



# Influences des paramètres micromécaniques dans la simulation numérique discrète des matériaux granulaires : assemblage, déformation quasi-statique, écoulements

Jean-Noël Roux, François Chevoir

## ► To cite this version:

Jean-Noël Roux, François Chevoir. Influences des paramètres micromécaniques dans la simulation numérique discrète des matériaux granulaires : assemblage, déformation quasi-statique, écoulements. Farhang Radjaï et Frédéric Dubois. Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires, Lavoisier, pp.223, 2010, MIM (mécanique et ingénierie des matériaux). <hal-00531744>

**HAL Id: hal-00531744**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00531744>**

Submitted on 3 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Influence des paramètres micromécaniques dans la simulation numérique discrète des matériaux granulaires : assemblage, déformation quasi-statique, écoulements

Jean-Noël ROUX et François CHEVOIR

Laboratoire Navier, Unité Mixte de Recherche LCPC-ENPC-CNRS  
2, allée Kepler, Cité Descartes, 77420 Champs-sur-Marne, France

**AVANT-PROPOS :** Le présent document constitue le chapitre 8 du traité **Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires**, ouvrage collectif, sous la direction de Farhang Radjaï et Frédéric Dubois, publié dans la collection *ii mécanique et ingénierie des matériaux ii* (MIM) aux éditions Lavoisier en 2010. Le titre, la pagination et l'indexation des références en sont différents.

Il dresse un bilan de l'influence des différents paramètres micromécaniques que l'on introduit dans la modélisation des matériaux granulaires à l'échelle des grains et des contacts sur le comportement mécanique macroscopique en déformation quasi-statique ou en écoulement. On insiste en particulier sur la définition de paramètres de contrôle sans dimension, qui permettent une classification commode et générique de différents régimes rhéologiques.

Ce texte contient quelques références aux autres chapitres du même traité mais peut se lire indépendamment.

## 1 Introduction

La simulation d'un matériau granulaire modélisé à l'échelle de ses constituants microscopiques fait intervenir de nombreux paramètres, liés à la description géométrique du système, aux lois d'interaction, et aux sollicitations extérieures.

Dans ce chapitre nous tentons un bilan de l'influence de ces paramètres sur le comportement mécanique de matériaux granulaires en nous limitant aux modèles les plus simples, avec des grains sphériques ou circulaires, et en privilégiant les situations qui permettent de déterminer des comportements mécaniques exprimés par des lois constitutives. Ces lois sont liées à des mécanismes microscopiques que nous évoquons brièvement. Les comportements observés en simulation numérique peuvent se comparer quantitativement aux expériences de laboratoire avec certains matériaux modèles – assemblages de billes de verre par exemple. Avec les matériaux plus complexes, naturels ou manufacturés, qui intéressent directement l'ingénieur ou le physicien appliqué, les comparaisons sont plus qualitatives. Toutefois ces *ii* vrais *ii* matériaux restent régis par des lois analogues, issues de mécanismes rhéophysiques similaires, pour lesquelles l'étude de systèmes modèles fournit d'utiles indications d'ordres de grandeur.

La partie 2, à partir des modèles micromécaniques les plus utilisés, dresse la liste des paramètres de contrôle et propose une analyse dimensionnelle adaptée aux sollicitations les plus courantes. L'influence de ces paramètres est ensuite discutée dans différentes conditions : déformation quasi-statique de matériaux granulaires solides (§ 3) ; écoulements granulaires denses (§ 4).

## 2 Simulation de matériaux modèles : paramètres de contrôle

### 2.1 Géométrie

Nous traitons presque exclusivement ici d'assemblages de particules sphériques à trois dimensions (3D), voire circulaires en deux dimensions (2D), avec une faible étendue granulométrique. Ces modèles font l'objet de l'immense majorité des études numériques par simulations discrètes. Toutefois, la forme et la distribution de tailles des grains jouent un rôle

déterminant dans leurs propriétés mécaniques, souvent bien davantage que certaines caractéristiques micromécaniques des contacts. C'est surtout l'expérience qui a révélé l'importance de ces facteurs géométriques. Quelques observations issues de travaux numériques seront néanmoins évoquées.

D'autre part, quelle que soit la forme des grains, la géométrie des assemblages qu'ils forment joue un rôle central dans toutes les études micromécaniques. Ses propriétés telles que la densité, la connectivité, l'anisotropie éventuelle, la distribution des interstices entre grains voisins sont intimement couplées au comportement mécanique du matériau, qui ne résulte pratiquement jamais – c'est là une difficulté essentielle – d'une moyenne simple du comportement mécanique du contact. Dans une situation d'écoulement stationnaire (§ 4), la microstructure détermine la cinématique du système autant qu'elle en est le produit. Dans un assemblage granulaire solide (§ 3), le processus de mise en place (objet du chapitre 8) conditionne initialement la microstructure qui influe ensuite fortement sur le comportement. Il est important, avant d'introduire les nombreux paramètres liés aux lois de contact, de rappeler que les propriétés mécaniques des matériaux granulaires dépendent, autant que des propriétés des contacts entre grains, de la manière dont ceux-ci sont assemblés.

## 2.2 Lois de contact

Les ingrédients des lois de contact mises en œuvre en simulation numérique résultent en principe d'une modélisation micromécanique [1], éventuellement simplifiée et complétée par des hypothèses physiquement plausibles, dans laquelle certains choix sont guidés par un souci de faisabilité des calculs. Il convient bien sûr de s'assurer que les propriétés auxquelles on s'intéresse ne sont pas affectées par un choix trop arbitraire, voire qui conduirait à une violation de propriétés physiques fondamentales comme l'objectivité ou les lois de conservation. Le plus souvent, des compromis sont adoptés entre la conformité du modèle à ce qui est connu des lois de contacts et la simplicité des calculs, en exploitant les connaissances disponibles quant à la sensibilité des propriétés visées aux ingrédients micromécaniques. Dans tous les cas, il est nécessaire de s'appuyer sur des études paramétriques (pour lesquelles l'analyse dimensionnelle est une aide précieuse).

Nous ne donnons ici qu'une description abrégée de ces lois de contact, destinée à faire apparaître la liste des paramètres de contrôle influant sur les résultats des simulations. Nous renvoyons aux références bibliographiques, parmi lesquelles [1] est un traité de la mécanique du contact et [2, 3] contiennent des introductions générales adaptées à la simulation des assemblages de grains, pour une présentation plus complète.

### 2.2.1 Frottement

Nous nous limitons dans un premier temps aux cas de contacts quasi-ponctuels : l'étendue de la région de contact est supposée faible devant le diamètre  $d$  des grains. Au point de contact entre les grains  $i$  et  $j$ , ceci entraîne que les efforts de contact se résument à une force  $\mathbf{F}$ , que l'on décompose en une partie normale,  $F_N$  (scalaire) et une partie tangentielle  $\mathbf{F}_T$  (un vecteur en 3D).

En l'absence de cohésion, la force normale est répulsive : on a  $F_N > 0$ . En général on admet l'existence d'un coefficient de frottement  $\mu$  qui intervient dans la condition de Coulomb :

$$\|\mathbf{F}_T\| \leq \mu F_N. \quad (1)$$

### 2.2.2 Élasticité

L'élasticité du contact est bien connue dans le cas d'objets réguliers sans arêtes [1]. La loi de Hertz relie alors, pour des grains sphériques de diamètre  $d$  constitués d'un matériau élastique

de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , la force normale  $F_N$  à la déflexion normale  $h$  des surfaces en contact (jj interpénétration  $\llcorner\llcorner$  apparente) :

$$F_N = \frac{Ed^{1/2}}{3(1-\nu^2)}h^{3/2}. \quad (2)$$

La variation de la partie élastique de la réaction tangentielle  $\mathbf{F}_T$  avec le déplacement relatif tangentiel  $\vec{\delta}$  [4], du fait du critère de Coulomb écrit au niveau local du vecteur-contrainte dans la petite surface de contact [1], ne peut en principe s'écrire que de façon incrémentale, et donne des lois fort compliquées [5]. On est souvent amené à les simplifier [6, 7, 8], en gardant la raideur tangentielle  $K_T(h)$ , qui apparaît dans :

$$d\mathbf{F}_T = \frac{Ed^{1/2}}{(2-\nu)(1+\nu)}h^{1/2}d\vec{\delta} = K_T(h)d\vec{\delta}, \quad (3)$$

indépendante de  $\vec{\delta}$  tant que la condition de Coulomb (1) reste satisfaite. Dans le cas contraire, une fois incrémentée  $\mathbf{F}_T$  dans le calcul, il faut la projeter sur le cône de Coulomb. De plus il faut tenir compte des variations simultanées de  $F_N$  et de  $\mathbf{F}_T$ , et transporter les forces de contact avec les mouvements d'ensemble et relatifs (y compris roulements et pivotements) des deux objets. Pour ce faire on ne dispose pas en fait de loi établie pour tous les cas, et on doit se contenter de règles praticables qui ne violent pas l'objectivité (discutée dans [9]), ni le second principe de la thermodynamique (il ne faut pas créer de l'énergie élastique dans un cycle, ce point est étudié dans [4]). Une mise en œuvre des lois de Hertz-Mindlin simplifiées (2)-(3) qui satisfait à ces conditions est décrite dans [7].

Il arrive aussi souvent que l'on ne cherche pas à décrire précisément l'élasticité du contact, et que l'on choisisse plus simplement une loi linéaire unilatérale :

$$F_N = K_N h, \quad d\mathbf{F}_T = K_T d\vec{\delta}, \quad (4)$$

avec la condition de Coulomb (1). Les raideurs normale ( $K_N$ ) et tangentielle ( $K_T$ ) peuvent être choisies pour respecter l'ordre de grandeur des déformations élastiques dans les contacts.

Dans les relations (3) ou (4),  $\vec{\delta}$  représente en fait la partie élastique du déplacement relatif tangentiel, qui ne varie que lorsque la force de contact est intérieure au cône de Coulomb défini par (1), ou bien pénètre à l'intérieur à partir du bord [10, 11].

Parfois, on considère simplement les forces élastiques comme une manière commode d'assurer l'imperméabilité des grains et la mobilisation progressive du frottement. Une telle attitude implique que l'on se place implicitement dans la limite des grains rigides, sur laquelle nous reviendrons.

### 2.2.3 Forces visqueuses et coefficients de restitution

La partie *visqueuse* de la force de contact est le plus souvent prise linéaire dans la vitesse relative :

$$F_N^v = \alpha_N \frac{dh}{dt}, \quad \mathbf{F}_T^v = \alpha_T \frac{d\vec{\delta}}{dt}, \quad (5)$$

En général les coefficients d'amortissement sont assez mal connus et ils sont rarement identifiés à partir d'un modèle physique. (Une approche par la mécanique du contact entre solides viscoélastiques a cependant été développée, que l'on trouvera présentée dans la réf. [12] et dans bien d'autres écrits du même groupe d'auteurs. Ce modèle a été exploité dans l'étude des jj gaz granulaires  $\llcorner\llcorner$ ).

La modélisation d'un choc binaire frontal avec les relations (4) et (5) définit un problème d'oscillateur harmonique amorti, et fixe la durée  $\tau_c$  de la collision entre deux grains de masse  $m$  :

$$\tau_c = \pi \left[ \frac{2K_N}{m} - \left( \frac{\alpha_N}{m} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (6)$$

Le pas de temps en dynamique moléculaire est choisi comme une petite fraction de  $\sqrt{m/K_N}$ . Si  $\alpha_N$  dépasse la valeur critique  $\alpha_N^c = \sqrt{2mK_N}$  (pour laquelle  $\tau_c \rightarrow \infty$  dans (6)), le mouvement relatif lors du choc est suramorti. Comme il y a alors deux temps caractéristiques dans l'évolution de la déflexion normale dans le contact, dont le rapport augmente très rapidement avec  $\zeta = \alpha_N/\alpha_N^c$ , c'est une situation numériquement défavorable, que la commodité des calculs conduit à proscrire. Aussi, lorsque l'on souhaite, afin d'approcher rapidement des états d'équilibre que l'on veut étudier, dissiper efficacement l'énergie, on tend à choisir des coefficients d'amortissement proches du niveau critique, mais inférieurs ( $\zeta < 1$ ). Les lois élastique (4) et visqueuse (5) ci-dessus se traduisent, dans une collision isolée, par un coefficient de restitution normal  $e$ , fonction de  $\zeta$  :

$$e = \exp \left[ \frac{\pi\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \right]. \quad (7)$$

Dans le cas hertzien, on peut se référer à la raideur linéaire tangente,  $K_N(h)$ , qui varie comme  $h^{1/2}$  d'après (2), et appliquer les mêmes considérations pour le choix du pas de temps (alors variable selon le niveau de déflexion atteint) et de l'amortissement que dans le cas linéaire. On montre que le choix d'un amortissement égal, à chaque instant, à une fraction constante  $\zeta$  de la valeur critique d'un modèle linéaire avec raideur  $K_N(h)$  donne un coefficient de restitution normal indépendant de la vitesse relative dans une collision binaire.

Le choix du coefficient d'amortissement tangentiel  $\alpha_T$  est guidé par des considérations similaires à celui de  $\alpha_N$  (à noter que sa valeur critique fait intervenir les moments d'inertie des grains en contact). Sa relation avec un coefficient de restitution tangentiel est un peu plus complexe en raison de la fréquence différente des oscillations de  $h$  et de  $\delta$  dans un choc et de la saturation possible du critère de Coulomb.

