

HERRAMIENTAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN LA PLANIFICACIÓN FINANCIERA DE LA JUBILACIÓN

Figuerola-Wischke Anton¹ – Gil-Lafuente Anna Maria² – Merigó José María³

^{1,2}Departamento de Empresa, Facultad de Economía y Empresa, Universidad de Barcelona - ³Escuela de Información, Sistemas y Modelización, Facultad de Ingeniería y Tecnología de la Información, Universidad Tecnológica de Sídney

^{1,2}Av. Diagonal 690, Barcelona (08034), Barcelona. España – ³Broadway 81, Sídney (2007), NSW. Australia.

¹anton.figuerola@ub.edu – ²amgil@ub.edu – ³jose.merigo@uts.edu.au

¹ ORCID: 0000-0002-8774-6731

RESUMEN

La desfavorable evolución de las variables demográficas y económicas supone una agravación de la sostenibilidad del sistema público de pensiones español, lo cual también dificulta poder mantener la suficiencia de las pensiones públicas para la jubilación. En consecuencia, los trabajadores se plantean invertir en instrumentos de ahorro privado para complementar la pensión pública y así garantizar la suficiencia de ingresos en el momento de la jubilación. El trabajo plantea herramientas alternativas para seleccionar el producto de ahorro para la jubilación más conveniente. Estas herramientas se basan en el uso del operador *linguistic ordered weighted averaging* (LOWA), el operador *induced linguistic ordered weighted averaging* (ILOWA), el operador *linguistic ordered weighted averaging distance* (LOWAD) y el operador *linguistic induced ordered weighted averaging distance* (LIOWAD). Al final del trabajo, se presenta un ejemplo ilustrativo de la aplicación de los operadores de agregación LOWA, ILOWA, LOWAD y LIOWAD en procesos de planificación financiera para la jubilación. Los resultados demuestran la utilidad de esta clase de operadores de agregación lingüísticos en la toma de decisiones para la jubilación.

Palabras Clave: Toma de decisiones, operadores OWA, operadores lingüísticos de agregación, distancia de Hamming, sistemas de pensiones.

Códigos JEL: C44, D81, J32.

DECISION-MAKING METHODS FOR RETIREMENT FINANCIAL PLANNING

Figuerola-Wischke Anton¹ – Gil-Lafuente Anna Maria² – Merigó José María³

^{1,2}Departamento de Empresa, Facultad de Economía y Empresa, Universidad de Barcelona - ³Escuela de Información, Sistemas y Modelización, Facultad de Ingeniería y Tecnología de la Información, Universidad Tecnológica de Sídney

^{1,2}Av. Diagonal 690, Barcelona (08034), Barcelona. España – ³Broadway 81, Sídney (2007), NSW. Australia.

¹anton.figuerola@ub.edu – ²amgil@ub.edu – ³jose.merigo@uts.edu.au

¹ ORCID: 0000-0002-8774-6731

ABSTRACT

The unfavorable development of the demographic and economic variables has a negative impact on the sustainability of the public pension system of Spain and consequently on the pension adequacy. Therefore, it encourages workers to invest in alternative savings products in order to supplement the state pension and thereby ensure an adequate retirement income. This study suggests different methods that may help citizens to choose the most suitable product for supplementing the state pension when they retire. These methods are based on the use of the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) operator, the induced linguistic ordered weighted averaging (ILOWA) operator, the linguistic ordered weighted averaging distance (LOWAD) operator and the linguistic induced ordered weighted averaging distance (LIOWAD) operator. At the end of the work, an illustrative example will be developed using the LOWA, ILOWA, LOWAD and LIOWAD aggregation operators for retirement financial planning. The results show the usefulness of this type of linguistic aggregation operators in retirement decision-making.

Keywords: Decision-making, OWA operators, linguistic aggregation operators, Hamming distance, pension systems.

JEL Code: C44, D81, J32.

1 INTRODUCCIÓN

El sistema público de pensiones en España es cada vez menos sostenible (Hernández de Cos, 2021; Hernández de Cos et al., 2018). Esto se debe a varios factores. Uno de los factores más importantes es el demográfico. En España, la tasa de dependencia (cociente entre la población mayor de 65 años y la población de 15 a 64 años) se ha ido incrementando notablemente a lo largo del tiempo. Según datos del Eurostat (2021), en España la tasa de dependencia registrada en 2009 fue del 24.1%, en cambio, en 2020 se situó en el 29.7%.

