



# Approche micromécanique du comportement d'un matériau fissuré non saturé

Bao Viet Tran

► **To cite this version:**

| Bao Viet Tran. Approche micromécanique du comportement d'un matériau fissuré non saturé.  
| Autre. Université Paris-Est, 2010. Français. <NNT : 2010PEST1093>. <tel-00601102>

**HAL Id: tel-00601102**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00601102>**

Submitted on 16 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

Spécialité : Génie Civil

Présentée par :

**Bao Viet TRAN**

Sujet de la thèse :

# **Approche micromécanique du comportement d'un matériau fissuré non saturé**

Soutenue à Champs-sur-Marne le 12 Janvier 2010

devant le jury composé de :

G. Bonnet	Professeur, Université Paris Est - UMLV	Président
H. Dumontet	Professeur, Université PMC (Paris VI)	Rapporteur
A. Giraud	Professeur, Université Metz	Rapporteur
I. Djeran-Maigre	Professeur, Université INSA de Lyon	Examinatrice
X. Chateau	Directeur de Recherche CNRS	Directeur de thèse



# Remerciements

En tout premier lieu, j'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Xavier Chateau, qui a dirigé cette thèse avec énormément de patience, beaucoup d'enthousiasme et une dose d'exigence. Son soutien constant a rendu facile ces trois années même dans les moments les plus critiques... Qu'il trouve en ces quelques lignes, le témoignage amical de ma profonde reconnaissance.

Je souhaite ensuite manifester ma reconnaissance à Monsieur Guy Bonnet qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, ainsi qu'à Madame Hélène Dumontet, Madame Irimi Djeran-Maigre et Monsieur Albert Giraud qui ont participé à l'évaluation de ce travail.

Je tiens à remercier tous mes collègues et mes amis du LMSGC pour l'ambiance chaleureuse, amicale et passionnée.

Un amical remerciement à tous mes collègues au Vietnam pour leur soutien et leur bonne humeur.

A tous mes amis qui m'ont offert leur soutien, je souhaite qu'ils trouvent ici la marque de ma grande reconnaissance.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement mes parents et ma grande famille pour m'avoir soutenu tout au long de mes études. Je n'oublie pas, bien évidemment, ma femme et ma sœur, qui ont su me rendre facile cette tranche de vie.



---

## Résumé

---

On s'intéresse plus particulièrement à la modélisation du comportement d'un matériau hétérogène méso-fissuré (béton, roche, ...), soumis à une sollicitation thermo-hydro-mécanique avec prise en compte du couplage géométrique. Pour conduire cette étude, on s'appuie notamment sur les approches micro-mécaniques du comportement des milieux méso-fissurés non saturés développées depuis quelques années au Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil - Ur Navier - Université Paris Est.

Le milieu fissuré non saturé traité ici est constitué d'une matrice solide homogène élastique linéaire et de fissures connectées saturées par deux fluides immiscibles : un liquide et un gaz séparés par une surface capillaire. La fissure est traditionnellement considérée comme une cavité ellipsoïdale (cas 3D) ou elliptique (cas 2D) dont le rapport d'aspect tend vers zéro. Deux morphologies typiques de matériau sont considérés dans ce travail : la situation où les fissures sont toutes orientées dans la même direction et la situation où les fissures possèdent des orientations aléatoires.

Dans une première étape, on rappelle brièvement les résultats disponibles concernant la modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties. A la fin de cette première partie, on complète les résultats déjà disponibles en étudiant l'influence de l'histoire de chargement sur la réponse de matériau.

Dans une deuxième étape, on s'attache à valider une partie des résultats obtenus en utilisant une description des efforts capillaires dans les fissures par une précontrainte

homogène en se référant aux solutions analytiques exactes disponibles dans la littérature permettant de décrire le comportement d'une fissure isolée au sein d'une matrice élastique.

Dans une troisième étape, on s'intéresse aux phénomènes de propagation des fissures en condition non saturée. Les lois de propagation sous critique et le phénomène de branchement des fissures sont également prises en compte dans cette approche.

La dernière partie de la thèse concerne l'influence de la température sur le comportement des milieux poreux non saturés.

**Mots clés :** Méthode d'homogénéisation , Problème non linéaire, Micro-structures, Capillarité, Milieu poreux non saturés, Mécanique de la rupture, Propagation sous critique, Propagation en mode mixte.

---

## Abstract

---

The main topic of my work is the development of a micromechanical model for the behaviour of unsaturated mesocracks in media (concrete, rock...) in which the thermo-hydro-mechanical loadings and thermo-hydro-mechanical couplings are taken into account. For this, we used the micromechanical approach model of behaviour of cracked porous media recently developed at LMSGC. My thesis is focused on the equilibrium configurations of a porous material whose pore space is saturated by a vapour and a liquid phase.

The behaviour of an elastic medium containing unsaturated mesocracks is studied in the framework of a micromechanical approach. The cracks are filled by two immiscible fluids, namely a liquid and a gas, separated by a capillary interface. Furthermore, it is assumed that the set of cracks constitutes a connected network; the capillary pressure is uniform over a representative elementary volume. The cracks are modelled as flat oblate spheroid cavities. Several geometrical configurations of cracks in porous media are considered in the framework of Eshelby-based homogenization methods (parallel cracks, randomly oriented cracks). First, a previously developed model showed that when coupling between the deformation of the cracks and the capillary forces is taken into account, there is no more a one-to-one relationship between the loading parameters and the state-variables. Thus, we describe the loading history prescribed to the material in order to compute its response.

Second, we validate these results referring to the exact solutions available in the

literature to describe the behaviour of a unsaturated crack within an elastic matrix. Third, the description of crack propagation in unsaturated media is considered in the framework of linear elastic fracture mechanics. The phenomenon of subcritical crack growth due to stress corrosion cracking is taken into account in this approach. Mixed mode fracture in the plane is also examined. Finally, we are interested in the influence of the temperature on the behavior of unsaturated porous media in the framework of the micromechanical approach.

**Keywords :** Homogenization methods, Non-linear effect, Microporomechanics, Microstructure, Capillarity, Unsaturated porous media, Linear elastic fracture mechanics, Subcritical crack growth, Mixed mode fracture.

