual; aritmética y geometría, por ejemplo. La teoría de los conjuntos ordenados, la topología, la teoría de las variedades diferenciales son teorías multivalentes. "El estudio de las teorías multivalentes es el rasgo más sorprendente entre los que distinguen la matemática clásica de la matemática moderna".

Problemas filosóficos

Bourbaki toma en lo concerniente a problemas filosóficos, que pueden ser muy delicados como se ve fácilmente con solo tomarse el trabajo de pensarlos, una actitud conveniente para el matemático que trabaja, es decir, para el matemático que hace matemática. Bourbaki no quiere ignorar que hay cuestiones de fondo concernientes a puntos esenciales de la matemática. Por estar al corriente las menciona, pero las soslaya, por no ser de su competencia; es lo que él mismo afirma varias veces: He aquí algunas de ellas.

Intuición

No es ella misma un problema, sino que entra en la discusión acerca del origen de las formas matemáticas. Bourbaki distingue una intuición sensible vulgar que surge directamente de los datos de los sentidos y una intuición matemática "que no se obtiene sino por una abstracción superior y a veces difícil", es "una especie de adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que parece tener derecho a esperar de parte de entes matemáticos con los que ha tenido una frecuentación tan prolongada que se han convertido casi en seres tan familiares como los del mundo real". Bourbaki insiste en el papel fundamental que juega este tipo de intuición en las investigaciones matemáticas; aunque, como toda intuición, es también falible, es sin embarco indispensable en la creación matemática, como en toda creación humana. "... para el investigador que bruscamente descubre una estructura en los fenómenos que estudia, es como una modulación súbita que orienta de un solo golpe en una dirección inesperada la corriente intuitiva de su pensamiento y que ilumina de un color nuevo el paisaje matemático donde se mueve". "... menos que nunca, se reduce actualmente la matemática a un juego puramente mecánico de fórmulas aisladas; más que nunca, reina la intuición soberanamente en la génesis de los descubrimientos; pero ella dispone ahora de potentes palancas que le suministra la teoría de los grandes tipos de estructuras y domina de un solo golpe de vista inmensos dominios unificados por la axiomática, donde antes parecía reinar el más informe caos".

Origen de los conocimientos matemáticos

Hay "cuestiones espinosas, mitad filosóficas, mitad matemáticas", relativas a la 'naturaleza' de los 'seres' u 'objetos' matemáticos (que han constituido un tema de los más importantes en la filosofía tradicional de la matemática). Tales 'seres' eran imaginados como 'abstracciones' ideales de la experiencia sensible, conservaban toda la heterogeneidad de esta, en particular, para su representación mental. Las investigaciones matemáticas del siglo XIX redujeron ese pluralismo al conseguir poco a poco introducir las diferentes nociones matemáticas, primero, mediante el número entero, y finalmente, mediante la mera noción de conjunto. Esta era considerada como 'primitiva', 'no definida'. Sin embargo, provocó muchas polémicas, debido a su carácter de extrema generalidad y a la vaguedad de las representaciones mentales que evoca; como, además, aparecieron paradojas dentro de la teoría de conjuntos, hubo que suprimir las dificultades suprimiendo el papel preponderante que se le había llegado a dar a la noción; así desaparecieron por allí mismo, "los pseudo problemas metafísicos acerca de los 'seres' matemáticos". En la concepción de la matemática adoptada por Bourbaki, "las estructuras matemáticas se convierten, propiamente hablando, en los únicos 'objetos' de la matemática".

Relaciones entre el mundo experimental y el mundo matemático

"Que haya una conexión estrecha entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas, es lo que parecen corroborar de la manera más inesperada los descubrimientos recientes de la física contemporánea; ignoramos, empero, totalmente las razones profundas (si es que logramos dar un sentido a estos términos) y quizás las ignoremos siempre. Hay, en todo caso, una constancia que podría, respecto a este punto, incitar a los filósofos en lo futuro a una mayor prudencia: antes de los desarrollos revolucionarios de la física moderna se hizo un gran esfuerzo por querer a todo trance hacer salir la matemática de las verdades experimentales, particularmente, de intuiciones espaciales inmediatas; ahora bien; por una parte, la física de los quanta ha mostrado que esta intuición 'macroscópica' de lo real encubría fenómenos "microscópicos' de naturaleza distinta, [cuya descripción] concernía a ramas de la matemática que no habían sido imaginadas por cierto con el fin de aplicarlas a las ciencias experimentales; por otra parte, el método axiomático ha mostrado que las 'verdades' de las que se quería hacer el pivote de la matemática no eran sino aspectos muy especiales de concepciones generales que de ninguna manera se limitaban a ellos. Tanto que, al fin de cuentas, esta íntima fusión cuya armoniosa necesidad nos hacían admirar, no aparecía más que como un contacto fortuito de dos disciplinas cuyos vínculos están mucho más escondidos de lo que a priori podía suponerse". En la concepción actual de la axiomática, "la matemática aparece como una cantera de formas abstractas, las estructuras matemáticas, y acontece, sin que se sepa muy bien por qué, que ciertos aspectos de la realidad experimental se dejan moldear dentro de algunas de estas formas, como por una especie de preadaptación... la mayor parte de estas formas tenían inicialmente un contenido intuitivo bien determinado; pero, es precisamente vaciándolas de este contenido como se les llegó a dar toda la eficacia de que eran portadoras en potencia, al hacerlas susceptibles de recibir nuevas interpretaciones y de cumplir a cabalidad su función elaboradora".

Lógica

Desde los sofistas hasta la escuela de Viena ha habido controversia filosófica sobre un doble aspecto: posibilidad y manera de aplicar la lógica a los objetos del mundo sensible, por una parte, y por otra, a los conceptos del espíritu humano, o si se prefiere la expresión, a los objetos del mundo inteligible. Se encuentra específicamente entre estas cuestiones la del rigor, es decir, de la corrección en los razonamientos, es decir, de la correcta aplicación de las reglas de la lógica en la deducción de los teoremas. Esta preocupación de tipo lógico se convierte en una de tipo psicológico, lo señala el mismo Bourbaki; a este respecto, dice, es más indicativo "lo que el matemático hace que lo que el matemático piensa... sería más exacto decir lo que el matemático piensa que piensa", dado que las imágenes que ocurren en el trabajo matemático son más interesantes desde el punto de vista psicológico que desde el lógico. En parte es cierto que la noción de demostración en Euclides, Arquímedes, o Apolonio no difiere en nada de la nuestra; porque, en parte es cierto también que luego de una época de gran florecimiento de ideas matemáticas, nuevas, suele florecer igualmente una nueva concepción del rigor. En la misma época, la actual por ejemplo, es trivial observar diversos niveles de rigor; cursos, libros, revistas se pueden clasificar fácilmente. La exposición de Bourbaki provoca una resistencia cierta de parte de muchos matemáticos. Sin embargo, como lo señala Bourbaki mismo, ella no supondría "ningún conocimiento matemático particular, sino solamente, una cierta habituación al razonamiento matemático y un cierto poder de abstracción". Condescendientemente, Bourbaki añade que el tratado está destinado a quienes tengan un buen conocimiento de las materias enseñadas en los dos primeros años universitarios. Una cuestión más que Bourbaki subraya, sin entrar a examinarla, aunque conceptúa que es una cuestión en parte metafísica en parte psicológica, es la de si el pensamiento matemático es esencialmente lógico.

Un teorema de Gödel

La lógica ha de cumplir una función de muro de contención, en el caso específico del problema de no contradicción. Durante la mayor parte de la historia de la matemática, esta ciencia es un pequeño universo de verdades absolutas; el mismo Hilbert puso tanto celo en la teoría de la demostración para salvaguardarlo; los racionalistas de todos los tiempos creían en la razón porque la razón era la creadora de la matemática. Había, no obstante, ciertos indicios en contrario, inquietantes desde el actual punto de vista, pero que no pasaron más allá del modesto rango de dificultades curiosas, llamadas desde antiguo, paradojas. Es muy difícil, dice Bourbaki, pronunciarse acerca de la opinión de algunos historiadores según la cual las paradojas surgidas alrededor del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables habrían estimulado la búsqueda de pruebas sistemáticas en la matemática griega. No es preciso ir tan lejos, pues hay elocuentes ejemplos cercanos: cálculo infinitesimal, teoría de series, teoría de conjuntos. El desarrollo de la matemática es progresivo: a los tiempos de afirmaciones categóricas suceden los de duda o negación, incluso de contradicción. Esto es particularmente verificable en lo relativo a "todas las revisiones críticas de los principios de la matemática en conjunto". La investigación de los fundamentos que llega a la matemática formalizada conduce "a la necesidad de demostrar la no contradicción de un lenguaje formalizado mediante lenguajes formalizables en un lenguaje menos rico y por tanto más digno de confianza; pero, un teorema célebre de metamatemática, debido a Gödel dice que ello es imposible para un lenguaje suficientemente rico en axiomas que permita formular los resultados de la aritmética clásica". Después del teorema de Gödel, la actitud frente a la contradicción no puede ser sino estrictamente pragmática. Algo así, como trabajar confiadamente mientras una contradicción no sea advertida. El lenguaje semiformalizado permitiría localizar rápidamente el filón de la contradicción para retirarlo del sistema. Una definición, un símbolo, una abreviación son fuentes potenciales de ambigüedades y por allí de posible contradicción. Tales ambigüedades, no obstante, no pueden ser evitadas sin complicaciones que harían toda expresión imposible. La no contradicción, actualmente, hay que lograrla cada vez, no viene ínsita en la naturaleza de las cosas matemáticas, vale decir, en los conceptos paulatinamente creados por los matemáticos. La ausencia de contradicción, en resumen, será más bien un hecho de experiencia que un principio metafísico.

Algunos ¿por qué?

El por qué de la matemática misma. Hay una respuesta local que quizá pueda globalizarse; hablando de los inicios del método axiomático dice Bourbaki: "Tal método, es lo que se puede pensar, puede inscribirse de manera bastante natural en la perpetua búsqueda de 'explicaciones' del mundo, que caracteriza el pensamiento griego y que es ya tan manifiesta entre los filósofos jonios del siglo VII" (antes de la era actual). Al terminar *Introduction*, Bourbaki avala la tendencia "de todos los grandes pensadores de la matemática", es decir, "de quienes han trabajado conscientemente, desde Gauss, con el fin de 'substituir el cálculo por las ideas' ". Otros por qué, señalados por Bourbaki: ¿Por qué la aplicación de la matemática a algo que no es matemático sale bien siempre? ¿Por qué una cierta dosis de razonamiento matemático es ocasionalmente útil en la vida práctica? ¿Por qué algunas de las más intrincadas teorías matemáticas se convierten en instrumento indispensable para el físico actual, el ingeniero, o el que manufactura bombas atómicas? "Afortunadamente, el matemático no se siente llamado a responder tales preguntas, ni podría hacérsele responsable por tal uso o tal abuso de su trabajo".

Epílogo

Estas son algunas de las reflexiones de Bourbaki argumentadas por el grupo acerca de su extenso y profundo tratado. La intención aquí era presentar una visión conjunta de aseveraciones manifiestas, dispersas en cuatro trabajos citados en la bibliografía. En el último capítulo de la presente obra habrá opiniones de miembros del grupo, afirmadas personalmente.

Cuestiones

1. ¿Por qué hablar de arquitectura y no de estructura?

2. ¿Por qué hablar de matemática y no de matemáticas?

3. ¿'Todas las cosas son número' tiene que ver con lo discreto o con lo continuo? ¿Con la aritmética o con la geometría?

4. ¿Bourbaki se preocupa de las relaciones de la matemática con el mundo exterior o con el mundo del pensamiento?

5. ¿El formalismo lógico se ocupa de la sintaxis de la matemática? ¿De la sintaxis del lenguaje de la matemática?

6. ¿Distingue Bourbaki el formalismo lógico del método axiomático? ¿En qué consiste cada uno? ¿Qué es lo que permite el segundo, que no asegura el primero?

7. Russell y Whitehead, en *Principia Mathematica*, cultivan el formalismo lógico, o, el método axiomático?

8. ¿En la visión de Bourbaki, interesa la naturaleza de los elementos de un conjunto? ¿Qué es lo que interesa?

9. ¿Cuáles son las *estructuras madre*? ¿Cuáles son las estructuras múltiples? ¿O estructura encrucijada?

10. ¿En qué consiste la intuición del matemático? ¿Coincide con otros tipos de intuición?

11. Explique por qué el método experimental supone la permanencia de leyes naturales.

12. El matemático busca ideas comunes al aparato exterior de diversas teorías: ¿en ciencias? ¿O en solo la matemática?

13. ¿Una filosofía de la ciencia puede convenir también fácilmente a la matemática? ¿Por qué?

14. ¿Es conveniente emplear el lenguaje corriente para las ciencias? Exhiba varias acepciones de 'artículo'. ¿Hay riesgo de ambigüedad? Un ejemplo: ¿'punto', 'recta', 'plano' a qué se refieren? ¿Hay riesgo de ambigüedad?

15. ¿Qué es la aritmetización del análisis? ¿Una vuelta a los pitagóricos? ¿Circunstancias?

16. ¿Qué es la algebraización de la lógica? ¿Quién la comenzó? ¿Con qué objeto? ¿Qué se logró?

17. ¿En qué consiste la aritmetización de la sintaxis? ¿Quién la hizo? ¿Con qué objeto? ¿Qué se logró?

18. De las dos nociones 'conjunto', 'número', ¿cuál es más general? ¿Por qué?

19. ¿Qué es una estructura matemática? Piaget dice que los caracteres de una estructura son: autorregulación, totalidad, transformaciones. Explique cómo la estructura de grupo posee tales caracteres.

20. Compare los tres desarrollos axiomáticos de la geometría: Euclides, Hilbert, Klein. ¿Diferencias? ¿Coincidencias?

21. Trate de explicar por qué en la axiomatización a la manera de Bourbaki el solo objeto matemático es la estructura.

Bibliografía

1. BOURBAKI. *Mode d'emploi de ce traité. Introduction.* pp. 3-13. Théorie des ensembles. (Nouvelle édition). 1970. Paris. Hermann. (Volume relié).

2. BOURBAKI. *L'architecture des mathématiques.* pp. 35-47. Les grands courants de la pensée mathématique. (1947). 1962. Paris. Blanchard. 559 pp.

3. BOURBAKI. *Foundations of mathematics for the working mathematician.* The Journal of Symbolic Logic. Volume 14. Number 1. March. 1949. pp. 1-8.

4. BOURBAKI. *Éléments d'histoire des mathématiques.* (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp.

Capítulo 13

Metamatemática en *Elementos de Matemática*, de Bourbaki

A la luz de las investigaciones sobre formalización, las estructuras son propiamente hablando, los únicos "objetos".

[Bourbaki]

Bourbaki principia su tratado fundamental, *Éléments de Mathématique*, con un primer capitulo "Description de la mathématique formelle" (1954), dedicado a la metamatemática. "El nivel muy elemental" (Bourbaki) de ella que ha bastado para establecer los fundamentos de la matemática, tal como se presenta esta a mediados del siglo XX, puede ser considerado, sin embargo, como una muestra del desarrollo que alcanzó la axiomática, una vez consumada su separación de la geometría, con la que se la había tenido mezclada desde los griegos: razón para que se expongan aquí las grandes líneas de la descripción bourbakista.

En el artículo acerca de los principios requeridos para hacer matemática, 1949, Bourbaki había escrito: "Declaro que sobre estos fundamentos puedo construir todo el conjunto de la matemática de hoy en día". Bourbaki deja de lado, no solo cuestiones que califica de medio filosóficas, sino, además, los temas para el especialista en metamatemática (ver *Metamatemática*, de Kleene) que no intervienen en la redacción, como él se propone realizarla, de sus *Elementos de Matemática*.

Por la teoría de la demostración o metamatemática se sabe que un sistema formal se compone de

- Signos
- Reglas de formación
- Reglas de transformación
- Axiomas
- Teoremas.

En este capítulo 13 se va a considerar el aspecto que da Bourbaki a estos componentes, no en la edición de 1954, sino en la de 1970. Se tendrá en cuenta igualmente el substancial artículo de 1949.

Por *signo* debe entenderse cualquier trazo escrito como los que se utilizan para transcribir las lenguas corrientes. Una secuencia de signos se llama una *escritura*. *"La matemática formal no involucra sino escrituras explícitamente escritas"*. La matemática formal no es la que el matemático está pensando sino lo que está escrito de la que ya pensó.

Signos

Cuando se dice que una letra x *figura* en una escritura A, debe entenderse que uno de los signos de A es la letra x, lo que significará que A depende en algún modo de x. Los textos de lógica escribirían que x es una variable libre. En 1949, Bourbaki utilizaba aun tal terminología, pero no después. En lugar de variable muda o ligada, escribe que la variable *no figura*. Decir, pues, que la letra x no figura en la escritura A, puede significar dos cosas: una, ninguno de los signos de la escritura A es la letra x; otra, algunos de los signos de la escritura A sí son la letra x, pero los objetos representados por tal letra pertenecen a un conjunto precisado, cuyos elementos pueden ser representados por cualquier letra, o por una casilla vacía, como $\Box$, de modo que A no depende ya de x, sino aparentemente, de ahí la terminología de variable aparente o ligada. Si A es la escritura $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, válida para números cualesquiera, entonces, en A no figuran las letras x, y. La escritura A no se refiere a una propiedad de un par de letras sino a una relación entre pares de números que por comodidad se representan mediante letras.

Bourbaki adapta tres tipos de *signos*: lógicos, letras, signos específicos.

Letras son generalmente las de los alfabetos.

Los *signos específicos* dependen de la teoría considerada: signos de igualdad, $=$, y de pertenencia, $\in$, por ejemplo.

Los *signos lógicos* adoptados por Bourbaki son estos: $\square$, τ, $\vee$, $\neg$. Los dos últimos son los de la *disyunción* y de la *negación*, respectivamente.

Antes de ver los dos primeros signos, es conveniente puntualizar que teóricamente Bourbaki adopta la *notación* del lógico polonés Jan Lukasiewicz, que consiste en colocar los operadores lógicos delante de las letras sobre las cuales operan; esta notación es especialmente indicada para evitar ambigüedades dado que se comienza por dar reglas estrictas para el alcance de los operadores. Así, se escribe $\vee AB$ para la disyunción, $(A) \vee (B)$, de las proposiciones A, B.

Para intuir el uso de los dos primeros signos lógicos puede uno valerse de la siguiente secuencia de observaciones.

- Considerar una escritura A.
- Considerar una letra x.
- τA, en este orden, es también una escritura.
- Trazar una raya que una el signo τ con la letra x donde quiera que esta figure en A.
- Trazar un $\square$ en lugar de cada x.
  Darse cuenta de que en la escritura resultante ya no figura x.
  Designar el resultado mediante $\tau_x(A)$.
  Estar de acuerdo en que $\tau_x(A)$ no contiene x.

Ejemplo. $\tau_x(\in yx)$ representa la escritura $\tau \in \square y$. El cuadrado, $\square$, representa pues a una letra que no figura (variable ligada o muda).

Sea A una aserción que expresa una propiedad del objeto x. Si hay un objeto x que posee dicha propiedad A, entonces, $\tau_x(A)$ representa a dicho objeto.

Este símbolo τ, introducido por Hilbert, es una función electiva; si hay varios individuos con la propiedad A, entonces, $\tau_x(A)$ selecciona a uno de los que tienen tal propiedad sin determinarlo, es decir, sin indicar individualmente cuál. Así, si A es la aserción acerca de números naturales que solo son divisibles por sí mismos y por la unidad, entonces, $\tau_x(A)$, representa a un número primo.

Símbolos abreviadores y definiciones

El uso exclusivo de escrituras conduciría a dificultades tipográficas y mentales insuperables, dice Bourbaki. Es por esto por lo que los textos corrientes utilizan *símbolos abreviadores* que no pertenecen a la matemática formal y para los que se suele emplear palabras del lenguaje ordinario. La introducción de estos símbolos es el objeto de las *definiciones*. Su empleo no es teóricamente indispensable; Bourbaki subraya esta frase y añade que tal uso se presta frecuentemente a confusiones que solamente un cierto hábito permite evitar.

En geometría, por ejemplo, se usan los símbolos abreviadores: diámetro, cuerda, circunferencia. La relación "En una circunferencia, una cuerda que no es un diámetro, es menor que un diámetro", se volvería casi incomprensible si en vez de cuerda, circunferencia y diámetro, hubiera que insertar la descripción de cuerda, circunferencia y diámetro. Con los signos abreviadores se consigue aligerar el enunciado de la relación y fijar más la atención en la relación que en los componentes de su enunciado. Al hacer la demostración habría que emplear la famosa regla de Pascal: "Substitúyanse los entes definidos por sus definiciones".

El papel que las definiciones tienen en metamatemática contrasta con el que desempeñaba en la lógica tradicional donde la definición declaraba la esencia de las cosas. Incluso el matemático en su práctica acude a la definición para saber a qué atenerse en cuanto a la constitución de los objetos matemáticos.

Ejemplos de símbolos que representan escrituras (extensas, por cierto, añade Bourbaki):

- 3 y 4
- $\emptyset$ (conjunto vacío)
- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- La recta numérica
- $f \circ g$
- $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
- $1 \in 2$
- Todo cuerpo finito es conmutativo
- $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Texto matemático formalizado

Bourbaki adopta teóricamente la notación de Lukasiewicz, pero en la práctica la abandona bastante rápido y emplea paréntesis como todo el mundo en el uso de la matemática. En 1949 escribía que lo que caracteriza a un texto matemático es que puede ser formalizado, por lo tanto, traducido en un lenguaje de signos; la metamatemática consiste entonces en fijar el vocabulario y la sintaxis para tal lenguaje. La redacción bourbakista será semiformalizada en cuanto solamente se fijarán las reglas del vocabulario y la sintaxis por si alguien, en la duda, tiene necesidad de formalizar un pasaje. Vale decir que Bourbaki, como su modelo Hilbert por cierto, muestran la posibilidad de la formalización, pero generalmente explican matemática en lenguaje corriente. Para facilitar la lectura dice Bourbaki, se reemplaza

- $\neg A$ por no A
- $\vee AB$ por $(A) \vee (B)$, o por $A \vee B$, o sencillamente por A o B.

Luego introduce otros símbolos abreviadores.

- La escritura $\vee\neg$ se representa por una flecha $\rightarrow$
- La escritura no $\big((\text{no } A) \text{ o } (\text{no } B)\big)$ se designa por (A) y (B) o sencillamente A y B.
- La escritura $(A \rightarrow B)$ y $(B \rightarrow A)$ se designa mediante $A \leftrightarrow B$.

Abuso del lenguaje

En la práctica metamatemática se presenta lo que Bourbaki llama abuso de lenguaje. Por ejemplo, se dice que los símbolos empleados son escrituras en lugar de decir que designan escrituras; en lugar de "la escritura A", se tendría que decir correctamente "la escritura representada por A"; en lugar de "la letra x" habría que decir "la letra designada por x". La décima indicación acerca del modo de empleo del tratado dice:

"Se hizo todo el esfuerzo, sin sacrificar la sencillez de la exposición, para servirse siempre de lenguaje rigurosamente correcto. En cuanto ha sido posible, los *abusos de lenguaje*, sin los cuales todo texto matemático corre el riesgo de volverse pedantesco e incluso ilegible, han sido señalados al presentarse".

Teoría

Una teoría matemática contiene reglas que permiten decir que ciertas escrituras son

$$\left.\begin{array}{l}\text{términos}\\ \text{relaciones}\\ \text{teoremas}\end{array}\right\}\quad \text{de una teoría}$$

La descripción de tales reglas es objeto de la metamatemática, desde luego.

Una escritura es un *término* si

- comienza por un τ
- se reduce a una letra

Una escritura es una *relación* si comienza por: $\vee$, $\neg$, $=$, $\in$.

Esta caracterización se refiere a la notación polonesa. En 1949, y en el Fascículo de Resultados de la teoría de conjuntos, describe la manera de construir relaciones.

Intuitivamente, dice el mismo Bourbaki, los términos son escrituras que representan objetos, las relaciones son escrituras que representan aserciones acerca de los objetos.

Toda letra es un término.

Los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, "la recta numérica", $f \circ g$, representan términos. Los símbolos $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 \in 2$, "todo cuerpo finito es conmutativo" representan relaciones. El símbolo "3 y 4" no representa ni un término, ni una relación.

Criterios

Es otra simplificación para aligerar la redacción de un texto matemático. Ya se tienen las escrituras, pero no se ha estatuido si todas pueden entrar en consideración y de qué manera. Este es papel de los *criterios*, elementos metamatemáticos que permiten decidir qué escrituras son aceptables por estar bien formadas o por ser el resultado de modificaciones dentro de una de ellas o entre dos o más de ellas. Cada criterio fija el resultado final de una sucesión determinada de manipulaciones sobre escrituras indeterminadas dice Bourbaki.

$$\left(\left\{\begin{array}{l}\text{Escrituras}\\ \text{indeterminadas}\end{array}\right\},\left\{\begin{array}{l}\text{Sucesión}\\ \text{determinada}\\ \text{de manipulaciones}\end{array}\right\}\right)\xrightarrow{\textit{Criterios}}\left\{\begin{array}{l}\text{Resultados}\\ \text{admisibles}\end{array}\right\}$$

Los criterios pueden clasificarse sinópticamente así:

$$\text{El } \textit{criterio} \left\{\begin{array}{l}\text{Substitutivo}\\ \text{Formativo}\\ \text{Esquema}\\ \text{Deductivo}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\textit{determina}\\ \textit{qué}\\ \textit{escrituras}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\bullet\ \text{han sido bien reemplazadas}\\ \bullet\ \text{son } \begin{array}{l}\text{términos}\\ \text{relaciones}\end{array}\\ \bullet\ \text{son axiomas}\\ \bullet\ \text{son teoremas}\end{array}\right.$$

Los criterios, como ya las definiciones, subvienen a la imposibilidad práctica de escribir una matemática totalmente formalizada, es decir, donde solo figuren escrituras explicitadas. El criterio fija el manejo de los símbolos simplificadores, es decir, del lenguaje simbólico. Por tanto, los criterios como las definiciones son instrumentos metamatemáticos no indispensables teóricamente. Hay criterios porque hay simplificación del formalismo.

Los criterios *substitutivos* indican cuándo unas escrituras pueden ser reemplazadas por otras correctamente.

Los criterios *formativos* indican escrituras admisibles o bien formadas según la expresión consagrada en lo textos de lógica.

Para expresar lo relativo a esquemas y criterios deductivos hay que ocuparse antes de los axiomas. Bourbaki distingue axiomas explícitos y axiomas implícitos.

Axiomas

Por *axiomas explícitos* se designa un cierto número de relaciones de la teoría explícitamente escritas. Este lenguaje metamatemático quiere decir en lenguaje corriente que se dan, sin más argumentación o justificación. Este es uno de los hechos que más hay que tener en cuenta para ver la diferencia entre la axiomatización de Hilbert y Bourbaki respecto de la argumentación de Euclides. En *Elementos* y generalmente cuando se habla de axiomatización en el sentido de *Analíticos* de Aristóteles, incluso en el habla cotidiana, un axioma es un enunciado absolutamente evidente. Bourbaki advierte que *"intuitivamente, los axiomas representan, ora aserciones evidentes, ora hipótesis a partir de las cuales uno se propone sacar consecuencias"*, es decir, la evidencia no es condición para que un enunciado pueda servir como axioma. Incluso llega a escribir: *"Para qué decir que no hay punto común alguno entre el uso de la palabra axioma (en la matemática formalizada) y el sentido tradicional de verdad evidente"*. Se dice a veces que la selección de axiomas es arbitraria o que el matemático es libre; en realidad, el axiomatizador está diversamente condicionado: por la historia de la disciplina, por la finalidad de su exposición (el desarrollo de una teoría en un curso está limitado por el tiempo, un tratado por el número de páginas; no es lo mismo un escrito para el desarrollo de una teoría que uno que se proponga establecer los fundamentos). Estos motivos u otros análogos y algunos más que tienen que ver con la formación personal del matemático inducen a considerar sin exageraciones la libertad en el escogimiento de los axiomas.

Se llama *axioma implícito* de la teoría a toda relación formada mediante la aplicación de un esquema.

Se llama *esquema* de la teoría a una regla o procedimiento que suministra relaciones de la teoría, es decir, proposiciones de la teoría que ya no necesitan ser establecidas de otra manera.

Constantes

Son las letras que figuran en los axiomas explícitos.

Las constantes representan objetos bien determinados, para los cuales se suponen verdaderas las propiedades expresadas por los axiomas explícitos.

La teoría de conjuntos de Bourbaki (1970) tiene cuatro axiomas. Ninguno de estos cuatro axiomas explícitos contiene letras, es decir, "la teoría de conjuntos es una teoría sin constantes" (E II 1).

En teoría de grupos, los axiomas explícitos contienen dos constantes, a saber el grupo y la operación entre sus elementos (E I 24).

Texto demostrativo

Se llama así al texto conformado por una *construcción formativa auxiliar* hecha con relaciones y términos de la teoría, y por una demostración.

Una *demostración* es una secuencia de relaciones de la teoría que figuren en la construcción formativa auxiliar, tales que, para cada relación R de la secuencia se verifique alguna, por lo menos de las condiciones

- R es un axioma explícito de la teoría.
- R es el resultado de aplicar un esquema de la teoría a términos o relaciones que figuren en la construcción formativa auxiliar.
- En la secuencia, hay dos relaciones S, T que anteceden a R tales que T sea la relación $S \to R$.

Teorema

Un teorema de la teoría es una relación que figura en una demostración de la teoría.

Ser un teorema es una noción esencialmente relativa al estado de la teoría, en el momento en que se la describe. Una relación deviene un teorema, se convierte en un teorema, por el hecho de llegar a figurar en una demostración de la teoría.

En vez de teorema, se utilizan en la práctica matemática los vocablos: proposición, lema, corolario.

Se dice que una relación es *falsa* en la teoría, si su negación es un teorema de la teoría. Se dice que una teoría es *contradictoria* cuando se ha llegado a escribir una relación que es a la vez verdadera y falsa en la teoría.

Comparación de teorías

Una teoría T' es más fuerte que una teoría T

$$\text{si todo} \left\{ \begin{array}{l} \text{signo de } T \\ \text{axioma explícito de } T \\ \text{esquema de } T \end{array} \right\} \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \text{signo de } T' \\ \text{axioma explícito de } T' \\ \text{esquema de } T' \end{array} \right\}$$

Dos teorías son *equivalentes* si cada una es más fuerte que la otra.

Criterios deductivos

Son criterios metamatemáticos que permiten simplificar las demostraciones.

En la segunda columna del cuadro siguiente se ve el número de criterios introducidos por Bourbaki en el capítulo I, *Descripción de la matemática formal*, y en la tercera columna, el número de criterios introducidos en los capítulos I, II, III, (II. *Teoría de Conjuntos*. III. *Conjuntos ordenados, cardinales, números enteros*. En el capítulo, IV. *Estructuras*, Bourbaki introduce veintitrés criterios específicos).

Al comenzar el capítulo II Bourbaki señala que no explicitará más criterios substitutivos y formativos que deberían enunciarse luego de cada definición pero que tales criterios serán con frecuencia utilizados implícitamente en las demostraciones.

	Capítulo I	*Capítulos I, II, III*
Criterios substitutivos	11	12
Criterios formativos	12	13
Esquemas	7	8
Criterios deductivos	47	63

El hecho de que haya criterios explicitados no en el capítulo acerca de la matemática formal sino en el segundo y el tercero indica que tales criterios tienen que ver específicamente con la teoría de conjuntos.

Enunciado de algunos criterios

Para tener una idea de la manera como los criterios contribuyen a la conformación general del sistema formal o teoría, no hay cosa mejor que transcribir algunos de los que no son demasiado técnicos. Los más fácilmente enunciables en el lenguaje corriente son los *criterios formativos*.

CF 1. Si A y B son relaciones de una teoría, $A \vee B$ es una relación de la teoría. De otra manera: la disyunción de dos relaciones es una relación. En lenguaje más formalizado: Si A y B son relaciones de una teoría, $\vee AB$ es una relación de la teoría, es decir, el signo $\vee$ es inicial de relaciones.

CF 2. Si A es una relación de la teoría, no A es una relación de la teoría. Es lo mismo que decir que el signo $\neg$ es inicial de relación, o, que una letra con el signo $\neg$ antepuesto es una relación.

CF 3. El signo τ introduce términos. Es decir, si A es una relación de la teoría y x es una letra, entonces, $\tau_x(A)$ es un término de la teoría.

Ejemplo. Si A es la relación $x^2 - 5x + 6 = 0$ entonces $\tau_x(A)$ es 2, o es 3.

CF 4. Si a dos o más términos se aplica un signo específico, se obtiene una relación. Pensar en la igualdad de dos términos; o en la igualdad, contenencia, o pertenencia entre dos conjuntos (un conjunto es un término. E II 1); en el promedio aritmético de números reales.

CF 5. Si A y B son relaciones de una teoría, entonces, el condicional formado con ellos, $A \to B$ (si A entonces B) es una relación; es decir, el signo $\to$ (abreviación de $\vee\neg$) introduce relaciones.

CF 6. Dada una construcción formativa de escrituras, se obtiene otra construcción formativa al substituir en cada una de ellas una misma letra por otra (la misma en las n escrituras) a condición de que la que reemplaza no figure en ninguna de las escrituras.

CF 7. La substitución de una letra por otra en una relación o en un término es una relación o un término respectivamente.

CF 8. La substitución de una letra por un término en una relación o en un término es una relación o un término respectivamente.

CF 9. La conjunción de dos relaciones, es una relación.

CF 10. La equivalencia de dos relaciones, es una relación.

CF 11. Una relación, en la cual se ha cuantificado una letra (es decir, se ha determinado la extensión de una variable) es una relación.

CF 12. Sean A y R relaciones que expresan cada una alguna propiedad del objeto x. Decir que existe por lo menos un objeto x para el cual se verifica A tal que verifica también la propiedad R es lo mismo que decir que existe por lo menos un x tal que verifica A y R. Decir que todos los objetos que verifican A tienen la propiedad R, es lo mismo que decir que no (existen x que verifiquen A) tales que no verifiquen R.

CF 13. La expresión de la inclusión de dos términos es una relación.

Cuantificadores

Si R es una escritura y x una letra, la relación 'existe un x tal que R' se escribe '$(\exists x)R$'. El símbolo abreviador $\exists$ se llama *cuantificador existencial.*

Para decir que cualquier objeto es tal que se cumple R, se escribe *no* $\big((\exists x)(\textit{no } R)\big)$, se lee: 'para todo x, R', o, 'cualquiera sea x, R', y se abrevia '$(\forall x)R$'. El símbolo abreviador $\forall$ se llama *cuantificador universal.*

Las letras afectadas por los símbolos abreviadores $\exists$, $\forall$ no figuran en la escritura resultante. Queda precisado un conjunto cuyos elementos son representados por una letra cualquiera.

Como *esquemas* se pueden considerar los cuatro primeros. Intuitivamente, dice Bourbaki, se trata de reglas que expresan el sentido que se asocia a las palabras *o* e *implica* en el lenguaje matemático usual.

S 1. Si A es una relación de una teoría, la relación $(A \text{ } o \text{ } A) \to A$ es un axioma de la teoría.

S 2. Si A y B son relaciones, la relación $A \to (A \text{ } o \text{ } B)$ es un axioma de la teoría.

S 3. Si A y B son relaciones, la relación $(A \text{ } o \text{ } B) \to (B \text{ } o \text{ } A)$ es un axioma.

S 4. Si A, B, C son relaciones, la relación $(A \to B) \to \big((C \text{ } o \text{ } A) \to (C \text{ } o \text{ } B)\big)$ es un axioma de la teoría.

Estas cuatro reglas corresponden a los cuatro axiomas de Russell y Whitehead para el cálculo proposicional en *Principia Mathematica.* En Bourbaki, los esquemas son una especie de nociones comunes que dan relaciones siempre válidas para toda la matemática formal. Estos son los axiomas implícitos. Bourbaki llama axiomas explícitos a las cuatro relaciones postuladas para desarrollar específicamente la teoría de conjuntos, lo que recuerda, como ya se insinuó, a Euclides cuando llama postulados a enunciados asumidos dentro de la geometría, es decir, en el lenguaje de la geometría para desarrollar la geometría a partir de ellos.

Entre los criterios deductivos es interesante señalar, el primero, llamado silogismo por Bourbaki.

CD 1. Sean A y B relaciones de una teoría. Si A y $A \to B$ son teoremas de la teoría, entonces, B es teorema de la teoría.

Así, pues, formalmente aparece como primer criterio metamatemático para abreviar demostraciones, uno de los principios de argumentación destacados a lo largo de toda la historia de la lógica; a veces se le da su apelativo escolástico de *modus ponens* porque afirma la tesis afirmando cada una de las dos premisas. Con más justicia histórica (si hay algo por el estilo) debe llamarse primer esquema de inferencia estoico, pues era el primero de los cinco grandes tipos de demostración entre esos célebres lógicos griegos.