La situación del mercado laboral es otro de los factores que impactan en la sostenibilidad del sistema público de pensiones. Concretamente, la actual crisis económica motivada por la pandemia de la COVID-19 ha comportado la destrucción de empleo. Cuando la tasa de desempleo se incrementa, los ingresos de la Seguridad Social para pagar las pensiones y otras prestaciones se reducen. Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE, 2021), en España la tasa de paro se situó en el cuarto trimestre de 2019 en el 13.8%. En cambio, en el cuarto trimestre de 2020 subió hasta el 16.1%.

En este contexto, la suficiencia de las pensiones públicas no está garantizada. Es por ello por lo que muchos ciudadanos buscan complementar su pensión pública con productos de ahorro privado y así evitar una pérdida importante en el poder adquisitivo en el momento de la jubilación. Actualmente existe una gran variedad de productos para invertir de cara a la jubilación como pueden ser los planes individuales de ahorro sistemático (conocidos como PIAS) o los unit linked.

El objetivo del presente trabajo es mostrar herramientas alternativas para mejorar la toma de decisiones en la selección de productos de ahorro complementarios para la jubilación y en consecuencia garantizar un adecuado nivel de ingresos durante la vejez. Concretamente, estas herramientas giran en torno al uso de medias ponderadas ordenadas (del inglés, *ordered weighted averaging*, OWA) (Yager, 1988) y variables lingüísticas.

El operador OWA es una de las funciones de agregación más populares para la agregación de información numérica. Desde su aparición, varios autores han desarrollado nuevas extensiones. Entre las más destacadas se encuentran el *induced ordered weighted averaging* (IOWA) (Yager y Filev, 1999) y el *linguistic ordered weighted averaging* (LOWA) (Herrera et al., 1995). El operador IOWA se caracteriza por utilizar variables de ordenación inducida. El operador LOWA es muy útil para aquellas situaciones en donde la información disponible no se puede analizar mediante valores numéricos. Asimismo, Xu (2006b) desarrolló el operador *induced linguistic ordered*

weighted averaging (ILOWA), el cual extiende el operador LOWA mediante el uso de variables de inducción en el proceso de ordenación de los argumentos lingüísticos.

Los autores Merigó y Gil-Lafuente (2010) desarrollaron un nuevo enfoque para la selección de productos financieros basado en el uso del operador OWA y las extensiones *ordered weighted averaging distance* (OWAD) y *ordered weighted averaging adequacy coefficient* (OWAAC). El operador OWAD utiliza el operador OWA en la distancia de Hamming (Hamming, 1950).

El operador *linguistic ordered weighted averaging distance* (LOWAD) fue introducido en (Merigó y Casanovas, 2010) y es una extensión del operador OWAD que utiliza variables lingüísticas. El operador LOWAD es muy útil para aquellas situaciones en donde la información disponible es incierta y no puede ser representada mediante variables numéricas. Además, si se utilizan variables inducidas en el proceso de reordenación, se obtiene el operador *linguistic induced ordered weighted averaging distance* (LIOWAD) (Cheng y Zeng, 2012; Zeng et al., 2013).

El actual trabajo se estructura de la siguiente manera. En primer lugar, se lleva a cabo una revisión sobre la teoría de los operadores OWA, LOWA, ILOWA, LOWAD y LIOWAD. En segundo lugar, se detallan los pasos del algoritmo propuesto para la selección de productos de ahorro complementarios para la jubilación. En tercer lugar, se desarrolla un ejemplo ilustrativo para el algoritmo propuesto. Finalmente, se resumen las principales conclusiones del trabajo.

2 METODOLOGÍA

En este apartado se revisan los principales aspectos de la teoría de los operadores de agregación OWA, LOWA, ILOWA, LOWAD y LIOWAD.

2.1 El operador OWA

El operador OWA propuesto por Yager (1988), proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación. El operador OWA ha sido aplicado con éxito a diversos campos, entre ellos el de la economía y el de la gestión empresarial (Kacprzyk et al., 2019). El operador OWA se puede definir de la siguiente manera:

Definición 1. Un operador OWA de dimensión n es una función OWA: $R^n \rightarrow R$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W de dimensión n $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, en donde:

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j, \quad (1)$$

donde b_j es el j -ésimo elemento más grande de los argumentos a_1, a_2, \dots, a_n , es decir, (b_1, b_2, \dots, b_n) es (a_1, a_2, \dots, a_n) reordenado de mayor a menor.

Nótese que si el proceso de reordenación de los argumentos se lleva a cabo de forma ascendente y no descendente se obtiene el operador AOWA (del inglés *ascending ordered weighted averaging*), propuesto en (Yager, 1992). Asimismo, los operadores OWA y AOWA están relacionados mediante $w_j = w_{n+1-j}^*$, donde w_j es el j -ésimo coeficiente del operador OWA y w_{n+1-j}^* el j -ésimo del operador AOWA.