---

## Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>19</b>
<b>1 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés</b>	<b>25</b>
1.1 Homogénéisation pour les milieux poreux . . . . .	26
1.1.1 Homogénéisation des milieux élastiques hétérogènes . . . . .	26
1.1.1.1 Notion de VER et de grandeurs moyennes . . . . .	26
1.1.1.2 Homogénéisation . . . . .	27
1.1.2 Homogénéisation des milieux poreux saturés . . . . .	29
1.1.2.1 Définition du problème . . . . .	29
1.1.2.2 Localisation . . . . .	30
1.1.3 Problème de l'inclusion d'Eshelby . . . . .	33
1.1.3.1 Problème de l'inclusion . . . . .	33
1.1.3.2 De l'inclusion à l'hétérogénéité . . . . .	34
1.1.3.3 Application à un unique pore saturé . . . . .	35
1.1.4 Méthodes d'estimation . . . . .	35
1.1.4.1 Schéma dilué . . . . .	36
1.1.4.2 Schéma de Mori-Tanaka . . . . .	36
1.2 Homogénéisation des milieux fissurés saturés . . . . .	37
1.2.1 Géométrie des fissures . . . . .	38

1.2.2	Le cas dilué . . . . .	40
1.2.2.1	Application à une famille de fissures ouvertes parallèles	41
1.2.2.2	Application à une distribution isotrope de fissures ouvertes . . . . .	42
1.2.3	Schéma de Mori-Tanaka . . . . .	42
1.2.4	Le cas des fissures fermées . . . . .	43
1.3	Annexe A . . . . .	45
1.3.1	Notation matricielle pour les tenseurs symétriques . . . . .	45
1.3.2	Transformation des composantes dans un changement de repère	46
1.3.2.1	Pour un tenseur du deuxième ordre symétrique . . . . .	46
1.3.2.2	Pour tenseur du quatrième ordre . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Comportement des matériaux mésolfissurés non saturés</b>	<b>49</b>
2.1	Introduction . . . . .	49
2.2	Modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties . . . . .	50
2.2.1	Modélisation des efforts intérieurs dans un milieu poreux non saturé . . . . .	50
2.2.2	Approximation toroïdale . . . . .	53
2.2.3	Approche linéaire du comportement . . . . .	55
2.2.3.1	Homogénéisation . . . . .	55
2.2.3.2	Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope	63
2.2.4	Validité de l'approximation $X \rightarrow 0$ . . . . .	64
2.2.5	Prise en compte des non linéarités géométriques . . . . .	69
2.2.5.1	Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope	71
2.2.5.2	Prise en compte de l'influence de l'histoire de char- gement . . . . .	74
2.3	Solution analytique exacte du problème de fissures non saturés . . . . .	78
2.3.1	Equations du problème . . . . .	80
2.3.2	Comportement macroscopique du matériau. Le cas linéaire - Situation diluée . . . . .	83
2.3.2.1	Une unique famille de fissure . . . . .	85
2.3.2.2	Distribution isotrope de fissures . . . . .	87

2.3.3	Prise en compte des non linéarités géométriques . . . . .	88
2.3.3.1	Equation géométrique . . . . .	88
2.3.3.2	Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope . . . . .	91
2.3.4	Conclusion . . . . .	93
2.4	Validation numérique . . . . .	94
2.5	Annexe B - Calculs détaillés de la solution exacte . . . . .	97
2.5.1	Calcul de la déformation et du facteur d'intensité de contrainte . . . . .	97
2.5.1.1	Le cas 1 . . . . .	97
2.5.1.2	Le cas 2 . . . . .	97
2.5.1.3	Le cas 3 . . . . .	98
2.5.2	Calcul de la variation de volume . . . . .	99
2.5.2.1	Cas 1 . . . . .	100
2.5.2.2	Cas 2 . . . . .	100
2.5.2.3	Cas 3 . . . . .	101

### 3 Critère d'endommagement d'un milieu mésolfissuré en conditions saturée et non saturée 103

3.1	Introduction . . . . .	103
3.2	Généralité sur la rupture . . . . .	104
3.3	Modélisation de la propagation d'une fissure saturée . . . . .	107
3.3.1	Loi d'évolution . . . . .	107
3.3.2	Propagation sous critique des fissures . . . . .	110
3.4	Modélisation de l'endommagement d'un milieu poreux saturé. Approche par homogénéisation . . . . .	112
3.4.1	Milieu fissuré contenant une unique famille de fissures . . . . .	113
3.4.2	Distribution isotrope de l'orientation des fissures . . . . .	115
3.5	Rupture des matériaux fragiles non saturés . . . . .	116
3.5.1	Taux de restitution d'énergie en pointe d'une fissure non saturée . . . . .	117
3.5.2	Le cas non interagissant - schéma dilué . . . . .	123
3.5.3	Le cas interagissant - schéma de Mori-Tanaka . . . . .	127
3.6	Conclusion . . . . .	133

<b>4</b>	<b>Endommagement des milieux fissurés en mode mixte</b>	<b>135</b>
4.1	Introduction . . . . .	135
4.2	Branchement de fissure en mode mixte . . . . .	137
4.2.1	Critère de propagation pour une fissure unique isolée dans un milieu infini homogène . . . . .	138
4.2.1.1	Cas de la fissure ouverte . . . . .	139
4.2.1.2	Cas $K_I = 0$ . . . . .	141
4.2.1.3	Cas $K_I > 0$ . . . . .	142
4.2.1.4	Cas de la fissure fermée . . . . .	145
4.2.2	Critère de propagation de l'endommagement pour un matériau méso fissuré . . . . .	145
4.2.2.1	Validité de la solution approchée . . . . .	147
4.3	Critère énergétique sans branchement de fissure . . . . .	149
4.3.1	Condition d'ouverture / fermeture de fissure . . . . .	150
4.3.2	Homogénéisation d'un solide fissuré bidimensionnel . . . . .	150
4.3.2.1	Une famille de fissures ouvertes parallèles . . . . .	151
4.3.2.2	Une distribution isotrope transverse de fissures ouvertes . . . . .	152
4.3.2.3	Le cas de fissures fermées . . . . .	154
4.3.3	Critère d'endommagement . . . . .	155
4.4	Comparaison et conclusion . . . . .	158
4.5	Annexe C : Tenseur d'Eshelby pour une ellipse cylindrique infinie . . . . .	160
<b>5</b>	<b>Influence de la température sur le comportement des milieux poreux non saturés</b>	<b>163</b>
5.1	Introduction . . . . .	163
5.2	Comportement thermoélastique d'un milieu poreux saturé . . . . .	167
5.2.1	Thermoélasticité d'un milieu solide . . . . .	167
5.2.2	Localisation pour le problème thermo-poro-mécanique . . . . .	168
5.2.3	Homogénéisation du problème thermo-poro-mécanique . . . . .	170
5.3	Comportement thermoélastique du milieu poreux non saturé . . . . .	173
5.3.1	Effet d'une variation de température sur la courbe capillaire d'un milieu indéformable . . . . .	174

