



Contributions à l'homogénéisation des matériaux aléatoires

Karam Sab

► **To cite this version:**

| Karam Sab. Contributions à l'homogénéisation des matériaux aléatoires. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1995. <tel-00554207>

HAL Id: tel-00554207

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00554207>

Submitted on 10 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Mémoire en vue de l'obtention d'une

Habilitation à Diriger des Recherches

par

Karam Sab

soutenue à

Paris le 31 Mai 1995 devant le jury composé de:

Monsieur André Zaoui : président

Monsieur Dominique Jeulin : rapporteur

Monsieur Charles Michel Marle : rapporteur

Monsieur Evariste Sanchez Palencia : rapporteur

Monsieur Patrick de Buhan : examinateur

Monsieur Jean Lemaitre : examinateur

Activités de recherche Sept. 1985 - Sept. 1994

Mécanicien de formation, j'ai effectué ma thèse de doctorat (1985-1988) au Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques Appliquées (CERMA) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), sous la direction de N. Bouleau, Professeur de Probabilités à l'ENPC. Dans le but d'accélérer la convergence des algorithmes stochastiques de type Monte-Carlo, B.Lapeyre, G.Pagès et moi-même avons fait une contribution à la théorie des suites de nombres uniformément répartis sur $[0,1]$, (Lapeyre et al., 1990). Cette étude, qui ne sera pas présentée dans ce mémoire, fait partie des quatre thèmes que j'ai abordés dans ma thèse. Les trois autres thèmes sont consacrés à l'application de la théorie des Probabilités à la Mécanique des Solides.

On peut schématiquement distinguer dans la littérature deux domaines où Probabilités et Mécanique des Solides sont mêlées: la fiabilité des structures et le passage micro-macro dans les matériaux hétérogènes.

Dans le domaine de la fiabilité des structures, il s'agit de tenir compte du caractère aléatoire des propriétés mécaniques d'une structure et des chargements statiques ou dynamiques qu'elle doit supporter. Idéalement, cette prise en compte doit conduire à une estimation de la probabilité de ruine de la structure, et par conséquent, à des règles de dimensionnement plus fondées. J'ai mené dans ce cadre au cours de ma thèse une étude (Sab, 1986) sur le calcul à la rupture probabiliste des structures discrètes (treillis, assemblages de poutres,...) qui s'inscrit dans la suite du travail de (Carmasol & Salençon, 1985).

Quant au passage micro-macro dans les matériaux hétérogènes, sa problématique est totalement différente. Il s'agit d'étudier les propriétés mécaniques globales (souvent déterministes!) de ces matériaux en fonction de celles de leurs constituants.

Mon principal axe de recherche est l'étude du passage micro-macro dans les matériaux à microstructure aléatoire.

L'objet de ce mémoire est de présenter mon activité dans ce domaine. Elle a débuté lors de ma thèse, et elle s'est développée et a pris forme au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux (CERAM) de l'ENPC que j'ai rejoint en 1988, à mi-temps jusqu'en 1989, puis à temps plein depuis.

Par ailleurs, j'ai encadré deux thèses qui se sont déroulées au CERAM:
-celle de I.Laalai (Laalai, 1993) sur les effets d'échelle dans les matériaux hétérogènes quasi-fragiles, et
-celle de H.Zenzri (Zenzri, 1992) sur l'endommagement des chaussées bitumineuses.

La thèse de I.Laalai s'inscrit dans le cadre du passage micro-macro dans les milieux aléatoires. Ses principales motivations et conclusions sont exposées au chapitre 5.

En revanche, la thèse de H.Zenzri sort de ce cadre. Elle résulte d'un contrat avec le LCPC qui a bénéficié du soutien du GRECO Géomatériaux, du Ministère de la Recherche et de la société COLAS. J'ai piloté à l'occasion de cette recherche, qui est en partie publiée dans (Sab & Zenzri, 1990-1991-1992), un groupe de travail du GRECO Géomatériaux sur le thème des chaussées (années 1990 et 1991). Bien que j'apprécie ce thème pour son aspect industriel (direction d'une nouvelle thèse CIFRE avec la COLAS à partir de Sept. 1994), j'ai préféré ne pas l'aborder dans ce mémoire.

Je signale, enfin, que durant l'année 1988-1989, j'ai fait partie à mi-temps du Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols (CERMES) de l'ENPC où j'ai participé à la modélisation d'un instrument de mesure *in situ* appelé pressiomètre. Cette recherche a donné lieu à quelques communications dans des congrès nationaux et internationaux, (Dormieux et al., 1989), (Canou et al., 1991), (Saitta et al., 1991) et (Saitta et al., 1992). Elle ne sera pas abordée ici non plus.

Introduction

Un même matériau peut être considéré comme homogène ou hétérogène selon l'échelle à laquelle on l'observe. A l'échelle du centimètre, le béton est hétérogène: on distingue bien les agrégats de la pâte de ciment qui les enrobe. Alors que, à l'échelle d'un ouvrage de génie civil, on ne distingue pas les hétérogénéités du matériau qui doit être modélisé comme un milieu homogène.

Un même matériau est décrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus par deux modèles: l'un à l'échelle dite microscopique où le comportement du matériau est hétérogène; et l'autre à l'échelle dite macroscopique où le comportement du matériau est homogène. L'homogénéisation a pour objet l'étude des relations entre ces deux modèles, et en particulier, la détermination du comportement à l'échelle macroscopique en fonction de celui à l'échelle microscopique.

L'homogénéisation est un changement d'échelle qui présuppose une modélisation réaliste et simple à l'échelle microscopique. Son application à des matériaux qui nécessitent une modélisation trop complexe à cette échelle est déconseillée. Pour de tels matériaux, il vaut mieux identifier la loi macroscopique directement par la voie phénoménologique classique.

Pour certains matériaux, l'intérêt d'une démarche déductive de type homogénéisation est de mieux comprendre leur comportement tant du point de vue qualitatif que quantitatif. On peut généralement déduire la nature du comportement macroscopique en fonction du comportement microscopique, sans toujours parvenir à un calcul explicite des paramètres macroscopiques en fonction des paramètres microscopiques. C'est ainsi que l'on explique l'érouissage cinématique dans les métaux par l'incompatibilité cinématique des déformations plastiques microscopiques.

L'homogénéisation et la méthode phénoménologique classique sont des démarches complémentaires qui n'ont pas à être opposées. La première est déductive alors que la seconde est inductive.

Afin de situer mes travaux sur l'homogénéisation des matériaux à microstructure aléatoire, je rappelle ici que la détermination du comportement macroscopique en fonction du comportement microscopique se fait classiquement (Hill, 1963) en postulant l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau soumis sur son bord à des conditions limites homogènes en contrainte ou homogènes en déformation. Le comportement macroscopique est alors la relation entre la moyenne volumique des contraintes et la moyenne volumique des déformations dans le VER. Quant à la taille du VER, elle doit être suffisamment grande à l'échelle microscopique pour décrire l'hétérogénéité, et suffisamment petite à l'échelle macroscopique pour que les champs mécaniques calculés avec le modèle macroscopique soient très peu variables dans le

VER. Concrètement, cette taille est la taille minimale d'une éprouvette servant à la détermination expérimentale du comportement à l'échelle macroscopique.

Le concept de VER a été initialement proposé pour l'élasticité linéaire, puis il a été appliqué ultérieurement à d'autres comportements de la microstructure (élasticité non linéaire, élasto-plasticité, analyse limite, ...).

Mis à part quelques cas très rares, la résolution analytique du problème aux limites défini sur le VER n'est pas possible. Ceci a conduit au développement des méthodes approchées analytiques ou semi-analytiques (schéma de la distribution diluée, schéma auto-cohérent et toutes ses variantes, schéma différentiel,...), des méthodes d'encadrement (bornes de Voigt et Reuss, bornes de Hashin-Shtrickman et toutes leurs variantes, bornes en fonction des corrélations statistiques d'ordre supérieur,...) et enfin, des méthodes numériques qui s'appliquent lorsque la distribution des hétérogénéités est périodique (calcul par éléments finis sur des cellules de base soumises sur leur bord à des conditions de périodicité, séries de Fourier, utilisation des fonctions de la variable complexe dans le plan,...). Pour une bibliographie abondante sur ce sujet, on peut consulter l'ouvrage récent de (Nemat-Nasser & Hori, 1993).

Avec les progrès rapides de l'informatique, il est devenu possible de résoudre numériquement le problème aux limites défini sur le VER (au moins dans le cas bidimensionnel): on simule la distribution aléatoire des hétérogénéités dans le VER, puis on résout numériquement le problème, par exemple par la méthode des éléments finis. Naturellement, le résultat de ce calcul dépend *a priori* de la simulation effectuée. La question centrale qui se pose alors est celle de la valeur scientifique de cette simulation: Quelle confiance doit-on accorder aux résultats numériques obtenus? Quelles sont les hypothèses statistiques à faire pour que la notion de VER ait un sens? Avec quelles conditions limites sur le VER faut-il faire le calcul? Comment évaluer sa taille? ...

La principale motivation de mes travaux sur l'homogénéisation des matériaux à microstructure aléatoire est de proposer des méthodes de calcul par simulation numérique qui soient rigoureusement justifiées.

Ces travaux peuvent être divisés schématiquement en deux catégories:

Théoriques. Des études portant sur l'élasticité non linéaire et l'analyse limite s'inscrivent dans le cadre de la théorie mathématique de l'homogénéisation. Voir (Attouch, 1987-88) et (Kozlov *et al.*, 1994) pour une bibliographie sur cette théorie. Les principaux résultats obtenus sont: l'utilisation des progrès récents de la théorie ergodique pour une justification mathématique rigoureuse et simple du concept de VER, l'obtention de bornes qui généralisent celles de Voigt et Reuss et enfin, un théorème d'homogénéisation en analyse limite pour les milieux statistiquement homogènes et ergodiques (SHE) qui est démontré grâce à une analogie formelle entre ces milieux et les milieux périodiques. Cette analogie permet de définir le comportement macroscopique en se référant non pas à un VER borné (dont la taille tend vers l'infini) auquel on applique un chargement sur son bord, mais en se référant directement au milieu infini tout entier.

Numériques. Des applications directes des résultats théoriques précédents dans lesquelles je propose des techniques de calcul par simulation numérique du

comportement macroscopique élastique et en analyse limite des milieux à microstructure aléatoire.

Par ailleurs, à l'occasion de la thèse de I. Laalai que j'ai encadrée, j'ai abordé le passage micro-macro lorsque le matériau est endommageable à l'échelle microscopique. Dans ce cas, le concept de VER pose quelques difficultés théoriques et numériques.

On parle d'effets d'échelle dans un matériau lorsque ses propriétés mécaniques (contrainte de rupture en traction simple, facteur d'intensité de contrainte critique,...) dépendent de la taille de l'éprouvette qui sert à les identifier expérimentalement. C'est ainsi que plusieurs auteurs ont mis en évidence la dépendance de la contrainte de rupture du béton dans une expérience de traction simple en fonction du volume des éprouvettes testées. De même, un effet d'échelle sur le facteur d'intensité de contrainte critique du béton a été mis en évidence expérimentalement. Voir, par exemple, (Mazars *et al.*, 1991) pour une bibliographie sur le sujet.

Deux explications des effets d'échelle peuvent être avancées. Ou bien il existe un VER du matériau ¹ dont la taille est plus grande que celle des éprouvettes testées, ou bien le VER n'existe pas.

Afin de rendre compte des phénomènes de rupture et d'effets d'échelle dans les matériaux hétérogènes quasi-fragiles (bétons, roches, céramiques,...), nous avons proposé des modèles *numériques* où le comportement à l'échelle microscopique est élastique-fragile obéissant à un critère de rupture non local dont le seuil est aléatoire. Contrairement à mes études théoriques sur l'homogénéisation en élasticité non linéaire et en analyse limite, ces modèles n'ont pas reçu à ce jour de justification mathématique. Leurs principaux apports sont: la simplicité, l'indépendance des résultats par rapport au maillage, un accord (qualitatif pour l'instant) avec les résultats expérimentaux, et enfin l'obtention d'un comportement radoucissant à l'échelle macroscopique.

Ce mémoire s'articule en cinq chapitres. Dans les quatre premiers chapitres, le comportement à l'échelle microscopique est élastique non linéaire ou rigide parfaitement plastique.

Le premier chapitre est consacré à la relation entre le concept de VER et la théorie mathématique de l'homogénéisation (déterministe). On donne une définition simple et rigoureuse d'un *milieu homogénéisable* qui s'appuie sur la notion de VER, et on utilise la théorie mathématique de l'homogénéisation pour répondre à la question du choix des conditions limites qu'il faut appliquer au VER.

Dans le deuxième chapitre, on présente un cadre probabiliste pour la modélisation des milieux aléatoires SHE. On énonce dans ce cadre une version du théorème sous-additif de la théorie ergodique qui sera appliquée par la suite.

Le troisième chapitre aborde l'homogénéisation des milieux SHE par deux méthodes différentes: l'application du théorème sous-additif énoncé dans le deuxième chapitre, d'une part, et l'analogie entre milieux SHE et milieux périodiques, d'autre part. On montre que chaque réalisation ² d'un matériau SHE est homogénéisable au sens du premier chapitre et on donne des bornes qui généralisent celles de Voigt et Reuss.

Quant au quatrième chapitre, il contient quelques méthodes de simulation numériques qui s'appuient sur les résultats théoriques des chapitres précédents.

Enfin, le cinquième chapitre est consacré au passage micro-macro dans les matériaux hétérogènes quasi-fragiles.

¹Concernant le phénomène de rupture

²Avec une probabilité égale à un.

Chapitre 1

Volume élémentaire représentatif et théorie mathématique de l'homogénéisation

L'objet de ce chapitre est de faire le lien entre le concept de VER dans les milieux hétérogènes (déterministes) élastiques non linéaires ou rigides parfaitement plastiques, et la théorie mathématique de l'homogénéisation. La première partie fixe les notations et les hypothèses pour toute la suite. On rappelle dans la deuxième partie le concept de volume élémentaire représentatif introduit par (Hill, 1963). Puis, on aborde dans la troisième partie les milieux périodiques. Quant à la quatrième partie, elle est consacrée à l'énoncé des principaux résultats de la théorie mathématique de l'homogénéisation dans le cas déterministe. On s'appuie sur cette théorie pour donner dans la cinquième partie une définition simple et rigoureuse d'un matériau homogénéisable. Enfin, on aborde la question des conditions limites mixtes dans la dernière partie.

1) Notations et Hypothèses

Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, l'homogénéisation est un changement d'échelle. On suppose le comportement connu à l'échelle microscopique et on veut en déduire le comportement à l'échelle macroscopique. Afin d'éviter des problèmes de bord, il est commode de modéliser le matériau à l'échelle microscopique comme *un milieu infini dont le comportement est connu en tout point*.

On se place dans toute la suite dans l'hypothèse des petites perturbations, on suppose que les constituants sont parfaitement adhérents et que le comportement en un point arbitraire du milieu, \underline{y} , est régi par un potentiel, $\phi(\underline{y}, \underline{\underline{\varepsilon}})$, fonction convexe du tenseur de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Le milieu est ainsi caractérisé par la donnée de ϕ qui est une application de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^s$ dans \mathbf{R}_+ où l'espace de dimension d ($d=2$ ou 3) est identifié à \mathbf{R}^d , et l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux de \mathbf{R}^d est identifié à \mathbf{R}^s avec $s = (d^2 + d)/2$. On suppose de plus que ϕ vérifie les conditions suivantes:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, & \phi(\cdot, \underline{\underline{\varepsilon}}) \text{ est mesurable} \\ \forall \underline{y}, & \phi(\underline{y}, \cdot) \text{ est convexe et vérifie} \\ & a_1 |\underline{\underline{\varepsilon}}|^p \leq \phi(\underline{y}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \leq a_2 |\underline{\underline{\varepsilon}}|^p \end{cases}$$

où $1 \leq p < \infty$, $a_2 \geq a_1 > 0$ sont des constantes positives ¹.

Cet encadrement exclut la présence de cavités et de particules parfaitement rigides dans le milieu. Lorsque de telles hétérogénéités sont présentes, il convient d'adapter la

¹Dans (1.1), il suffit d'avoir la convexité et l'encadrement pour tout \underline{y} presque partout.

démarche exposée ci-dessous, notamment en ce qui concerne la définition des champs de déplacement cinématiquement admissibles et des champs de contrainte statiquement admissibles.

A ma connaissance, c'est à (Marcellini, 1978) qu'on doit la première étude d'homogénéisation sur des milieux (périodiques) non linéaires où une hypothèse d'"équi-coercitivité" analogue à (1.1) est postulée.

Le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\sigma}}$, est donné par la formule:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}.$$

De façon duale, si

$$\phi^*(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\sigma}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Sup}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \phi(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \}$$

désigne la fonction conjuguée de $\phi(\underline{\underline{y}}, \cdot)$, c.-à-d. sa transformée de Legendre-Fenchel, alors $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est donné par la formule:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}.$$

L'élasticité linéaire correspond à des potentiels quadratiques définis positifs de la forme:

$$(1.2) \quad \phi(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{r}}(\underline{\underline{y}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \phi^*(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{s}}(\underline{\underline{y}}) : \underline{\underline{\sigma}}$$

où $\underline{\underline{r}}$ et $\underline{\underline{s}} (= \underline{\underline{r}}^{-1})$ sont, respectivement, les tenseurs de rigidité et de souplesse élastique. L'exposant p de l'encadrement (1.1) est alors égal à 2.

L'analyse limite et le calcul à la rupture (Salençon, 1983) correspondent à un potentiel ϕ positivement homogène en $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$(1.3) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \phi(\underline{\underline{y}}, t\underline{\underline{\varepsilon}}) = |t| \phi(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\varepsilon}})$$

Il existe alors en tout point $\underline{\underline{y}}$ un domaine de résistance convexe, noté $G(\underline{\underline{y}})$, tel que $\phi(\underline{\underline{y}}, \cdot)$ et $\phi^*(\underline{\underline{y}}, \cdot)$ soient, respectivement, la fonction d'appui et la fonction indicatrice du domaine de résistance $G(\underline{\underline{y}})$:

$$(1.3') \quad \phi(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{Sup}_{\underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{\underline{y}})} \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \} \quad \phi^*(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\sigma}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{\underline{y}}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'encadrement (1.1) est alors valable avec $p=1$. Il signifie que $G(\underline{y})$ contient la boule de \mathbf{R}^s de rayon a_1 , et qu'il est contenu dans la boule de rayon a_2 . Autrement dit,

$$|\underline{\underline{\sigma}}| \leq a_1 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{y}), \quad \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{y}) \Rightarrow |\underline{\underline{\sigma}}| \leq a_2$$

En pratique, l'encadrement (1.1) peut s'appliquer à des domaines de Tresca ou Von-Mises en contrainte plane. Autrement, les domaines de résistance les plus courants comme ceux de Von-Mises et de Tresca en 3-D ou en déformation plane ne portent que sur la partie déviatorique de la contrainte, c'est à dire: $\underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{y}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{\text{dev}} \in G(\underline{y})$ où $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{dev}} = \underline{\underline{\sigma}} - (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}/d)\mathbf{I}$ est la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$. Dans ces conditions, l'encadrement dans (1.1) est remplacé par:

$$(1.1') \quad \begin{cases} \phi(\underline{y}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = +\infty & \text{si } \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0 \\ a_1 |\underline{\underline{\varepsilon}}| \leq \phi(\underline{y}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \leq a_2 |\underline{\underline{\varepsilon}}| & \text{si } \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \end{cases}$$

Ce qui signifie:

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{\text{dev}}| \leq a_1 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{y}), \quad \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{y}) \Rightarrow |\underline{\underline{\sigma}}^{\text{dev}}| \leq a_2.$$

Voir à ce sujet (Friaâ, 1979), (Temam, 1983), (Demangel & Qi, 1986).

2) Volume élémentaire représentatif

Afin de définir le comportement macroscopique du milieu dont la microstructure est caractérisée par ϕ , (Hill, 1963) a proposé au début des années 60 le concept de Volume Élémentaire Représentatif (VER). Ce concept a été initialement introduit dans le cas de l'élasticité linéaire. L'idée est la suivante: on suppose que le milieu peut être caractérisé à l'échelle macroscopique par un comportement *homogène* dérivant du potentiel convexe Φ_{hom} ; puis, on soumet un volume V à des conditions limites qui sont telles qu'un comportement homogène dans V conduise à des champs de contrainte et de déformation uniformes dans V . On calcule l'énergie de déformation mise en jeu dans ce chargement en supposant successivement que le comportement dans V est régi par ϕ , puis par Φ_{hom} . On dit que V est un VER lorsque l'énergie de déformation ainsi calculée avec les deux potentiels est sensiblement la même. Ceci permet alors la détermination de Φ_{hom} en fonction de ϕ .

On distingue classiquement deux types de conditions limites: homogènes en déformation et homogènes en contrainte.

Dans l'approche en déformation, le comportement global d'un domaine borné V de \mathbf{R}^d (de bord ∂V suffisamment régulier) est régi par le potentiel $\Phi_V^{\text{dc}}(\underline{\underline{E}})$, fonction convexe du tenseur de déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$, défini par le problème aux limites suivant:

$$(1.4) \quad \Phi_V^{\text{dc}}(\underline{\underline{E}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\underline{\underline{u}}} \left\{ \left\langle \phi(\underline{y}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y})) + \underline{\underline{E}} \right\rangle_V, \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \text{ avec } \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial V \right\}$$

où $\langle \cdot \rangle_V$ désigne la moyenne volumique sur V , $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}})$ est le champ de déformation associé au champ de déplacement $\underline{\underline{u}}$, et l'infimum porte sur les $\underline{\underline{u}}$ de classe C^∞ nuls au bord.

Dans l'approche en contrainte, le comportement global de V est régi par le potentiel $\Phi_V^{\text{co}}(\underline{\underline{E}})$ dont le potentiel conjugué, $\Phi_V^{\text{co}*}(\underline{\underline{\Sigma}})$, est la fonction convexe du tenseur de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ définie par le problème aux limites suivant:

$$(1.5) \quad \Phi_V^{\text{co}*}(\underline{\underline{\Sigma}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Inf}_{\underline{\underline{\sigma}}} \left\{ \left\langle \phi^*(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}}) + \underline{\underline{\Sigma}}) \right\rangle_V, \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ avec } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0 \text{ sur } \partial V \right\}$$

Ici, $\underline{\underline{n}}$ est la normale sortante à ∂V et l'infimum porte sur les champs de contrainte bornés qui vérifient $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$, $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0$ sur ∂V dans le sens: $\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) dv = 0$ pour tout $\underline{\underline{u}}$ de classe C^∞ .

En particulier, lorsqu'il s'agit d'élasticité linéaire, les approches en déformation et en contrainte permettent de définir les tenseurs d'élasticité et de souplesse $\left(\underline{\underline{R}}_V^{\text{dc}}, \underline{\underline{S}}_V^{\text{dc}} \right)$ et $\left(\underline{\underline{R}}_V^{\text{co}}, \underline{\underline{S}}_V^{\text{co}} \right)$ correspondant à Φ_V^{dc} et Φ_V^{co} , respectivement.

De même, lorsqu'il s'agit d'analyse limite, les approches en déformation et en contrainte permettent de définir les domaines de résistance G_V^{dc} et G_V^{co} correspondant à Φ_V^{dc} et Φ_V^{co} , respectivement.

Des arguments classiques d'analyse convexe (Temam, 1983) montrent qu'on a les inégalités suivantes:

$$(1.6) \quad \forall \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}} \quad \Phi_V^{\text{co}}(\underline{\underline{E}}) \leq \Phi_V^{\text{dc}}(\underline{\underline{E}}) \quad \text{et} \quad \Phi_V^{\text{co}*}(\underline{\underline{\Sigma}}) \geq \Phi_V^{\text{dc}*}(\underline{\underline{\Sigma}})$$

Voir (Ponté-Castaneda & Willis, 1988), par exemple.

D'après la démarche initiale de (Hill, 1963), lorsque le volume V est "représentatif" du milieu, le même comportement global est obtenu par les deux approches en déformation et en contrainte, c'est-à-dire,

$$\forall \underline{\underline{E}} \quad \Phi_V^{\text{co}}(\underline{\underline{E}}) \approx \Phi_V^{\text{dc}}(\underline{\underline{E}}) \approx \Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$$

Comme on le verra ci-dessous, on peut donner un sens précis à cette relation dans le cas de l'élasticité non linéaire. En revanche, s'agissant de l'analyse limite cette relation qui traduit l'équivalence (asymptotique) des approches en contrainte et en déformation n'est plus vraie (de Buhan, 1986). La "bonne" définition dans ce cas doit faire appel à l'approche en déformation.