Ejemplo 1. Considera la siguiente colección de argumentos: $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 9$. Si el vector de ponderaciones es $W = (0.2, 0.3, 0.5)$, entonces, el operador OWA se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{OWA} = 0.2 \times 9 + 0.3 \times 6 + 0.5 \times 4 = 5.6.$$

El operador OWA es monótono, conmutativo (simétrico), idempotente y acotado. Estas propiedades se pueden expresar de la siguiente forma:

- *Monotonía:* Para cualquier operador OWA, si $a_i \geq \hat{a}_i$ para todo i , entonces, $\text{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \text{OWA}(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)$.
- *Conmutatividad:* En el sentido de que cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $\text{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{OWA}(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)$, siendo $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)$ una permutación cualquiera de (a_1, a_2, \dots, a_n) .
- *Acotado:* En el sentido de que el operador OWA está delimitado entre el máximo y el mínimo. Es decir, $\text{Min}\{a_i\} \leq \text{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}\{a_i\}$.
- *Idempotencia:* Para cualquier operador OWA, si $a_i = a$ para todo i , entonces, $\text{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$.

El operador OWA incluye los criterios de decisión clásicos. El criterio optimista se obtiene cuando $w_1 = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq 1$. El criterio pesimista se obtiene cuando $w_n = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq n$. El criterio Laplace, basado en la media aritmética, se obtiene cuando $w_j = 1/n$ para todo j . Finalmente, el criterio de Hurwicz se obtiene cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq 1, n$.

Otro aspecto que destacar de los operadores OWA son las medidas para caracterizar el vector de pesos W y el tipo de agregación que ejecuta (Yager, 1988, 1996, 2002). Las más destacadas son el carácter actitudinal, la medida de dispersión, el operador de balance y la medida de divergencia.

La primera medida fue introducida en (Yager, 1988) y hace referencia al carácter actitudinal del decisor. Esta medida se puede definir de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right). \quad (2)$$

La segunda medida es la de dispersión o entropía del vector W (Yager, 1988) y se define de la siguiente forma:

$$H(W) = - \sum_{j=1}^n w_j \ln(w_j). \quad (3)$$

La tercera medida es el operador de balance y fue introducida en (Yager, 1996). El operador de balance sirve para medir el grado de favoritismo hacia valores optimistas o pesimistas y se define como:

$$\text{Bal}(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n+1-2j}{n-1} \right). \quad (4)$$

La cuarta medida fue introducida en (Yager, 2002) y hacer referencia al grado de divergencia del vector W . Esta medida se puede definir de la siguiente forma:

$$\text{Div}(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2. \quad (5)$$

2.2 El operador LOWA

El primer modelo que utilizaba información lingüística y operadores OWA fue el presentado por Herrera et al. (1995). Desde entonces, varios autores han desarrollado nuevos modelos (Herrera y Herrera-Viedma, 1997; Martínez y Herrera, 2000; Merigó et al., 2012; Merigó y Gil-Lafuente, 2008; Xu, 2004a, 2004b, 2006a, 2006b). El presente trabajo se centra en el de Xu (2004a, 2004b). El operador LOWA es una extensión del operador OWA en donde la información es evaluada mediante variables lingüísticas. Este operador también se conoce como EOWA (del inglés *extended ordered weighted averaging*). El operador LOWA se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2. Un operador LOWA de dimensión n es una función LOWA: $S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W de dimensión n $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, en donde:

$$\text{LOWA}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j}, \quad (6)$$

donde s_{β_j} es el j -ésimo elemento más grande de los s_{α_i} .

Ejemplo 2. Considera el siguiente conjunto de tres etiquetas lingüísticas: $s_1 = \text{malo}$, $s_2 = \text{regular}$, $s_3 = \text{bueno}$. Si la colección de argumentos lingüísticos es $S = (s_2, s_2, s_3)$ y el vector de ponderaciones es $W = (0.2, 0.3, 0.5)$, entonces, el operador LOWA se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{LOWA} = 0.2 \times s_3 + 0.3 \times s_2 + 0.5 \times s_2 = s_{2.2}.$$

El operador LOWA también cumple con las propiedades de monotonía, conmutatividad, idempotencia y acotado.

2.3 El operador ILOWA

Una extensión muy interesante del operador LOWA es el operador ILOWA (Xu, 2006b). El operador ILOWA se diferencia del operador LOWA por llevar a cabo el proceso de ordenación de los s_{α_i} mediante las denominadas variables inducidas u_i . En consecuencia, los argumentos no son ordenados según sus cantidades.