---

5.3.2	Modèle thermo-poro-mécanique linéaire d'un milieu solide déformable . . . . .	176
5.3.3	Modèle thermo-poro-mécanique non linéaire d'un milieu fissuré non saturé . . . . .	179
5.4	Conclusion . . . . .	183
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>185</b>



---

## Table des figures

---

1.1	Volume élémentaire représentatif de milieu poreux saturé . . . . .	30
1.2	L'équivalence entre les problèmes de l'inhomogénéité et de l'hétéro- généité . . . . .	35
1.3	Le repère global et le repère local . . . . .	39
2.1	Le repère cylindrique associé à une fissure modélisée par un ellipsoïde de révolution dans la situation non saturée . . . . .	51
2.2	Equilibre de la ligne triple . . . . .	52
2.3	Fissure non saturée . . . . .	54
2.4	Courbes capillaires pour trois valeurs du rapport d'aspect. . . . .	56
2.5	Séchage du milieu fissuré isotrope - cas linéaire . . . . .	63
2.6	Comparaison entre les valeurs exactes et les valeurs approchées ( $X =$ $0,01$ ) . . . . .	66
2.7	Comparaison entre les valeurs exactes et les valeurs approchées ( $X =$ $0,001$ ) . . . . .	67
2.8	Déformations à l'état sec (prenant en compte les effets de la tension surface) et à contrainte macroscopique nulle . . . . .	69
2.9	Séchage sous contrainte nulle du milieu fissuré isotrope - cas non linéaire	72
2.10	Relation entre la pression capillaire et le volume du liquide . . . . .	74
2.11	Configuration non saturée du matériau fissuré dans le plan $(x, \bar{X})$ . .	76

2.12	Relations entre la saturation, la pression capillaire et la déformation macroscopique en fonction de $x$ . . . . .	77
2.13	Fissure plane de révolution (penny shape crack) isolée dans un milieu infini soumis à une déformation homogène à l'infini en situation non saturée . . . . .	79
2.14	Décomposition du problème complet d'une fissure isolée non saturé en trois sous problèmes élémentaires . . . . .	81
2.15	Forme d'une fissure ( $X_0 = 0$ ) . . . . .	82
2.16	Décomposition du problème complet d'un milieu fissuré non saturé en deux sous-problèmes élémentaires . . . . .	84
2.17	Hypothèse de superposition de l'ouverture de la fissure . . . . .	89
2.18	Déformation de séchage en fonction de la pression capillaire - cas non linéaire. . . . .	92
2.19	Comparaison entre les deux approche - Séchage sous contrainte macroscopique nulle . . . . .	93
2.20	Maillage du problème . . . . .	95
2.21	La comparaison entre l'approche numérique et la solution analytique . . . . .	96
3.1	Les trois modes de rupture : mode I (ouverture), mode II (glissement plan), mode III (glissement antiplan). . . . .	105
3.2	Au voisinage d'une pointe de fissure . . . . .	105
3.3	Matériau avec une seule fissure saturée . . . . .	108
3.4	La propagation d'une fissure en régime sous critique . . . . .	111
3.5	Facteur d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure non saturée - cas d'une contrainte macroscopique nulle. . . . .	122
3.6	Comportement du milieu fissuré non saturé isotrope - cas dilué ((a) : cas non saturé avec couplage; (b) : cas non saturé sans couplage; (c) : cas saturé; (d) : cas sec) . . . . .	126
3.7	Comportement du milieu fissuré non saturé isotrope - cas de Mori-Tanaka ((a) : cas non saturé avec couplage; (b) : cas non saturé sans couplage; (c) : cas saturé; (d) : cas sec) . . . . .	131
3.8	Comparaison entre les résultats calculés pour les deux schémas (courbes (b) sur les Fig. 3.6 et Fig. 3.7 . . . . .	133

4.1	Branchement de fissure en mode mixte $I + II$ . . . . .	136
4.2	Obtention du critère d'endommagement initial . . . . .	137
4.3	Premier critère d'endommagement local pour une fissure . . . . .	142
4.4	Angle de branchement en fonction du rapport $K_{II}/K_I$ . . . . .	143
4.5	Domaine des chargements ne provoquant pas la propagation d'une fissure d'orientation $\psi$ dans le cas où la fissure est ouverte et dans le cas où la fissure est fermée . . . . .	144
4.6	Critère d'endommagement initial pour un milieu dilué isotrope de fissures de même taille (solution approchée avec $L = 1$ ) . . . . .	146
4.7	Angle de branchement en fonction du rapport $K_{II}/K_I$ selon les deux solutions exacte et approchée . . . . .	148
4.8	Critère d'endommagement initial pour un milieu dilué isotrope de fissures de même taille (solution exacte avec $L = 1$ ) . . . . .	148
4.9	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée . . . . .	149
4.10	Le critère d'endommagement selon l'approche énergétique ( $L = 1$ ) . . . . .	158
4.11	Comparaison entre les deux approches . . . . .	159
4.12	Ellipse cylindrique infini . . . . .	160
5.1	Courbes de rétention d'eau pour l'argile FoCa à deux température différentes [45] . . . . .	165
5.2	Courbes de rétention d'eau pour la bentonite MX80 à différentes tem- pératures [53]. . . . .	165
5.3	Courbes de rétention d'eau pour l'argile de Boom à différentes tem- pératures et pour deux états de compaction différents [49] . . . . .	166
5.4	Relation entre la courbe capillaire et le température dans le cas indé- formable . . . . .	175
5.5	Modèle morphologique de l'espace poreux pour modéliser l'hystérésis capillaire . . . . .	177
5.6	Modèle morphologique pour l'hystérésis capillaire . . . . .	179
5.7	Comportement thermo-hydro-mécanique du milieu fissuré isotrope - cas contrainte imposée nulle . . . . .	182
5.8	La modélisation de l'influence de la température sur la courbe de rétention d'eau - cas contrainte imposée nulle . . . . .	182