Útil e importante, tanto desde el punto de vista de los fundamentos como desde el punto de vista del matemático práctico es el siguiente criterio deductivo.

CD 4. Si una teoría es más fuerte que otra, menos fuerte (expresión no empleada por Bourbaki), entonces, todos los teoremas de la teoría menos fuerte son teoremas de la teoría más fuerte.

La teoría de grupos es más fuerte que la de conjuntos, por tanto a la de grupos se aplican todos los resultados de la de conjuntos. En el cuadro sinóptico de las cinco geometrías la isométrica es más fuerte que las otras cuatro. Tiene, en particular, más teoremas, pero valen en ella todos los teoremas de las cuatro geometrías más débiles; en cambio, el teorema de Pitágoras, por ejemplo, no vale en geometría afín.

La transitividad de la implicación es el enunciado del sexto criterio deductivo.

CD 6. Sean A, B, C relaciones de una teoría. Si $A \to B$ y $B \to C$ son teoremas de la teoría, entonces $A \to C$ es un teorema de la teoría.

CD 7. Si A y B son relaciones, entonces, $B \to (A \textit{ o } B)$ es un teorema.

CD 8. Si A es una relación, $A \to A$ es un teorema.

CD 9. Si A es una relación y B un teorema, entonces, $A \to B$ es teorema.

CD 10. Si A es una relación, $A \textit{ o no} A$ es un teorema.

Por este criterio, el *tercero* está *excluido*. Una relación de la teoría o es un teorema o es una relación falsa.

CD 11. Si A es una relación, $A \to (\textit{no no} A)$, es un teorema.

Por este criterio, la *negación de la negación* de una relación es equivalente a la relación misma.

CD 12. Sean A y B dos relaciones. La relación $(A \to B) \to (\textit{no} B \to \textit{no} A)$ es un teorema. Es la propiedad de la *contrarrecíproca*.

Hay cuatro criterios deductivos, destacados por Bourbaki como métodos de demostración con nombre propio. Se transcriben tres.

El primero, *método de la hipótesis auxiliar*, se basa en este criterio.

CD 14. (Criterio de la deducción). Sean A una relación de una teoría T y T' la teoría obtenida al añadir A a los axiomas de T. Si B es un teorema de T', entonces, $A \to B$ es un teorema de T.

El método de *reducción al absurdo* se basa en el siguiente criterio.

CD 15. Sean A una relación de T y T' la teoría obtenida al adjuntar *no* A a los axiomas de T. Entonces, si T' es contradictoria, A es un teorema de T.

Este método de demostración remonta en la historia hasta Parménides, en cuyo poema se encuentran dos ocurrencias explícitas; luego, Zenón de Elea hizo de él su principal arma de combate. A principios del siglo XX fue cuestionado por el intuicionismo de Brouwer. Se encuentra aplicado en *Elementos*; por ejemplo, I 14, 19, 26, 27, 29.

El tercer método, de la *disyunción de casos*, se basa en el siguiente criterio.

CD 18. Sean A, B, C relaciones. Si A *o* B, $A \to C$, $B \to C$ son teoremas, entonces, C es un teorema.

Una primera ocurrencia de este razonamiento, es en la anécdota de Protágoras y su discípulo Euazlo (Kneale. *El desarrollo de la lógica*. p. 12. En *Introducción a la lógica*, de Copi, p. 274, han transcrito Eulato).

Dado que no se trata aquí de un curso de lógica, no hay para que dar más que unas muestras de estos criterios, pues lo que interesa es el enfoque de la lógica que se supone requiere un matemático actualmente. A ello contribuye el siguiente cuadro sinóptico.

Teorías	*Signos*	*Esquemas que dan axiomas implícitos*	*Axiomas explícitos*
Lógicas	$\neg$, $\vee$	S_1, S_2, S_3, S_4	
Cuantificadas	$\square$, τ	$S_1, \ldots, S_4, S_5$	
Igualitarias	$=$	$S_1, \ldots, S_5, S_6, S_7$	
De conjuntos	$=$, $\in$	$S_1, \ldots, S_7, S_8$	A_1, A_2, A_3, A_4

Cuestiones

1. Un mismo cálculo algebraico, como cualquiera lo sabe, puede servir para resolver problemas que tienen que ver con kilogramos o con monedas, con parábolas o con

movimientos uniformemente acelerados. Esta misma ventaja está asociada a todo texto axiomático (Bourbaki).

Buscar sendas ocurrencias en cada uno de los cuatro casos enumerados.

2. "No pretendemos legislar para la eternidad". ¿Asegura Bourbaki que los tres tipos de estructura considerados por él son inmodificables? ¿O que su concepción de la matemática es la única?

3. El cálculo algebraico, según Bourbaki, es el ejemplo más conocido de una formalización parcial, particular e incompleta. Tratar de ver por qué.

4. Los matemáticos eliminan las "paradojas" de la teoría de conjuntos mediante la adopción de un lenguaje formalizado. ¿Por qué este hecho es un enriquecimiento y no un empobrecimiento de la matemática?

5. Hacer la teoría axiomática de una estructura, es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, con exclusión de toda otra hipótesis acerca de los elementos considerados en particular, de toda hipótesis sobre la "naturaleza de la estructura" (Bourbaki).
   Analizar cada uno de los términos de esta descripción.

6. En la axiomatización a la manera de Bourbaki no se estudia el concepto de conjunto, ni la naturaleza de sus elementos sino la estructura que pueda determinar sobre sus elementos una o varias operaciones. ¿Por qué este enfoque es favorable para las aplicaciones de la matemática?

7. Bourbaki dice que la matemática formalizada es una cantera de formas abstractas. ¿Cómo se utilizan los elementos de esa cantera para las aplicaciones? El matemático producirá más si tiene libertad para escoger axiomas con el fin de construir estructuras o si anda detrás del físico para tratar de ver qué situación estudiada por éste necesita una explicación propiamente matemática

8. Cuando se cuentan las páginas de un libro sobre fundamentos de matemática, cuando se cuentan los signos, las reglas o las palabras, en general, cuando se emplea la numeración mientras se hace la descripción del lenguaje formalizado, ¿se está incurriendo en petición de principio? Ver por qué se puede pensar en una respuesta afirmativa o en una negativa. Ambas opiniones han sido expresadas.

9. El razonamiento lógico o matemático solamente es posible a través de un proceso de abstracción, mediante la construcción de un modelo matemático (Bourbaki). ¿Se muestra de acuerdo Bourbaki con la opinión de quienes (¿podría nombrar a algunos?) piensan que solo en lógica y matemática hay demostraciones propiamente dichas?

10. En los textos demostrativos que figuran en el primer volumen de esta obra (Capítulo 9) trate de reconocer el método de demostración utilizado, entre los transcritos en este capítulo 13.

Bibliografía

1. BOURBAKI, Nicolas. *Foundations of mathematics for the working mathematician.* The Journal of Symbolic Logic. Volume 14. Number 1. March. 1949. pp. 1-8.

2. BOURBAKI, Nicolas. *Éléments de Mathématique. Théorie des Ensembles.* (Volume relié) 1970. Paris. Hermann.

3. CAMPOS, Alberto. *Introducción a "La description de la mathématique formelle" de N. Bourbaki.* (1959). 1964. Bogotá. Universidad Nacional de Colombia y Sociedad Colombiana de Matemáticas. *iv* + 55 pp.

> Los matemáticos han estado persuadidos siempre de que demuestran "verdades" o "proposiciones verdaderas"; evidentemente tal convicción no puede ser sino de orden sentimental o metafísico; no es desde el terreno de la matemática desde donde se la puede justificar; ni siquiera se le puede dar un sentido que no sea una tautología.
>
> Bourbaki. *Éléments d'histoire des Mathématiques.* p. 21

Capítulo 14

Experiencia, intuición, axiomatización

Las leyes numéricas no son, en realidad, aplicables al mundo externo, no son leyes del mundo externo. Son, sin embargo, aplicables a los juicios, cuando estos son verdaderos respecto de cosas del mundo externo: son leyes de las leyes de la naturaleza. Afirman conexiones, no entre fenómenos naturales, sino más bien entre juicios; y juicios son, las leyes de la naturaleza.

[Frege. p. 107. *Benacerraf-Putnam. Philosophy of mathematics.* 1964. Englewood cliffs NJ. Prentice Hall.]

A. Bourbaki, Piaget, Thom

El presente capítulo será más bien esquemático, concierne a temas demasiado extensos; pero, no es posible no situar la evolución de la geometría y de la axiomática respecto de ellos. Bourbaki representa la matemática en la máxima abstracción; pero es conveniente insistir en que no es una obra aislada sino una que corona un desarrollo. Para verlo mejor, se impone un enfoque panorámico y nada mejor que la visión unificadora de Piaget para suministrar uno.

Bourbaki y Piaget

¿Cuál es la relación? Es difícil precisarla, de hecho. El estructuralismo del que se ocupa Piaget no es el matemático, aunque este aparezca a veces como paradigma en algunas divulgaciones. Ambos investigadores recorrieron independientemente sus caminos. Bourbaki deductivamente dentro de su universo matemático: Piaget inductivamente, como psicólogo experimental mediante su método mayéutico de preguntas apropiadas y progresivas, observación minuciosa de las respuestas de los niños y los adolescentes, para elaborar con base en tal material esquemas puestos a prueba una y otra vez; los cuales, es cierto, no han logrado aceptación general.

Solamente en 1952 durante el Coloquio de la Rochette près Melun, en las cercanías de Paris, vinieron a encontrarse Piaget y un bourbakista de dedicación exclusiva como Dieudonné: allí confrontaron sus puntos de vista.

Bourbaki ha destacado tres grandes tipos de estructuras: algebraicas, ordinales, topológicas; pero ha subrayado que nada permite afirmar que haya únicamente esos tres tipos. Piaget, por su parte, ha introducido, para la cabal explicación del funcionamiento intelectual humano tres operaciones mentales claves: reciprocidad, R; correlación, C; negación (inversión), N; estas operaciones pueden ser aplicadas a una cualquiera de las operaciones binarias entre proposiciones; por ejemplo, sobre el condicional , $p \to q$, es decir, $(\text{no}\, p) \vee q$, operan así:

$R\big[(\text{no}\, p) \vee q\big] = p \vee (\text{no}\, q)$. Cambia el valor de las proposiciones.
$C\big[(\text{no}\, p) \vee q\big] = (\text{no}\, p) \wedge q$. Cambia la operación entre las proposiciones.
$N\big[(\text{no}\, p) \vee q\big] = p \wedge (\text{no}\, q)$. Cambia el valor de las proposiciones y la operación entre las proposiciones.

Al añadir la identidad, I, Piaget obtiene (1949) cuatro operaciones, con una estructura de grupo del tipo 4 de Klein: es el grupo de Piaget.

	I	R	C	N
I	I	R	C	N
R	R	I	N	C
C	C	N	I	R
N	N	C	R	I

Con el grupo de Piaget, el estructuralismo se muestra productivo también en psicología.

Desde el punto de vista de Piaget, el estructuralismo está en la confluencia de la tendencia matemática originada en los grupos de Galois (1832) y de la tendencia originada en Fernand de Saussure y acrecida por Levi-Strauss, entre otros. El estructuralismo es un método, no una filosofía.

Quizá la intención de mostrar la generalidad de la explicación estructuralista, movió a Piaget a buscar un parentesco entre las tres operaciones fundamentales del grupo de Piaget y las tres grandes estructuras bourbakistas: En la epistemología genética es muy importante la idea de reversibilidad. Distingue tres tipos de reversibilidad: por inversión, es la operación indica da por N y que corresponde a las estructuras algebraicas; por reciprocidad, es la operación designada por R y corresponde a las estructuras ordinales; por correlación, contrarreciprocidad o dualidad, es la operación designada por C y que correspondería a las estructuras topológicas.

Piaget y Thom

El hecho de haber intentado establecer ese puente entre la psicología de Piaget y la matemática de Bourbaki ocasionó ácidas críticas a Piaget, de parte de René Thom, no afecto al formalismo bourbakista. [Las proposiciones esenciales de la argumentación de Thom aparecen en las páginas 125-126 de *Educación Geométrica*]. Lo interesante es que en el curso de la argumentación, Thom produce ciertas explicaciones más aprovechables que la crítica propiamente dicha. Vale la pena destacarlas:

"la misma razón tiene en el ser humano raíces biológicas", aseveración que está en perfecto acuerdo con Piaget. "El pensamiento matemático se originó en la necesidad mental de simular la realidad exterior", es una formulación de clarividencia paradigmática.

Igualmente notable es el párrafo siguiente:

> "En la realidad externa, algunos procesos locales, de naturaleza física o biológica, están sujetos a un determinismo sumamente estricto, mientras que otros son aleatorios, es decir, no pueden ser previstos con precisión. El sistema nervioso animal, y por tanto el humano, se han especializado muy rápidamente en la simulación de procesos externos bien determinados; por otro lado, resultaría, inútil simular procesos aleatorios, puesto que (por definición) su desenlace es imprevisto. De este modo, la mente llegó a aislar en seguida un cierto número de situaciones dinámicas típicas, con un resultado predecible, en tanto que sujetas a un determinismo riguroso (dinámicamente estable). Estos modelos de conflicto, organizados según una clasificación de procesos eficaces, constituyeron las primeras situaciones "comprendidas" por el ser humano (citemos el ejemplo de la captura de la presa por el perseguidor) y formaron el "núcleo de la inteligibilidad de la realidad" (en frase de J. Ladrière). Pero, la mente tiene la tendencia, una vez que ha asimilado una fórmula que "funciona bien", a extrapolar las condiciones de aplicación de esta fórmula y a insistir en

su empleo (como el perro de Pavlov que segrega saliva al oir la campana). A partir de aquí, surge una propensión a aislar procesos repetibles, que pueden ser combinados entre sí tantas veces como queramos. Este es el origen de la matemática, que es la ciencia de la repetición de automatismos".

Así, pues, el matemático René Thom propone una explicación, para la inteligencia, que se funda en la biología.

El zoólogo-biólogo-psicólogo Piaget, ha propuesto sistemáticamente la biología como raíz de toda la creación intelectual humana, en particular de la matemática.

El dinamismo de la inteligencia, según Piaget.

La procedencia biológica de la capacidad para razonar o, como dice Piaget, el paso del instinto a la inteligencia, permite explicar con más verosimilitud: el origen histórico de la matemática; el desarrollo lento de ésta; su carácter (inconfesable por partidarios de Platón y hay muchos entre los matemáticos profesionales que dejan a un lado lo que no sea su especialidad) de relatividad como conviene a todas las creaciones humanas; la coincidencia entre muchos sucesos y lo que matemáticamente se sabe de ellos. Respecto de este punto, el pensamiento podría interpretarse como una especie de conciencia de la naturaleza: el ser humano no solo siente sino que, además, es consciente o adivina todo lo que está dentro de ella porque está sumergido en ella. Heidegger decía que la matemática es lo patente que hay en las cosas; frente a la hipótesis evolutiva de los sucesos intelectuales, en particular, matemáticos, y a la concordancia de ellos con la realidad, son mucho menos satisfactorias, la de la armonía preestablecida de Leibniz, o la de simple constatación de ignorancia, de Bourbaki.

Sin ahondar en el tema, profusamente tratado por Piaget, del funcionamiento intelectual humano, es pertinente, sin embargo, para parte de un explicación en el siguiente capítulo, tener aquí en cuenta sus grandes líneas. Como fundamento de todo, aparecen, desde luego, los objetos. El eje de un cuadro sinóptico (con el que es cierto se corre el riesgo de mal interpretar a Piaget) lo constituye el concepto de interiorización; las dos columnas resultantes están en lugar de las dos grandes esferas de lo real y de lo posible.

Lo real		*Lo posible*
• Experiencia logicomatemática	INTERIORIZACIÓN	• Dinamismo de la inteligencia
• Abstracción aristotélica o empírica		• Abstracción logicomatemática
• Experiencia física		• Operaciones mentales
• Coordinación de acciones		• Coordinación de representaciones
• Acciones		• Representaciones
OBJETOS		

Someras explicaciones (recogidas en Piaget) sobre los términos empleados en el cuadro son las siguientes:

La *experiencia física* se compone de acciones sobre los objetos para descubrir sus propiedades físicas.

La *experiencia logicomatemática* consiste en coordinaciones de acciones sobre los objetos.

Poco a poco se producirá un proceso de interiorización en cuanto que ya no será necesaria la realización de las acciones sobre los objetos sino que bastará la representación (mental) de ellas.

En las actividades de interiorización intervienen desde luego las de coordinación, esta vez, de las representaciones.

Las operaciones mentales que intervienen en el razonamiento provienen de las acciones: son acciones interiorizadas.

Los casos reales cederán el primer lugar a los casos posibles.

La coordinación de acciones y la experiencia logicomatemática al interiorizarse hacen posible la *abstracción logicomatemática.*

La abstracción aristotélica o empírica se efectúa sobre las propiedades físicas de los objetos.

La abstracción logicomatemática refleja cuanto se encuentra en el plano de la acción y lo proyecta sobre el plano de la representación mental, por una parte. Por otra, es una abstracción reflexiva en cuanto reorganiza lo que llega al plano de la representación mental y reconstruye los datos obtenidos a nivel de coordinación de acciones: es el dinamismo de la mente.

La deducción es ya un proceso completamente interiorizado.

La esfera de lo real abarca todo lo concreto, observable mediante los cinco sentidos humanos o mediante todo tipo de aparatos de laboratorio construidos por los seres humanos; sin ninguna seguridad de que el ser humano haya sondeado todo lo que habría de llamarse concreto (cuando lo sea); más aun, de que pueda sondearlo en algún tiempo futuro, supuesto incluso un desarrollo ininterrumpido de sus posibilidades.

La esfera de lo posible se extiende a todo lo pensable lógicamente , es decir, sin contradicción; ello corresponde al conjunto de partes. Este concepto tiene un papel protagónico en la subordinación piagetiana de lo real a lo posible.

Para todos los detalles, puede consultarse, uno cualquiera de los títulos de Piaget, en la bibliografía.

B. Experiencia, intuición, axiomatización

En las páginas que siguen aparece una adaptación, si así puede decirse, de las ideas generales que anteceden, al caso matemático; tal explicación se hizo indispensable no solo en la docencia, sino igualmente al tratar de entender diversas actitudes respecto de la matemática o la de personas, por ejemplo, que se preguntan cuál sería una manera de abordarla; las de algunos matemáticos, al hablar de su ciencia. Cuando Bourbaki, escribe: “Desde los griegos, quien dice matemática, dice demostración” parece que quisiera restringir el prestigioso calificativo a la sola matemática axiomática. [No hay tal. En la primera página de *Elementos de historia de la matemática*, escribe Bourbaki: “Que haya habido una matemática prehelénica muy desarrollada es algo que no puede ser puesto en duda actualmente”]. Otras personas pueden tener la misma duda, sin acertar con el texto que les pueda suministrar una respuesta. El enfoque ‘experiencia, intuición, axiomatización’ puede servir de orientación.

Es fácil advertir, cuando se reflexiona acerca de la adquisición progresiva de una determinada disciplina de naturaleza deductiva, tres tipos de aserciones bastante diferentes: las que se basan en la experiencia, las forjadas por la intuición, las que son tales que pueden deducirse unas a partir de otras. Una descripción de cada tipo permite destacar como tesis la diferencia entre ellos y una ruptura de lo axiomático respecto a lo experimental y lo intuitivo.

Experiencia

Conocimientos experimentales son los de la práctica, los de los sentidos, los así llamados del sentido común, los de laboratorio... En general, todos aquellos que son hechos o casos particulares de alguna relación. Y que sirva esto último como característica, si alguna se puede dar. Así son los conocimientos de la vida diaria: la cantidad anual de lluvia en algún lugar dado del planeta, el número de accidentes sobre una ruta de vacaciones, el de los habitantes del mundo, el de los millones dilapidados en la teoría de la destrucción, o el de las rosas florecidas en una primavera si es que se cultiva bien un jardín.

Una relación matemática, es decir, una relación expresada en el lenguaje que usualmente emplean los matemáticos, es verdadera experimentalmente, cuando apenas se sabe que ella es caso particular de una teoría, que no se conoce como tal, es decir, en su desarrollo interno, sino solamente como información de diccionario. Así es cualquier dato que se haya obtenido por substitución en una relación, de la que se puede saber por testimonio ajeno que es teorema, aunque se ignore cómo sea teorema porque no hay ninguna idea de la manera de insertarla en una teoría axiomatizada.

Otra verdad matemática experimental es la obtenida por comparación con un modelo. Por ejemplo, la escuadra es un triángulo rectángulo universalmente aceptado y que figura entre los utensilios de trabajo de quienes, por oficio, practican la geometría, casi siempre sin conocerla. Tres segmentos de longitudes respectivas, tres, cuatro, cinco, (cualquiera sea la unidad de medida), forman, de manera única, un triángulo rectángulo verificable con la escuadra. También pueden utilizarse provisionales patrones de medida. Se sabía ya antes de los griegos que el volumen de un cono circular recto es la tercera parte del volumen del cilindro circular recto en el que pueda inscribirse: lo cual había sido obtenido experimentalmente por medición de las capacidades respectivas.

Las aproximaciones efectivamente calculadas de números reales son verdades de tipo experimental para la absoluta mayoría de la gente. Sólo quien sabe cómo se construyen las sucesiones aproximantes de las que las aproximaciones en cuestión son términos, tiene de ellas un conocimiento axiomático.

Desde muy antiguo se sabe experimentalmente que la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro es un número comprendido entre 3,1 y 3,2. Tal vez el primer hombre en saberlo axiomáticamente haya sido Hipócrates de Quíos.

Históricamente, fueron verdades matemáticas, experimentalmente conocidas, las de civilizaciones anteriores a lo griegos de los tiempos de Pitágoras, o las análogamente sabidas posteriormente.

En matemática, la experiencia por excelencia es el cálculo.

Los resultados son de tipo experimental lo mismo que los que se obtienen en la escuela primaria con las cuatro operaciones del campo racional, o en la secundaria mediante la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, o por aplicación de la noción de límite, en la enseñanza universitaria; en esta, el cálculo sigue teniendo marcada importancia: el aprendizaje de la teoría se atestigua gracias al cálculo y se hace con miras a aplicaciones, que se reducen simplemente a cálculos. Al tratar de resolver ecuaciones algebraicas o diferenciales se puede proceder por tanteo, lo cual es una especie de experimentación. En la exposición de una teoría, por abstracta que sea, se recurre frecuentemente a ejemplos como a una experiencia que ayude a poner el pie en un terreno desconocido, tanto más eficaces cuanto más próximos a hechos o conocimientos previos. Investigaciones avanzadas pueden comenzar por el análisis de una situación bien concreta de la cual se han estudiado todos los pormenores; de este modo, ella sirve como experiencia motivadora.

Para los griegos, para el mismo Aristóteles, la matemática se ocupaba ante todo de relaciones. Sin embargo, durante los siglos posteriores, quiso reservársele el estudio de la categoría aristotélica de la cantidad, opinión de la cual participaban incluso muchos matemáticos, por lo menos todos aquellos que eran reacios a una matemática que se podría llamar cualitativa. La tendencia que domina actualmente comenzó a manifestarse desde los años treinta del siglo XIX con la divisa de Lejeune-Dirichlet: *"Substituir el cálculo por las ideas"*. Una manera de expresar esa tendencia es la de Poincaré en la frase siguiente:

"Los matemáticos no estudian los objetos sino las relaciones entre los objetos; por lo tanto, les es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal de que no cambien las relaciones. La materia no les importa, sólo les interesa la forma".

Eddington expresa mejor la concepción actual de la matemática al pensar que ella se ocupa de relaciones entre relaciones entre objetos, pues no otra cosa son las estructuras, gracias a las cuales se la expone hoy en día.

Aún desde el punto de vista meramente cuantitativo, raras son las fórmulas, por ejemplo, a la cuales puede llegarse por la sola experiencia; se necesita la intuición para haber de generalizarla como conviene y la axiomatización para saber cuáles son las condiciones de validez.

Intuición

Según Bourbaki (*L'architecture des mathématiques*):

"El matemático no trabaja maquinalmente como el obrero en la fábrica; nunca se insistirá demasiado sobre el papel fundamental que juega, en sus investigaciones, una intuición particular (intuición que por cierto se equivoca frecuentemente como toda intuición), que no es la intuición vulgar y sensible, sino más bien una especie de adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que parece tener el derecho de esperar, de parte de los seres matemáticos que una prolongada frecuentación le ha hecho casi tan familiares como los seres del mundo real".

Bourbaki expresa la misma idea (en *Théorie des ensembles.* E. I. 8. Hermann. Paris, 1970) así:

"... la intuición del matemático... no es necesariamente de naturaleza espacial o sensible, como se cree a veces, sino... más bien, un cierto conocimiento del comportamiento de los seres matemáticos, apoyado frecuentemente por imágenes de naturaleza muy variada, fundado primordialmente en la cotidiana frecuentación de ellos".

En el mismo texto, un poco antes, Bourbaki apunta que

"se está expuesto a fallas de razonamiento que arriesgan a conllevar, por ejemplo, el abusivo uso de la intuición, o el razonamiento por analogía".

Según Kant

"la metafísica es el conocimiento racional por conceptos, la matemática es el conocimiento racional por construcción de conceptos"dondec"construir un concepto" es "exponer la intuición a priori que le corresppnde".

Claramente esta intuición es de carácter espacial contra la opinión de Bourbaki de que la intuición matemática no se traduce forzosamente en imágenes de cuerpos situados en el espacio..

Etimológicamente "intuir" significa "ver dentro". De aquí que se haya llegado a emplear la voz intuición en el sentido de contemplación directa, casi de representación visual, lo que tiende a dilatar la imaginación, como capacidad de representación mental. Algunos de los filósofos llamados intuicionistas han merecido este calificativo por haber dado la preferencia, en teoría del conocimiento, a la intuición sobre el raciocinio. Puede verse un rastro de la divulgación de esta idea en la descripción del Larousse.

"Intuición: conocimiento claro, directo, inmediato, de la verdad, sin ayuda del razonamiento".

En esta acepción, la intuición es desde luego infalible, pues es el conocimiento de la verdad, una especie de revelación, que según algunos matemáticos eminentes que comparten con aquellos filósofos, sería el único método para descubrir.

Lo que sí es cierto es que quien ha pensado intensamente en un problema, si su concentración es coronada por el éxito, es decir, por la solución, verá a esta manifestarse como una iluminación súbita que le permite ver en un instante y con claridad, aquello que había buscado largamente y como tanteando en las tinieblas. La intuición así entendida es el momento culminante en cualquier creación humana de valor: el poeta cuando inventa la imagen apropiada a su quimera o Arquímedes cuando se da cuenta de que el agua no empuja su cuerpo como el de los otros mortales, en cuanto que él sabrá medir, el primero, esa fuerza.

En este sentido muy pocos investigadores suscribirían el apotegma de Picasso: *"Yo no busco, encuentro"*, sino más bien los siguientes: *"el genio es noventa y nueve por cierto de transpiración y uno por ciento de inspiración"*, "el genio es una larga paciencia". Porque la intuición es falible, sobre todo cuando es afectada por el entusiasmo, compañero indispensable para acometer muchas obrar humanas, pero débil consejero. Muchos han creído haber echado al suelo alguno de los desafíos a la razón cuando habían únicamente sido engañados por la euforia de un pretendido descubrimiento. O por la imaginación. Por lo general, toda labor creadora, es a saber, toda labor tendiente a obtener una obra humana nueva, una manera de hacer o de ver las cosas diferente a como se ha aprendido, requiere una gran imaginación, llamada ella también creadora. Pude decirse, tal vez, que es lo nuevo lo que la requiere; un camino trillado se recorre de memoria; es un paraje donde nos encontramos por primera vez el que incita nuestros sentidos y el que solicita nuestra faena imaginativa. Para comprender una deducción, un argumento de novela, una página literaria, al entendimiento se le facilita el trabajo con imágenes diversas, claras y apropiadas.

Hay una asombrosa imaginación incluso en la ciencia matemática... Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero (Voltaire).

Es cierto que un matemático, que no sea algo así como un poeta, nunca será un perfecto matemático (Weierstrass).

La imaginación adiestrada como instrumento de creación matemática se llama intuición matemática. Es la que permite al matemático entrever relaciones que se pueden establecer entre estructuras o dentro de una estructura; e incluso disponer los grandes pasos para mostrar que efectivamente existen tales relaciones. La prueba misma, empero, tiene que ser independiente de la intuición. En Euclides el texto depende de la intuición, por eso parece necesitar un número reducido de postulados. Pasch se propone expulsar la intuición y Hilbert enuncia los primeros principios que faltaban en *Elementos*. La intuición ayuda a disponer el texto axiomático, pero en la cadena de razones que constituyen dicho texto ningún paso invoca la intuición, cada paso es dado en virtud de preceptos lógicos. La substancia de tal tema capital se puede resumir así: un sistema axiomatizado se construye a partir de la intuición, aparte, empero, de la intuición.

Y respecto de la intuición, uno de los temas que cabía examinar es el de los objetos matemáticos. Quienes menos discuten acerca de la naturaleza de los seres matemáticos son los matemáticos; quizá, como pensaba Aristóteles, estas cuestiones conciernen más bien a quienes estudian el ser en cuanto ser. Algunos de ellos piensan que el saber matemático no tiene más valor que el experimental. Antes de aducir ciertos hechos a este respecto se recordarán las opiniones de Platón y Aristóteles.

Dice Platón:
"Tú sabes también que se sirven de figuras visibles y que, sobre estas figuras, construyen razonamientos, sin tener las figuras ellas mismas en el espíritu sino las figuras perfectas de las que aquellas son imágenes; razonan sobre el cuadrado en sí, sobre la diagonal en sí, no sobre la diagonal que trazan; e igualmente para las otras figuras. Todas las que ellos modelan o dibujan, las que producen sombras o que se reflejan en el agua, ellos las tratan a su vez como otras tantas imágenes que les sirven para conocer aquellas que no pueden serlo sino por el pensamiento" (*República*, VI, 510 d-511 a).

Dice Aristóteles:
"Tampoco es exacto que la medición sea una ciencia de magnitudes sensibles y perecederas, porque en este caso perecería ella cuando pereciesen las magnitudes. La astronomía misma, la ciencia del cielo que cae bajo el dominio de nuestros sentidos, no es una ciencia de magnitudes sensibles. Ni las líneas sensibles son las líneas del geómetra, porque los sentidos no nos dan ninguna línea recta, ninguna curva, que satisfaga a la definición; el círculo no encuentra a la tangente en un solo punto, sino en muchos como observaba Protágoras en

sus ataques contra los geómetras; ni los movimientos reales ni las revoluciones del cielo concuerdan completamente con los movimientos y las revoluciones que dan los cálculos astronómicos; últimamente, las estrellas no son de la misma naturaleza que los puntos" (*Metafísica.* B. III. 2. 998 a).

No se va a considerar aquí el problema de las interacciones entre matemática y realidad, pero sí a subrayar fuertemente el hecho de que los objetos matemáticos no son simple copias de los objetos reales.

A Aristóteles se debe la noción de abstracción, que consiste en la elaboración de una representación mental, una idealización, se dice a veces, de un objeto o de una relación, a partir de lo sensible, aislando ciertas propiedades. Pero si se tratara solamente de esto, se obtendría por la abstracción una descomposición de las propiedades del objeto, análoga a la que de la luz obtuvo Newton por un prisma. Es mucho más lo que el matemático ha menester. Afortunadamente, como ha recalcado Piaget en *Introducción a la epistemología genética*,

"en su origen, las operaciones logicomatemáticas proceden de las acciones que podemos ejercer sobre los objetos".

Así la mente no es solamente pasiva sino que produce un objeto que no siempre es simple prolongación del objeto inicial.

Es cierto que en matemática se habla de puntos, rectas, planos y espacio como en el lenguaje corriente, es decir, como en la experiencia; pero aunque pueda interpretarse lo primero en el caso particular de los segundos, es decir, aunque los objetos matemáticos puedan interpretarse en particular como los objetos físicos del mismo nombre, lo primero que debe hacer quienquiera entender algo en geometría es declarar una nítica diferencia entre los dos tipos de objetos. Los objetos matemáticos tienen más propiedades que los objetos sensibles correspondientes. En la realidad no se puede alcanzar un punto con las propiedades de punto matemático. Ni hay en ella rectas, sólo segmentos; ni un solo plano, sólo secciones planas como un espejo. Ni el espacio ordinario es realización de algún espacio matemático. La noción de esfera, la más inmediata, que parece experimental, no lo es, pues nadie puede ver al mismo tiempo toda la superficie esférica; es intuitiva, por ser la intuición la que completa la parcela de esfera que la visión puede captar. Es también la intuición la que alarga un segmento en los dos sentidos para forjar la representación mental de la recta. Más complicada todavía es la construcción de las rectas paralelas, o la del plano, o la del espacio.

Alguien podría pensar que se está tratando aquí de exhibir para cada objeto matemático la intuición correspondiente y dándole por consiguiente razón a

Kant. Sin embargo, esto no pasa de ser un recurso pedagógico, una contribución de la imaginación adiestrada matemáticamente al trabajo de comprensión. Pero toda intuición está desterrada de los desarrollos formalizados tal como se los concibe, con Hilbert, desde 1899. En cambio, en Euclides, que era toda la geometría para Kant, la intuición desempeña un papel considerable, lo cual, en cierta manera, justifica al filósofo.

El impulso a la generalización en matemática es un oficio de la intuición que puede extenderse a todas las ciencias deductivas y que tiene su contraparte en aquellas ciencias cuya materia prima es sacada directamente de la experiencia. Cuando un experimentado tabula sus datos, aspira a conseguir una función tal que los puntos que ha podido calcular pertenezcan a la gráfica de la función o que por lo menos los que no estén sobre ella se acerquen lo más posible a puntos que a ella le pertenecen. Cuando lo haya logrado habrá descubierto el comportamiento del fenómeno, es decir, una *ley de la naturaleza.* En esta búsqueda consiste la inducción, que es un trabajo eminentemente intuitivo. Posteriormente, cuando se conozcan ya muchas de tales leyes, es posible tal vez construir un sistema deductivo donde la mayoría de ellas aparezcan como teoremas. Fue, por ejemplo, el caso de Tico Brahe y Kepler, cuyos trabajos culminaron en la exposición deductiva de Newton.

En resumen, ha de aseverarse con Piaget que

> "aún una verdad eterna como dos más dos igual a cuatro puede ser estudiada genéticamente pues hay gentes pensantes que no la poseen. Una cosa es la constatación empírica sobre un ábaco, una más la concepción que de ella tenían los pitagóricos, muy otra es la de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead" (I. E. G. p. 13).

Una relación matemática intuitivamente verdadera es una verdad experimental generalizable o una explicación que parece cobijar otros casos particulares fuera de los ya constatados o una relación matemática para la cual parece posible una demostración en el sentido de que se tiene una idea de cómo insertarla en un contexto demostrativo.

Por ejemplo, por cada semicircunferencia existe un único triángulo rectángulo isósceles inscriptible. Es fácil verificarlo experimentalmente, en cada ocurrencia. Es fácil intuir la generalidad del hecho. Esta es una verdad típicamente intuitiva. La imaginación, convenientemente adiestrada, tiene la osadía de postular la universalidad de la situación. No es la experiencia, la cual se ocupa únicamente de casos particulares, por lo tanto no podría dar cuenta sino de un número finito de ellos. Una pregunta interesante es entonces la de si esta situación es generalizable, lo cual se lograría suprimiendo uno de los requisitos; si es el de que el triángulo sea rectángulo no hay generalización posible porque en una semicircunferencia sólo es posible inscribir un único triángulo isósceles. Quitando en cambio la condición de que el triángulo sea isósceles es plausible preguntarse si hay triángulos rectángulos inscribibles en una semicircunferencia dada. Experimentalmente puede verificarse cada vez que los triángulos inscritos son hallados rectángulos; pero la experiencia no da para más. La pregunta fue contestada afirmativa y universalmente se dice que por Tales de Mileto, pero no se sabe qué argumentación haya podido suministrar con su respuesta, si no era la experimental, es decir, la de verificar cada vez mediante la escuadra. Aun el número de casos posibles sobrepasa toda posible experiencia. La relación *'todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo*, no es sólo experimentalmente verdadera (lo es caso por caso), es intuitivamente verdadera; se llega a una convicción asaz fundada de que cuantas veces se haga la verificación se encontrará que la relación se cumple pero no será un teorema mientras no se la pueda obtener axiomáticamente, es decir, ubicar en un sistema formal una cadena de implicaciones de la cual ella sea el último eslabón.

Fueron los griegos quienes acostumbraron a los seres humanos a la osadía de las generalizaciones. Las culturas herederas de la griega suponen dada, (infortunadamente para la educación), natural si se quiere, la aptitud para la generalización, que a los griegos les costó, por lo menos, unos trescientos años de esfuerzos. El lógico, el matemático, el filósofo, el profesor de geometría no cuestionan el ámbito de validez de ésta, sino que discurren acerca de sus temas como si solo se tratara de despertar ideas innatas, universales y necesarias, en absolutamente todo el universo. Por tal razón es conveniente reflexionar, por ejemplo, sobre los planteamientos hechos por Gattegno (Ver *Educación geométrica*. pp. 50-51, o la ponencia misma de Gattegno, *La Pédagogie des Mathématiques*. pp. 131-173. en: Piaget, Beth, Dieudonné…).