3) Milieux périodiques

Un matériau hétérogène est périodique lorsqu'il existe une cellule parallélépipédique $Y =]0, b_1[\times \dots \times]0, b_d[$, dite de base, dont la répétition dans l'espace forme le milieu. Un champ $\underline{y} \mapsto f(\underline{y})$ est Y -périodique, ou périodique lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, s'il vérifie la relation:

$$(1.7) \quad \forall \underline{k} \in \mathbf{Z}^d, \quad \forall \underline{y} \in \mathbf{R}^d \quad f(\underline{y}) = f(\underline{y} + \underline{k} \cdot \underline{b})$$

où $\underline{b} = (b_i)$ est le vecteur période.

On dit que le milieu caractérisé par ϕ est Y -périodique si, pour tout $\underline{\varepsilon}$, le champ $\underline{y} \mapsto \phi(\underline{y}, \underline{\varepsilon})$ est Y -périodique. En particulier, lorsqu'il s'agit d'élasticité linéaire le champ des tenseurs d'élasticité $\underline{y} \mapsto \underline{\underline{r}}(\underline{y})$ est Y -périodique, et lorsqu'il s'agit d'analyse limite le champ des domaines de résistance $\underline{y} \mapsto G(\underline{y})$ est Y -périodique, c.-à-d. $G(\underline{y}) = G(\underline{y} + \underline{k} \cdot \underline{b}) \quad \forall \underline{k} \in \mathbf{Z}^d, \quad \forall \underline{y} \in \mathbf{R}^d$.

L'intérêt des milieux périodiques est qu'on peut se ramener à l'étude de la seule cellule de base Y . En effet, on peut considérer dans ce cas que le VER est un domaine qui contient un très grand nombre de cellules de telle sorte que les champs de contrainte et de déformation solutions du problème aux limites (1.4) soient pratiquement périodiques sauf près du bord (Sanchez-Palencia, 1974). En négligeant ces effets de bord, la moyenne du potentiel sur le VER est pratiquement égale à la moyenne sur la cellule de base. On se ramène à l'étude de la seule cellule de base Y à condition de lui imposer des conditions de périodicité sur son bord. Le potentiel $\Phi_Y^{pc}(\underline{\underline{E}})$ est alors défini par la formule (1.4) dans laquelle V est remplacé par Y , et les conditions aux limites homogènes en déformation sont remplacées par les conditions de périodicité qui stipulent que le champ de déplacement test de classe C^∞ , \underline{u} , doit prendre des valeurs égales en des points situés sur des faces opposées de Y .

$$(1.8) \quad \Phi_Y^{pc}(\underline{\underline{E}}) \stackrel{\text{dét}}{=} \inf_{\underline{u}} \left\{ \left\langle \phi(\underline{y}, \underline{\varepsilon}(\underline{y}) + \underline{\underline{E}}) \right\rangle_Y, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \text{ avec } \underline{u} \text{ périodique} \right\}$$

En particulier, lorsqu'il s'agit d'élasticité linéaire, Φ_Y^{pc} permet de définir le tenseur d'élasticité correspondant $\underline{\underline{R}}_Y^{pc}$, et lorsqu'il s'agit d'analyse limite, Φ_Y^{pc} permet de définir le domaine de résistance correspondant G_Y^{pc} .

On établit par ailleurs par des arguments de dualité que le potentiel conjugué de Φ_Y^{pc} , noté Φ_Y^{pc*} , est donné par la formule (1.5) dans laquelle V est remplacé par Y , et les conditions aux limites homogènes en contrainte sont remplacées par la condition $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_Y = 0$ et "l'antipériodicité" du vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ qui doit prendre des valeurs opposées en des points situés sur des faces opposées de Y .

$$(1.9) \quad \Phi_Y^{pc*}(\underline{\Sigma}) = \text{Inf}_{\underline{\sigma}} \left\{ \left\langle \phi^*(\underline{y}, \underline{\sigma}(\underline{y}) + \underline{\Sigma}) \right\rangle_Y, \text{div} \underline{\sigma} = 0, \left\langle \underline{\sigma} \right\rangle_Y = 0 \text{ et } \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ antipériodique} \right\}$$

L'infimum dans (1.9) concerne les champs de contrainte bornés.

La propriété suivante est essentielle pour établir (1.9). "Lemme de Hill généralisé": le champ de contrainte borné $\underline{\sigma}$ vérifie les conditions $\text{div} \underline{\sigma} = 0$, $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ antipériodique si, et seulement si, pour tout champ de déplacement test Y -périodique de classe C^∞ , \underline{u} , on a:

$$(1.10) \quad \left\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \right\rangle_Y = 0$$

Voir (Suquet, 1982), (Attouch, 1984a) et (Bouchitté, 1986-87).

4) La théorie mathématique de l'homogénéisation

Initialement destinée aux milieux linéaires à microstructure périodique, cette théorie développée à partir du milieu des années 70, a pour objet principal la justification du processus de l'homogénéisation. Elle ne se préoccupe pas en général du calcul des coefficients homogénéisés. Le problème qu'elle se propose de traiter est le suivant: Si on substitue dans un problème aux limites bien posé portant le matériau périodique caractérisé par ϕ le matériau hétérogène par le matériau homogène équivalent caractérisé par Φ_Y^{pc} , quelles sont les relations entre les champs physiques calculés avec le matériau hétérogène (champs microscopiques) et ceux calculés avec le matériau homogène équivalent (champs macroscopiques)?

Intuitivement, on peut dire que les champs macroscopiques sont une approximation des champs microscopiques qui est d'autant plus valable que la taille des hétérogénéités est petite par rapport à la taille de la structure. Pour traduire ceci mathématiquement, on fait apparaître les champs macroscopiques comme la limite des champs microscopiques, quand la taille des hétérogénéités tend vers zéro. Ainsi, les principaux résultats de la théorie mathématique de l'homogénéisation sont donnés sous forme de théorèmes de convergence que nous énonçons tout d'abord dans le cas périodique.

4.1) Milieux périodiques

On se donne un domaine arbitraire borné D de bord suffisamment régulier ∂D soumis à un chargement donné. On va décrire le comportement avec deux modèles différents: un modèle microscopique hétérogène et un modèle macroscopique homogène. Dans le modèle microscopique, la loi de comportement qui règne dans D dérive du potentiel ϕ_δ défini à partir de ϕ par une dilatation de l'espace autour du point origine:

$$(1.11) \quad \forall \underline{x}, \underline{\varepsilon} \quad \phi_\delta(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) = \phi(\underline{x}/\delta, \underline{\varepsilon})$$

où $\delta > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers 0.

Noter que ϕ_δ est périodique de vecteur période $\delta \underline{b}$. Donc, la taille des hétérogénéités est multipliée par δ . Lorsque ce paramètre tend vers 0, les hétérogénéités sont de plus en plus (ou infiniment) petites par rapport à la structure considérée. Quant à la loi de comportement du modèle macroscopique, elle dérive du potentiel homogénéisé Φ_Y^{pc} .

Pour un même chargement donné sur D , la question est de comparer les solutions obtenues avec les deux modèles. Il convient de séparer ici l'élasticité ($p > 1$ dans (1.1)) de l'analyse limite ($p = 1$ dans (1.1) ou (1.1'), et (1.3)) qui est plus délicate à traiter notamment du fait de la présence éventuelle de discontinuités plastiques.

4.1.1) Elasticité

Par soucis de clarté, on présente le cas particulier des milieux élastiques ayant un potentiel ϕ strictement convexe en tout point du milieu. Cette hypothèse supplémentaire assure l'unicité de la solution d'un problème élastique bien posé, ainsi que l'unicité des solutions des problèmes (1.8) et (1.9).

On suppose que le domaine D est soumis à des forces de masse et à des conditions limites complémentaires en contrainte et en déplacement sur ∂D qui garantissent un problème élastique bien posé.

Il existe alors une solution unique au problème élastique défini avec ϕ_δ . Et, il existe une solution unique au problème élastique défini avec Φ_Y^{pc} . On note par $(\underline{\sigma}_\delta, \underline{\varepsilon}_\delta, \underline{u}_\delta, W_\delta)$ et $(\underline{\sigma}_{\text{hom}}, \underline{\varepsilon}_{\text{hom}}, \underline{u}_{\text{hom}}, W_{\text{hom}})$ les champs de contrainte, de déformation, de déplacement et l'énergie potentielle solutions des deux problèmes, respectivement.

Par exemple, dans le cas linéaire et lorsque les conditions limites sont des conditions d'encastrement, ces deux problèmes d'élasticité linéaire s'écrivent:

$$\mathcal{PEL}_\delta \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}_\delta + \underline{f} = 0 \\ \underline{\sigma}_\delta = \underline{r}_{\underline{\varepsilon}_\delta} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}_\delta) \\ \underline{u}_\delta = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{PEL}_{\text{hom}} \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}_{\text{hom}} + \underline{f} = 0 \\ \underline{\sigma}_{\text{hom}} = \underline{R}_{\underline{\varepsilon}_{\text{hom}}}^{pc} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}_{\text{hom}}) \\ \underline{u}_{\text{hom}} = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{cases}$$

où \underline{f} désigne les forces de masse (indépendantes de δ) et $\underline{r}_{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{r}(\underline{x}/\delta)$.

Le principal résultat de la théorie mathématique de l'homogénéisation est de montrer que, lorsque δ tend vers 0^+ , $(\underline{\sigma}_{\text{hom}}, \underline{\varepsilon}_{\text{hom}}, \underline{u}_{\text{hom}}, W_{\text{hom}})$ est la limite de $(\underline{\sigma}_\delta, \underline{\varepsilon}_\delta, \underline{u}_\delta, W_\delta)$ dans le sens suivant:

$$(1.12) \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_D |\underline{u}_{\text{hom}} - \underline{u}_\delta|^p \, dv = 0 & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} W_\delta = W_{\text{hom}} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_D (\underline{\varepsilon}_{\text{hom}} - \underline{\varepsilon}_\delta) \varphi \, dv = 0 & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_D (\underline{\sigma}_{\text{hom}} - \underline{\sigma}_\delta) \varphi \, dv = 0 & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_D (\underline{\sigma}_{\text{hom}} : \underline{\varepsilon}_{\text{hom}} - \underline{\sigma}_\delta : \underline{\varepsilon}_\delta) \varphi \, dv = 0 \end{cases}$$

pour toute fonction réelle φ de classe C^∞ à support compact dans D .

Ce résultat s'interprète de la façon suivante: en un point \underline{x} de D , $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hom}}(\underline{x})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{hom}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hom}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{hom}}(\underline{x})$ sont sensiblement égaux à la moyenne de $\underline{\underline{\sigma}}_{\delta}(\underline{x})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\delta}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}_{\delta}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\delta}(\underline{x})$, respectivement, sur un volume centré en \underline{x} dont la taille est suffisamment petite pour que les champs $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hom}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{hom}}$ y soient pratiquement constants, et suffisamment grande par rapport à la taille des hétérogénéités (c'est à dire δ) pour que la convergence (1.12) ait lieu en prenant pour φ une masse (pratiquement) uniformément répartie sur ce volume. Dans ces conditions, $\underline{u}_{\text{hom}}(\underline{x})$ est pratiquement égal à $\underline{u}_{\delta}(\underline{x})$ et W_{hom} est pratiquement égal à W_{δ} .

Beaucoup d'auteurs ont participé à la démonstration de résultats analogues à (1.12) par des techniques mathématiques différentes. En grande partie, ces résultats ont été établis pour l'homogénéisation des propriétés thermiques (conductivité) des milieux hétérogènes. Leur extension aux propriétés mécaniques est généralement aisée. On peut citer, entre autres, les travaux de Marcellini, De Giorgi & Spagnolo, Mosco, Dal-Maso & Modica,... en Italie, de Sanchez-Palencia, Murat & Tartar, Attouch, Lions, Bensoussan, Suquet,... en France, de Varadhan, Bachvalov, Zeldovitch, Zhikov, Kozlov,... en ex-URSS. Nous renvoyons aux ouvrages suivants pour une bibliographie plus détaillée (Bensoussan et al., 1978), (Sanchez-Palencia, 1980), (Attouch, 1984b), (Kozlov et al., 1994).

4.1.2) Analyse Limite

Malgré l'analogie formelle entre ces deux comportements, l'analyse limite diffère de l'élasticité non linéaire du fait des discontinuités plastiques. La présence éventuelle de ces discontinuités a nécessité l'introduction de nouveaux espaces fonctionnels délicats à manier, et dans lesquels la solution en déplacement n'est pas unique (Suquet, 1978) (Strang, 1978). C'est pour cette raison que les théorèmes d'homogénéisation en analyse limite sont plus tardifs que ceux en élasticité non linéaire et ne sont valables que pour des conditions limites libres en contrainte (Zhikov, 1985), (Bouchitté, 1986-1987), (Demangel & Qi, 1986 et 1990).

Pour être précis, introduisons les définitions suivantes: soit D un domaine borné de bord ∂D suffisamment régulier soumis à des conditions limites classiques portant de façon complémentaire sur des composantes du vecteur déplacement et des composantes du vecteur contrainte. On dit que D est soumis à des conditions limites cinématiques (CLC) si certaines composantes du déplacement sont effectivement données sur une partie non vide du bord et si toutes les données complémentaires sur les composantes du vecteur contrainte sont nulles. On dit que D est soumis à des conditions limites cinématiques nulles (CLCN) si, de plus, toutes les données cinématiques sur le bord sont nulles.

Les théorèmes d'homogénéisation concernent essentiellement deux types de problème.

Type I

On se donne un domaine arbitraire borné D de bord suffisamment régulier ∂D , soumis à des forces de masse \underline{f} et à des CLCN. On définit les charges limites λ_{δ} et λ_{hom} à l'aide de l'approche par l'extérieur:

$$(1.13) \quad \lambda_\delta = \text{Inf} \left\{ \int_D \phi_\delta(\underline{x}, \underline{\varepsilon}(\underline{u})) \, dv, \quad \underline{u} \text{ vérifie les CLCN et } \int_D \underline{f} \cdot \underline{u} \, dv = 1 \right\}$$

$$(1.14) \quad \lambda_{\text{hom}} = \text{Inf} \left\{ \int_D \Phi_Y^{\text{pc}}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \, dv, \quad \underline{u} \text{ vérifie les CLCN et } \int_D \underline{f} \cdot \underline{u} \, dv = 1 \right\}$$

Ou de manière équivalente à l'aide de l'approche par l'intérieur:

$$(1.13') \quad \lambda_\delta = \text{Sup} \left\{ \lambda, \exists \underline{\underline{\sigma}} / \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \lambda \underline{f} = 0, \text{ conditions limites sur } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}/\delta) \right\}$$

$$(1.14') \quad \lambda_{\text{hom}} = \text{Sup} \left\{ \lambda, \exists \underline{\underline{\sigma}} / \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \lambda \underline{f} = 0, \text{ conditions limites sur } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G_Y^{\text{pc}} \right\}$$

Alors:

$$(1.15) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lambda_\delta = \lambda_{\text{hom}}$$

Type II

On se donne un domaine arbitraire borné D de bord suffisamment régulier ∂D , soumis à des CLC suffisamment régulières. On définit les énergies de dissipation W_δ et W_{hom} par les formules:

$$(1.16) \quad W_\delta = \text{Inf} \left\{ \int_D \phi_\delta(\underline{x}, \underline{\varepsilon}(\underline{u})) \, dv, \quad \underline{u} \text{ vérifie les CLC} \right\}$$

$$(1.17) \quad W_{\text{hom}} = \text{Inf} \left\{ \int_D \Phi_Y^{\text{pc}}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \, dv, \quad \underline{u} \text{ vérifie les CLC} \right\}$$

Alors:

$$(1.18) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} W_\delta = W_{\text{hom}}$$

Remarque 1

On discutera des démonstrations des résultats d'homogénéisation des milieux périodiques dans le troisième chapitre où une analogie formelle entre ces milieux et les milieux statistiquement homogènes et ergodiques est mise à profit pour étendre à ces milieux aléatoires les résultats d'homogénéisation établis pour les milieux périodiques.

4.2) Milieux aléatoires

Les premiers travaux de la théorie mathématique de l'homogénéisation des milieux aléatoires datent de la fin des années 70 et portent sur la conductivité thermique linéaire de ces milieux.

Dans un milieu aléatoire, le champ de potentiel ϕ dépend d'un paramètre aléatoire noté ω : $\phi(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$. Par exemple, dans un milieu biphasé aléatoire, ce paramètre décrit la répartition géométrique des phases. A chaque réalisation de ω correspond un milieu infini différent.

Sous certaines hypothèses d'homogénéité statistique, les propriétés homogénéisées du milieu ont été définies de deux façons:

- a) par une démarche de type VER comme la limite, quand L tend vers l'infini, des propriétés globales d'un cube de côté L (Yurinski, 1980), (Golden & Papanicolaou, 1983) et (Dal Maso & Modica, 1986), ou bien,
- b) par analogie avec le cas périodique en résolvant un problème auxiliaire posé directement sur le milieu infini (Papanicolaou & Varadhan, 1979), (Kozlov, 1980), (Papanicolaou, 1985).

Par ailleurs, dans un milieu aléatoire, les champs mécaniques $(\underline{\underline{\sigma}}_\delta, \underline{\underline{\varepsilon}}_\delta, \underline{\underline{u}}_\delta, W_\delta)$ solutions du problème PEL_δ défini plus haut sont aussi aléatoires. Le problème posé est toujours la convergence de ces champs, quand δ tend vers zéro, vers les champs mécaniques solution du problème homogénéisé. Dans (Papanicolaou & Varadhan, 1979), (Yurinski, 1980), (Papanicolaou, 1985), les auteurs démontrent sur la conductivité thermique, sous certaines hypothèses d'homogénéité statistique, une convergence du type:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}} \mathbf{E} |\underline{\underline{u}}_\delta(\omega, \mathbf{x}) - \underline{\underline{u}}_{\text{hom}}(\mathbf{x})|^2 dv = 0$$

où \mathbf{E} est le symbole espérance qui représente la sommation sur les réalisations possibles de ω .

En fait, ces résultats ne sont pas facilement transposables au cas élastique linéaire, et de plus, ils ne sont pas entièrement satisfaisants car la convergence obtenue fait intervenir l'ensemble des réalisations possibles par l'intermédiaire de la sommation \mathbf{E} .

Comme on le verra dans la suite de ce mémoire, la bonne démarche à suivre pour éliminer cette sommation consiste à définir tout d'abord le *sens* de l'homogénéisation dans un milieu hétérogène déterministe *quelconque*. Puis, de démontrer que, sous certaines hypothèses statistiques, chaque réalisation du milieu aléatoire considéré est "homogénéisable".

Ceci constitue le fil conducteur de mes travaux sur la théorie mathématique de l'homogénéisation des matériaux aléatoires qui prolongent et complètent les travaux des auteurs cités ci-dessus. Les principaux résultats obtenus sont exposés dans les deux chapitres suivants.

4.3) Milieux quelconques

Pour définir le sens de l'homogénéisation dans les milieux hétérogènes quelconques, la théorie mathématique de l'homogénéisation utilise des notions de convergence plus ou moins équivalentes telles que la G-convergence, la H-convergence, la Γ -convergence,.... Voir, par exemple, les ouvrages de (Attouch, 1984b) et (Kozlov et al., 1994) ainsi que la bibliographie qu'ils contiennent sur le sujet.

Au prix d'une grande schématisation, on peut présenter ces notions de convergence à travers la définition suivante:

Définition 1.1. On dit qu'une suite quelconque de milieux hétérogènes caractérisés par la suite des champs de potentiel $(\phi_\delta)_{\delta>0}$ vérifiant (1.1)² converge *au sens de l'homogénéisation*, lorsque δ tend vers 0, vers le milieu caractérisé par ϕ_0 ³ si, et seulement si, toutes les convergences énoncées dans les théorèmes d'homogénéisation des milieux périodiques -c-à-d, (1.12) pour l'élasticité non linéaire et (1.15) (1.18) pour l'analyse limite- sont vérifiées en remplaçant Φ_Y^{pc} par ϕ_0 et l'indice "hom" par l'indice 0. ■

L'intérêt majeur de cette définition est le théorème de compacité suivant:

Compacité. De toute suite $(\phi_\delta)_{\delta>0}$ vérifiant (1.1), il existe une sous-suite qui converge au sens de l'homogénéisation vers une limite, ϕ_0 , lorsque δ tend vers 0.

Ce théorème a été établi d'abord dans le cas linéaire (Spagnolo, 1968), (Tartar, 1977), (Murat, 1977-78), puis dans le cas non linéaire -voir les références dans (Attouch 1984b) et (Attouch 1987-88) -, et enfin plus tardivement par (Demangel & Qi, 1990) et (Kozlov & al. 1994) dans le cas de l'analyse limite.

La question que l'on peut se poser légitimement concernant les milieux hétérogènes quelconques est celle du lien entre la notion de VER et la théorie mathématique de l'homogénéisation. Ce lien est établi par la définition suivante.

5) Milieu homogénéisable (Sab, 1992)

On désigne dans toute la suite par \mathbf{C} un cube quelconque de \mathbf{R}^d dont les côtés sont parallèles aux vecteurs de la base canonique de \mathbf{R}^d . Et $\rho\mathbf{C}$, avec $\rho > 0$, désigne le cube homothétique de \mathbf{C} : $\rho\mathbf{C} = \{ \underline{y} / \rho^{-1} \underline{y} \in \mathbf{C} \}$.

Définition 1.2. On dit que le milieu dont la microstructure est caractérisée par ϕ vérifiant (1.1), est **homogénéisable** si, et seulement si, il existe une fonction convexe de \mathbf{R}^s , notée Φ_{hom} , telle que:

$$(1.19) \quad \forall \underline{E} \quad \forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Phi_{\rho\mathbf{C}}^{\text{de}}(\underline{E}) = \Phi_{\text{hom}}(\underline{E})$$

Les théorèmes suivants établissent via la théorie mathématique de l'homogénéisation que les approches en déformation et en contrainte sont asymptotiquement équivalentes dans un milieu homogénéisable élastique non linéaire sans aucune autre hypothèse. Cette équivalence entre les deux approches est donc une conséquence de "l'homogénéisabilité" du milieu au sens de la définition 1.2.

Théorème 1.1. *Théorie mathématique de l'homogénéisation et VER.* Le milieu dont la microstructure est caractérisée par ϕ vérifiant (1.1) avec $p \geq 1$, est homogénéisable si, et seulement si, il existe une fonction réelle convexe de \mathbf{R}^s , notée Φ_{hom} , telle que la suite

²Où les constantes p , a_1 et a_2 ne dépendent pas de δ .

³ ϕ_0 n'est pas forcément homogène et doit vérifier (1.1) avec les mêmes constantes que ϕ_δ .

$(\phi_\delta)_{\delta>0}$ définie à partir de ϕ par (1.11) converge au sens de l'homogénéisation vers Φ_{hom} , quand δ tend vers 0. En particulier, les milieux périodiques sont homogénéisables. ■

Comme conséquence du théorème 1.1 on a les deux théorèmes suivants:

Théorème 1.2. Invariance par translation. Le milieu dont la microstructure est caractérisée par ϕ vérifiant (1.1) avec $p \geq 1$, est homogénéisable si, et seulement si, le milieu dont la microstructure est caractérisée par ϕ_t avec $\phi_t(\underline{y}, \underline{\varepsilon}) = \phi(\underline{y} - t, \underline{\varepsilon})$ est homogénéisable. Dans ce cas, le comportement homogénéisé est identique dans les deux milieux. ■

Théorème 1.3. Approches en contrainte et en déformation dans les milieux élastiques

Le milieu dont la microstructure est caractérisée par ϕ vérifiant (1.1) avec $p > 1$ est homogénéisable si, et seulement si, il existe une fonction convexe de \mathbf{R}^s , notée Φ_{hom} , telle que:

$$(1.20) \quad \forall \underline{\underline{E}} \quad \forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Phi_{\rho\mathbf{C}}^{\text{co}}(\underline{\underline{E}}) = \Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$$

La démonstration des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 est basée sur la propriété de compacité évoquée ci-dessus dans le cadre de la théorie mathématique de l'homogénéisation des milieux déterministes quelconques. A l'époque de la rédaction de (Sab, 1992) cette propriété de compacité n'était pas établie dans le cas rigide parfaitement plastique, c'est pourquoi la définition 1.1 et les théorème 1.1 et 1.2 ont été énoncés dans le cas élastique non linéaire ($p > 1$). L'extension de leur domaine d'application au cas rigide parfaitement plastique est immédiate lorsqu'on utilise les propriétés de compacité énoncées dans (Demangel & Qi, 1990) et (Kozlov & al. 1994) et la méthode décrite dans (Sab, 1992).