Après avoir introduit des termes visqueux dans la force de contact, on doit se demander si on les inclut dans les composantes  $F_N$  et  $\mathbf{F}_T$  qui doivent satisfaire l'inégalité de Coulomb (1). Deux attitudes sont possibles, et les deux choix ont été adoptés dans la littérature. On peut considérer que l'inégalité de Coulomb ne concerne que les composantes élastiques de la force de contact. Tout se passe alors comme si les forces visqueuses étaient dues à la présence d'un fluide dans la région du contact (mais sans que l'on tienne compte de la géométrie précise de son écoulement). La force normale totale peut alors être attractive lorsque les deux grains s'éloignent assez rapidement. L'autre option, qui peut sembler plus logique si on attribue les forces visqueuses à la dissipation interne au matériau qui constitue les grains, consiste à ajouter les forces visqueuses aux forces élastiques avant d'imposer l'inégalité (1), auquel cas il convient d'interdire les forces attractives en limitant au besoin l'intensité de la force visqueuse.

#### 2.2.4 Autres mécanismes de dissipation

La dissipation d'énergie dans les contacts peut aussi résulter d'un comportement plastique du matériau qui constitue les grains. Des modélisations de contacts élastoplastiques pour les objets de forme régulière (tels que les billes métalliques) sont présentées dans [1], et des lois très simplifiées sont mises en œuvre dans certaines simulations (ainsi dans la référence [13], ou dans [14] où un modèle est proposé avec plasticité et cohésion). Nous ne discuterons pas des paramètres de ces modèles.

D'autres mécanismes de dissipation sont utilisés comme de simples astuces nu-mériques destinées à favoriser l'approche d'états d'équilibre, sans grand souci de vraisemblance physique (même dans la forme des lois choisies), voire en ignorant certaines lois de base. Ainsi, une force visqueuse est parfois mise en œuvre qui s'oppose simplement à la vitesse de chaque particule (comme pour un objet solide isolé baignant dans un fluide visqueux de vitesse nulle à l'infini). Un autre mécanisme (proposé notamment dans certains logiciels commerciaux) consiste à exercer sur chaque grain une force proportionnelle à son accélération, avec un coefficient de signe opposé à celui du produit scalaire de la force avec l'accélération. Tout se passe donc alors comme si la masse de chaque objet était différente dans les phases d'accélération ou de ralentissement. Ces procédés violent la conservation de la quantité de mouvement, et font jouer un rôle particulier à une vitesse de référence. On ne doit donc les utiliser qu'avec précaution, dans les cas où le bilan de quantité de mouvement ne joue pas de rôle important. Il faut bien sûr éviter de les mettre en œuvre pour modéliser un écoulement ou la mise en place d'un matériau granulaire sous gravité.

### 2.2.5 Cohésion

C'est l'énergie par unité d'aire  $\gamma$  des interfaces entre les grains solides et le milieu ambiant qui est à l'origine de l'adhésion aux contacts, qu'elle soit ou non transmise par un ménisque liquide. La force attractive maximale est toujours d'ordre  $\gamma d$ . En présence d'un pont liquide, il est possible d'utiliser des modèles quantitatifs pour les assemblages de billes [15, 16]. La portée  $D_0$  des forces attractives à distance est alors déterminée par la distance de rupture, de l'ordre du volume du ménisque élevé à la puissance  $1/3$ . La prise en compte de l'adhésion capillaire dans la simulation des matériaux granulaires fait l'objet du chapitre 12. Dans le cas de grains solides secs, la force adhésive est sensible aux irrégularités de leur surface, et sa portée (celle des forces de van der Waals) est de quelques nanomètres. C'est pourquoi elle se manifeste seulement en pratique pour les particules de petite taille, typiquement de l'ordre du micron ou de la dizaine de microns. Pour des grains de sable, ou des billes dont le diamètre est de l'ordre de  $100 \mu\text{m}$ , seules quelques aspérités peuvent être sensibles à une telle attraction, dont l'effet se trouve ainsi fortement réduit, alors que les forces capillaires en présence d'un liquide ne sont pas sensibles à ces irrégularités géométriques et entrent en jeu pour des grains plus gros. Il existe sur la modélisation des effets simultanés de l'adhésion et de la déformation élastique au contact une littérature fournie [17], mais l'étude des assemblages granulaires cohésifs par simulation numérique (exposée au chapitre 11) en a pour l'essentiel retenu des versions assez simplifiées, car les approches classiques restent incomplètes (on ne sait pas toujours bien prendre en compte les efforts tangentiels), s'appliquent difficilement à des grains à surface irrégulière et font appel à des informations détaillées sur les matériaux et les états de surface qui ne sont pas toujours disponibles en pratique. Les lois simples mises en œuvre dans les exemples simulations rapportés aux § 3 et 4 consistent à ajouter un terme attractif simple [18, 19], à la répulsion élastique exprimée par (4), introduisant ainsi les deux paramètres importants communs à tous les modèles de cohésion : une traction maximale  $F_0$  que peut supporter un contact, et la portée  $D_0$  de l'attraction mutuelle entre surfaces solides. À l'équilibre, en l'absence d'action extérieure, une paire isolée de grains est maintenue en contact avec une déflexion

$$h_0 \sim F_0/K_N, \quad (8)$$

pour laquelle la force de répulsion élastique et la force d'adhésion se compensent.

En présence d'adhésion, il est important d'appliquer l'inégalité de Coulomb (1) en excluant de  $F_N$  au second membre le terme attractif. Ainsi, dans un modèle simple où ce terme est constant, égal à  $-F_0$  pour les grains en contact [19], on impose la condition  $\|\mathbf{F}_T\| \leq \mu(F_N + F_0)$ . En effet, il faut considérer que les surfaces sont pressées l'une contre l'autre par l'attraction des deux grains, qui agit de façon analogue à une force extérieure. Il en résulte qu'en l'absence de force extérieure, le contact entre deux grains collés avec la force  $F_0$  est alors capable de

transmettre une force tangentielle maximale égale à  $\mu F_0$ , alors que la force normale *totale* est nulle.

### 2.2.6 Résistance au roulement

Si on prend en compte l’extension finie des régions de contact, qui ne se réduisent pas à des points, soit en raison de la déformabilité des grains solides, soit de leur forme irrégulière et non convexe, on est amené à autoriser les contacts à transmettre un moment  $\Gamma$ , qui travaille dans les mouvements relatifs de roulements sans glissement (différence de taux de rotation autour d’un axe tangentiel) ou de pivotement sans glissement (différence de taux de rotation autour de l’axe normal). Nous évoquerons quelques exemples de l’effet d’un tel ingrédient micromécanique, encore relativement peu usité, dans des exemples bidimensionnels (pas de pivotement). Pour prendre en compte ce phénomène les modèles retenus en simulation sont restés fondés sur des approches simplificatrices [20]. Le paramètre essentiel est le coefficient de frottement de roulement,  $\mu_R$ , tel que le moment maximal soit  $\mu_R F_N$ . Ainsi défini,  $\mu_R$  a la dimension d’une longueur, et c’est pourquoi on rencontre aussi la définition dans laquelle c’est  $\mu_R$  divisé par un rayon de grain  $R$  qui est appelé coefficient de frottement. La réponse d’un contact sollicité en roulement, avant que  $\Gamma$  atteigne sa valeur limite, peut être modélisée comme purement élastique, et on obtient alors un modèle analogue à celui de la loi de contact tangentielle [21, 19] élastoplastique habituelle. Dans le cadre d’un modèle de grains rigides, on peut aussi étendre l’approche de la dynamique des contacts au cas de la résistance au roulement [22].

Si le diamètre de la région du contact est  $l$  alors  $\mu_R$  doit être de l’ordre du diamètre  $l$  de la région de contact (distance entre aspérités), tandis que la raideur en rotation relative doit être d’ordre  $K_N l^2$ . En présence de cohésion, si on écrit, comme pour la condition de Coulomb ordinaire, l’inégalité  $\Gamma \leq \mu_R F_N^r$  avec la seule composante répulsive élastique de la force normale, on obtient des contacts capables de transmettre un moment d’ordre  $\mu_R F_0$  même si la force normale totale est nulle. Un faible coefficient de frottement de roulement peut donc avoir une influence importante dans le cas cohésif [19].

### 2.2.7 Cas des grains rigides

La liste des paramètres que nous avons introduits jusqu’ici se trouve plus réduite dans le cas d’une modélisation (comme en dynamique des contacts, *cf.* le chapitre 3) avec des grains parfaitement rigides. Ainsi toutes les raideurs et les échelles de longueur associées à une déflexion élastique disparaissent. Restent le coefficient de frottement, éventuellement le frottement de roulement, et les coefficients de restitution, ainsi que les données ayant le sens d’une force, comme la traction maximale  $F_0$ , et éventuellement la portée  $D_0$  des forces attractives.

Toutefois, comme la condition de stricte impénétrabilité n’est forcément satisfaite qu’approximativement dans la pratique, la méthode introduit des niveaux de tolérance. Elle fait également appel au choix d’un pas de temps. Nous renvoyons au chapitre 3 pour le rôle de ces paramètres liés à la mise en œuvre numérique de la dynamique des contacts.

## 2.3 Analyse dimensionnelle

L’analyse dimensionnelle, fondée sur l’indépendance des propriétés physiques vis-à-vis du choix des unités fondamentales de temps, de longueur et de masse, nous assure que les propriétés du matériau, si elles sont exprimées par des grandeurs sans dimension (rapport de contraintes fonction d’une déformation par exemple), ne dépendent que des combinaisons sans dimension des paramètres du problème.

Dans un essai mécanique, les paramètres, en plus de ceux du matériau, comprendront le plus souvent une pression  $P$  (contrainte de confinement) et un certain taux de déformation  $\dot{\epsilon}$ .



Bien entendu, on peut construire de bien des façons différentes une liste de nombres sans dimension à partir des données. Le choix que nous proposons est guidé par les considérations suivantes. Ces nombres, d'abord, expriment, comme il est accoutumé, le rapport de deux grandeurs physiques, par exemple à partir des échelles de temps : le temps de collision  $\tau_c$  (qui est comparable au temps de propagation de la quantité de mouvement à travers un grain), le temps de cisaillement  $\tau_s = 1/\dot{\epsilon}$  et le temps inertiel  $\tau_i = \sqrt{m/P}$  (le temps de déplacement caractéristique d'un grain de masse  $m$  soumis à la pression  $P$ ). En présence de modèles de matériaux différents, on peut donner des définitions assez similaires des paramètres de contrôle adimensionnés qui permettent de situer dans l'espace des paramètres des régions où les comportements seront comparables. Il convient ensuite, afin de pouvoir faire appel le plus souvent possible aux mêmes définitions pour les modèles de grains rigides ou déformables, d'isoler les paramètres de raideur en les faisant intervenir dans le moins de combinaisons possibles. Enfin, il est préférable que les propriétés du système étudié possèdent des limites bien définies pour les valeurs extrêmes, très faibles ou très élevées, des nombres choisis.

### 2.3.1 Grandeurs liées au matériau

Le comportement des contacts fait directement intervenir des grandeurs sans dimension : le coefficient de frottement  $\mu$ ,  $e$  (ou  $\zeta$ ) pour la dissipation visqueuse ou la restitution normale,  $e_T$  (ou  $\zeta_T$ ), son homologue pour la force tangentielle, et éventuellement le niveau de frottement de roulement  $\mu_R/d$ .

### 2.3.2 Raideurs adimensionnées

Les raideurs normale et tangentielle se comparent entre elles, ce qui donne le paramètre  $K_T/K_N$  pour l'élasticité linéaire (4). Pour le modèle simplifié (2)-(3) de l'élasticité de Hertz-Mindlin, ce rapport de raideurs est indépendant de la force et vaut  $\frac{2-2\nu}{2-\nu}$ , qui varie entre  $2/3$  et  $1$  pour les matériaux ordinaires dont le coefficient de Poisson  $\nu$  varie entre  $1/2$  et zéro. Il s'agit donc d'un paramètre dont les variations sont très restreintes quand on cherche à reproduire les propriétés des matériaux habituels. La comparaison de la raideur normale  $K_N$  avec le niveau de contrainte  $P$ , permet de définir un *niveau de raideur*  $\kappa$ , tel que l'on ait pour la déflexion moyenne  $h$  dans les contacts :

$$\frac{h}{d} \propto \kappa^{-1}. \quad (9)$$

La force normale moyenne  $\langle F_N \rangle$  étant proportionnelle à  $Pd^{D-1}$  en dimension  $D$  égale à 2 ou 3, on prend

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{K_N}{Pd^{D-2}} && \text{(cas linéaire, D=2 ou 3)} \\ \kappa &= \left( \frac{E}{P(1-\nu^2)} \right)^{2/3} && \text{(cas hertzien, D=3)} \end{aligned} \quad (10)$$

En fait, on sait relier le rapport  $\langle F_N \rangle / Pd^{D-1}$  à la densité et au nombre de coordination [16, 19, 7] et on montre alors que dans les conditions habituelles (faible étendue granulométrique) on a un coefficient de proportionnalité proche de 1 dans (9).

La limite des grains rigides est celle où  $\kappa \rightarrow +\infty$ . Dans cette limite, si elle est bien définie, les propriétés du matériau ne doivent plus dépendre de  $\kappa$ , et les petites déflexions aux contacts, d'ordre  $\kappa^{-1}$ , ne modifient pas sensiblement la structure de l'assemblage granulaire par rapport à celle d'un assemblage de grains indéformables.