> La geometría que enseñamos es una geometría sobre hojas de papel. Desprendemos relaciones de tales situaciones y por ser relaciones son abstractas y parecen independientes de nuestras acciones. El alumno no se pregunta dónde son verdaderas. Como todos los alumnos las encuentran en sus situaciones, adquieren una universalidad de salón de clase y como parece que la situación en cuestión no depende del hecho de que la clase esté en este u otro lugar geográfico, la relación parece al maestro y al alumno (éste menos conscientemente) verdaderamente universal.

Naturalmente, ella no lo es. Todo lo que se puede decir, es que nuestras relaciones extraídas de nuestras situaciones sobre el papel son, por todas partes sobre la Tierra, localmente verdaderas. Si convenimos olvidar la Tierra y el origen de nuestras relaciones, nos deslizamos de una situación local a un espacio creado por convención, donde nuestras relaciones son postuladas verdaderas. Este espacio no es otra cosa que lo que es. Decir que es real o físico o no importa qué, es expresar más que lo que ha sido probado por un método extraño a la situación creada. Es un pseudoproblema filosófico.

Nuestra manera de desprender las relaciones de las situaciones permite hacer una geometría verdadera localmente sin que sea necesario hablar de espacio. Las acciones que son las transformaciones permiten desprender otras relaciones en la situación. Mientras las proposiciones no se refieran sino a relaciones, no hay dificultad alguna en hablar de longitud infinita, de espacio infinito, etc.; esto es un tipo particular de relación y no una realidad física, lo cual por lo demás no tiene ningún sentido.

En particular el paralelismo euclidiano es una relación de equivalencia, que sirve para decir que uno ha incorporado la relación 'dos rectas', la relación 'en un plano' y la relación 'se encuentra' en una nueva relación que niega la hipótesis de encuentro. Es esta relación la que interviene en los razonamientos y no el hecho del encuentro, un sin sentido para el matemático cuyo pensamiento es solamente relacional.

Esta observación emplaza toda nuestra enseñanza en una situación que creemos más sana, más conforme a la realidad de nuestro pensamiento y de nuestras acciones y que evitará probablemente a nuestros alumnos el creer que la suma de los ángulos de un triángulo resulta de medidas absolutas en un espacio absoluto.

Nos atrevemos a decir que mucha tinta ha sido derramada en vano sobre esta cuestión de la geometría y de la experiencia, y que se trata más bien de una confusión psicológica que de un profundo problema filosófico. Ha habido un deslizamiento inconsciente desde aquello que se hace mentalmente al tomar conciencia de las relaciones, que llamamos geométricas, hasta un espacio que contiene objetos geométricos. De la misma manera que las relaciones geométricas son experiencias mentales, el espacio es una relación construida a partir de un conjunto de otras relaciones y que tiene propiedades definidas, algunas veces como continente, pero también algunas veces como experiencia mental propia. Cuando el espacio es un conjunto organizado según ciertas reglas, se le considera como relación y las propiedades de sus subconjuntos son precisamente las relaciones particulares que forman la geometría.

Nuestros profesores de matemática no tienen el derecho de hacer creer a sus alumnos que el espacio euclidiano es de una realidad psicológica más cercana que cualquier otro espacio. El euclidiano, como los otros, es una construcción mental que organiza una cierta experiencia psicológica resultante de nuestras situaciones sobre papel y las relaciones que de ahí abstraemos. Estas relaciones hacen que si la geometría euclidiana es aquella donde ellas son siempre verdaderas, el espacio psicológico es localmente euclidiano, como lo son por otra parte la mayoría de los espacios útiles en matemáticas.

Cada teoría, cada sistema formal, es el estudio del conjunto de posibilidades para determinada situación o concurso de circunstancias. Dentro de esta situación la teoría debe proporcionar explicación completa para las diferentes disposiciones de los elementos. La universalidad tiene que ver con esta multiplicidad local de ocurrencias. Para otras multiplicidades hay otros conjuntos de posibilidades. Para agotar el conjunto de todas ellas hay que considerar el conjunto de partes, del cual las multiplicidades locales son subconjuntos. Por la subordinación de lo real a lo posible, una situación concreta es una de las posibles.

Como la matemática es a priori, es decir independiente de la experiencia, no hay necesidad alguna de que cualquiera de las posibilidades sea el marco para la realidad física. Las posibilidades son mentales, producto del dinamismo de la inteligencia: se requiere de ellas que sean coherentes y completas, si es posible, es decir, deben poder explicar exhaustivamente los sucesos cobijados por la extensión de los conjuntos o conceptos involucrados (los que, en principio corresponden a la intención con la que se forja la teoría); no se requiere adecuación con algún tipo de realidad, porque lo a priori es independiente de la experiencia; por eso, Poincaré declara sin sentido el pseudoproblema (como dice Caleb Gattegno) de averiguar cual es la geometría del universo físico;es posible que haya desde diversos puntos de vista teóricos explicaciones satisfactorias para un mismo fenómeno físico: la matemática formal es diferente de las aplicaciones de la matemática. En tanto la matemática es cierta no concuerda con la realidad; en cuanto concuerda con la realidad no es cierta (Einstein), puesto que no es que concuerde sino que se la hace concordar a fuerza de aproximaciones con números racionales.

Un trabajo de ebanistería por fino que sea, la alta proeza técnica de lanzamiento de cohetes al espacio, la construcción de globos terrestres, no son posibles con números, como π, cuyo desarrollo decimal tiene infinitas cifras no periódicas. La matemática con números irracionales está restringida al recinto cerebral. Es la universalidad para el salón de clase. Antes de pasar al laboratorio, hay que establecer cómo se encoge la universalidad y la necesidad en las aplicaciones de la matemática a la realidad.

Axiomatización

Entrevista la posibilidad de que una cierta relación sea teorema, es indispensable la construcción de una cadena de implicaciones, un puente que lleve desde ciertos enunciados dados, hasta el enunciado que se presume es un teorema y que lo será cuando la cadena quede construida: mientras no sea así, será una conjetura. Hay algunas de estas, verdaderos desafíos a la razón humana, muy famosas, como la de Goldbach que dice que todo número par se puede descomponer en suma de dos números primos.

La cadena de implicaciones es lo que se llama una demostración; el último eslabón de la cadena es el teorema demostrado. No es ésta, en general, una tarea fácil, lo cual explica que los más difíciles lleven nombre propio y que además una disciplina no llegue a ser axiomatizada sino muy tardíamente. Durante siglos, la única parte axiomatizada de la matemática fue la geometría, de manera que la historia de la axiomática está entrañablemente ligada a la de la geometría: por la axiomatización de la geometría y por la posibilidad de diversas geometrías los matemáticos han llegado a entender lo que es fundamentalmente una teoría axiomática. En la historia primitiva de la geometría o en la de otras disciplinas, la abundancia de conocimientos experimentales o intuitivos lleva a lo que se ha dado en llamar islotes deductivos. No es que haya que pensar que la geometría se aprende axiomáticamente o no se aprende. No hay ninguna necesidad de aprender deductivamente a la fuerza y es mucho más importante ejercitar en el conocimiento experimental o intuitivo y dejar el puramente formal para los especialistas. Muchos son partidarios de un estrado intermedio, axiomatizado por lugares, por islas, de donde la expresión de islotes deductivos. Pues bien, cuando una disciplina abunda en conocimientos experimentales o intuitivos así como en islotes deductivos se puede pensar en un desarrollo formal de toda ella. Lo cual consiste en construir una teoría en la que van a aparecer como teoremas la mayoría de los resultados de que se dispone en dicha disciplina. Para eso se toman algunos términos que no se definen explícitamente y a los cuales no se les va a dar la significación del lenguaje corriente sino en cuanto lo autoricen unas relaciones que no se demuestran y cuyo oficio es precisamente éste de fijar el único sentido que será legítimo dar dentro de la teoría que se construye a los términos no definidos. Es preciso también fijar la lógica con la que se van a hacer las derivaciones. Y éstos, en cierta manera, son lo únicos materiales indispensables. Para comenzar se considera una relación expresada en el lenguaje de los términos no definidos y las relaciones no demostradas adoptadas y se trata de construir la cadena entre los principios primeros y la relación en cuestión mediante la lógica elegida.

Grosso modo, tal esquema para la matemática demostrativa no ha cambiado desde los griegos. Ha seducido siempre a los espíritus amantes del rigor y las construcciones sistemáticas. Es curioso que la vaga sensación que tienen las gentes de la exactitud matemática tenga más que ver con el cálculo, experiencia matemática, que con el esquema anterior. En efecto, para recalcar sobre algo que les parece irrefutable, acuden al socorrido paradigma: 'esto es tan cierto, como que dos y dos son cuatro'. Y se sigue diciendo lo mismo a pesar de que Goethe haya escrito:

> "Dos por dos no son cuatro sino simplemente dos por dos y a ello llamamos cuatro por brevedad. Pero cuatro no es absolutamente nada nuevo".

Escribir que "la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias" (Benjamin Peirce) es como decir que al matemático interesan únicamente aquellas conclusiones que se deducen de un conjunto dado de premisas, mediante la lógica como instrumento, con exclusión de cualquier otro.

Para demostrar una relación es preciso dar una argumentación que cubra todos los casos posibles dentro de la teoría prohijada. Como dice Galileo en el *Diálogo de dos nuevas ciencias*:

> "Una sola experiencia o demostración concluyente que se tuviese en contrario, bastaría para echar por tierra... cien mil argumentos probables".

Puede suponerse que se tengan cien mil verificaciones favorables; pues bien, basta un único ejemplo en contra para que ya haya que renunciar a tener una relación verdadera. Una marcada propensión a la generalización abusiva, es muy humana, es decir, una pasmosa falta de escrúpulo para confeccionar enunciados generalizadores no basados en ocurrencias cuidadosamente procesadas sino en observaciones superficiales. Posiblemente la especie sienta psicológicamente una necesidad de apoyarse en formulaciones universales y tranquilizadoras; tal vez sea irreflexión; o simple anhelo individual de imponer la propia visión del mundo. Son relaciones desechables matemáticamente hablando. El que todos los casos posibles queden involucrados es lo que da esa convicción de universalidad y de necesidad que muchos creen hallar únicamente en las demostraciones matemáticas.

Una relación matemática axiomáticamente verdadera dentro de una teoría es ua relación matemática para la cual, hay una demostración, es decir, una cadena de implicaciones desde los primeros principios hasta ella. Ahora bien: en estas cadenas no pueden figurar sino implicaciones entre relaciones que o bien son axiomas o bien son relaciones formadas, según los cánones de la lógica acordada, a partir de los axiomas o de relaciones ya demostradas. En resumidas cuentas, el sistema axiomático es autosuficiente en el sentido de que sólo intervienen en él los términos no definidos, las relaciones no demostradas, símbolos abreviados llamados definiciones y las cadenas de implicaciones. De ninguna manera entra en consideración, por ejemplo, algo que se supiera experimental o intuitivamente sobre un término o una relación que figuran en el sistema. Aquí es donde aparece una ruptura entre los tres tipos de conocimiento. En efecto, se pasa casi insensiblemente de la experiencia a la intuición pero no así de ésta a la axiomatización. Entre los dos primeros tipos, los datos pueden apoyarse mutuamente. En el tercero ningún dato de la experiencia o de la intuición debe figurar como un eslabón de alguna cadena demostrativa. Esto de ninguna manera quiere decir que la experiencia y la intuición anteriores no intervengan psicológicamente, pues entonces serían inútiles. Son muy activas como motivación, pero subjetivamente. Para escoger qué términos no serán definidos o una entre varias demostraciones posibles de un teorema se procede por razones exteriores al sistema formal, ya que el hecho de que una demostración sea más corta que otra, por ejemplo, no afecta en nada a la demostración en cuanto tal.

El papel preponderante de la implicación es el que se explicita al decir que la matemática es hipotético deductiva: de tales hipótesis se derivan tales tesis y no otras y si se quieren derivar otras tesis hay que tomar otras hipótesis. La verdad matemática es relativa, es interior a cada sistema formal. La matemática es el conocimiento que no puede desprenderse de las hipótesis; ya lo había dicho Platón.

Conclusiones

a. El conjunto de las verificaciones de que una relación matemática es experimentalmente verdadera es necesariamente finito. En consecuencia, los conocimientos experimentales parecen aislados, inconexos, fragmentarios, no articulados por un principio.

b. La demostración de que una relación matemática es axiomáticamente consistente comprende todos los casos posibles y estos, casi siempre, abarcan más que la humana experiencia posible. En consecuencia, la axiomatización es la única manera apropiada de tratar propiedades concernientes a conjuntos infinitos.

c. Entre estos dos tipos de conocimiento hay un foso que tiende a salvar la intuición, en el sentido de que gracias a esta, se forjen, a partir de conocimientos experimentales, relaciones demostrables.

d. En un texto demostrativo no pueden figurar conocimientos experimentales o intuitivos. Una escritura puede figurar en un texto demostrativo si es un término no definido o una relación no demostrada o un término definido o una relación demostrada. En consecuencia, la verdad matemática es una verdad relativa al sistema formal donde se ha encontrado para ella una demostración.

e. La matemática actual se ocupa primordialmente de relaciones entre relaciones entre objetos (Eddington), es decir, de estructures (Bourbaki).

En el cuadro adjunto se sugieren otros enfoques para la trilogía: experiencia, intuición, axiomatización, que no van a ser desarrollados en el trabajo presente.

		Nivel	*Aspecto histórico*	*Aspecto metodológico*	*Aspecto psicológico*	*Aspecto referencial*
Aproximación	Experiencia	Iniciación	Grandes civilizaciones antiguas otras que la griega	Cálculo elemental	Experiencia externa	Objetos
al conocimiento	Intuición	Utilización	desde Tales hasta Hipócrates de Quíos	Inducción	Experiencia interna	Representaciones
matemático	Axiomatización	Profesional	Euclides Hilbert Bourbaki	Deducción	Abstracción	Conceptos

C. Períodos intrafigural, interfigural, transfigural

No solo se ocupó Piaget de la evolución global del conocimiento, sino que también se preocupó de casos especiales. Con su colaborador Rolando García estudió el desarrollo histórico de la geometría.

Piaget-García contemplan tres grandes etapas en la evolución de la geometría, a las que designan: intrafigural, interfigural, transfigural. Se hará solamente una presentación esquemática de dicha investigación, todavía incompleta.

Euclides estudia las propiedades de una figura (o de un cuerpo) en cuanto aparecen como relaciones internas entre los elementos de la figura: es la etapa intrafigural, en la que el tema de fondo lo constituyen las relaciones entre los elementos de la figura. No solo Euclides cultiva este aspecto de la geometría. También los grandes geómetras griegos como Arquímedes y Apolonio. Grosso modo dicha etapa cobija en la historia de la geometría hasta Descartes y Fermat.

Una segunda etapa comienza con Desargues y Pascal y durante el siglo XIX llegará a ser concebida como si fuera toda la geometría, con el nombre de geometría proyectiva. Sus grandes cultivadores son: Monge, Poncelet.

El tema central de estudio son las correspondencias entre las figuras, estas son explícitamente consideradas inmersas en el espacio ordinario. Este continente con su contenido, que son los cuerpos, se vuelve tan importante como el plano con su contenido que son las figuras. Es la etapa interfigural, en la que el tema de fondo son las relaciones de correspondencia entre sólidos del espacio.

La tercera etapa es la de la conceptualización de las correspondencias. Se las concibe colectivamente como un conjunto sobre el cual se puede pensar una estructura; esta es una puesta de manifiesto de las propiedades comunes a las correspondencias diversas entre las figuras. La expresión culminante de esta etapa es el programa de Erlangen. Voceros principales: Klein, Lie, Cartan (Elie). Le tercera etapa es la llamada transfigural.

"Estas tres etapas, insisten Piaget y García, bien definidas en la historia de la geometría, son testimonio de una evolución en el proceso de conceptualización de las nociones geométricas. No es cuestión de "crecimiento" de los conocimientos, sino de una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales. Tal proceso evolutivo apoya la posición sostenida desde hace tiempo por la epistemología genética, al mostrar, mediante numerosos ejemplos tomados de la psicología genética, que el desarrollo del conocimiento nunca es lineal, sino que exige por lo general, una vez que se ha accedido a un nivel cualquiera, la reconstrucción de lo que ha sido adquirido en los niveles precedentes. Se trata de una reorganización de los conocimientos que tenga en cuenta las informaciones recién adquiridas, y, de una reinterpretación de los conceptos de base" (pp. 128-129).

Período	*Propiedades buscadas*	*Principales creadores*
Intrafigural	Relaciones internas entre los elementos de las figuras, o, de los cuerpos.	Euclides Arquímedes Apolonio
Interfigural	Transformaciones entre figuras o cuerpos	Monge Poncelet Chasles
Transfigural	Estructura de las transformaciones	Klein Lie Elie Cartan

Sinopsis del desenvolvimiento de la geometría según Piaget-García.

Cuestiones

1. ¿Qué se entiende por experiencia?
2. ¿Qué se entiende por intuición?
3. ¿Qué se entiende por axiomatización?
4. Ejemplos de enunciados experimentalmente verdaderos.
5. Ejemplos de enunciados intuitivamente verdaderos.
6. Ejemplos de enunciados axiomáticamente verdaderos.
7. "¿Quién ha demostrado que amanecerá mañana, y que nosotros moriremos? Y, ¿existe algo en que se crea más? Es, por tanto, la costumbre la que nos persuade de ello " (Pascal. *Pensamientos*. 252). Discutir.
8. ¿Las verdades de la vida corriente son axiomáticas?
9. "Desde los griegos, quien dice matemática dice demostración" (Bourbaki). ¿Toda la matemática?

10. “El método para no errar es buscado por todo el mundo. Los lógicos hacen una profesión de conducir a ello, pero solo los geómetras logran, y, fuera de su ciencia y de lo que la imita, no hay verdaderas demostradores” (Pascal. *El arte de persuadir*). ¿Por qué la mención de la geometría?
11. ¿‘2 y 2 son 4’ es una verdad de qué tipo?
12. ¿Qué decía Göthe a propósito de ‘2 y 2 son 4’?
13. Lo real y lo posible.
14. Lo necesario y lo contingente.
15. Lo universal y lo particular.
16. La matemática y las tres oposiciones en 13, 14, 15.
17. ¿Puede aceptarse que matemática es el estudio de la cantidad? ¿Por qué?
18. ¿Qué quiere decir “substituir el cálculo por las ideas”?
19. ¿Si, según Poincaré, la matemática no estudia los objetos, qué es lo que estudia?
20. ¿Qué opinión de Eddington precisa Poincaré?
21. Ejemplo de una generalización abusiva. ¿Por qué lo es?
22. ¿Cómo es la intuición del matemático, según Bourbaki?
23. ¿Se equivoca la intuición del matemático?
24. ¿Qué descripción da el Larousse de intuición?
25. ¿Están de acuerdo los matemáticos sobre la función de la intuición en el descubrimiento?
26. ¿Tiene cabida la intuición en un texto demostrativo?
27. ¿Qué papel tiene la intuición en Euclides?
28. ¿Es posible que se produzcan iluminaciones súbitas?
29. ¿Es indispensable una figura para una demostración?
30. ¿Qué opina Platón acerca del empleo de las figuras por parte del geometría?
31. ¿Qué observa Protágoras acerca de la tangente a una circunferencia?
32. ¿Hay segmentos físicos?

33. ¿Hay rectas físicas?
34. ¿Hay secciones o porciones planas?
35. ¿Hay planos físicos?
36. ¿Puede verse, de un solo golpe, toda la superficie de una esfera?
37. ¿En qué consiste la inducción?
38. ¿Cuántos casos pueden justificar una inducción?
39. ¿Qué parentesco hay, entre la intuición del matemático, la inducción del físico, la tendencia a la generalización?
40. Función del contraejemplo en matemática.
41. ¿Puede la experiencia agotar todos los casos posibles?
42. La conjetura de Goldbach.
43. Aspecto experimental, intuitivo, axiomático del enunciado 'Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo'.
44. Comparar los objetos matemáticos con los objetos físicos que llevan el mismo nombre.
45. Esquema de una teoría axiomatizada.
46. Sinónimos de sistema formal.
47. Psicología evolutiva de Jean Piaget.
48. Experiencia física. Experiencia logicomatemática.
49. Proceso de interiorización.
50. Coordinación de acciones.
51. Las operaciones mentales son acciones interiorizadas.
52. La experiencia logicomatemática y la coordinación de acciones al interiorizarse, hacen posible la abstracción logicomatemática.
53. La abstracción empírica o aristotélica o principio del conocimiento voluntariamente incompleto.
54. La abstracción logicomatemática,

    a) proyecta cuanto haya en el plano de la acción hacia el plano de la representación mental

b) es abstracción reflexiva que reorganiza y reconstruye los datos del nivel de coordinación de acciones.

Comparar con la abstracción aristotélica.

55. Dinamismo de la mente.
56. ¿Por qué se dice que la axiomatización es la única manera apropiada de tratar conjuntos matemáticos?
57. ¿Qué relaciones pueden figurar en un texto demostrativo?
58. Es bien conocido desde Aristóteles (por lo menos) que toda ciencia reposa sobre lo que se podría llamar "el principio del conocimiento voluntariamente incompleto": abstraer o generalizar significa precisamente que se desechan sistemáticamente ciertos aspectos de los objetos que se consideran. El método axiomático en matemática no es más que una aplicación de este principio, aplicación que no se distingue de otras sino porque se pone cuidado en enumerar de manera exhaustiva las propiedades que se quiere admitir referentes a los objetos estudiados (ellas son los axiomas) y que se prohíbe en seguida acudir a otra cosa que a estas propiedades y a las reglas de la lógica (Jean Dieudonné. *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. 1964. Paris. Hermann. 240 pp.).
59. Comparar la abstracción mencionada por Dieudonné con la logicomatemática de Piaget
60. Ruptura entre intuición y formalización.
61. Seis concepciones de la geometría.

    La geometría consiste en el estudio de las relaciones entre los elementos de una figura o de un sólido.

    La geometría es el estudio de las propiedades de las figuras o de los sólidos mediante las propiedades de una ecuación.

    La geometría es el estudio de las propiedades de las figuras o de los sólidos cuando se los considere como transformados unos de otros.

    La geometría consiste en el estudio de las propiedades invariantes de un grupo de transformaciones de una multiplicidad.

Estudio de una situación matemática mediante un grupo.

La geometría es el estudio de los subgrupos del grupo de las biyecciones de un conjunto como grupos de operadores.

61-1. Trate de asociar cada una de las concepciones anotadas de geometría con uno de los nombres o agrupamientos de nombres que sigue: Bourbaki, Chasles-Poncelet, Descartes-Fermat, Euclides, Klein, Poincaré. Indicar por qué los asocia así.

61-2. La noción de transformación permanece en estado embrionario en *Elementos*. Indicar pasajes ilustrativos.

61-3. ¿Antes de Klein, cuando se empleaba una transformación, se tenía conciencia de estarla utilizando?

61-4. ¿Se puede decir que se llega a la noción de transformación geométrica gracias a la naturaleza operatoria de las transformaciones algebraicas? ¿Era esta la idea de Poncelet y Chasles? ¿Cuánto duró el desarrollo de esta idea? (*Géométrie*. 1637. *Traité des propriétés projectives des figures*. 1822). Newton y Descartes pertenecen a la tradición griega. ¿Lo que distingue a esta es la ausencia de la transformación?

62. ¿Es posible que alguien haya pensado que la utilización de cantidades negativas o complejas para representar entes geométricos es "absurda" e "ininteligible"? "Yo demuestro que tal noción es completamente falsa y que de su admisión resultarán los más grandes absurdos". "Por este principio de las cantidades negativas tomadas en sentido contrario a las cantidades positivas uno es inevitablemente conducido a error" (Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 - 1823). *Géométrie de position*, 1803). ¿De qué tipo puede ser la demostración prometida por Carnot? ¿Qué reflexiones se le ocurren ante la convicción de Carnot de que lo números negativos son contradictorios? Trate de imaginar las dificultades del cálculo algebraico sin números negativos. ¿De haber sido colega de Carnot lo habría apoyado? Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué forma?

63. Comentar esta frase de Albert Einstein: "Si Euclides no fue capaz de encender tu entusiasmo juvenil, entonces no naciste para ser un pensador científico". ¿Por qué es subjetiva?

64. ¿Para el razonamiento se necesitan las figuras? ¿Sirven las figuras? ¿Para hacerse una idea, para ir hacia un concepto son útiles las figuras? ¿Se necesitan las figuras? ¿O cómo se hace?

65. Comentar la frase de Russell: "En los mejores libros de geometría no se encuentra figura alguna".

66. Qué quiere decir Peano en esta frase, citada por Russell: "Espacio es una palabra para la cual la geometría no tiene absolutamente ningún uso". Un geómetra kantiano, ¿habría podido estar de acuerdo con esta aseveración? ¿Por qué?

67. ¿Qué puede significar "intrafigural"? ¿Podría convenir a la síntesis euclidiana? Trate de justificar con pasajes de *Elementos* el atributo "intrafigural" que les dan Piaget y García.

67-2. Piaget y García llaman "interfigural" la puesta en relación de las figuras entre sí (geometría proyectiva a la manera de Poncelet). Ver que aparecen las transformaciones geométricas, que estas pueden relacionar las figuras según múltiples formas de correspondencia y que aparece la necesidad de la noción de espacio.

67-3. Piaget y García llaman "transfigural" a la etapa de la geometría en la que se desarrollan las transformaciones. ¿Quién dio la pauta para tal desarrollo? ¿En qué trabajo célebre?

67-4. "El desarrollo cognoscitivo no procede linealmente por acumulación de conocimientos, sino por una reconstrucción de lo adquirido en los niveles precedentes" (Piaget y García). "Se trata de una reorganización de los conocimientos y de una reinterpretación de los conceptos de base" (Piaget y García). En presencia de las seis concepciones de la geometría trate de aplicar estas observaciones, el pasar de una a otra.

68. Dados un foco luminoso (sol, bombilla) y una pantalla móvil, interponer entre los dos una circunferencia en material delgado no flexible. Cambiar la inclinación de la circunferencia de manera que, si es posible, uno obtenga sucesivamente como imágenes: una circunferencia igual a la proyectada, una más grande, una más pequeña, una elipse, un segmento, un punto.

68-2. Hacer un ejercicio análogo con una sección cuadrada plana.

68-3. Hacer ejercicios análogos, modificando la posición de la pantalla pero manteniendo fijo el objeto proyectado.

68-4. Hacer ejercicios análogos modificando las inclinaciones del plano de la pantalla y del plano del objeto.

68-5. Observar, en particular, los resultados cuando tanto el plano de la pantalla como el de los objetos proyectados son paralelos. ¿Cuál de los casos anteriores corresponde a la geometría euclidiana plana?

69. Buscar ejemplos de propiedades intrafigurales (en *Elementos*).

70. Con base en su respuesta en 5, averiguar por qué es cierto que hay también pasajes interfigurales en *Elementos*. Buscar ejemplos. ¿Qué papel desempeña la noción común 4 de *Elementos*?

71. Tratar de ver que lo transfigural tiene que estar ligado a la noción de transformación. Relacionar con aquello de que la matemática trata de relaciones entre relaciones entre objetos. Relacionar con el pasaje de Frege, puesto como epígrafe de este capítulo 14.

72. El álgebra en la forma práctica que le dieron Viète, Descartes, Fermat no solo hace posible el advenimiento del cálculo diferencial e integral de Leibniz y Newton sino que también permite la maduración matemática de la idea de transformación que va a culminar en el 'Programa de Erlangen' de Klein, 1872. Tratar de intuir cómo hubiera sido posible la creación del cálculo infinitesimal dentro del marco de la geometría euclidiana y que en cuanto a la geometría de las transformaciones, quizá no habría habido imposibilidad, pero sí mucha dificultad.

Bibliografía

1. BOURBAKI. *Mode d'emploi de ce traité. Introduction*. pp. 3-13. Théorie des ensembles. (Nouvelle édition). 1970. Paris. Hermann. (Volume relié).

2. BOURBAKI. *L'architecture des mathématiques*. pp. 35-47. Les grands courants de la pensée mathématique. (1947). 1962. Paris. Blanchard. 559 pp.

3. BOURBAKI. *Foundations of mathematics for the working mathematician*. The Journal of Symbolic Logic. Volume 14. Number 1. March. 1949. pp. 1-8.

4. BOURBAKI. *Éléments d'histoire des mathématiques*. (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1984. N. Bourbaki et Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 2007. 376 pp.

5. CAMPOS, Alberto. *La educación geométrica*. 1981. Bogotá. Universidad Nacional de Colombia. 248 pp.

6. CAMPOS, Alberto. *El profesor Thom y la sana reacción*. Notas de Matemática. No. 18. Octubre. 1984. pp. 1-27.

7. PIAGET, Jean. *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence*. pp. 11-33. En: Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnérowicz, Choquet, Gattegno. L'enseignement des mathématiques. 1955. Neuchâtel (Suisse). Delachaux et Niestlé. 176 pp.

8. PIAGET, Jean. *Introducción a la epistemología genética. 1. El pensamiento matemático*. (1950). 1975. Buenos Aires. Paidos. 315 pp.

9. PIAGET, Jean. *Biologie et Connaissance*. 1967. Paris. Gallimard. 430 pp.

10. PIAGET, Jean. *Le structuralisme*. 1968. Paris. PUF. Que sais-je? 1311. 128 pp.

11. PIAGET, Jean. *Sagesse et illusions de la philosophie*. (1965). 2e édition 1968. Paris. PUF. 309 pp.

12. PIAGET, Jean. *L'épistémologie génétique*. 1972. Paris. PUF. Que sais-je? 1399. 127 pp.

13. PIAGET, Jean. *Comments on mathematical education.* pp. 79-87. Developments in mathematical education. Proceedings of the second International Congress on mathematical education. 1973. Cambridge. At the University Press. 318 pp.

14. PIAGET, Jean and GARCÍA, Rolando. *Psychogènese et histoire des sciences.* 1983. París. Flammarion. 310 pp. [hay traducción española: *Psicogénesis e historia de la ciencia* . 1982. México. Siglo XXI. 252 pp.]

15. THOM, René. *Modern mathematics: does it exist?* pp. 194-209. Developments in mathematical education. Proceedings of the second International Congress on mathematical education. 1973. Cambridge At the University Press. 318 pp.

16. THOM, René. *Stabilité structurelle et morphogénèse.* (1972). Deuxième édition. 1977. Paris. Interéditions. $xx + 351$ pp.

Capítulo 15

Hacia una filosofía de la matemática

La matemática formalizada no necesita más metafísica que el juego de ajedrez.

[Jean Dieudonné]

En este capítulo final se trata de considerar en conjunto algunos enunciados para tenerlos en cuenta al pensar la matemática globalmente.

En primer lugar, se se transcribe con modificaciones convenientes el artículo *Reflexiones críticas acerca de la filosofía de la matemática* de Kant, publicado en la revista del Departamento de Filosofía de la Universidad Nacional IDEAS Y VALORES No. 92-93. Diciembre 1993. Bogotá. pp. 5-40. En el capítulo 4 se vio que uno de los puntos centrales de la teoría del conocimiento de Kant tiene que ver directamente con la filosofía de la matemática. Se intenta hacer ver ahora que la filosofía de la matemática del pensador de Königsberg quedó anclada en un meandro del desenvolvimiento de la matemática hoy completamente dejado atrás. Lo cual no empece para reconocer la profundidad del enunciado del problema. Si en las páginas que siguen alguna acrimonia pareciere haber contra ideas de esta filosofía (esa no ha sido la intención del autor, solamente la seriedad en las reflexiones) habría que entender que ella va dirigida hacia quienes actualmente tratan de defender los puntos de vista de Kant, sin tener en cuenta determinadas significaciones de algunos fantásticos desarrollos de la matemática en los siglos XIX y XX, que acaso Kant hubiera tenido en cuenta de haber tenido la fortuna de conocerlos.

En segundo lugar, se hace un compendio, en cien enunciados, de reflexiones que tienen que ver con la axiomática, que han surgido a lo largo de su desarrollo y que es pertinente considerar como una herencia, como lo que ha quedado en claro de discusiones anteriores, con el fin de no recomenzarlas cada vez sino más bien de avanzar a partir de ellas. Con el fin de evitar la dispersión, se mencionan a Hilbert, a Gödel, a Bourbaki y apenas se alude a algunos esclarecedores pensamientos de otras tendencias de filosofía de la matemática, incluso de las forjadas por los matemáticos mismos.

Reflexiones críticas acerca de la filosofía de la matemática de Kant

La mayor parte de la literatura concerniente trata de justificar, aún hoy, la filosofía de la matemática de Kant; por qué adoptó determinado modo de pensar o cómo no podía adoptar otro, dado el desarrollo de la matemática en los tiempos del filósofo; sin que, generalmente, los afectos ahonden mucho a propósito de tal desarrollo. En esta línea pueden inscribirse por ejemplo, dos obras

1. Michael FRIEDMAN. *Kant and the exact sciences.* 1992. Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press. $xvii + 357$ pp.
2. *Kant's philosophy of mathematics.* Modern essays. Edited by Carl J. POSY. 1992. Dordrecht. The Netherlands. Kluwer Academic Publisher. $x + 370$ pp.

Los dos volúmenes reúnen, en realidad, quince trabajos de investigación acerca de la filosofía kantiana de la matemática. Es bien curioso que ninguno de ellos mencione el fascículo de Couturat en el que las críticas son extremadamente duras y pertinentes. Couturat (con apellido alterado) es citado eventualmente en el prefacio del editor de la segunda obra. De Russell, cuyas críticas son igualmente demoledoras, se cita sus *Principia of Mathematics.* (1903). Los autores de los artículos generalmente no responden a las objeciones de los "críticos", como ellos los llaman, de la filosofía de la matemática de Kant; se contentan con fabricar exégesis, a veces extrañas, para salvar la enseñanza del filósofo. Allí no parece que pueda surgir la duda acerca de si tal filosofía no quedó anclada en un meandro de la evolución de la matemática. Imposible saber, desde luego, cuál habría podido ser la actitud del filósofo de haber logrado estar al corriente de alguna matemática posterior a 1800. Lo que sí parece poder asdegurar es que algunos epígonos del kantismo quisieran que la doctrina del maestro permaneciera en dicho remanso, porque no han querido percatarse del desarrollo matemático posterior a 1800. Aluden a él sólo cuando les parece un apoyo. Se presenta pues, a continuación una secuencia de observaciones críticas a la filosofía de la matemática de Kant, enfocadas, preferiblemente, desde la geometría.

a. **Kant se fió demasiado en el hecho histórico de que hasta entonces solamente la geometría euclidiana había sido reconocida.** No hizo una crítica de la axiomatización a la manera de Euclides sino que la aceptó como si no tuviera imperfecciones axiomáticas. A decir verdad, éstas fueron destacadas solo posteriormente. Su capacidad de análisis le hubiera dado la oportunidad de adelantarse a su tiempo. Se dice que uno de sus aforismos preferidos era: "Leer poco, pensar mucho". De ser cierto, ello podría explicar el hecho de que no haya procurado Kant ponerse al corriente de los trabajos de recopilación de ideas acerca de la demostración intentada muchas veces del quinto postulado, recopilación con ensayo de explicación hecha por Klügel para doctorarse en la Universidad de Göttingen, 1763; o también, de los trabajos de Lambert, personaje destacado como Kant, de la universidad alemana, corresponsal de Kant y quien antes de que Kant concibiera su filosofía crítica, había pensado y escrito en profundidad sobre el quinto postulado, la cuestión más saliente de la geometría euclidiana.

   Poincaré, Russell, ..., han destacado el saliente papel de la intuición en *Elementos*. Kant suple con su construcción de conceptos en la intuición los postulados no enunciados en *Elementos*.

   Prácticamente hasta el siglo XIX, la lógica y la matemática se cultivaban como disciplinas extrañas. La primera estaba encomendada a los filósofos, la matemática era naturalmente de los matemáticos. Generalmente, hay pocos matemáticos que se preocupen por los fundamentos. Desde antes de Euclides, los geómetras mismos no se han justificado ni con lógica ni con intuición, sino que se confían en una especie de sexto sentido que, en cierta manera los guía y les permite no engañarse, desde que se ocupen de lo que llaman a veces verdaderos problemas. La estructura algebraica de la lógica explicitada por Boole debió de ser una sorpresa para sus contemporáneos.

   Pero los comportamientos no son forzosamente modificados por un conocimiento, a pesar de lo que pensaba Sócrates. Antes bien, los intuicionistas llegaron a la actitud más extrema a comienzos del siglo XX: la lógica se obtiene por casualidad, es decir, es un conocimiento ocasionalmente alcanzado a partir de la observación del trabajo de los matemáticos, es un subproducto de dicho trabajo. Y deben su nombre al énfasis que ponen en la intuiciones fundamentales a partir de las cuales principian su desarrollo teórico.