Definición 3. Un operador ILOWA de dimensión n es una función ILOWA: $R^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W de dimensión n $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, en donde:

$$\text{ILOWA}(\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \langle u_2, s_{\alpha_2} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j}, \quad (7)$$

donde s_{β_j} es el valor s_{α_i} del par ILOWA $\langle u_i, s_{\alpha_i} \rangle$ que tiene el j -ésimo más grande de los u_i , u_i es la variable inducida de ordenación y s_{α_i} es la variable del argumento lingüístico.

Ejemplo 3. Partiendo del mismo conjunto de etiquetas lingüísticas que en el Ejemplo 2, considera la siguiente colección de argumentos lingüísticos con sus respectivas variables de ordenación inducida $\langle u_i, s_{\alpha_i} \rangle$: $\langle 4, s_2 \rangle$, $\langle 9, s_2 \rangle$ y $\langle 6, s_3 \rangle$. Si el vector de ponderaciones es $W = (0.2, 0.3, 0.5)$, entonces, el operador ILOWA se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{ILOWA} = 0.2 \times s_2 + 0.3 \times s_3 + 0.5 \times s_2 = s_{2.3}.$$

El operador ILOWA, de igual forma que el operador LOWA, cumple con las propiedades de monotonía, conmutatividad, idempotencia y acotado.

2.4 La distancia de Hamming

La distancia de Hamming d_H (Hamming, 1950) es una técnica muy popular que se emplea para calcular las diferencias entre dos elementos, dos conjuntos y dos subconjuntos borrosos, entre otros.

Definición 4. Considera dos conjuntos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Entonces, la distancia de Hamming de dimensión n se define en el ámbito discreto de la siguiente forma:

$$d_H(X, Y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|. \quad (8)$$

Además, si se utilizan pesos para agregar las diferencias, se obtiene la distancia relativa de Hamming d_{WH} , la cual se define como:

Definición 5. La distancia relativa de Hamming de dimensión n es una función $d_{WH}: R^n \times R^n \rightarrow R$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W de dimensión n $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, en el que:

$$d_{WH}(X, Y) = \sum_{j=1}^n w_j |x_j - y_j|, \quad (9)$$

donde x_j y y_j son los j -ésimos argumentos de los conjuntos X y Y respectivamente.

Nótese que si $w_j = 1/n$ para todo j , se consigue la distancia normalizada de Hamming d_{NH} .

2.5 El operador LOWAD

El operador LOWAD (Merigó y Casanovas, 2010) es un operador de agregación que utiliza variables lingüísticas en el cálculo de las distancias de Hamming. La principal ventaja de este operador es que provee una visión más completa del problema de toma de decisiones. Para dos conjuntos $X = \{s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_n}\}$ y $Y = \{s_{y_1}, s_{y_2}, \dots, s_{y_n}\}$, el operador LOWAD se define de la siguiente forma:

Definición 6. Un operador LOWAD de dimensión n es una función LOWAD: $S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W de dimensión n $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, en donde:

$$\text{LOWAD}(X, Y) = \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j}, \quad (10)$$

donde s_{β_j} es el j -ésimo más grande de los $|s_{x_i} - s_{y_i}|$ y $|s_{x_i} - s_{y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias lingüísticas individuales.

Nótese que también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes de los argumentos lingüísticos. El primer caso corresponde al operador LOWAD y el segundo al operador ALOWAD (del inglés *ascending linguistic ordered weighted averaging distance*). Además, los vectores de pesos de los operadores LOWAD y ALOWAD son simétricos entre sí. Concretamente, se encuentran relacionados por $w_j = w_{n+1-j}^*$, donde w_j es el j -ésimo coeficiente del operador LOWAD y w_{n+1-j}^* el j -ésimo del operador ALOWAD.

El operador LOWAD es monótono, conmutativo, idempotente, acotado, reflexivo y no negativo. Estas propiedades se pueden explicar de la siguiente forma:

- *Monotonía:* Para cualquier operador LOWAD, si $|s_{x_i} - s_{y_i}| \geq |s_{z_i} - s_{g_i}|$ para todo i , entonces, $\text{LOWAD}(X, Y) \geq \text{LOWAD}(Z, G)$.
- *Conmutatividad:* En el sentido de que cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $\text{LOWAD}(X, Y) = \text{LOWAD}(Z, G)$, siendo (Z, G) una permutación cualquiera de (X, Y) .
- *Acotado:* En el sentido de que el operador LOWAD esta delimitado entre el máximo y el mínimo. Es decir, $\text{Min}\{|s_{x_i} - s_{y_i}|\} \leq \text{LOWAD}(X, Y) \leq \text{Max}\{|s_{x_i} - s_{y_i}|\}$.
- *Idempotencia:* Para cualquier operador LOWAD, si $|s_{x_i} - s_{y_i}| = s_\alpha$ para todo i , entonces, $\text{LOWAD}(X, Y) = s_\alpha$.
- *Reflexividad:* El operador LOWAD es reflexivo ya que $\text{LOWAD}(X, X) = s_0$.
- *No negatividad:* El operador LOWAD es no negativo ya que $\text{LOWAD}(X, Y) \geq s_0$.