---

## Introduction générale

---

De nombreux matériaux du Génie Civil (bétons, roches, sols, ...) sont des matériaux hétérogènes poreux. Le comportement de ces matériaux observés à l'échelle macroscopique, qu'ils soient soumis à une sollicitation thermique, mécanique ou hydrique, résulte des phénomènes se déroulant à l'échelle des hétérogénéités, c'est à dire des pores. Ainsi, dans les situations où les pores constituant l'espace poreux sont connectés entre eux et avec l'extérieur, des échanges de matières fluides (gaz et liquide) se produisent entre l'extérieur et le matériau. Ces échanges influent directement sur les caractéristiques et sur la durabilité des matériaux. Ce constat explique qu'un grand nombre de travaux de recherche ait cherché à valoriser les informations disponibles sur les phénomènes se déroulant à l'échelle des hétérogénéités et sur les propriétés morphologiques du matériau pour élaborer des lois de comportement macroscopique (échelle pertinente pour le calcul des structures). Dans ce cadre, le recours aux méthodes de changement d'échelles paraît évidemment particulièrement pertinent. Notre travail est une contribution à cet effort de recherche. Dans ce cadre, on s'est intéressé plus particulièrement à la modélisation du comportement d'un matériau hétérogène méso-fissuré, soumis à une sollicitation thermo-hydro-mécanique avec prise en compte du couplage géométrique. Pour conduire cette étude, on s'est appuyé notamment sur les approches micro-mécaniques du comportement des milieux méso-fissurés non saturés développées depuis quelques années au Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil.

Ce mémoire s'organise autour de cinq chapitres dont les grandes lignes sont brièvement évoquées ci-après.

Le premier chapitre de ce mémoire est essentiellement bibliographique. Il débute par une présentation synthétique de la méthodologie et les caractères généraux de l'approche d'homogénéisation pour un matériau poreux élastique linéaire. On rappelle ensuite les résultats déjà disponibles dans la littérature concernant les lois macroscopiques d'un matériau fissuré saturé obtenues dans le cadre des techniques de changement d'échelle de type Eshelby où les fissures sont modélisées par des inclusions ellipsoïdales aplaties immergées dans la phase solide.

Le deuxième chapitre s'appuie sur les résultats disponibles concernant la modélisation des déformations occasionnées par des variations de saturation d'un matériau méso-fissuré à matrice élastique linéaire (thèse de Yue Xu). En effet, le modèle développé par Yue Xu dans sa thèse repose sur l'hypothèse classique qu'il est possible de modéliser les fissures par des cavités ellipsoïdales aplaties. Cette hypothèse conduit à représenter le chargement des fluides et des interfaces capillaires sur la fissure par une contrainte équivalente.

Dans la première partie du deuxième chapitre (section 2.2), on revient tout d'abord les résultats disponibles concernant la modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties (approche par la contrainte équivalente). On complète les résultats de Yue Xu en activant la détermination complétée de la loi de comportement dans cette situation (Yue Xu a donné uniquement la relation permettant le calcul de la contrainte macroscopique en fonction des paramètres définissant le chargement mécanique appliqué au VER). Ensuite, on s'est intéressé à la détermination du domaine de validité de l'hypothèse consistant à ne retenir que les termes du premier ordre quand le rapport d'aspect des fissures est très petit devant l'unité. Enfin, on a étudié pour un milieu particulier l'influence du chargement appliqué à un VER de matériau méso fissuré non saturé sur sa réponse.

On s'intéresse ensuite à compléter ces résultats de Xu en traitant trois problèmes concernant la loi de comportement qui relie la déformation moyenne de l'espace poreux aux valeurs des chargements; la validation de l'approximation de la valeur du rapport d'aspect de fissures étant plus petite que l'unité et l'étude de l'influence

de l'histoire de chargement sur la réponse de matériau.

Dans la seconde partie du deuxième chapitre (section 2.3), on s'attache à valider une partie des résultats obtenus en prenant en compte les efforts capillaires dans chaque fissure par une précontrainte homogène en se référant aux solutions analytiques exactes disponibles dans la littérature (approche analytique) permettant de décrire le comportement d'une fissure isolée au sein d'une matrice élastique. Pour cela, on utilise la solution analytique de Bui valable pour une fissure plane occupant un domaine circulaire plan dans un matériau dont l'état naturel est pris comme état de référence, soumise à un chargement homogène à l'infini et à une répartition de pression sur les lèvres de la fissure rendant compte de la présence de deux fluides séparés par une interface capillaire.

A la lumière des résultats présentés au second chapitre, on s'intéresse dans le troisième chapitre aux phénomènes de propagation des fissures en condition non saturée. En effet, les efforts capillaires s'exerçant sur les lèvres de la fissure modifie la valeur des facteurs d'intensité des contraintes en fond de fissure qui contrôlent la propagation des ces dernières. Pour mener cette étude, on s'appuie à la fois sur la solution analytique obtenue pour la validation de l'approche par changement d'échelle du comportement des matériaux méso-fissurés en conditions non saturées évoquée au second chapitre et sur les deux théories (facteur d'intensité de contrainte et critère énergétique de Griffith) de la mécanique linéaire de la rupture. On peut ainsi intégrer dans une modélisation globale de la propagation de l'endommagement en condition non saturée les effets locaux induits par la non saturation des fissures. L'interaction entre des fissures est aussi prise en compte dans le cadre du schéma de Mori-Tanaka. Une loi de propagation sous critique des fissures est également prise en compte dans cette approche. La prise en compte de ce phénomène permet d'intégrer les effets différés dans la modélisation du comportement des géomatériaux en conditions saturées.