La mayor parte de los matemáticos, sin embargo, no procedieron como ellos. Cuando las distinciones más sutiles se hicieron indispensables quedaron en claro las fallas de la intuición: "Cómo puede la intuición engañarnos hasta ese punto" exclama Poincaré, afecto de cuando en cuando a ciertos pareceres intuicionistas. "Me alejo espantado y horrorizado de esa plaga lamentable de funciones continuas sin derivada" escribe Hermite (no sin una pizca de ironía, escribe Bourbaki: p. 27 *Éléments d'histoire des mathématiques*).

Fuera un mérito para Kant si se hubiera dado cuenta críticamente de que no todo el razonamiento estaba patente en las demostraciones de Euclides y de que lo que completaba la argumentación era la intuición. En realidad Kant se proponía hallar una síntesis a la oposición entre Leibniz y Hume. Brunschvicg trae a cuento una fragmento de Leibniz que sí parece haber guiado (¿por qué el gran Leibniz matemático no influyó mucho más en Kant?) al filósofo crítico:

"Lo que ha hecho que sea más fácil razonar demostrativamente en matemática, es en buena parte debido a que en ese caso la experiencia puede garantizar el razonamiento en todo momento, como ocurre también en las figuras de los silogismos" (Leibniz. *Nuevos ensayos*. IV 2 §9). Para Kant, continúa Brunschvicg, la aritmética y la geometría tienen el mismo carácter de perfección que reconocía a la lógica de Aristóteles... el razonamiento está en ellos, tanto más seguro de sí mismo, cuanto que tiene, al igual que en el silogismo de Aristóteles, la certeza de encontrar en la experiencia la confirmación de cada una de sus articulaciones (Brunschvicg: p. 287). La doctrina de Kant acerca del papel de la intuición en Euclides no fue el fruto de una crítica del procedimiento lógico sino que era la que convenía mejor a sus intenciones de hallar una solución de compromiso entre las verdades de razón de Leibniz y las verdades de hecho también de Leibniz y las únicas dignas de tener en cuenta según Hume, quien aún las ideas las reduce a experiencia (empirismo radical).

b. **La filosofía de la matemática en Kant es incidental.** Hay profundos análisis y acierto en problematizar puntos claves. Sin embargo, la preocupación de Kant es el problema de la metafísica. Da la impresión de que algunas de las conclusiones adoptadas por Kant para la filosofía de la matemática tienen por objeto dirimir cuestiones con sus colegas de metafísica. O de que estuviera buscando una respuesta para su pregunta de cómo era posible que la matemática hubiera hecho tantos progresos y no la metafísica.

c. **Los tres tipos de juicios**: Kant distingue tres tipos de juicios: 'Un triángulo tiene tres ángulos', 'La Tierra es circunnavegable', 'Todo número natural admite una descomposición única en producto de factores primos', pertenecen a los que Kant llama respectivamente juicios analíticos, juicios sintéticos a posteriori, juicios sintéticos a priori. Para decir que un triángulo tiene tres ángulos no necesito salir del concepto de triángulo. No sucede lo mismo con las otras dos proposiciones; la segunda fue una proposición discutible durante siglos y su verdad establecida por la experiencia de Magallanes y Elcano, 1519 - 1522. Y para la tercera se necesita una demostración. Empero, esta distinción puede borrarse si se acentúa una de las explicaciones dadas por el mismo Kant. El juicio analítico no se puede negar sin contradicción, pero el tercer enunciado tampoco puede negarse sin contradicción. Los enunciados matemáticos que son teoremas no pueden clasificarse según su negación sea o no una contradicción. La negación del enunciado 'la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos' no puede negarse sin contradicciones dentro de la geometría euclidiana, lo cual lo haría analítico, pero sí fuera de la geometría euclidiana; no es una propiedad intrínseca que posea el enunciado esté donde esté, sino que depende del sistema geométrico formal respecto del cual se la considere. Kant piensa que el enunciado 'El todo es mayor que la parte' es un juicio analítico, es decir, universal y necesario. (El texto de Kant (B 17) parece contrarrestar cierta duda; con razón, pues también había aseverado que los juicios matemáticos son todos sintéticos). Así lo creían seguramente la totalidad de los lógicos y matemáticos, a pesar de una observación de Galileo. Solamente cuando se tuvo claro el concepto de un conjunto infinito se pudo declarar igualmente que la quinta noción común o axioma de Euclides no se cumple entre conjuntos infinitos.

ch. **Todos los juicios matemáticos pueden ser considerados como analíticos,** al escoger un punto de vista que sea análogo al que sirve de criterio a Kant, una especie de homogeneidad o conexidad entre los conceptos. Para atribuir una cualidad a un sujeto no hay que salir del concepto del sujeto, basta conocer el significado de la palabra que sirve para designar al sujeto. En un sistema formal, nada está realmente en la conclusión si no está de alguna manera en las premisas. Esta es la analogía con el criterio de Kant. Análogamente a como se dice el predicado del sujeto, se extrae la conclusión de unas premisas, sin salir del sistema formal. Es lo que da pie, por cierto, para que algunos afirmen que la matemática no es más que una extensa tautología. Con tal enfoque, todos los juicios de la matemática resultan analíticos.

d. **Todos los juicios de la matemática pueden ser considerados sintéticos.** Según Kant, un juicio es sintético si para atribuir el predicado al sujeto debo salir del concepto del sujeto y pasar por la experiencia: una especie de heterogeneidad entre los conceptos causada por un término medio. Ahora bien. Ningún enunciado en un sistema formal está allí gratuitamente. Si pertenece al sistema o es un axioma o ha sido obtenido por aplicación de un axioma o es un teorema o ha sido derivado de un teorema. Ningún enunciado pertenece intrínsecamente al sistema, en el sentido explicitado; hay que salir del enunciado, si así puede decirse. Entonces, en este sentido, todos los juicios matemáticos son sintéticos. Así, la distinción entre analítico y sintético no es tan tajante como aparece en Kant. Son aspectos bajo los cuales pueden considerarse los juicios matemáticos, no son, empero, aspectos característicos. Juicios analíticos hay, por ejemplo, 'Todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles', en los que los dos términos *triángulo equilátero*, *triángulo isósceles*, no se relacionan con toda facilidad, como puede comprobarse con cualquier estudiante desprevenido; en lenguaje kantiano hay que salir de los dos conceptos, para poder compararlos, y luego sí proceder a una síntesis. Este proceso tiene que ver con el paso de lo más general a lo menos general, tan frecuentado en matemática y los teoremas interesantes no son como los que enuncian el hecho trivial de que 'todos los triángulos isósceles son triángulos' sino mucho menos triviales que el de que 'todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles'.

Además, los juicios de la matemática pueden ser considerados como sintéticos por la misma manera de trabajar del matemático y, en general, del científico. Con el solo concepto de triángulo no se puede ir más allá del triángulo. Hay que poner relaciones entre los elementos del triángulo, o entre el triángulo y otros triángulos u otras figuras. Con un concepto, sin salir de él, no se puede hacer geometría del triángulo. Teoría procede etimológicamente de una palabra griega que significa visión o contemplación pero una teoría matemática es el resultado que se puede extraer con unas reglas de procedimiento de una puesta en relación de varios elementos y no el resultado de una actitud contemplativa.

e. **La distinción entre analítico y sintético no tiene en cuenta en Kant, la génesis del conocimiento expresado por el juicio.** Inicialmente, ninguna mente está en condiciones de conocimiento analítico; hay que comenzar por aprehenderlo todo. Autores diversos están de acuerdo en que la distinción entre analítico y sintético tiene un doble aspecto: lógico, psicológico. En el aspecto lógico adjudica su contenido objetivo al juicio, independientemente del sujeto temporal que lo piensa. En el aspecto psicológico se tiene en cuenta el acto del pensamiento en el momento de formular el juicio; sintético, la primera vez que lo formula; analítico, una vez que el predicado haya sido incorporado al sujeto. Sintético para quien no sabe, analítico para quien ya lo sabe. Para Kant, 'el oro es un metal amarillo' es un juicio analítico, sin más explicaciones; 'el oro tiene densidad 19,4' es uno sintético. Sin embargo, ambos son sintéticos, en cuanto no pueden ser enunciados verazmente sin pasar por la experiencia; este no es un juicio del tipo 'el triángulo tiene tres ángulos'. Alguien anota que es curioso que Kant, conocedor de Newton, tome como ejemplo de juicio sintético 'Todos los cuerpos son pesados' (*Alle Körper sind schwere*), juicio tan analítico como 'Todos los cuerpos son extensos', por lo menos para quien ya lo conoce. El Diccionario de la Ciencia, de E. B. Uvarov (segunda edición inglesa en 1944, 1948, Buenos Aires, Lautaro, 277 pp.) describe así al oro: ORO. Au. Elemento químico. Peso atómico: 197,2. Número atómico: 79. Metal amarillo brilloso, de poca dureza. Punto de fusión: 1063°C. Peso específico: 19,4. Es muy dúctil y maleable. El agua y el aire no lo corroen. No es atacado por la mayor parte de los ácidos. Se presenta comúnmente al estado libre. Muchos de sus compuestos son inestables y fácilmente reducibles a oro puro. Se lo extrae de sus minerales y de las arenas auríferas por el procedimiento de amalgamación y el procedimiento al cianuro. El cobre y la plata le comunican dureza; estas aleaciones son usadas para monedas, joyas y dentistería. Sus compuestos son usados en fotografía y medicina. El oro es el más maleable de todos los metales: pueden obtenerse hojas de oro de 0,0001 mm de espesor $\left(\frac{1}{254{,}000}\text{ de pulgada}\right)$. La hoja tiene aspecto oro metálico pero transmite luz verde, es decir, tiene color verde cuando se le observa por transparencia.

Hasta aquí Uvarov ha enunciado unas dos docenas de propiedades. Estas son las propiedades del oro, que le pertenecen como características, que lo individuan entre más de cien elementos. Los científicos se fueron dando cuenta de ellas y ahora pertenecen a la descripción del elemento 79 de la tabla periódica. Cuando piensan en oro lo piensan con estas propiedades conjuntas. Si se quiere hablar de definición de oro, en lugar de descripción del oro, la definición está constituida por la lista de estas propiedades. El físico químico descompone el concepto oro en estas sus propiedades componentes. Un alumno de secundaria, incluso en su examen final de química, lo hará menos bien, en cuanto sólo dará algunas de estas propiedades, que, a pesar de no estar todas constituyen su descripción del oro, si el profesor no se las exige todas. Un profano se contentará con decir que el oro es un metal amarillo; esa es toda la descripción de que dispone, a ello se reduce su definición del oro. Con tan pobre definición, alguien puede estafarlo y venderle cobre por oro, puesto que también es de color amarillo cuando está aleado con el cinc, el latón, como se denomina esta aleación, según el Larousse. ¿Con qué objeto y con qué criterio se clasificarían estas propiedades, unas en analíticas, otras en sintéticas? ¿Se pasa de lo sintético a lo analítico al familiarizarse con los conceptos o con las palabras que los describen? Las palabras no son consecuencia, reflejos, onomatopeyas, ..., de las cosas. El hecho de que la palabra oro nos haga pensar, ipso facto, en los diversos atributos del oro no puede llevarnos a pensar erróneamente que, sin conocer una palabra y un concepto que le corresponda, baste con apretar sobre una tecla para que automáticamente aparezca la tabla de todas sus propiedades, a menos que ya estén codificadas como las del oro. ¿De qué color es el tungsteno? ¿Y el wolframio? Si es una cuestión de familiarizarse, ¿vale la pena introducir la distinción? ¿Sirve la distinción entre analítico y sintético para avanzar en la explicación racional de la matemática?

f. **Kant, como sus coetáneos y como era la tradición, concibió la matemática como ciencia del número y de la magnitud o del tiempo y del espacio**; a pesar de que ya Leibniz había expresado su idea de la matemática universal; en particular, el álgebra universal aplicable a todas las formas de deducción, método característico de toda la matemática que forzosamente hay que tener en cuenta para una filosofía de la matemática. Habría que esperar hasta cuando, por ello llamado por Russell, creador de la matemática moderna, Boole diera el golpe de gracia a la concepción tradicional: "No corresponde a la esencia de la matemática ocuparse de la idea de número y cantidad". Excluye el aspecto logístico de la aritmética, como ya lo hacía Platón, en *República*; no, desde luego, la teoría de números.

g. **Del análisis de Kant resulta que la matemática es posible porque son posibles los juicios sintéticos a priori**; pero, los juicios sintéticos a priori, suponiendo que hubiera criterios para determinarlos, resultan una base nada satisfactoria para una explicación de la matemática actual. Están constituidos en parte por la intuición. Ahora bien, como consecuencia de la creación de las geometrías no euclidianas, se llegó a separar muy claramente a la intuición de los sistemas formales. Dicha tarea comenzada por Pasch la completó Hilbert. Y fue extendida a toda la matemática pura por Bourbaki. La matemática se construye a partir de la intuición, pero aparte de la intuición. Así, la filosofía de la matemática de Kant no es explicación satisfactoria para la concepción actual de la matemática. Obviamente, por las condiciones del desarrollo de la historia, la filosofía de la matemática de Kant no tiene por qué dar cuenta de la matemática creada después de Kant, salvo aspectos muy generales, desde luego.

h. **La distinción de juicios en analíticos y sintéticos no abarca todo tipo de juicios**; es, pues estrecha; Kant enuncia su teoría para juicios categóricos, no hipotéticos, ni disyuntivos; para juicios afirmativos, con raras menciones acerca de cómo se hace la extensión para los negativos; para juicios predicativos, es decir, los que enuncian relaciones entre la parte y el todo. Por consiguiente, toda la teoría de relaciones, creada a partir de 1847, queda por fuera. Vale la pena anotar que un juicio tan sencillo como el de causalidad 'Todo cambio tiene una causa' no es de la forma 'S es P'.

i. **Los ejemplos considerados por Kant están tomados de la aritmética, de la geometría y del álgebra de nivel elemental**. La filosofía kantiana de la matemática solo podría dar cuenta de la matemática anterior a las geometrías no euclidianas, a la algebraización de la lógica, a la aritmetización del análisis; anterior, en general, al replanteamiento conceptual de la axiomática que va a relegar la intuición al proceso previo a la construcción propiamente dicha de los sistemas formales.

j. **Intuición y actividad humana**. Se da por sentado que la intuición de que trata Kant no es la parte de la imaginación requerida casi por cualquier actividad humana y muy especialmente por la creación; la que requiere el metafísico para asimilar el principio de que todo cambio tiene una causa es equiparable a la del matemático cuando prolonga un lado de un triángulo para obtener un ángulo externo. No hay acuerdo acerca de lo que Kant entiende por intuición. Posy (pp. 3-4) reseña la discusión en los años sesenta, de dos especialistas, Hintikka y Parsons. En A 25 (B 39), Kant apunta como criterio para la intuición la singularidad; empero, en A 19 (B 33), apunta la inmediación; finalmente en A 320 (B 376-377) los dos caracteres aparecen unidos. En la discusión acerca de '7 y 5 son 12' el paso por la intuición parece reducirse a la escritura. En un texto citado por Brittan (p. 329, *Kant's philosophy of mathematics*) extraído de la polémica Kant-Eberhard, la intuición descrita por Kant es simplemente el trabajo intuitivo del matemático cuando se propone resolver un problema.

k. **Ideas geométricas e imágenes subjetivas**. No sobra la advertencia de j. dado que en la *Crítica de la razón pura* destaca Couturat estas dos afirmaciones: En esta síntesis sucesiva de la imaginación productora se basan para producir las figuras, las matemáticas de la extensión (geometría) con sus axiomas (B 204). Soy incapaz de representarme una línea, por pequeña que sea, sin trazarla en el pensamiento, es decir, sin producirla gradualmente a partir de un punto (B 203). Estas citas bastan, dice Couturat, para calificar toda la teoría del esquematismo; confunde a la manera de los empiristas, las ideas geométricas con las imágenes subjetivas que son el soporte genético. La idea de línea es tan independiente de la imagen psicológica como de la figura sensible que yo trazo en el pizarrón para representarla. Con el mismo derecho con el que se afirma, prosigue Couturat, que una línea tiene cierta duración puede sostenerse que es de tinta china o de carbonato de calcio. En la frase de Kant parece haber una reminiscencia de una idea que remonta hasta Aristóteles (*De anima* I 4. 409 a 4, cita de Heath en el primer volumen de *Elementos*); es una concepción genética de la línea; posiblemente el fuerte rechazo de Couturat está apoyado sobre el aspecto axiomático, separado netamente del primero, en la axiomática actual.

Es de anotar que hay pasajes donde Kant enfatiza la diferencia ente imagen y esquema: "Ninguna imagen de un triángulo se adecuaría jamás al concepto de triángulo en general" (A 141).

l. **La intuición del matemático según Bourbaki**. Actualmente hay que distinguir tipos de intuición. Los matemáticos han recorrido un largo camino antes de llegar a lo que ahora profesan. En Descartes, en Euler o en Lagrange hay atisbos de un número de dimensiones diferente a las tres espaciales del sentido común; solo a mediados del siglo XIX, Cayley, Grassmann, Plucker, o, Riemann hacen desarrollos matemáticos para un número mayor. A finales del siglo XIX, Poincaré para ilustrar su afirmación de que la intuición es adaptable, sugiere que él ha llegado a intuir en cuatro dimensiones. El geómetra italiano Veronese, por los mismos años, en cuanto investigador de hipergeometrías, modelaba los espacios o variedades que requería, sobre el llamado tridimensional ordinario; estaba convencido de que la geometría n-dimensional hundía sus raíces en la intuición espacial; admitía, empero, que los espacios o variedades n-dimensionales no son enteramente intuibles. ¿Qué pensar de los de infinitas dimensiones, considerados con frecuencia actualmente, tanto en matemática como en física teórica? Así que en geometría o en la misma física, tan cerca del mundo sensible, al parecer, la intuición puede ser del tipo espacial solo en las dimensiones pequeñas. Para Bourbaki, la intuición del matemático, la que no es de tipo espacial y sensible (y que, desde luego, usa también) consiste en un cierto reconocimiento del comportamiento de los seres matemáticos, está ayudada frecuentemente por imágenes de naturaleza muy variada, y fundada primordialmente sobre la frecuentación cotidiana de ellos. Es como un alto grado de familiarización por frecuentación incesante, que permite prever, con equivocaciones a veces, su comportamiento (si se equivoca, no sirve de criterio como querría Kant).

ll. **Intuir antes, demostrar después (Polya)**. Analítico, sintético son voces que han sido utilizadas para designar aspectos bajo los cuales se puede enfocar el pensamiento matemático: un método de trabajo que consiste en ir de la tesis a las hipótesis, recibe el nombre de análisis; y el que consiste en hacer el camino inverso, el de síntesis. El trabajo de solución, de un problema mediante métodos de cálculo se suele llamar analítico y mediante demostraciones se llamó de síntesis; estas denominaciones estuvieron en el centro de una enconada discusión a la cual alude Klein, en 'Programa de Erlangen' (1872) y que Bourbaki considera acabada por dicha obra de Klein. Las acepciones de analítico y sintético introducidas por Kant, hacen entrar la intuición al caracterizarlas; ello sucedió, empero, cuando la intuición proveía a los geómetras de material para las demostraciones, por la imperfección en *Elementos*, por ejemplo, que consistía en la no explicitación de todos los axiomas.

La crítica de tales situaciones hizo que no solamente fueran puestas todas las cartas sobre la mesa, sino, además, que se convinieran reglas de juego muy estrictas. La intuición no tiene más cabida en matemática que en cualquiera otra actividad humana, el juego de ajedrez, por ejemplo: todo se intuye antes, pero todo hay que demostrarlo luego y ningún paso de la demostración tiene como justificación la intuición. Todo paso se argumenta mediante reglas de juego establecidas. La intuición kantiana no tiene ningún papel en la axiomática concebida por Hilbert. Los juicios volverán a ser analíticos o sintéticos como lo eran en concepciones diferentes a la kantiana, en Leibniz por ejemplo.

m. **'Más corta' para una línea tiene sentido matemático en una geometría dotada de métrica;** si no, no. Kant afirma que la noción 'más corta' es atribuida a la recta por una síntesis fundada en una intuición. En alguna ocasión, Kant tomó como definición de recta la propiedad de que solo una puede ser trazada entre dos puntos dados. Habría que demostrar en este caso que la recta es la distancia más corta, propiedad no contenida en la definición; ella no va de sí, es decir, no basta hablar de geometría para que el enunciado aparezca para ser derivado; se requiere que en la geometría haya sido introducida la noción de distancia. La propiedad de ser la más corta tiene sentido en una geometría métrica, no en una afín, en una proyectiva, o en una topológica. En una geometría métrica, es decir, en una geometría en cuyo desarrollo se ha introducido la noción de distancia, se define la noción de longitud de un segmento de recta y luego, la de longitud de una línea curva. Entonces, se puede demostrar que un segmento de recta tiene una longitud más corta que la de cualquier línea quebrada con los mismos extremos. Una demostración análoga puede hacerse en una geometría de Bolyai-Lobachevski, pero no en la geometría sobre la esfera, a no ser que por segmento de recta se entienda arco de círculo máximo, como se hace sobre la esfera de Riemann. Legendre tomó como definición de recta la propiedad de ser la más corta distancia entre dos puntos. Se tiene entonces una proposición analítica. Esto ilustra, una vez más, que la distinción entre analítico y sintético es completamente relativa al sistema formal en el que se está trabajando y nada tiene que ver con la intuición pura o empírica.

n. **Igualdad de figuras y superposición.** Kant afirma (*Prolegómenos* 12) que las pruebas de igualdad de figuras consisten, en última instancia, en la superposición de las figuras; es lo mismo decir que tal prueba es una proposición sintética relativa a una intuición inmediata. Efectivamente, así lo es en *Elementos*; los geómetras, incluso Russell, han empleado tal imagen. Formalmente, empero, debe de hacerse mediante la noción matemática fundamental de función, que establece la correspondencia conceptual entre dos conjuntos la cual elimina el llamado a la superposición mental o física, impropia en la exposición rigurosa, pero no, desde luego, o en el aprendizaje o en la aprehensión.

ñ. **Racionalismo, empirismo, criticismo.** Couturat destaca el hecho de que el enunciado 'La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos', citado por racionalistas, como Descartes o Spinoza, como prototipo de certeza lógica, necesite según Kant, ser fundamentado en la intuición (B 744). A propósito, alguien ensaya esta trilogía, que se obtiene sin forzar la historia de la filosofía:

Tesis: Racionalismo (Descartes, Leibniz)
Antítesis: Empirismo (Locke, Berkeley, Hume)
Síntesis: Criticismo (Kant).

El compromiso del filósofo, de darle parcialmente razón a ambas tendencias, puede explicar algunas insistencias, de otro modo difícilmente entendibles.

o. **Espacio físico y espacio de los físicos.** Una aclaración de Blanché, que finalmente coincide con una de Russell que será citada en z., permite enfocar desde otro ángulo el compromiso mencionado en el párrafo anterior. Para Kant, la geometría de Euclides es verdadera, desde el punto de vista experimental en cuanto modelo perfecto del espacio físico, y, desde el punto de vista racional en cuanto geometría única y lógicamente consistente. Verdad racional en armonía con verdad experimental provocan el apriorismo kantiano. Superar la posición de Kant exige renunciar a la doble verdad.

Renuncia a la doble verdad que no quieren muchos filósofos que siguen sosteniendo (dice Russell en *El método científico en filosofía*, ver *Misticismo y lógica*) que nuestro conocimiento de que el axioma de las paralelas, por ejemplo, es verdadero con respecto al espacio real, no puede explicarse empíricamente sino que, como Kant sostenía, se deriva de una intuición a priori. Según Russell tal posición no puede refutarse lógicamente pero deja de ser plausible al percatarse de la complejidad del concepto de espacio físico. Desde luego, así sean pocas las preguntas epistemológicas que uno se haga y menos las que pueda responder, ellas serán suficientes para darse cuenta de que el espacio físico de los físicos es una abstracción de tipo aristotélico y de que no se puede confundir tal espacio con el percibimos que es lo que interesa en la teoría del conocimiento.

p. **Experiencia posible. Validez objetiva.** El alcance que tiene en Kant el concepto de experiencia posible puede apreciarse, por ejemplo, en el parágrafo 30 de *Prolegómenos*, donde escribe: “De todas las investigaciones hechas hasta aquí, se desprende, pues, el siguiente resultado: ‘todas las proposiciones fundamentales sintéticas a priori no son otra cosa que principios de experiencia posible’, y nunca pueden ser referidas a las cosas mismas, sino solamente a los fenómenos como objetos de la experiencia. Por eso también, la matemática pura, como la ciencia natural pura, no puede referirse jamás a otra cosa que a puros fenómenos y solo puede representar lo que hace posible, en general, la experiencia o lo que, puesto que se deriva de los principios, debe ser representado siempre en alguna experiencia posible”. Imposible estar de acuerdo con Kant, actualmente, en cuanto a la matemática pura o formal, cuyo control de calidad es exclusivamente lógico.

Esta es una de aquellas circunstancias en que se imagina uno a Kant escribiendo acerca de matemática pero pensando en la metafísica. La experiencia posible es el argumento máximo contra esa metafísica que no hace progresos como la matemática y que nada como la espuma. Con esta mira, la filosofía de la matemática de Kant está forzosamente restringida a las tres dimensiones reconocidas del mundo físico (por lo demás estaba convencido de que cuarta dimensión es una pura ficción). Más de tres dimensiones echarían a perder la explicación que Kant busca para diferenciar la matemática de la metafísica. Experiencia posible y validez objetiva en tres dimensiones le facilitan una cabal exposición.

Los defensores de Kant suelen destacar el pasaje A 220, o, B 268: "… el concepto de una figura encerrada entre dos rectas no implica contradicción alguna, ya que los conceptos de dos rectas y su cruce no implican la negación de ninguna figura". (La expresión 'negación de una figura' como la de 'demostrar un triángulo', B XII, no tiene sentido matemático, a primera vista). G. Brittan (*Kant's philosophy of science*. 1978. Ver: Posy, *Kant's philosophy of mathematics*. pp. 214-215) al parecer compone una novela, resumida en la siguiente frase que muestra o que G. Brittan ignora la historia de las geometrías no euclidianas, o que su culto de Kant va hasta el fanatismo: "Fue la apreciación de Kant del hecho de que las geometrías no euclidianas son consistentes (algo de lo cual, posiblemente lo puso al corriente su corresponsal, el matemático J. H. Lambert) la que, entre otras diversas consideraciones, lo llevó a decir que la geometría euclidiana es sintética. El desarrollo posterior de las geometrías no euclidianas no hace sino confirmar este punto de vista" (!!!). Es de pensar que si Lambert comunicó a Kant alguna noticia al respecto, no se la comunicó nada completa.

En diversos pasajes Kant insiste en que la imposibilidad de un concepto puede no surgir del concepto mismo, en cuanto no sea contradictoria, sino de las condiciones del espacio que lo harían no construible. El profesor Friedman destaca los pasajes: A 220-221 (B 268), A 165-166, (B 206-207), A 239 (B 298); y concluye: "Por lo tanto, no es la intuición pura, sino únicamente la intuición empírica la que es capaz de proveer un modelo para las verdades de la matemátiva" (pp. 100-102).

Estos son argumentos centrales de la *Crítica de la razón pura* no aceptables para la matemática y que no pueden ser olvidados para quedarse solamente con otros mucho más cercanos de concepciones más compartidas actualmente: "Conocer algo a priori es conocerlo a partir de su mera posibilidad" (Citado por Friedman, p. 127). "El nuevo método del pensamiento, a saber, solo conocemos a priori de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas" (B XVIII).

En cuanto a la validez objetiva, en la Observación I, de *Prolegómenos*, despliega Kant su compromiso con la doble verdad, mencionada por Blanché. Los fenómenos externos deben concordar de un modo necesario y el más preciso con las proposiciones del geómetra. Esta convicción de coincidencia absoluta entre matemática y realidad, herencia de los griegos cultivada, sin mucho examen crítico, por lógicos, matemáticos y filósofos, juega en Kant el papel de un prejuicio. Por su investigación en metafísica, Kant tiene que explicar la física de Newton y la matemática de Euclides como ciencias. Ni en *Crítica de la razón pura* ni en *Prolegómenos* hay rastros de duda sobre límites de aplicación o de observación; al contrario, la más alta precisión. ¿Cómo puede explicarse tal validez objetiva? A condición de que la geometría se refiera a objetos de los sentidos, de que no sea una fantasía o invención del geómetra, de que la sensibilidad sea como el punto de encuentro entre el entendimiento y los objetos como se nos manifiestan, a condición de que la forma de la sensibilidad sea el fundamento de la geometría; así los fenómenos no pueden sino concordar con lo que demuestra el geómetra.

Si no, "no se comprende cómo podrían concordar necesariamente las cosas con la imagen que, por nosotros mismos y de antemano nos forjamos de ellas" dice Kant. Indudablemente, la explicación kantiana había sido profundamente meditada y mientras no haya como matemática, sino geometría euclidiana tridimensional puede ser difícilmente rebatible, como confiesa Russell. Pero, el hecho es que muy diversas construcciones mentales matemáticas, resultan ser aplicables (dentro de límites de error controlables) en el sentido de que enmarcan comportamientos observables, sin que la explicación de Kant alcance a cobijarlas, ni remotamente. Piénsese, por ejemplo, en las predicciones del cálculo de probabilidades. Suponiendo que fuera admitida en el campo restringido de la geometría ordinaria, la teoría de la validez objetiva, por una parte, no admite prolongamiento; por otra, se excede en la creencia de que la concordancia es absoluta, sin tener en cuenta los límites de aplicación.

Es más razonable renunciar a la idea de validez objetiva, porque ha sido forjada para explicar solamente lo que era toda la ciencia demostrativa para Kant, vale decir, *Elementos* de Euclides y la física de Newton; por imperecederas que Kant declare estas obras, constituyen actualmente una mínima expresión en el cúmulo de conocimientos científicos posteriores a ellas; y, por ejemplo, *Elementos* siendo como es una síntesis formal (no un simple apilamiento enciclopédico) admirable de casi toda la matemática creada por los griegos, sin embargo, no alcanza a satisfacer las exigencias actuales como obra de base, como si lo hace *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert.

Ya sin el compromiso de ser apodícticamente cierta, tal teoría pasa a ser meramente una en la lista de las explicaciones posibles, en la reserva de teorías matemáticas a donde acuden los físicos, por ejemplo, en busca de un marco teórico apropiado. Unas resultarán más apropiadas que otras en cuanto permitirán explicar más sucesos dentro de una determinada situación. Este criterio es el que decidirá a los físicos a utilizar una teoría de preferencia a otra. A Einstein cuando utilizó la geometría de Riemann y no la de Euclides.

Una genial anticipación de Kant, a la cual desafortunadamente no se atuvo fue la siguiente: “Una ciencia de todas las especies posibles de espacio sería sin duda alguna la más alta geometría que pudiera emprender una inteligencia finita” (*Gedanken von der wahren Schätzunbg der lebendigen Kräfte* §10. 1747. Citado por Brunschvicg, p. 290).

q. **Kant y la demostración del teorema I 32 de *Elementos*.** ¿Cómo surgen los problemas matemáticos? Una clasificación que puede hacerse es ésta: unos provienen de fuera de la matemática, otros surgen en el proceso mismo de la investigación matemática, un tercer tipo de problemas se origina en la crítica de los métodos aplicados por los matemáticos, sea para resolver problemas de los dos tipos anteriores, sea para generalizar esos mismos métodos. A veces, la situación consiste en ejemplos exhaustivamente examinados y para los cuales se logra fabricar una explicación que les conviene. A veces, al intentar aplicar un resultado conocido a un caso determinado se halla que este es patológico, que no puede tratarse por la teoría conocida; si el matemático logra confeccionar otros ejemplos patológicos del mismo tipo se hará necesaria una teoría más general, si es posible, que cobije los casos patológicos sin invalidar la teoría de la cual resultaron tales patologías.

Ni esta situación delineada, ni otras que podrían serlo, caen dentro del esquema descrito en *Crítica de la razón pura* sobre la manera de trabajar del metafísico y del matemático. Lo allí descrito corresponde a la demostración ya conocida de un teorema: no corresponde siquiera a las situaciones de resolución de problemas, resolubles con teorías conocidas, ni mucho menos al de la investigación, en donde lo primero que hay que hacer es ensayar diversas salidas posibles de la situación problemática, sin que pueda echarse mano de otro método que el de ensayo y error. Los resultados parciales pacientemente obtenidos se van acumulando para intentos posteriores de explicaciones apropiadas. Da la impresión de que el metafísico que observa Kant no ha estudiado su lección, como sí lo ha hecho el matemático, y que Kant no le da tiempo al metafísico de buscar alguna manera de quedar bien. Es cierto que no puede construir conceptos; le es lícito, empero, echar mano de un caso concreto (como se ve obligado a aceptarlo para la causalidad), recortar las tres esquinas de un triángulo dibujado y ponerlas una al lado de las otras por el mismo lado de una recta.

En la demostración, ya conocida, de un teorema el trabajo de la intuición está ya fijado, se reduce al trazo, que se conoce cuando se ha estudiado la lección, de alguna o algunas figuras; en realidad, éstas sirven a quien expone como hilo conductor de la exposición y a quien escucha como imagen auxiliar para la representación interior o del mundo inteligible, verdadero objeto del discurso que oye.

Para resolver un problema ya se requiere más, así esté plateado dentro de una teoría conocida donde, en principio, tiene solución. Quien tiene por tarea resolver un problema no está en tan buenas condiciones como quien tiene que demostrar o recitar la demostración ya conocida de un enunciado. En primer lugar, tiene que entender el problema, es decir, intuir la situación donde se presenta y en ello se puede estar de acuerdo con Kant, en cuanto a lo de intuición, no en cuanto a la seguridad con la que el geómetra de Kant hace trazados determinados y ninguno de tanteo; tales intentos deben conducir a esquemas a los que sea posible aplicar conocimientos que ya se poseen: teoremas o algoritmos. Como en el resto de las obras humanas, es requerido aquí el esfuerzo de la imaginación; pero todo lo que se haya intuido tiene que ser corroborado mediante el control que suministra la lógica; solo la lógica puede garantizar una solución. El trabajo matemático necesita uno y otro componente, imaginativo y lógico; la ventaja que lleva sobre el metafísico en lo tocante a la geometría es que tiene su imaginación más adiestrada. Se trata, en todo caso, de fases del trabajo, porque la parte lógica, 'largas cadenas de razones', no puede contener remanentes de intuición: a partir de la intuición, pero aparte de la intuición.

Lo dicho respecto a la solución de problemas hay que aplicarlo a la investigación matemática avanzada, donde se consideran problemas no resolubles con las técnicas conocidas. Se trata, desde luego, de situaciones mucho más complejas.

r. **La paradoja de los objetos simétricos** (mencionada ya en Leibniz) es paradoja en tiempos de Kant, todavía y lo seguirá siendo un tiempo más, mientras los matemáticos no se den cuenta de cuán importante es la consideración del orden. El tema del orden en geometría es tratado por Pasch en los años ochenta del siglo XIX. Y son precisamente las relaciones de orden las que hacen posible una explicación para la paradoja de los objetos simétricos. Se tiene una relación de orden y su relación inversa. Una figura geométrica y su imagen especular. En el plano orientado, ningún movimiento dentro del plano podrá transformar un ángulo orientado, un triángulo orientado... en su imagen especular. Sobre una recta orientada, dos segmentos que tienen la misma orientación pueden superponerse, como diría Euclides, pueden ser transformados el uno en el otro; más precisamente, se corresponden biyectivamente mediante una aplicación que conserva la orientación. En tres dimensiones, dos poliedros que tienen la misma orientación se corresponden mediante una biyección que conserva la orientación; pero, una biyección que conserva la orientación no puede hacer corresponder un poliedro y su imagen especular; puede decirse también que la imagen especular es una biyección en tres dimensiones que no conserva la orientación. Contra la opinión de Kant, existe, pues, una diferencia inteligible y expresada lógicamente entre un objeto y su imagen especular. Sus partes son iguales, pero no están dispuestas de la misma manera; las relaciones de magnitud son las mismas, las de orden inversas. Y no hay tal de que el entendimiento pueda formar conceptos que no pueden explicarse mediante el entendimiento y cuya comprehensión dependa de la intuición, añade Couturat.

rr. **El ser humano, naturalmente euclidiano.** Todo el tiempo que los seres humanos hayan hecho inferencias y las hayan hecho con base en el sentido común (armonización interior de las experiencias de los cinco sentidos) es seguro que el resultado en cuanto a la forma de la Tierra haya sido el que la Tierra es plana. La audacia mental de los filósofos jonios desequilibra ese sentimiento de evidencia local al plantear la pregunta globalmente. La respuesta avanza con lentitud por entre la formas geométricas: disco, cilindro y esfera. Efectivamente, localmente la Tierra es plana, globalmente es una esfera.