6) Conditions limites mixtes

On peut être amené à appliquer au VER des conditions limites mixtes différentes des conditions en déformation et en contrainte. Sont-elles asymptotiquement équivalentes aux conditions en déformation?

Pour répondre à cette question, introduisons les définitions suivantes. Soit V un domaine borné de bord ∂V suffisamment régulier soumis à des conditions limites classiques portant de façon complémentaire sur des composantes du vecteur déplacement et des composantes du vecteur contrainte. On dit que V est soumis à des conditions limites homogènes (CLH) si ce chargement est tel qu'il existe une solution homogène en déformation et en contrainte lorsque V est occupé par un matériau homogène. Par ailleurs, on dit que les CLH sont cinématiques (CLHC) si certaines composantes du déplacement sont effectivement données sur une partie non vide du bord et si toutes les données complémentaires sur les composantes du vecteur contrainte sont nulles.

Naturellement, les conditions homogènes en déformation qui permettent de définir $\Phi_V^{de}(\underline{\underline{E}})$ sont des CLHC, alors que les conditions homogènes en contrainte qui permettent de définir $\Phi_V^{co}(\underline{\underline{E}})$ sont des CLH. On peut aussi être amené à utiliser des CLH mixtes.

Par exemple, lorsque le milieu considéré est bidimensionnel élastique linéaire, il est naturel de définir le module d'Young global dans la direction 1 d'un carré \mathbf{C} , noté $(E1)_C^{mix}$, à l'aide des CLH mixtes qui correspondent à une expérience de traction simple pilotée en déplacement. Voir figure (). Ces conditions sont des CLHC.

$$(E1)_C^{mix} \stackrel{def}{=} \inf_{\underline{\underline{u}}} \left\{ \left\langle 2\phi(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{y}})) \right\rangle_C, \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}), u_1 = \begin{array}{l} L/2 \text{ sur le bord droit de } C \\ -L/2 \text{ sur le bord gauche de } C \end{array} \right\}$$

On peut facilement montrer que $(E1)_C^{mix}$ est inférieur (resp. supérieur) au module d'Young global dans la direction 1 de \mathbf{C} défini à l'aide des conditions homogènes en déformation (resp. contrainte), noté $(E1)_C^{de}$ (resp. $(E1)_C^{co}$), où :

$$(E1)_C^{de} \stackrel{def}{=} \inf_{\underline{\underline{E}}} \left\{ 2\Phi_C^{de}(\underline{\underline{E}}), E_{11} = 1 \right\} \quad (E1)_C^{co} \stackrel{def}{=} \inf_{\underline{\underline{E}}} \left\{ 2\Phi_C^{co}(\underline{\underline{E}}), E_{11} = 1 \right\}$$

De même, lorsque le milieu considéré est rigide parfaitement plastique, on peut définir la résistance globale à la traction simple dans la direction 1 du carré \mathbf{C} , notée $(K1)_C^{mix}$, à l'aide des CLHC de la figure ()

$$(K1)_C^{mix} \stackrel{def}{=} \inf_{\underline{\underline{u}}} \left\{ \left\langle \phi(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{y}})) \right\rangle_C, \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) \text{ avec } u_1 = \begin{array}{l} L/2 \text{ sur le bord droit de } C \\ -L/2 \text{ sur le bord gauche de } C \end{array} \right\}$$

Ici aussi, $(K1)_C^{mix}$ est encadrée par les résistances globales à la traction simple dans la direction 1 du carré \mathbf{C} définies par les conditions homogènes en déformation et en contrainte, notées $(K1)_C^{de}$ et $(K1)_C^{co}$, respectivement.

Comme conséquence du théorème 1.1 on a le résultat suivant :

Théorème 1.4. Conditions limites mixtes. Lorsque le milieu est homogénéisable au sens de la définition 1.2, toutes les CLH sont asymptotiquement équivalentes aux conditions homogènes en déformation dans les milieux élastiques. Seules les CLHC sont asymptotiquement équivalentes aux conditions homogènes en déformation dans les milieux rigides parfaitement plastiques.

En particulier, lorsque le milieu est élastique linéaire, on a :

$$\forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (E1)_{\rho\mathbf{C}}^{co} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (E1)_{\rho\mathbf{C}}^{mix} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (E1)_{\rho\mathbf{C}}^{de} = (E1)_{\text{hom}}$$

Et, lorsque le milieu est rigide parfaitement plastique, on a :

$$\forall \mathbf{C} \quad \limsup_{\rho \rightarrow +\infty} (K1)_{\rho\mathbf{C}}^{co} \leq \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (K1)_{\rho\mathbf{C}}^{mix} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (K1)_{\rho\mathbf{C}}^{de} = (K1)_{\text{hom}}$$



En outre, on peut imposer aussi des conditions de périodicité à un VER de forme cubique. Alors, on a le résultat suivant: lorsque le milieu est homogénéisable, les conditions limites périodiques sont asymptotiquement équivalentes aux conditions homogènes en déformation dans les milieux élastiques. Par contre, on peut montrer sur un contre-exemple que les conditions limites périodiques ne sont pas en général asymptotiquement équivalentes aux conditions homogènes en déformation dans les milieux rigides parfaitement plastiques.

Conclusion

Nous avons abouti à la fin de ce premier chapitre à la notion déterministe de milieu homogénéisable donnée par la définition 1.2. Le principal intérêt de cette définition est qu'elle est à la fois simple et rigoureuse. Elle coïncide avec les notions de G-convergence, H-convergence, Γ -convergence, ... introduites dans la théorie mathématique de l'homogénéisation (Théorème 1.1), et elle permet de répondre, via cette théorie, à la question de l'équivalence asymptotique des conditions limites imposées sur le VER.

Nous avons vu que les milieux périodiques sont homogénéisables. Qu'en est-il des milieux aléatoires où le champ de potentiel ϕ dépend du paramètre aléatoire ω ? A quelles conditions statistiques le milieu décrit par le champ $(\underline{y}, \underline{\varepsilon}) \rightarrow \phi(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$ est-il homogénéisable pour toute réalisation de ω ?

La réponse sera donnée dans les deux prochains chapitres, mais auparavant il convient de se poser la question de l'intérêt d'une modélisation probabiliste à l'échelle microscopique. N'est-il pas plus commode de faire une hypothèse de périodicité?

En effet, cette hypothèse simplificatrice permet de poser un problème déterministe sur une cellule de base qu'on tente de résoudre semi-analytiquement ou numériquement. L'hypothèse de périodicité est en réalité satisfaisante dans beaucoup de cas même si elle introduit souvent une faible anisotropie artificielle au niveau du comportement macroscopique. Cependant, lorsque l'interaction entre les hétérogénéités est très forte, l'hypothèse de périodicité peut paraître tout à fait arbitraire. Ceci est particulièrement vrai pour le comportement rigide parfaitement plastique car, du fait des discontinuités plastiques, l'interaction entre les hétérogénéités peut être très forte même pour des faibles concentrations comme l'illustre l'exemple (extrême!) ci-dessous.

On considère dans un plan infini un matériau biphasé dont les constituants parfaitement adhérents ont un comportement rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Tresca en contrainte plane. G , le convexe de résistance d'un matériau de Tresca, est donné par:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G \Leftrightarrow \text{Sup}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) \leq k$$

où σ_1, σ_2 désignent les contraintes principales du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et k désigne la résistance en traction simple; k prend les valeurs $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$ dans les phases I et II, respectivement.

On suppose deux répartitions périodiques des hétérogénéités, (a) et (b), illustrées dans la figure 1. En s'inspirant des travaux de Maghous (1991), on peut établir que, pour une concentration de la phase I, notée f , comprise entre 0 et 1/2, la résistance effective à la traction simple du composite selon le vecteur \underline{e}_1 , notée K^{pe} , dans la répartition (a) et dans la répartition (b) est donnée par, respectivement,

$$(a) \begin{cases} K^{pe} = k^{(2)} - (k^{(2)} - k^{(1)})\sqrt{f} & \text{pour } k^{(1)} \leq k^{(2)} \\ K^{pe} = k^{(2)} & \text{pour } k^{(1)} \geq k^{(2)} \end{cases}$$

et

$$(b) \begin{cases} K^{pe} = k^{(2)} - (k^{(2)} - k^{(1)})\sqrt{2f} & \text{pour } k^{(1)} \leq k^{(2)} \\ K^{pe} = k^{(2)} & \text{pour } k^{(1)} \geq k^{(2)} \end{cases}$$

Ainsi, pour $k^{(1)} < k^{(2)}$, le comportement rigide parfaitement plastique du composite pour les faibles concentrations ($f \rightarrow 0$) n'est pas le même pour ces deux répartitions périodiques. Autrement dit, même pour de très faibles concentrations d'inclusions, les propriétés effectives de ce milieu dépendent de façon cruciale de l'hypothèse de périodicité.

Quelle hypothèse de périodicité choisir dans un milieu où des inclusions carrées identiques sont réparties aléatoirement?

Chapitre 2

Modélisation des milieux aléatoires

Avant d'aborder l'homogénéisation des milieux aléatoires, il est nécessaire, tout d'abord, de préciser ce qu'on entend par milieu aléatoire. C'est l'objet de ce chapitre.

On distingue dans la littérature schématiquement deux façons de décrire les milieux aléatoires selon que le vocabulaire de la théorie de la mesure et de la théorie ergodique soit explicitement utilisé ou non.

Dans les premiers travaux de la théorie mathématique de l'homogénéisation des milieux aléatoires (Papanicolaou & Varadhan, 1979), (Kozlov, 1980), (Papanicolaou, 1985), un milieu aléatoire statistiquement homogène et ergodique (SHE) est modélisé par un espace de probabilité muni d'un flot ergodique préservant la mesure de probabilité (mesure preserving flow). Cette notion de flot, qui vient de la théorie ergodique, a le mérite d'être rigoureuse et précise, mais elle a l'inconvénient d'être réservée aux spécialistes.

Plus classiquement, un milieu statistiquement homogène est modélisé dans la littérature micromécanique (Matheron, 1967), (Beran, 1974), (Kröner, 1980), (Hashin, 1983)... par un processus (champ) aléatoire statistiquement homogène. Cette présentation évite l'usage du vocabulaire de la théorie de la mesure, mais elle introduit l'hypothèse ergodique de façon floue et peu précise en disant que la moyenne volumique d'un champ aléatoire statistiquement homogène sur un grand domaine s'identifie à son espérance mathématique (moyenne sur les réalisations de la valeur prise par ce champ en un point).

Dans (Sab, 1991a-1991b-1994), j'ai adopté la notion de flot préservant la mesure pour modéliser les milieux SHE, alors que je me suis efforcé de présenter dans (Sab, 1992) un cadre rigoureux pour la description des milieux aléatoires qui évite autant que possible l'utilisation du vocabulaire de la théorie ergodique tout en profitant de ces récentes avancées, et notamment du théorème sous-additif de (Akcoglu & Krengel, 1981).

Dans ce chapitre, on décrit le cadre présenté dans (Sab, 1992). Puis on le traduit en vocabulaire de la théorie ergodique. Le lecteur allergique à cette théorie peut éviter la lecture de la cinquième partie de ce chapitre sans que ceci nuise à la compréhension de la suite.

1) Configuration d'un milieu aléatoire

Intuitivement, on peut dire qu'un milieu aléatoire qui occupe entièrement l'espace de dimension d , identifié à \mathbf{R}^d (avec $d = 1, 2$ ou 3), est un ensemble de différents milieux obtenus dans les mêmes conditions connues. Les éléments de cet ensemble ne diffèrent que par leurs configurations. Par définition, la configuration du milieu est ce qu'il reste à préciser pour que ce milieu soit décrit de manière déterministe, c'est-à-dire que son champ de potentiel ϕ soit explicitement connu en tout point.

Par exemple, si on considère un milieu biphasé aléatoire dont la phase I est décrite par le potentiel convexe $\phi^{(1)}$ et la phase II par le potentiel convexe $\phi^{(2)}$, alors la configuration du milieu est la répartition géométrique des phases. Celle-ci peut être décrite par le champ caractéristique de la phase I, $\omega: \underline{y} \mapsto \omega(\underline{y})$ avec $\omega(\underline{y}) = 1$ si \underline{y} est dans la phase I et $\omega(\underline{y}) = 0$ sinon. Dans ces conditions, la configuration du milieu est identifiée à ω et le champ de potentiel ϕ est explicitement donné en fonction de ω de la façon suivante:

$$\tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon}) = \begin{cases} \phi^{(1)}(\underline{\varepsilon}) & \text{si } \omega(\underline{y}) = 1 \\ \phi^{(2)}(\underline{\varepsilon}) & \text{si } \omega(\underline{y}) = 0 \end{cases}$$

En l'absence d'autres précisions sur la répartition géométrique des phases, l'ensemble des configurations possibles est l'ensemble de tous les champs caractéristiques de la phase I.

Un autre exemple est celui d'un milieu aléatoire où les constituants sont élastiques linéaires et isotropes. Dans ce cas, on peut, par exemple, identifier la configuration du milieu au champ vectoriel à deux composantes réelles, $\omega: \underline{y} \mapsto \omega(\underline{y})$, qui associe au point \underline{y} les coefficients de Lamé en ce point, $\omega(\underline{y}) = (\lambda(\underline{y}), \mu(\underline{y}))$. Le champ de potentiel ϕ est alors explicitement donné en fonction de ω de la façon suivante:

$$\tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon}) = \frac{\lambda(\underline{y})}{2} (\text{Tr} \underline{\varepsilon})^2 + \mu(\underline{y}) \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}$$

Signalons tout de suite qu'on peut décrire le même milieu aléatoire de plusieurs manières. A titre d'exemple, si on considère un milieu aléatoire biphasé où les constituants sont élastiques linéaires et isotropes, on peut considérer que la configuration du milieu est ou bien la répartition des phases, ou bien les coefficients de Lamé.

Pour modéliser un milieu aléatoire, on suppose dans toute la suite que sa configuration, toujours notée ω , est un champ vectoriel à r composantes réelles (r est fixé pour chaque milieu).

C'est, donc, une application de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^r qu'on suppose localement Riemann-intégrable¹ dans toute la suite.

Cette hypothèse de régularité est vérifiée dans tous les modèles pertinents de milieux aléatoires.

¹c.-à-d. Riemann-intégrable sur toute boule bornée, ou de manière équivalente, dont l'ensemble des points de discontinuités est de mesure (de Lebesgue) nulle.

2) Fonctions de probabilité

Après avoir précisé l'ensemble des configurations possibles d'un milieu aléatoire, il faut se donner la probabilité de leur occurrence. Dans le cas le plus simple où l'ensemble des configurations possibles est dénombrable $\{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(i)}, \dots\}$, il suffit de se donner pour chaque i la probabilité $0 \leq p^{(i)} \leq 1$ d'occurrence de la configuration $\omega^{(i)}$, avec $\sum_i p^{(i)} = 1$.

Or, l'ensemble des configurations possibles n'est pas dénombrable dans tous les modèles non triviaux. L'idée est alors d'associer des probabilités non pas à des configurations, mais à des (sous-) ensembles de configurations.

On définit la fonction de probabilité d'ordre n , \mathcal{P}_n , de la manière suivante: soient I_1, I_2, \dots, I_n n pavés² de \mathbf{R}^r , alors

$$\mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n)$$

est la probabilité de trouver simultanément $\omega(\underline{y}_1)$ dans I_1 , $\omega(\underline{y}_2)$ dans I_2 , ..., $\omega(\underline{y}_n)$ dans I_n . C'est donc la probabilité associée à l'ensemble des configurations ω qui sont telles que $\omega(\underline{y}_1) \in I_1, \dots, \omega(\underline{y}_n) \in I_n$.

La fonction de probabilité $0 \leq \mathcal{P}_n \leq 1$ doit vérifier certaines propriétés évidentes comme par exemple: si le k ème pavé est partitionné en pavés deux à deux disjoints, $I_k = \bigcup_i I_{k_i}$, alors:

$$(2.1) \quad \mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_k, \dots, I_n) = \sum_i \mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_{k_i}, \dots, I_n)$$

Pour rester cohérent, \mathcal{P}_n doit contenir plus d'information que \mathcal{P}_{n-1} . On doit avoir:

$$(2.2) \quad \mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, \mathbf{R}^r, \dots, I_n) = \mathcal{P}_{n-1}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{k-1}, \underline{y}_{k+1}, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_{k-1}, I_{k+1}, \dots, I_n)$$

qui exprime de deux façons la probabilité de trouver simultanément $\omega(\underline{y}_1)$ dans $I_1, \dots, \omega(\underline{y}_{k-1})$ dans $I_{k-1}, \omega(\underline{y}_{k+1})$ dans $I_{k+1}, \dots, \omega(\underline{y}_n)$ dans I_n .

De plus, \mathcal{P}_1 doit vérifier:

$$(2.3) \quad \mathcal{P}_1(\underline{y}, \mathbf{R}^r) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1(\underline{y}, \emptyset) = 0$$

Il est bien connu que les propriétés statistiques d'un milieu aléatoire sont entièrement décrites par la donnée de toutes les fonctions de probabilité qui doivent respecter les

²un pavé de \mathbf{R}^r est le produit de r intervalles de \mathbf{R}

relations (2.1)-(2.3). Voir, par exemple, (Matheron, 1967), (Beran, 1974), (Kröner, 1980), (Hashin, 1983)...

En effet, notons Ω l'ensemble des champs localement Riemann-intégrables de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^r . La donnée des fonctions de probabilité de tout ordre permet de définir de manière unique une mesure de probabilité sur Ω , notée \mathcal{P} . On rappelle ici que la mesure de probabilité d'un sous-ensemble de Ω , $B \subset \Omega$, est la probabilité, $\mathcal{P}(B)$, de trouver la configuration ω dans ce sous-ensemble.

Arrêtons nous un instant sur le sens intuitif du réel $\mathcal{P}(B)$. Si $\{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(i)}, \dots\}$ est une suite infinie de réalisations *indépendantes*³ du milieu aléatoire considéré, c.-à-d. une suite d'échantillons de ce milieu, alors la probabilité $\mathcal{P}(B)$ est donnée par la formule $\mathcal{P}(B) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\text{nombre des } \omega^{(i)} \in B, i \leq m) / m$. Autrement dit, $\mathcal{P}(B)$ est la fréquence d'occurrence de l'évènement "la configuration ω est dans l'ensemble B".

Il est très important de se rappeler ici que dans la théorie des Probabilités un évènement de probabilité égale à un correspond à notre intuition d'un évènement dont l'occurrence est *absolument* certaine. Si, *d'abord*, je me fixe un ensemble B tel que $\mathcal{P}(B) = 1$, et si, *ensuite*, j'observe un nombre fini de réalisations du milieu, alors je suis certain que toutes les réalisations appartiennent à B.

C'est pour cette raison qu'on utilisera dans toute la suite les phrases "pour toute réalisation de ω " ou "avec une probabilité un" en lieu et place de "pour tout ω appartenant à un ensemble B tel que $\mathcal{P}(B) = 1$ ".

Remarque 1

La donnée de la fonction de probabilité \mathcal{P}_n permet de définir les fonctions de corrélation d'ordre n, *lorsqu'elles existent*:

$$(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) \rightarrow \mathbf{E} \omega_{k_1}(\underline{y}_1) \dots \omega_{k_n}(\underline{y}_n) = \int_{\omega \in \Omega} \omega_{k_1}(\underline{y}_1) \dots \omega_{k_n}(\underline{y}_n) d\mathcal{P}_n$$

où \mathbf{E} désigne le symbole espérance et les ω_{k_i} des composantes de ω .

On rappelle que l'espérance est la sommation sur l'ensemble des configurations Ω : soit X une fonctionnelle qui fait correspondre à chaque configuration ω le réel $X(\omega)$. Alors, lorsqu'elle existe, l'espérance de X est la somme des réels x pondérés par la probabilité que $X(\omega)$ soit dans l'intervalle $[x, x + dx[$. On écrit symboliquement $\mathbf{E}X = \sum x \times \text{Pr ob}(X(\omega) \in [x, x + dx[)$. En particulier, lorsque X a une densité continue f_X , alors $\text{Pr ob}(X(\omega) \in [x, x + dx[) = f_X(x)dx$ et $\mathbf{E}X = \int_{x \in \mathbf{R}} x f_X(x) dx$.

On rappelle aussi que la loi des grands nombres stipule que, lorsqu'elle existe, l'espérance de X est la limite, quand m tend l'infini, de la moyenne arithmétique des $X(\omega^{(i)})$, où les $\omega^{(i)}$ constituent m réalisations indépendantes du milieu.

³La notion d'indépendance est une notion intuitive qu'on peut présenter de la façon suivante: deux évènements aléatoires sont indépendants lorsque la connaissance de l'un ne nous renseigne pas sur l'autre. Deux lancés de dé sont indépendants. Mais la température ambiante à Paris demain n'est pas indépendante de celle d'aujourd'hui. S'il fait 30° aujourd'hui, il y a peu de chances qu'il fasse -15° demain.

En résumé, un milieu aléatoire sera toujours défini par la donnée des fonctions de probabilité de tout ordre qui caractérisent la statistique de sa configuration.

3) Exemples

3.1) Le damier aléatoire

Il s'agit d'un modèle plan de milieu biphasé. Le plan infini est partagé en cellules carrées, C_{ij} , $i, j \in \mathbf{Z}$ dont les côtés de longueur unité sont parallèles aux vecteurs de la base canonique de \mathbf{R}^2 :

$$C_{ij} = \{ \underline{y} = (y_1, y_2), i-1 \leq y_1 \leq i, j-1 \leq y_2 \leq j \}$$

Une cellule appartient à la phase 1 avec une probabilité p et à la phase 2 avec une probabilité $1-p$. On suppose de plus que les cellules sont parfaitement indépendantes. Dans ce cas, la configuration du milieu est le champ caractéristique de la phase 1, noté ω avec $\omega(\underline{y}) = 1$ si \underline{y} est dans la phase 1 et $\omega(\underline{y}) = 0$ sinon. Bien sûr, ω est constant dans chaque carré C_{ij} . Il est donc localement Riemann-intégrable.

Il est facile de calculer $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I)$ qui est la probabilité de trouver $\omega(\underline{y})$ dans l'intervalle I . Si $1 \notin I$ et $0 \notin I$, $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = 0$. Si $1 \notin I$ et $0 \in I$, $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = 1-p$. Si $1 \in I$ et $0 \notin I$, $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = p$. Et enfin, si $1 \in I$ et $0 \in I$, $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = 1$. Noter ici que $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = \mathcal{P}_1(I)$ ne dépend pas du point \underline{y} .

De plus, en exploitant l'hypothèse d'indépendance des cellules, on peut exprimer toutes les fonctions de probabilité \mathcal{P}_n à l'aide de \mathcal{P}_1 . A titre d'exemple, $\mathcal{P}_2(\underline{y}_1, \underline{y}_2; I_1, I_2) = \mathcal{P}_1(I_1 \cap I_2)$ si les deux points \underline{y}_1 et \underline{y}_2 appartiennent à la même cellule C_{ij} , et $\mathcal{P}_2(\underline{y}_1, \underline{y}_2; I_1, I_2) = \mathcal{P}_1(I_1) \times \mathcal{P}_1(I_2)$ sinon.

De la même façon, on peut calculer explicitement toutes les fonctions de corrélation. Par exemple, la fonction de corrélation d'ordre 1, qui n'est autre que la fraction volumique de la phase 1, est uniforme et vaut p . La fonction de corrélation d'ordre 2 vaut p si les deux points \underline{y}_1 et \underline{y}_2 appartiennent à la même cellule C_{ij} , et p^2 sinon.

3.2) Un modèle de polycristal (I)

Le plan est toujours partagé selon les carrés C_{ij} définis plus haut. Tous les carrés sont occupés par un même cristal de symétrie cubique. Cependant, l'orientation du cristal dans chaque cellule est aléatoire. On suppose que les orientations sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, \pi/2[$. Dans ce cas, la configuration du milieu est le champ ω qui associe l'angle $0 \leq \omega(\underline{y}) < \pi/2$ au point \underline{y} .

Il est facile de voir que $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = \mathcal{P}_1(I)$, qui ne dépend pas du point \underline{y} , n'est autre que la longueur de l'intervalle $I \cap [0, \pi/2[$ divisée par $\pi/2$. Exactement comme dans le cas

du damier aléatoire, l'exploitation de l'hypothèse d'indépendance des cellules permet d'exprimer explicitement toutes les fonctions de probabilité \mathcal{P}_n à l'aide de \mathcal{P}_1 .