### 2.3.3 Nombre d'inertie

Le rapport des échelles de temps imposées par la sollicitation et associées à la dynamique des grains de masse  $m$  soumis à des forces d'ordre  $Pd^{D-1}$  définit le *nombre d'inertie*,

$$I = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{Pd^{D-2}}}. \quad (11)$$

(Une définition très proche, dont l'écriture est identique à 2 ou 3 dimensions, consiste à prendre  $I = \dot{\epsilon} d \sqrt{\frac{\rho_m}{P}}$ , où  $\rho_m$  est la masse volumique du matériau constituant les grains). La limite de l'évolution quasi-statique, dans laquelle on s'attend à ce que le système reste proche d'un état d'équilibre à chaque instant, est la limite où  $I \rightarrow 0$ .

### 2.3.4 Paramètres adimensionnés liés à la cohésion

L'effet principal des forces attractives est d'introduire une échelle de force,  $F_0$ , qui se compare aux forces liées à la contrainte de confinement. On définit ainsi un nombre de cohésion  $\eta$  qui caractérise l'intensité des forces adhésives relativement aux forces de confinement, ou bien une pression réduite  $P^*$  :

$$\eta = \frac{F_0}{d^{D-1}P}, \quad P^* = \frac{1}{\eta} = \frac{d^{D-1}P}{F_0}. \quad (12)$$

Lorsque  $P^* \gg 1$ , les forces dues au confinement dominent et les effets de la cohésion sont négligeables. La structure de l'assemblage est similaire à celle d'un système sans cohésion. Dans le cas contraire,  $P^* \ll 1$ , la cohésion peut stabiliser des structures très différentes, en particulier beaucoup plus lâches. De plus, c'est alors la cohésion qui détermine le niveau typique des déflexions dans les contacts, qui est d'ordre  $h_0$  définie en (8), et des forces normales, alors d'ordre  $F_0$  (positives ou négatives). Lorsque la cohésion domine, plutôt que d'évaluer l'effet de l'inertie avec le nombre  $I$  (11), on peut définir

$$I_a = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{md}{F_0}}, \quad (13)$$

où la force typique  $Pd^{D-1}$  est remplacée par  $F_0$ .

L'autre nombre sans dimension introduit par les modèles de cohésion est le rapport  $D_0/d$ , pour lequel on ne rapportera pas ici de résultat d'étude paramétrique.

### 2.3.5 Bilan et remarques.

Il faut donc étudier, plutôt que l'influence des 8 grandeurs dimensionnées  $m$ ,  $d$ ,  $K_N$  (ou  $E$ ),  $K_T$ ,  $\dot{\epsilon}$ ,  $P$ ,  $F_0$ ,  $D_0$  sur le comportement mécanique, celui des 5 paramètres de contrôle sans dimension  $\kappa$ ,  $I$ ,  $P^*$  (ou  $\eta$ ),  $K_T/K_N$ ,  $D_0/d$ , auxquels il faut adjoindre les coefficients de frottement et de restitution. Si l'influence des rapports  $K_T/K_N$  et  $D_0/d$  se révèle assez secondaire, les trois nombres  $\kappa$ ,  $I$ , et  $P^*$  jouent un rôle central, ainsi que les coefficients de frottement,  $\mu$  et  $\mu_R/d$ , comme il est montré dans les résultats rappelés dans les § 3 et 4 ci-dessous. Si on s'intéresse au comportement mécanique macroscopique, on doit privilégier l'étude des systèmes homogènes dans la limite où le nombre  $N$  de grains tend vers l'infini, et  $N$  peut être considéré comme un autre paramètre à faire varier. Comme la durée des calculs est proportionnel à  $N$  et au nombre de pas de temps en dynamique moléculaire, le coût de la simulation d'un intervalle de déformation donné lorsque le taux  $\dot{\epsilon}$  est imposé sous un niveau de contrainte  $P$  varie comme  $\frac{N}{I} \sqrt{\kappa}$ . D'où l'importance pratique, si on s'intéresse à la limite quasi-statique, et à la limite des grains rigides, de savoir quelle valeur de  $I$  sera assez faible et quelle valeur de  $\kappa$  sera assez élevée.

## 3 Déformation de matériaux granulaires solides

### 3.1 Assemblage, confinement, compression

Les matériaux granulaires à l'état solide sont le plus souvent étudiés sous un certain niveau de confinement. Celui-ci varie typiquement de quelques kPa à quelques MPa dans les applications à la mécanique des sols, ce qui correspond au poids d'une couche de sable dont l'épaisseur va de quelques centimètres à plusieurs centaines de mètres. Pour des billes de verre, en prenant  $E = 70$  GPa et  $\nu = 0.3$  dans (2),  $\kappa$ , d'après (10), décroît de 181000 pour  $P = 1$  kPa à 1810 pour  $P = 1$  MPa.

L'état d'un matériau sous une pression de confinement  $P$  dépend en général à la fois du processus d'assemblage et de l'histoire de sa compression. Les méthodes numériques d'assemblage, dans lesquelles un matériau solide est constitué, soit par condensation d'un gaz granulaire, soit par un algorithme géométrique, font l'objet des chapitres 7 et 8 du présent ouvrage. Les méthodes mécaniques, dans lesquelles on simule effectivement la trajectoire des grains pendant l'assemblage, font apparaître d'autres nombres sans dimension, et produisent des résultats qui peuvent dépendre des paramètres qui auront par la suite peu d'influence (ou aucune influence) sur le comportement quasi-statique. Ainsi la densité des échantillons obtenus par pluviation contrôlée [23] est sensible aux coefficients de restitution normal et tangentiel, et la connectivité des structures lâches obtenues par un processus d'agrégation balistique isotrope de grains cohésifs dépend de la vitesse moyenne quadratique initiale des particules, qu'il faut comparer à la vitesse d'éloignement minimal pour échapper à l'attraction d'une particule voisine, qui est d'ordre  $\sqrt{D_0 F_0 / m}$  [19]. L'assemblage par compression homogène à partir d'une configuration lâche et sans contact peut être obtenu numériquement, en particulier en recourant aux conditions aux limites périodiques décrites au chapitre 6. S'il est assez graduel, c'est-à-dire si la valeur maximale de  $I$  reste assez faible (de l'ordre de  $10^{-4}$ ), alors, avec des grains non cohésifs et un niveau de raideur assez élevé ( $\kappa > 5000$ ) ce procédé conduit à des configurations d'équilibre sous pression contrôlée qui ne dépendent que du coefficient de frottement  $\mu$  (si  $\mu_R = 0$ ) [7].

La compression quasi-statique isotrope de matériaux non cohésifs (c'est-à-dire la poursuite du processus au-delà de la formation d'un assemblage solide) entraîne une évolution modérée et progressive [24] de la microstructure du système. Il en est de même pour tout trajet de chargement tel que le rapport des contraintes reste constant, comme la compression œdométrique. Dans un assemblage de billes identiques, si le nombre de coordination  $z$  est élevé, c'est-à-dire proche de 6, sous faible pression ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), il varie d'environ 5% quand  $\kappa$  reste supérieur à 2000; s'il est initialement faible, proche de 4 (le plus souvent, plus près de 4,5 si on élimine les grains  $\ddot{z}$  flottants  $\ddot{z}$  [7], qui représentent alors souvent plus de 10% du total), il augmente plus vite, approchant 4,8 pour  $\kappa = 2000$  (évolution facilitée par le recrutement d'une bonne moitié des  $\ddot{z}$  flottants  $\ddot{z}$  initiaux par la structure qui porte les forces). Pour  $\kappa$  de l'ordre de 1000, on constate une augmentation considérablement plus rapide du nombre de coordination avec la pression. On s'attend donc à un comportement proche de la limite rigide pour  $\kappa > 2000$  si  $z$  est élevé, et pour des  $\kappa$  un peu plus grands si  $z$  est faible. C'est la création de nouveaux contacts là où il y avait sous pression plus faible de petits interstices entre grains voisins qui augmente la coordinence. On doit donc conclure que *pour approcher de la limite des grains rigides il ne suffit pas de satisfaire à la condition  $\kappa \ll 1$  que la déflexion élastique  $h$  des contacts soit faible devant le diamètre  $d$  des grains. Il faut en plus que ces déflexions n'entraînent que de faibles modifications de la distribution des interstices entre grains voisins.* D'où la nécessité de satisfaire une inégalité plus exigeante, qui demande un niveau de raideur  $\kappa$  minimal, dans la pratique des systèmes simples considérés dans ce chapitre, de l'ordre de quelques milliers.

La compression isotrope entraîne très peu de déformation irréversible avec des grains sans cohésion [24], en dépit de certaines évolutions internes (une coordinence  $z$  initialement élevée peut diminuer dans un cycle de compression). La situation est tout autre avec des grains

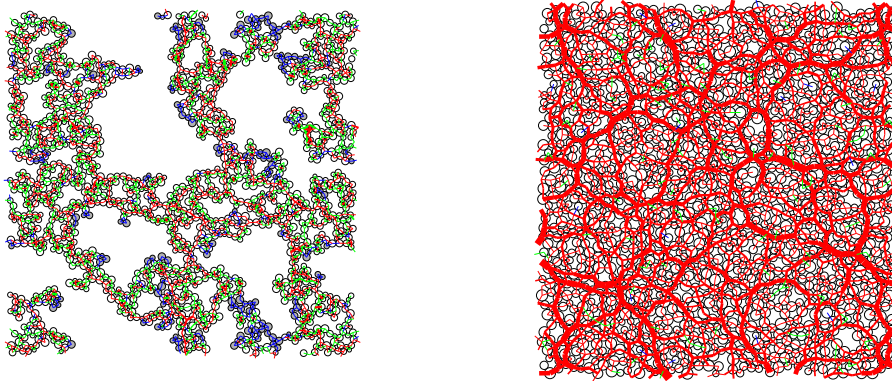


FIGURE 1 – Aspect de la configuration pour  $P^* = 10^{-2}$ , à gauche et pour  $P^* = 13$  (et  $\kappa \simeq 7500$ ), à droite, d’un échantillon 2D de disques cohésifs [25].

cohésifs, car une augmentation de pression modifie le rapport  $\eta = 1/P^*$ , défini en (12), entre la cohésion, capable de stabiliser des structures lâches, et la pression de confinement. L’application d’un confinement modifie alors considérablement l’état du système, la compression sous chargement isotrope (ou sur un trajet de chargement tel que le rapport des contraintes reste constant) conduit à une déformation plastique très importante et définit la courbe de consolidation (figure 2). Cette évolution de  $1/\Phi$  (ou de l’indice des vides) avec le logarithme de la pression est un résultat classique pour les poudres et les sols cohésifs [26], et on la mesure en laboratoire dans la limite quasi-statique. À faible  $P^*$ , l’approche de cette limite, lors de la compression, est à évaluer avec le paramètre  $I_a$  de (13) [25]. La courbe de consolidation est sensible à la

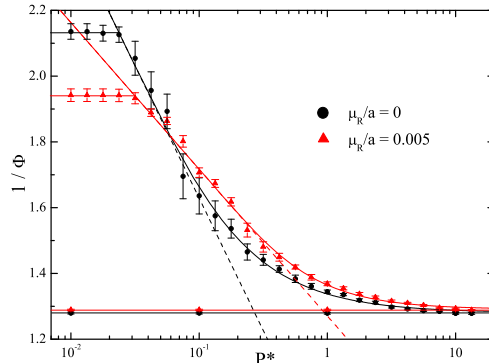


FIGURE 2 – Courbe de consolidation en compression isotrope et effet de la décompression dans un système modèle cohésif 2D, ( $a$  est ici le diamètre maximal d’une distribution uniforme, le minimum étant  $a/2$ ) : variations de  $1/\Phi$  (ou de l’indice des vides  $-1 + 1/\Phi$ ) en fonction de  $\ln P^*$  : une faible valeur de  $\mu_R/a$  suffit à en modifier la pente dans le régime linéaire. Noter la faiblesse de la déformation à la décharge (partie inférieure du graphe). Résultats tirés de [25].

résistance au roulement, même très faible,  $\mu_R/d = 10^{-2}$ . La résistance au roulement joue un rôle micromécanique important dans les structures cohésives lâches [19, 25], car elle permet la transmission d’efforts par des chaînes de grains, alors dotées d’un raideur en flexion.