La explicación racional recorre estadios similares. Se ha interpretado la obra de Kant en el sentido de que extendería carta de derecho a la situación de hecho que consiste en el empleo de la geometría euclidiana en toda la práctica social humana; Kant habría establecido que el hombre es naturalmente euclidiano.

No había otras geometrías (lo cual no es del todo cierto, dado que Desargues y Pascal ya habían concebido la proyectiva) y para físicos y geómetras no se ha planteado, por tanto, la pregunta acerca de la geometría de la realidad (suponiendo, como hipótesis de trabajo solamente, que ya se esté de acuerdo sobre este término); pero una vez admitida la logicidad de las construcciones de Bolyai-Lobachevski y de Riemann, la cuestión llega. Muchos aceptan (es cuestión de opinión, dado que que no se puede plantear como una proposición dentro de un sistema formal) que la realidad ni es euclidiana, ni es no euclidiana, sino que estas teorías son como hormas para tratar de entender lo que nos rodea, el mundo sublunar, el sistema solar o el universo mismo. Como sistemas formales las tres geometrías están en pie de igualdad para los geómetras y mientras alguien no quiera aceptar tal neutralidad, seguirá atado a la noria en el problema de los fundamentos.

Por un procedimiento válido para variedades muy abstractas y generales, los geómetras establecen que toda variedad es localmente euclidiana; así pues, coinciden con artesanos y constructores, al asociar en el caso de la Tierra, un plano tangente en cada punto y considerar los sucesos locales como si sucedieran en el plano, donde la geometría más apropiada es la euclidiana.

Hay partidarios de Kant que no quieren perder la doctrina del filósofo, pero de esta circunstancia de euclidianidad local no pueden apresurarse a extrapolar a nada global; por el contrario, deben tener en cuenta que, por ejemplo, las rutas aéreas y marítimas sobre el globo terrestre se calculan con base en la esfericidad de éste y que con la misma base se trabaja en cartografía y en otras aplicaciones; las geometrías no euclidianas no son, de ninguna manera, meras curiosidades, sino sistemas formales en el mismo nivel que la geometría euclidiana, con aplicaciones en la física teórica y con aplicaciones prácticas. Partir de la idea, para ser fiel a Kant (quien, por cierto, respecto de algunos temas específicos no hizo antes las mismas afirmaciones que se consolidaron incidentalmente en *Crítica de la razón pura*) de que solo es real la geometría que sirve para las construcciones de nuestro ámbito, es un prejuicio y la actitud de aseverarlo por principio, temeraria.

s. **Carácter no necesario de la geometría euclidiana.** Gauss escribía a H. W. M. Olbers en abril de 1817: "Cada vez estoy más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser probada; no, por lo menos, por un entendimiento humano, ni para un entendimiento humano". Con toda la capacidad matemática de Gauss (también en geometría dejó amplio testimonio de su genialidad como creador), con toda la experiencia universitaria, docente y en observaciones que ya había acumulado a sus cuarenta años es de pensar que hubiera llegado a estar profundamente convencido de la necesidad de la geometría euclidiana y que no pudiera llegar a desprenderse de esa convicción sino muy poco a poco, pero de manera definitiva como lo manifiesta en los concluyentes propios términos citados. Kant, anterior a Gauss y poco al corriente de la investigación geométrica de su tiempo, tuvo en cambio su convencimiento durante toda su vida intelectual y llegó hasta ponérselo como tara a la naturaleza humana. No hubo, infortunadamente una circunstancia, como el libro de Hume en otro aspecto, que hiciera reflexionar a Kant sobre lo fundado de su propuesta; sobre todo que trabajos de pensadores anteriores y coetáneos (Saccheri, Klügel, Lambert) parecían indicar ya el camino opuesto al de la proposición de Kant. Gauss, profundo geómetra, niega rotundamente la necesidad de la geometría euclidiana.

t. **Kant y la lógica.** A pesar de que estas observaciones están expresamente restringidas a lo tocante con geometría, vale la pena destacar una crítica de

Couturat acerca de la concepción lógica de Kant, pues, finalmente refluye sobre toda la filosofía crítica.

Según Couturat, el progreso de la lógica y de la matemática en el siglo XIX ha impugnado las opiniones de Kant y dado razón a Leibniz. Kant, para comenzar, tiene una idea poco profunda de la lógica y de la matemática; lo mostró la evolución posterior de ambas ciencias; el trabajo de Kant en lógica no es el de un continuador de la obra de Leibniz, que tiende a superar la lógica aristotélica tradicional, sino al contrario un afianzamiento en esta tendencia, las críticas que hizo no tocan sino aspectos adjetivos de la lógica escolástica; no alcanzó a vislumbrar que la lógica no había desarrollado sino uno de sus capítulos y que tendría que realizar enormes progresos, antes de poder desempeñar la función que actualmente cumple en matemática. [Couturat no alcanzó a ver la importancia creciente de la lógica en matemática después del nacimiento de las lógicas polivalentes y de los teoremas de Gödel, sin hablar de la investigación provocada por la obra de Frege, que hacia 1900 no había comenzado a tener el aprecio que ha tenido posteriormente]. En resumen, una lógica en cierne le parece a Kant perfecta; ahora bien, ella es la base de la lógica trascendental de Kant; ésta, concluye Couturat, debió de quedar incompleta, puesto que la tradicional, base de su obra, lo era en tal medida.

u. **El todo es mayor que la parte.** A pesar de que tampoco tengan que ver directamente con la geometría, vale la pena traer a cuento dos críticas de Couturat porque se relacionan con pasajes de Kant citados con frecuencia. (*Crítica de la razón pura*, B 15. B 205. Capítulo 4 del presente volumen).

Dado que el concepto de la suma de 7 y 5 implica la reunión de ambos números en uno solo, por ello mismo contiene a este número, el cual queda determinado de manera única.

Entre 7 y 5, por una parte, y 12, por la otra, no solo hay igualdad sino identidad. Por lo demás, se puede ver que $7 + 5 = 12$ es analítico, dado que se obtiene mediante meras definiciones (B 12. B 746. B 747) porque

$$7+5 = 7+(4+1) = 7+4+1 = 7+(3+1)+1 = 7+3+(1+1) = \cdots = 11+1 = 12.$$

Así, pues, $7 + 5 = 12$ es una proposición analítica, no necesita intuición alguna. A no ser que el hecho de escribir sea salir del concepto y pasar a la intuición, Si así fuera, entonces, absolutamente todo sería sintético: usar la palabra sería ya salir del concepto, concluye Couturat.

En referencia al pasaje B 205, comenta Couturat: Parece que según Kant, para obtener el número 12 no basta reunir en el pensamiento los números 7 y 5, tal como se reúnen dos conceptos parciales para obtener un concepto total; hay que adicionarlos, y esta operación, según Kant, solo puede efectuarse en la intuición. Aceptada la distinción, se vuelve contra Kant, porque el sujeto no es 7 y 5, sino $7 + 5$; lo que significa que para formarlo no basta con reunir los dos miembros sino que deben ser sumados, precisamente lo que significa el signo $+$. Si Kant sólo los reúne, no tiene derecho a hablar de suma. (Para estas y otras críticas, Couturat ha tomado material en otros autores cuyas citas aparecen en el fascículo; lo propio sucede para lo que sigue).

'El todo es mayor que a parte', '$a + b$ es mayor que a', no puede ser una proposición analítica como afirma Kant. En efecto, si no se concluye analíticamente que $7+5$ sea 12, menos aún puede saberse cuál es la suma de a y b, ni por consiguiente, si sea mayor que a. Por otra parte, "mayor que" es menos analítico que "igual a", así que Kant ha debido decir que "mayor que" reposa en la intuición. No debió creer que el predicado "mayor que a" estuviera contenido en el sentido lógico del sujeto '$a+b$'. Otra pregunta de Couturat: ¿Cómo descansaría '$a + b$ es mayor que a' en el principio de contradicción para que fuera analítica?

v. **Eliminando la figura resulta factible descubrir todos los axiomas que se necesitan (Russell).** Una axiomatización que necesita figuras es una axiomatización defectuosa. Es cierto que desde los pitagóricos, el matemático se vale de figuras para hacer sus explicaciones; pero, Platón o Aristóteles observan con toda razón que es solo un medio didáctico para sostener la atención del oyente; quien discurre matemáticamente frente a una figura, traduce lo que piensa mediante trazos sobre la figura y no al revés; a pesar de que haya textos, incluso universitarios, en los que perece que las conclusiones se extraigan de lo que va resultando en la figura. Infortunadamente, esta es la idea que tiene Kant del empleo de la figura, como se ve en el citado pasaje relativo a la demostración del teorema I 32 de *Elementos*. Una práctica para la enseñanza, no puede alcanzar de ninguna manera la función epistemológica que le asigna Kant.

El papel asignado por el matemático a las ilustraciones está elocuentemente enunciado por Russell: “Eliminando la figura resulta factible descubrir todos los axiomas que se necesitan”, enunciado completamente contrapuesto al de Kant.

w. **Algunos partidarios de Kant resistieron la divulgación de las geometrías no euclidianas.** Si se tiene en cuenta dos hechos (no se trata de opinions), el de la utilización teórica práctica de las geometrías no euclidianas, y, el de que los sistemas formales tienen todos la misma categoría lógica y matemáticamente hablando, entonces, no es entendible que haya quienes, guiados por la teoría kantiana, parezcan conceder una mayor categoría ontológica a la geometría de Euclides. Una geometría puede tener valor instrumental o de uso mayor que otra, pero como sistemas formales tienen el mismo valor intrínseco.

x. **Matemática y metafísica.** Kant tuvo varias explicaciones, en cuanto a la diferencia entre matemática y metafísica. La que finalmente figura en *Crítica de la razón pura*, es la de la construcción de conceptos en la intuición. Ambas disciplinas son conceptuales; Kant está comprometido a explicar la validez objetiva, según la cual, las cosas como nos aparecen deben concordar con la imagen que nos habíamos formado previamente de ellas; lo cual lleva a Kant a pensar que espacio y tiempo son formas a priori de la sensibilidad, donde se encuentran y se horman tanto las intuiciones concernientes a los conceptos del geómetra, como las impresiones de las cosas sobre nuestra sensibilidad; así es posible, según Kant, la validez objetiva. Con abstracciones aristotélicas, construidas substrayendo propiedades de los objetos, la geometría resulta una especie de física. La geometría es tanto ciencia pura, a priori, como ciencia física, que versa sobre objetos de la realidad externa. Tal explicación kantiana recoge la herencia aristotélica pero está forjada con miras a la constitución de la metafísica como ciencia, no a la explicación de la matemática en sí. Después de la aceptación de las geometrías no euclidianas y a todo lo largo del siglo XX hay matemáticos que han pensado mucho en su ciencia (la epistemología inmanente, quizás, de Piaget); desde el punto de vista de los fundamentos (o filosófico) hay que distinguir entre la matemática como sistema formal (matemática pura) que crea la matemática que ha de emplearse como instrumento en las otras ciencias, lo que constituirá las aplicaciones de la matemática el otro término que hay que distinguir. En el estadio de formación interviene la intuición, que es de dos tipos: espacial, la requerida por Kant para la validez objetiva, y otra, de tipo no espacial.

Mediante interpretación de la geometría como sistema formal se obtiene una geometría física o aplicada, que no coincide, sin más, con los objetos, como quiere Kant, sino que se adapta, dentro de ciertos límites de aproximación, a la parcela del mundo externo que el aplicante está interesado en comprender. Tal aplicación es un proyecto diferente del de construirla; quien la va a aplicar ya la conoce; no conoce cuál de las geometrías existentes le hace comprender mejor; ello requiere de intuiciones diversas y en tal circunstancia, sí hay una imagen que precede al encaje entre la teoría y la práctica que se trata de verificar. La matemática pura, es decir, la matemática como sistema formal, toda, incluida la geometría, es conceptual; con intuiciones espaciales generalmente imposibles por tratarse de relaciones muy complejas o por el número de dimensiones, por ejemplo; en una palabra, es una disciplina conceptual sin construcción de conceptos. La matemática aplicada, es un proyecto que se realiza y en tal calidad puede aceptar la explicación kantiana, de la construcción de conceptos en la intuición, tal vez.

Para ver la diferencia entre matemática y metafísica basta ojear sendos tratados, entonces, saltará a la vista, que la argumentación filosófica, por estricta que sea no se atiene a la lógica como tiene que hacerlo la matemática. Para Platón (y la de Kant es un retroceso respecto a la de Platón) la distinción estaba en que la matemática no puede desprenderse de las hipótesis como tiene que hacerlo la filosofía. Descartes y Leibniz pensaban en una matemática universal, con signos específicos, de cálculo fácilmente controlable. Kant cede a veces a esta tendencia presente en la escuela de Leibniz en la que Kant se había educado filosóficamente hablando; quizá, empero, por estar pensando una filosofía de la matemática para arreglarle los problemas a la metafísica, se apartó de la línea de Platón, de Descartes o de Leibniz que suministran explicaciones más en avenencia con la matemática actual que la de Kant. Kant se aleja de Platón y se acerca a una tendencia incubada entre los estudiosos de Aristóteles, la de reducir la matemática al estudio de la cantidad (magnitudes, quanta, como en geometría; mera cantidad, quantitas, como en álgebra. *Crítica de la razón pura.* B 745). En *Lógica* se pronuncia contra quienes distinguen la filosofía y la matemática, en cuanto la primera trata de cualidades y la segunda de cantidades; pero no porque quiera dar una mayor extensión de objeto a la matemática, sino porque la filosofía lo abarca todo y por ende la cantidad. Es la concepción tradicional de la matemática desde los griegos: figuras, magnitudes y números; la matemática universal de Descartes o de Leibniz son ocurrencias extemporáneas de sus autores. En *Lógica* (Parte I 2), Kant luego de reiterar que la filosofía es discursiva y la matemática intuitiva (en cuanto su conocimiento se hace posible según Kant, intuitivamente), da la razón de por qué es así: "las magnitudes pueden ser construidas en la intuición a priori, mientras que las cualidades, por el contrario, no pueden ser representadas en la intuición". Ahora bien, desde casi comienzos del siglo pasado, la matemática ha desbordado, si es que de veras estaba confinada a él, y ya se han anotado algunos contraejemplos, el marco de la categoría de cantidad.

Una vez más, la diferencia entre matemática y filosofía, está en la manera como la una y la otra emplean la lógica, y no en la manera como la una y la otra se sirven de la intuición; ambas la necesitan, no en su constitución sino, precisamente, para constituirse.

Una obra filosófica como *Ética*, de Spinoza, compuesta según su autor, como quien hace geometría, es mucho más difícil de analizar, desde el punto de vista de la argumentación, que su modelo que sería *Elementos*: en esta obra de Euclides, hay imperfecciones lógicas en la selección de los primeros principios, por ejemplo, pero no se ha encontrado un solo enunciado que sea teorema allí y no lo sea para un matemático de fines del siglo XX (Bourbaki). Y sería temerario afirmar que las proposiciones del primer libro de *Ética* puedan derivarse sin más, de los primeros principios escogidos por Spinoza.

En lo textos mismos de Kant, se pueden anotar más que imperfecciones lógicas. Nada más que una muestra: en B 66 (CRP) se lee esta inducción apresurada "Por tanto, no solo es posible o probable... sino que es indudablemente cierto...". Este giro argumentativo es bastante frecuente en *Crítica de la razón pura*, o en *Prolegómenos*; ver por ejemplo, la argumentación con la que Kant pretende establecer que espacio y tiempo son formas a priori de la intuición. Si como ejercicio se intenta esquematizar la derivación, como se hace en el capítulo 9 del primer volumen de la presente obra con proposiciones de *Elementos*, o en el capítulo octavo del presente segundo volumen, con proposiciones de *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, el lógico tendría que saltar sobre lagunas en la demostración como las anotadas de generalización apresurada, lo cual en sana lógica significa que la demostración de las respectivas proposiciones kantianas es imposible, a menos que no lo sea la suplencia de las carencias.

y. **Otras filosofías de la matemática.** Al hablar de filosofía de la matemática, es preciso referirse a Platón, muy de paso a Aristóteles, a Descartes, a Leibniz. Dentro de la matemática misma surgieron en los primeros años del siglo XX, tres tendencias: intuicionismo (Brouwer, Heyting); logicismo (Frege, Russell, Whitehead); formalismo (Hilbert, Bourbaki); se ha estudiado la última en varios capítulos, las dos primeras no son estudiadas aquí; ni lo son las opiniones filosóficas de matemáticos como Hamilton, muy cercano a Kant o como Kronecker, antecesor del intuicionismo; las de Poincaré han sido citadas en varios pasajes.

El filósofo J. S. Mill, como el físico alemán H. Helmholtz, como el geómetra alemán M. Pasch (en cuanto se refiere a las aplicaciones de la matemática) sostuvieron tesis extremas: "Los conceptos de la matemática son empíricos". "Los postulados de la matemática son verdades experimentales". La verdad de un teorema sería más una acumulación de casos favorables que una derivación estrictamente con base en reglas lógicas. Pero ya Galileo o Leonardo da Vinci habían notado que millares de casos en favor no forman un argumento. Kant dice muy bien que la experiencia nos muestra lo que es, pero no que lo que es pueda ser de otra manera; y actualmente el aspecto combinatorio es uno de los peculiares de la matemática, lo cual muestra la pobreza de la concepción de Mill, que proviene de los empiristas ingleses, Locke o Hume.

El empirismo, afirma Couturat, pretende que la geometría demuestre necesariamente sus teoremas en ejemplos particulares y concretos y agregue a cada demostración algo así como "la misma demostración podría repetirse en toda figura análoga".

Cabe anotar que Herbrand, al describir someramente el método de los "procesos finitos", de Hilbert, empleó expresiones que recuerdan las de los empiristas.

Arquímedes se guió para la cuadratura de la parábola (que luego demostró con toda probidad mediante el método de exhausción) por experiencias de peso de cuerpos recortados según dicha curva.

Teóricamente es imposible construir un heptágono regular con solo regla y compás (célebre teorema demostrado por Gauss a los diez y nueve años de edad). Sin embargo, hay textos de descriptiva (técnica de dibujo llamada a veces geometría) en los que figuran procedimientos que permiten obtener el trazado de un heptágono regular, valiéndose solamente de regla y compás. Tales dibujos bastan para la práctica, pero con la concepción filosófica de los empiristas, llevarían al falso conflicto entre la demostración matemática de que tal construcción es teóricamente imposible y la construcción aproximada: querer que el diseño por bien calculado que sea, coincida con el concepto, es tan descabellado como confundir un número irracional con una de sus aproximaciones, cuando teóricamente tiene infinitas.

z. **Matemáticos y juicios sintéticos a priori.** ¿Piensan los matemáticos que los principios de su ciencia son analíticos o sintéticos a priori? Ernst Snapper se ocupó de la cuestión: “Are mathematical theorems analytic or synthetic?” *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 3. N 2. 1984. pp. 85-88.

Si lógica es no solo lógica matemática sino más ampliamente, “razonamiento independiente de la experiencia y de la intuición”, los teoremas de la aritmética, para Frege se basan en la sola lógica, es decir, son todos analíticos; por el contrario, los de la geometría se basan en la intuición del espacio y son todos sintéticos a priori. Snapper no las hace, pero son indispensables observaciones como las siguientes: Frege, profundo investigador en lógica (para algunos parece ser el mayor lógico de todos los tiempos) y en fundamentos de la aritmética no admitió los juicios sintéticos a priori de Kant en sus dominios de investigación, pero sí los admitió para la geometría, que Frege llegó a estudiar a fondo solamente años después. No se sabe si posteriormente a estos estudios haya desechado igualmente los juicios sintéticos a priori en geometría y haya opinado que todos los juicios de la matemática sean analíticos. Quizás, su adhesión a la teoría kantiana no se lo permitió, sabido es que jamás quiso admitir las geometrías no euclidianas.

Russell mantuvo que todos los teoremas matemáticos son analíticos, otra opinión no enmarcaría dentro de su logicismo; sin explicar, dice Snapper, por qué proposiciones analíticas pueden dar tanta información, observación que da a entender que para Snapper la ida kantiana está ya establecida. He aquí una apropiada respuesta. Para Russell (“La matemática y los metafísicos". *International Monthly*. Vol. 4. 1901. Traducción española en el volumen *Misticismo y Lógica*) "ahora se ve que la peculiar posición que la geometría ocupaba en la época de Kant era una falsa ilusión". Russell descompone los juicios sintéticos a priori según su aspecto lógico (geometría pura o formal) o su aspecto físico (aplicación de la geometría). Estos son los términos de Russell. El problema que interesa a Kant en la Estética Trascendental es primordialmente epistemológico: "¿Cómo llegamos a tener un conocimiento a priori de la geometría?". La importancia y alcance de esta cuestión se han modificado mucho con la distinción entre los problemas lógicos y físicos de la geometría. Nuestro conocimiento de la geometría pura es a priori, pero es totalmente lógico. Nuestro conocimiento de la geometría física es sintético, pero no es a priori. Nuestro conocimiento de la geometría pura es hipotético, y no nos permite afirmar, por ejemplo, que el axioma de las paralelas es verdadero en el mundo físico. Nuestro conocimiento de la geometría física nos permite afirmar que ese axioma se verifica aproximadamente pero no exactamente, en razón de la inevitable inexactitud de la observación. De esta suerte, con la separación que hemos hecho entre la geometría pura y la geometría física, el problema kantiano se derrumba. Hasta aquí Russell.

El lógico W. V. Quine arguye que no puede darse una definición de juicio analítico filosóficamente aceptable y que por tanto debe dejarse de lado la clasificación kantiana respectiva.

Poincaré, contra el logicismo de Russell sostiene que la deducción matemática a partir de sola lógica es imposible. Según él, la demostración por recurrencia (que consideraba, no sin razón, como una secuencia infinita de silogismos) no era lógicamente justificable y debe basarse por consiguiente sobre una intuición original específica [Beth. p. 115].

Este es el meollo de la idea de Kant, pero los juicios sintéticos a priori de Poincaré no son los enunciados corrientes de la matemática, sino el principio de inducción completa por ejemplo [Beth. p. 69].

Continúa Snapper con la opinión de los intuicionistas, para quienes toda la matemática tiene su base en construcciones mentales, primordialmente, la de los números naturales, a partir de la cual se genera cualquiera otra actividad matemática de manera que ya no se necesita, por ejemplo, intuición alguna del espacio, ni para la construcción de la geometría.

Según Snapper, para Ayer, todos los juicios matemáticos son analíticos porque su verdad depende únicamente de la definición de los símbolos que involucra, es decir, por la concepción misma de lo analítico.

Snapper se deshace rápidamente del logicismo dado que la matemática se reduce, en realidad a la teoría de conjuntos, no a la sola lógica, puesto que ciertos axiomas, el del infinito, por ejemplo, no son de tipo lógico (Hilbert ya lo había sugerido en una respuesta a Russell, sin nombrarlo). Pero Snapper reduce simplistamente los argumentos, de Ayer en particular, de quienes opinan que todos los teoremas son analíticos. La idea de Ayer no es que los teoremas se sigan de las meras definiciones, lo que tendría que ser una afirmación temeraria proferida por alguien que nunca hubiera estado enfrentado a un buen teorema, sino la de que bastan los implementos del sistema formal para demostrarlos, sin necesidad de salir a la experiencia pura propugnada por Kant. (Habría que salir del sistema formal porque entre los elementos de estos, no figuran la intuición) (Ver el comentario en la letra ch).

La contribución que quiere aportar Snapper está colocada dentro de la lógica matemática (excluye expresamente al intuicionismo) y se basa en la distinción entre axiomas lógicos, los que son verdaderos en todas las interpretaciones de una teoría formal, y los no lógicos, los que pueden ser probados con base en solo axiomas lógicos y teoremas no lógicos. 'Un pentágono tiene cinco lados', es un teorema lógico; la verdad de tales teoremas dependen solamente de las definiciones de los símbolos que ocurren en ellos; son todos analíticos. Snapper insiste en que tales teoremas no dependen de la selección de los axiomas lógicos y de las reglas de inferencia. En tales condiciones, Snapper declara que los teoremas no lógicos son los sintéticos a priori, y que por tanto, los teoremas que cuentan son sintéticos. (En d. se vio que efectivamente los juicios matemáticos pueden ser considerados sintéticos).

Snapper tiene que hacer un gran esfuerzo para que los teoremas como los conciben los intuicionistas sean igualmente sintéticos. Menciona desde luego a Poincaré. Coincidía con los intuicionistas en cuanto edificaba toda actividad matemática sobre una base única. Para los intuicionistas, eran números naturales, para Poincaré, la inducción matemática, arquetipo del razonamiento matemático, "el tipo exacto, de la intuición sintética a priori". En cuanto los teoremas matemáticos tienen como base, el principio de inducción, Snapper considera que para Poincaré, los teoremas matemáticos son sintéticos. Tal vez sea una conclusión apresurada; al matemático francés le interesa poner una base firme al edificio matemático; el resto, por otros textos, parece no desvelarlo. En efecto, por una parte, considera que las definiciones son meras convenciones y que los axiomas son definiciones disfrazadas. Por otra parte, en un célebre ensayo (Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. 2 XI 1887) dice textualmente: "¿Uno puede preguntarse lo que son estas hipótesis: hechos experimentales, juicios analíticos, juicios sintéticos a priori? Tenemos que responder negativamente a estas tres preguntas. Si estas hipótesis fueran hechos experimentales, la geometría estaría sometida a una revisión incesante, no sería una ciencia exacta; si fueran juicios sintéticos a priori, con mayor razón analíticos, sería imposible dejar de tenerlos en cuenta y fundar algo con base en su negación". En un texto estrictamente científico, Poincaré se desentiende de la clasificación kantiana.

En conclusión, los matemáticos que se han ocupado de la filosofía de su ciencia sostienen opiniones dispares, incluidos quienes, como los intuicionistas, aceptan parte del pensamiento kantiano. El de los juicios sintéticos a priori no es uno de esos intentos de explicación que dividen a los interesados en bandos rivales; no pasa de ser una curiosidad que es conveniente mostrar que uno no ignora.

Para ser ecuánime, hay que anotar, sin embargo, que Poincaré o Einstein (y podrían nombrarse otros) eran físicos teóricos que desarrollaron teorías de mucha envergadura con base en experimentos mentales (Gedankenexperimente). Los profundos estudios de las órbitas periódicas de Poincaré (donde está una parte de su valiosa herencia no solo matemática sino física; pues las obras pertinentes han sido traducidas y editadas por cuenta de la NASA) no son fruto de sus observaciones astronómicas; los trenes de Einstein, en su crítica del concepto de simultaneidad, son meramente pensados. Ni Einstein, ni Poincaré fueron científicos de laboratorio. Las premisas de sus razonamientos eran representaciones mentales forjadas por ellos a partir de cuidadosas observaciones realizadas por otros físicos. Tal método de trabajo parece pariente de las intuiciones puras de Kant.

Una disparidad de opiniones comparable a la de los matemáticos respecto de los juicios sintéticos a priori de Kant, es la de algunos filósofos respecto de la opinión de Riemann (uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos) cuando niega la dependencia de la geometría, propugnada por Kant, frente a la intuición. En las actas del simposio sobre historia matemática, citadas como penúltimo título de la bibliografía, figura, pp. 17-46, la ponencia de Gregory NOWAK: *Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic a priori status of geometry.* Se traen a cuento en ella, afirmaciones de Riemann tan categóricas como la que sigue: "el concepto de una variedad pluridimensional existe independientemente de nuestra intuición en el espacio. Espacio, plano, recta son únicamente los ejemplares más intuibles de una variedad de tres, dos, una dimensiones. Sin tener una mínima intuición espacial, estaríamos sin embargo en condiciones para desarrollar toda la geometría", p. 31. Nowak presenta someramente diversas reacciones, razonadas desde el punto de vista filosófico, de autores como Helmholtz, Clifford, Jevons, Roberts, Land, Lotze, Erdmann, Stallo, Russell, Casier. Es de subrayar que en *An essay on the foundations of geometry*, 1897, Russell sostiene opinión contraria a la de 1901, aquí aludida. Lo más curioso es que todos esos autores argumenten sin aludir al que debía de ser para ellos una hecho conocido: las geometrías no euclidianas. Ya no se trata únicamente de aseverar que la geometría euclidiana es la de lo que ellos entienden por espacio físico, sino, además, de explicar por qué no puede serlo una de las geometrías no euclidianas. No hacerlo sería razonar con prejuicio.

Consecuencia

Tres acontecimientos fueron particularmente importantes para los matemáticos que se han ocupado de los fundamentos de su ciencia. Las tres rupturas: de la unidad de la geometría (1832), de la unidad de la lógica (1920 - 1921), de la unidad de un sistema formal para toda la matemática (1931).

Con una sola geometría se tiende a pensar que ella es la de la realidad, una especie de física, con abstracciones de tipo aristotélico, de los que no se tuvo duda hasta 1800; una especie de ciencia natural, decía todavía Comte, que puede enriquecerse con observaciones.

Con una sola lógica se tiene tendencia a pensar que los prejuicios de la lógica son leyes del pensamiento, como todavía se puede leer en algunos libros cuyos autores o no se han enterado o se muestran reacios a cambiar de opinión.

Con un solo sistema formal es legítima la tendencia, representada ilustremente por Hilbert, de querer demostrar la no contradicción para toda la matemática (Hilbert, desde luego, incorporó en seguida el resultado de Gödel, en su concepción de la matemática).

La vida intelectual era más cómoda con las tres unidades; a la manera de Descartes, permitía pensar que "no habiendo más que una verdad de cada cosa, quien la encuentra sabe de ella cuanto se puede saber" (*Discours de la méthode*. 2ème Partie. III).

De las tres rupturas se puede decir: no se sabe, a priori, si se necesitará más o menos filosofía ("La matemática formalizada no necesita más metafísica que el juego del ajedrez" dijo Dieudonné) para varias geometrías, varias lógicas, varios sistemas formales de lo que se necesitaba cuando eran una sola unidad; de lo que sí se puede estar seguro es de que, como explicación, no les sirve la misma filosofía.

Sugerencia

La kantiana división tripartita del conocimiento según los sentidos, el entendimiento, la razón podría entenderse del siguiente modo, en acuerdo con las anteriores críticas:

Sentidos	Intuición	Experiencia	Conocimiento inmediato
Entendimiento	Conceptos	Experiencia posible	Ciencias no formales
Razón	Ideas	Metamatemática	Ciencias formales

La única diferencia (esencial, desde luego) está en que entre los conocimientos mediatos hay que distinguir las ciencias no formales (física, química, ciencias naturales, ciencias sociales, filosofía) de las ciencias formales (lógica, matemática). La validez de las primeras restringida al ámbito de la experiencia posible, como en Kant. En cambio, a diferencia de Kant, el único criterio de validez para las segundas es puramente lógico. Alguien podría pensar que los teoremas que ligan la coherencia sintáctica a la semántica (ver, por ejemplo, Ladrière, p. 302) conducirían de nuevo al planteo de Kant. No hay tal. Hay que tener en cuenta que dichos teoremas metamatemáticos envuelven imprescindiblemente la noción de infinito. Y esta idea está completamente fuera del ámbito de la posible experiencia. (Obra aludida de Ladrière: Limitaciones internas de los formalismos. (¿1959?). 1969. Madrid. Tecnos. 545 pp.).

Bibliografía relativa a la primera parte del capítulo 15

1. BETH, Evert. *The Foundations of Mathematics. Revised editions. A study in the philosophy of science*. 1964. New York. 1966. Harper and Row. *xxviii* + 741 pp.

2. BRUNSCHVICG, Leo. *Las etapas de la filosofía matemática.* (1912. 1929). 1945. Bueno Aires. Lautaro. 633 pp.

3. CARNAP, Rudolph. *Les fondements philosophiques de la physique*. Paris. Armand Colin.

4. CAMPOS, Alberto. *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. 1991. *xvi* + 600 pp. Editor: Alberto Campos. 1994. Bogotá. 2006. *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen I: Lógica y geometría griegas*. Unibiblos. *xvi* + 694 pp.

5. CAMPOS, Alberto. *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* 1991. *vi* + 717 pp. Editor: Alberto Campos. 1994. Bogotá. *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumn 2: Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki.*

6. COUTURAT, Louis. "La philosophie des mathématiques de Kant" (1904). *Revue de Metaph. et de Morale*. T. XII. pp. 321-383. 1960. México. Universidad Nacional Autónoma de México. 120 pp.

7. HILBERT, David y ACKERMANN, Wilhelm. *Elementos de lógica teórica*. (1972). 1975. Madrid. Tecnos. 213 pp.

8. HINTIKKA, Jaakko. *Lógica, juegos de lenguaje e información. Temas kantianos de filosofía de la lógica.* (1973). 1976. Madrid. Tecnos. 333 pp.

9. KANT, Inmanuel. *Crítica de la razón pura.* (1781. 1787). 1983. Madrid. Alfaguara. *xlviii* + 694 pp.

10. KANT, Manuel. *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir.* (1783). 1973. México. Porrúa. *xvi* + 416 pp. *Prolegómenos* ocupan 124 páginas.

11. KÖRNER, Stephan. *Introducción a la filosofía de la matemática.* (1966). 1969. México. Siglo XXI Editores. *vii* + 250 pp.

12. KNEALE, William y Martha. *El desarrollo de la lógica.* (1961). 1972. Madrid. Tecnos. *xiv* + 705 pp.

13. MARGENAU, Henry. *La naturaleza de la realidad física. Una filosofía de la física moderna.* (1950). 1970. Madrid. Tecnos. 427 pp.

14. PARSONS, Charles. *Mathematics in Philosophy. Selected papers.* 1983. Ithaca. New York. Cornell University Press. 365 pp.

15. QUINTON, Anthony. *The a priori and the analytic. 1964. Proceedings of the Aristotelian Society.* Vol. 64. pp. 31-54.

16. REICHENBACH, Hans. *La filosofía científica.* (1951). 1953. México. Fondo de Cultura Económica. 299 pp.

17. RUSSELL, Bertrand. *El método científico en filosofía.* pp. 101-125. *Misticismo y lógica.* 1951. Buenos Aires. Paidos. 227 pp. (Escrito en 1914).

18. SNAPPER, Ernst. "Are mathematical theorems analytic or synthetic?" pp. 85-88. *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 3. No. 2. 1981.

19. *The history of modern mathematics. Volume I: Ideas and their reception. Proceedings of the Symposium on the history of modern mathematics. Vassar College.* Poughkeepsie. New York. June 20-24. 1988. Edited by David E. Rowe, and, John Mc Cleary. 1989. Academic Press. Harcourt Brace Jovanovich Publishers. USA. *xvi* + 453 pp.

20. *The Encyclopedia of Philosophy.* 1967. New York. The Macmillan Company and the Free Press.

    - "Analytic and synthetic statements". HAMLYN, D. W. Vol. 1. pp. 104-108.
    - "A priori and a posteriori". HAMLYN, D. W. Vol. 1 pp. 140-145.
    - "Geometry". BARKER, Stephen. Vol. 3. pp. 284-291.
    - "Kant". MALSH, W. H. Vol. 4. pp. 304-324.
    - "Space". SMART, J. J. C. Vol. 7. pp. 506-511.

Acerca de dos obras sobre la filosofía de la matemática de Kant

Se traen a cuento sendas argumentaciones en artículos de los profesores Barker y Friedman.

Stephen BARKER. (Department of Philosophy. The Johns Hopkins University. Baltimore). *Kant's view of geometry: a partial defense. 221-243. Kant's philosophy of mathematics.*

El profesor Barker critica a los filósofos analistas que han desechado la posición de Kant respecto de la geometría, aunque no acepta por entero la visión de Kant.

La argumentación a la que el profesor Barker reduce la de sus adversarios es, grosso modo, la de Russell: La geometría es o pura o aplicada.

Geometría pura o formal: deducir consecuencias a partir de primeros principios mediante solo lógica. Entonces la geometría es analítica, en términos del mismo Kant.

Geometría aplicada: interpretar los primeros principios y los teoremas en el mundo físico.

Dilema: Las tesis de Kant pertenecen o a la geometría pura o a la geometría aplicada.

Ahora bien. Ni en uno, ni en otro supuesto las tesis de Kant son sostenibles. Luego, las tesis de Kant acerca de la geometría son desechables.

Para su defensa parcial de la filosofía de Kant acerca de la geometría euclidiana, el profesor Barker la reduce a tres tesis.

(1) Los postulados y teoremas de la geometría euclidiana son verdaderos y por lo tanto, cualesquiera proposiciones inconsistentes con ellos son falsas.

(2) Cada uno de los postulados y teoremas de la geometría euclidiana es tal que los seres humanos podemos conocer a priori que es verdadero.

(3) Los postulados y teoremas de la geometría euclidiana son proposiciones sintéticas.

Con toda convicción afirma el profesor Barker: “De acuerdo con la filosofía de Kant, todos los seres humanos, los que ven y los que no ven, tienen representaciones del mundo que los rodea de tipo puramente euclidiano. Alterar esta parte de su enseñanza debilita su posición en lugar de fortalecerla”. (p. 231).