L'approche de la propagation des fissures décrite au troisième chapitre considère que les fissures se propagent uniquement en mode  $I$ . Le principal inconvénient de cette modélisation est qu'elle ne permet pas de prendre en compte le phénomène de branchement des fissures observé quand on soumet une fissure à chargement sollicitant

les modes *II* et *III*. Le quatrième chapitre est donc consacré aux phénomènes de propagation des fissures en mode mixte dans la situation sèche. Classiquement, le phénomène de propagation des fissures est relié au phénomène d'endommagement des matériaux méso-fissurés comme les roches. Pour prendre en compte ce phénomène dans une démarche d'homogénéisation, deux approches ont été proposées dans la littérature : une approche énergétique reposant sur la mise en œuvre du raisonnement de Griffith à partir des estimations du comportement macroscopique du matériau en fonction des paramètres décrivant la morphologie des fissures et une approche discrète où le problème de propagation des fissures est résolu pour chacune des fissures. Le principal défaut de la première méthode est qu'elle ne permet pas de tenir compte du phénomène de branchement dans la propagation des fissures alors que la seconde méthode permet la prise en compte de ce phénomène. Par contre, la première méthode permet de prendre en compte de nombreux phénomènes intervenant dans la propagation de l'endommagement comme les interactions mécaniques entre fissures, les phénomènes de frottement entre les lèvres des fissures ou le caractère désordonné du milieu étudié alors que la prise en compte de ces phénomènes est très difficile, voire impossible dans le cadre de la seconde méthode. Dans le but d'évaluer la qualité des prédictions obtenues au moyen de la première méthode par rapport à celles obtenues en utilisant la seconde méthode, on s'intéresse à la prédiction du critère initial de propagation de l'endommagement pour un milieu fissuré désordonné par l'une et l'autre des méthodes.

Il est bien connu que la valeur de la tension de surface entre deux fluides immiscibles (de l'eau et de l'air humide par exemple) dépend de la température. Dans le cinquième chapitre, on développe donc les études décrites ci-dessus de façon à prendre en compte l'effet d'une variation de la température. Dans la mesure où les effets d'une variation de température sur chacune des propriétés microscopiques du matériau (tension de surface, ténacité, module d'élasticité) sont connus, on peut ainsi intégrer les effets thermiques dans la description macroscopique du comportement des matériaux poreux en régime non saturé. Comme dans le cas de la prise en compte des efforts capillaires sur la propagation de l'endommagement, cette étude s'appuie pour une large part sur des résultats déjà disponibles (homogénéisation, problème capillaire dans un pore ellipsoïdal, ...). Par contre, elle permet d'apporter

des réponses à des questions importantes pour la modélisation du comportement des matériaux poreux non saturés soumis à des changements de température tels que les roches argileuses utilisées pour isoler les déchets nucléaires dans les stockages à grande profondeur.



# CHAPITRE 1

---

## Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

---

Le premier chapitre de ce mémoire a pour objectif de rassembler les formules nécessaires concernant l'application des techniques de changement d'échelle de type Eshelby à la détermination des propriétés élastiques macroscopique des milieux poreux élastiques. De nombreux travaux traitant ce problème ont été développés depuis quelques années par l'équipe de L. Dormieux [4, 17, 20, 46]. Dans un premier temps, on présente la méthodologie et les résultats de l'approche d'homogénéisation pour un matériau poreux aléatoire élastique linéaire dans le cas saturé et dans le cas sec. Dans un second temps, l'espace poreux se réduit aux fissures et ce problème est le sujet essentiel de ce mémoire. On présente dans cette situation les résultats des lois macroscopiques du matériau dans le cadre des techniques de changement d'échelle de type Eshelby qui considère les fissures comme des inclusions ellipsoïdales aplaties plongées dans la phase solide.

## 1.1 Homogénéisation pour les milieux poreux

### 1.1.1 Homogénéisation des milieux élastiques hétérogènes

#### 1.1.1.1 Notion de VER et de grandeurs moyennes

Le volume élémentaire représentatif (VER) du matériau hétérogène considéré est un élément de volume qui, en un point matériel, est statistiquement représentatif des propriétés du matériau (composition, morphologie, ...). Le VER doit être donc suffisamment petit par rapport au volume de l'échantillon ou de la structure qui le contient pour pouvoir être considéré comme un point matériel de la théorie des milieux continus et suffisamment grand par rapport à la taille caractéristique des hétérogénéités qu'il contient.

L'objectif général des approches micro-macro est de définir un milieu homogène équivalent ayant les mêmes propriétés mécaniques macroscopiques que le milieu hétérogène. De manière générale, les grandeurs moyennes de contrainte et de déformation sont définies de la façon suivante :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (1.1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont respectivement le tenseur local de contrainte et le tenseur local de déformation dans le domaine  $\Omega$  occupé par le VER. Dans le cas d'une sollicitation en contrainte, on impose ici la condition à la limite en effort  $\underline{T}^d = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}$  sur  $\partial\Omega$  avec  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy macroscopique.  $\partial\Omega$  désigne le bord du domaine  $\Omega$  tandis que  $\underline{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur au domaine  $\Omega$ . En utilisant le théorème de la divergence, on vérifie que la contrainte moyenne est égale à la contrainte macroscopique imposée au contour du VER,

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) d\Omega = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.2)$$

Dans ce cas, la relation  $\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  permet de définir la déformation macroscopique. De façon similaire, dans le cas de la sollicitation en déformation définie par la condition en déplacement imposé :  $\underline{\xi}^d = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$  sur  $\partial\Omega$  avec  $\mathbf{E}$  le tenseur des déformations macroscopique, on montre que la déformation moyenne est égale à la déformation

macroscopique imposée :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) d\Omega = \mathbf{E}. \quad (1.3)$$

La relation  $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  permet alors de définir le lien entre contraintes macroscopique et microscopique.

### 1.1.1.2 Homogénéisation

Après avoir rappelé les correspondances entre les grandeurs mécaniques aux deux échelles, on se pose naturellement la question de l'homogénéisation des propriétés du matériau. Il s'agit donc d'exploiter les informations disponibles à l'échelle microscopique pour déterminer les propriétés macroscopiques en résolvant un problème sur le VER considéré comme une structure. On va présenter dans la suite les deux approches classiques utilisées en homogénéisation des milieux aléatoires.