### 3.2 Matériaux non cohésifs, déformation quasi-statique

Nous prenons l’exemple de la simulation du comportement d’un assemblage de billes identiques non cohésives dans une compression triaxiale de révolution, essai classique en mécanique

des sols [26], souvent simulé par éléments discrets avec des matériaux modèles [27, 28]. Le taux de déformation axiale  $\dot{\epsilon}_a$  est alors imposé, et  $P$ , dans la définition de  $I$  et de  $\kappa$ , désigne la pression isotrope initiale, à laquelle restent égales les deux contraintes principales  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , tandis que  $\sigma_1 = P + q$  augmente avec  $\epsilon_1 = \epsilon_a$ . Il s'agit normalement d'une sollicitation quasi-statique. Alors que le nombre d'inertie dans un essai triaxial de laboratoire sur un sable prend souvent des valeurs de l'ordre de  $10^{-9}$ , les simulations les plus soigneuses ne descendent guère en dessous de  $I = 10^{-5}$ . Pour que l'essai numérique soit aussi lent que l'essai de laboratoire il faudrait donc de l'ordre d'une année de calcul au lieu d'une heure. Les effets dynamiques peuvent donc se manifester bien davantage dans le calcul numérique, et il faut s'assurer qu'ils n'influent pas trop sur les comportements mécaniques et les mécanismes rhéophysiques observés. La figure 3

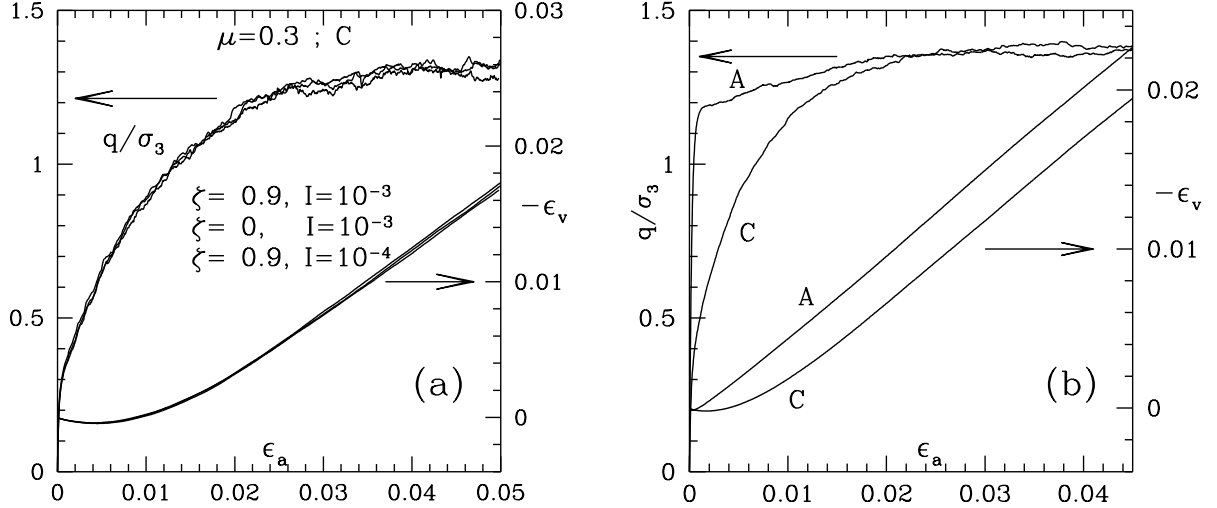


FIGURE 3 – Déviateur des contraintes  $q$ , normalisé par  $P$  (axe de gauche) et déformation volumique  $\epsilon_v$  (axe de droite) fonctions de la déformation axiale dans la compression triaxiale d'assemblages de billes (Hertz-Mindlin,  $\mu = 0,3$ ,  $\mu_R = 0$ ,  $\kappa = 8400$ ). On compare : (a) pour le même état de départ, différentes valeurs de  $I$  (Éq. 11) et  $\zeta$  (cf. §2.2.3) ; (b) deux états initiaux, A et C, de même densité, mais de nombre de coordination différent.

représente la réponse au test triaxial, exprimée selon l'usage avec le déviateur des contraintes  $q$  et la déformation volumique  $\epsilon_v$  fonctions de la déformation axiale  $\epsilon_a$ , d'échantillons numériques de  $N=4000$  billes, entre l'état isotrope de départ et le maximum de déviateur.

La figure 3a montre que, pour le cas considéré, celui d'un système dense, un nombre d'inertie inférieur à  $10^{-3}$  peut suffire à approcher la limite quasi-statique de la courbe contrainte-déformation. Les courbes macroscopiques apparaissent alors indépendantes du niveau de dissipation visqueuse (on peut même prendre  $\zeta = 0$ ) et du nombre d'inertie  $I$ . Toutefois, au niveau des grains, il subsiste des écarts à l'équilibre, qui dépendent de  $\zeta$  et tendent à se réduire si  $I$  décroît. Il en résulte un certain fluage lorsqu'on arrête d'imposer la valeur de  $\dot{\epsilon}_a$  pour maintenir  $q$  constant. Le système se stabilise alors finalement dans un état d'équilibre (avec les critères discutés au chapitre 1), après que  $\epsilon_a$  et  $\epsilon_v$  ont subi, typiquement une augmentation d'ordre  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$  dans le cas considéré ici. Ces déformations différées dépendent de divers paramètres dynamiques ( $\zeta$ ,  $I$ , pilotage des conditions aux limites...) mais diminuent progressivement à mesure que  $I$  décroît.

La figure 3b illustre l'importance de la géométrie de la configuration initiale pour le comportement mécanique (comme annoncé au § 2.1). Au-delà de la seule compacité, très proche pour A et C de la valeur maximale  $\Phi^* \simeq 0,64$  pour les assemblages désordonnés de billes, on voit que le nombre de coordination initial  $z$  détermine la forme de la courbe de déviateur, qui est beaucoup plus raide pour A ( $z \simeq 6$ ) que pour C ( $z \simeq 4$ ). De plus, ces deux assemblages qui

diffèrent par leur coordonnée initiale ne présentent pas du tout la même sensibilité au niveau de raideur  $\kappa$ . Le comportement du matériau C, aux échelles de déformation considérées, est indépendant de  $\kappa$  (si on l'exprime avec des grandeurs sans dimension comme  $q/P$ ,  $\epsilon_v$ ), comme le montre la figure 4. Les courbes relatives à différentes valeurs de  $\kappa$  pour le matériau A diffèrent nettement (figure 5a), mais tendent à se superposer dans un intervalle de déviateur assez étendu (figure 5b) si on adopte l'échelle  $\kappa^{-1}$  pour les déformations, en représentant  $q/P$  et  $\kappa\epsilon_v$  comme fonctions de  $\kappa\epsilon_a$ .

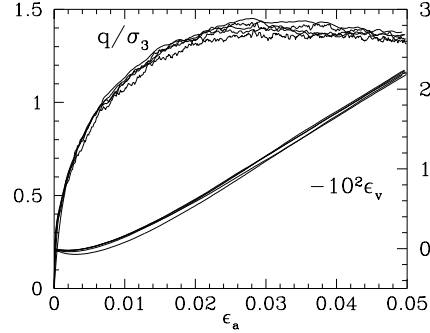


FIGURE 4 – Effet de  $\kappa$  sur les courbes  $q(\epsilon_a)$  et  $\epsilon_v(\epsilon_a)$  pour le système C de la figure 3 (même représentation). Les états initiaux modélisent ici des billes de verre sous confinement croissant,  $P = 10, 32, 100, 320$  et  $1000$  kPa, soit  $\kappa$  décroissant de 39000 à 1800.

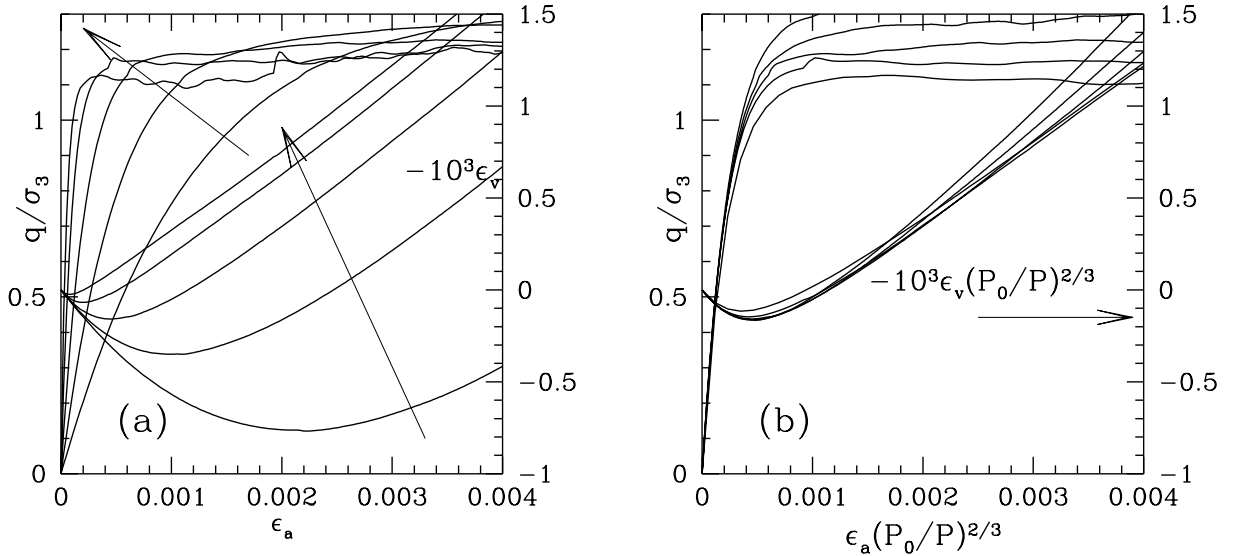


FIGURE 5 – (a) : analogue de la figure 4 pour l'assemblage A (mêmes valeurs de  $P$ ). Les flèches classent les 5 courbes  $q(\epsilon_a)/P$  et  $\epsilon_v(\epsilon_a)$  selon  $\kappa$  croissant (ou  $P$  décroissant). (b) : les mêmes résultats avec les déformations à l'échelle  $(P/P_0)^{2/3} \propto \kappa^{-1}$  ( $P_0 = 100$  kPa).

L'explication de ces différents comportements est donnée au chapitre 1, où sont distingués deux types de déformations, celles qui proviennent de la déformation des contacts (type I), et celles qui résultent de réarrangements du réseau, suite à des instabilités microscopiques (type II). Les systèmes bien coordonnés, comme ici l'assemblage A, possèdent un réseau de contact initial capable de résister à l'application d'un important déviateur, et donc présentent une réponse de type I, qui, bien que non élastique [29, 30] en raison de la mobilisation du frottement intergranulaire, est telle que la déformation soit inversement proportionnelle au niveau de raideur. La rupture de la structure des contacts survient à l'approche du maximum de déviateur, et

on observe alors des déformations de type II. Lorsque, comme dans le cas de l'assemblage C, le réseau des contacts est mal coordonné et cède facilement, la déformation de type II domine pour des déviateurs beaucoup plus faibles, et c'est la géométrie du paquet de grains en contact qui régit l'amplitude des déformations, devenues insensibles à la raideur  $\kappa$ . L'amplitude des déformations est alors liée aux épaisseurs des interstices entre grains voisins, dont la fermeture crée de nouveaux contacts et stabilise une nouvelle configuration du réseau après que l'incrément de contrainte (ou de déformation) imposé a conduit à l'instabilité et à la rupture de la précédente. En posant que les déformations d'un réseau stable (type I), sont inversement proportionnelles au niveau de raideur, nous admettons que sa géométrie n'y est pas sensible, ce qui est la définition de la limite des grains rigides. On voit donc que *la limite des grains rigides correspond à la séparation d'échelle entre les déformations de type I (à l'échelle  $\kappa^{-1}$ ) et les déformations de type II (dont l'échelle est fixée par les interstices)*.

Le domaine élastique, accessible à l'expérience, est strictement inclus au régime de déformation de type I, plus étendu. Les déformations de type I, bien que d'ordre  $\kappa^{-1}$ , restent donc mesurables [30], et on doit prendre la bonne valeur de  $\kappa$  pour les modéliser correctement en simulation. C'est dans ce régime que la déformation peut aussi dépendre de  $K_T/K_N$  (ou du coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau constituant les grains). Cependant, les résultats de [31] sur les assemblages de disques (avec un intervalle de déviateur important en régime I) montrent que le comportement mécanique est à peu près insensible à ce paramètre s'il dépasse 1/2. Une curiosité : le choix (plutôt injustifié pour des grains solides ordinaires) de  $K_T > K_N$  peut donner des matériaux à coefficient de Poisson négatif [32]. Quant aux raffinements des lois (2)-(3) proposés dans [5], on a pu vérifier [30] qu'ils n'influent que très peu sur les propriétés élastiques des assemblages de sphères.

Quand on prépare un échantillon numérique dense en supprimant le frottement dans la phase d'assemblage (chapitre 8), on obtient une configuration de coordinence élevée, analogue à l'état A pris en exemple ici (figure 5). Dans les résultats expérimentaux sur les sables, la croissance de  $q$  avec  $\epsilon_a$  est très souvent beaucoup plus lente que celle que l'on obtient alors dans la simulation. Il est alors tentant d'attribuer aux raideurs choisies pour les calculs une valeur trop faible (par exemple  $\kappa = 100$ ). Ce faisant, on décale effectivement le maximum de déviateur vers des déformations plus grandes (figure 5a), mais on commet l'erreur d'adopter un modèle physiquement non pertinent pour les déformations. À cet égard il est préférable de choisir l'état initial noté C dans les exemples précédents (figure 3b).

Les résultats rappelés ici (figure 3b) indiquent aussi que le rapport  $q_{\max}/P$  du maximum de déviateur (le pic  $q$ ) à la contrainte latérale ne dépend pas de  $\kappa$  (ici  $\geq 1800$ ) et est essentiellement sensible, pour un matériau donné, à la compacité initiale  $\Phi$  de l'échantillon (avec ici  $\Phi_C \simeq \Phi_A = \Phi^*$ ), conformément aux résultats de la mécanique des sols [26]. L'angle de frottement interne  $\varphi$  est fonction croissante du coefficient de frottement intergranulaire, comme l'indique la table 1, qui fournit également les valeurs de la dilatance  $\mathcal{D}$  lorsque  $q = q_{\max}$ . Les données de la table 1 sont donc définies par :

$$\frac{q_{\max}}{P} = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} ; \quad \mathcal{D} = - \left( \frac{d\epsilon_v}{d\epsilon_a} \right)_{q=q_{\max}} . \quad (14)$$

Ces résultats sont relatifs à la compacité maximale  $\Phi^*$  des configurations désordonnées de sphères d'une seule taille. Il est traditionnel de relier  $\varphi$  à  $\varphi_c$  et à  $\mathcal{D}$ , le frottement intergranulaire et la dilatance apparaissant comme les origines du frottement interne [33] (voir aussi [34]). Cependant, il faut noter (table 1) que les assemblages de grains non frottants sont dotés de frottement interne mais dépourvus de dilatance [35]. C'est la microstructure des assemblages granulaires, qui, en développant, sous l'effet de la déformation, une certaine anisotropie [36], permet au matériau de supporter des contraintes déviatoires croissantes [37, 38, 39, 40]. Il s'agit en général d'un phénomène de réarrangement géométrique, associé à des déformations de type

$\mu$	0	0.3	0.5	1
$\varphi_c$ ( $^\circ$ )	0	16.7	26.6	45
$\varphi$ ( $^\circ$ )	$5.5 \pm 0.5$	$24 \pm 1$	$26 \pm 1$	$28 \pm 1$
$\mathcal{D}$	$0 \pm 0.01$	$0.52 \pm 0.01$	$0.60 \pm 0.01$	$0.71 \pm 0.01$

TABLE 1 – Angle de frottement interne  $\varphi$  et dilataance  $\mathcal{D}$  pour  $q = q_{\max}$ , fonctions de  $\mu = \text{tg}\varphi_c$ , pour des assemblages de sphères monodisperses ( $\mu_R = 0$ ). Valeurs issues de simulations de compressions triaxiales à partir d'états initiaux isotropes, avec  $\Phi \simeq \Phi^*$  [23].