2.6 El operador LIOWAD

El operador LIOWAD (Cheng y Zeng, 2012; Zeng et al., 2013) es un operador de distancia similar al LOWAD, pero con la diferencia de que el proceso de reordenación se basa en

variables inducidas de ordenación. Para dos conjuntos $X = \{s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_n}\}$ y $Y = \{s_{y_1}, s_{y_2}, \dots, s_{y_n}\}$, el operador LIOWAD se define de la siguiente forma:

Definición 7. Un operador LIOWAD de dimensión n es una función LIOWAD: $R^n \times S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W de dimensión n $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, en donde:

$$\text{LIOWAD}(\langle u_1, s_{x_1}, s_{y_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{x_n}, s_{y_n} \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j}, \quad (11)$$

donde s_{β_j} es el valor $|s_{x_i} - s_{y_i}|$ de la tripleta LIOWAD $\langle u_i, s_{x_i}, s_{y_i} \rangle$ con el j -ésimo más grande de los u_i , u_i es la variable inducida de ordenación y $|s_{x_i} - s_{y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias lingüísticas individuales.

Ejemplo 4. Partiendo del mismo conjunto de etiquetas lingüísticas que en el Ejemplo 2, considera los siguientes conjuntos de argumentos lingüísticos: $X = \{s_{x_1}, s_{x_2}, s_{x_3}\} = \{s_2, s_2, s_3\}$ y $Y = \{s_{y_1}, s_{y_2}, s_{y_3}\} = \{s_3, s_1, s_1\}$. Si el conjunto de variables inducidas es $U = (4,9,6)$ y el vector de ponderaciones es $W = (0.2, 0.3, 0.5)$, entonces, el operador LIOWAD se puede calcular de la siguiente manera:

$$\text{LIOWAD} = 0.2 \times |s_2 - s_1| + 0.3 \times |s_3 - s_1| + 0.5 \times |s_2 - s_3| = s_{1.3}.$$

De igual manera que el operador LOWAD, el operador LIOWAD cumple con las propiedades de monotonía, conmutatividad, idempotencia, acotado, reflexividad y no negatividad.

3 ALGORITMO PROPUESTO

El siguiente apartado explica detalladamente los pasos a seguir para resolver problemas de selección de instrumentos complementarios para la jubilación mediante el uso de los operadores de agregación lingüísticos previamente definidos.

3.1 Algoritmo LOWA y ILOWA

La primera opción se basa en aplicar el operador LOWA y el operador ILOWA.

- *Paso 1:* Determinar las distintas alternativas A_k posibles para complementar la pensión pública de jubilación. Es decir, se obtiene el conjunto $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.
- *Paso 2:* El experto tiene que determinar los factores, singularidades o características $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ que se quieren considerar para el análisis y valoración. El decisor debe de considerar varias características para conocer qué producto complementario es el más conveniente, como por ejemplo la edad y el riesgo que está dispuesto a asumir.
- *Paso 3:* El experto tiene que definir el conjunto de etiquetas lingüísticas S y a continuación valorar individualmente las características de cada una de las alternativas.
- *Paso 4:* El experto debe de establecer los valores del vector de ponderaciones $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ así como el de las variables de inducción $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

- *Paso 5:* Llevar a cabo la agregación de la información sobre las valoraciones obtenidas en el Paso 3. Para ello, se utiliza el operador LOWA y el operador ILOWA.

3.2 Algoritmo LOWAD y LIOWAD

La segunda opción consiste en utilizar la distancia de Hamming mediante el operador LOWAD y el operador LIOWAD.