3.3) Un modèle de polycristal (II)

Il peut sembler peu réaliste de schématiser, comme on le fait dans l'exemple précédent, la forme des cristaux par des carrés. Pour améliorer le modèle, on peut adopter le diagramme de Voronoï qui permet de partager l'espace de la façon suivante: soit (\underline{x}_i) une suite dénombrable de points qui occupe le plan. Alors, la cellule Vor_n est constituée des points du plan qui sont plus proche de \underline{x}_n que de n'importe quel autre élément de la suite (\underline{x}_i) . On suppose que la suite (\underline{x}_i) est une réalisation d'un processus de Poisson. Et que les orientations des cellules sont tirées de façon indépendante selon la loi uniforme sur $[0, \pi/2[$.

Comme dans le modèle précédent $\mathcal{P}_1(\underline{y}, I) = \mathcal{P}_1(I)$ est égale à la longueur de l'intervalle $I \cap [0, \pi/2[$ divisée par $\pi/2$. Quant aux fonctions de probabilité d'ordre supérieur, elles s'expriment (implicitement) en fonction de \mathcal{P}_1 et des propriétés du processus de Poisson. Par exemple, en désignant par $\text{Pr}(\underline{y}_1, \underline{y}_2)$ est la probabilité de trouver les deux points \underline{y}_1 et \underline{y}_2 dans la même cellule, on a:

$$\mathcal{P}_2(\underline{y}_1, \underline{y}_2; I_1, I_2) = \mathcal{P}_1(I_1 \cap I_2) \times \text{Pr}(\underline{y}_1, \underline{y}_2) + \mathcal{P}_1(I_1) \times \mathcal{P}_1(I_2) \times (1 - \text{Pr}(\underline{y}_1, \underline{y}_2)).$$

Les propriétés du processus de Poisson font que $\text{Pr}(\underline{y}_1, \underline{y}_2)$ est une fonction de $|\underline{y}_1 - \underline{y}_2|$ qui tend vers 0 quand $|\underline{y}_1 - \underline{y}_2|$ tend vers l'infini.

On rappelle à cet égard que dans un processus de Poisson, les points sont uniformément répartis sur toute partie de l'espace. Plus précisément, sachant le nombre des points dans une partie bornée de l'espace, ces points sont uniformément répartis dans cette partie.

4) Milieu statistiquement homogène et ergodique

Définition 2.1. On dit que le milieu aléatoire est statistiquement homogène (S.H.) (resp. statistiquement périodique (S.P.)) si toutes les fonctions de probabilité \mathcal{P}_n sont invariantes par toute translation \underline{t} dans \mathbf{R}^d (resp. dans \mathbf{Z}^d):

$$(2.4) \quad \mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n) = \mathcal{P}_n(\underline{y}_1 + \underline{t}, \dots, \underline{y}_n + \underline{t}; I_1, \dots, I_n)$$

■

Dans ce cas, toutes les fonctions de corrélation sont invariantes par toute translation dans \mathbf{R}^d (resp. dans \mathbf{Z}^d). En particulier, dans un milieu SH l'espérance $\mathbf{E} \omega(\underline{y}) = \mathbf{E} \omega$, est une constante indépendante du point \underline{y} .

L'hypothèse d'homogénéité (resp. de périodicité) statistique traduit l'invariance des propriétés statistiques par rapport aux translations dans l'espace (resp. dans \mathbf{Z}^d). Deux points de l'espace (resp. deux cellules de base) sont statistiquement indiscernables.

Définition 2.2 (Sab, 1992). On dit qu'un milieu SH (resp., SP) est ergodique (SHE) (resp. SPE) si, et seulement si, pour tout $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, I_1, \dots, I_n, \underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m, I'_1, \dots, I'_m$, la moyenne volumique (resp. arithmétique) du champ:

$$\underline{t} \mapsto \mathcal{P}_{n+m}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, \underline{y}'_1 + \underline{t}, \dots, \underline{y}'_m + \underline{t}, I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_m)$$

quand \underline{t} parcourt le cube $\{\underline{t} = (t_j) / 0 < t_j < L, j = 1, \dots, d\}$ (resp. les points de composantes positives entières inférieures à L) tend, quand L tend vers l'infini, vers le produit:

$$\mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n) \times \mathcal{P}_m(\underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m; I'_1, \dots, I'_m)$$

■

Il convient de remarquer ici que l'ergodicité peut être perçue comme une propriété d'indépendance en un sens "faible". En effet, il existe dans plusieurs modèles de milieux aléatoires une longueur h qui est telle que ω prend des valeurs indépendantes sur n'importe quel paire de domaines séparés par une distance supérieure à h . Autrement dit, pour tout $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, I_1, \dots, I_n, \underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m, I'_1, \dots, I'_m$, vérifiant $|\underline{y}_i - \underline{y}'_j| > h \quad \forall i, j$, on a:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{n+m}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, \underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m; I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_m) \\ & = \\ & \mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n) \times \mathcal{P}_m(\underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m; I'_1, \dots, I'_m) \end{aligned}$$

Cette propriété est souvent appelée propriété de mélange forte ou "indépendance à distance". Voir (Beran, 1974).

Il est facile de voir qu'un milieu SH (ou SP) qui vérifie la propriété de mélange forte est ergodique. En effet, pour \underline{t} de norme suffisamment grande, la distance qui sépare les points $\{\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n\}$ des points $\{\underline{y}'_1 + \underline{t}, \dots, \underline{y}'_m + \underline{t}\}$ est supérieure à h . Ainsi, l'ergodicité est une propriété plus faible que la propriété de mélange puisqu'elle stipule que la propriété de mélange est vraie en moyenne seulement.

A titre d'exemple, le damier aléatoire et le modèle de polycristal (I) sont des milieux SPE qui vérifie la propriété de mélange forte. Quant au modèle de polycristal (II), il est SHE, comme d'ailleurs tous les modèles fabriqués à partir du processus de Poisson.

L'intérêt majeur de la propriété d'ergodicité est de pouvoir identifier des moyennes volumiques sur des domaines suffisamment grands à des espérances. Ceci sera précisé dans la partie 6 et généralisé dans la partie 7 à l'aide du théorème sous-additif.

Mais auparavant, l'objet de la prochaine partie, dont la lecture n'est pas indispensable pour la compréhension de la suite, est de faire le lien entre le cadre qu'on vient de présenter pour la modélisation des milieux SHE et la théorie de la mesure.

5) Lien avec la théorie de la mesure

Tout sous-ensemble de Ω de la forme $\{\omega \in \Omega / \omega(\underline{y}_1) \in I_1, \dots, \omega(\underline{y}_n) \in I_n\}$ où $n, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, I_1, \dots, I_n$ sont arbitrairement fixés est appelé cylindre. Sa mesure de probabilité est égale à $\mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n)$. La donnée de toutes les fonctions \mathcal{P}_n vérifiant (2.1)-(2.3) permet de définir de façon unique la mesure de probabilité de B , $\mathcal{P}(B)$, (qui est la probabilité de trouver ω dans B) où B désigne ici un sous-ensemble arbitraire de Ω obtenu par unions, intersections et complémentations sur une suite dénombrable de cylindres. L'ensemble de tous les B constitue une tribu (ou σ -algèbre), notée \mathcal{B} . Et \mathcal{P} s'interprète comme une mesure de probabilité sur Ω muni de cette tribu.

Ainsi, la statistique du milieu aléatoire est caractérisée par le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$.

On rappelle ici qu'une tribu \mathcal{A} sur un ensemble quelconque Θ est un ensemble de parties de Θ comprenant \emptyset et Θ et qui est stable par toute opération définie par une suite dénombrable d'unions, d'intersections et de complémentations portant sur ses éléments. Une mesure de probabilité \mathcal{P} est une application de \mathcal{A} dans $[0,1]$ qui vérifie:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = 0, \mathcal{P}(\Theta) = 1 \text{ et } \mathcal{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathcal{P}(A_n)$$

pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de \mathcal{A} disjoints deux à deux.

On dit que l'espace de probabilité quelconque $(\Theta, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est muni d'un flot ergodique sur \mathbf{R}^d (resp. \mathbf{Z}^d) préservant la mesure s'il existe un groupe d'applications bijectives, $\tau_{\underline{t}}$ $\underline{t} \in \mathbf{R}^d$ (resp., $\underline{t} \in \mathbf{Z}^d$), de Θ dans Θ vérifiant les propriétés suivantes:

Groupe

$$(2.5) \quad \forall \underline{t}, \underline{t}' \in \mathbf{R}^d \text{ (resp., } \mathbf{Z}^d) \quad \tau_{\underline{t}+\underline{t}'} = \tau_{\underline{t}} \circ \tau_{\underline{t}'} \quad \text{et } \tau_0 = \text{Identité}$$

Invariance de la mesure

$$(2.6) \quad \forall \underline{t} \in \mathbf{R}^d \text{ (resp., } \mathbf{Z}^d), \forall A \in \mathcal{A} \quad \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\tau_{\underline{t}}A)$$

où $\tau_{\underline{t}}A = \{\theta \in \Theta, \tau_{-\underline{t}}\theta \in A\}$.

Ergodicité

$$(2.7) \quad A \in \mathcal{A} / \forall \underline{t} \in \mathbf{R}^d \text{ (resp., } \mathbf{Z}^d) \tau_{\underline{t}}A = A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Mesurabilité du flot sur \mathbf{R}^d

$$(2.8) \quad (\theta, \underline{t}) \rightarrow \tau_{\underline{t}}\theta \text{ est mesurable de } \Theta \times \mathbf{R}^d \text{ dans } \Theta$$

où $\Theta \times \mathbf{R}^d$ est muni de la tribu produit de \mathcal{A} et de la tribu borélienne de \mathbf{R}^d , complétée par rapport à la mesure produit $\mathcal{P} \otimes dx$.

Voir, par exemple, (Cornfeld *et al.*, 1982) pour la définition d'un flot dans un espace de probabilité quelconque.

Dans une annexe de (Sab, 1992), je montre que, dans un milieu SHE (resp., SPE) tel qu'il est défini dans la partie 4 à l'aide des fonctions de probabilité et des définitions 2.1 et 2.2, les applications bijectives qui associent à chaque configuration ω la configuration translatée, $\omega_{\underline{t}}$ $\underline{t} \in \mathbf{R}^d$ (resp., \mathbf{Z}^d),

$$(2.9) \quad \tau_{\underline{t}}\omega = \omega_{\underline{t}} \quad \text{avec} \quad \omega_{\underline{t}}: \underline{y} \mapsto \omega_{\underline{t}}(\underline{y}) = \omega(\underline{y} - \underline{t})$$

sont un flot ergodique qui préserve la mesure dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$

L'hypothèse de régularité sur les configurations ω (localement Riemann-intégrables) est utilisée pour établir la mesurabilité du flot (2.8). La propriété (2.4) sert à établir (2.6) et on établit à l'aide de la définition 2.2 la propriété d'ergodicité (2.8).

Cette propriété de mesurabilité, ainsi que les propriétés de groupe (2.6), d'invariance (2.7) et d'ergodicité (2.8) font que $\tau_{\underline{t}}$ apparaît comme un flot ergodique préservant la mesure sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$.

Dans (Papanicolaou & Varadhan, 1979), (Kozlov, 1980), (Papanicolaou, 1985) et (Sab, 1991a-b, 1994), les auteurs stipulent qu'un milieu SHE est modélisé par la donnée d'un espace de probabilité *quelconque* muni d'un flot ergodique préservant la mesure de probabilité. Ils ne précisent ni la nature de cet espace de probabilité ni le flot qui agit sur lui, car seules les propriétés d'homogénéité statistique et d'ergodicité qui sont exprimées par le flot sont importantes du point de vue de l'homogénéisation.

Dans (Sab, 1992), l'espace de probabilité et le flot qui lui est associé sont précisés implicitement, sans utiliser le vocabulaire de la théorie de la mesure, par l'intermédiaire des fonctions de probabilité et de leurs propriétés. Il s'agit de l'espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ et du flot défini par (2.9). En réalité, cet espace de probabilité est suffisamment général pour contenir tous les modèles pertinents de milieux aléatoires.

Remarque 2

Dans la plupart des modèles, la mesure de probabilité "charge" seulement une partie de Ω . Dans l'exemple du damier aléatoire évoqué ci-dessus, Ω est l'ensemble des champs localement Riemann-intégrables de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} . La mesure de probabilité "charge" uniquement l'ensemble des champs caractéristiques de la phase I, c.-à-d., les champs constants par morceaux qui prennent la valeur 1 ou 0 dans les carrés C_{ij} .

Lorsqu'on parlera d'une application de Ω dans \mathbf{R} (on dit aussi fonctionnelle réelle sur Ω), on supposera implicitement que c'est une application qui va de la partie "chargée" de Ω dans \mathbf{R} .

6) Processus aléatoire statistiquement homogène

Comme on l'a déjà dit plus haut, l'intérêt majeur des milieux SHE est de pouvoir identifier des moyennes volumiques sur des domaines suffisamment grands à des espérances. On peut trouver l'énoncé de ce résultat connu sous le nom de théorème ergodique de Birkhoff dans (Cornfeld *et al.*, 1982), par exemple.

Soit X une fonctionnelle qui fait correspondre à chaque configuration ω le réel $X(\omega)$. Alors, on peut associer à X le processus aléatoire (ou champ aléatoire) suivant:

$$\tilde{X}: (\omega, \underline{y}) \mapsto \tilde{X}(\omega, \underline{y}) = X(\omega_{-\underline{y}})$$

où

$$\omega_{-\underline{y}}: \underline{z} \mapsto \omega_{-\underline{y}}(\underline{z}) = \omega(\underline{z} + \underline{y})$$

est la configuration ω translaté du vecteur \underline{y} .

Si le milieu considéré est SHE au sens des définitions 2.1 et 2.2, alors les propriétés statistiques de \tilde{X} sont invariantes par toute translation dans l'espace. On dit qu'il est statistiquement homogène. En particulier, l'espérance de \tilde{X} , lorsqu'elle existe, est indépendante de \underline{y} : $\mathbf{E}\tilde{X}(\omega, \underline{y}) = \mathbf{E}X$.

Théorème de Birkhoff. Si $\mathbf{E}|X|$ est fini, alors pour toute réalisation de ω ⁴, on a:

$$\forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \langle \tilde{X}(\omega, \cdot) \rangle_{\rho \mathbf{C}} = \mathbf{E}X$$

où \mathbf{C} est un cube quelconque de \mathbf{R}^d , et $\rho \mathbf{C}$ est le dilaté de \mathbf{C} . ■

L'application la plus importante du théorème de Birkhoff est que, dans un milieu SHE, on peut identifier théoriquement les fonctions de probabilité du milieu à l'aide d'une seule réalisation (c'est-à-dire un seul échantillon infini). En effet, prenons pour X la fonctionnelle caractéristique de l'événement $\omega(\underline{y}_1) \in I_1, \dots, \omega(\underline{y}_n) \in I_n$, c'est-à-dire:

$$(2.10) \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(\underline{y}_1) \in I_1, \dots, \omega(\underline{y}_n) \in I_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ sont n points de \mathbf{R}^d et I_1, I_2, \dots, I_n n pavés de \mathbf{R}^r . Alors:

$$(2.11) \quad \mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n) = \mathbf{E}X = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \langle \tilde{X}(\omega, \cdot) \rangle_{\rho \mathbf{C}} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\rho \mathbf{C}|} \int_{1 \in \rho \mathbf{C}} X(\omega_{-\underline{1}}) d\nu$$

⁴c.-à-d. avec une probabilité un.

Ainsi, on peut théoriquement calculer à l'aide de moyennes volumiques toutes les fonctions de probabilité si on connaît une seule réalisation du milieu. Donc, dans un milieu SHE, toute l'information statistique est contenue dans chaque réalisation du milieu. Plus précisément, soit ω une réalisation d'un milieu SHE, alors l'ensemble des translatés de ω , $\{\omega_{-\underline{t}}, \underline{t} \in \mathbf{R}^d\}$, peut être considéré comme un ensemble d'échantillons statistiquement représentatif du milieu. L'espérance d'une fonctionnelle quelconque X est identifiée à la moyenne volumique des valeurs qu'elle prend sur cet ensemble, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}X = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\rho\mathbf{C}|} \int_{\underline{t} \in \rho\mathbf{C}} X(\omega_{-\underline{t}}) d\underline{v}.$$

Lorsqu'il s'agit d'un milieu SPE, les choses sont tout à fait analogue: si ω est une réalisation de ce milieu, alors l'ensemble des translatés de ω par un vecteur à composantes entières, $\{\omega_{-\underline{t}}, \underline{t} \in \mathbf{Z}^d\}$ est un ensemble d'échantillons statistiquement représentatif du milieu. L'espérance d'une fonctionnelle quelconque X est identifiée à la moyenne arithmétique des valeurs qu'elles prend sur cet ensemble, c'est-à-dire,

$$\mathbf{E}X = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\rho\mathbf{C}|} \sum_{\underline{t} \in \rho\mathbf{C} \cap \mathbf{Z}^d} X(\omega_{-\underline{t}}).$$

7) Le théorème sous-additif

La théorie ergodique a suscité beaucoup d'intérêt chez les mathématiciens dans les trois dernières décennies. Parmi les progrès les plus remarquables de cette théorie se trouve la généralisation du théorème de Birkhoff à des processus aléatoires dits sous-additifs. Cette généralisation est due à (Kingmann, 1973) (Kingmann, 1976) dans le cas unidimensionnel, et à (Ackoglou & Krengel, 1981) dans le cas multi-dimensionnel. On peut trouver dans (Krengel, 1985) l'énoncé et la démonstrations de tous ces théorèmes.

Dans (Sab, 1992), j'ai proposé une version du théorème de Ackoglou & Krengel particulièrement bien adaptée à l'homogénéisation des milieux aléatoires. En voici l'énoncé.

On désigne, dans toute la suite, par \mathbf{C} un cube de \mathbf{R}^d dont les côtés sont parallèles aux vecteurs de la base canoniques de \mathbf{R}^d . Soit F une fonctionnelle réelle qui associe à chaque cube \mathbf{C} et à chaque configuration ω le réel $F(\mathbf{C}, \omega)$. Par exemple, \tilde{X} est un processus statiquement homogène, et F représente la moyenne volumique de \tilde{X} sur \mathbf{C} , $F(\mathbf{C}, \omega) = \langle \tilde{X}(\omega, \cdot) \rangle_{\mathbf{C}}$.

On va énoncer des hypothèses sur la fonctionnelle F et sur le milieu aléatoire qui assurent l'existence d'une limite de $F(\mathbf{C}, \omega)$ quand la taille du cube \mathbf{C} tend vers l'infini.

On suppose tout d'abord que F est une propriété invariante par translation.

$$(H.1) \quad \forall \underline{t} \in \mathbf{R}^d \quad F(\mathbf{C}_{\underline{t}}, \omega_{\underline{t}}) = F(\mathbf{C}, \omega)$$

où le champ $\omega_{\underline{t}}$ est le translaté du champ ω , et $\mathbf{C}_{\underline{t}}$ est le translaté de \mathbf{C} , c'est-à-dire l'ensemble des points $\underline{y} \in \mathbf{R}^d$ tels que $\underline{y} - \underline{t} \in \mathbf{C}$.

Cette hypothèse est systématiquement vérifiée lorsque ω et F sont des propriétés matérielles. En effet, dans ce cas, F est invariante par translation du repère; ce qui se traduit par (H.1).

Ensuite, on suppose que, pour toute partition de \mathbf{C} en n cubes disjoints deux à deux $(\mathbf{C}_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $|\mathbf{C}| = |\mathbf{C}_1| + \dots + |\mathbf{C}_n|$, on a la propriété de sous-additivité suivante:

$$(H.2) \quad F(\mathbf{C}, \omega) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{C}_i|}{|\mathbf{C}|} F(\mathbf{C}_i, \omega)$$

Comme on peut le voir, si F est la moyenne volumique du processus \tilde{X} sur le domaine \mathbf{C} , alors F est une fonctionnelle sous-additive invariante par translation.

On suppose de plus que:

$$(H.3) \quad \text{Le milieu aléatoire est SHE (resp. SPE)}$$

Et que F est uniformément bornée par rapport à \mathbf{C} et ω , c'est-à-dire, il existe un réel $c > 0$, et un sous-ensemble $\Omega' \subset \Omega$ avec $\mathcal{P}(\Omega') = 1$ tels que⁵:

$$(H.4) \quad \forall \omega \in \Omega', \forall \mathbf{C} \quad |F(\mathbf{C}, \omega)| \leq c$$

Enfin, on suppose que, pour tout \mathbf{C} , $F(\mathbf{C}, \cdot)$ est une application mesurable (ou variable aléatoire); c'est à dire qu'on sait définir la mesure de probabilité de l'ensemble des ω tels que $F(\mathbf{C}, \omega)$ soit dans un intervalle donné de \mathbf{R} , autrement dit, la probabilité pour que $F(\mathbf{C}, \omega)$ soit dans cet intervalle. Cette hypothèse de régularité de l'application $\omega \rightarrow F(\mathbf{C}, \omega)$, notée (H.5), est toujours vérifiée pour toutes les fonctionnelles F qui ont un sens physique.

Théorème 2.1 (Ackoglou & Krengel, 1981). Version (Sab, 1992).

Sous les hypothèses (H1) à (H5), il existe une constante qui ne dépend pas de ω (déterministe), notée F_{hom} , telle que pour toute réalisation de ω , ⁶

$$\forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} F(\rho \mathbf{C}, \omega) = F_{\text{hom}}$$

De plus, on a:

$$F_{\text{hom}} = \inf_{\mathbf{C}} \mathbf{E} F(\mathbf{C}, \omega)$$

où $\mathbf{E} F(\mathbf{C}, \omega)$ est l'espérance de la variable aléatoire $\omega \rightarrow F(\mathbf{C}, \omega)$, et l'infimum est pris sur tous les cubes \mathbf{C} dans un milieu SHE, et sur les cubes dont les sommets ont des composantes entières dans un milieu SPE. Dans les deux cas, $\mathbf{E} F(\mathbf{C}, \omega)$ ne dépend de \mathbf{C} que par sa taille. ■

⁵Ceci veut dire que, comme dans la plupart des modèles la mesure de probabilité charge seulement une partie de Ω , il suffit de définir l'application F uniquement sur cette partie et de vérifier ensuite qu'elle est uniformément bornée quand ω parcourt cette partie.

⁶c.-à-d. avec une probabilité un.

Chapitre 3

Homogénéisation des milieux aléatoires

1) Position du problème

Nous avons vu que la modélisation d'un milieu aléatoire passe par la notion de configuration. L'ensemble des configurations possibles est l'ensemble des champs localement Riemann-intégrables de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^r , noté Ω . L'aléa est décrit par la donnée des fonctions de probabilité de tout ordre, ou de manière équivalente, par la mesure qu'elles définissent sur Ω . Dans beaucoup de modèles, cette mesure charge seulement une partie de Ω . Dans ce cas, lorsqu'on parle de fonctionnelle réelle sur Ω , on parle d'application qui va de cette partie vers \mathbf{R} .

Pour compléter la description du milieu, il faut se donner son comportement mécanique en fonction de la configuration ω . On suppose que, pour tout ω ¹, ce comportement est décrit par un champ de potentiel $(\underline{y}, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$ vérifiant les conditions (1.1) du chapitre 1. Naturellement, comme $\tilde{\phi}$ décrit une propriété matérielle, il doit être invariant par translation dans l'espace. Autrement dit, $\tilde{\phi}$ doit vérifier la propriété suivante pour toute translation \underline{t} :

$$\tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon}) = \tilde{\phi}(\omega_{\underline{t}}, \underline{y} + \underline{t}, \underline{\varepsilon})$$

où $\omega_{\underline{t}}(\underline{y}) = \omega(\underline{y} - \underline{t})$ est la translattée de ω .

En particulier, si $\tilde{\phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon})$ dénote la valeur du potentiel au point origine, alors on a :

$$(3.1) \quad \tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon}) = \tilde{\phi}(\omega_{-\underline{y}}, 0, \underline{\varepsilon}) = \tilde{\phi}_0(\omega_{-\underline{y}}, \underline{\varepsilon})$$

Cette relation montre qu'il suffit de se donner l'application $(\omega, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon})$ pour déterminer complètement l'application $(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$. On suppose dans la suite que $(\omega, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon})$ vérifie les propriétés suivantes :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\varepsilon}, \quad \tilde{\phi}_0(\cdot, \underline{\varepsilon}) \text{ est mesurable} \\ \forall \omega, \quad \tilde{\phi}_0(\omega, \cdot) \text{ est convexe et vérifie} \\ \quad \quad \quad a_1 |\underline{\varepsilon}|^p \leq \tilde{\phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon}) \leq a_2 |\underline{\varepsilon}|^p \end{array} \right.$$

¹Avec une probabilité un.

où $1 \leq p < \infty$, $a_2 \geq a_1 > 0$ sont des constantes positives ².