II. On a pu noter que l'introduction d'un faible frottement de roulement pouvait sensiblement augmenter le niveau de déviateur maximal [41, 34]. Avec des particules ellipsoïdales plutôt que sphériques, le frottement interne augmente aussi très notablement [42].

### 3.3 L'état critique

Les simulations confirment [27, 38, 43] la théorie de l'état critique [26] : pour de grandes déformations, l'état interne du matériau s'approche d'un certain attracteur, acquiert une certaine *structure d'écoulement*, indépendamment de l'état initial. Une fois cet *état critique* atteint, la déformation plastique peut augmenter indéfiniment, de façon monotone, à déviateur de contraintes et densité constants. L'état critique correspond à la limite quasi-statique des écoulements granulaires, objets du § 4. Lorsque la déformation se localise dans une ou plusieurs bandes de cisaillement, le matériau se trouve dans l'état critique à l'intérieur de ces bandes [44]. Relativement bien documenté en simulation en raison de son indépendance vis-à-vis des ques-

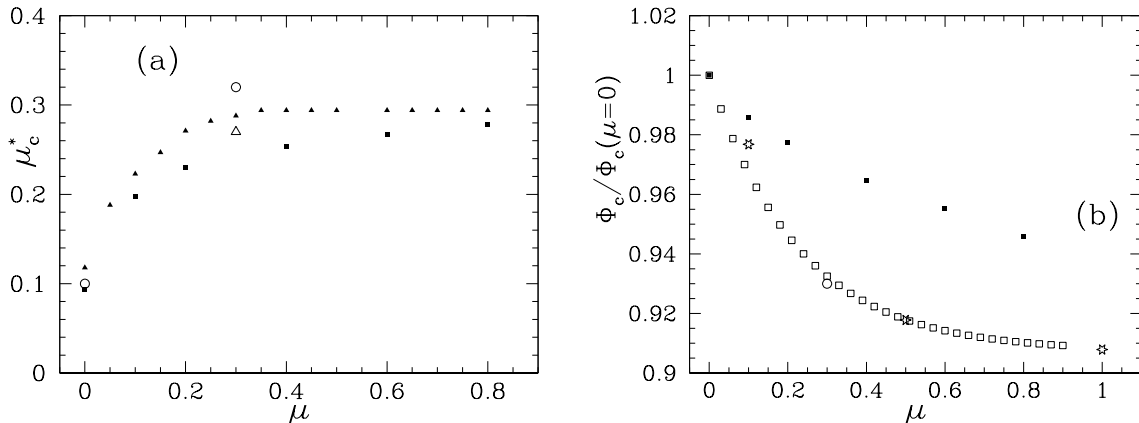


FIGURE 6 – Frottement interne à l'état critique,  $\mu_c^*$  (a), et rapport  $\Phi_c/\Phi^*$  de la compacité critique à la compacité maximale des assemblages aléatoires (b) ( $\Phi^* \simeq 0,639$  en 3D, et  $\Phi^* \simeq 0,85$  en 2D). Les résultats proviennent de différentes études numérique publiées, certaines pour des grains d'une seule taille, d'autres introduisant une certaine polydispersité (diamètres uniformément distribués entre  $(1-x)d$  et  $(1+x)d$ , pour des systèmes 2D (symboles pleins) : [22] (carrés,  $x = 0,11$ ) ; [34] (triangles,  $x = 0,6$ ) ; et en 3D (symboles ouverts) : [3] et [35] (cercles,  $x = 0$ ) ; [27] (triangle,  $x \simeq 0,6$ ) ; [44] (carrés,  $x = 0$ ) ; [45] (étoiles,  $x = 0$ ).

tions délicates d'assemblage et de conditions initiales, l'état critique est indifféremment étudié par des méthodes numériques qui prennent ou non en compte la déformabilité des grains, et est insensible au niveau de raideur  $\kappa$  s'il est assez élevé (supérieur à quelques milliers). Il est caractérisé par le frottement interne et la densité critiques, qui ne dépendent alors que de facteurs géométriques et du coefficient de frottement  $\mu$  (si  $\mu_R = 0$ ). La figure 6 donne le frottement



interne et la densité à l'état critique<sup>1</sup> en fonction de  $\mu$  pour des systèmes de disques (2D) ou de sphères sans résistance au roulement.

L'état critique est très sensible au frottement de roulement [22]. La référence [46] en donne une étude pour un matériau (2D) de grande polydispersité. Il y est montré en particulier que l'angle de frottement interne ne dépend pas sensiblement de la granulométrie.

## 4 Écoulements

On vient de voir que l'état critique des assemblages granulaires non cohésifs, dans lequel le matériau se déforme continuellement, dans la limite quasi-statique, en maintenant une structure interne constante, dépend exclusivement, parmi les différents paramètres de contrôle introduits au § 3.3, du coefficient de frottement (pour des  $\kappa$  assez grands). Nous nous proposons maintenant d'étudier les écoulements stationnaires uniformes [47], dans lesquels l'état du système a ceci de commun avec l'état critique qu'il est maintenu constant, indépendant de l'état initial, et ceci de différent que l'on n'est plus dans la limite des faibles nombres d'inertie.

La loi de comportement va alors s'exprimer à travers les dépendances des variables caractérisant l'état stationnaire du système en fonction des paramètres de contrôle sans dimension précédemment introduits. On commence par le cas de matériaux granulaires non cohésifs dans la géométrie la plus simple, celle du cisaillement plan sans gravité où la distribution des contraintes est homogène [48, 49, 18, 50]. On discute alors les influences respectives de l'état de cisaillement (à savoir le nombre inertiel  $I$ ) et des caractéristiques mécaniques des contacts (à l'exclusion toutefois du frottement de roulement) sur la loi de comportement. On aborde ensuite l'influence du gradient de contraintes [51], et enfin l'influence de la cohésion [18, 50], à travers le nombre  $\eta$ .

### 4.1 Cisaillement homogène

Dans cette configuration générique, le système occupe une cellule de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ , avec des conditions aux limites périodiques dans la direction du cisaillement (voir chapitre 6). On impose la pression latérale  $P^2$ , plutôt que la compacité<sup>3</sup>, de sorte que la hauteur  $H$  n'est pas absolument fixée. On cherche par ailleurs à imposer le taux de cisaillement  $\dot{\epsilon}$ . Deux types de condition aux limites ont été testés dans la direction perpendiculaire au cisaillement (voir chapitre 6). La première méthode consiste à placer le matériau entre deux parois rugueuses et parallèles. Pour imposer le cisaillement, une des parois est fixe et l'autre se déplace à la vitesse  $V$ . La seconde méthode, dite de *Lees-Edwards* (on parle aussi de *conditions aux limites bipériodiques*) [54], consiste à répéter périodiquement la cellule dans la direction  $y$  orthogonale à l'écoulement. Pour imposer le cisaillement, les cellules inférieure et supérieure sont animées d'une vitesse  $\pm V$ <sup>4</sup>. Le contrôle de la pression  $P$  est assuré en permettant la dilatation de la cellule selon  $y$  au cours du temps.

On évoque dans la suite les résultats obtenus pour des systèmes bidimensionnels (les contraintes sont alors homogènes à une force par unité de longueur), simulés par la méthode de dynamique moléculaire [48, 49, 18, 50]. On en tire des enseignements généraux, vérifiés dans

---

1. Les données de la figure 6 correspondent à l'état critique en cisaillement simple pour les systèmes 2D et les systèmes 3D de [45], [35] et [44]. Celles de [27] et de [3] ont été obtenues en compression triaxiale. L'angle de frottement interne peut être différent dans ces deux états – c'est le cas en particulier pour la valeur en  $\mu = 0$  [40].

2. On constate, comme dans d'autres géométries, que les contraintes normales sont approximativement égales.

3. Ceci est approprié pour discuter de situations réelles puisque les conditions expérimentales imposent habituellement le niveau de contrainte plutôt que la compacité. On a montré que les simulations à pression contrôlée sont en très bon accord avec celles à compacité contrôlée [52, 53].

4. La vitesse  $V$  de la paroi ou des cellules images s'adapte aux fluctuations de hauteur pour maintenir un taux de cisaillement constant.

d'autres simulations (assemblages de sphères [35], méthode de dynamique des contacts [55]). Sauf mention contraire, le matériau granulaire est une collection dense de  $N$  disques dissipatifs de diamètre moyen  $d$  et masse moyenne  $m$ . Une petite polydispersité de  $\pm 20\%$  est introduite pour empêcher la cristallisation.

Comme on souhaite étudier la rhéologie intrinsèque du matériau et non les effets de paroi, les parois sont systématiquement assez rugueuses afin d'éviter une localisation du cisaillement à leur voisinage. Elles sont constituées de grains jointifs de mêmes caractéristiques que les grains cisailés, assemblés pour former un seul solide.

Les propriétés mécaniques des contacts sont décrites par les trois paramètres mécaniques indépendants introduits au § 2.2 : le coefficient de frottement  $\mu$ , le coefficient de restitution dans les collisions binaires  $e$  et la raideur  $K_N$  ( $K_T$  est du même ordre de grandeur que  $K_N$  [1], et comme il a une très petite influence sur les résultats [56, 57], il a été fixé à  $K_N/2$  dans tous les calculs). Sauf mention contraire, les résultats rapportés ici correspondent à  $\mu = 0,4$ ,  $e = 0,1$  et  $\kappa = 10^4$ . Ceci constitue le matériau de référence pour la suite de la discussion. La longueur  $L$  est choisie supérieure ou égale à 40 grains pour ne pas avoir d'effet de taille [58]. L'épaisseur  $H$  varie entre 20 et 100 grains, de sorte que  $N$  varie entre 1000 et 5000.

Le système évolue vers un état de cisaillement stationnaire et uniforme, indépendant du mode de préparation (état lâche par dépôt aléatoire, ou dense par compaction cyclique sans frottement), caractérisé par des profils stationnaires de compacité, vitesse et contrainte. On considère que les distributions statistiques des quantités d'intérêt (structure, vitesses, forces...) sont indépendantes de la direction du cisaillement et du temps, de sorte que l'on moyenne à la fois dans l'espace (selon la direction du cisaillement) et dans le temps sur une durée  $\Delta t \geq 10/\dot{\gamma}$ .

## 4.2 Loi de comportement

### 4.2.1 Influence du nombre inertiel

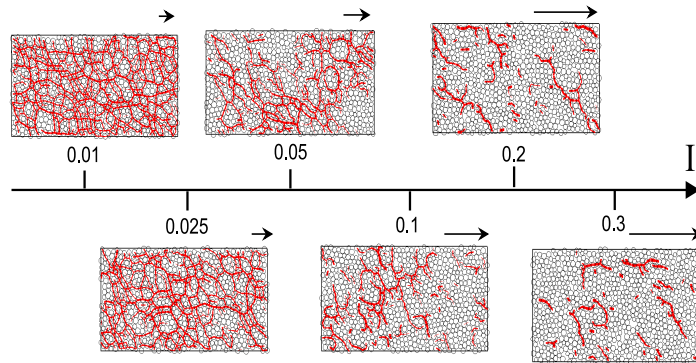


FIGURE 7 – Évolution du réseau de contact en cisaillement plan homogène (taux de cisaillement et pression imposés) en fonction du nombre inertiel  $I$  : les traits représentent les forces normales entre particules (d'après [59]).