- *Paso 1:* Determinar las distintas alternativas A_k posibles para complementar la pensión pública de jubilación. Es decir, se obtiene el conjunto $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.
- *Paso 2:* El experto tiene que determinar los factores, singularidades o características $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ que se quieren considerar para el análisis y valoración. El decisor debe de considerar varias características para conocer qué producto complementario es el más conveniente, como por ejemplo la edad y el riesgo que está dispuesto a asumir.
- *Paso 3:* El experto tiene que definir el conjunto de etiquetas lingüísticas S y a continuación valorar individualmente las características de cada una de las alternativas.
- *Paso 4:* El experto tiene que establecer el conjunto ideal $I = \{s_{I_1}, s_{I_2}, \dots, s_{I_n}\}$. Además, tiene que calcular las distancias de Hamming entre el conjunto ideal y cada uno de los conjuntos que forman las alternativas A_k .
- *Paso 5:* El experto debe de establecer los valores del vector de ponderaciones $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ así como el de las variables de inducción $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- *Paso 6:* Llevar a cabo la agregación de las distancias obtenidas en el Paso 4. Para ello, se utiliza el operador LOWAD y el operador LIOWAD.

4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

En este apartado se desarrolla un ejemplo ilustrativo para la selección de productos de ahorro para la jubilación mediante la utilización de los operadores de agregación lingüísticos LOWA, ILOWA, LOWAD y LIOWAD.

Suponga que un individuo de 38 años y residente en España contacta con un experto asesor financiero para que le aconseje acerca de que producto de ahorro le conviene más invertir para complementar la pensión pública de jubilación.

4.1 Aplicación del algoritmo LOWA y ILOWA

- *Paso 1:* Suponga que el experto tiene en cuenta las siguientes alternativas:
 - A_1 = plan de pensiones individual.
 - A_2 = plan de previsión asegurado.
 - A_3 = fondo de inversión.
 - A_4 = plan individual de ahorro sistemático.
 - A_5 = unit linked.
 - A_6 = hipoteca inversa.

• *Paso 2:* Asimismo, el experto considera las siguientes características como claves para el análisis:

- C_1 = perfil.
- C_2 = ventajas fiscales.
- C_3 = liquidez.
- C_4 = comisiones.
- C_5 = límite de aportación.

• *Paso 3:* Además, suponga que se define el siguiente conjunto con tres términos lingüísticos: $S = \{s_1 = \text{malo}, s_2 = \text{regular}, s_3 = \text{bueno}\}$. Entonces, considera que el experto valora individualmente los productos para cada una de las características C_i , obteniendo los resultados de la Tabla 1.

Por ejemplo, tanto los planes de pensiones individuales como los planes de previsión asegurados ofrecen ventajas fiscales que permiten reducir la base imponible del impuesto sobre la renta de las personas físicas (IRPF). Pero, ambos también se caracterizan por su escasa liquidez. Además, desde 2021 existe un límite en las aportaciones de 2,000 euros anuales, siendo un importe muy bajo, sobretodo teniendo en cuenta que en 2020 el límite era de 8,000 euros anuales.

Tabla 1. Matriz con las valoraciones iniciales.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	s_3	s_3	s_1	s_2	s_1
A_2	s_2	s_3	s_1	s_2	s_1
A_3	s_3	s_1	s_3	s_2	s_3
A_4	s_3	s_3	s_2	s_2	s_2
A_5	s_3	s_1	s_3	s_2	s_3
A_6	s_1	s_3	s_1	s_1	s_3

Fuente: Elaboración propia.

• *Paso 4:* Para la agregación, el experto decide usar el siguiente vector de ponderaciones: $W = (w_1 = 0.3, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2, w_4 = 0.1, w_5 = 0.1)$. Para el operador ILOWA, el experto decide usar el siguiente vector de variables de ordenación inducida: $U = (u_1 = 9, u_2 = 6, u_3 = 7, u_4 = 5, u_5 = 8)$.

• *Paso 5:* Finalmente, el experto utiliza los operadores LOWA y ILOWA para agregar las valoraciones lingüísticas y así obtener un único valor representativo para cada alternativa de ahorro. Para obtener una visión más completa, el experto también calcula el operador *linguistic weighted averaging* (LWA). El operador LWA se obtiene aplicando la media ponderada. Los resultados agregados se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados agregados LWA, LOWA y ILOWA.

	LWA	LOWA	ILOWA
A_1	$s_{2.3}$	$s_{2.4}$	$s_{1.9}$
A_2	s_2	$s_{2.1}$	$s_{1.6}$

	LWA	LOWA	ILOWA
A_3	$s_{2.3}$	$s_{2.7}$	$s_{2.7}$
A_4	$s_{2.6}$	$s_{2.6}$	$s_{2.4}$
A_5	$s_{2.3}$	$s_{2.7}$	$s_{2.7}$
A_6	$s_{1.8}$	$s_{2.2}$	$s_{1.8}$

Fuente: Elaboración propia.