#### 1.1.1.2.1 Approche en déformation

Le problème à résoudre à l'échelle microscopique dans le cas d'une sollicitation en déformation appliquée à un VER de matériau élastique linéaire hétérogène s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & : (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & : (\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi}) & : (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & : (\partial\Omega) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Avec  $\underline{\xi}(\underline{x})$  est le champ de déplacement,  $\mathbb{C}(\underline{x})$  est le tenseur d'élasticité dans le domaine  $\Omega$  et l'opérateur gradient par rapport à la variable d'espace microscopique. Ce problème est linéaire et admet une unique solution. Le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  associé au champ de déplacement dépend linéairement de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  appliquée. On a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

## 28 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

où  $\mathbb{A}$  est un tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur de localisation en déformation. En utilisant la relation (1.3), on montre facilement :

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}, \quad (1.6)$$

avec  $\mathbb{I}$ , le tenseur identité du quatrième ordre. En considérant qu'on connaît la valeur du tenseur de localisation en déformation et en reportant la première relation (1.4) et l'équation (1.5) dans (1.2), on obtient une loi de comportement homogénéisée élastique linéaire caractérisée par le tenseur des modules macroscopique  $\mathbb{C}^{hom}$  :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle. \quad (1.7)$$

### 1.1.1.2.2 Approche en contrainte

De manière analogue, dans le cas où le chargement est du type contrainte homogène appliquée sur le bord du VER, le problème de structure à résoudre à l'échelle microscopique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \quad : \quad (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 \quad \quad \quad : \quad (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad : \quad (\partial\Omega) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

où  $\mathbb{S}(\underline{x})$  désigne le tenseur des complaisances dans le domaine  $\Omega$  et  $\underline{n}(\underline{x})$  le vecteur normal unitaire extérieur au domaine. On obtient alors la loi de comportement homogénéisée élastique linéaire caractérisée par le tenseur des complaisances macroscopique  $\mathbb{S}^{hom}$  :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbb{S}^{hom} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{H} \rangle, \quad (1.9)$$

où  $\mathbb{H}$  désigne le tenseur du quatrième ordre nommé tenseur de localisation en contrainte. Ce tenseur joue le même rôle que le tenseur de localisation en déformation introduit plus haut. Il est défini par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{H}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.10)$$

En reportant l'équation (1.10) dans la relation (1.2), on établit que  $\mathbb{H}$  vérifie :

$$\langle \mathbb{H} \rangle = \mathbb{I}. \quad (1.11)$$

## 1.1.2 Homogénéisation des milieux poreux saturés

### 1.1.2.1 Définition du problème

On considère ici un milieu poreux saturé constitué d'une matrice solide homogène élastique linéaire et de pores saturés par un fluide à la pression  $p$ . Le volume élémentaire représentatif de ce matériau occupe le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . La phase solide occupe le domaine  $\Omega_s$  de frontière  $\partial\Omega_s$  tandis que les pores occupent le domaine  $\Omega_f$  de frontière  $\partial\Omega_f$ , complémentaire de  $\Omega_s$  dans  $\Omega$ . Pour simplifier, on suppose de plus que les pores n'intersectent pas la frontière du VER ; on a donc  $\partial\Omega_s = \partial\Omega \cup \partial\Omega_f$  [20].

La porosité lagrangienne actuelle, la porosité lagrangienne initiale, et la porosité eulérienne actuelle du milieu sont respectivement définies par les relations

$$\phi = \frac{|\Omega_f|}{|\Omega_0|}, \phi_0 = \frac{|\Omega_{f0}|}{|\Omega_0|}, \vartheta = \frac{|\Omega_f|}{|\Omega|}. \quad (1.12)$$

$|\Omega_0|$ ,  $|\Omega|$ ,  $|\Omega_{f0}|$ ,  $|\Omega_f|$  désignent respectivement le volume du milieu à l'état initial, le volume du milieu à l'état actuel, le volume des pores à l'état initial et le volume des pores à l'état actuel. Comme on suppose que la déformation reste petite, on peut considérer que  $\phi = \vartheta$ .

Pour établir le lien entre comportement à l'échelle microscopique et caractérisation du comportement à l'échelle macroscopique, on impose par exemple une condition de sollicitation en déformation au VER :  $\underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$  sur le bord  $\partial\Omega$ . Le problème à

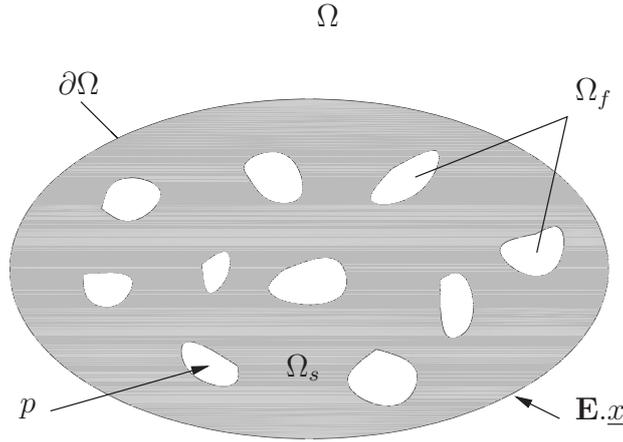


FIG. 1.1 – Volume élémentaire représentatif de milieu poreux saturé

résoudre à l'échelle microscopique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & : (\Omega_s) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = -p\mathbf{I} & : (\Omega_f) \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & : (\Omega_s) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla\underline{\xi} + {}^T\nabla\underline{\xi}) & : (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & : (\partial\Omega) \\ [[\boldsymbol{\sigma}]] \cdot \underline{n} = 0 & : (\partial\Omega_f) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

avec  $\mathbb{C}^s : \mathbb{S}^s = \mathbb{I}$ , où  $\mathbb{C}^s$  désigne le tenseur d'élasticité,  $\mathbb{S}^s$  le tenseur des complaisances de la matrice solide,  $\underline{n}$  désigne le vecteur normal unitaire extérieur au domaine occupé par la phase solide et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité du deuxième ordre.

### 1.1.2.2 Localisation

Le problème est linéaire. Le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dépend donc linéairement de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et de la pression dans le fluide  $p$ . La procédure

d'homogénéisation consiste à construire le tenseur de localisation en déformation du quatrième ordre  $\mathbb{A}$  engendré par la déformation  $\mathbf{E}$  et le tenseur de localisation en déformation du deuxième ordre  $\mathbf{A}'$  engendré par la pression  $p$ . On a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} - \mathbf{A}'(\underline{x})p. \quad (1.14)$$

Le champ de contrainte microscopique dans le domaine solide s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^s : \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} - \mathbb{C}^s : \mathbf{A}'(\underline{x})p. \quad (1.15)$$

La moyenne du champ de contrainte dans le VER est définie par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega_0|} \left( \int_{\Omega_{s0}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_{f0}} -p \mathbf{I} d\Omega \right) = (1 - \phi_0) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^s - \phi_0 p \mathbf{I}, \quad (1.16)$$

avec  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^s$  la moyenne du champ de contrainte dans le domaine solide,

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^s = \frac{1}{|\Omega_{s0}|} \int_{\Omega_{s0}} \boldsymbol{\sigma} d\Omega. \quad (1.17)$$