Les conditions (3.2) sur $\tilde{\phi}_0$ assurent que, pour tout ω , le champ de potentiel $(\underline{y}, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$ défini par (3.1) vérifie les conditions (1.1) du premier chapitre. Voir (Sab, 1994a) pour les détails. Est-il homogénéisable?

La réponse est simple: il est homogénéisable avec une probabilité égale à un dans les milieux SHE et SPE. De plus, le milieu homogénéisé ainsi obtenu est déterministe (ne dépend pas de ω).

Il existe deux méthodes pour parvenir à ce résultat. Une qui s'appuie sur le théorème sous-additif (Dal Maso & Modica, 1986), et l'autre qui s'appuie sur une analogie formelle entre les milieux périodiques et les milieux SHE.

Mon apport ici est, d'une part, d'établir le résultat dans le cas de l'analyse limite (Sab, 1991a-b, 1994a), et d'autre part, de simplifier et d'étendre l'approche de (Dal Maso & Modica, 1986) à l'élasticité non linéaire, et en particulier, d'établir une généralisation des bornes de Voigt et Reuss (Sab, 1992).

2) Par le théorème sous-additif

Lorsque l'on compare le théorème sous-additif à la définition d'un milieu homogénéisable qui est donnée dans le premier chapitre, il est naturel d'identifier les fonctionnelles F et Φ^{dc} . En effet, pour \underline{E} fixé, on prend pour $F(\mathbf{C}, \omega)$ le potentiel $\Phi_{\mathbf{C}}^{dc}(\omega, \underline{E})$ défini par l'approche en déformation (1.4):

$$(3.3) \quad \Phi_{\mathbf{C}}^{dc}(\omega, \underline{E}) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\underline{u}} \left\{ \left\langle \tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon}(\underline{y}) + \underline{E}) \right\rangle_{\mathbf{C}}, \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \text{ avec } \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\mathbf{C} \right\}$$

La propriété cruciale à vérifier pour appliquer le théorème sous-additif est précisément la sous-additivité de Φ^{dc} . Si on partage \mathbf{C} en n cubes disjoints deux à deux $(\mathbf{C}_i)_{i=1, \dots, n}$ avec $|\mathbf{C}| = |\mathbf{C}_1| + \dots + |\mathbf{C}_n|$, alors:

$$\Phi_{\mathbf{C}}^{dc}(\omega, \underline{E}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{C}_i|}{|\mathbf{C}|} \Phi_{\mathbf{C}_i}^{dc}(\omega, \underline{E})$$

Cette propriété est très facile à établir. Elle découle du fait qu'on peut associer "par collage" à chaque suite de champs de déplacement (\underline{u}_i) , où \underline{u}_i est un champ cinématiquement admissible dans \mathbf{C}_i nul sur ces bords, un champ \underline{u} cinématiquement admissible dans \mathbf{C} nul sur ses bords.

De la même façon, on établit que $\Phi_{\mathbf{C}}^{co*}(\omega, \underline{\Sigma})$ défini par l'approche en contrainte (1.5) est sous-additif.

Théorème 3.1 (Sab, 1992). Soit un milieu SHE (resp. SPE) sur lequel on se donne une application $(\omega, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon})$ qui vérifie la propriété (3.2). Alors, il existe une fonction

²Dans (3.2), il suffit d'avoir la convexité et l'encadrement pour tout ω dans un ensemble de mesure de probabilité égale à un.

convexe de \mathbf{R}^s qui ne dépend pas de ω (déterministe), notée Φ_{hom} , telle que pour toute réalisation de ω , le champ de potentiel $(\underline{y}, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$ est homogénéisable.

$$(3.4) \quad \forall \underline{\underline{E}} \quad \forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Phi_{\rho\mathbf{C}}^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{E}}) = \Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$$

De plus:

$$(3.5) \quad \forall \underline{\underline{E}} \quad \Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}}) = \text{Inf}_{\mathbf{C}} \mathbf{E} \Phi_{\mathbf{C}}^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{E}})$$

et

$$(3.6) \quad \forall \underline{\underline{\Sigma}} \quad \Phi_{\text{hom}}^*(\underline{\underline{\Sigma}}) = \text{Inf}_{\mathbf{C}} \mathbf{E} \Phi_{\mathbf{C}}^{\text{co}*}(\omega, \underline{\underline{\Sigma}}) \quad \text{si } p > 1$$

où les supremums dans (3.5) et (3.6) sont pris sur tous les cubes \mathbf{C} dans un milieu SHE, et sur les cubes dont les sommets ont des composantes entières dans un milieu SPE. ■

Pour un $\underline{\underline{E}}$ fixé, $\Phi_{\mathbf{C}}^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{E}})$ est une variable aléatoire paramétrée par la taille du cube \mathbf{C} . Le théorème précédent implique que son espérance, $\mathbf{E} \Phi_{\mathbf{C}}^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{E}})$ est une borne supérieure de $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$. Lorsque la taille du cube \mathbf{C} tend vers l'infini, tous les moments de $\Phi_{\mathbf{C}}^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{E}})$, et en particulier son écart-type, tendent vers zéro. De plus, $\mathbf{E} \Phi_{\mathbf{C}}^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{E}})$ tend vers $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$.

Noter que l'équivalence asymptotique de l'approche en déformation dans les milieux élastiques avec toutes les conditions limites homogènes (Théorème 1.4), et en particulier avec les conditions limites homogènes en contrainte (Théorème 1.3), implique que la formule (3.4) est équivalente à:

$$(3.4') \quad \forall \underline{\underline{\Sigma}} \quad \forall \mathbf{C} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Phi_{\rho\mathbf{C}}^{\text{co}*}(\omega, \underline{\underline{\Sigma}}) = \Phi_{\text{hom}}^*(\underline{\underline{\Sigma}})$$

Quant à la formule (3.6), elle découle de la formule précédente et de la sous-additivité de $\Phi_{\mathbf{C}}^{\text{co}*}$.

De plus, en passant à la conjuguée (transformée de Legendre-Fenchel), (3.6) est équivalente à:

$$(3.6') \quad \forall \underline{\underline{E}} \quad \Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}}) = \text{Sup}_{\mathbf{C}} (\mathbf{E} \Phi_{\mathbf{C}}^{\text{co}*}(\omega, \cdot))^*(\underline{\underline{E}}) \quad \text{si } p > 1$$

On obtient ainsi avec (3.5) et (3.6') des encadrements de $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$.

Lorsqu'il s'agit de milieux élastiques linéaires on peut associer à Φ_{hom} les tenseurs de rigidité $\underline{\underline{R}}_{\text{hom}}$ et de souplesse $\underline{\underline{S}}_{\text{hom}}$ définis, respectivement, par

$$\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{R}}_{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{hom}}^*(\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}}_{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}}$$

De la même façon, on associe à $\Phi_C^{dc}(\omega, \underline{E})$ et $\Phi_C^{co}(\omega, \underline{E})$ les tenseurs élastiques correspondants. Alors, les bornes (3.5) et (3.6') deviennent:

$$(3.7) \quad \forall \underline{E} \quad \text{Sup}_{\underline{C}} \underline{E} : \left(\underline{E} \underline{S}_{\underline{C}}^{co}(\omega) \right)^{-1} : \underline{E} = \underline{E} : \underline{R}_{\underline{hom}} : \underline{E} = \text{Inf}_{\underline{C}} \underline{E} \underline{E} : \underline{R}_{\underline{C}}^{dc}(\omega) : \underline{E}$$

Les bornes (3.5) et (3.6) sont en fait des généralisations des bornes de Voigt et Reuss car lorsque la taille du cube \underline{C} tend vers zéro, $\underline{E} \Phi_C^{dc}(\omega, \underline{E})$ tend vers $\underline{E} \tilde{\Phi}_0(\omega, \underline{E})$, et $\underline{E} \Phi_C^{co*}(\omega, \underline{E})$ tend vers $\underline{E} \tilde{\Phi}_0^*(\omega, \underline{E})$.

La première application du théorème sous-additif de (Ackoglu & Krengel, 1981) à l'homogénéisation des milieux aléatoires est à ma connaissance due à (Dal Maso & Modica, 1986). Dans cet article les auteurs étudient l'homogénéisation des propriétés thermiques non linéaires des milieux SPE. Le formalisme qu'ils utilisent est particulièrement difficile d'accès même pour des spécialistes. L'apport dans (Sab, 1992) est une simplification considérable dans l'énoncé des hypothèses statistiques (présentée dans le chapitre précédent), l'extension des résultats aux milieux élastiques non linéaires SPE et SHE, et enfin, l'obtention des bornes (3.5) et (3.6). Comme je l'ai déjà signalé au premier chapitre, lors de la rédaction de cet article je n'étais pas au courant des résultats de compacité qui justifient la définition 1.2 dans le cas de l'analyse limite.

Ainsi, afin d'établir un résultat d'homogénéisation en analyse limite, j'ai suivi une autre voie que le théorème sous-additif. Cette voie est analogue par son esprit à celle empruntée par (Papanicolaou & Varadhan, 1979), (Kozlov, 1980), (Papanicolaou, 1985) dans des problèmes linéaires. Mes travaux dans ce domaine, dont une brève description se trouve ci-dessous, constituent, donc, une extension des résultats obtenus par ces auteurs. Outre le théorème d'homogénéisation en analyse limite, on trouve dans (Sab, 1991a-b, 1994a) une étude fouillée de la dualité dans les milieux SHE qui enrichit les résultats déjà connus en élasticité linéaire et non linéaire. Voir (Kozlov et al., 1994), par exemple.

3) Par analogie avec le milieu périodique

3.1) L'hypothèse de périodicité dans la théorie mathématique de l'homogénéisation

Comme je l'ai déjà signalé dans le premier chapitre, la théorie mathématique de l'homogénéisation a pour but d'établir la convergence, quand la taille des hétérogénéités tend vers zéro, de la solution d'un problème mécanique (bien) posé sur un milieu hétérogène vers la solution du même problème posé sur le milieu homogénéisé équivalent. Dans le cas de l'élasticité, cette convergence est dans le sens (1.12), alors que dans le cas de l'analyse limite cette convergence est dans le sens (1.15) et (1.18). Ces convergences ont été initialement démontrées pour les milieux périodiques.

Afin d'étendre ces résultats d'homogénéisation aux milieux aléatoires SHE, la démarche que j'ai suivie consiste à:

1) Examiner minutieusement les travaux sur les milieux périodiques afin de détecter les propriétés qui sont suffisantes pour la démonstration des résultats d'homogénéisation.

Autrement dit, il s'agit de savoir comment intervient précisément la périodicité du milieu dans ces démonstrations.

2) Cet examen montre que seules les propriétés "moyennisantes" des milieux périodiques interviennent dans les démonstrations. Or ces propriétés moyennisantes sont vérifiées aussi dans les milieux SHE. Donc, en suivant pas à pas les démonstrations établies dans le cas périodique, on devrait pouvoir étendre leur domaine d'application aux milieux SHE. C'est de cette façon que j'ai étendu aux milieux SHE les théorèmes d'homogénéisation en analyse limite établis par (Bouchitté, 1986-1987) dans les milieux périodiques.

Détaillons maintenant les propriétés moyennisantes des milieux périodiques évoquées ci-dessus.

1) Tout champ $\underline{y} \mapsto f(\underline{y})$ Y -périodique suffisamment régulier vérifie:

$$(3.8) \quad \forall C \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \langle f \rangle_{\rho C} = \langle f \rangle_Y$$

Ce qui veut dire que la moyenne de f sur un cube suffisamment grand est pratiquement égale à sa moyenne sur Y .

La convergence (3.8) est souvent utilisée dans les démonstrations sous la forme équivalente suivante:

$$(3.8') \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \langle f_\delta \varphi \rangle_D = \langle f \rangle_Y \times \langle \varphi \rangle_D$$

pour toute fonction réelle φ de classe C^∞ dans l'ouvert borné D . Ici, $f_\delta(\underline{x}) = f(\underline{x}/\delta)$ est le champ dilaté de f .

2) Lorsque le champ de potentiel ϕ qui décrit le comportement du milieu est Y -périodique, on sait définir le potentiel homogénéisé en considérant directement le milieu infini sans passer par un volume "représentatif" fini. On introduit à cet effet les définitions suivantes.

On dit qu'un champ de déformation $\underline{y} \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y})$ est cinématiquement admissible (CA) sur \mathbf{R}^d si, et seulement si, il existe un champ de déplacement $\underline{y} \mapsto \underline{u}(\underline{y})$ tel que $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u})$ au sens des distributions.

Par définition, pour $1 \leq p < \infty$, l'espace CA^p est l'espace des champs de déformation Y -périodiques cinématiquement admissibles sur \mathbf{R}^d qui vérifient $\left\langle |\underline{\underline{\varepsilon}}|^p \right\rangle_Y < +\infty$.

$$(3.9) \quad CA^p = \left\{ \underline{y} \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y}) \text{ } Y\text{-périodique, CA sur } \mathbf{R}^d, \left\langle |\underline{\underline{\varepsilon}}|^p \right\rangle_Y < +\infty \right\}$$

On dit que le champ de contrainte $\underline{y} \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y})$ est statiquement admissible (SA) sur \mathbf{R}^d si, et seulement si, $\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ au sens des distributions.

Par définition, pour $1 < q \leq \infty$, l'espace SA^q est l'espace des champs de contrainte Y -périodiques statiquement admissibles sur \mathbf{R}^d qui vérifient $\langle |\underline{\underline{\sigma}}|^q \rangle_Y < +\infty$. (dans le cas $q = \infty$, $\langle |\underline{\underline{\sigma}}|^q \rangle_Y < +\infty$ veut dire $\underline{\underline{\sigma}}$ borné)

$$(3.10) \quad SA^q = \left\{ \underline{y} \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \text{ } Y\text{-périodique, SA sur } \mathbf{R}^d, \langle |\underline{\underline{\sigma}}|^q \rangle_Y < +\infty \right\}$$

Le potentiel homogénéisé d'un milieu périodique est alors donné par:

$$(3.11) \quad \forall \underline{\underline{E}} \quad \Phi_Y^{pc}(\underline{\underline{E}}) = \inf_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \left\{ \langle \phi(\underline{y}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y})) \rangle_Y, \underline{\underline{\varepsilon}} \in CA^p, \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_Y = \underline{\underline{E}} \right\}$$

Les champs de déplacement dont dérivent les $\underline{\underline{\varepsilon}}$ appartenant à CA^p sont utilisés dans les démonstrations comme des champs tests.

Par ailleurs, certaines démonstrations sont basées sur des arguments de dualité. On établit alors l'orthogonalité au sens (3.12) et (3.12') des espaces CA^p et SA^{p^*} où p^* est défini par $1/p + 1/p^* = 1$:

$$(3.12) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \in CA^p \Leftrightarrow \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_Y = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_Y : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_Y \quad \forall \underline{\underline{\sigma}} \in SA^{p^*}$$

qui est équivalent à

$$(3.12') \quad \underline{\underline{\sigma}} \in SA^{p^*} \Leftrightarrow \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_Y = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_Y : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_Y \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in CA^p$$

Grâce à cette orthogonalité, on établit que le potentiel conjugué de Φ_Y^{pc} est donné par la formule:

$$(3.13) \quad \forall \underline{\underline{\Sigma}} \quad \Phi_Y^{pc*}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \inf_{\underline{\underline{\sigma}}} \left\{ \langle \phi^*(\underline{y}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y})) \rangle_Y, \underline{\underline{\sigma}} \in SA^{p^*}, \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_Y = \underline{\underline{\Sigma}} \right\}$$

Les champs de contrainte de SA^{p^*} sont alors utilisés dans les démonstrations comme des champs de contrainte tests.

Noter ici que la convergence (3.8) n'est pas spécifique de la périodicité de f . Elle est à rapprocher du théorème de Birkhoff qui stipule que cette convergence a lieu pour toute réalisation d'un processus SHE. Dans ce cas, la limite est l'espérance au lieu de la moyenne volumique sur la cellule de base.

Afin d'étendre la validité des résultats d'homogénéisation établis dans les milieux périodiques aux milieux SHE, il nous reste à donner un sens aux espaces CA^p et SA^q et aux formules (3.11)-(3.13) dans ces milieux.

Pour ce faire, nous allons tout d'abord faire apparaître le milieu périodique comme un milieu SHE particulier, nous interpréterons alors le sens de ces espaces et de ces formules dans le cadre de la théorie des milieux SHE exposée au chapitre 2, et enfin, nous en donnerons l'extension aux milieux SHE quelconques.

3.2) Le milieu périodique comme cas particulier du milieu SHE

Considérons à titre d'exemple un milieu Y -périodique biphasé. La répartition des phases est caractérisée, par exemple, par la donnée du champ caractéristique de la phase 1 qui vaut 1 dans cette phase, et 0 ailleurs. Naturellement, ce champ noté ω^{per} est supposé Y -périodique et localement Riemann-intégrable.

Nous allons associer à ce milieu un milieu SHE dont la mesure de probabilité charge uniquement l'ensemble des translatés de ω^{per} , $\{\omega_{-\underline{t}}^{\text{per}}, \underline{t} \in \mathbf{R}^d\}$ où $\omega_{-\underline{t}}^{\text{per}}(\underline{y}) = \omega^{\text{per}}(\underline{y} + \underline{t})$. Or, du fait de la Y -périodicité de ω^{per} , cet ensemble est identique à l'ensemble des configurations translatés d'un vecteur appartenant à Y . C'est-à-dire, $\{\omega_{-\underline{t}}^{\text{per}}, \underline{t} \in Y\} = \{\omega_{-\underline{t}}^{\text{per}}, \underline{t} \in \mathbf{R}^d\}$. Alors, on peut faire correspondre bijectivement à chaque translaté de ω^{per} un point de Y . Grâce à cette bijection, on peut "identifier" l'ensemble des translatés de ω^{per} à Y .

L'idée est de "probabiliser" le milieu en tirant au hasard la configuration du milieu dans l'ensemble des translatés de ω^{per} , c'est-à-dire en tirant au hasard le point correspondant dans Y selon la loi uniforme sur Y . On répartit ainsi la mesure de probabilité uniformément sur tous les translatés de ω^{per} .

On montre facilement en calculant les fonctions de probabilité que le milieu aléatoire ainsi défini est SHE.

En effet, calculons la fonction de probabilité d'ordre n de ce milieu, $\mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n)$. On introduit à cet effet la fonction $f_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n)$ qui vaut 1 si $\omega^{\text{per}}(\underline{y}_1) \in I_1, \dots, \omega^{\text{per}}(\underline{y}_n) \in I_n$, et 0 sinon. La Y -périodicité de ω^{per} confère à f_n des propriétés évidentes d'invariance par translation. Alors, $\mathcal{P}_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n) = \int_{\text{ov}} f_n(\underline{t}, \underline{y}_2 - \underline{y}_1 + \underline{t}, \dots, \underline{y}_n - \underline{y}_1 + \underline{t}; I_1, \dots, I_n) d\underline{t}$. On voit que ces fonctions de probabilité vérifient l'homogénéité statistique. Quant à la propriété d'ergodicité, on peut l'établir facilement en exploitant la propriété suivante des fonctions f :

$f_{n+m}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, \underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m; I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_m) = f_n(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n; I_1, \dots, I_n) \times f_m(\underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m; I'_1, \dots, I'_m)$
si tous les points $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, \underline{y}'_1, \dots, \underline{y}'_m$ sont dans Y et vérifient $\forall \underline{y}_i, \forall \underline{y}'_j, \underline{y}_i \neq \underline{y}'_j$.

Soit X une fonctionnelle réelle de Ω muni de la mesure de probabilité ainsi définie. Comme cette mesure de probabilité charge uniquement l'ensemble des translatés de ω^{per} , la fonctionnelle X est définie uniquement sur cet ensemble. Elle s'identifie au champ f qui associe à chaque point \underline{t} de Y le réel $X(\omega_{-\underline{t}}^{\text{per}})$, $\underline{t} \mapsto f(\underline{t}) = X(\omega_{-\underline{t}}^{\text{per}})$. L'espérance de X s'identifie alors à la moyenne volumique sur Y du champ f . Par ailleurs, le processus statistiquement homogène associé à X est donné par la relation $\tilde{X}: (\omega, \underline{y}) \mapsto \tilde{X}(\omega, \underline{y}) = X(\omega_{-\underline{y}})$ où \underline{y} parcourt tout l'espace et ω l'ensemble des translatés de ω^{per} . Il est facile de voir que $\underline{y} \mapsto \tilde{X}(\omega^{\text{per}}, \underline{y})$ s'identifie au prolongement à tout l'espace par Y -périodicité du champ f défini sur Y . Et que, quand ω parcourt l'ensemble des translatés de ω^{per} , les champs $\underline{y} \mapsto \tilde{X}(\omega, \underline{y})$ parcourent l'ensemble des translatés du champ $\underline{y} \mapsto \tilde{X}(\omega^{\text{per}}, \underline{y})$.

A partir de ces remarques, on peut dresser les correspondances suivantes entre un milieu périodique et un milieu SHE.

Milieu périodique	Milieu SHE
Champ f défini sur Y : $\underline{t} \mapsto f(\underline{t})$	Fonctionnelle X sur Ω : $\omega \mapsto X(\omega)$
Moyenne volumique sur Y de f : $\langle f \rangle_Y$	Espérance de X : $\mathbf{E}X$
Prolongement à tout l'espace de f par Y -périodicité	Processus associé à X : $\tilde{X}: (\omega, \underline{y}) \mapsto \tilde{X}(\omega, \underline{y}) = X(\omega_{-\underline{y}})$

Nous avons fait correspondre à chaque milieu périodique un milieu SHE dont les configurations sont les translats du milieu périodique. De la même façon, et en utilisant les mêmes idées, on peut faire correspondre à tout milieu SPE un milieu SHE dont les configurations sont les translats des configurations du milieu SPE considéré. Ainsi, les milieux périodiques et les milieux SPE apparaissent comme des milieux SHE particuliers.

3.3) Compatibilité cinématique et statique dans les milieux SHE

Ces considérations nous conduisent à étendre aux milieux SHE quelconques les définitions des espaces CA^p et SA^q introduits dans les milieux périodiques.

Soit un milieu SHE quelconque tel qu'il est défini au chapitre 2. On rappelle qu'on associe à chaque fonctionnelle X sur Ω : $\omega \mapsto X(\omega)$ le processus $\tilde{X}: (\omega, \underline{y}) \mapsto \tilde{X}(\omega, \underline{y}) = X(\omega_{-\underline{y}})$.