Uno de los procedimientos para zafarse de los cuernos de un dilema consiste en mostrar que existe una tercera posibilidad. Es lo que ensaya el profesor Barker. Uno de los autores que critica se ha valido de rayo de luz como interpretación de línea recta. El profesor Barker se toma la molestia de mostrar que hay ambigüedad en el uso del término “rectitud”. Con ello no logrará nada, pues, el dilema está planteado entre geometría pura y geometría aplicada y la réplica no es apropiada. Ejemplo de una interpretación: por línea recta se entiende círculo máximo sobre una superficie esférica; entonces, para el postulado 1 de Euclides se obtiene una proposición falsa, pues no es cierto que dos puntos sobre una superficie esférica determinen un único círculo máximo. No se trata de llegar a discutir acerca de la rectitud de un círculo máximo, sino de ver si los axiomas y proposiciones interpretados son verdaderos o falsos con el significado que se les ha dado. Por lo demás, no se ve la oportunidad de acabar la discusión, introduciendo geometría no euclidiana: ¿qué tiene que ver con el dilema o geometría pura o geometría aplicada? A dicha geometría se acude para explicar (mejor que con la geometría euclidiana) resultados anteriores de la teoría [de la relatividad generalizada].

Sin embargo, el profesor Barker cree haber logrado su cometido; se lamenta, sí de que su defensa de la teoría kantiana respecto de la geometría euclidiana sea parcial en cuanto no logra establecer que la presentación euclidiana abarca la única interpretación legitimada de la geometría; está seguro, empero, de haber mostrado que las tesis (1) y (2), a las que ha reducido la doctrina kantiana, tienen más asidero que el que creen los críticos.

Trata de defender la tercera, apoyándose, una vez más en el hecho de que no se tiene una definición explícita de línea recta. ¿Qué cree el profesor Barker que se tiene entonces? Solamente una definición, no explícita de recta. Por lo tanto, afirma él, los principios euclidianos no pueden ser deducidos con mera lógica y definiciones explícitas; los teoremas de la geometría euclidiana son así sintéticos. Aquí el profesor Barker olvida un punto clave en la geometría como la entienden hoy en día los geómetras. Si recta es un término inicialmente no definido, lo será finalmente cuando se haya terminado de enunciar los axiomas y solo es lícito usar recta en el sentido autorizado por los axiomas y las consecuencias extraídas de ellos mediante solo lógica. Elegir una acepción para recta de acuerdo con una experiencia es precisamente, hacer geometría física y por lo tanto sintética, y, no a priori.

El desenfado que le permite al profesor Barker no consultar fuentes referentes a la historia de la geometría posterior a Kant aclara el párrafo en el que expone que es una "historia, probablemente apócrifa", la de que Gauss haya medido el triángulo determinado por las cimas respectivas de tres montañas, medición efectuada mediante rayos de luz. Nada de apócrifa. Está descrita en el parágrafo 28 de una las más célebres memorias de Gauss, una de las dos obras escritas por él, en las que crea la geometría diferencial: "consideratio-nes generales circa superficies curvas". 1827. Diez años antes había escrito: "Estoy cada vez más convencido de que no puede ser probada la necesidad de nuestra geometría", es decir, de la geometría euclidiana. Nada de precipitación. En el párrafo 28 citado, no hay alusión alguna a geometría euclidiana o no euclidiana. Ver: Alberto CAMPOS. *La teoría gaussiana de las superficies.* pp. 22-66. *A. C. F. GAUSS en el bicentenario de su nacimiento.* Victor Albis, editor. V. Epistemología, historia y didáctica de la matemática. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia. 1983.

Michael FRIEDMAN. (Department of Philosophy. University of Illinois at Chicago. USA). *Kant's theory of geometry. pp. 177-219. Kant's philosophy of mathematics. Modern essays.* Edited by Carl Posy. 1992. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. $x + 370$ pp.

También: pp. 55-95. Geometry. **Michael FRIEDMAN**. *Kant and the exact sciences.* 1992. Cambridge. Massachusetts. Harvard University Press. $xvii +$ 357 pp.

En la misma obra: pp. $xi - xvii$. *Preface.* pp. 1-52. *Introduction. Metaphysics and exact science in the evolution of Kant's thought.* pp. 96-135. *Concepts and intuitions in the mathematical sciences.*

En la exposición que hace el profesor Friedman acerca de la teoría kantiana de la geometría se echa de ver fundamentalmente el deseo de salvar la teoría kantiana, aunque admita en diversos pasajes que algunas partes de la teoría sean insalvables. (Ver el tercer aparte citado).

Los postulados (axiomas se lee en el texto pero en Euclides, axioma es diferente de postulado) de Euclides no implican los teoremas de Euclides mediante solo lógica. Los postulados (se lee de nuevo axiomas) de Euclides no son los utilizados en la formulación actual. La concepción de la lógica en Kant no es nuestra concepción actual... Nuestra lógica a diferencia de la de Kant, es poliádica más bien que monádica (silogística). Nuestros axiomas para la geometría euclidiana son completamente diferentes de los postulados de Euclides en cuanto contienen una teoría del orden, explícita, esencialmente poliádica. Una diferencia central entre lógica monádica y poliádica es que esta última puede generar una infinidad de objetos, mientras que la primera no. Dado un conjunto consistente de fórmulas monádicas en las que haya k predicados primitivos involucrados, se puede encontrar un modelo que contenga a lo más 2^k objetos. En la lógica poliádica, es posible construir fácilmente fórmulas que tengan solamente modelos infinitos... Si uno hace deducciones a partir de una teoría dada utilizando únicamente lógica monádica uno podrá probar la existencia de a lo más 2^k objetos distintos... Así que la lógica monádica no puede servir de base para una teoría matemática seria, para una teoría que se proponga describir una infinidad de objetos (incluso “potencialmente”).

Hay proposiciones extrañas en toda la exposición del profesor Friedman. No cita la fuente de su distinción entre lógica monádica y poliádica, aunque en alguna parte parece atribuirle su inspiración a Russell. Dado que ha asimilado lógica monádica a silogística, en el sentido tradicional, ha de entenderse que se trata de relaciones entre parte y todo, donde el todo está dado. Entonces poliádicas son las relaciones con dos o más lugares libres o variables; la prueba está en su insistencia en la teoría del orden, que, se ocupa de relaciones con por lo menos dos variables. Pero, entonces, se trata de la nomenclatura clásica desde Pierce, creador de la teoría de relaciones: monádico se dice si hay una sola variable, poliádico si hay varias.

Cuando se estudia el silogismo se pueden ejemplificar las reglas de aplicación sea mediante proposiciones categóricas sea mediante formas proposicionales en las que tanto el sujeto como el predicado no están determinados; en este sentido, al traducirlos al lenguaje de conjuntos, S y P son conjuntos tales que $S \subset P$, y, $S \cap P \neq 0$, relaciones estas que pueden ser negadas. Si tanto S como P son conjuntos no dados, entonces la forma proposicional respectiva es un predicado diádico con dos lugares vacíos. Se puede o llenar dichos lugares o colocar dos signos de objetos y cuantificarlos, si se quiere tener una proposición. La lógica tradicional generalmente se ocupa de relaciones entre parte y todo, en las que sólo queda un lugar por llenar, es decir, la forma proposicional contiene una sola variable: en este sentido puede decirse que la lógica silogística es monádica. Pero puede ser que los conjuntos estén dados, entonces, estrictamente hablando, no hay nada que llenar y no hay para qué hablar de monádico o de diádico. Es lo que comúnmente se hace al trabajar con silogismos en un curso de lógica.

No hay más precisión del sentido en el que se concibe la lógica silogística como monádica. El profesor Friedman no indica, ya noté, la fuente para la diferencia que fabrica entre lógica monádica y lógica diádica. Lo más parecido a esa construcción es lo que uno encuentra a propósito del teorema de Bernays-Schönfinkel [Hilbert y Ackermann. p. 144 y siguientes. Kneale. pp. 399-400, 656, 675].

Sean $P_1, \ldots, P_m$ predicados monádicos y $K_1, \ldots, K_m$ las clases correspondientes a dichos predicados. Esto quiere decir que para todo x ocurre que x es elemento de un K_i, $1 \leq i \leq m$, cuando y solo cuando, $P_i(x)$ es verdadera. Entonces, Hilbert y Ackermann demuestran lo siguiente:

Teorema. *Si un esquema* $(P_1, \ldots, P_m)$ *es válido en un campo de individuos que tiene* 2^m *elementos, entonces, es universalmente válido.*

Aquí se ve el sentido del enunciado. Si el esquema formado con sus predicados monádicos es válido para un conjunto de 2^m elementos (recordar que 2^m es el cardinal de un conjunto con m elementos, así que entra en consideración el conjunto de partes, lo cual es comprensible a priori) entonces el esquema es válido para cualquier conjunto de individuos. Nada de la restricción del profesor Friedman “a lo más 2^m objetos”. Es posible demostrar más: un esquema del cálculo funcional monádico con m predicados será universalmente válido, si y sólo si, es válido en un conjunto con 2^m elementos. Ello de ninguna manera quiere decir que el esquema solo pueda ser válido en un conjunto finito con 2^m elementos, como parece ser entendido en el texto que comento.

El profesor Friedman introduce tal nomenclatura para defender una tesis. Afirma que “el sistema de Euclides no es una teoría axiomática en el sentido actual”, con lo cual parece entender que la lógica de *Elementos* sea fundamentalmente diferente de la lógica de *Fundamentos de la geometría* de Hilbert. Lo cual es falso. Lo acertado es precisamente lo contrario. La lógica sobre la que está edificado *Elementos* es implícitamente la misma lógica que subyace a *Fundamentos de la geometría*. Hay imperfecciones lógicas en la obra de Euclides por haberse guiado éste por la intuición, puede decirse que de tipo espacial como la de Kant, así que no enuncia muchos principios, por considerarlos reales. La fundamentación de la geometría evolucionó de Euclides a Hilbert en cuanto se fue reconociendo la necesidad de explicitar las diversas hipótesis, tanto geométricas como lógicas, que finalmente sustentan a la geometría. Axiomática y geometría estaban intrincadas en *Elementos* y están netamente separadas en *Fundamentos de la geometría*, "análisis lógico de nuestra intuición espacial". El libro de Hilbert aparece en un momento en el que la lógica, ya en manos de los matemáticos, había llegado a una etapa avanzada de su desarrollo, y la geometría igualmente había superado la etapa de ser única.

La explicación de la lógica, que se fue logrando poco a poco, o si se quiere, la creación lógica apropiada para colegir la corrección de los textos matemáticos, entre ellos el de Euclides, ha alcanzado el estadio de lo que actualmente se entiende por lógica, que consta de cuatro grandes capítulos, en la presentación que de ella hacen Hilbert y Ackermann: cálculo proposicional, cálculo de conjuntos, cálculo restringido de predicados, cálculo generalizado de predicados. La lógica en la acepción de Kant, no va más allá de la lógica aristotélica; y esta es apenas una parte de la lógica de conjuntos. Solo a partir de las investigaciones de Lukasiewicz en los años 20 y 30 del siglo XX, se vio la importancia del cálculo proposicional estoico. Los cálculos silogístico y proposicional estoico componen la herencia griega en lógica. Si se añade a los dos primeros, el cálculo restringido de predicados (únicamente se introducen cuantificadores de variables para designar individuos) se obtiene el llamado cálculo de primer orden. Si se considera además cuantificación de variables predicado de individuo se obtiene una lógica de segundo orden. Y así en adelante. Así se tiene la lógica clásica, de acuerdo con la cual ha sido creada casi toda la matemática, en particular, toda la matemática griega.

Si se cambiara la lógica, cambiarían los teoremas, pero otras lógicas solamente surgieron a partir de 1920, unos 140 años después de *Crítica de la razón pura*.

El profesor Friedman parece pensar que en Euclides no aparece el orden; efectivamente, una de las varias nociones no explicitadas es la de orden; pero, desde luego, que el orden está implícito en diversas consideraciones. El aspecto cuantitativo de las magnitudes es especialmente apto para fraseología con la relación de orden, relación por lo menos diádica. '... es mayor que...', '...es múltiplo de...', '...está en (entre)...', son relaciones diádicas comunes en *Elementos*. Cada vez que Euclides hace una bisección está utilizando una relación ordinal triádica: una recta, que resulta determinada al final del procedimiento está entre otras dos.

El estudio de las dos obras maestras permite ver que cuando se toman los veinte axiomas de Hilbert entonces la geometría obtenida es, ni más ni menos, la de Euclides, pero ahora con todo el rigor que faltaba en *Elementos*. La obra de Hilbert fundamenta no solo la de Euclides en *Elementos*, sino toda la geometría (sin noción de diferenciabilidad) poco más o menos, en una, dos y tres dimensiones. El propósito de Hilbert no era demostrar muchos teoremas (en *Elementos* hay 465; en *Fundamentos de la geometría* 68, enunciados, no todos demostrados) sino examinar las bases lógicas, investigación subsiguiente a la del hallazgo de geometrías no euclidianas.

Toda investigación vale, en particular la que intente salvar la filosofía de la matemática de Kant en su momento histórico; pero quien pretenda estirar dicha explicación hasta los fantásticos desarrollos que ha tenido la matemática en los siglos XIX y XX (por supuesto, después de Kant) no ha de contentarse con tratar de poner en pie ciertas conjeturas (al parecer ejercicio filosófico preferido al de estudiar la historia) sino comenzar por estudiar a fondo dichos desarrollos y por documentarse pormenorizadamente en textos que ante todo sean de buen recibo entre los mismos matemáticos; efectivamente "es tan raro ver a un matemático con una firme cultura filosófica como encontrar a un filósofo con extensos conocimientos matemáticos" (Bourbaki. p. 22. *Éléments d'histoire des mathématiques*. (1969). 1974. Paris. Hermann. 379 pp).

Cien circunstancias relativas a la filosofía de la matemática

Ante una filosofía de la matemática importa tener información acerca de temas como los enunciados a continuación.

1. **Filosofía de la matemática, epistemología.** Según Piaget, la epistemología matemática es la rama de la matemática que estudia la génesis, la estructura, y, la función de los conocimientos matemáticos. El aspecto genético abarca temas como estos: posibilidad de conocimiento matemático, fuentes del conocimiento matemático, su fundamento lógico, el estatuto ontológico de los objetos considerados por los matemáticos. Al aspecto estructural conciernen temas como el de sistema formal, los métodos y la teoría de la demostración. En el aspecto funcional pueden considerarse temas como el de la noción de verdad, el de límites o el de la validez de los conocimientos matemáticos. Una consecuencia de estos análisis es lo

que suele llamarse la pérdida de la certidumbre, es decir, la relativización de verdades que antes se consideraban absolutas.

2. **La matemática es ciento por ciento conceptual.** La matemática es un estudio enteramente conceptual; en consecuencia, trabaja primordialmente con representaciones mentales. Las representaciones, como un espejo, pueden reproducir simplemente las imágenes de los objetos físicos; o pueden ser imágenes elaboradas, es decir, un tanto modificadas de dichos objetos. La imagen de un caballo es ejemplo de las primeras, la de un unicornio, de las segundas. Son todas de tipo espacial. Por este camino, se llegaría a los conceptos de Kant, productos del entendimiento (una vez que se introduzcan las categorías), con su correspondiente intuición. Diferentes de estos son los seres de razón o entes de razón de Kant. Al avanzar en sus indagaciones sobre el fundamento lógico de la matemática, Hilbert echó mano de la expresión *elementos ideales* que guarda cierto parecido con los entes de razón de Kant; pero con ella Hilbert denota construcciones matemáticas perfectamente determinadas que permiten resolver problemas lógicos relativos a los fundamentos; extendió, con tal motivo, a toda la matemática el uso de los elementos ideales que había sido introducido inicialmente en geometría.

3. **Epistemología y psicología.** Un flanco del problema de la fundamentación, tiene que ver con la psicología, no solo por estar involucradas las representaciones mentales, sino también por aquello que Piaget llama el círculo de las ciencias, concepción según la cual las ciencias están interrelacionadas. La psicología se ocupa de la descripción y explicación de los procesos conscientes de todos los actos mentales, dicen los diccionarios de la especialidad, en particular de los cognoscitivos. Entre los procesos cognoscitivos enumeran la percepción, la memoria, la imaginación, la conceptuación, el razonamiento, ... Pues bien, la epistemología o filosofía de la matemática considera dichos procesos únicamente desde el punto de vista de su alcance como conocimiento, de su contribución a este. Es sutil la distinción entre este aspecto y la tendencia llamada psicologismo, pero es indispensable tenerla en cuenta so pena de convertir la epistemología en un capítulo de la psicología. Se entiende por psicologismo la tendencia de filósofos como Hume, J. S. Mill y W. James de reducir los problemas

éticos, lógicos, estéticos, ... a cuestiones psicológicas meramente. Sería psicologista una interpretación del espacio o de lo intuido en él como puramente subjetivo.

En cuanto al origen del conocimiento, conviene tener en cuenta que la filosofía crítica de Kant está en la confluencia del empirismo de Locke, Berkeley, Hume y del racionalismo de Descartes, Spinoza y Leibniz. Kant pensó quizá, resolver el problema de una vez por todas; sin embargo, el empirismo crudo (los conceptos de la matemática son empíricos, los postulados son verdades experimentales elementales) volvió a ser sostenido por J. S. Mill, H. Helmholtz y Pasch.

4. **Concepciones acerca de la verdad.** Se mencionan cuatro: la verdad como *correspondencia* (Platón). La verdad es la correspondencia con el objeto: "Decir de lo que es, que es y de lo que no es, que no es, es la verdad; decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es la falsedad" (Aristóteles). Adecuación entre el entendimiento y la cosa, es una expresión frecuentemente usada. La verdad como *coherencia* es la teoría según la cual la verdad está en la consistencia del conjunto de proposiciones que expresa el conocimiento. Este es el tipo de verdad en matemática; lo cual explica que el problema de no contradicción tenga tanta importancia genética y estructural en todo el ámbito matemático. La "verdad matemática" reside únicamente en la deducción lógica a partir de premisas puestas arbitrariamente por los axiomas (Bourbaki. p. 29). La teoría *intrínseca* de la verdad es la teoría según la cual la verdad es una propiedad intrínseca de las proposiciones verdaderas. Supongo que esta sea la concepción de Leibniz, para quien las verdades matemáticas son verdades de razón, cuya negación conlleva contradicción; se basan en el principio de contradicción. Se oponen a las verdades contingentes, que dependen de la experiencia y cuya base es el principio de razón suficiente.

   Una cuarta concepción sería la del pragmatismo, relacionable quizá con las verdades contingentes o fácticas de Leibniz, y que podría denominarse *funcional* según la descripción que de ella hacía Dewey, 1920: "La hipótesis que funciona es la verdadera. La verdad es un nombre abstracto aplicado a un conjunto de casos reales, previstos o deseados, que reciben su confirmación en su actuación y en sus consecuencias" (Diccionario de filosofía. Pragmatismo).

5. **Grandes civilizaciones antiguas: matemática utilitaria.** Las grandes civilizaciones antiguas (Europa, Mesopotamia, Egipto, India, China, América Central, Andes suramericanos, etc.) habían creado la matemática que necesitaban para su organización social. Esta matemática es utilitaria ("para las necesidades del comercio") y experimental.

6. **Griegos: organización de los conocimientos matemáticos.** Los griegos no se contentaron con esta matemática de recetas sino que se dedicaron ("por el gusto de inquirir", atestigua Heródoto) a organizarla, en el sentido de ordenar los conocimientos matemáticos que se tenían de manera que unos pudieran derivarse de otros; y tuvieron tanta suerte que se dieron cuenta igualmente de que también era posible llegar a obtener conocimientos que no se tenían, a partir de los que ya se tenían. Naturalmente, ello ya era posible en otros aspectos de la vida de los seres humanos; pero solamente los griegos lograron, no solo extenderlos a los dispersos conocimientos de aritmética y geometría sino, además, sistematizarlos.

   "Entre los primeros filósofos griegos están los jonios, quienes utilizaban esquemas geométricos (disco, cilindro, esfera) para sus intentos de explicaciones cosmológicas".

7. **Anaxímenes y Parménides: reducción al absurdo.** Al mismo tiempo que iban organizando las informaciones matemáticas, las que habían heredado de otras civilizaciones y las que ellos mismos obtenían, se fueron dando cuenta de la importancia de ciertos procedimientos para establecer sobre bases firmes el ordenamiento que estaban creando; poco a poco fueron conformando lo que después sería la lógica. En Anaxímenes y en Parménides, aparecen las primeras argumentaciones por reducción al absurdo. Zenón de Elea llevó este procedimiento a la perfección.

8. **Zenón de Elea, Sofistas: impulso a la argumentación.** Zenón de Elea, e independientemente de él y un poco después, los sofistas, al disociar el fondo y la forma en la argumentación (puesto que, de acuerdo con el aforismo de Protágoras, para cualquier cosa hay dos afirmaciones contradictorias, tácitamente, ambas igualmente valederas) dieron un impulso decisivo al desarrollo de lo que sería la lógica formal: por la ejercitación dialéctica misma que es como una gimnasia mental que pone en tela de juicio cualquier tipo de afirmaciones, y, por la reacción que provocaron en las tres grandes figuras Sócrates, Platón, Aristóteles.

9. **Platón y la caracterización de la matemática.** Platón enseña que tanto la filosofía como la matemática parten de hipótesis; pero que la diferencia entre el filósofo y el matemático está en que el primero se sirve accidentalmente de sus hipótesis (como el águila para emprender el vuelo, podría añadirse) mientras que el matemático no puede desprenderse de ellas. Acorde con esta caracterización es la de Descartes, que reconoce a los matemáticos por sus largas cadenas de razones; o la de Russell, quien concibe la matemática como la actividad intelectual que construye redes de condicionales. Bourbaki (*Éléments d'histoire des mathématiques.* p. 24) cita textualmente las palabras de Platón.

10. **Platón y la geometría.** Para Platón, "la geometría es el conocimiento de lo que siempre es" (*República.* 527 b). Por eso la incluye en su plan de estudios y le confiere un papel importante en su teoría del conocimiento. Su interés en que los estudiantes la conocieran propedéuticamente está plasmado en la anécdota de la inscripción sobre la puerta de la Academia: "No entre quien no conozca la geometría". Comenta Heidegger (p. 71 *La pregunta por la cosa.* (1935-1936. 1962). 1975. Buenos Aires. Alfa. Argentina. 214 pp.). "Nadie que no haya comprendido lo matemático debe tener entrada aquí". "Esta sentencia no significa tan solo, ni en primer término, que uno deba estar instruido en la materia 'geometría', sino que debe comprender que el saber de los presupuestos básicos de todo saber y la actitud apoyada en tal saber, son la condición fundamental para el poder saber y el saber correctos".

11. **Lógica aristotélica.** Aristóteles, adiestrado contra los sofistas en la Academia de Platón, para contrarrestar los argumentos torcidos de algunos de aquellos, tecnifica los procedimientos y forja el método demostrativo llamado silogismo (sylogídsomai en griego, es: sacar la cuenta, resumir, recapitular, reflexionar, pensar, deducir, concluir) que constituye parte de la herencia aristotélica en lógica y de los métodos de razonamiento.

    Es, empero, un anacronismo o una impropiedad llamar lógica formal a la sola lógica de Aristóteles, la cual ni siquiera cubre toda la herencia lógica de los griegos. Toda la lógica (y la de Aristóteles es una parcela, actualmente bastante minifundista) es formal; casi se puede decir, que si la lógica no es formal, no es.

12. **Abstracción aristotélica.** Mediante abstracción, llamada aristotélica, se forman conjuntos al considerar todos los seres que poseen una determinada propiedad, prescindiendo de las particularidades que permiten distinguir a unos individuos de otros. Dieudonné menciona este tipo de abstracción con el calificativo de principio del conocimiento voluntariamente incompleto. La evolución de esta idea ha llegado en la axiomática actual a descartar cualquier consideración sobre la naturaleza de los elementos de un conjunto.

13. **Aristóteles: los primeros principios.** Se debe a Aristóteles el haber estatuido dos principios que están en la base de cualquier construcción axiomática: No se puede definir todo. No se puede demostrar todo. En consecuencia, hay que asumir primeros principios. La razón de fondo para Aristóteles es que de lo contrario hay regresión infinita o circularidad; y en tal circunstancia no hay ciencia demostrativa.

14. **La herencia estoica.** Los estoicos enriquecieron la lógica con el cálculo proposicional (no advertido por Aristóteles): tablas de valores para el condicional, la conjunción, la disyunción y el dilema, y con los esquemas de inferencia. A los dos primeros esquemas dieron los escolásticos los nombres de modus ponens y modus tollens. El aporte de los estoicos a la lógica constituye una buena parte de la contribución de los griegos; por lo cual no puede identificarse a la lógica tradicional o aristotélica con toda la herencia griega.

15. **Euclides de Alejandría.** Dejó su obra capital, *Elementos*, síntesis de una buena parte de la obra de los griegos en matemática. Euclides articuló contribuciones muy diversas de matemáticos predecesores. Es igualmente notable su perspicacia como geómetra al darse cuenta de que la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta, por intuitivo que parezca, no se puede derivar de los primeros principios geométricos asumidos en *Elementos*. Esta determinación de Euclides se constituyó en el motor que activaba esporádicamente la investigación en una obra que no se tocaba por considerarla perfecta. Hasta el siglo XIX fue la única obra matemática realmente axiomatizada. Otras obras declaraban encajarse en ella.

16. ***Elementos*: problemas con regla y compás.** En *Elementos* quedan consagrados los procedimientos de construcción y de demostración (si es

que una construcción no es demostración). En principio, en *Elementos*, solo figuran problemas solubles mediante construcciones con regla y compás, que conciernen a rectas y circunferencias (lugares planos) y que en álgebra cartesiana se expresan mediante ecuaciones cuyo grado es una potencia de 2.

Los diversos procedimientos demostrativos en *Elementos* conforman una pesada álgebra de figuras si es lícito cotejarla con la que frente a ella es la ligera álgebra cartesiana (Viète, Descartes, Fermat).

La geometría euclidiana parece natural por el hecho de que vivimos sobre un esferoide a cada punto del cual se asocia un plano tangente (¡cuántos antiguos creían que la Tierra era plana y cuantos modernos viven como si así fuera!) a lo cual se superpone el hecho de que la geometría apropiada para un plano (superficie de curvatura cero) es la euclidiana.

17. **Herencia griega en argumentación.** Los griegos no solo dejaron herencia en lógica sino en argumentación en general.

    A guisa de síntesis puede darse la siguiente secuencia.

    Argumentación al modo de los presocráticos consistente básicamente en aforismos.
    Argumentación al modo de Zenón de Elea consistente en el uso sistemático de la reducción al absurdo.
    Argumentación al modo de los sofistas consistente en separar el fondo de la forma lo cual posibilita afirmar y negar lo mismo acerca de lo mismo.
    Argumentación al modo de los pitagóricos ya organizada secuencialmente por islotes deductivos alrededor de problemas determinados que ellos estudiaron con todo detalle.
    Argumentación al modo de Aristóteles quien sistematiza y codifica lo adquirido por sus antecesores en su teoría silogística.
    Argumentación al modo de los megáricos y de los estoicos quienes desarrollan las operaciones entre proposiciones lo cual constituye el cálculo proposicional de la lógica actualmente. Su creación queda magníficamente concretada en los cinco esquemas de razonamiento.

    Finalmente, la argumentación al modo de Euclides, primer ejemplo consumado de un sistema axiomático paradigmático. A grandes rasgos, Euclides se atiene a la enseñanza aristotélica en los *Primeros* y en los *Segundos*

Analíticos. En numerosos casos, empero, la argumentación de Euclides es específica y muy sutil por lo que no alcanza a ser cobijada por aquella enseñanza. La lógica tendría que hacer grandes desarrollos para poder servir de base a la matemática.

18. **Galileo Galilei: experiencia no es demostración.** Galileo: millares de experiencias no constituyen un argumento demostrativo. Una sola experiencia o demostración concluyente que se tuviese en contrario, bastaría para echar por tierra... cien mil argumentos probables (Diálogo de las dos nueves ciencias).

19. **Descartes, Pascal, Leibniz, Kant: solo en matemática hay demostraciones.** Pascal piensa que solo en geometría hay verdaderas demostraciones. Descartes cree que solamente los matemáticos las logran. Para Leibniz, podría haber demostraciones en otras disciplinas y si hubiera tanto estudio de estas como de matemática, no solo en matemática se lograrían demostraciones. Kant parece responder a Leibniz; muy razonablemente reserva al terreno matemático no solo las demostraciones, sino también las definiciones y los axiomas.

20. **Cultura filosófica y matemática.** Según Bourbaki, es tan raro ver a un matemático en posesión de una gran cultura filosófica como ver a un filósofo que posea conocimientos extensos en matemática. Bourbaki barrunta una clasificación: Descartes o Leibniz fueron también matemáticos de primer orden a la par que filósofos. Platón se tuvo al corriente de la matemática de su época. De Aristóteles o de Kant no podría decirse lo mismo (*Éléments d'histoire des mathématiques.* p.22).

21. **Leibniz: característica universal.** Leibniz entiende por caracteres los signos escritos; por caracteres reales los destinados a la representación de las ideas exclusivamente y entre estos distingue los que solo representan ideas de los que, además, sirven para el razonamiento: piensa específicamente en las cifras aritméticas y en los signos algebraicos; da la preferencia al álgebra. La geometría ha avanzado menos que las anteriores por la carencia de caracteres propios. El cálculo infinitesimal, como lo concibe Leibniz es una característica y a ello debe su rápido éxito. Con la característica, las leyes de la lógica se convierten en reglas intuitivas para manipulación de signos. Leibniz redescubre la conclusión de Hobbes: "El razonamiento es un cálculo". La esterilidad de las disputas proviene de

falta de rigor y precisión en el lenguaje; el razonamiento verbal adolece de equívocos y de paralogismos, con frecuencia involuntarios y no advertidos. Eso no sucedería con un cálculo lógico que fuera una característica en el sentido de Leibniz. Razonar correctamente sería no cometer errores de cálculo; no son otra cosa que esto los sofismas. Así, "cuando surjan controversias, no habrá ya necesidad de más disputas entre dos filósofos que entre dos contabilistas. Bastará que tengan con qué escribir, que se sienten frente a sus máquinas de cálculo, que tengan la colaboración de un amigo si lo desean y que se digan "¡Calculemos!"" (*La Logique de Leibniz*. p. 98). Faltos de un cálculo semejante, ni Descartes ni Spinoza lograron su pretensión de tratar temas filosóficos a la manera de los geómetras. Si el símbolo para cada idea es escogido de manera que exprese netamente la descomposición de dicha idea en ideas simples (como un número natural en producto de factores primos en el teorema de Euclides), entonces, la característica real, fundada sobre el análisis de las nociones y el "alfabeto de los pensamientos humanos", es también la característica natural, la que revela al máximo la constitución, propiedades y relaciones para las ideas complejas. En realidad en *De arte combinatoria* (1666), Leibniz ansiaba desarrollar, por una parte una "característica universal", por otra "una matemática universal"; eran dos proyectos grandiosos que pueden considerarse realizados por los lógicos de los siglos XIX y XX.

22. **Leibniz: combinatoria.** Leibniz enuncia como sigue lo que denomina el problema fundamental de la lógica de la invención: "Dado un sujeto, encontrar todos sus predicados posibles; dado un predicado, encontrar todos sus sujetos posibles". En otros términos, encontrar todas las proposiciones verdaderas en las que figura un concepto sea como sujeto, sea como predicado. Como en una proposición hay posible combinación de dos términos, sujeto y predicado, el problema se convierte en uno de combinaciones (*La Logique de Leibniz*. p. 36), una de las facetas de la matemática que Leibniz se encarga de hacer ver en toda su extensión en un caso específico. El florecimiento completo de la idea puede indicarse en el producto cartesiano a la manera de Bourbaki y en la noción general de relación.

23. **Saccheri y las tres hipótesis.** Saccheri avanza hacia la solución del problema del quinto postulado en cuanto aboca la cuestión más sistemáticamente que sus antecesores y en cuanto se apoya fuertemente sobre la lógica. En efecto, trata de mostrar que solo es válida la elección del quinto

postulado, para lo cual supone inicialmente tres hipótesis: una de ellas el postulado de Euclides, cuya necesidad lógica se propone sacar adelante; las otras están constituidas por dos maneras de contradecir el postulado: suponer que hay más de una paralela, suponer que no hay paralela. Si el postulado es necesario, lógicamente hablando, entonces, la contradicción del enunciado acerreará contradicción en toda la geometría. Al poner el problema en esta forma, Saccheri destaca las otras dos posibilidades, lo cual refluye sobre el planteamiento del problema.

24. **Kant: ¿qué conocemos a priori?** A priori, en Kant, significa independiente de la experiencia. Lo que es a priori debe tener validez universal y necesaria. Kant enuncia un problema de fondo con la pregunta: ¿qué tanto es nuestro conocimiento a priori? Su respuesta es: *"Solo conocemos a priori de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas"* (CRP B XVIII).

25. **Kant: sentidos, entendimiento, razón.** Todo nuestro conocimiento comienza por los sentidos, pasa de estos al entendimiento y termina en la razón (Kant. CRP B 355). El conocimiento mediante datos inmediatos de los sentidos está restringido a la experiencia. El conocimiento de las ciencias en general (física, química, ciencias naturales, ciencias humanas) está restringido al ámbito de la experiencia posible. Kant (CRP B XVIII k) señala que su método copernicano es "tomado del que usa el físico; consiste, pues, en buscar los elementos de la razón pura en lo que puede confirmarse o refutarse mediante un experimento". Tal criterio es entendible para las ciencias nombradas. No para la lógica y la matemática, actualmente por lo menos. "Para conferir validez objetiva (es decir, correspondencia con un objeto; posibilidad real, pues la anterior era simplemente lógica)... no tenemos por qué buscar precisamente en las fuentes del conocimiento teórico. Puede hallarse igualmente en las fuentes del conocimiento práctico" (B XXVI k). Todo lo contrario, en lógica y matemática, donde sí hay un motivo que parece faltarle a Kant. Si en tiempos del filósofo y aun posteriormente, algunos llegaron a clasificar a la geometría entre las ciencias naturales al mismo tiempo que se la exaltaba como único modelo de razonamiento, actualmente, la geometría es un sistema formal como cualquiera otra rama de la matemática, la matemática pura no se reduce a la geometría como en tiempos de Kant, y, sobre todo, la matemática tiene asegurada su objetividad en cuanto sistema formal, es

decir, en cuanto construcción mental rígidamente desarrollada mediante cumplimiento de una sintaxis inflexible. Y no hay otro tipo de realidad concebible para la matemática. La opinión prevaleciente (no hay unanimidad desde luego, por tratarse de opiniones) es que las proposiciones de la matemática no dicen absolutamente nada acerca de la realidad empírica; incluso, cuando se trata de matemática aplicada no hay una interpretación de una geometría, por ejemplo, según la cual los teoremas de la geometría como sistema formal se conviertan en meras proposiciones empíricas.

26. **Kant: limitación de la experiencia.** La experiencia nos enseña lo que es, pero no que lo que es no puede ser de otro modo (Kant. *Crítica de la razón pura.* B 762). Los procedimientos de inducción se aplican a conocimientos afianzados en la experiencia o si se quiere en la esfera de lo real y lo concreto. Los procedimientos deductivos son los apropiados para la esfera de lo posible donde se contemplen los otros modos no exhibidos en una experiencia determinada.

27. **Kant: una ciencia de todos los espacios.** Precozmente, 1747, Kant tuvo un presentimiento genial de la futura geometría, y por allí, hubiera podido entrever la futura matemática. Escribía Kant: “Una ciencia de todos los espacios posibles sería indudablemente la geometría más elevada que un entendimiento finito pueda concebir”. Según algún comentario, Kant estaba entonces muy cerca de la influencia de Leibniz. Después primaría la influencia de Newton.

28. **Kant: la experiencia posible.** Se encuentra en Newton (Libro III. *Principios matemáticos de la filosofía natural y su sistema del mundo*) este pasaje “Hasta el presente no he sido capaz de descubrir la causa de las propiedades de la gravedad partiendo de los fenómenos, y no finjo hipótesis; pues todo cuanto no es deducido a partir de los fenómenos debe llamarse hipótesis, y las hipótesis, metafísicas o físicas, sobre cualidades ocultas o mecánicas, no tienen lugar en la filosofía experimental”. No se ve por qué Lord Kelvin (Moritz 305) escribió que “la matemática es la sola metafísica verdadera”. En la tesis de la experiencia posible de Kant hay un eco de este pasaje de Newton. Es una prescripción conforme con la investigación física, incluso con aquella que ha de valorar las deducciones de la física matemática. Cuando a Lobachevski se le ocurrió la cuestión de la geometría del mundo físico, quiso buscar la respuesta en la experimentación. En *Las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*, 1854,

escribió Riemann: "Queda por resolver la cuestión de saber en qué medida y hasta qué punto estas hipótesis son confirmadas por la experiencia". Riemann piensa en el estudio del espacio mediante la geometría, a la par de Newton. Hay desarrollos en cosmología, puramente matemáticos (o del tipo de los Gedankenexperimente); había que afirmar, como Kant, que la piedra de toque para ellos son las experiencias efectivas; mientras mayor sea el alcance de los telescopios, mayor será el de tales conocimientos. Estos son forzosamente sintéticos y no a priori; si no, Platón habría tenido razón al recomendar que la astronomía se estudia mejor cerrando los ojos y dedicándose a la exploración puramente racional. Esta es una exclusividad del pensamiento lógico matemático.