L'analyse dimensionnelle a montré que l'état de cisaillement est caractérisé par le nombre inertiel  $I$ , grandeur fondamentale pour décrire le comportement rhéologique des matériaux granulaires cisailés. Une petite valeur de  $I$  correspond à l'état critique décrit au § 3.3. Inversement, une grande valeur de  $I$  correspond au régime collisionnel, où les grains interagissent par des collisions binaires que l'on peut considérer comme instantanées et non corrélées [60]. Entre ces deux régimes existe un régime de cisaillement *dense* pour lequel l'inertie des grains n'est pas

négligeable. Le matériau est au-dessus de son seuil d'écoulement, dans un état liquide plutôt que gazeux. Les mouvements de grains sont fortement corrélés, et l'hypothèse de chaos moléculaire propre aux gaz dilués est alors en défaut. Il existe un réseau de contact percolant, extrêmement fluctuant à la fois dans l'espace et dans le temps. Plus le nombre inertiel augmente, moins les chaînes de force sont longues et nombreuses (figure 7). Dans les états de cisaillement stationnaire et uniforme, à pression et taux de cisaillement imposé, la compacité et la contrainte de cisaillement s'ajustent en réponse au nombre inertiel imposé, à travers une *loi de dilatance* et une *loi de frottement* qui décrivent les variations approximativement linéaires des deux grandeurs sans dimension, la compacité  $\Phi$  et le frottement effectif  $\mu^* = S/P$ , en fonction du nombre inertiel  $I$  (Fig. 8) :

$$\begin{aligned}\Phi(I) &\approx \Phi_{\max} - aI, \\ \mu^*(I) &\approx \mu_{\min}^* + bI.\end{aligned}\tag{15}$$

Les paramètres  $\Phi_{\max}$ ,  $\mu_{\min}^*$ ,  $a$  et  $b$  dépendent des caractéristiques du matériau granulaire. Pour le matériau de référence,  $\Phi_{\max} \simeq 0,82$ ,  $\mu_{\min}^* \simeq 0,26$ ,  $a \simeq 0,37$  et  $b \simeq 1,1$ . Dans le régime

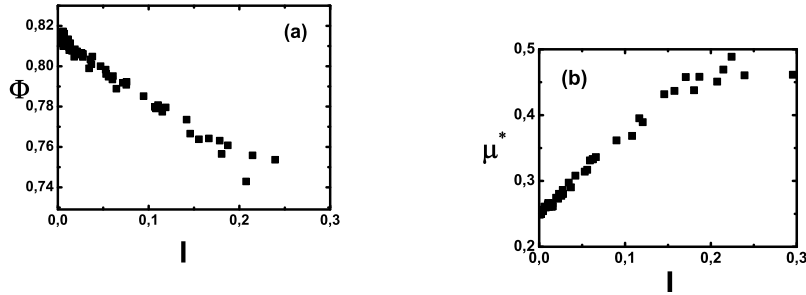


FIGURE 8 – (a) *Loi de dilatance*, (b) *loi de frottement* ( $\mu = 0,4 - e$  variable) - d'après [49].

quasi-statique ( $I \leq 10^{-2}$ ), le frottement effectif minimal  $\mu_{\min}^*$  et la compacité maximale  $\Phi_{\max}$  s'identifient au frottement interne  $\tan\phi$  et à la compacité  $\Phi_c$  dans l'état critique [38, 35]. Lorsque  $I$  augmente, le milieu se dilate légèrement, la proportion de collisions augmente par rapport aux contacts maintenus jusqu'à un régime purement collisionnel ( $I \geq 0,2$ ) dans lequel la dilatance devient plus importante et le frottement effectif semble saturer. Ainsi, à taux de cisaillement imposé, l'utilisation du nombre  $I$  permet de traiter les comportements liquides et solides et le passage entre les deux, sans singularité.

Avec ces deux lois on peut réécrire la loi de comportement du matériau dans le régime intermédiaire sous forme viscoplastique, avec un seuil d'écoulement de Coulomb et des contraintes visqueuses, dont l'origine microscopique se situe dans l'organisation du réseau de contacts. Une formulation tensorielle de ces lois été proposée et appliquée au cas d'écoulements vraiment tri-dimensionnels, pour lesquels la comparaison avec les résultats expérimentaux s'est avérée très satisfaisante [61].

#### 4.2.2 Autre choix des paramètres de contrôle

Certains auteurs [57] ont choisi de contrôler la compacité  $\Phi$  plutôt que la pression, et en conséquence, plutôt que  $I$  et  $\kappa$ , ils ont utilisé le couple de nombres sans dimension  $\Phi$  et  $\alpha = \dot{\gamma}/\sqrt{K_N/m} = I/\sqrt{\kappa}$ , comme variables caractérisant l'état du matériau granulaire en cisaillement stationnaire uniforme.  $\alpha$  peut être vu comme le rapport des temps de collision et de cisaillement, ou des vitesses de cisaillement et du son (nombre de Mach [57]). Les deux choix sont parfaitement légitimes, puisque l'analyse dimensionnelle prédit soit  $\mu^* = f_1(I, \kappa)$  et  $\Phi = f_2(I, \kappa)$ , soit  $\mu^* =$

$f_3(\Phi, \alpha)$  et  $\kappa = f_4(\Phi, \alpha)$ , les deux résultats étant également valables. Le choix de  $I$  et de  $\kappa$  peut cependant sembler plus pratique pour plusieurs raisons. D’abord, les variations des résultats avec  $\Phi$ , considéré comme paramètre de contrôle, sont extrêmement rapides. Chaque matériau possède une compacité critique  $\Phi_c$ , au-dessus de laquelle il ne s’écoule plus, sauf si les contraintes sont si grandes que la compression élastique des contacts compense la différence  $\Phi - \Phi_c$ . Par contre, en-dessous de  $\Phi_c$ , un milieu granulaire continuellement cisailé est libre de s’écouler avec une contrainte de cisaillement négligeable, sauf si la vitesse est assez grande pour conduire à une pression significative. On doit donc piloter  $\Phi$  avec une grande précision pour observer des niveaux de contrainte usuels. Ceci rend les comparaisons entre différents systèmes granulaires difficiles, puisqu’il faudrait connaître à l’avance la valeur de la compacité critique pour chacun d’entre eux. De plus, la limite des grains rigides devient singulière, puisque toutes les valeurs de  $\Phi$  au-dessus de  $\Phi_c$  sont strictement interdites pour  $\dot{\gamma} \neq 0$ , alors que toutes les propriétés des cisaillements avec  $\Phi \leq \Phi_c$  sont proportionnelles à une puissance de  $\dot{\gamma}$  dans cette limite [55]. Ainsi, aucun changement de régime n’est attendu par un changement de  $\dot{\gamma}$ , ce qui semble contredire l’intuition sauf si l’on rappelle que la limite des grains rigides, lorsque l’on augmente le taux de cisaillement, finit par requérir des raideurs de contact déraisonnablement élevées, du fait de la très grande valeur de la pression. A l’inverse, si l’on utilise  $I$  et  $\kappa$  comme paramètres de contrôle, aucune singularité n’intervient dans les résultats dans les limites  $I \rightarrow 0$  ou  $\kappa \rightarrow \infty$ , et des matériaux différents devraient manifester des comportements similaires (à défaut d’être quantitativement identiques) pour les mêmes valeurs de ces paramètres (ce qui définit ainsi approximativement des *états correspondants*).

#### 4.2.3 Influence de l’élasticité des contacts

En le faisant varier entre 40 et  $2,5 \cdot 10^5$ , on observe que  $\kappa$  n’a pas d’influence sur la loi de comportement dès qu’il dépasse  $10^4$  (ou même  $10^3$ ), ce qui est conforme à l’observation dans l’état critique. Pour les petites valeurs (40), on observe une localisation près de la paroi en mouvement dans les grands systèmes [48], que l’on interprète comme un effet de la décroissance de la longueur de corrélation du champ de déformation quand les grains deviennent mous. On remarque que  $\kappa = 10^4$  correspond à  $\tau_i/\tau_c = 10^2$ . Puisque  $I = \tau_i/\tau_s$  est plus petit qu’environ 0,1 dans le régime dense,  $\tau_s$  est au moins 1000 fois plus grand que  $\tau_c$  dans la limite des grains rigides. En conséquence, on peut bien parler de limite des grains rigides dans le régime dense. De fait, les résultats obtenus par dynamique moléculaire sont en parfait accord avec ceux obtenus par la méthode de dynamique des contacts, correspondant à des contacts parfaitement rigides [53].

La prise en compte de l’élasticité des grains conduit à tracer un diagramme des régimes en fonction de  $I/\sqrt{\kappa}$  et  $\Phi$  [57], mettant en évidence un régime quasi-statique avec des effets de l’élasticité, un régime purement inertiel sans effet de l’élasticité, et un régime intermédiaire élastique-inertiel, qui ne s’avère accessible que pour des grains très déformables ( $\kappa < 100$ ).

#### 4.2.4 Influence du coefficient de frottement

On a fait varier le coefficient de frottement  $\mu$  entre 0 et 0,8. On retrouve la même forme qualitative des lois de dilatance et de frottement, avec des valeurs extrêmes  $\Phi_{\max}$  et  $\mu_{\min}^*$  dépendant sensiblement de  $\mu$ , conformément aux variations des deux paramètres  $\text{tg}\phi$  et  $\Phi_c$  de la loi de comportement dans l’état critique, montrées au § 3.3. La compacité reste une fonction linéaire décroissante de  $I$ , avec  $a \simeq 0,35$ , et le frottement effectif reste une fonction linéaire croissante de  $I$ , avec  $b \simeq 1$  [48]. L’approximation linéaire est cependant en défaut pour  $I \leq 0,01$  dans le cas des grains non frottants (voir figure 9). La limite quasi-statique, dans de tels matériaux, est approchée pour des valeurs beaucoup plus faibles de  $I$  que dans le cas de grains frottants, et  $\mu_{\min}^*$  est lui-même beaucoup plus petit [35].

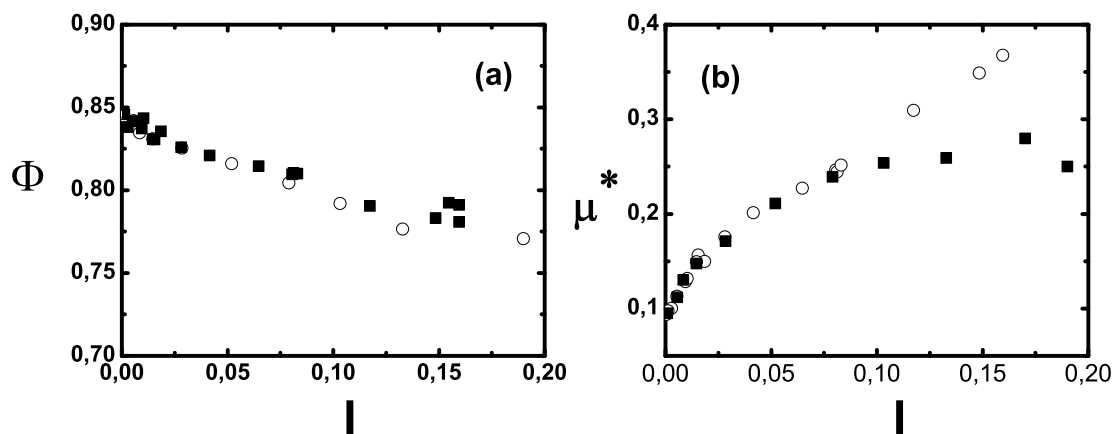


FIGURE 9 – (a) *Loi de dilatance*, (b) *loi de frottement* ( $\mu = 0$  -  $e = 0,1$  ( $\circ$ ) -  $e = 0,9$  (carrés noirs) - d'après [49].

### 4.2.5 Influence du coefficient de restitution

On a fait varier  $e$  entre 0,1 et 0,9 [48]. Dans le cas de grains frottants, le coefficient de restitution  $e$  n'a pas d'influence sur la loi de comportement (figure 8). Dans le cas de grains non frottants, le coefficient de restitution  $e$  n'a pas d'influence sur la loi de comportement pour  $I < 0,1$  (figure 9). Au-delà, le comportement dépend de  $e$  : lorsque  $e \rightarrow 1$ , la chute de la compacité est moins marquée et le frottement effectif sature (voir aussi [57]).

### 4.2.6 Limite collisionnelle

La situation  $I > 0,1$ ,  $\mu = 0$ ,  $e = 0,9$  et  $\eta = 0$  correspond à la limite dense de la théorie cinétique, c'est à dire des collisions binaires quasi-élastiques (la durée moyenne des contacts devient égale au temps de collision [52]). Dans cette limite dense, on déduit de la théorie cinétique [62] la valeur du frottement effectif, indépendant de  $I$  mais dépendant de  $e$  :

$$\mu^*(e) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi + 8}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - e^2}. \quad (16)$$

Pour  $e = 0,9$ , on trouve  $\mu^* = 0,29$  ce qui est en assez bon accord avec la valeur mesurée. Cette évolution vers le régime collisionnel explique ainsi la saturation du frottement effectif pour  $I > 0,1$  lorsque  $e = 0,9$  (figure 9b). Ainsi, comme dans l'état critique, la loi de comportement des écoulements denses ne dépend que de  $I$  et de  $\mu$  dans la limite des contacts rigides ( $\kappa$  assez grand). Il faut atteindre le régime collisionnel pour que  $e$  joue aussi un rôle.

## 4.3 Influence du gradient de contrainte

Il est indispensable de tester si la loi de comportement identifiée en cisaillement homogène est valable dans d'autres géométries de cisaillement où la distribution des contraintes est hétérogène. On a ainsi considéré le cisaillement stationnaire et uniforme dans la direction du cisaillement, dans des géométries simples où l'on connaît la distribution des contraintes.

Sur plan incliné, une épaisseur  $H$  de matériau s'écoule sur un socle rugueux, incliné de  $\theta$  [58, 48]. Dans ce cas, le coefficient de frottement effectif est constant dans la couche en écoulement, égal à  $\tan\theta$ , de sorte que la compacité et le nombre inertiel sont constants dans toute la couche (sauf près du socle rugueux et de la surface libre). Au coeur du matériau, on retrouve la loi de comportement mesurée en cisaillement homogène. Le taux de cisaillement dépend du coefficient de frottement [63, 56]. Il est peu sensible au coefficient de restitution, si ce dernier reste inférieur à 0,7 [63, 64, 56]. Cette indépendance s'observe aussi vis à vis du coefficient de restitution normal au socle sur toute la gamme des coefficients de restitution [65, 63].