Par définition, pour $1 \leq p < \infty$, la fonctionnelle $\omega \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(\omega)$ de Ω dans \mathbf{R}^s appartient à l'espace CA^p si, et seulement si, $\mathbf{E}|\underline{\underline{\varepsilon}}|^p < +\infty$, et il existe une partie de Ω de mesure de probabilité un, notée Ω' , telle que pour tout ω dans Ω' , le champ $\underline{y} \mapsto \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\omega, \underline{y})$ est un champ de déformation cinématiquement admissible sur \mathbf{R}^d . Autrement dit, $\underline{y} \mapsto \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\omega, \underline{y})$ est CA sur \mathbf{R}^d avec une probabilité un.

$$(3.9') \quad CA^p = \left\{ \omega \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(\omega), \underline{y} \mapsto \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\omega, \underline{y}) \text{ CA sur } \mathbf{R}^d \text{ avec une probabilité 1, } \mathbf{E}|\underline{\underline{\varepsilon}}|^p < +\infty \right\}$$

Par définition, pour $1 < q \leq \infty$, la fonctionnelle $\omega \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(\omega)$ de Ω dans \mathbf{R}^s appartient à l'espace SA^q si, et seulement si, $\mathbf{E}|\underline{\underline{\sigma}}|^q < +\infty$ et ³ il existe une partie de Ω de mesure de probabilité un, notée Ω' , telle que pour tout ω dans Ω' , le champ $\underline{y} \mapsto \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}(\omega, \underline{y})$ est un

³ $\mathbf{E}|\underline{\underline{\sigma}}|^q < +\infty$ signifie $\underline{\underline{\sigma}}$ borné si $q=\infty$

champ de contrainte statiquement admissible sur \mathbf{R}^d . Autrement dit, $\underline{y} \mapsto \underline{\tilde{\sigma}}(\omega, \underline{y})$ est SA sur \mathbf{R}^d avec une probabilité un.

$$(3.10') \quad SA^q = \left\{ \omega \mapsto \underline{\sigma}(\omega), \underline{y} \mapsto \underline{\tilde{\sigma}}(\omega, \underline{y}) \text{ SA sur } \mathbf{R}^d \text{ avec une probabilité 1, } \mathbf{E}|\underline{\sigma}|^q < +\infty \right\}$$

Théorème 3.2 (Sab, 1991a-b, 1994a). Soit un milieu SHE alors les espaces CA^p et SA^q définis par (3.9') et (3.10') sont orthogonaux au sens de (3.12) et (3.12'). Par ailleurs, si on se donne une application $(\omega, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\Phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon})$ qui vérifie la propriété (3.2). Alors, il existe une fonction convexe de \mathbf{R}^s qui ne dépend pas de ω (déterministe), notée Φ_{hom} , telle que pour toute réalisation de ω , le champ de potentiel $(\underline{y}, \underline{\varepsilon}) \mapsto \tilde{\Phi}(\omega, \underline{y}, \underline{\varepsilon})$ est homogénéisable. De plus, on a:

$$(3.11') \quad \forall \underline{E} \quad \Phi_{\text{hom}}(\underline{E}) = \inf_{\underline{\varepsilon}} \left\{ \mathbf{E} \tilde{\Phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon}(\omega)), \underline{\varepsilon} \in CA^p, \mathbf{E} \underline{\varepsilon} = \underline{E} \right\}$$

$$(3.13') \quad \forall \underline{\Sigma} \quad \Phi_{\text{hom}}^*(\underline{\Sigma}) = \inf_{\underline{\sigma}} \left\{ \mathbf{E} \tilde{\Phi}_0^*(\omega, \underline{\sigma}(\omega)), \underline{\sigma} \in SA^{p*}, \mathbf{E} \underline{\sigma} = \underline{\Sigma} \right\}$$

où Φ_{hom}^* et $\tilde{\Phi}_0^*(\omega, \cdot)$ sont les conjuguées de Φ_{hom} et $\tilde{\Phi}_0(\omega, \cdot)$, respectivement. ■

Dans le cas particulier de l'analyse limite, $p=1$ et $\underline{\varepsilon} \mapsto \tilde{\Phi}_0(\omega, \underline{\varepsilon})$ est positivement homogène de degré un. C'est, donc, la fonction d'appui du convexe de résistance noté $G(\omega)$. De même, Φ_{hom} est la fonction d'appui du domaine de résistance homogénéisé G_{hom} . L'exploitation de la formule d'orthogonalité (3.12) nous permet de définir G_{hom} de façon équivalente et duale par:

$$G_{\text{hom}} = \left\{ \underline{\Sigma} / \exists \underline{\sigma} \in SA^{\infty}, \underline{\sigma}(\omega) \in G(\omega) \text{ avec une probabilité 1, } \mathbf{E} \underline{\sigma} = \underline{\Sigma} \right\}$$

Chapitre 4

Simulation des milieux aléatoires

1) Position du problème

On a vu dans le troisième chapitre qu'un milieu SHE (ou SPE) est homogénéisable avec une probabilité un, c'est-à-dire que toute réalisation d'un tel milieu est homogénéisable, et que son comportement homogénéisé est déterministe. Le problème qui se pose maintenant est le calcul effectif de ce comportement en fonction du comportement microscopique.

On peut dire schématiquement que la recherche s'est principalement développée pour les milieux élastiques linéaires dans les trois directions suivantes:

a) La proposition de schémas pour la résolution approchée du problème. Parmi ces schémas, on peut citer le schéma de la distribution diluée, le schéma auto-cohérent et toutes ses variantes, le schéma différentiel, ...

Tous ces schémas sont basés sur des calculs de type Eshelby (inclusion plongée dans une matrice infinie). On obtient des expressions approchées du potentiel homogénéisé en fonction des potentiels des phases et de leurs fractions volumiques respectives. Lorsqu'ils sont appliqués à des milieux de type matrice-inclusions, tous ces schémas coïncident pour les faibles fractions volumiques d'inclusions. Cependant, leur domaine de validité est généralement mal précisé.

b) L'utilisation des méthodes variationnelles pour trouver des bornes (optimales) des propriétés homogénéisées en fonction des propriétés des constituants et de leurs fractions volumiques. Naturellement, on peut citer les travaux de Hill, Hashin & Shtrikman, Francfort & Murat, Walpolle, Zaoui, Willis (nonlinéaire),

Voir, par exemple, l'ouvrage de (Nemat-Nasser & Hori, 1991) pour une bibliographie relativement récente sur ces deux sujets.

c) L'approche dite "statistique" se distingue des deux démarches précédentes par le fait qu'elle vise à obtenir des bornes (optimales) des propriétés homogénéisées en fonction des propriétés des constituants et des fonctions de probabilité d'ordre supérieur à un. Le problème est, donc, de trouver des bornes en fonction d'une information statistique incomplète donnée sous forme de fonctions de probabilité d'ordre n , ou sous forme de fonctions de corrélations d'ordre inférieur ou égal à n . Voir (Kröner, 1980) et (Torquato, 1991) pour une bibliographie sur le sujet. Cependant, dans beaucoup de modèles comme par exemple dans le modèle du polycristal II basé sur le diagramme de Voronoï (voir chapitre 2), ces fonctions de probabilité ou de corrélation ne sont pas connues analytiquement. Dans ce cas, elles sont évaluées numériquement par des méthodes de Monte-Carlo.

Avec les progrès rapides des moyens de calcul, le calcul par simulation numérique des propriétés effectives des milieux aléatoires est devenu possible, au moins pour des problèmes plans.

La simulation numérique peut s'inscrire dans la démarche méthodologique suivante:

- 1- Observation plus ou moins fine de la microstructure d'un matériau réel.
- 2- Identification d'un modèle de milieu aléatoire qui décrit le plus fidèlement et le plus simplement possible la microstructure observée.
- 3- Utilisation du modèle pour effectuer des simulations numériques qui permettent d'évaluer les propriétés effectives du matériau.

Plus souvent, la simulation numérique est utilisée pour calculer des milieux modèles dans le but de tester la validité des schémas approchés, des bornes, ou de tout autre méthode analytique ou semi-analytique. Il importe alors de s'assurer de la valeur scientifique d'un tel calcul numérique.

L'objet de ce chapitre est de décrire les méthodes numériques présentées dans (Sab 1989a-b, 1992, 1994b-c). Mais, auparavant, je rappelle quelques notions de simulation.

2) Rappel de simulation

2.1) Réalisation d'un milieu SHE ou SPE

Le problème que l'on se pose est celui de la simulation d'un milieu aléatoire SHE ou SPE caractérisé par la donnée des fonctions de probabilité de tout ordre.

Par définition, on dit que la configuration ω est une réalisation du milieu SHE ou SPE considéré si cette configuration contient effectivement toute l'information statistique sur le milieu, c'est-à-dire qu'on peut calculer toutes les fonctions de probabilité à partir de ω à l'aide des formules (2.10) et (2.11) du chapitre 2.

Le problème est, donc, celui de la génération d'une configuration qui puisse être considérée comme une réalisation de ce milieu.

2.2) Générateurs de nombres pseudo-aléatoires

A la base de toutes les techniques de simulation il y a le fait qu'on peut toujours ramener le problème de la simulation d'un milieu aléatoire SHE ou SPE à celui de la simulation d'une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle $(0,1)$. On dira *une suite uniforme* dans la suite.

Illustrons ce fait sur les deux milieux aléatoires sur lesquels porte la suite de ce chapitre: le damier aléatoire et le modèle de polycristal I du chapitre 2. Et précisons à cette occasion les comportements de ces milieux que nous simulerons dans la suite.

Le damier aléatoire

On rappelle qu'il s'agit d'un modèle plan de milieu biphasé. Le plan infini est partagé en cellules carrées, C_{ij} , $i, j \in \mathbf{Z}$ dont les côtés de longueur unité sont parallèles aux vecteurs de la base canonique de \mathbf{R}^2 :

$$C_{ij} = \{ \underline{y} = (y_1, y_2), i-1 \leq y_1 \leq i, j-1 \leq y_2 \leq j \}$$

Une cellule appartient à la phase I avec une probabilité p et à la phase II avec une probabilité $1-p$. On suppose de plus que les cellules sont indépendantes.

Les constituants parfaitement adhérents ont un comportement rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Tresca en contrainte plane. On rappelle que G , le convexe de résistance d'un matériau de Tresca, est donné par:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G \Leftrightarrow \text{Sup}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) \leq k$$

où σ_1, σ_2 désignent les contraintes principales du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et k désigne la résistance en traction simple; k prend les valeurs $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$ avec $k^{(1)} \leq k^{(2)}$ dans les phases I et II, respectivement. Le problème est de calculer le convexe de résistance homogénéisé G_{hom} et/ou sa fonction d'appui $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$.

Pour simuler ce milieu, il suffit de disposer d'une réalisation (u_{ij}) d'une suite uniforme (U_{ij}) . En effet, la cellule C_{ij} appartient à la phase I si $u_{ij} \leq p$, et à la phase II sinon.

Le modèle de polycristal (I)

Le plan est toujours partagé selon les carrés C_{ij} définis plus haut. Tous les carrés sont occupés par un même cristal élastique linéaire de symétrie cubique dont les coefficients élastiques sont donnés dans sa base propre sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{12} & r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Cependant, l'orientation du cristal dans chaque cellule est aléatoire. On suppose que les orientations sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, \pi/2[$. Le problème est de calculer les tenseurs élastiques homogénéisés $\underline{\underline{R}}_{\text{hom}}$ et $\underline{\underline{S}}_{\text{hom}}$.

Pour simuler ce milieu, on associe au carré C_{ij} l'orientation $\frac{\pi}{2} u_{ij}$ où (u_{ij}) est une réalisation d'une suite uniforme (U_{ij}) .

Il est clair sur ces deux exemples, que même si le milieu infini aléatoire existe au sens mathématique du terme, on ne peut simuler en pratique qu'un volume fini de ce milieu puisqu'on ne peut disposer que d'une réalisation d'une suite *finie* uniforme. Ceci constitue une approximation qui ne doit pas nous troubler, en tout cas pas plus que l'utilisation des rationnels à la place des réels dans tous les calculs numériques.

Le problème est donc de simuler une réalisation d'une suite *finie* uniforme. Toutes les techniques de simulation actuelles utilisent les générateurs de nombres *pseudo-aléatoires*. Un tel générateur est un programme informatique qui associe à chaque valeur

du paramètre entier "Init" une suite (déterministe!) de nombres (u_1, u_2, \dots, u_n) dans l'intervalle $(0,1)$; ici n est le nombre d'appels au générateur. Chacune de ces suites peut être considérée comme une réalisation d'une suite uniforme parcequ'elle satisfait convenablement à certains tests statistiques. La démarche est, donc, la suivante: on définit une série de tests statistiques "pertinents" qu'une réalisation d'une suite authentiquement uniforme doit satisfaire, et on vérifie ensuite que les suites (u_1, u_2, \dots, u_n) satisfont convenablement à ces tests. Les bons générateurs sont ceux qui satisfont au mieux à ces tests. Voir (Knuth, 1981) et (Ripley, 1987) pour une bibliographie sur le sujet.

On peut distinguer en gros deux types de tests: les tests d'uniformité et les tests d'indépendance:

Le test d'uniformité le plus utilisé est sans doute le test de Kolmogorov-Smirnov $\max |F_n(x) - x|$ avec $F_n(x) = (\text{nombre des } u_i \leq x) / n$. On évalue cette quantité, qui doit théoriquement tendre vers zéro quand n tend vers l'infini, et on la compare, pour n fixé, à sa valeur moyenne théorique (qu'on sait calculer lorsque la suite est authentiquement uniforme). Cette comparaison permet de décider de l'uniformité ou non de la suite (u_1, u_2, \dots, u_n) . La même démarche peut être aussi étendue pour tester l'uniformité des k -uplets $\{(u_{k_i}, \dots, u_{k(i)-1})\}$ qui doivent être uniformément distribués dans $[0,1]^k$. Ce test est utilisé en pratique avec des petites valeurs de k . On divise $[0,1]^k$ en petits sous domaines et on compte le nombre de points $(u_{k_i}, \dots, u_{k(i)-1})$ qui tombent dans chacun de ces sous-domaines. Ce nombre est comparé au nombre moyen théorique pour décider de l'uniformité ou non de la suite $\{(u_{k_i}, \dots, u_{k(i)-1})\}$.

Parmi les tests d'indépendance les plus courants on trouve le "gap test". On se donne des constantes $0 < \alpha < \beta < 1$ et on compte le nombre g d'indices qui séparent deux $u_i \in (\alpha, \beta)$ successifs.

Par exemple: pour $\alpha=0.1$, $\beta=0.3$ et pour la suite 0.22, 0.45, 0.15, 0.76, 0.99, 0.35, 0.28,... g prend successivement les valeurs: 0, 1, 3,... Ces valeurs devraient suivre théoriquement la loi géométrique de paramètre $\beta-\alpha$, c'est-à-dire $\text{Prob}(g = k) = (\beta - \alpha)(1 - \beta + \alpha)^k$. On compare la distribution empirique de g à sa distribution théorique pour décider de l'indépendance ou non de la suite (u_1, u_2, \dots, u_n) .

Il existe dans la littérature beaucoup de bons générateurs fiables, rapides et très faciles à programmer. Voir (Press *et al.*, 1989).

2.3) Méthode de Monte-Carlo

C'est sans doute la méthode la plus utilisée en probabilités numériques. Elle est basée sur la loi des grands nombres qui s'énonce de la façon suivante dans le cadre des milieux aléatoires: soit un milieu aléatoire quelconque et une fonctionnelle X qui associe à chaque configuration ω du milieu le réel $X(\omega)$. Lorsqu'elle existe, l'espérance de X est la limite, quand n tend l'infini, de la moyenne arithmétique des $X(\omega^{(i)})$ où les $\omega^{(i)}$ constituent n réalisations indépendantes du milieu. La méthode de Monte-Carlo propose d'évaluer l'espérance de X par la formule:

$$EX \approx \bar{X} \pm \sqrt{\frac{X^2 - \bar{X}^2}{n}}$$

où les barres représentent des moyennes arithmétiques,

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(\omega^{(i)}) \qquad \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^2(\omega^{(i)})$$

Le terme en plus ou moins est lié à une estimation de l'erreur par l'intermédiaire de l'écart-type. Il donne un ordre de grandeur de l'erreur commise et ne constitue pas une borne exacte de cette erreur. Il traduit le fait que la méthode de Monte-Carlo converge d'autant plus vite que l'écart type de X est faible. A la limite, si X est déterministe (ne dépend pas de ω) son écart type est nul et la méthode converge en une étape.

3) Deux méthodes numériques

3.1) Généralités

On se donne dans la suite un milieu SHE (ou SPE) et une application $(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}}) \mapsto \tilde{\Phi}_0(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$ qui vérifie (3.2). On cherche à calculer numériquement une estimation de Φ_{hom} .

Dans mes travaux j'ai proposé d'estimer numériquement Φ_{hom} , ou certaines valeurs de Φ_{hom} , en faisant des simulations sur des domaines de forme cubique (carrée en 2D) auxquels on impose des conditions limites homogènes au bord. Naturellement, ces conditions doivent être asymptotiquement équivalentes aux conditions homogènes en déformation. Ceci est le cas de toutes les conditions limites homogènes lorsque le milieu est élastique. En revanche, seules les conditions limites homogènes cinématiques sont valables lorsque le milieu est rigide parfaitement plastique. Voir Chapitre 2.

La méthode est basée sur les résultats théoriques du chapitre 3 qui affirment que, lorsque la taille du cube est suffisamment grande, ses propriétés globales constituent une approximation des propriétés homogénéisées du milieu.

Par exemple, la quantité aléatoire $\Phi_C^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$ est une approximation de $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$. Lorsque la taille de \mathbf{C} est suffisamment grande, les fluctuations de la variable aléatoire $\Phi_C^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$ autour de sa valeur moyenne (son espérance), $\mathbf{E}\Phi_C^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$, sont très faibles. En particulier, son écart-type est très faible. Il tend vers zéro, quand la taille de \mathbf{C} tend vers l'infini.

L'idée est de calculer $\mathbf{E}\Phi_C^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$ par une méthode de Monte-Carlo. Ce calcul nécessite un nombre de réalisations à simuler d'autant plus petit que l'écart type de $\Phi_C^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$ est faible. Par ailleurs, on sait que $\mathbf{E}\Phi_C^{\text{dc}}(\omega, \underline{\underline{\varepsilon}})$ est une borne supérieure de $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ qui tend vers $\Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$, quand la taille de \mathbf{C} tend vers l'infini.

De même, dans les milieux élastiques, $\Phi_C^{\text{co}*}(\omega, \underline{\underline{\Sigma}})$ est une approximation de $\Phi_{\text{hom}}^*(\underline{\underline{\Sigma}})$ dont l'espérance $\mathbf{E}\Phi_C^{\text{co}*}(\omega, \underline{\underline{\Sigma}})$ est une borne supérieure de $\Phi_{\text{hom}}^*(\underline{\underline{\Sigma}})$.

Naturellement, les propriétés globales de \mathbf{C} ne sont pas connus analytiquement. Il faut les calculer numériquement. J'ai proposé de les calculer par Eléments Finis lorsque le milieu est élastique linéaire. Par ailleurs, j'ai proposé récemment une méthode basée

explicitement sur les discontinuités plastiques lorsque le milieu est rigide parfaitement plastique.

3.2) Milieux élastiques linéaires

On calcule numériquement dans (Sab 1989a-b, 1992) les tenseurs élastiques homogénéisés $\underline{\underline{R}}_{\text{hom}}$ et $\underline{\underline{S}}_{\text{hom}}$ du modèle de Polycrystal I décrit ci-dessus.

Le carré $\mathbf{C}_L = \{ \underline{y} = (y_1, y_2), 0 \leq y_1 \leq L, 0 \leq y_2 \leq L \}$ contenant $L \times L$ cellules est discrétisé de façon régulière par des éléments finis triangulaires affines comme l'indique la figure (). On note $m \geq 1$ le nombre d'éléments finis par unité de longueur. A chaque valeur des paramètres m, L et à chaque configuration ω , on associe le tenseur de rigidité globale, $\underline{\underline{R}}_{L,m}^{\text{de}}(\omega)$, et le tenseur de souplesse globale, $\underline{\underline{S}}_{L,m}^{\text{co}}(\omega)$, obtenus respectivement par la résolution numérique des problèmes en déformation homogène et en contrainte homogène sur le carré \mathbf{C}_L .

Le principal enseignement de cette étude numérique est que, *lorsque la taille des éléments finis est du même ordre que la taille des hétérogénéités du milieu* ($m \geq 1$), les écarts $\underline{\underline{R}}_{L,m}^{\text{de}}(\omega) - \underline{\underline{R}}_{\text{hom}}$ d'une part, et $\underline{\underline{S}}_{L,m}^{\text{co}}(\omega) - \underline{\underline{S}}_{\text{hom}}$ d'autre part, sont constitués principalement de la *somme* de deux termes: un terme déterministe (indépendant de ω) qui est dû à l'approximation Eléments Finis, et un terme aléatoire (qui dépend de ω) qui est dû au caractère borné du domaine \mathbf{C} . A L fixé, le premier terme tend vers zéro quand le maillage devient de plus en plus fin (c'est-à-dire quand m tend vers l'infini); et pour une finesse de maillage fixée, le second terme tend vers zéro avec L .

Autrement dit, il existe deux approximations dans cette méthode: une approximation due au fait qu'on considère un volume fini alors que les propriétés effectives sont théoriquement définies sur le milieu infini tout entier; et une approximation due à la méthode de résolution du problème aux limites sur le volume considéré, en l'occurrence, les Eléments Finis. Ces deux approximations se superposent.

J'ai abouti à la procédure numérique suivante:

- 1- Simuler une configuration et calculer $\underline{\underline{R}}_{L,m}^{\text{de}}(\omega)$ et $\underline{\underline{S}}_{L,m}^{\text{co}}(\omega)$ de la façon suivante:
- 2- Fixer une faible valeur pour L et augmenter m jusqu'à la convergence de la méthode des Eléments Finis pour la valeur $m = m_0$.
- 3- Fixer $m=1$ et augmenter L jusqu'à ce que le produit $\underline{\underline{R}}_{L,m}^{\text{de}}(\omega) \cdot \underline{\underline{S}}_{L,m}^{\text{co}}(\omega)$ soit suffisamment proche du tenseur identité pour $L = L_0$.
- 4- Utiliser la méthode de Monte-Carlo pour estimer $\underline{\underline{R}}_{\text{hom}}$ et $\underline{\underline{S}}_{\text{hom}}$ par $\underline{\underline{E}}\underline{\underline{R}}_{L_0,m_0}^{\text{de}}(\omega)$ et $\underline{\underline{E}}\underline{\underline{S}}_{L_0,m_0}^{\text{co}}(\omega)$, respectivement.
- 5- Si la taille mémoire n'est pas suffisante pour contenir le problème Eléments Finis pour $L = L_0$ et $m = m_0$ (ceci sera sans doute le cas dans un problème 3-D), alors il faut faire des simulations avec des $L \leq L_0$ et $m \leq m_0$. Tout calcul par la méthode de

Monte-Carlo de $\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{R}_{\underline{\underline{\mathbf{L}},m}}^{\text{dc}}(\omega)$ constitue une borne supérieure de $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\underline{\underline{\mathbf{hom}}}}$, et tout calcul par la méthode de Monte-Carlo de $\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{S}_{\underline{\underline{\mathbf{L}},m_0}}^{\text{co}}(\omega)$ constitue une borne supérieure de $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{hom}}}}$.

J'ai trouvé pour le modèle polycristal I, en prenant les valeurs numériques $r_{11} = 1.7$, $r_{12} = 1.23$ et $r_{33} = 1.5$ qui correspondent au cuivre, $L_0 = 22$, $m_0 = 2$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{R}_{\underline{\underline{\mathbf{22},2}}}^{\text{dc}}(\omega) \approx \begin{bmatrix} 1.890 & 1.040 & 0 \\ 1.040 & 1.890 & 0 \\ 0 & 0 & 0.874 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{S}_{\underline{\underline{\mathbf{22},2}}}^{\text{co}}(\omega) \approx \begin{bmatrix} 0.777 & -0.436 & 0 \\ -0.436 & 0.777 & 0 \\ 0 & 0 & 1.179 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{R}_{\underline{\underline{\mathbf{22},2}}}^{\text{dc}}(\omega) \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{S}_{\underline{\underline{\mathbf{22},2}}}^{\text{co}}(\omega) \approx \begin{bmatrix} 1.015 & -0.015 & 0 \\ -0.015 & 1.015 & 0 \\ 0 & 0 & 1.030 \end{bmatrix}$$

Le nombre de réalisations simulées est 13, et les écarts-type des composantes de $\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{R}_{\underline{\underline{\mathbf{22},2}}}^{\text{dc}}(\omega)$ et $\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{S}_{\underline{\underline{\mathbf{22},2}}}^{\text{co}}(\omega)$ sont tous inférieurs à 0.020.

3.2) Milieux rigides parfaitement plastiques

L'objet de l'étude dans (Sab, 1994b-c) est de présenter sur le modèle du damier aléatoire décrit ci-dessus des méthodes de calcul analytique et numérique basées sur l'utilisation des mécanismes par blocs dans les milieux aléatoires rigides parfaitement plastiques. On montre notamment comment l'emploi de tels mécanismes permet le calcul d'une estimation numérique par excès de la résistance homogénéisée en traction simple dans la direction 1. Notons cette résistance par K_{hom} . Elle est définie par:

$$K_{\text{hom}} = \text{Sup}_{\lambda} \left\{ \lambda, \exists \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in G_{\text{hom}} \right\} = \text{Inf}_{\underline{\underline{\mathbf{E}}}} \left\{ \Phi_{\text{hom}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}), E_{11} = 1 \right\}$$

Afin de calculer une estimation de K_{hom} , on considère le carré $\mathbf{C}_L = \{ \underline{\underline{y}} = (y_1, y_2), 0 \leq y_1 \leq L, 0 \leq y_2 \leq L \}$ contenant $L \times L$ cellules. Pour toute réalisation ω , on définit la résistance globale à la traction simple selon la direction 1 de \mathbf{C}_L , notée $K_L(\omega)$, à l'aide des conditions limites mixtes suivantes: $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ sur les côtés supérieur et inférieur de \mathbf{C}_L , $\sigma_{12} = 0$ et $u_1 = L$ sur le côté droit, et enfin, $\sigma_{12} = 0$ et $u_1 = 0$ sur le côté gauche.

$$K_L(\omega) = \text{Inf}_{\underline{\underline{u}}} \left\{ \left\langle \tilde{\phi}(\omega, \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{u}}) \right\rangle_{\mathbf{C}_L}, u_1(L, y_2) = L, u_1(0, y_2) = 0 \right\}$$

On note par $\underline{\underline{\mathbf{E}}}K_L$ et ΔK_L l'espérance et l'écart-type de $K_L(\omega)$, respectivement.