4.2 Aplicación del algoritmo LOWAD y LIOWAD

- *Paso 1:* Considera las mismas alternativas que en el ejemplo ilustrativo del algoritmo LOWA y ILOWA.
- *Paso 2:* Considera las mismas características que en el ejemplo ilustrativo del algoritmo LOWA y ILOWA.
- *Paso 3:* Considera el mismo conjunto de términos lingüísticos y valoraciones individuales que en el ejemplo ilustrativo del algoritmo LOWA y ILOWA.
- *Paso 4:* Suponga que el experto define el producto ideal $I = \{s_3, s_3, s_3, s_3, s_3\}$ para posteriormente poder calcular las distancias de Hamming. En la Tabla 3 se muestran los resultados de las distancias entre el producto ideal y las distintas alternativas consideradas.

Tabla 3. Matriz con las distancias de Hamming.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$d_H(I, A_1)$	s_0	s_0	s_2	s_1	s_2
$d_H(I, A_2)$	s_1	s_0	s_2	s_1	s_2
$d_H(I, A_3)$	s_0	s_2	s_0	s_1	s_0
$d_H(I, A_4)$	s_0	s_0	s_1	s_1	s_1
$d_H(I, A_5)$	s_0	s_2	s_0	s_1	s_0
$d_H(I, A_6)$	s_2	s_0	s_2	s_2	s_0

Fuente: Elaboración propia.

- *Paso 5:* Considera que el experto decide usar el mismo vector de pesos y de variables de ordenación inducida que en el ejemplo ilustrativo del algoritmo LOWA y ILOWA.
- *Paso 6:* En último lugar, el experto utiliza los operadores ALOWAD, LOWAD y LIOWAD para agregar las distancias y así obtener un único valor representativo para cada una de las seis alternativas de ahorro. Los resultados agregados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Resultados agregados ALOWAD, LOWAD y LIOWAD.

	ALOWAD	LOWAD	LIOWAD
A_1	$s_{0.6}$	$s_{1.4}$	$s_{1.1}$
A_2	$s_{0.9}$	$s_{1.5}$	$s_{1.4}$
A_3	$s_{0.3}$	$s_{0.9}$	$s_{0.3}$
A_4	$s_{0.4}$	$s_{0.8}$	$s_{0.6}$
A_5	$s_{0.3}$	$s_{0.9}$	$s_{0.3}$
A_6	$s_{0.8}$	$s_{1.6}$	$s_{1.2}$

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5 se establece el orden de preferencia para las distintas alternativas en función del operador de agregación lingüístico utilizado. Nótese que para los operadores LWA, LOWA y ILOWA es preferible obtener un resultado elevado, en cambio, para los operadores de distancia sucede lo opuesto. En esta, se puede observar como las opciones menos atractivas para el cliente en cuestión son las de contratar un plan de previsión asegurado o una hipoteca inversa. En cambio, contratar un fondo de inversión, un unit linked o un plan individual de ahorro sistemático, son las alternativas más interesantes y preferibles para el cliente.

Tabla 5. Ordenación de los resultados obtenidos con los operadores.

Operador	Ordenación
LWA	$A_4 > A_1 = A_3 = A_5 > A_2 > A_6$
LOWA	$A_3 = A_5 > A_4 > A_1 > A_6 > A_2$
ILOWA	$A_3 = A_5 > A_4 > A_1 > A_6 > A_2$
ALLOWAD	$A_3 = A_5 > A_4 > A_1 > A_6 > A_2$
LOWAD	$A_4 > A_3 = A_5 > A_1 > A_2 > A_6$
LIOWAD	$A_3 = A_5 > A_4 > A_1 > A_6 > A_2$

Fuente: Elaboración propia.

5 CONCLUSIONES

En el transcurso del presente trabajo se ha estudiado el uso de los operadores LOWA, ILOWA, LOWAD y LIOWAD para la optimización de la toma de decisiones en materia de pensiones. La principal ventaja de estos operadores es que permiten agregar la información lingüística teniendo en cuenta el carácter actitudinal del decisor. Además, los operadores de agregación lingüísticos pueden ser de gran utilidad en aquellas situaciones en donde la información disponible es incierta y no puede ser evaluada mediante valores numéricos exactos.

También se ha desarrollado un ejemplo ilustrativo en donde se utilizan los operadores de agregación lingüísticos para seleccionar el producto de ahorro más conveniente para complementar la pensión pública de jubilación de un individuo determinado. Los resultados evidencian la utilidad del algoritmo LOWA y ILOWA así como el del LOWAD y LIOWAD, dado que se consigue agregar información heterogénea y ambigua y, al mismo tiempo, teniendo en cuenta el grado de optimismo o pesimismo del decisor. Concretamente, la aplicación de estos algoritmos permite mejorar el proceso de toma de decisiones de ahorro para la jubilación y en consecuencia evitar que se origine una pérdida del poder adquisitivo en el momento del retiro.