En cisaillement annulaire [51], le matériau est confiné entre deux cylindres rugueux, intérieur de rayon  $R_i$  et extérieur de rayon  $R_e$  assez grand ( $\geq 2R_i$ ) pour que la paroi extérieure n'ait pas d'influence. Le cylindre intérieur tourne à une vitesse de rotation  $\Omega$ . Le cylindre extérieur exerce une pression radiale  $P$ . L'état de cisaillement est décrit par  $R_i$  et, à travers les valeurs imposées de  $P$  et de  $\Omega$ , par la vitesse tangentielle adimensionnée de la paroi  $V_\theta = \frac{\Omega R_i}{d} \sqrt{\frac{m}{P}}$ , qui généralise, à l'échelle du système global, la notion de nombre inertiel introduite en cisaillement homogène. Une petite valeur de  $V_\theta$  correspond au régime quasi-statique, tandis qu'une valeur élevée correspond au régime collisionnel. On utilise des conditions aux limites périodiques en se restreignant à un secteur angulaire  $\Theta$  tel que  $L = R_i\Theta$  soit supérieur à une quarantaine de grains. Par ailleurs, les caractéristiques du système simulé sont identiques à celles du système en cisaillement homogène. Toutefois, si la pression radiale s'avère approximativement constante, la contrainte de cisaillement décroît comme l'inverse de la distance radiale  $r$  au carré. Ceci, combiné à des effets d'interfaces spécifiques [66], conduit à une localisation du cisaillement près du cylindre intérieur. La mesure des relations entre les grandeurs locales  $\Phi(r)$ ,  $\mu^*(r)$  et  $I(r)$

montré que le comportement rhéologique ne dépend pas de la distribution des contraintes dans le régime inertiel. En revanche, lorsque  $\mu^*$  devient inférieur à  $\mu_{\min}^*$ , les lois de dilatance et de frottement (15) ne sont plus valables. On observe un régime de fluage dont la compréhension reste un sujet d'étude. Alors qu'en cisaillement homogène,  $\mu_{\min}^*$  est la valeur maximale de  $\mu^*$  supportée par le matériau granulaire avant qu'il ne commence à s'écouler *quasi-statiqument*, il est capable de s'écouler sous ce seuil, lorsque la distribution de contrainte est hétérogène.

#### 4.4 Influence de la cohésion

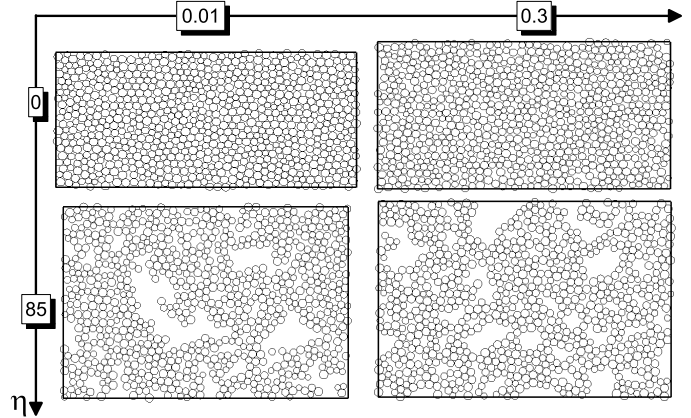


FIGURE 10 – Influence de  $I$  et  $\eta$  sur la microstructure (d'après [50]).

Les résultats, issus de [18, 50], que nous rappelons ici font suite au travail entamé par plusieurs équipes [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74], et visent à préciser quantitativement les lois rhéologiques en présence de cohésion. En dehors de l'introduction du nombre de cohésion  $\eta$ , les caractéristiques du système simulé sont les mêmes que celles décrites au § 4.1. On considère un modèle simple de force normale de cohésion [75, 69] qui prend en compte la force attractive maximale  $F_0$  :  $F^a(h) = -\sqrt{4K_N F_0 h}$  (et  $D_0 = 0$ ). En fait, la forme précise de la force attractive  $F^a(h)$  semble ne pas avoir d'influence sur le comportement rhéologique, seul compte  $F_0$  [76, 18]. La composante attractive de la force normale tend à rapprocher les grains et la déformation moyenne  $h^*$  dépend de l'intensité de la cohésion  $h^*(\eta) = \frac{1}{\kappa} \mathcal{H}(\eta)$  avec  $\mathcal{H}(\eta) = 1 + 2\eta + 2\sqrt{\eta + \eta^2}$ , d'ordre 1 aux faibles  $\eta$  et d'ordre  $4\eta$  aux forts  $\eta$ . Le paramètre  $\kappa$  a été fixé à  $10^5$ , de sorte que l'on reste dans la *limite des contacts rigides* au moins pour les faibles cohésion :  $h^*(\eta) \leq 10^{-4}$  pour  $\eta \leq 2, 5$ . L'influence de la déformation des grains, pour les valeurs plus élevées de  $\eta$ , est discutée dans [73]. Lorsque l'intensité de la cohésion n'est pas trop forte ( $\eta < 100$ ), le matériau est cisailé de manière homogène (figure 10). Les lois de dilatance et de frottement (15) conservent la même forme mais les paramètres  $\Phi_{\max}$ ,  $\mu_{\min}^*$ ,  $a$  et  $b$  dépendent de  $\eta$ . La cohésion provoque une diminution de la compacité, mais une augmentation du nombre de coordination, et une homogénéisation des directions de contact. C'est le signe d'une organisation des grains en amas compacts séparés par du vide. La figure 11a trace les deux paramètres  $\Phi_{\max}$  et  $a$  en fonction de l'intensité de la cohésion  $\eta$ . Les deux fonctions ont une forme similaire : une importante diminution dès les premiers niveaux de cohésion ( $\eta \leq 2$ ) puis une diminution plus faible. La diminution de  $a(\eta)$  jusqu'à 0 correspond à des systèmes dont la compacité ne dépend plus de l'état de cisaillement  $I$ . Les deux fonctions  $\mu_{\min}^*(\eta)$  et  $b(\eta)$  ont la même forme (figure 11b). Sous un seuil de cohésion ( $\eta \geq 10$ ), la cohésion n'affecte pas  $\mu_{\min}^*$  ou  $b$ . Au-dessus du seuil,  $\mu_{\min}^*(\eta)$

et  $b(\eta)$  augmentent fortement. On peut ainsi distinguer des régime de faible ( $\eta \leq 10$ ) et forte ( $\eta \geq 10$ ) cohésion.

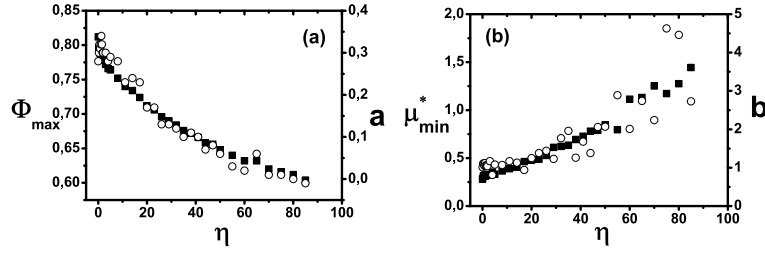


FIGURE 11 – (a)  $\Phi_{max}(\eta)$  (carrés noirs) et  $a(\eta)$  ( $\circ$ ); (b)  $\mu_{min}^*(\eta)$  (carrés noirs) et  $b(\eta)$  ( $\circ$ ) (d'après [59]).

La force de frottement entre les grains est décrite par un critère de Coulomb qui considère uniquement la composante élastique de la force normale. Écrit en fonction de la force normale totale, le critère s'écrit  $\|\mathbf{F}_T\|/F_N \leq \mu\mathcal{H}(|F_0/F_N|)$ . Le coefficient de frottement apparent en présence de cohésion est donc  $\mu\mathcal{H}(|F_0/F_N|)$ . Pour une faible cohésion, la force normale peut être beaucoup plus grande que la résistance à la traction  $F_N \gg F_0$ . Dans ce cas, la fonction  $\mathcal{H}$  tend vers 1 et le coefficient de frottement apparent reste  $\mu$ . Pour une forte cohésion, la force normale est beaucoup plus petite que la résistance à la traction :  $F_N \ll F_0$  et la fonction  $\mathcal{H}$  tend vers  $4|F_0/F_N|$ . Par conséquent, la cohésion augmente fortement le coefficient de frottement apparent entre les grains, et comme ceci a été montré pour les grains sans cohésion, ceci augmente la dilatance du matériau. C'est ce que l'on mesure sur la figure 12 qui compare la compacité de grains frottants et non frottants ( $\mu = 0$ ).

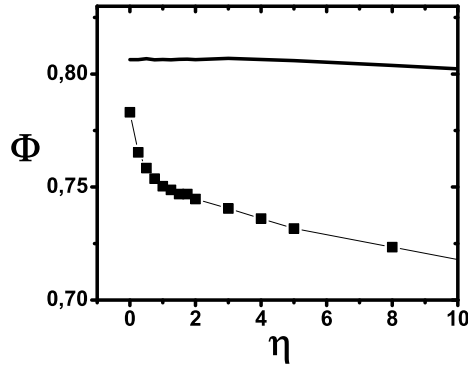


FIGURE 12 –  $\Phi(\eta, I = 0, 2)$  pour des grains frottants  $\mu = 0, 4$  (carrés noirs) et non-frottants  $\mu = 0$  ( $\circ$ ) (d'après [50]).

## 5 Conclusion

Le choix de paramètres appropriés pour étudier des comportements mécaniques de matériaux granulaires par simulation numérique discrète dépend bien sûr du problème particulier auquel on s'intéresse. Il peut utilement s'appuyer sur l'analyse dimensionnelle et sur les connaissances que l'on a acquises, pour des matériaux modèles simples dans différents régimes de comportement,



	$I$	$\kappa (> 10^3)$	$e$ ou $\zeta$	$\mu$	$\mu_R/d$	$\eta$
Assemblage	O	N	O	O	O	O
Solide, déf. type I, $I < 10^{-3}$	N	O	N	O	O	O
Solide, déf. type II, $I < 10^{-3}$	N	N	N	O	O	O
État critique, $I < 10^{-3}$	N	N	N	O	O	O
Écoulements denses, $10^{-3} < I < 0.1$	O	N	N	O	O	O
Régime collisionnel, $I > 0.1$	O	N	O	O	O	O

TABLE 2 – Influence des paramètres sans dimension sur les comportements mécaniques dans différents régimes de sollicitation. (O=Oui, N=Non)

de l'influence des paramètres de contrôle sans dimension choisis au § 2.3 : les plus importants sont le nombre d'inertie  $I$  (défini en 11), le niveau de raideur  $\kappa$  (défini en 10), et le cas échéant, le nombre de cohésion  $\eta$  (défini en 11). Le choix de paramètres sans dimension retenu permet aussi commodément de traiter des matériaux solides comme en écoulement. La loi constitutive en situation d'écoulement stationnaire prend la forme d'une  $\ddot{\gamma}$  équation d'état  $\dot{\gamma}$  qui donne l'ensemble des caractéristiques mécaniques et de microstructure en fonction d'un seul paramètre ( $I$ ) ou de deux ( $I$  et  $\eta$ ) pour les systèmes cohésifs. La table 5 résume les résultats rapportés dans les § 3 et 4. Aux trois nombres  $\kappa$ ,  $I$  et  $\eta$  (ou  $P^*$ ) il faut ajouter le coefficient de frottement intergranulaire  $\mu$  (et éventuellement  $\mu_R/d$ , le frottement de roulement), dont la valeur influe sur l'ensemble des comportements évoqués. On doit aussi garder à l'esprit le rôle crucial de la géométrie, celle des grains eux-mêmes, et celle de l'état initial pour tous les comportements de type solide, sauf les états critiques. Le choix des paramètres  $I$  et  $\kappa$  permet de traiter de la limite quasi-statique et de celle des grains rigides, importantes en pratique. La valeur  $I = 10^{-3}$  indiquée dans la table pour l'approche de la limite quasi-statique (comportement indépendant de  $I$ ) est assez indicative, elle dépend bien sûr des systèmes étudiés et des configurations auxquelles on s'intéresse. En général, la limite quasi-statique est d'autant plus facile à approcher que le système est dense et bien coordonné, et demande davantage de précautions en présence de déformations de type II avec des réarrangements importants. De même, la limite des grains rigides peut se situer un peu au-delà du seuil  $\kappa \geq 1000$  indiqué. L'effet du paramètre  $\nu$  ou de  $K_T/K_N$  est limité au régime de déformations de type I, et faible si  $K_T/K_N > 1$ . Dans cette limite, il peut être commode de modéliser les grains comme des solides indéformables, à la manière de la méthode de dynamique des contacts (Chapitre 3). Cette approche peut donc s'appliquer à l'ensemble des cas recensés dans la table, sauf le régime de déformation de type I. Celui-ci apparaît comme un domaine de comportement rigide indéformable s'il est traité en dynamique des contacts. Même si ce point mériterait des investigations complémentaires, on s'attend à ce que l'instabilité des réseaux de contact qui borne l'intervalle de comportement de type I coïncide en dynamique des contacts et dans une modélisation prenant en compte un niveau de raideur finie. L'approche par des grains indéformables est alors légitime tant que l'on peut ignorer les déformations de l'ordre de quelques  $\kappa^{-1}$  qui surviennent dans le matériau réel.