29. **Tres dimensiones o más.** Grassmann y Plücker fueron los primeros en hacer desarrollos geométricos en los que aparecen más de las tres dimensiones tradicionales hasta entonces; en la práctica matemática habían sido empleadas ya antes, más de tres dimensiones; quizás sin equipararlas a las tres espaciales, quizás sin traer a las mientes la extensión del significado.

30. **Por el gusto de inquirir.** Davis and Hersh, p. 88, citan a Newton cuando escribía que "La base de una teoría cualquiera es la práctica social". Con frecuencia se intenta enrostrar a ciertos matemáticos (cultivadores de algún aspecto de la teoría de categorías, por ejemplo) su predilección por lucubraciones, puramente lógicas, que a muchos parecen completamente gratuitas. Sin razón. El hecho de que la sociedad humana haga posible la dedicación de uno de sus miembros a una actividad especializada no tiene por que obligarlo a retribuir con producciones inmediatamente utilizables. ¿Por qué se impondría una coerción al trabajo matemático que no se impone a otros tipos de trabajo creativo, como el literario o el artístico? Los griegos, trabajadores intelectuales si los ha habido, investigaban "por el gusto inquirir". ¿Qué tal que a Apolonio de Perga se le hubiera exigido la aplicabilidad de su teoría de las cónicas? Se tuvo una, pero no era indispensable para la validez de la teoría, diez y siete siglos después, en los trabajos de Kepler.

31. **Matemática: creación de explicaciones posibles.** La matemática aparece en las grandes civilizaciones antiguas como instrumento indispensable para resolver problemas de organización, de distribución de bienes, por ejemplo. Prácticamente, el mismo empleo de la matemática se hace

actualmente en le extensa gama de sus aplicaciones, que la hacen un lenguaje tan importante para la vida en sociedad casi como lo es el lenguaje materno. La matemática en sí, no intenta explicar la realidad, es decir, no se propone substituir a la filosofía o a la física: una proposición matemática tendría necesariamente una realización. Sino que ayuda a comprenderla, mediante procedimientos de simulación. Un matemático es un fabricante (para hablar en términos fabriles) de explicaciones posibles: esa es su función social. Que la ficción vaya más allá de la realidad está ya bien explicado en el marco de la teoría de Piaget, por ejemplo (subordinación de lo real a lo posible).

32. **Matemática pura y números irracionales.** Una matemática con números irracionales es matemática pura o formal. Las aplicaciones de la matemática no emplean sino números racionales. Un carpintero no podrá jamás construir una cama cuya longitud sea $\sqrt{2}$. El matemático inglés, Hardy, decía: "... es obvio que los irracionales no son interesantes para un ingeniero, puesto que este solo se ocupa de aproximaciones y todas las aproximaciones son racionales". La matemática aplicada no es matemática pura, porque los irracionales no son útiles para quien se sirve de la matemática, y, la matemática pura tiene su fundamento en los irracionales.

33. **Los conceptos de la matemática no son empíricos,** como enseñaban Mill y otros. Que la suma de los ángulos internos de un triángulo sea igual a dos ángulos rectos no es el resultado de haber tomado medidas absolutas, en un espacio absoluto; es apenas, una de las posibilidades lógicas; es un resultado necesario solamente en el caso de que se haya tomado como premisa, o se haya obtenido como resultado previo, la proposición según la cual por un punto exterior a una recta, en el plano determinado por el punto y por la recta, pasa una única paralela a dicha recta. Según una filosofía realista, la geometría era una especie de física a base de abstracciones aristotélicas. Todavía un geómetra, Veronese, opinaba que la geometría era la ciencia experimental más exacta. Sin embargo, la noción de espacio fue separándose paulatinamente del espacio del sentido común. Con Riemann, 1854, comienza a pensarse el espacio como un conjunto de puntos con una estructura. El matemático Peano, italiano como Veronese, podrá decir que la palabra espacio carece totalmente de empleo en geometría. En la teoría de la relatividad generalizada (cuyo "camino ha

sido más duro de lo que hubiera podido creerse porque exigía el abandono de la geometría de Euclides" dice Einstein) la concepción matemática de Hilbert encontró un aliado que ha permitido ahorrar muchas discusiones.

34. **Conjunto de partes y posibilidades.** La matemática por ser a priori, es decir, independiente de la experiencia, no tiene por qué concordar forzosamente con la experiencia. Mediante un axioma, los matemáticos asocian con cada conjunto, su conjunto de partes. Cuando se logra esquematizar por medio de un conjunto una situación compleja, la matemática describe la totalidad de relaciones posibles entre los componentes de la situación, pero no señala una específica. Anticipa que de cien posibilidades, se realizarán cinco, por ejemplo, pero no cuáles o cuándo.

35. **La investigación matemática y el arte por el arte.** Las matemáticas llamadas elementales resuelven problemas de frecuente ocurrencia cuya solución no requiere otros conocimientos matemáticos. Pero, en la práctica social, las situaciones crecen en complejidad y prestamente surgen problemas específicos; ello hace que la matemática crezca análogamente. Muchas partes de la matemática han surgido durante la búsqueda de soluciones para problemas que realmente se han presentado. Guiados por esta circunstancia hay matemáticos eminentes que no quieren pensar en un cultivo de la matemática alejado de problemas significativos. "A medida que una disciplina matemática se separa más y más de su fuente empírica... se va haciendo más y más esteticismo puro, se convierte más y más en un arte por el arte... a gran distancia de su fuente empírica, o bien después de mucha incubación abstracta, un campo matemático está en peligro de degeneración" (J. von Neumann. p. 103. No. 70. *La nueva matemática.* 1973. Barcelona. Salvat Editores. 143 pp.). Esta es una muestra de que también en matemática se da la intransigencia y que esta puede ser profesada por personas geniales. Afortunadamente no puede ser más que una opinión. ¿Quién podría atribuirse el derecho a estatuir que un arte por el arte no puede ser matemática o que es matemática degenerada?

36. **Matemática e interpretación en la naturaleza.** Dirac, un físico eminente, piensa que "todo nuevo concepto matemático tiene interpretación en la naturaleza", (Como físico matemático, sus conceptos matemáticos seguramente están moldeados sobre problemas físicos; pero en el enunciado no figura tal salvedad; por tanto, el cuantificador universal parece de nuevo una generalización apresurada; o si no lo es, es excluyente, en el

sentido de la de von Neumann). Solo es buena matemática la que es interpretable en fenómenos naturales. Por contraposición, habría que citar a matemáticos que piensan exactamente lo contrario, como Cantor o Hardy.

Matemáticos o físicos teóricos como von Neumann o Dirac tienen la convicción de que la opulencia en frutos matemáticos está aparejada con el pensamiento que los investigadores matemáticos tenían puesto en los problemas físicos. Afortunadamente, hay también matemáticos que opinan lo contrario y se atreven a explicar en parte la enorme prolificidad de la matemática en el siglo XX (se ha creado mucha más que en todos los siglos anteriores y ¿quién osaría calibrar los resultados comparándolos con los anteriores?) precisamente debido a que no hay que pasar por la física, como antes, para encontrar cuestiones interesantes.

37. **Matemática y racionalismo.** La matemática ha nutrido al racionalismo a ultranza que considera la razón humana no solamente como una facultad que fragua explicaciones representativas, coherentes, lo cual es razonable, sino además, como una que legisla sobre la naturaleza. En general, el racionalismo otorgaba universalidad y necesidad a los juicios matemáticos; entre estos, los que fueran verdades de razón valdrían en todos los mundos posibles; las geometrías no euclidianas cercenaron tal confianza; hubiera sido teóricamente posible alcanzar la confianza restringida mediante la consideración de hechos más sencillos. Actualmente, se tiene universalidad y necesidad dentro de cada sistema formal. Fuera de ellos los enunciados matemáticos son enunciados corrientes, que puede ser que se verifiquen en todas las oportunidades como la suma entre objetos concretos, o puede ser que no signifiquen nada fuera del sistema formal correspondiente, como el relativo a la suma de los ángulos de un triángulo.

38. **Una gota de agua y una gota de agua.** Una naranja y una naranja son dos naranjas. Pero una gota de agua y una gota de agua, al juntarlas, no son dos gotas de agua, sino una sola. $1 + 1 = 2$ en muchas situaciones, $1 + 1$ es diferente de 2 en muchas otras. Lo curioso es que se considere como paradigmática una sola de las dos alternativas, que se dé como característica de la matemática la exactitud y que se ilustre esta por la circunstancia de que $1 + 1 = 2$. En todo caso, los matemáticos tienen una teoría, la aritmética, que cobija todas las ocurrencias de la primera especie; pero tienen otra igualmente, álgebra de Boole, mediante la cual se puede entender racionalmente las ocurrencias de la segunda especie.

39. **Eddington. Matemática: operaciones con operaciones.** Es sobre todo a partir de la utilización del álgebra cartesiana cuando comienza a verse que la matemática más que de objetos físicos se ocupa de las relaciones entre las relaciones que puede haber entre objetos físicos. No podía entenderse el principio a fondo sin tener bien establecida la noción de función o de correspondencia entre elementos. La matemática se ocupa de funciones o sea de relaciones entre relaciones entre objetos. Así caracterizaba Eddington a la matemática, 1938. Decía también acertadamente que la matemática se ocupa de operaciones con operaciones.

40. **Matemática y autoevidencia.** Platón, Klein, Heidegger, entre otros, participan en cierta línea común, de pensamiento, respecto de lo que es la matemática. Es la ciencia de lo autoevidente (Klein). O dicho por Heidegger: lo matemático es lo patente que hay en las cosas.

41. **Intuición y curvas sin tangente única.** Los matemáticos estuvieron despreocupados de la lógica mientras la lógica estuvo restringida a la relación de contenencia de las partes en el todo, es decir, mientras lógica era solamente la lógica tradicional. Creían en una especie de sexto sentido que les permitía manejar intuitivamente las proposiciones de la forma atributiva $S \subset P$. El lógico Boole les reveló el entramado algebraico de la lógica. Pero fueron las funciones continuas sin derivada única y las geometrías no euclidianas las que hicieron ver a muchos matemáticos que no había tal sexto sentido y que la matemática no es subjetiva ni innata, sino que son las reglas de la lógica las que garantizan su objetividad. Salvo Leibniz o quizás Saccheri, ninguno de los matemáticos anteriores a Boole se había interesado ostensiblemente por la lógica. Desde Boole, la han investigado como no lo habían soñado los filósofos desde Crisipo de Soli.

42. **Matemática: ciencia hipotético deductiva.** Hay una línea de pensamiento trazada por Platón, y en la que puede ubicarse a Stewart, B. Peirce, Whitehead A. N., Pieri, Russell: la matemática es un conocimiento hipotético deductivo. “La matemática en el sentido más amplio, es el desarrollo de todos los tipos de razonamiento formal, necesario, deductivo” (Whitehead. Citado por Guillaume p. 363). Ciencias distintas de la lógica y la matemática pueden proceder hipotético deductivamente; pero la validez objetiva de la teoría que resulte puede ser asegurada únicamente por la experimentación, mientras que la lógica y la matemática tienen garantizada su validez objetiva con solo atenerse a la sintaxis lógica.

43. **Relatividad del principio de contradicción.** Es posible contradecirse únicamente cuando se ha asumido un principio de no contradicción, tácito o explícito. La contradicción no está en la naturaleza. Frente a Heráclito, quien parecía verla por todas partes, se levanta Parménides, quien no parecía verla en parte alguna; otros filósofos han profesado actitudes intermedias, entre estas dos extremas.

    El principio de contradicción es privativo de la lógica de dos valores. Por lo demás, el principio de no contradicción no aparece tan verdad de razón, como es concebido en el sistema racionalista leibniziano; hay sistemas filosóficos que prescinden de él y su necesidad se manifiesta más que todo en el campo intelectual cuando se quieren forjar explicaciones (filosóficas, científicas, ...) perdurables. Platón y Aristóteles insisten en que no hay ciencia de las cosas precarias; y el mismo Heráclito subraya en el fluir de las cosas, el orden de la sucesión de las cosas. Solo cuando se echa de ver la uniformidad, aunque sea en el cambio, es posible introducir el principio de contradicción.

44. **Gergonne: la definición implícita.** "De la misma manera que puede llevarse a cabo una operación algebraica sin tener la menor idea del significado de los símbolos sobre los que se opera, es posible seguir el curso de un razonamiento sin tener conocimiento del significado de los términos en los que se expresa, o sin tomar conciencia de ellos si se conocen" (Gergonne (1816) citado por Prior, p. 176). Los sistemas formales actuales aplican esta idea que aparece en Kant (CRP. B 762) desde luego en Leibniz. Hay términos no definidos inicialmente; el desarrollo de la teoría, el cual no depende del contenido, permite darse cuenta de cómo se emplean correctamente dichos términos primitivos; se dice que ellos quedan definidos finalmente de manera implícita. En *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, punto, recta, plano son términos no definidos; pero al terminar el estudio del primer capítulo es posible decidir cuándo son bien empleados, cuándo no.

45. **Galois: primera estructura matemática.** Evariste Galois (1811, 1832) explícita, 1832, la estructura de grupo, latente ya en trabajos de Lagrange, de Gauss, de Abel; es la primera manifestación de una estructura matemática.

46. **Bolyai-Lobachevski: geometría sin el postulado de Euclides.** Bolyai y Lobachevski, también en 1832, ponen de manifiesto que se puede desarrollar una geometría tan lógicamente coherente como la de Euclides, al considerar una de las hipótesis contradictorias del postulado de Euclides. Como el público académico está acostumbrado a considerar la intuición (como si fuera la del ser humano naturalmente euclidiano) las construcciones teóricas de Bolyai y de Lobachevski cuentan sobre la sola lógica para hacerse entender.

47. **Boole: análisis matemático de la lógica.** Boole, 1847, publicó su obra pionera *The mathematical analysis of Logic*. "Me propongo establecer el cálculo de la lógica y postulo para él un lugar entre las formas reconocidas del análisis matemático", escribe allí; la primera idea no podía realizarla él solo, desde luego, pero fue un gran comienzo; por lo que toca a la segunda, la lógica es desde entonces, parte de la matemática, la que le ha dispensado toda suerte de cuidados que le han permitido desarrollarse muy bien. Boole completó sus investigaciones en otra obra, 1854, más citada generalmente, *An investigation of the laws of thought*. Aparece la expresión "leyes del pensamiento" que la lógica actual ignora.

48. **Smart. Kant: ¿en qué medida depende el conocimiento de la estructura del cerebro humano?** J. J. L. Smart, (p. 247. Entre ciencia y filosofía (1968). 1975. Madrid. Tecnos. 266 pp.), entiende el problema kantiano como el de determinar en qué medida depende el conocimiento, de la estructura del cerebro humano. Espera la solución de la neurofisiología o de la psicolingüística. Es un planteo interesante pero al sugerir una puerta de salida, corre el riesgo del que se atiene a una visión unilateral, como sería la del psicologismo. Hay que situar el conocimiento matemático respecto de la biología, como lo hacen Piaget y Thom; pero, sin olvidar que es una de las facetas del problema

49. **La naturaleza y las dificultades del análisis.** La naturaleza no se embrolla con las dificultades del análisis. (Fresnel, citado en: Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. 1972. *xvii* + 1238 pp.). La naturaleza no depende de los científicos que la estudian; estos si de ella. Los lógicos y matemáticos, solo mediatamente.

50. **Geometría y superficies de curvatura constante.** La contribución de Beltrami es muy importante. Mostró, en primer lugar, que si las geo-

metrías no euclidianas fueren contradictorias, entonces la geometría euclidiana resultaría igualmente contradictoria. Para muchos matemáticos, todavía reacios respecto de las nuevas geometrías, ese fue un argumento decisivo. No para todos, porque Frege nunca quiso reconocerlas, a pesar de ser tan versado e innovador en los problemas lógicos de la matemática. (La matemática, no es solo cuestión de entendimiento, sino de voluntad igualmente). En segundo lugar, Beltrami esclareció un punto difícil para la comprehensión de las nuevas geometrías. Sobre el papel o sobre el tablero, no se veía posibilidad para contradecir el postulado de Euclides; con toda razón; lo mostró Beltrami al dar la primera interpretación coherente de las geometrías conocidas. Las tres son geometrías para superficies, es decir, para variedades de dos dimensiones. La geometría euclidiana bidimensional es la geometría que se realiza en superficies de curvatura gaussiana constantemente nula (intuitivamente, las superficies que se ajustan perfectamente sobre un plano). La geometría de Bolyai-Lobachevski es la geometría que puede realizarse sobre superficies de curvatura gaussiana negativa constante; Hilbert mostraría después un célebre teorema según el cual no hay superficies dentro del espacio tridimensional euclidiano sobre las cuales se realice globalmente la geometría de Bolyai-Lobachevski. La geometría de Riemann es la geometría que se realiza sobre superficies de curvatura gaussiana positiva constante (intuitivamente las que se curvan como la esfera).

51. **Klein: geometría y grupo de transformaciones.** (1872). Geometría es el estudio de propiedades invariantes respecto de un grupo de transformaciones. Por ejemplo, la geometría euclidiana es el conjunto de las propiedades invariantes respecto del grupo de las isometrías (es decir, de las traslaciones y las rotaciones). En dos dimensiones los predicados de estas propiedades tienen por sujetos a puntos, rectas, segmentos, circunferencias, ángulos... Una geometría desarrollada se concreta en una tripla (C, G, I) donde C es un conjunto con una estructura, G es un grupo de transformaciones, I es el conjunto de las propiedades de elementos construidos en C, invariantes respecto del grupo G.

52. **Poincaré. Conjuntos infinitos e intuición.** Ninguna proposición concerniente a las colecciones infinitas puede ser evidente por intuición (Poincaré. *La lógica de lo infinito.* Capítulo IV. *Últimos pensamientos.* p. 97). Los conjuntos infinitos, consecuentemente, no pueden ser tratados sino

axiomáticamente. Matemáticos, como Russell, se esforzaron, sin éxito, por demostrar la existencia de un conjunto infinito. Así, hay que postularla; en la teoría de conjuntos de Bourbaki, es el axioma que tiene (actualmente el número 4 (Ensembles. III. 45). "A 4 (Axioma del infinito). Existe un conjunto infinito". El texto añade a guisa de explicación: "No se sabe deducir este axioma de los axiomas y esquemas de axiomas introducidos hasta aquí, y, aunque la cuestión no esté definitivamente resuelta, se puede presumir que sea independiente de ellos".

53. **Poincaré. La pregunta acerca de cuál es la geometría del espacio físico no tiene sentido.** Mientras no había sino la geometría euclidiana no se cuestionaba sobre la geometría del mundo circundante. Al aparecer las geometrías no euclidianas se presenta un problema, cuya solución, de haberla, no sería controlable experimentalmente, sino de manera local. Es pues, una cuestión de opiniones. He aquí la de Poincaré: averiguar cuál sea la geometría del mundo físico es un problema que no tiene sentido. Efectivamente, la labor del geómetra, y de los matemáticos en general, es la de forjar explicaciones lógicamente posibles. El físico echa mano de alguna de ellas, la que mejor le permita articular el cúmulo de datos de que dispone. La explicación de Newton y de Laplace está basada en la geometría euclidiana. Einstein empleó una geometría no euclidiana en su desarrollo de la teoría de la relatividad generalizada. Según Eves (p. 358. *Estudio de las geometrías.* (1963). 1969. Tomo I. México. UTEHA. *xvii*+471 pp.) R. K. Luneberg (*Mathematical analysis of binocular vision*) llegó a la conclusión de que el espacio visual (espacio psicológicamente observado por personas de visión normal) podía ser más convenientemente descrito por la geometría no euclidiana de Bolyai-Lobachevski.

    Estos y otros hechos de la historia de la ciencia, muestran que tan irrazonable es pensar que la geometría de la realidad es la euclidiana como pensar que no lo es. Una geometría es un marco que es superpuesto a la realidad con el fin de conocerla y puede ser muy bien que en la realidad no haya rastro de ninguno de tales marcos.

54. **Poincaré. Axiomática: dar el mismo nombre a cosas diferentes.** "La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes". Lo que interesa al matemático no son las cosas diferentes sino el que pueda darse la misma explicación a conjuntos de elementos diferentes. En ese sentido, "la teoría de grupos es la matemática desprovista de su

substancia y reducida a pura forma". La estructura de grupo conviene tanto a conjuntos con número finito de elementos como a conjuntos con infinitos elementos.

55. **Russell: caracterización de la matemática.** En cuanto la matemática es sintaxis no tiene que ver con el significado. En cuanto es semántica, se ocupa sistemáticamente de interpretaciones, modelos, realizaciones; entonces, uno puede preguntar acerca de lo atinente a la verdad. Se hace mucha mención de la sentencia de Russell según la cual "la matemática es una ciencia en donde no se sabe jamás de qué se habla ni si lo que se dice es verdadero"; se la repite porque se la cree una ocurrencia, cuando rigurosamente hablando, ella es verdadera al pie de la letra, en cuanto a la matemática es formalizada. Sin la distinción entre sintaxis y semántica, la aseveración de Russell, no pasará de ser una agudeza entretenida.

56. **Russell: caracterización de la axiomática.** Solo hay que asegurar que los axiomas implican los teoremas, no que los axiomas sean verdaderos (*Principios de la matemática*). Es el mismo hálito del pensamiento cartesiano cuando para hablar del método de los geómetras aludía a largas cadenas de razones.

57. **Einstein: los axiomas son creaciones voluntarias de la mente humana.** "Los axiomas son creaciones voluntarias de la mente humana… Doy gran importancia a esta interpretación de la geometría, porque si no hubiera estado familiarizado con ella, nunca habría sido capaz de desarrollar la teoría de la relatividad". El meollo de la primera aserción estaba en cierne en el hecho mismo de que hubiera geometrías no euclidianas; los matemáticos tuvieron que acostumbrarse a tal pensamiento; lo cual tomó más tiempo del que era de esperar; aparece plenamente realizado en *Fundamentos de la geometría* de Hilbert; pero su divulgación habría tomado mucho más tiempo de no ser por la aplicación exitosa de Einstein a la relatividad general. Su inmensa popularidad ahorró grandes esfuerzos a los matemáticos; a más de esto, la teoría de Einstein dio particular impulso al estudio exhaustivo de algunas geometrías.

58. **Einstein: verdadero y geometría pura.** "La cuestión de saber si una determinada proposición geométrica es verdadera se reduce a la cuestión de saber si los axiomas son "verdaderos". Pero, se sabe que esta última cuestión no solamente no puede ser resuelta mediante los métodos de

la geometría sino que la cuestión carece de sentido por sí misma. No se puede preguntar si es verdadero que por dos puntos pasa una sola recta. Únicamente se puede decir que la geometría euclidiana trata de figuras a las que llama *rectas* a las cuales atribuye la propiedad de estar determinadas unívocamente por dos de sus puntos. La noción de *verdadero* no se aplica a los enunciados de la geometría pura, porque con el término *verdadero* designamos siempre, en última instancia, la concordancia con un objeto "real". La geometría, en cambio, no se ocupa de la relación entre sus conceptos y los objetos de la experiencia, sino solamente de la relación lógica que guardan dichos conceptos entre sí". (Albert Einstein. p. 14. *La relatividad* (1916). 1970. México. Grijalbo. 202 pp).

59. **Einstein: fondo, forma y axiomática.** *"En la medida en que se refieren a la realidad, las proposiciones de la matemática no son seguras, y viceversa, en la medida en que son seguras, no se refieren a la realidad.* Creo que esto no estuvo totalmente claro para todos hasta la llegada de esta formulación de la matemática que recibe el nombre de *axiomática*. El progreso alcanzado por la axiomática consiste en haber logrado una neta separación entre lo lógico-formal y su objetivo o contenido intuitivo; de acuerdo con la axiomática, solo lo lógico-formal constituye el objeto de la matemática, que no tiene que ver con lo intuitivo ni con otro contenido asociado con lo lógico-formal" (Einstein, *Geometría y experiencia* (1921)). Para Blanché, el problema de Kant consiste en que estos dos elementos, forma y fondo, andan mezclados en *Elementos*; en lugar de separarlos como logró hacerlo la axiomática actual, Kant trató de explicarlos en conjunto.

60. **Piaget: abstracción reflexiva o lógico matemática.** Abstracción lógico-matemática o reflexiva: proceso para extraer estructuras conscientes a partir de esquemas de la actividad inconsciente (Compendio de la idea de Piaget, según Thom. 1973. *Developments in mathematical education*). Consiste en la actividad intelectual, posterior a la que se basa en la intuición de tipo espacial. El matemático construye sus nociones, con base en sus necesidades teóricas, independientemente de lo que le ha suministrado la abstracción aristotélica de lo sensible. Piaget emplea la expresión dinamismo de la inteligencia. La materia prima para tal abstracción es una experiencia muy especializada y personal, que tiene que ver, desde luego, con relaciones entre relaciones; puede presentarse al advertir una deficiencia en una teoría existente o situaciones relacionales no conside-

radas antes y que se hacen patentes paulatinamente por familiarización; nunca se presentan sin una larga frecuentación de los conceptos. “El genio es aplicación”, decía Hilbert. Los textos de Piaget no parecen indicar que la abstracción lógico matemática sea exclusiva de la creación o invención.

61. **Piaget-Thom: simulación. Dinamismo de la inteligencia.** El ligamen biología-conocimiento matemático está claramente considerado ya en Poincaré. Thom ha intentado señalar el origen biológico de la matemática en la simulación de procesos externos bien determinados, en la tendencia a aislar procesos repetibles y a combinarlos de las maneras posibles: la matemática “es la ciencia de la repetición de automatismos”. No se ve por qué Thom excluye la simulación de los procesos aleatorios. ¿Quién, aparte de los matemáticos puede hablar con propiedad acerca de lo aleatorio? El pensamiento matemático surgió como consecuencia de la necesidad humana de simular la realidad exterior. Piaget, con sus alumnos, indagó minuciosamente en la formación del pensamiento matemático en el niño; añadió a la tesis del origen biológico, la idea, que en parte, complementa a Bourbaki, de que la parte formal, que tiene que ver con la esfera de lo posible, es fruto del dinamismo de la inteligencia, ya lejos de la experiencia.

62. **Pasch: estatuto para la axiomática.** Entre los trabajos de reflexión epistemológica, surgidos después de los resultados de Beltrami se destaca el de Pasch; a pesar de su fuerte empirismo, desgajó nítidamente la situación de los sistemas axiomáticos luego de que se impusieran las geometrías no euclidianas. La intuición que, según el sentido común, aparecía ligada a la geometría euclidiana, ha de ser desligada de ella. Un sistema axiomático que ha menester de intuición, es un sistema defectuoso, en el que no han sido bien seleccionados los primeros principios. Un sistema formal consta de estos y de las conclusiones que de ellos puedan extraerse mediante aplicación de un conjunto de reglas previamente adoptadas.

63. **Hilbert: “Mesa, silla, jarro de cerveza”.** Los sistemas formales estaban entre las preocupaciones apremiantes de quienes inquisicionaban sobre los fundamentos de la geometría. Así, Hilbert salía de una sesión de un seminario sobre el tema (1891), cuando tuvo la ocurrencia de expresar que lo importante no es saber qué son los objetos con los cuales se hace geometría sino si guardan entre sí ciertas relaciones. Puede decirse mesa, silla, jarro de cerveza en lugar de punto, recta, plano a condición de que

los primeros estén entre sí en las relaciones en que se supone están los segundos al comenzar a desarrollar la geometría.

64. **Dieudonné: Hilbert enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente.** Todo el movimiento axiomático surgido de la reflexión sobre las geometrías no euclidianas culmina en *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert, donde se muestra, de hecho y de derecho, cuál es la nueva axiomática. Según la apreciación del matemático Jean Dieudonné, fue Hilbert quien enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente. Algunas características de la obra maestra de Hilbert se recuerdan a continuación; otras en diversos párrafos de esta síntesis. Los axiomas no son escogidos por criterios de mayor o menor evidencia, como en la filosofía aristotélica de la ciencia. A diferencia de *Elementos*, cumple la enseñanza aristotélica de que no todo puede ser definido. Los términos no definidos, serán definidos implícitamente durante el desarrollo. Un sistema formal no es un producto natural bruto, sino que se compone a voluntad (la libertad del matemático, celebrada por Cantor) del axiomatizador. Un conjunto de conocimientos axiomatizable se puede colacionar con un poliedro regular que descansa en equilibrio sobre una cualquiera de sus caras (según la comparación de Nicod, citada por Blanché, pp. 28-29). Una vez escogidos los axiomas, es posible hacer una combinatoria de ellos, lo cual va suministrando diversas geometrías. Resulta una clasificación de los axiomas según los tipos de relaciones que establecen. Resulta igualmente una clasificación de los teoremas según los medios empleados en la demostración.

65. **Hilbert: axiomas equivalentes.** La concepción axiomática de Hilbert, permite entender cómo había sido posible alcanzar demostraciones del quinto postulado cuando este había sido suprimido de entre los postulados de Euclides, con solo añadir algún enunciado, aparentemente no relacionado con él; en realidad se había construido un sistema formal que resultaba equivalente a la geometría euclidiana, por haber substituido su axioma característico por un enunciado equivalente.

66. **Pasch-Hilbert: Primeros principios y lógica, exclusivamente.** Uno de los rasgos distintivos de la obra de Hilbert es la inflexibilidad con que aplica la idea, destacada, en particular por Pasch, de que una vez escogidos los axiomas había que atenerse a la sola lógica. La caracterización platónica del sistema geométrico se convierte en regla de procedimiento por motivos de desenvolvimiento. En *Elementos*, la intuición suple por

algunos primeros principios. Un análisis refinado conduce a Weierstrass a la construcción de curvas continuas pero sin tangente única en ninguno de sus puntos, contra la intuición de lo obvio hasta entonces. Las geometrías no euclidianas muestran de hecho cómo la intuición ocultaba posibilidades garantizadas por la lógica. Con la combinatoria de axiomas y la consiguiente clasificación de axiomas y de teoremas, Hilbert exhibe diversos sistemas formales pensables. Con los teoremas de Gödel es dable una explicación para la relativización de los sistemas formales y una justificación para el esmero obligado en el planteamiento de las hipótesis. Así queda restablecida la intuición genial de Platón de que el geómetra no puede desprenderse de los primeros principios, ahora enriquecida por el intenso trabajo de los geómetras que la hace resurgir como regla de trabajo indispensable en toda la lógica y en toda la matemática.

Nada está en la conclusión, si no está en las premisas, no contenido como la parte en el todo, sino en cuanto los primeros principios, los axiomas en particular, pueden ser considerados como reglas de procedimiento que hacen realizables inagotables construcciones.

67. **A partir de la intuición; aparte, empero, de la intuición.** No hay en el aderezo de la matemática, de la geometría en particular, un tipo distinto de empleo de la intuición, del que se emplea en las creaciones humanas, así la intensidad requerida para hacer matemática sea muy grande. La de un poeta, dice Weierstrass; y otros matemáticos, como Lie, estarían de acuerdo. La diferencia con otras creaciones humanas está en que el fruto del trabajo de la imaginación (la intuición del matemático es la imaginación adiestrada en composiciones mentales que ofrezcan un aspecto interesante para los matemáticos) tienen que pasar por el crisol de la lógica so pena de no ser tenido en cuenta. La intuición presiente, dispone, parangona; pero el producto final es un texto redactado axiomáticamente, cuya disposición puede ser obra de la imaginación, pero cuyas partes son independientes de ella: a partir de la intuición, aparte empero de la intuición.

68. **Hilbert: *Fundamentos de la geometría* (1899).** Es la obra en la que culmina la evolución axiomática de la geometría, iniciada con el análisis de *Elementos*, de Euclides. La XIII edición alemana, 1987, consta de 125 páginas. La disposición definitiva es la que dio Hilbert, con su colaborador Bernays, a la sexta edición alemana, 1930. Se compone, grosso modo,

de: tres términos no definidos (punto, recta, plano); cinco relaciones ('estar en', 'entre', 'congruente', paralelo, continuo) primitivas o dadas entre los tres elementos no definidos; veinte axiomas o postulados distribuidos en cinco agrupaciones (pertenencia, ordenación, congruencia, paralelismo, continuidad); sesenta y ocho teoremas; diversas explicaciones o definiciones explícitas; algunas figuras; ... Los términos no definidos y las relaciones dadas son expresiones tomadas del lenguaje corriente, pero sin el significado del lenguaje corriente y quedan sin definición explícita durante toda la obra, pero son definidos implícitamente, en cuanto poco a poco, por axiomas y teoremas se ve cómo usarlos correctamente dentro del sistema axiomático, y solo es lícito emplearlos así, so pena de echar a perder el sistema. Ello no es condenar las aplicaciones, sino distinguir nítidamente cuándo se está haciendo sintaxis (único criterio: la lógica) de cuándo se hace semántica (a más de lógica puede haber otros criterios, como el éxito de la interpretación).

69. **Problemas de la axiomatización.** El fundamento ontológico que da Aristóteles a la ciencia hizo que de la construcción euclidiana no surgiera cuestionamiento sobre las circunstancias de la axiomatización. Al pasar a ser los primeros principios de libre escogimiento por parte del geómetra, éste ha de garantizar que su selección cumple ciertos requisitos. Son el objeto de estudio de la metamatemática; el desenvolvimiento de esta disciplina destacó el alcance de tres de ellos: consistencia (coherencia, no contradicción, ...), compleción, decidibilidad; están en el núcleo de los teoremas de Gödel.

70. **Thom: Rigor absoluto. Significado nulo.** De la experiencia matemática consistente en la exposición hilbertiana de la geometría de Euclides se sigue esta lección: "solamente se alcanza el rigor absoluto eliminado el significado; el rigor absoluto solo es posible en, y por, tal indigencia" (Thom. pp. 202-203. *Developments in mathematical education.* Cambridge at the University Press. 1973. 318 pp.). Hermann Weyl opina similarmente y, por supuesto, el dictamen está expuesto por el mismo Hilbert. Se llaman sistemas formalizados a aquellos que se restringen a la exposición sintáctica: cálculo lógico con formas proposicionales. Raramente es utilizado por los matemáticos, quienes, como Bourbaki, prefieren la semi-formalización, un híbrido (como dice Thom), de rigor y significado.

71. **Hilbert: matemática y fórmulas demostrables.** Para Hilbert, la matemática se convierte en el conjunto de todos los enunciados demostrables. Si a demostrable se le da el sentido que le da Hilbert, entonces, la lógica y la matemática se constituyen en disciplinas aparte, en las que interesa sobre todo la coherencia interna y no la correspondencia con situaciones externas al sistema. Este es el significado de la designación matemática pura, o matemática formal; que desde luego no alberga un sentido elitista o una actitud celosamente guardada de aislamiento de las aplicaciones de la matemática. Cada una de estas dos grandes ramas de la matemática encierra problemas complejos y el estudio, a fondo claro está, de problemas mixtos es todavía más complicado. La matemática formal se ocupa de sistemas formales (Curry), no de sus posibles interpretaciones o aplicaciones.

72. **Objetos matemáticos.** Ha sido muy discutida la naturaleza de los objetos matemáticos, según las diversas concepciones de la matemática, desde Grecia hasta los tiempos actuales. Para Aristóteles son abstracciones ideales de la experiencia sensible. Para Mill, Helmholtz, Pasch, ..., los conceptos de la matemática son empíricos. Para Cantor los objetos son los elementos de un conjunto. En la visión formalizada, no estructuralista de Hilbert, aparecen los objetos ideales. A la luz de las últimas investigaciones (escribía Bourbaki en 1947), las estructuras matemáticas son, propiamente hablando, los solos objetos de la matemática. La matemática deviene "una cantera de formas abstractas: las estructuras" (Bourbaki. 1947).

73. **Brouwer: intuicionismo y formalismo.** Todavía vale la pena tener en cuenta la aserción de Brouwer, 1912: "La pregunta acerca de dónde existe la exactitud matemática es contestada diferentemente; el intuicionista dice: en el entendimiento. El formalista dice: sobre el papel". Esta sentencia liga dos escuelas acerca de la filosofía de la matemática con escuela conocidas en la historia de la filosofía: conceptualistas y nominalistas. Para los intuicionistas, la matemática es "idéntica con la parte exacta de nuestro pensamiento", por tanto, la fuente del conocimiento matemático no puede ser sino la intuición. Para el formalismo, en cambio, es la intuición de los signos escritos conforme a una sintaxis acordada, la que garantiza la exactitud. (*Diccionario de filosofía.* Matemática). Hay una tercera escuela, la realista, que grosso modo, corresponde a los logicistas, generalmente de

cuño platónico. Ha habido aproximaciones entre estas escuelas. Hilbert reconoce algunas reclamaciones de los intuicionistas y obra en consecuencia. Heyting, por el intuicionismo, se acerca a Hilbert y presenta una introducción a la exposición axiomatizada de algunos campos de la matemática, con muchas restricciones es cierto.