Como futuras líneas de investigación se plantea aplicar en el ámbito de las pensiones complementarias otras clases de operadores de agregación, tales como el operador *linguistic generalized ordered weighted averaging* (LGOWA) (Merigó y Gil-Lafuente, 2008) y sus extensiones.

REFERENCIAS

- Cheng, M. y Zeng, S. (2012). Decision-making scheme based on LIOWAD. En C. Liu, L. Wang y A. Yang (Eds.), *Information computing and applications*, pp. 236–242. Heidelberg: Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-642-34041-3_34
- Eurostat. (2021). Old-age-dependency ratio [Conjunto de datos]. <https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tps00198/default/table?lang=en>
- Hamming, R. W. (1950). Error detecting and error correcting codes. *Bell System Technical Journal*, 29(2), 147–160. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x>
- Hernández de Cos, P. (2021). El sistema de pensiones en España: Una actualización tras el impacto de la pandemia. *Documentos Ocasionales*, 2106. <https://repositorio.bde.es/handle/123456789/14804>
- Hernández de Cos, P., Ramos, R. y Jimeno, J. F. (2018). The Spanish public pension system: The quest for financial sustainability and equity. *Revista de Economía Aplicada*, 26(76). https://www.revecap.alde.es/revista/numeros/76/76_inv06.html
- Herrera, F. y Herrera-Viedma, E. (1997). Aggregation operators for linguistic weighted information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 27(5), 646–656. <https://doi.org/10.1109/3468.618263>
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E. y Verdegay, J. L. (1995). A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach. *Information Sciences*, 85(4), 223–239. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(95\)00025-K](https://doi.org/10.1016/0020-0255(95)00025-K)
- Instituto Nacional de Estadística. (2021). Tasas de paro por distintos grupos de edad, sexo y comunidad autónoma [Conjunto de datos]. <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=4247>
- Kacprzyk, J., Yager, R. R. y Merigó, J. M. (2019). Towards human-centric aggregation via ordered weighted aggregation operators and linguistic data summaries: A new perspective on Zadeh's inspirations. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 14(1), 16–30. <https://doi.org/10.1109/MCI.2018.2881641>
- Martínez, L. y Herrera, F. (2000). A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6), 746–752. <https://doi.org/10.1109/91.890332>
- Merigó, J. M. y Casanovas, M. (2010). Decision-making with distance measures and linguistic aggregation operators. *International Journal of Fuzzy Systems*, 12(3), 190–198.
- Merigó, J. M. y Gil-Lafuente, A. M. (2008). The linguistic generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Proceedings of the Tenth International*

Conference on Enterprise Information Systems, 219–224.
<https://doi.org/10.5220/0001692102190224>

Merigó, J. M. y Gil-Lafuente, A. M. (2010). New decision-making techniques and their application in the selection of financial products. *Information Sciences*, 180(11), 2085–2094. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.01.028>

Merigó, J. M., Gil-Lafuente, A. M., Zhou, L.G. y Chen, H.Y. (2012). Induced and linguistic generalized aggregation operators and their application in linguistic group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 21(4), 531–549. <https://doi.org/10.1007/s10726-010-9225-3>

Xu, Z. (2004a). A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166(1–4), 19–30. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.10.006>

Xu, Z. (2004b). EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6), 791–810. <https://doi.org/10.1142/S0218488504003211>

Xu, Z. (2006a). Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making. *Information Fusion*, 7(2), 231–238. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.inffus.2004.06.005>

Xu, Z. (2006b). On generalized induced linguistic aggregation operators. *International Journal of General Systems*, 35(1), 17–28. <https://doi.org/10.1080/03081070500422836>

Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1), 183–190. <https://doi.org/10.1109/21.87068>

Yager, R. R. (1992). On generalized measures of realization in uncertain environments. *Theory and Decision*, 33(1), 41–69. <https://doi.org/10.1007/BF00133982>

Yager, R. R. (1996). Constrained OWA aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 81(1), 89–101. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(95\)00242-1](https://doi.org/10.1016/0165-0114(95)00242-1)

Yager, R. R. (2002). Heavy OWA operators. *Fuzzy Optimization and Decision-Making*, 1(4), 379–397. <https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1020959313432>

Yager, R. R. y Filev, D. P. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 29(2), 141–150. <https://doi.org/10.1109/3477.752789>

Zeng, S., Li, W. y Merigó, J. M. (2013). Extended induced ordered weighted averaging distance operators and their application to group decision-making. *International Journal of Information Technology & Decision-Making*, 12(04), 789–811. <https://doi.org/https://doi.org/10.1142/S0219622013500296>