Les théorèmes d'homogénéisation énoncés dans les chapitres 1 et 3 permettent d'affirmer que les conditions limites mixtes adoptées sont asymptotiquement équivalentes aux conditions uniformes en déformation, et que pour toute réalisation de ω la limite en traction simple selon la direction 1 du damier aléatoire est donnée par:

$$K_{\text{hom}} = \lim_{L \rightarrow +\infty} K_L(\omega)$$

En passant à l'espérance et à l'écart-type, on a aussi:

$$K_{\text{hom}} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \overline{K}_L \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \Delta K_L = 0$$

L'idée est de diviser le carré C_L en deux blocs rigides complémentaires dont la frontière est un chemin qui relie le côté inférieur du carré à son côté supérieur. Le déplacement du bloc de gauche est nul, alors que celui du bloc de droite est horizontal et il vaut L . Le calcul de la dissipation plastique dans un tel mécanisme par bloc permet une estimation par excès de $K_L(\omega)$.

Borne de Voigt:

Si la frontière qui sépare les deux blocs est une droite verticale qui passe à l'intérieur des cellules, par exemple la droite $y_1 = \frac{1}{2}$, alors la dissipation plastique est égale à $L \times \sum_{j=1}^L (\kappa_{1,j} \times k^{(2)} + (1 - \kappa_{1,j}) \times k^{(1)})$. Ici $\kappa_{ij} = 1$ si la cellule C_{ij} est occupée par la phase II, et $\kappa_{ij} = 0$ sinon. Donc, $K_L(\omega) \leq \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (\kappa_{1,j} \times k^{(2)} + (1 - \kappa_{1,j}) \times k^{(1)})$. En prenant l'espérance, on trouve:

$$\forall p, L \quad \mathbf{E}K_L \leq p \times k^{(2)} + (1 - p) \times k^{(1)}$$

En particulier, lorsque L tend vers l'infini, on retrouve la borne de Voigt sur K_{hom} .

Borne de Voigt bis

En réalité, la borne de Voigt peut être améliorée par un meilleur choix de la frontière qui sépare les deux blocs. En effet, si on prend la droite $y_1 = 0$ comme frontière, alors celle-ci traverse la phase I avec une densité p^2 , la phase II avec une densité $(1 - p)^2$, et une interface entre les deux phases avec une densité $2p(1 - p)$. Un calcul analogue en tout point au calcul précédent donne la borne suivante:

$$\forall p \quad K_{\text{hom}} \leq (1 - (1 - p)^2) \times k^{(2)} + (1 - p)^2 \times k^{(1)}$$

Borne de Voigt ter

Remarquons que dans les deux mécanismes précédents la frontière qui sépare les deux blocs a été définie indépendamment de la configuration ω . Nous proposons maintenant de définir cette frontière en fonction de ω par la procédure itérative suivante: soit une cellule courante C_{i_0, i_0} occupée par la phase 1; on la relie par une ligne verticale à la

cellule la plus proche parmi les cellules C_{ij} occupées par la phase I avec $i \in \{i_0 - 1, i_0, i_0 + 1\}$ et $j > j_0$. Cette cellule devient à son tour la nouvelle cellule courante, et la procédure est répétée jusqu'à ce que le carré soit séparé en deux blocs. La cellule de départ de cette procédure est une cellule qui réalise le minimum de distance entre le centre de C_L et les cellules occupées par la phase I. Voir figure ().

Un calcul combinatoire permet alors d'obtenir la borne suivante:

$$\forall p \quad K_{\text{hom}} \leq \left(1 - (1-p)^3 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} p(1-p)^2 \right) \times k^{(2)} + (1-p)^3 \times k^{(1)}$$

Pour $k^{(2)}$ suffisamment petit, cette borne améliore sensiblement les bornes précédentes. En particulier, dans le cas de la plaque trouée, c'est à dire $k^{(2)} = 0$, la borne $K_{\text{hom}} \leq (1-p) \times k^{(1)}$ (Voigt) devient $K_{\text{hom}} \leq (1-p)^3 \times k^{(1)}$.

Approche numérique

Ainsi, la définition de la frontière entre les deux blocs en fonction de la réalisation du matériau permet d'améliorer sensiblement la borne supérieure. Nous allons décrire une procédure numérique qui associe à chaque réalisation ω une borne supérieure de $K_L(\omega)$ notée $K_{L,m}^+(\omega)$. Ici l'entier positif m désigne un paramètre de discrétisation.

Tout chemin (sans boucle) qui relie le côté inférieur du carré C_L à son côté supérieur sépare C_L en deux blocs. A chaque chemin est associé un "coût" égal à la dissipation plastique dans le mécanisme de blocs qu'il définit. Il s'agit de trouver le coût minimal. Le problème est discrétisé en limitant la minimisation à l'ensemble (fini) des chemins admissibles suivants: on dispose sur chaque ligne horizontale d'équation $y_2 = j$, $j \in \{0, 1, \dots, L\}$ des noeuds $N_{\ell j}$ régulièrement espacés de coordonnées $(\ell/m, j)$, avec $\ell \in \{0, 1, \dots, mL\}$. m est le nombre de noeuds par unité de longueur. Un noeud d'ordonnée j peut être lié par une ligne droite à un noeud d'ordonnée $j-1$, j ou $j+1$. Un chemin admissible est alors une ligne brisée constituée d'une suite de noeuds liés qui joint le côté inférieur du carré C_L à son côté supérieur.

La recherche d'un chemin optimal parmi un ensemble fini de chemins admissibles est un problème classique de recherche opérationnelle. Nous avons utilisé la programmation dynamique pour le résoudre numériquement. Pour des détails sur la programmation dynamique voir (Burghes, 1986), par exemple.

Notons ici, que la méthode utilisée est particulièrement performante en mémoire machine et en temps de calcul. Le calcul d'un $K_{L,m}^+(\omega)$ avec $m=2$, $n=200$ (c'est à dire 160000 cellules traitées!) prend 15 secondes C.P.U. sur une station de travail Sun Sparc Station 2. L'espérance de la variable aléatoire $K_{L,m}^+(\omega)$, notée $\mathbf{E}K_{L,m}^+$, ainsi que son écart-type, sont calculés à l'aide de la méthode de Monte-Carlo en simulant plusieurs réalisations ω . Par définition, $\mathbf{E}K_{L,m}^+$ est une borne supérieure de $\mathbf{E}K_L$ décroissante en fonction de m . On a:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}K_{L,m}^+ \geq \mathbf{E}K_L$$

Nos simulations montrent de plus que, m étant fixé, $\mathbf{EK}_{L,m}^+$ décroît avec L jusqu'à stabilisation. Ceci signifie que $\mathbf{EK}_{L,m}^+$ est une borne supérieure de K_{hom} . La figure 2 montre la courbe $\mathbf{EK}_{L,m}^+$ en fonction de p pour $m=2$, $L=400$ et différentes valeurs du paramètre $\lambda = k^{(2)}/k^{(1)}$: $\lambda=0$, $\lambda=1/4$, $\lambda=1/2$ et $\lambda=3/4$. Chaque courbe est obtenue avec 46 valeurs de p . Pour chaque valeur de p , 20 réalisations sont simulées et leur $K_{L,m}^+(\omega)$ correspondant est calculé. L'écart-type de $K_{L,m}^+(\omega)/k^{(1)}$ sur ces réalisations est inférieur à 8.10^{-3} pour $\lambda=0$, 6.10^{-3} pour $\lambda=1/4$, 5.10^{-3} pour $\lambda=1/2$, et 3.10^{-3} pour $\lambda=3/4$. Une décroissance très rapide de $\mathbf{EK}_{L,m}^+$ en fonction de p est observée.

De plus, nous trouvons dans le cas $\lambda=0$ une probabilité de percolation p_c très proche de la valeur 0,41 donnée dans la littérature. Voir (Kozlov *et al.*, 1994), par exemple. Rappelons ici que p_c est défini de la façon suivante: pour tout $p > p_c$ et pour n suffisamment grand, il existe toujours au moins un chemin qui traverse C_L de bas en haut sans passer par l'intérieur de la phase II. Naturellement, le coût de ce chemin est nul si λ est nul.

En conclusion, nous avons proposé à l'aide d'un exemple une démarche basée sur des champs de vitesse discontinus constants par morceaux. L'approche numérique s'applique sans difficulté à d'autres modèles de plaques dans lesquelles les hétérogénéités sont de forme et de taille aléatoire et obéissent à un critère de Tresca en contrainte plane, en particulier, lorsque la microstructure est de type matrice-inclusions. Dans ce cas, la matrice et les inclusions ne jouent pas le même rôle. Par ailleurs, l'extension de cette approche à un critère de Tresca (ou Von-Mises) en déformation plane (condition d'incompressibilité) est en cours et fera l'objet d'une prochaine publication.

Chapitre 5

Endommagement et effets d'échelle dans les matériaux hétérogènes quasi-fragiles

Introduction

On a abordé dans les chapitres précédents le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique dans les milieux SHE élastiques non linéaires ou à comportement rigide parfaitement plastique d'un point de vue théorique et numérique. Ce chapitre est consacré à une étude *numérique* du passage micro-macro dans les milieux SHE endommageables.

Dans ces milieux, le concept de VER posent quelques difficultés. On parle alors d'effets d'échelle. On rappelle que les effets d'échelle désignent la dépendance des propriétés mécaniques macroscopiques (contrainte de rupture en traction simple, facteur d'intensité de contrainte critique,...) en fonction de la taille de l'éprouvette qui sert à les identifier expérimentalement.

Précisons les effets d'échelle observés expérimentalement lors de la rupture des matériaux hétérogènes quasi-fragiles (bétons, roches, céramiques, ...).

Effets d'échelle de volume.

Des expériences de traction simple pilotées en déplacement sur des éprouvettes cylindriques homothétiques de béton ont montré que la contrainte de rupture moyenne σ (=moyenne de la force maximale / surface d'application de la force) décroît quand le volume de l'échantillon, V , croît. Le diamètre du plus gros granulat dans le béton utilisé est de 3cm; les dimensions des éprouvettes testées sont entre ($\phi = 8\text{cm}$, $H = 16\text{cm}$) pour la plus petite et ($\phi = 19\text{cm}$, $H = 38\text{cm}$) pour la plus grande, et il semble que la décroissance de σ entre ces deux tailles suive une loi de puissance du type $\sigma \propto V^{-\beta}$ où $\beta > 0$ est une constante du matériau. (Kadlecck & Spelta, 1967). D'autres auteurs ont confirmé par leurs propres expériences ces conclusions (L'Hermite, 1973), (Torrent, 1977), Rossi & Wu (Wu, 1991),

Ce type d'effet d'échelle est souvent appelé effet d'échelle de volume. Il est généralement attribué à la nature aléatoire du matériau en faisant un raisonnement à la Weibull de type "lien le plus faible": plus le volume est grand, plus le nombre de défauts est grand, et moins l'éprouvette est résistante.

Pour appuyer cette explication, une étude numérique a été réalisée dans (Hermann *et al.*, 1989) sur la contrainte de rupture en traction simple d'un réseau carré $L \times L$ ($L \leq 64$) formé de poutres horizontales et verticales encastées aux noeuds du réseau. Chaque poutre est supposée élastique fragile obéissant à un critère de type Von-Mises (portant sur une combinaison de l'effort normal et du moment fléchissant) dont le seuil s est tiré aléatoirement selon la loi de probabilité: $\text{Prob}(s \leq t) = t^m$ $0 < t \leq 1$. Les constantes élastiques des poutres sont identiques dans tout le réseau.

La principale conclusion de cette étude numérique est que, pour $0 < m < 2$, la contrainte de rupture moyenne du réseau (=moyenne de la force maximale/L) décroît comme une puissance $-1/4$ en fonction de L: $\sigma \propto L^{-1/4}$

Effet d'échelle de structure

Par ailleurs, les effets d'échelle dits de structure concernent des structures homothétiques entaillées chargées en mode I. Il a été établi expérimentalement sur des matériaux quasi-fragiles que la contrainte de rupture moyenne, notée aussi σ , dépend de la taille de l'entaille, a . Bazant (1985) a synthétisé ses résultats expérimentaux par une formule empirique qui relie σ à a : $\sigma = A(1 + a/a_0)^{-1/2}$. Ici, les constantes $A > 0$ et $a_0 > 0$ dépendent du matériau et de l'expérience considérés. On voit sur cette formule que lorsque a est grand par rapport à a_0 , la contrainte de rupture décroît comme $\sigma \propto a^{-1/2}$. Cette forme de décroissance correspond à la théorie classique de la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR) qui stipule que la rupture a lieu lorsque le facteur d'intensité de contrainte en mode I, K_I , atteint une valeur critique, K_I^c , supposée caractéristique du matériau. Autrement dit, d'après la formule de Bazant, la MLR ne s'applique que pour les grandes structures. On dit qu'il y a effet d'échelle de structure.

Afin de rendre compte de l'effet d'échelle de structure, Mazars *et al.* (1991) ont proposé d'appliquer une théorie d'endommagement non local. Dans cette théorie, le dommage au point \underline{y} est un scalaire $0 \leq D(\underline{y}) \leq 1$ défini par la relation:

$$(5.1) \quad \underline{\underline{\underline{r}}}(\underline{y}) = \left(1 - D(\underline{y})\right) \underline{\underline{\underline{r}}}^0$$

où $\underline{\underline{\underline{r}}}$ et $\underline{\underline{\underline{r}}}^0$ sont, respectivement, les tenseurs de rigidité actuel et initial. L'élasticité initiale est supposée homogène isotrope.

La variable de dommage $D(\underline{y})$ varie de façon monotone et progressive de 0 à 1. Son évolution est donnée sous la forme d'une fonctionnelle de la déformation équivalente moyennée sur une boule centrée sur le point \underline{y} . Le rayon de cette boule, notée l_c , est supposé être une constante du matériau. Les auteurs de ce modèle déterministe ont simulé la rupture de poutres homothétiques entaillées sollicitées en flexion 3-points. Ils trouvent des résultats numériques en accord avec la formule de Bazant. En particulier, ils trouvent que lorsque la taille de l'entaille, a , est grande par rapport à la longueur l_c , la dépendance la contrainte de rupture en fonction de a est du type $\sigma \propto a^{-1/2}$.

Rappelons ici que, initialement, les modèles d'endommagement ont été appliqués aux matériaux quasi-fragiles afin de rendre compte directement à l'échelle macroscopique¹ du caractère **radoucissant** de la courbe force-déplacement mesurée dans une expérience de traction-compression simple. On se sert de cette courbe pour identifier les paramètres de la loi d'endommagement en considérant que les éprouvettes testées sont homogènes. Par conséquent, l'effet d'échelle de volume qui est dû à l'hétérogénéité dans les éprouvettes ne peut pas être prédit par de tels modèles déterministes.

A l'occasion de la thèse de I. Laalai (1993), nous avons proposé dans (Sab & Laalai, 1992, 1993) et (Laalai & Sab, 1993a-b, 1994) des modèles *numériques* qui s'inscrivent

¹celle de l'éprouvette

dans la problématique du passage micro-macro des chapitres précédents. Le comportement à l'échelle microscopique est élastique-fragile obéissant à un critère de rupture non local. Le seuil de rupture est modélisé par un champ (ou processus) aléatoire. Nous obtenons à l'échelle macroscopique un comportement radoucissant (au moins dans la partie pré-pic) ainsi que des effets d'échelle de volume et de structure qualitativement en accord avec les résultats expérimentaux.

Nos modèles constituent un lien entre les modèles probabilistes de réseaux de Hermann *et al.*, et les modèles déterministes d'endommagement non local de Mazars *et al.*. Leurs principales qualités sont: la simplicité et l'indépendance des résultats vis à vis du maillage.

Nous qualifions les modèles proposés de "numériques" parceque leurs conclusions (indépendance vis à vis du maillage, effets d'échelle, comportement macroscopique radoucissant, ...) n'ont pas reçu à ce jour de justification mathématique rigoureuse.

Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons un modèle d'endommagement brutal non local. Nous verrons que, dans sa version déterministe, ce modèle simplifié exhibe le même effet de structure que celui exhibé par le modèle de Mazars *et al.* Nous présentons dans la deuxième partie du chapitre la version probabiliste du modèle et nous discuterons de ses conclusions.

1) Endommagement brutal non local: un modèle déterministe

La théorie de l'endommagement brutal a été proposée par Bui & Ehrlacher (1981). Elle stipule que la variable d'endommagement D introduite ci-dessus ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. La densité d'énergie élastique au point \underline{y} vaut:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \phi(\underline{y}) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y}) : \underline{\underline{r}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y}) & \text{si } D(\underline{y}) = 0 \\ &= 0 & \text{si } D(\underline{y}) = 1 \end{aligned}$$

L'élasticité initiale est supposée homogène isotrope. Un critère de rupture est postulé:

$$(5.3) \quad \frac{\phi}{\phi^c} - 1 \leq 0$$

où ϕ^c est une constante du matériau.

En partant d'un matériau initialement sain ($D=0$ partout) soumis à un chargement croissant, le problème est de trouver une évolution de la zone endommagée ($D=1$) de telle sorte que le critère ci-dessus soit respecté à tout instant et en tout point du domaine sain.

On peut trouver dans (Ehrlacher, 1985) des solutions analytiques à des problèmes de rupture d'éprouvettes entaillées où l'évolution de la zone endommagée est décrite par l'évolution du front d'endommagement qui la sépare de la zone saine.

Cependant, comme dans tous les modèles d'endommagement local, des problèmes d'instabilité, de bifurcation, et de dépendance des résultats numériques vis à vis d'un maillage Eléments Finis apparaissent. Toutes ces difficultés rendent problématique l'application de cette théorie.

Dans (Laalai & Sab, 1993b) nous proposons de surmonter ces difficultés par l'utilisation d'un critère de rupture non local en substituant (5.4) à (5.3).

$$(5.4) \quad \frac{\bar{\phi}}{\phi^c} - 1 \leq 0$$

Ici, $\bar{\phi}(\underline{y})$ est la moyenne volumique du champ ϕ sur un cube de côté l_c centré au point \underline{y} . Ce cube est appelé le cube "représentatif" et sa longueur l_c est supposée être une caractéristique du matériau. Quant au seuil ϕ^c , il est homogène.

Le problème est toujours le même: trouver une évolution de la zone endommagée compatible avec le critère (5.4).

On s'intéresse dans la suite à des problèmes à un seul paramètre de chargement (Salençon, 1983), λ , qui croît de zéro jusqu'à la rupture de la structure. Le problème est discrétisé de la façon suivante:

1- La structure est maillée en n éléments finis. L'état d'endommagement est alors caractérisé par un vecteur à n composantes $\mathbf{D} = (D_i)$ avec $D_i = 1$ si le i ème élément est rompu et $D_i = 0$ sinon. Remarquer que, pour un état d'endommagement donné, la solution du problème élastique discrétisé dépend linéairement du paramètre de chargement λ .

2- Au départ λ et \mathbf{D} sont nuls. On fait croître λ jusqu'à ce que le critère (5.4) calculé au centre de chaque élément soit atteint pour une certaine valeur λ_1 dans un des éléments. On rompt cet élément, puis on calcule à nouveau, pour la même valeur λ_1 , le critère dans les éléments restants. S'il est dépassé quelquepart, l'élément pour lequel (5.4) est maximum est rompu, et la procédure est réitérée jusqu'à stabilisation, c'est-à-dire jusqu'à ce que le critère soit vérifié dans tous les éléments restants².

3- Ensuite, on augmente λ jusqu'à ce que la prochaine "rupture-stabilisation" ait lieu pour une certaine valeur λ_2 , et on réitère l'opération jusqu'à la ruine de la structure.

Remarque 1:

On peut objecter que le critère peut être atteint simultanément dans deux ou plusieurs éléments. Cette situation est numériquement très rare. Elle ne peut se produire que dans des problèmes symétriques discrétisés de façon symétrique. Dans ce cas, nous laissons le "choix" de l'élément à rompre à l'algorithme. Ce "choix" n'aura aucune incidence si une croissance symétrique du dommage constitue une solution stable. En revanche, lorsque la solution symétrique n'est pas stable, ce "choix" est celui d'un mode d'évolution bifurqué non symétrique et stable. Ce qui veut dire que seules des solutions stables sont *a priori* obtenues avec cet algorithme. Par exemple, dans la structure de la figure () qui est sollicitée en déplacement selon le mode I, l'évolution du dommage est d'abord symétrique, puis non symétrique jusqu'à la ruine.

Remarque 2:

On peut étendre le modèle numérique décrit ci-dessus à des problèmes à plusieurs paramètres de chargement. λ est alors un vecteur. Le trajet de chargement "réel" $t \rightarrow \lambda(t)$ doit être approché par un trajet affine par morceaux, et chaque "morceau" du trajet approché doit être traité comme un chargement à un seul paramètre.

²Si la stabilisation n'est pas possible, on dit que la structure est rompue.

Nous avons mis en oeuvre le modèle numérique décrit ci-dessous sur des structures homogènes bidimensionnelles entaillées ou non pilotées par un déplacement imposé. Le maillage utilisé est un maillage carré régulier.

Nous avons constaté que la courbe force-déplacement est indépendante de la finesse du maillage lorsque celle-ci est suffisante. Cette courbe ne présente aucun radoucissement dans un essai de traction-compression simple sur un échantillon non entaillé. Par ailleurs, lorsqu'un gradient existe dans la structure (flexion 3-points, structures entaillées sollicitées en mode I,...), on trouve que l'évolution de la zone endommagée est aussi indépendante du maillage.

Concernant les effets d'échelle, nous trouvons un effet d'échelle de structure en accord avec la formule de Bazant; en particulier, lorsque l_c est très petit devant la longueur de l'entaille, le modèle proposé s'identifie complètement à la théorie classique de la Mécanique Linéaire de la Rupture. Par contre, étant donné la nature déterministe de ce modèle, aucun effet d'échelle de volume ne peut être observé.

2) Endommagement brutal non local: un modèle probabiliste

2.1- Description du modèle

Afin de rendre compte des effets d'échelle de volume, l'idée est d'introduire l'hétérogénéité du milieu par l'intermédiaire du seuil de rupture ϕ^c . On introduit alors une longueur d qui est celle des hétérogénéités et on suppose dans toute la suite que $d \leq l_c$. Le milieu bidimensionnel est partitionné en carrés de côté d . Le seuil de rupture dans chacun de ces carrés est tiré aléatoirement de façon indépendante selon la loi de probabilité:

$$(5.5) \quad \forall t, 0 < t \leq \phi_{\max}^c, \quad \text{Pr ob}(\phi^c \leq t) = (t/\phi_{\max}^c)^m$$

où m et ϕ_{\max}^c sont des constantes positives.

Naturellement, lorsque l'on discrétise un tel milieu on veille à ce que la taille des éléments finis soit inférieure ou égale à d . Le maillage utilisé dans tous les calculs est un maillage en éléments carrés qui constitue un pavage régulier des hétérogénéités. Le seuil de rupture d'un élément est alors celui du carré auquel il appartient.

Nous avons simulé avec ce modèle la rupture de quelques structures pilotées en déplacement par un seul paramètre de chargement. Dans la suite, λ représente un déplacement imposé. On note par F la force généralisée définie comme le rapport du travail des forces extérieures sur λ .

Dans des expériences classiques comme la traction-compression simple ou la flexion 3-points, λ est augmentée progressivement jusqu'à la ruine de la structure. F est mesurée et la courbe force-déplacement est tracée.

Pour utiliser le modèle probabiliste décrit ci-dessus, nous commençons par mailler la structure. Puis, on simule plusieurs réalisations du champ ϕ^c . Pour chaque réalisation, on calcule la suite des couples (F_i, λ_i) correspondant à la i ème rupture, ainsi que le maximum de la force $F_{\max} = \text{Max}_i F_i$. On note par $\bar{F}_i, \bar{\lambda}_i$ et \bar{F}_{\max} les moyennes arithmétiques de F_i, λ_i et F_{\max} sur l'ensemble des réalisations simulées, respectivement.