74. **Interés en axiomatizar una disciplina.** Importa tener en cuenta la siguiente observación de Blanché (parágrafo 26). Un sistema axiomático no ofrece casi interés para quien no ha asimilado anteriormente el conjunto de conocimientos concretos que la axiomatización pone en orden. Axiomatizar una disciplina es coordinar los conocimientos que se tienen en esa disciplina. Si no hay conocimientos, falta la materia prima tanto para la axiomatización como para disponer el ánimo a emprender una axiomatización. Las aplicaciones de la matemática no requieren todas matemática axiomatizada. La mayoría de los ingenieros y los físicos experimentales aprenden a utilizar la matemática como instrumento; en el adiestramiento concerniente hay que seguir naturalmente la organización axiomática de las nociones pero generalmente no las demostraciones. Los físicos teóricos en cambio conocen mucho más a fondo el ordenamiento riguroso de la matemática.

75. **Las tres rupturas.** Las geometrías no euclidianas rompen la unidad de la geometría. La lógica trivalente de Lukasiewicz (1920) y la lógica con n valores de Post (1921) rompen la unidad de la lógica. Los teoremas de Gödel (1931) rompen la unidad de los sistemas formales. Un solo sistema formal no puede contener a toda la matemática. Mirando las cosas retrospectivamente se diría que el tercer resultado está preludiado por los otros dos. Estas tres rupturas acarrean otras consigo, la del concepto de espacio, para dar un solo ejemplo.

76. **Pascal: espíritu geométrico y espíritu de fineza.** Las rupturas de la unidad de la geometría, de la de la lógica y de la de sistema formal, hacen aun más extraña la intención de poner un problema acerca de la geometría de la realidad. Sería muy curioso que el universo se condujera según los teoremas de la geometría euclidiana, por ejemplo, dado que dicha geometría está construida con base en la lógica de dos valores. Es cierto que la lógica bivalente puede ser una de las explicaciones de la eficacia de la matemática tanto desde el punto de vista teórico como del de las aplicaciones. Dicha lógica permite una simplificación en el proceso

de solución en cuanto cada proposición que pasa por la mente de quien resuelve, es o verdadera o falsa, sin tercera posición posible, y, en cuanto, además, cada proposición si no es verdadera es falsa o si no es falsa es verdadera. Pero, ya Pascal había diferenciado el espíritu geométrico del espíritu de fineza; no es nada difícil encontrar situaciones diversas de la vida corriente que no admiten explicación satisfactoria por la lógica de dos valores, o quizá mejor, que hacen esperar que se desarrollen las lógicas de más de dos valores y las investigaciones que permitan entender situaciones de esas gracias a alguna lógica. Entre los ejemplos más a la mano, está el de las personas de nuestro ambiente que pueden parecer simpáticas, antipáticas o indiferentes. Si la lógica de dos valores fuera escogida para las relaciones sociales no habría sino amigos y enemigos, una sola doctrina, un solo partido, etc. ¿Quién podría asegurar que solo en las sociedades humanas se presentan diversamente los sucesos? ¿O que tales sucesos no puedan tener una explicación del tipo de las que da la lógica bivalente en matemática? En el lenguaje corriente se abusa de la claridad de este tipo de explicaciones al querer hacer pasar por lógicas, situaciones muy mal estudiadas.

77. **Diversas concepciones de la geometría.** Hay diferentes concepciones de la geometría. Según la visión genética de Piaget-García: Euclides concibe la geometría como estudio entre los elementos de una figura; Descartes traduce en ecuaciones la concepción euclidiana; pero el esquema de Piaget-García no se ajusta del todo a la historia, dado que tanto en *Elementos*, como en *La Géométrie*, son también importantes las relaciones entre recta y circunferencia, por ejemplo. Las posiciones relativas las estudia sistemáticamente la geometría proyectiva de Poncelet. Klein enfoca la geometría como estudio de propiedades invariantes respecto de un grupo de transformaciones; más generalmente, para Poincaré, la geometría no es otra cosa que el estudio de un grupo. Finalmente, desde el punto de vista estructural, una geometría es el estudio de un subgrupo del grupo de los difeomorfismos de una variedad; es decir, el estudio de las propiedades invariantes respecto de la acción de un subgrupo del grupo de los difeomorfismos de una variedad.

78. **Sistema formal.** Un sistema formal está compuesto de:

    1. Signos.
    2. Criterios o reglas de formación.

3. Criterios o reglas de transformación.
4. Axiomas.
5. Teoremas.

79. **Verdadero. Falso.** Un teorema, en un sistema formal, es una relación o enunciado que figura en una demostración del sistema. Una relación del sistema se vuelve un teorema cuando se ha logrado insertarla en una demostración. Relación verdadera, lema, corolario, proposición, son sinónimos de teorema dentro del mismo sistema formal. Una relación es falsa, dentro del sistema, si su negación es un teorema. Una teoría es contradictoria cuando contiene una relación que es a la vez verdadera y falsa. Bourbaki pone en guardia contra el atributo "no es un teorema de la teoría", dado que es relativo al desarrollo de la teoría; previene, además, contra la confusión que consistiría en creer que cuando se ha mostrado que una "relación es falsa", por allí mismo se haya establecido que dicha relación "no es verdadera" dentro del sistema. Sintácticamente, lo correcto es decir que una relación es verdadera, o que es falsa.

80. **Interpretación de un sistema formal.** Para obtener interpretaciones, se da contenido a las formas del sistema: términos no definidos, relaciones dadas entre los términos no definidos. Las formas proposicionales del sistema, en particular los axiomas, deben convertirse en proposiciones verdaderas, semánticamente hablando. Esta adecuación de un sistema formal a una interpretación, realización o modelo tiene generalmente problemas peculiares, que requieren ser resueltos diligentemente, para que las relaciones abstractas sean significativas para la situación al ser concretadas. La matemática pura tiene problemas específicos, la matemática interpretada tiene igualmente los suyos. Es una razón para distinguir la una de la otra. Una estructura, en la interpretación, organiza elementos observables, da sentido a comportamientos dispersos, así permite entenderlos de una manera; al cambiar de estructura es posible que pueda entendérselos de otra manera. La matemática cumple así su función social de lenguaje para traducir una situación y para comunicar, de instrumento científico y de cantera de explicaciones. Para poder dar diversos contenidos, es menester solamente disponer de las formas: es el sentido de la evolución hacia lo estructural.

81. **Estructuras: los "solos" objetos matemáticos.** Para Bourbaki, los objetos matemáticos propiamente hablando son las estructuras. Natural-

mente, la matemática está en uno de sus estadios de evolución; Bourbaki es el primero en recordarlo. Nadie puede asegurar que dentro de años la redacción de la matemática siga siendo lo que es hoy en el estadio estructuralista de su desenvolvimiento. Por ejemplo la noción de conjunto puede ceder su lugar a la de categoría, que se divulga cuando Bourbaki había publicado ya parte de su tratado.

82. **Chevalley-Weil. Matemática clásica y matemática moderna.** Para Chevalley y Weil, [p. 659. Hermann Weyl. Gesammelte Abhandlungen. IV], la matemática clásica está fundada sobre el número real, la moderna sobre la noción de estructura.

83. **Unas veinte estructuras.** Al apilamiento de disciplinas, llamado tradicionalmente matemáticas, Bourbaki substituyó una concepción rigurosa construida sobre tres grandes tipos de estructuras: algebraicas, ordinales, topológicas. Según Dieudonné, en la redacción semiformalizada de la matemática hasta donde logró realizarla, Bourbaki ha utilizado un poco más de veinte estructuras.

84. **Economía de pensamiento.** En una investigación, lo indicado es el planteamiento estructural: así la atención se dirige, por la formación del investigador, hacia los aspectos claves (una estructura no es solo una abstracción culminante, sino también una síntesis de la experiencia histórica en la solución de problemas y en el aprovechamiento óptimo de los datos); se pueden utilizar teoremas de base de las estructuras a través de las que se contempla entonces la situación; es posible, por lo demás, que el progreso en la indagación requiera "refinamiento de las teorías de que se dispone", lo cual lleva a su enriquecimiento utilizable en ulteriores estudios. Los esfuerzos resultan encauzados de manera que rinden al máximo: es lo que Bourbaki llama la economía de pensamiento.

85. **Bourbaki: actitud pragmática frente a teoremas de Gödel.** Uno de los teoremas metamatemáticos de Gödel enuncia que es imposible demostrar la no contradicción de un lenguaje formalizado mediante razonamientos formalizables en un lenguaje suficientemente rico en axiomas para permitir formular los resultados de la aritmética clásica (Ver Bourbaki. Introduction). Esto no sume a nadie en la desesperación investigativa. Bourbaki, el gran expositor de la matemática presta para la investigación, toma una actitud pragmática. Para eliminar las paradojas de la teoría de

conjuntos se adoptaron los lenguajes formalizados; si estos llegaren a revelarse contradictorios, habría que hacer otra revisión, de la cual resultarían las enmiendas oportunas. "Desde hace veinticinco siglos, los matemáticos tienen la costumbre de corregir sus errores y de ver que así se enriquece su ciencia, no se empobrece; ello les da el derecho de mirar hacia el futuro con serenidad" (Bourbaki. Introduction. p. 5).

86. **Bourbaki: Teorías univalentes y polivalentes.** Sea

E conjunto
e una estructura sobre E
F conjunto
$f : E \to F$ una biyección

entonces se obtiene sobre F, una estructura $f(e)$, transportada desde E. Se dice que E, F son isomorfos o que tienen estructuras isomorfas. Supóngase que un determinado conjunto de axiomas es definido sobre conjuntos diferentes y que las estructuras resultantes sean siempre isomorfas. La teoría de las estructuras que satisfacen a dicho conjunto de axiomas es univalente. Si no, se dice que la teoría es multivalente. La teoría de los números reales, la geometría euclidiana son teorías univalente. Las teorías de los conjuntos ordenados, de los grupos, de la topología son ejemplos de teorías multivalentes. El estudio de las teorías multivalentes es el rasgo de más impacto entre los que permiten distinguir la matemática clásica, la matemática que es univalente, de la moderna que es multivalente (Bourbaki. Ensembles. Fascicule de résultats).

87. **Matemática y ajedrez.** En el aspecto puramente sintáctico, la matemática formalizada se puede comparar con un juego como el ajedrez, aunque en otros aspectos (la manera como el matemático hace su investigación, por ejemplo) no sea equiparable con él (Ver, en particular: Dieudonné. Les méthodes axiomatiques modernes p. 551). He aquí algunas semejanzas.

Ajedrez	*Matemática*
64 escaques, 32 piezas	Signos de una teoría
Posiciones diversas	Escrituras
Movimientos de la piezas	Reglas de formación

Posición inicial de las piezas	Axiomas
Reglas de juego	Reglas de transformación
Enroque	Relaciones
Jaque	Términos
Mate	Teoremas
Piezas sin significado	Términos no definidos
Las configuraciones sobre el tablero no necesitan interpretación	Formas proposicionales desprovistas de contenido
Declaración metaajedrecística: hay veinte salidas posibles para el jugador que inicia el juego	Declaración metamatemática: la no contradicción de la teoría es indecidible dentro de la misma teoría
Declaración metaajedrecística: hay un número finito de configuraciones permisibles en el tablero (por crecido que sea su número)	Declaración metamatemática: requerimiento finitista de la teoría de la demostración de Hilbert
Teoría del juego de ajedrez	Metamatemática

La condición para cada jugada es que se haga según las reglas. En el tablero se ve si un movimiento se conforma a las reglas. En lenguaje formalizado se ven las escrituras; basta inspeccionar estas para verificar la observancia de las reglas.

La forma permite distinguir unas piezas de otras. Según su forma, unas escrituras (bien formadas) son llamadas términos, otras relaciones. Según ciertas reglas, algunas relaciones son llamadas verdaderas.

Así como los vocablos (expresamente orden alfabético) *enroque*, *jaque*, *mate*, tiene un sentido convencional, a saber, designan abreviadamente ciertas situaciones o ciertos movimientos de juego descritos por las reglas, así mismo en axiomática *relación*, *teorema*, *término*, *verdadero* denotan escrituras cuya constitución es precisada por las reglas del sistema formal.

No se pone la cuestión de la verdad absoluta para un lenguaje formalizado como no se pone la del significado de un juego: la matemática formalizada no requiere más metafísica que el juego de ajedrez (Dieudonné).

Algunos aspectos peculiares de la matemática. Como en el caso de otras disciplinas, para ocuparse de matemática no es requerido partir de una definición; por el hecho de vivir dentro del mundo matemático, es decir, de aprender a hablar su lenguaje, a servirse de sus técnicas tan eficaces, a pensar en ejercicios elementales o en grandes problemas, ... el matemático llega a distinguir con cierta facilidad aquello a que se puede dar el atributo de matemático, de aquello a que no conviene tal atribución. Se pueden enumerar, no obstante, algunos rasgos específicos de temas matemáticos; no todos los rasgos se dicen de todos los temas; empero, un tema que lo posea en propiedad cabe en algún capítulo matemático. Ya han sido citados algunos intentos de caracterización de la matemática. Se puede intentar describir algunos rasgos observables en el tratado de Bourbaki.

88. **Matemática: aspecto combinatorio.** Uno de esos rasgos es el combinatorio: ¿De cuántas maneras puede suceder lo que sucede? ¿De cuántas maneras es pensable que se puedan combinar los sucesos? ¿Las propiedades? La matemática agota las posibilidades; lo cual hace al construir el conjunto de partes, noción asociada con cada conjunto e iterable indefinidamente. Piaget ha destacado sistemáticamente el hecho de la subordinación del mundo real al mundo de las posibilidades; este es uno de sus criterios para reconocer el avance en el pensamiento formal. Sin embargo, puede decirse que el aspecto combinatorio no fue explicitado cuidadosamente sino a partir de Pascal, Leibniz, Condorcet y sobre todo Laplace. Constituye hoy parte importante en la aplicación de la matemática.

89. **Lógica y matemática: combinaciones de axiomas.** En el aspecto puramente formal, Hilbert barajó diversos agrupamientos de axiomas, lo cual le permitió dar una visión de conjunto de diversas geometrías que habían aparecido en investigaciones geométricas. Cabe preguntarse qué sería pensar axiomáticamente y responder algo que tenga que ver con el aspecto deductivo observado en Euclides. Pues bien. Dieudonné afirma que es la idea de Hilbert lo que constituye el pensamiento axiomático y, por tanto, que fue Hilbert quien enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente. La matemática pensada ontológicamente no da pie para la combinación de axiomas, dado que, como es doctrina de Aristóteles, los axiomas son los

conocimientos más evidentes y es lo que permite tomarlos como axiomas. En la axiomática actual tal requisito sobra, el escogimiento de axiomas obedece a otros motivos. En la visión de Hilbert, la matemática es de veras hipotético deductiva. Bourbaki la ha adoptado en totalidad.

90. **Matemática: aspecto cuantitativo.** Otro rasgo, típicamente lógico o matemático, es el de la cuantificación. ¿Cuántos hay? Durante casi toda la historia de la matemática, y por la enseñanza misma de los peripatéticos, la matemática reducía al estudio de la categoría aristotélica de cantidad todo su saber. Filósofos como Leibniz, igualmente matemático, y Kant así lo pensaron. En muchos libros del presente siglo las nociones son introducidas con base en la de cantidad. Tal procedimiento tendía ya a desaparecer en la redacción de la matemática en términos de conjuntos; desaparece completamente en la axiomatización a la manera de Bourbaki, por ejemplo.

91. **Cuantificadores universal y existencial.** Dentro de los sistemas formales, hay algo así como una generalización del rasgo anterior, en el estricto uso de los cuantificadores universal y existencial. Es privativo de las teorías matemáticas. En el lenguaje corriente, en ciencias humanas, incluso en las ciencias físicoquimicas o naturales no se exige constatar si se habla de todos los individuos, de todos menos algunos, de algunos, de uno solo, o de ninguno. Por el contrario, un matemático no puede dar por demostrado un teorema o por resuelto un problema si no ha logrado estatuir rigurosamente la extensión de su enunciado.

92. **Relación de equivalencia.** También rasgo peculiar de las teorías matemáticas es el de poder crear conceptos con base en una relación de equivalencia. Basta que muestre que una relación es reflexiva, simétrica, y, transitiva para que tenga el derecho lógico de considerar una partición en el conjunto donde está definida la relación, partición de la que surgen nuevos elementos matemáticos que podrá entrar a estudiar sin más justificación. Como todas las ciencias, la matemática se ocupa en la búsqueda de caracteres comunes a elementos de un determinado conjunto; pero, solamente la matemática dispone de una técnica tan eficaz como esta de las relaciones de equivalencia que le permite asumir proposiciones de carácter universal, con solo verificar que inicialmente se tiene una relación entre algunos de los elementos del conjunto que tienen las tres propiedades indicadas.

93. **Matemática: aspecto deductivo.** Desde luego, la deducción es peculiar de la matemática. En un capítulo anterior ha sido citada la afirmación de Bourbaki: "Desde los griegos, quien dice matemática, dice demostración". En efecto, en *República*, libro VI, Platón, al tratar de distinguir el conocimiento filosófico del matemático, caracteriza a este por el hecho de no poderse desprender de las hipótesis cuando construye el camino que va de las premisas a la conclusión de un razonamiento. Descartes busca para la ciencia un método con ciertas características del de la matemática. El mismo Descartes y luego Pascal arguyen que solo en matemática se han logrado algunas verdaderas demostraciones. Leibniz considera que esta es una opinión común. Kant parece buscar, con esfuerzo, un criterio para distinguir la matemática de la metafísica; tienen en común el trabajar ambas con conceptos; Kant inventa lo de la construcción de un concepto en la intuición, posible únicamente en matemática, como el criterio que buscaba. Hegel mira despectivamente a la matemática por el modo de proceder en las demostraciones. Schopenhauer hace lo mismo porque la matemática no reduce sus demostraciones a lo intuitivo. Etc. Kant es quien asegura más categóricamente que solo en matemática hay definiciones, solo en matemática hay axiomas, solo en matemática hay demostraciones. Ello hubiera sido suficiente para diferenciar la matemática de otras disciplinas; intentó, no obstante, forjar el criterio anotado arriba. La diferencia, empero, entre la filosofía y la matemática no está en la construcción de conceptos en la intuición; la matemática escrita a la manera de Hilbert, especialmente la de Bourbaki, prescinde totalmente de la intuición, presente en la matemática de Euclides. La diferencia está en que, como vio muy bien Platón, el matemático se atiene rigurosamente a sus postulados iniciales y a sus reglas para derivar, únicamente de esas proposiciones iniciales y únicamente mediante las reglas explicitadas, las demás proposiciones del sistema. Sin excepción. Fuera de la lógica y la matemática, se puede decir que solo la física matemática hace lo mismo; y no siempre. Fuera de la matemática y la lógica, no es la lógica la que regula la marcha de la investigación; aunque no está ausente, su presencia se convierte en una especie de metodología para acordar el desarrollo teórico y los trabajos de laboratorio o de campo que son los decisivos en ciencias físicoquimicas, naturales o humanas. Quien tenga alguna duda, haga el ensayo con una argumentación filosófica de hacer un diagrama, que parta de la hipótesis y llegue a la conclusión, en el que figuren secuencialmente las proposiciones que figuren en las premisas y en la conclusión y la

indicación de por qué se puede pasar de la una a la otra en virtud, exclusivamente, de las reglas aceptadas. Al parecer, tal objetivo no lo alcanza ni la *Ética demostrada a la manera de los geómetras*; Bourbaki se permite una ironía al decir que Spinoza tal vez era de buena fe al asumir tal pretensión (*Éléments d'histoire des mathématiques*. p. 23). La matemática aparece entonces como el dominio del pensamiento donde la mente no está cohibida para la consistencia de su producto intelectual por condiciones de intuición sensible o por exigencias de hechos contingentes; como la esfera de las representaciones, regida sistemática y exclusivamente por la lógica, donde se consideran las cosas como deben ser, mientras que las ciencias de la naturaleza o de la sociedad deben considerar las cosas como son.

94. **Cinco temas de filosofía de la matemática.** En gracia de la discusión, se puede aceptar la agrupación que hace Robert Long de los temas de la filosofía de la matemática en estos cinco acápites:

    Fundamento lógico.
    Pérdida de la certidumbre.
    Naturaleza de la demostración.
    Relación entre conocimiento matemático y realidad.
    Estatuto ontológico de los objetos matemáticos.

    Se puede intentar un balance de lo compendiado en este capítulo respecto de los cinco problemas citados.

95. **Tema 1. El fundamento lógico.** El fundamento lógico es el que ha requerido la formalización. Las explicaciones de Poincaré, Kronecker, Brouwer, Frege, Russell, dejaban algún flanco al ataque. Hilbert es conducido paulatinamente, por el examen de las diversas proposiciones, a la formalización (axiomatización a la manera de Hilbert: capítulos 8, 9, 10) que consiste en cálculo lógico con formas proposicionales. Este cálculo como el algebraico, permite, en principio, darse cuenta a simple vista de la aplicación de las reglas de formación y de transformación, peculiares a cada sistema formal. Con ello, dicen Hilbert y Bourbaki, desaparecen problemas y pseudoproblemas filosóficos relativos a la validez de las construcciones matemáticas. La cuestión de los fundamentos es reducida a una cuestión de sintaxis, es decir, de observancia de ciertas reglas, dado que el arte de razonar se reduce a una lengua bien hecha (Condillac). No sobra anotar,

una vez más, que el matemático asume la actitud formalizadora únicamente cuando va a examinar el problema de los fundamentos; generalmente solo pone cuidado en que haya la posibilidad de llevar cualquier texto matemático a un texto formalizado. En su vida corriente, el matemático trabaja intuitivamente y controla mediante la lógica sus adquisiciones someramente, salvo si va a publicarlas; entonces la presentación axiomática es de rigor, sin llegar a la formalización que exigiría, en caso extremo, escribir todo en símbolos. Bourbaki, luego de dar ejemplos de lo incómodo de una escritura formalizada, presenta la matemática en lenguaje semiformalizado, que podría formalizarse en el caso de que fuera necesario (*Théorie des ensembles.* Introduction).

96. **Tema 2. La pérdida de la certidumbre. Relativización.** La pérdida de la certidumbre consiste en que no se puede pensar razonablemente que los teoremas matemáticos sean verdades universales y necesarias, en todos los mundos posibles de Leibniz, sino que lo son únicamente dentro del sistema formal al que pertenecen; es un resultado que se concretó con las tres rupturas de unidad: de la geometría, de la lógica y de un sistema formal.

En la presente obra, se ha tratado de seguir el camino hacia la relativización de las verdades matemáticas, mediante el seguimiento de la evolución de la geometría. Hay dos libros, por lo menos, que conducen al mismo sitio por sendas diferentes.

DAVIS and HERSH. *Mathematical experience.* 1981. Boston. Birkhäuser. $xxi + 440$ pp.
Morris KLINE. *Matemática. La pérdida de la certidumbre.* (1980). 1985. Madrid. Siglo XXI editores. $xi + 444$ pp.

97. **Tema 3. Metamatemática.** La naturaleza de la prueba es una cuestión ligada a la de los fundamentos; todo el esfuerzo de Hilbert (quien se proponía salvar la certeza absoluta en matemática) para resolver el problema de los fundamentos, quedó plasmado en la teoría de la demostración o metamatemática, disciplina bien constituida por su creador, y enriquecida por los métodos de Gödel y de algunos grandes lógicos posteriores. Los teoremas de Gödel dieron al traste con el que puede decirse que fue el sueño de Hilbert: una prueba absoluta de no contradicción; pero de ninguna manera anularon la metamatemática, creada por Hilbert; los teoremas

de Gödel son metamatemáticos.

98. **Tema 4. Matemática y realidad.** La relación entre conocimiento matemático y realidad es un problema semántico, diferente del sintáctico y muy diversamente explicado por Platón, Descartes, Leibniz o Kant. Este último filósofo pensó, a diferencia de sus predecesores, que el conocimiento no se nos impone como un producto natural bruto, sino que hay que construirlo: sujeto que conoce, conocimiento, objeto conocido es la tripla propuesta por la revolución copernicana de Kant. Con ella, Kant pretendía explicar lo que un físico nuclear del siglo XX, Eugene Paul Wigner, llamó "la irrazonable eficacia de la matemática en las ciencias naturales". Una opinión sensata, a la que adhiere incluso Bourbaki, es que tal explicación no está dada, a pesar de todos los intentos de los grandes filósofos. Hay que descontar la creencia de la coincidencia a toda prueba, del racionalismo, por ejemplo, para quien la razón era todopoderosa porque había constituido independientemente de la realidad la matemática infalible en lo relativo a la realidad. La aplicación de la matemática al estudio de problemas del mundo ambiente (el mundo lejano, el universo, es una perspectiva limitada por el alcance de los telescopios) requiere una teoría muy fina de la aproximación y en toda observación cuantificada interviene la teoría de errores. Definitivamente, la matemática no es una teoría de la naturaleza; en esta no hay continuidad y sin embargo la matemática sin la noción de continuidad se reduciría a mucho menos de la mitad (habría álgebra, no habría análisis, ni topología). Se puede concluir que la matemática busca explicaciones posibles, a las que solamente se exige coherencia interna, no aplicabilidad forzosa a la realidad. Hay mucha matemática que ha sido aplicada, mucha otra que no lo ha sido.

99. **Tema 5. Estatuto ontológico de los objetos matemáticos.** El estatuto ontológico de los objetos matemáticos ha sido profusamente discutido por los filósofos; lo que ha quedado en claro, poco más o menos, es un triple alinderamiento (logicismo, intuicionismo, formalismo) según grandes corrientes del pensamiento filosófico, entre los matemáticos que se han ocupado del problema (realismo, conceptualismo, nominalismo). La teoría de conjuntos parecía inducir una simplificación apreciable de las dificultades; sin embargo, la aparición en ella, de paradojas, la convirtió precisamente en el punto central de discusión donde se perfilaron las tres escuelas. La axiomatización a la manera de Bourbaki no fue pensada para resolver pro-

blemas filosóficos. No obstante, la obra realizada por la escuela francesa puede ser interpretada, a posteriori, como el hallazgo de un campo neutro donde partidarios de diversas escuelas puedan entenderse; el asunto de estudio no son los llamados objetos matemáticos, sino exclusivamente las estructuras, con prescindencia de cualquier consideración acerca de la naturaleza de los elementos de los conjuntos sobre los cuales son definidas las estructuras. No es una cuestión de semántica, sino una cuestión de sintaxis. Meridianamente lo ha expresado el vocero, Dieudonné (Panorama), de los Bourbaki. “Cada matemático puede pensar lo que quiera acerca de la relación entre seres matemáticos y realidad sensible, a condición de que sus razonamientos sean formalizables, esto es, traducibles en ‘lenguaje formal’, manipulación de símbolos fijados según reglas inmutables y codificadas. Los símbolos no representan sino a ellos mismos”. En *Elementos de historia de la matemática,* p. 57., Bourbaki mismo escribe: “Según la doctrina formalista, la palabra ‘existe’, en un texto formalizado no tiene más significado que los otros; y no hay necesidad de considerar ningún otro tipo de existencia en las demostraciones formalizadas”.

100. Con base en todas las consideraciones traídas a cuento en este capítulo se puede aseverar que es posible entender la investigación matemática como una de construcción o creación exhaustiva de explicaciones posibles. Uno de los muchos intentos para describir en qué consiste la matemática es el de C. J. Keyser [Moritz 844] cuando escribe: “Pensar lo pensable: he aquí el objeto del matemático”. Esta formulación es demasiado amplia. Hacia el mismo propósito propenden igualmente el artista, el novelista, el filósofo, ... todo creador intelectual. *Pensar lo pensable lógicamente.* Esta sí que es la tarea del matemático. La evolución del pensamiento humano se concentra en el dominio de la naturaleza. “A la naturaleza no se la domina, sino obedeciéndola” es un citado aforismo de Bacon. Durante siglos, matemáticos que eran igualmente físicos, acometían unos tras otros, a la zaga de Newton (físico que era igualmente matemático) el arduo trabajo de idear el esquema de la realidad y su traducción en lenguaje matemático, hasta cuando bien entrado el presente siglo, la división de funciones se hizo forzosa. Compete al matemático la creación de explicaciones razonables. Se agotan las posibilidades de explicaciones razonables mediante estructuras, construcciones sintácticas que garantizan la consistencia de los conocimientos que se adapten a ellas como hormas. Estudiar todas las estructuras posibles es pensar todo lo pensable lógicamente.

Bibliografía

Relativa a la segunda parte del capítulo 15.

1. BADIOU, Alain. *El concepto de modelo. Bases para una epistemología materialista de las matemáticas.* (1969). 1976. Buenos Aires. Siglo XXI. 145 pp.

2. BLANCHÉ, Robert. *L'axiomatique*. 1959. Paris. PUF. 102 pp.

3. BLANCHÉ Robert. *L'épistémologie*. 1977. Paris. PUF. 127 pp.

4. BERNAYS, P.. *Sur le platonisme dans les mathématiques. L'Enseignement Mathématique*. 1935. pp. 52-69.

5. Bourbaki, Nicolas. Ver las bibliografías para los capítulos XII, XIII.

6. Profil perdu. BOURBAKI. *Enquête sur un mathématicien polycéphale.* 1990. France Culture. Cassette 1(60'). Cassette 2(60'). Éditions du Choix. Par Michèle Chouchan, avec le concours d'André Weil, Jean Dieudonné, Henri Cartan, la voix de Claude Chevalley et les temoignages de Laurent Schwartz, Jean Pierre Serre, Jean Pierre Kahane, Pierre Samuel, Pierre Cartier, André Revuz, Jacques Roubaud, Gustave Choquet, Nathalie Charraud... et les souvenirs de Madame Bourbaki.

7. CAMPOS, Alberto. *Hacia una filosofía de la matemática*. 1990 Jornadas Matemáticas. Sociedad Colombiana de Matemáticas.

8. CAMPOS, Alberto. *Cómo ha evolucionado la axiomatización de la geometría*. Sinopsis.

9. CARTAN, Henri. *Sur le fondement logique des mathématiques*. 1943. pp. 3-11. Revue Scientifique. LXXXI.

10. CARTAN, Henri. *Nicolas Bourbaki and contemporary mathematics.* (18 I 1958). pp. 175-180. The Mathematical Intelligencer. Vol. 2. No. 4. 1980.

11. CAVAILLÈS, J.. *L'École de Vienne au Congrès de Prague*. 137-149. Revue de Métaphysique et de Morale. XLII. No. 1. 1935.

12. CHEVALLEY, Claude. *Variations du style mathématique*. 375-384. Revue de Métaphysique et de Morale. XLII. No. 3. 1935.

13. CHOQUET, Gustave. *L'analyse et Bourbaki*. pp. 183-199. B.A.P.M.E.P. (France). No. 229. Janvier-Fevrier. 1963.

14. DIEUDONNÉ, Jean. *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*. 543-555. Les grands courants de la pensée mathématique. (1947). 1962. Paris. Blanchard. 559 pp.

15. DIEUDONNÉ, Jean. *L'axiomatique dans les mathématiques modernes*. 47-53. XVII Congrès International de Philosophie des Sciences. 1949. Paris. III Philosophie mathématique. 1951. Paris. Hermann. 106 pp.

16. DIEUDONNÉ, Jean. *Present trends in pure mathematics*. 235-255. Advances in mathematics. 27. 1978.

17. DIEUDONNÉ-LOI-THOM. *Penser les mathématiques*. Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École Normale Supérieure (Paris) 1982. Éditions du Seuil. 280 pp.

18. EDDINGTON, Arthur S.. *La filosofía de la ciencia física*. (1938). 1946. Buenos Aires. Sudamericana. 307 pp.

19. FANG, J.. *Bourbaki. Towards a Philosophy of modern mathematics*. 1970. Hauppauge N. Y. Paideia Press. 144 pp.

20. FRAENKEL, A.. *Sur la notion d'éxistence dans les mathématiques*. 1935. L'Enseignement Mathématique. XXXIV. pp. 18-32.

21. GIEDYMIN, Jerzy. *Science and convention. Essays on Henri Poincaré's Philosophy of science and conventionalist tradition*. 1982. Oxford. Pergamon Press. $xvii + 229$ pp.

22. GOODMAN, Nicolas D.. *Mathematics as an objetive science*. pp. 540-551. The American Mathematical Monthly. Vol. 86 No. 7. Aug. - Sept. 1979.

23. HALMOS, Paul R.. *Nicolas Bourbaki*. Scientific American. Vol. 196. (1957). No. 5. pp. 88-97.

24. HERBRAND, J.. *Les bases de la logique hilbertienne*. 243-255. Revue de Métaphysique et de morale. XXXVII. No. 2. 1930.

25. HOFSTADTER, Douglas R.. *Gödel, Escher, Bach. An eternal Golden Braid.* (1979) 1987. Traducción española. Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle. Tusquets. Barcelona. $xxix + 882$ pp.

26. KENNEDY, H. C.. *The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano.* The American Mathematical Monthly. Vol. 79 No. 2. Februry. 1972. pp. 133-136.

27. KÖRNER, Stephan. *Matemática gödeliana y sus implicaciones.* (1965). 1972. UNAM. México. 34 pp.

28. KÖRNER, Stephan. *Introducción a la filosofía de la matemática.* (1966). 1969. México. Siqlo XXI Editores. $vii + 250$.

29. LADRIÈRE, Jean. *Limitaciones internas de los formalismos.* (1959). 1969. Madrid. Tecnos. 545 pp.

30. LONG, Robert L.. *Remarks on the history and philosophy of mathematics.* 609-619. The American Mathematical Monthly. Volume 93. Number 8. October. 1986.

31. MAC LANE, Saunders. *Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics.* 462-472. The American Mathematical Monthly. Vol. 88 No. 7 Aug. - Sept. 1981.

32. MARGENAU, Henry. *La naturaleza de la realidad física.* (1950). 1970. Madrid. Tecnos. 427 pp.

33. MORITZ, Edouard. *On mathematics.* (1913). 1958. New York. Dover. $xi + 410$ pp.

34. PASCAL, Blaise. *Réflexions sur la géométrie en général. De l'esprit géométrique et de l'art de persuader.* pp.348-359. Oeuvres Complètes. 1963. Paris. Éditions du Seuil. 677 pp.

35. PIAGET, Jean. *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* (1950). 1975. Buenos Aires. Paidos. 315 pp.

36. PIAGET, Jean. *Sagesse et illusions de la philosophie.* (1965). 1968. Deuxième édition. Paris. PUF. 309 pp.

37. PIAGET, Jean. *Le structuralisme.* 1968. Paris. PUF. 128 pp.

38. PIAGET, Jean. *L'épistemologie génétique.* (1970). 1972. Deuxième édition. Paris. PUF. 127 pp.

39. POINCARÉ, Henri. *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie.* Bull. Soc. Math. France. XV. 2 XI 1887. pp. 203-216. (O.C. XI 79-91).

40. POINCARÉ, Henri. *La ciencia y la hipótesis.* (1902). 1945. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 227 pp.

41. POINCARÉ, Henri. *El valor de la ciencia.* (1905). 1946. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 173 pp.

42. POINCARÉ, Henri. *Ciencia y método.* (1908). 1946. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 231 pp.

43. POINCARÉ, Henri. *Últimos pensamientos.* (Póstumo). (1913). 1946. Buenos Aires. Espasa-Calpe. 165 pp.

44. PRIOR, Arthur. *Historia de la lógica.* 1976. Madrid. Tecnos. 252 pp.

45. REICHENBACH, Hans. *La filosofía científica.* (1951). 1953. México. Fondo de Cultura Económica. 299 pp.

46. RUNES. *Diccionario de filosofía.* (1960). 1981. México. Grijalbo. 396 pp.

47. RUSSELL, Bertrand. *Obras completas. Tomo II. Ciencia y filosofía.* 1897-1919. (1962). 1973. Madrid. Aguilar 1398 pp.

48. SERGE, Beniamino. *Peano ed il Bourbakismo.* pp. 31-39. In memoria di Giuseppe Peano. Cuneo. Presso il Liceo Scientifico Statale. 1955. 115 pp.

49. SNAPPER, Ernst. *What is mathematics?* The American Mathematical Monthly. Vol. 86 No.7. Aug. - Sept. 1979. pp. 551-557.

50. SNAPPER Ernst. *The three crises in mathematics: Logicism. Intuitionism and Formalism.* pp. 207-216. Mathematics Magazine. Vol. 52. No. 4. September. 1979.

51. SMART E. R.. *The philosophical implications of the four-color problem.* 697-707. The American Mathematical Monthly. Vol. 87. No. 9. November. 1980.

Índice alfabético