En reportant l'équation (1.15) dans (1.16), on obtient la relation suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p \mathbf{B}. \quad (1.18)$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\mathbf{B}$  désignent respectivement le tenseur d'élasticité macroscopique et le tenseur de Biot, définis par :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle^s = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^p), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{B} = \phi_0 \mathbf{I} + (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbf{A}' \rangle^s. \quad (1.20)$$

avec

$$\langle \mathbb{A} \rangle^p = \frac{1}{|\Omega_{p0}|} \int_{\Omega_{p0}} \mathbb{A} d\Omega. \quad (1.21)$$

Par ailleurs, on peut calculer la relation entre la variation de la porosité lagrangienne et les paramètres de chargement macroscopiques. Premièrement, on calcule la variation de volume des pores occupant le domaine  $\Omega_{f0}$  en fonction du champ de

## 32 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

déplacement le long de l'interface solide-fluide :

$$\Delta|\Omega_{f0}| = - \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi} \cdot \underline{n} dS = - \int_{\partial\Omega_{f0} \cup \partial\Omega_0} \underline{\xi} \cdot \underline{n} dS + \int_{\partial\Omega_0} \underline{\xi} \cdot \underline{n} dS \quad (1.22)$$

$$= - \int_{\Omega_{s0}} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + |\Omega_0| \text{tr} \mathbf{E}. \quad (1.23)$$

La variation de porosité lagrangienne est définie par :

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 = \frac{|\Omega_f| - |\Omega_{f0}|}{|\Omega_0|} = \frac{\Delta|\Omega_{f0}|}{|\Omega_0|}, \quad (1.24)$$

En reportant l'équation (1.14) dans (1.23), on trouve :

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 = \frac{p}{N} + \mathbf{B}' : \mathbf{E}, \quad (1.25)$$

où,

$$\frac{1}{N} = (1 - \phi_0) \text{tr} \langle \mathbf{A}' \rangle^s, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{I} - (1 - \phi_0) \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^s, \quad (1.27)$$

avec  $N$  le module de Biot.

En utilisant le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, avec la sollicitation 1 définie par  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ ,  $p = 0$  et la sollicitation 2 définie par  $\mathbf{E} = 0$ ,  $p = p_0$ , on montre que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ . On en déduit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \phi_0 \mathbf{I} + (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbf{A}' \rangle^s = \mathbf{I} - (1 - \phi_0) \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^s = \phi_0 \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^p, \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{N} = (1 - \phi_0) \text{tr} \langle \mathbf{A}' \rangle^s = \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - \phi_0 \mathbf{I}). \quad (1.29)$$

En utilisant l'équation (1.19), on peut calculer le tenseur de Biot  $\mathbf{B}$  et le coefficient  $1/N$  en fonction de  $\mathbb{C}^{hom}$  et de  $\mathbb{S}^s$  uniquement :

$$\mathbf{B} = \phi_0 \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^p = \mathbf{I} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^s : \mathbf{I}, \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{N} = \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - \phi_0 \mathbf{I}) = ((1 - \phi_0) \mathbf{I} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^s : \mathbf{I}) : \mathbb{S}^s : \mathbf{I}. \quad (1.31)$$

Le comportement macroscopique du matériau s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p\mathbf{B} \\ \Delta\phi = \phi - \phi_0 = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p}{N} \end{cases} \quad (1.32)$$

Les expressions obtenues ci-dessus montrent que, la détermination du tenseur de Biot  $\mathbf{B}$  et de module de Biot  $N$  se ramène au calcul de  $\mathbb{C}^{hom}$ . De plus, la valeur du tenseur d'élasticité drainé ne dépend pas de la valeur de la pression régnant dans les pores. La relation (1.19) est donc également valable dans les situations où les pores sont vides. Une estimation de  $\mathbb{C}^{hom}$  en situation sèche (pores vides) permet donc de calculer tous les coefficients de la loi de comportement (1.32).

Pour conclure, on peut souligner qu'il est impossible dans les situations d'intérêt pratiques d'obtenir la solution exacte du problème (1.13) qui permet d'identifier les caractéristiques macroscopiques du matériau étudié. Le but des sections suivantes est donc de montrer comment les grandeurs globales  $(\mathbb{C}^{hom}, \mathbf{B}, N)$  peuvent être estimées en fonction des propriétés élastiques de la phase solide et des caractéristiques morphologiques du domaine poreux.

### 1.1.3 Problème de l'inclusion d'Eshelby

#### 1.1.3.1 Problème de l'inclusion

Eshelby [23, 24] a montré que, dans un milieu infini élastique homogène de module  $\mathbb{C}_0$ , si un domaine borné  $I$  de forme ellipsoïdale subit une déformation libre homogène  $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ , la déformation à l'intérieur de cette inclusion est homogène égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbb{S}_E : \boldsymbol{\varepsilon}_L, \quad (1.33)$$

où  $\mathbb{S}_E$  est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur d'Eshelby qui dépend de la forme de l'ellipsoïde  $I$ , de son orientation et du tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}_0$ . La valeur de  $\mathbb{S}_E$  peut être trouvée dans les ouvrages de mécanique [20, 42].

Dans la suite, au lieu d'envisager un champ de déformation initiale  $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ , on considère

### 34 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

une précontrainte  $\mathbf{p}$  qui est reliée au champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_L$  par la relation :

$$\mathbf{p} = -\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_L. \quad (1.34)$$

Grâce à cette transformation, on peut réécrire la solution d'Eshelby comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = -\mathbb{P} : \mathbf{p} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P} = \mathbb{S}_E : \mathbb{C}_0^{-1} = \mathbb{S}_E : \mathbb{S}_0, \quad (1.35)$$

où  $\mathbb{S}_0 = \mathbb{C}_0^{-1}$  désigne le tenseur de souplesse du milieu et  $\mathbb{P}$  le tenseur de Hill.