La courbe moyenne force-déplacement est alors définie comme l'interpolation linéaire entre les points de coordonnées $(\bar{F}_i, \bar{\lambda}_i)$. Et la contrainte de rupture moyenne est définie par $\sigma = \bar{F}_{\max}/L^2$ où L est la taille de la structure.

Récapitulons les paramètres du modèle: le module d'Young E , le coefficient d'Young pris égal à 0.2 dans toutes les simulations, la longueur du cube "représentatif" l_c , la taille des hétérogénéités $d \leq l_c$, les paramètres de la loi de distribution des seuils de rupture: m et ϕ_{\max}^c , et enfin la longueur des éléments finis qui est toujours inférieure ou égale à d .

2.2- Essai de traction simple

Nous avons mené une étude paramétrique complète sur la résistance en traction simple d'un carré³ $L \times L$. Nous avons constaté que la courbe moyenne force-déplacement est indépendante de la finesse de maillage comme le montre la figure (), et qu'il en est de même de la contrainte de rupture moyenne σ . Cette figure montre aussi que la courbe moyenne force-déplacement est radoucissante.

Notons par σ_r la contrainte de rupture moyenne du domaine "représentatif", c'est-à-dire pour $L=l_c$. Une analyse dimensionnelle immédiate montre que σ/σ_r est une fonction de $L/l_c, d/l_c, m$ et du coefficient de poisson qui est fixé à 0.2 dans toute la suite. Afin de simplifier les notations, nous supposons dans la suite, et sans restreindre la généralité, que $l_c = 1$ (donc, $L \geq 1, d \leq 1$).

Nous pouvons synthétiser les résultats de notre étude numérique sous la forme suivante: pour tout $d \leq 1$, il existe une valeur critique de m qui dépend seulement de d , notée m_d , avec $m_d \leq 2$, et un exposant positif α_d , qui ne dépend que de d , tels que:

$$\begin{cases} m < m_d \Rightarrow & \forall L \geq 1 \quad \sigma/\sigma_r \approx L^{-\alpha_d} \\ m \geq m_d \Rightarrow \exists L_{m,d} / & \begin{cases} \forall 1 \leq L \leq L_{m,d} & \sigma/\sigma_r \approx L^{-\alpha_d} \\ \forall L \geq L_{m,d} & \sigma/\sigma_r \approx L_{m,d}^{-\alpha_d} \end{cases} \end{cases}$$

Ici la longueur $L_{m,d}$ dépend de m et de d .

Autrement dit, si m est inférieur à m_d la courbe $\log(\sigma/\sigma_r)$ - $\log(L)$ est une droite de pente $-\alpha_d$. Si m est supérieur ou égal à m_d , cette courbe est une ligne brisée formée d'un segment de droite de pente $-\alpha_d$ à l'origine, puis d'une asymptote horizontale. Voir figure ().

De plus, le processus de rupture est différent selon l'endroit où l'on se situe la courbe $\log(\sigma/\sigma_r)$ - $\log(L)$. On distingue la courbe "en pente $-\alpha_d$ " et "l'asymptote horizontale".

³Afin d'éviter des localisations artificielles sur le bord du carré, le domaine "représentatif" d'un point au voisinage d'un bord est prolongé par périodicité. De cette manière, tous les domaines représentatifs ont la même taille

- Dans le premier cas, c.-à-d. pour $m < m_d$ et L quelconque, ou pour $m \geq m_d$ et $L < L_{m,d}$, toute la courbe force-déplacement subit un effet d'échelle en $L^{-\alpha_d}$. Elle correspond à une rupture progressive d'un point de vue macroscopique qui a lieu par création puis coalescence de plusieurs zones endommagées. Aucune propagation brutale d'une zone localisée n'est observée.

- Dans le second cas, c.-à-d. pour $m \geq m_d$ et $L \geq L_{m,d}$, la partie pré-pic des courbes moyennes force-déplacement ne dépend plus de L . On peut dire abusivement que le milieu est "homogénéisable" pour le phénomène d'endommagement. Quant à la partie post-pic, elle traduit une rupture brutale du point de vue macroscopique qui correspond à la propagation d'une zone endommagée localisée. La largeur de la bande localisée est liée à la taille du cube "représentatif".

Par ailleurs, nos simulations numériques montrent que α_d s'exprime en fonction de d par la relation:

$$\alpha_d = \frac{1}{2 \left(\left[\frac{1}{d} \right] + 1 \right)}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x .

Quant à m_d , nous trouvons qu'il décroît de 2 à 0 quand d décroît de 1 à 0, c.-à-d. quand le nombre d'hétérogénéités par cube "représentatif" croît de 1 à l'infini. En particulier nous trouvons les valeurs suivantes: $m_d(d=1) \approx 2$ et $m_d(d=1/3) \approx 1.21$.

2.3- Structures entaillées chargées en mode I

Concernant les structures homothétiques entaillées chargées en mode I, nous trouvons que, pour $m \geq m_d$, la pente de la courbe $\log(\sigma)$ - $\log(L)$ est $-\alpha_d$ à l'origine, et $-1/2$ à l'infini. Autrement dit, un critère MLR s'applique pour les grandes structures. En revanche, pour $m < m_d$, nos simulations montrent qu'un critère MLR ne s'applique pas pour les grandes structures. En se basant sur les résultats expérimentaux de Bazant, ceci laisse penser que les matériaux quasi-fragiles devraient être modélisés avec $m \geq m_d$.

2.4- Discussion

D'une part, nous retrouvons pour $d=1$ (qui correspond à une seule hétérogénéité dans le domaine "représentatif") et $m < 2$, l'effet de volume prédit par Hermann *et al.* (1989), et d'autre part nous retrouvons pour $d \rightarrow 0^+$ (qui correspond à une infinité d'hétérogénéités dans le domaine "représentatif") un modèle déterministe radoucissant (au moins dans la partie pré-pic) dont les effets d'échelle de volume et de structure sont identiques à ceux du modèle non local de Mazars *et al.* (1991).

Les principales conclusions de ce travail numérique sont les suivantes: les matériaux hétérogènes quasi-fragiles semblent exhiber qualitativement les mêmes effets d'échelle que notre modèle avec $m \geq m_d$. Pour $m \geq m_d$, notre modèle prévoit une disparition de l'effet d'échelle de volume à partir d'une certaine taille d'éprouvette, ainsi que la

possibilité d'utiliser la MLR pour les grandes structures entaillées. A partir d'une certaine taille de structure, tout se passe comme si on pouvait remplacer le milieu hétérogène dont le comportement est élastique fragile non local par un milieu homogène endommageable radoucissant avec une taille de nonlocalité petite devant la taille de la structure.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ackoglu M. A., Krengel U., 1981. Ergodic theorems for superadditive processes. *J. Reine Angew. Math.*, 323, 53-67.

Attouch H., 1984a. Variational properties of epi-convergence. Application to limit analysis problems in mechanics and duality theory, in Proceeding Catania (Sicilia) 1984, *Lectures Notes in Mathematics*, 1091, Springer Verlag, Berlin.

Attouch H., 1984b. *Variational convergence for functions and operators*. Research Notes in Mathematics. Applicable Mathematics Series, Pitman Advanced Publishing Program. London

Attouch H., 1987-88. Homogénéisation, *Séminaire Bourbaki*, n° 686.

Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., 1978. *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland. Amsterdam.

Beran M., 1974. Application of statistical theories for the determination of thermal, electrical, and magnetic properties of heterogeneous materials. in *Mechanics of composite materials*, Spendeckyj G.P. Ed., Academic Press, New York, London.

Bouchitté G., 1986-87. Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. Application à l'homogénéisation en plasticité. *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 8, 7-36.

de Buhan P., 1986. Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés. *Thèse d'Etat*. Université Paris VI. Paris.

Bui H.D., Ehrlacher, 1981. Propagation of damage in elastic and plastic solids. in *Advances Fracture Research*, Volume 2, François et al. Ed., Pergamon Press, 533-552.

Burghes D., Graham A., 1986. *Introduction to control theory including optimal control*. Ellis Horwood publishers, Chichester, 289-313.

Canou J., Dormieux L., Sab K., Saitta A., 1991. Modelization of a cyclic pressuremeter test with a generalized elastoplastic law, in *Proceedings of the 10th European conference on soil mechanics and foundation engineering*, Ed. Associazione Geotecnica Italiana, Balkema publishers, Rotterdam, Brookfield.

Carmasol A., Salençon J., 1985. Une approche probabiliste du dimensionnement des structures par le calcul à la rupture. *J. Méca. Théo. et Appli.*, 4, n°3, 305-321.

Dal Maso G., Modica L., 1986. Nonlinear stochastic homogenization and ergodic theory. *J. Reine Angew. Math.*, **368**, 28-42.

Demangel F., Qi T., 1986. Homogénéisation en plasticité. *C. R. Acad. Sc. Paris I*, **303**, 339-342.

Demangel F., Qi T., 1990. Convex function of a measure obtained by homogenization. *SIAM J. Math. Analysis.* ?

Dormieux L., Canou J., Saitta A., Sab K., 1989. Simulation d'un essai pressiométrique cyclique à l'aide d'une loi élastoplastique généralisée. *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 470-474.

Ehrlacher A., 1985. Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal. *Thèse d'Etat*, Université Paris VI, Paris.

Friaâ A., 1979. La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité, *Thèse d'Etat*, Université Paris VI. Paris.

Hashin Z., 1983. Analysis of composite materials, a survey. *J. Appl. Mech.*, **50**, 481-505.

Hermann H.J., Hansen A., Roux S., 1989. Fracture of disordered elastic lattices in two dimensions. *Physical Review*, **637**.

L'Hermite R., 1973. Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion. *Annales de l'ITBTP*, **309-310**, 39-41.

Hill R., 1963. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 357-372.

Kadlecek V., Spetla Z., 1967. Effect of size and shape of test specimens on the direct tensile strength of concrete. *Bulletin de la RILEM*, **36**, 175-184.

Kingmann J.F.C., 1973. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.*, **1**, 883-909.

Kingmann J.F.C., 1976. Subadditive processes. *Lecture Notes in Math.*, **539**, 168-223.

Knuth D.E., 1981. *The art of computer programming. Volume 2: seminumerical algorithms*. 2nd Edition. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. Chapter 3.

Kozlov S.M., Olenik O., Zhikov V., 1994. *Homogenization of differential operators*. Springer Verlag.

Krengel U., 1985. *Ergodic theorems*. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Kröner E., 1980. Propriétés linéaires des matériaux aléatoires, in *Proceedings, 15^o Colloque du G.F.R.*, Editions Anciens E.N.P.C., Paris.

Laalai I., 1993. Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles à microstructure aléatoire. Approches locale et non locale. *Thèse ENPC*. Paris.

Laalai I., Sab K., 1993a. Size effect in quasi-brittle materials: a new micromechanics model, in Mecamat 93. International seminar on micromechanics of materials. *Collection de la D.E.R. d' E.D.F.*, **84**, Eyrolles, Paris, 188-198.

Laalai I., Sab K., 1993b. Size effect and stochastic nonlocal damage in quasi-brittle materials, in Probabilities and Materials, Breysse D. (Ed.), *NATO ASI Series. Series E: Applied Sciences*, **269**, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Boston.London. 151-161.

Laalai I., Sab K., 1994. Modèle élastique fragile stochastique non local: application à quelques essais de rupture, in Actes du 7ème colloque annuel MECAMAT, 14-17 mars 1994. Site du Futuroscope. (LMPM-ENSMA).

Lapeyre B., Pagès G., Sab K., 1990. Sequences with law discrepancy: generalization and application to Robbins-Monro algorithm. *Statistics*, **21**, n°2, 251-272.

Marcellini P., 1978. Periodic solutions and homogenization of non linear variational problems. *Ann. Math. Pura. Appl.*, **117**, 139-152.

Mazars J., Pijaudier-Cabot G., Saouridis C., 1991. Size effect and continuous damage in cementitious materials, *Int. J. of Fracture*, **51**, 159-173.

Matheron G., 1967. *Eléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris.

Murat F., 1977-78. H-convergence. *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique*, Univ. d'Alger. Polycopié.

Nemat-Nasser S., Hori M., 1993. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. North-Holland. Amsterdam. London. New York. Tokyo.

Ponté-Castaneda P., Willis J.R., 1988. *Proc. R. Soc. (Lond.)*, **A416**, 217.

Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1989. *Numerical recipes*. Cambridge University Press. Cambridge.

Ripley B., 1987. *Stochastic simulation*, John Wiley & Sons.

Sab K., 1986. Calcul à la rupture probabiliste: une méthode de simulation. *Séminaire 1986 sur l'application du concept de fiabilité en génie civil*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Ecole Polytechnique Fédérale. Lausanne

Sab K., 1989a. Sur quelques méthodes en mécanique aléatoire. *Thèse E.N.P.C.* Paris.

Sab K., 1989b. Homogénéisation des matériaux élastiques à microstructure aléatoire. *Actes du 9ème congrès français de mécanique, Metz. 5-8 septembre 1989*, tome 1, Congrès général, 148-149.

Sab K., 1990. Aperçu des techniques d'homogénéisation. *Ann. Ponts et Chaussées*, **53-54**, 30-31.

Sab K., 1991a. Principe de Hill et homogénéisation des matériaux aléatoires. *C. R. Acad. Sci. de Paris II*, **312**, 1-5.

Sab K., 1991b. Homogenization and simulation of ergodic random media. Oral communication to the *G. Herrmann 70th Anniversary Symposium, University of California, San Diego*.

Sab K., 1992. On the homogenization and simulation of random materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **11**, n°5, 585-607.

Sab K., 1994a. Homogenization of nonlinear random media by a duality method. Application to plasticity. *Asymptotic Analysis*. (To appear).

Sab K., 1994b. Détermination de la résistance macroscopique d'une plaque perforée aléatoirement. *C.R. Acad. Sci. Paris II*, (à paraître).

Sab K., 1994c. Utilisation de mécanismes par blocs pour la détermination par excès des résistances macroscopiques des matériaux aléatoires". Communication orale aux groupes de travail MECAMAT *Rhéologie des Matériaux Métalliques Biphases et Approches Probabilistes en Mécanique des Milieux Hétérogènes*. LMS - Ecole Polytechnique. 2-3 juin 1994.

Sab K., Laalal I., 1992. Non local models and scaling effect in disordered elastic lattices. Communication to Mathematical Physics of Disordered Systems, CIRM, Marseille, July 27-31, 1992. Abstracts edited by Bovier A., Koukiou F., *Institut für Angewandte Analysis und Stochastic, report n°3*, Berlin.

Sab K., Laalal I., 1993. Une approche unifiée des effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles, *C.R. Acad. Sci. Paris II*, **316**, n°9, 1187-1192.

Sab K., Zenzri H., 1990. Endommagement des multicouches soumis à un chargement répété, *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 245-248.

Sab K., Zenzri H., 1991. Endommagement des multicouches soumis à un chargement répété, *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 319-324.

Sab K., Zenzri H., 1992. Modélisation et simulation de l'endommagement par fatigue dans les chaussées bitumineuses, *Ann. Ponts et Chaussées*, **63**, 3-28.

Saitta A., Canou J., Dormieux L., Sab K., 1991. Simulation de l'essai pressiométrique à l'aide d'une loi élastoplastique généralisée. *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 30-34.

Saitta A., Canou J., Dormieux L., Sab K., 1992. Simulation of a cyclic pressuremeter test with application to the evaluation of cyclic behaviour of sand, in *Proceedings of the 10th world conference on earthquake engineering, Madrid*, Published by A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield.

Salençon J., 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC. Paris.

Sanchez-Palencia E., 1974. Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Eng. Sci.*, **12**.

Sanchez-Palencia E., 1980. Nonhomogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, **127**, Springer Verlag.

Spagnolo S., 1968. Sulla convergenza di soluzioni di Equazioni Paraboliche ed Ellittiche, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **22**, 577- 597.

Strang G., 1978. A family of model problems in plasticity, in Proc. Symp. Comp. Math. in Appl. Sc., eds Glowinski R. and Lions J.L., *Lecture Notes in Mathematics*, **704**, 292-308.

Suquet P., 1978. Sur un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de la plasticité, *C.R. Acad. Sc. Paris. A*, **286**, 1129-1132.

Suquet P., 1982. Plasticité et homogénéisation. *Thèse d'Etat*. Université Paris VI. Paris.

Tartar L., 1977. Cours Peccot, Collège de France.

Temam R., 1983. *Problèmes mathématiques en plasticité*. Gauthiers-Villars. Paris.

Torquato S., 1991. Random heterogeneous media: Microstructures and improved bounds on effective properties. *Appl. Mech. Rev.*, **44**, n°2, 37-76.

Torrent R.J., 1977. A general relation between tensile strength and specimen geometry for concrete-like materials. *Materials and Structures, Bulletin de la RILEM*, **58**, 187-196.

Wu X., 1991. Modélisation numérique de la fissuration du béton à partir d'une approche probabilisre. *Thèse ENPC*, Paris.

Zenzri H., 1992. Endommagement anisotrope par fatigue. Application au calcul d'une structure de chaussée bitumineuse. *Thèse ENPC*. Paris.

Zhikov V.V., 1985. Homogenization and limit load. *Uspekhi Mat. Nauk.* **40:5**, 221.

Karam SAB
Né le 16 Août 1963
Marié. Un enfant.
11, rue de Reims
75013 Paris. ☎ D. 44249902
B. 49143704

1-Titres et Diplômes

1985 Ingénieur Civil de L'Ecole des Ponts et Chaussées

1989 Docteur de l'E.N.P.C.

1992 Professeur Adjoint à l'E.N.P.C.

2-Expérience Professionnelle

Depuis Mars 1988 Enseignant-Chercheur au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'E.N.P.C.

3-Enseignements Dispensés

1- Assistant du cours "Analyse Mathématique" à l'Ecole Centrale de Paris. 85-86, 86-87, 87-88.

2- Assistant du cours "Mécanique Rationnelle" à l'Institut Supérieur d'Electronique de Paris. 86-87, 87-88.

3- Maître de conférence des cours "Mécanique 2" et "Mécanique 3" à l'E.N.P.C. 88-89, 89-90, 90-91, 91-92, 92-93, 93-94.

4- Responsable du cours "Propriétés des Matériaux Hétérogènes" de l'option V du D.E.A. Mécanique des Solides et des Structures, commun à Paris VI et l'E.N.P.C. 89-90, 90-91, 91-92, 92-93, 93-94.

5- Responsable de l'option V du D.E.A. Mécanique des Solides et des Structures 93-94

4- Encadrement

4.1-Thèses

Zenzri H., 1992. Endommagement anisotrope par fatigue. Application au calcul d'une structure de chaussée bitumineuse. *Thèse ENPC*. Paris.

Laalai I., 1993. Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles à microstructure aléatoire. Approches locale et non locale. *Thèse ENPC*. Paris.

4.2-Stages de DEA

Zenzri H., 1988. Etude de l'endommagement d'une section de chaussée. *Mémoire de DEA ENPC*, Paris.

Kazan Y., 1989. Identification des paramètres d'un nouveau critère de fatigue. *Mémoire de DEA ENPC*, Paris.

Guérin N., 1993. Etude préliminaire d'une simulation numérique du tassement d'une voie de chemin de fer soumis au passage répété du train. *Mémoire de DEA ENPC*, Paris.

5-Publications et Communications

5.1-Thèse

Sab K., 1989. Sur quelques méthodes en mécanique aléatoire. *Thèse E.N.P.C.* Paris

5.2-Comptes Rendus à l'Académie des Sciences

Sab K., 1991. Principe de Hill et homogénéisation des matériaux aléatoires. *C. R. Acad. Sci. de Paris II*, **312**, 1-5.

Sab K., Laalai I., 1993. Une approche unifiée des effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles, *C.R. Acad. Sci. Paris II*, **316**, n°9, 1187-1192.

Sab K., 1994. Détermination de la résistance macroscopique d'une plaque perforée aléatoirement. *C.R. Acad. Sci. Paris II*, (à paraître).

5.3-Revues internationales spécialisées avec comité de lecture.

Lapeyre B., Pagès G., Sab K., 1990. Sequences with law discrepancy: generalization and application to Robbins-Monro algorithm. *Statistics*, **21**, n°2, 251-272.

Sab K., 1992. On the homogenization and simulation of random materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **11**, n°5, 585-607.

Sab K., 1994. Homogenization of nonlinear random media by a duality method. Application to plasticity. *Asymptotic Analysis*. (To appear).

5.4-Revues nationales spécialisées avec comité de lecture.

Sab K., 1990. Aperçu des techniques d'homogénéisation. *Ann. Ponts et Chaussées*, **53-54**, 30-31.

Sab K., Zenzri H., 1992. Modélisation et simulation de l'endommagement par fatigue dans les chaussées bitumineuses, *Ann. Ponts et Chaussées*, **63**, 3-28.

5.5-Colloques avec actes

Sab K., 1986. Calcul à la rupture probabiliste: une méthode de simulation. *Séminaire 1986 sur l'application du concept de fiabilité en génie civil*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Ecole Polytechnique Fédérale. Lausanne

Sab K., 1989. Homogénéisation des matériaux élastiques à microstructure aléatoire. *Actes du 9ème congrès français de mécanique, Metz. 5-8 septembre 1989*, tome 1, Congrès général, 148-149.

Canou J., Dormieux L., Sab K., Saitta A., 1991. Modelization of a cyclic pressuremeter test with a generalized elastoplastic law, in *Proceedings of the 10th European conference on soil mechanics and foundation engineering*, Ed. Associazione Geotecnica Italiana, Balkema publishers, Rotterdam, Brookfield.

Saitta A., Canou J., Dormieux L., Sab K., 1992. Simulation of a cyclic pressuremeter test with application to the evaluation of cyclic behaviour of sand, in *Proceedings of the 10th world conference on earthquake engineering, Madrid*, Published by A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield.

Laalai I., Sab K., 1993a. Size effect in quasi-brittle materials: a new micromechanics model, in Mecamat 93. International seminar on micromechanics of materials. *Collection de la D.E.R. d' E.D.F.*, **84**, Eyrolles, Paris, 188-198.

Laalai I., Sab K., 1993b. Size effect and stochastic nonlocal damage in quasi-brittle materials, in Probabilities and Materials, Breysse D. (Ed.), *NATO ASI Series. Series E: Applied Sciences*, **269**, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Boston.London. 151-161.

Laalai I., Sab K., 1994. Modèle élastique fragile stochastique non local: application à quelques essais de rupture, in Actes du 7ème colloque annuel MECAMAT, 14-17 mars 1994. Site du Futuroscope. (LMPM-ENSMA).

5.6-Colloques sans actes

Dormieux L., Canou J., Saitta A., Sab K., 1989. Simulation d'un essai pressiométrique cyclique à l'aide d'une loi élastoplastique généralisée. *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 470-474.

Sab K., Zenzri H., 1990. Endommagement des multicouches soumis à un chargement répété, *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 245-248.

Saitta A., Canou J., Dormieux L., Sab K., 1991. Simulation de l'essai pressiométrique à l'aide d'une loi élastoplastique généralisée. *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 30-34.

Sab K., Zenzri H., 1991. Endommagement des multicouches soumis à un chargement répété, *rapport scientifique du GRECO Géomatériaux*, 319-324.

Sab K., 1991. Homogenization and simulation of ergodic random media. Oral communication to the *G. Herrmann 70th Anniversary Symposium, University of California, San Diego*.

Sab K., Laalai I., 1992. Non local models and scaling effect in disordered elastic lattices. Communication to Mathematical Physics of Disordered Systems, CIRM, Marseille, July 27-31, 1992. Abstracts edited by Bovier A., Koukiou F., *Institut für Angewandte Analysis und Stochastic, report n°3*, Berlin.

Sab K., 1994. Utilisation de mécanismes par blocs pour la détermination par excès des résistances macroscopiques des matériaux aléatoires". Communication orale aux groupes de travail MECAMAT *Rhéologie des Matériaux Métalliques Biphases et Approches Probabilistes en Mécanique des Milieux Hétérogènes*. LMS - Ecole Polytechnique. 2-3 juin 1994.

5.7-Rapport de fin de contrat

Guérin N., Laalai I., Sab K., 1994. Micro-scale modelling. Final Report. Eurobalt task 2. Project Brite-Euram "EUROBALT". *Rapport de contrat*. CERAM-ENPC, Noisy-Le-Grand.

6-Divers

-Responsable du projet 2.5 du GRECO Géomatériaux: "Fatigue et endommagement des milieux stratifiés". 1990 et 1991.

-Membre suppléant du Conseil d'Administration de l'ENPC.