Les processus d'assemblage figurent dans la table, mais il conviendrait bien sûr de distinguer les différentes méthodes de préparation d'échantillons solides (chapitre 8). Leur description précise demande d'introduire d'autres paramètres de contrôle. Comme il s'agit souvent de procédés impliquant le passage d'un état agité et lâche à un assemblage solide en équilibre, les paramètres dynamiques  $I$  et  $e$  sont susceptibles d'influencer le résultat (comme dans le cas de la pluviation contrôlée [23]). La compression de matériaux solides dans un trajet de chargement conservant le rapport des contraintes, comme évoqué au § 3.1, est à classer avec le comportement solide en déformation de type I en l'absence de cohésion, et comme déformation de type II dans le cas cohésif (on évaluera alors, si  $\eta > 1$ , les effets dynamiques avec  $I_a$ ). En présence de cohésion, tous les comportements sont sensibles à la valeur de  $\eta$ , sauf bien sûr dans la limite

$\eta \rightarrow 0$  (pour la consolidation  $\eta < 5.10^{-2}$  semble suffisant pour négliger la cohésion).

Au-delà de son utilité pratique pour le choix de paramètres appropriés dans une application donnée de la simulation discrète, la classification des paramètres de contrôle et de leur domaine d'influence sur les comportements est également précieuse pour la compréhension des origines microscopiques des lois constitutives macroscopiques.

## Références

- [1] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [2] H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors. *Physics of Dry Granular Media*, Dordrecht, 1998. Balkema.
- [3] J.-N. Roux and F. Chevoir. Simulation numérique discrète et comportement mécanique des matériaux granulaires. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 254 :109–138, 2005.
- [4] D. Elata and J. G. Berryman. Contact force-displacement laws and the mechanical behavior of random packs of identical spheres. *Mechanics of Materials*, 24 :229–240, 1996.
- [5] C. Thornton and C. W. Randall. Applications of theoretical contact mechanics to solid particle system simulations. In M. Satake and J. T. Jenkins, editors, *Micromechanics of granular materials*, pages 245–252, Amsterdam, 1988. Elsevier.
- [6] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L.M. Schwartz. Why effective medium theory fails in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 83(24) :5070–5073, 1999.
- [7] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. I. Assembling process, geometry, and contact networks. *Phys. Rev. E*, 76 :061302, 2007.
- [8] V. Magnanimo, L. La Ragione, J. T. Jenkins, P. Wang, and H. A. Makse. Characterizing the shear and bulk moduli of an idealized granular material. *Europhys. Lett.*, 81 :34006, 2008.
- [9] M. R. Kuhn and C. S. Chang. Stability, Bifurcation and Softening in Discrete Systems : A Conceptual Approach for Granular Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :6026–6051, 2006.
- [10] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [11] L. Brendel and S. Dippel. Lasting contacts in molecular dynamics simulations. In Herrmann et al. [2], pages 313–318.
- [12] NV Brilliantov, F Spahn, JM Hertzsch, and T Poschel. Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 53 :5382–5392, 1996.
- [13] O. L. Walton and R. L. Braun. Viscosity, granular temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. *Journal of Rheology*, 30 :949–980, 1986.
- [14] S. Luding. Shear flow modeling of cohesive and frictional fine powder. *Powder Technology*, 158 :45–50, 2005.
- [15] X. Chateau, P. Moucheron, and O. Pitois. Micromechanics of unsaturated granular media. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 128 :856–863, 2002.
- [16] V. Richefeu, M. S. El Youssoufi, and F. Radjai. Shear strength properties of wet granular materials. *Phys. Rev. E*, 73, 2006.
- [17] D. Maugis. *Contact, adhesion and rupture of elastic solids*. Springer, Berlin, 2000.
- [18] P.G. Rognon, J. N. Roux, D. Wolf, M. Naaim, and F. Chevoir. Rheophysics of cohesive granular materials. *Europhys. Lett.*, 74 :644–650, 2006.

- [19] F.A. Gilabert, J-N. Roux, and A. Castellanos. Computer simulation of model cohesive powders : influence of assembling procedure and contact laws on low consolidation states. *Phys. Rev. E*, 75 :011303, 2007.
- [20] K. Iwashita and M. Oda. Rotational resistance at contacts in the simulation of shear band development by dem. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 124 :285–292, 1998.
- [21] A. Tordesillas and D. C. Stuart. Incorporating rolling resistance and contact anisotropy in micromechanical models of granular media. *Powder Technology*, 124 :106–111, 2002.
- [22] N. Estrada, A. Taboada, and F. Radjai. Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance. *Phys. Rev. E*, 78 :021301, 2008.
- [23] S. Emam, J. Canou, A. Corfdir, J.-C. Dupla, and J.-N. Roux. Elaboration et comportement mécanique de matériaux granulaires solides modèles ; expériences et simulations numériques. In B. Cazacliu and J.-N. Roux, editors, *Rhéologie des pâtes et des matériaux granulaires*, volume SI12 of *Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, pages 105–145, Paris, 2006. Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- [24] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. II. Compression and pressure cycles. *Phys. Rev. E*, 76 :061303, 2007.
- [25] F.A. Gilabert, J-N. Roux, and A. Castellanos. Computer simulation of model cohesive powders : plastic consolidation, structural changes and elasticity under isotropic loads. *Phys. Rev. E*, 78 :031305, 2008.
- [26] J. Biarez and P.-Y. Hicher. *Elementary Mechanics of Soil Behaviour*. A. A. Balkema, Rotterdam, 1993.
- [27] C. Thornton. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media. *Géotechnique*, 50 :43–53, 2000.
- [28] A. S. J. Suiker and N. A. Fleck. Frictional collapse of granular assemblies. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 71 :350–358, 2004.
- [29] J.-N. Roux. The nature of quasistatic deformation in granular materials. In R. García Rojo, H. J. Herrmann, and S. McNamara, editors, *Powders and Grains 2005*, pages 261–265, Leiden, 2005. Balkema.
- [30] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. iii. elastic properties. *Phys. Rev. E*, 76(6) :061304, 2007.
- [31] G. Combe. *Mécanique des matériaux granulaires et origines microscopiques de la déformation*, volume SI8 of *Études et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées*. Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 2002.
- [32] N. Gaspar and M. R. Kuhn. A granular material with a negative poisson’s ratio. In *Proceedings of the Engineering Mechanics Institute Conference of the ASCE*. CDROM published by ASCE, 2008.
- [33] P. W. Rowe. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proceedings of the Royal Society of London*, A269 :500–527, 1962.
- [34] A. Taboada, N. Estrada, and F. Radjai. Additive decomposition of shear strength in cohesive granular media from grain scale interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :098302, 2006.
- [35] P-E. Peyneau and J-N. Roux. Frictionless bead packs have macroscopic friction, but no dilatancy. *Phys. Rev. E*, 78 :011307, 2008.
- [36] F. Calvetti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of Cohesive-frictional materials*, 2 :121–163, 1997.

- [37] L. Rothenburg and R.J. Bathurst. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Géotechnique*, 39 :601–614, 1989.
- [38] F. Radjaï and S. Roux. Contact dynamics study of 2D granular media : critical states and relevant internal variables. In H. Hinrichsen and D.E. Wolf, editors, *The physics of granular media*, pages 165–187, Berlin, 2004. Wiley-Vch.
- [39] E. Azéma, F. Radjaï, R. Peyroux, and G. Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Phys. Rev. E*, 76 :011301, 2007.
- [40] P-E. Peyneau and J-N. Roux. Solidlike behavior and anisotropy in rigid frictionless bead assemblies. *Phys. Rev. E*, 78 :041307, 2008.
- [41] E-M. Charalampidou, G. Combe, G. Viggiani, and J. Lanier. Mechanical behavior of mixtures of circular and rectangular 2d particles. à paraître dans les actes de la conférence Powders and Grains 2009, 2009.
- [42] S. J. Antony and M. Kuhn. Influence of particle shape on granular contact signature and shear strength : new insights from simulations. *Int. J. Solid Struct.*, 41 :5863–5870, 2004.
- [43] L. Rothenburg and N. P. Kruyt. Critical state and evolution of coordination number in simulated granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 41(2) :5763–5774, 2004.
- [44] S. Fazekas, J. Török, and J. Kertesz. Critical packing in granular shear bands. *Phys. Rev. E*, 75 :011302, 2007.
- [45] C. S. Campbell. Stress-controlled elastic granular shear flows. *J. Fluid Mech.*, 539 :273–297, 2005.
- [46] C. Voivret. *Texture et comportement des matériaux granulaires à grande polydispersité*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2008.
- [47] F. Chevoir. *Écoulements granulaires*, volume SI18 of *Études et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées*. Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 2008.
- [48] F. da Cruz. *Écoulements de grains secs : Frottement et blocage*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004. <http://pastel.paristech.org/946>.
- [49] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J-N. Roux, and F. Chevoir. Rheophysics of dense granular flows : Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E*, 72 :021309, 2005.
- [50] P.G. Rognon, J. N. Roux, M. Naaïm, and F. Chevoir. Dense flows of cohesive granular materials. *J. Fluid Mech.*, 596 :21–47, 2008.
- [51] G. Koval, A. Corfdir, J.N. Roux, and F. Chevoir. Annular shear of cohesionless granular materials : from inertial to quasi-static regime. accepté pour publication dans *Physical Review E*, 2009.
- [52] F. da Cruz, F. Chevoir, J. N. Roux, and I. Iordanoff. Macroscopic friction of dry granular materials. In G. Dalmaz, A. A. Lubrecht, D. Dowson, and M. Priest, editors, *Transient Processes in Tribology*, pages 53–61, Amsterdam, 2004. Elsevier.
- [53] A. Lemaître, J.-N. Roux, and F. Chevoir. What do dry granular flows tell us about dense suspension rheology ? soumis à *Rheologica Acta*, 2008.
- [54] F. Radjaï and S. Roux. Turbulentlike fluctuations in quasistatic flow of granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :064302, 2002.
- [55] G. Lois, A. Lemaître, and J. M. Carlson. Numerical tests of constitutive laws for dense granular flows. *Phys. Rev. E*, 72 :051303, 2005.
- [56] L. E. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T.C. Halsey, D. Levine, and S. J. Plimpton. Granular flow down an inclined plane. *Phys. Rev. E*, 64 :385–403, 2001.

- [57] C. S. Campbell. Granular shear flows at the elastic limit. *J. Fluid Mech.*, 465 :261–291, 2002.
- [58] M. Prochnow. *Ecoulements denses de grains secs*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002. <http://pastel.paristech.org/321>.
- [59] P.G. Rognon. *Rhéologie des matériaux granulaires cohésifs - Application aux avalanches de neige dense*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006. <http://pastel.paristech.org/2450>.
- [60] I. Goldhirsch. Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 35 :267–293, 2003.
- [61] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flow. *Nature*, 441 :727–730, 2006.
- [62] J. T. Jenkins and M. W. Richman. Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical, rough, inelastic, circular discs. *Phys. Fluids*, 28 :3485–3494, 1985.
- [63] E. Azanza. *Écoulements granulaires bidimensionnels sur plan incliné (thèse de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées)*, volume SI5. Collection Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Paris, 1998.
- [64] S. Dippel and D. Wolf. Rapid granular flow on a rough inclined plane. *Computer Communications*, 121 :284–289, 1999.
- [65] C.S. Campbell and C.E. Brennen. Chute flows of granular material : some computer simulations. *J. Appl. Mech.*, 52 :172–178, 1985.
- [66] G. Koval. *Comportement d’interface des matériaux granulaires*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00311984/fr/>.
- [67] R. Mei, H. Shang, O. Walton, and J. Klausner. Concentration non-uniformity in simple shear flow of cohesive powders. *Powder Tech.*, 112 :102–110, 2000.
- [68] S.T. Nase, W.L. Vargas, A. Abatan, and J.J. McCarthy. Discrete characterization tools for cohesive granular material. *Powder Tech.*, 116 :214–223, 2001.
- [69] F. Radjai, I. Preechawuttipong, and R. Peyroux. Cohesive granular texture. In P.A. Vermeer, S. Diebels, W. Ehlers, H.J. Herrmann, S. Luding, and E. Ramm, editors, *Continuous and discontinuous modelling of cohesive frictional materials*, pages 148–159. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [70] A.-J. Forsyth, S. Hutton, and M.J. Rhodes. Effect of cohesive interparticle force on the flow characteristics of granular material. *Powder Tech.*, 126 :150–154, 2002.
- [71] M.W. Weber, D.K. Hoffman, and C.M. Hrenya. Discrete-particle simulations of cohesive granular flow using a square-well potential. *Granular Matter*, 6 :239–254, 2004.
- [72] I. Iordanoff, N. Fillot, and Y. Berthier. Numerical study of a thin layer of cohesive particles under plane shearing. *Powder Tech.*, 159 :46–54, 2005.
- [73] L. Aarons and S. Sundaresan. Shear flow of assemblies of cohesive and non cohesive granular materials. *Powder Tech.*, 168 :10–21, 2006.
- [74] A.W. Alexander, B. Chaudhuri, A. Faqih, F.J. Muzzio, C. Davies, and M.S. Tomassone. Avalanching flow of cohesive powders. *Powder Tech.*, 164 :13–21, 2006.
- [75] H.G. Matuttis and A. Schinner. Particle simulation of cohesive granular materials. *International Journal of Modern Physics C*, 12 :1011–1021, 2001.
- [76] V. Richefeu, M.S. El Youssoufi, R. Peyroux, and C. Bohatier. Frictional contact and cohesion laws for Casagrande’s shear test on granular materials by 3d dem - comparison with experiments. In R. Garcia-Rojo, H. J. Herrmann, and S. McNamara, editors, *Powders and Grains 2005*, pages 509–513, Leiden, The Netherlands, 2005. A.A. Balkema.