#### 1.1.3.2 De l'inclusion à l'hétérogénéité

Ces résultats permettent d'aborder maintenant le problème de l'hétérogénéité. On s'intéresse ici au problème d'une inclusion ellipsoïdale, occupant un domaine  $I$  et constituée d'un matériau élastique linéaire homogène de module d'élasticité  $\mathbb{C}_I$ . Cette inclusion est entourée d'un milieu élastique homogène de module  $\mathbb{C}_0$  occupant un domaine infini. L'inclusion adhère parfaitement au matériau l'entourant. Cette structure est soumise à une déformation homogène à l'infini, d'intensité  $\mathbf{E}$  et on note  $\boldsymbol{\sigma}_p$  la précontrainte uniforme qui règne dans l'inclusion quand celle-ci n'est pas déformée. Ce problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & : (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\sigma}_p & : (I) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & : (\Omega \cup I) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & : (\partial\Omega) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = \underline{0} & : (\partial\Omega_I) \end{array} \right. \quad (1.36)$$

On calcule aisément la valeur du champ de déformation dans l'inclusion solution du problème (1.36) à partir de la solution du problème de l'inhomogénéité (1.35) en posant :  $\mathbf{p}_I = (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}_I$ . On obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbb{S}_E : \boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{E} - \mathbb{P} : (\boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{p}_I) = \mathbf{E} - \mathbb{P} : \left( \boldsymbol{\sigma}_p + (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}_I \right) \quad (1.37)$$

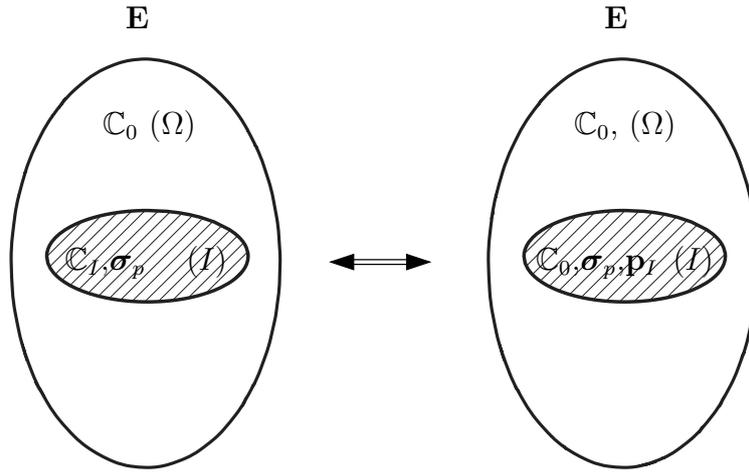


FIG. 1.2 – L'équivalence entre les problèmes de l'inhomogénéité et de l'hétérogénéité

$$\Rightarrow \varepsilon_I = \left( \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0) \right)^{-1} : (\mathbf{E} - \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_p). \quad (1.38)$$

### 1.1.3.3 Application à un unique pore saturé

Dans le cas d'un unique pore saturé par un fluide à la pression  $p$  isolé dans une matrice solide homogène déformée à l'infini, on a :  $\mathbb{C}_I = 0$  ;  $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}^s$  ;  $\boldsymbol{\sigma}_p = -p\mathbf{I}$ . La déformation du pore s'écrit donc :

$$\varepsilon_I = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1} : (\mathbf{E} + p\mathbb{S}_E : \mathbb{S}^s : \mathbf{I}), \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}^p = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1}, \quad (1.40)$$

$\mathbb{A}^p$  représente le tenseur de localisation en déformation pour le pore isolé dans la matrice élastique homogène.

Si  $p = 0$ , on trouve le résultat pour le cas du milieu sec :

$$\varepsilon_I = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1} : \mathbf{E}. \quad (1.41)$$

### 1.1.4 Méthodes d'estimation

La théorie des méthodes d'estimation a été présentée dans la littérature [20, 42, 58]. Partant de la solution du problème d'Eshelby, on présente dans ce paragraphe les

## 36 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

estimations du comportement d'un milieu poreux saturé en utilisant deux schémas d'estimations classiques (le schéma dilué et le schéma de Mori-Tanaka).

### 1.1.4.1 Schéma dilué

On considère ici un milieu constitué de  $n$  classes de pores (une classe de pores contient tous les pores de même forme et de même orientation) de forme et d'orientation différente. Si l'on admet que l'on peut négliger les interactions entre les pores lorsque la porosité est suffisamment faible (de l'ordre de quelques pourcents), la moyenne de la déformation dans chaque pore peut être estimée en utilisant l'équation (1.39). La moyenne du tenseur de localisation en déformation pour tous les pores est alors donnée par :

$$\langle \mathbb{A} \rangle^p = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_0^i}{\phi_0} \langle \mathbb{A} \rangle_i^p = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_0^i}{\phi_0} (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1}. \quad (1.42)$$

avec  $\phi_0^i$  la porosité pour la classe de pores numéro  $i$ .

En reportant l'équation (1.42) dans les relations (1.19), (1.30) et (1.31), on obtient les estimations du tenseur d'élasticité macroscopique  $\mathbb{C}^{hom}$ , du tenseur de Biot  $\mathbf{B}$  et du module de Biot  $1/N$  suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right) \\ \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \phi_0^i \mathbf{I} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \\ \frac{1}{N} = \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : \sum_{i=1}^n \left( \phi_0^i \mathbf{I} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} - \phi_0 \mathbf{I} \right) \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Il convient de bien garder à l'esprit que ce résultat n'est valable que pour les très faibles valeurs de la porosité.

### 1.1.4.2 Schéma de Mori-Tanaka

Dans ce paragraphe, on utilise le schéma de Mori-Tanaka qui cherche à prendre en compte les interactions entre les pores. Pour cela, on considère que chaque pore

est entouré de la phase solide de module  $\mathbb{C}^s$  soumise à l'infini à une déformation moyenne  $\mathbf{E}_0$ . La déformation moyenne pour chaque pore s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \mathbf{E}_0, \quad (1.44)$$

tandis que déformation moyenne pour tous les pores s'écrit :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^p = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_0^i}{\phi_0} (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \mathbf{E}_0. \quad (1.45)$$

En utilisant la condition :  $\mathbf{E} = (1 - \phi_0) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^s + \phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^p$  et  $\mathbf{E}_0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^s$ , on obtient la relation suivante entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_0$  :

$$\mathbf{E}_0 = \left( (1 - \phi_0) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1} : \mathbf{E}. \quad (1.46)$$

A reportant cette relation dans l'équation (1.45), on trouve sans difficulté l'expression du tenseur de localisation en déformation  $\langle \mathbb{A} \rangle_i^p$  pour la  $i$ ème classe de pores, puis le module d'élasticité homogène  $\mathbb{C}^{hom}$  :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_i^p = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \left( (1 - \phi_0) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1}, \quad (1.47)$$

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \left( (1 - \phi_0) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1}. \quad (1.48)$$

## 1.2 Homogénéisation des milieux fissurés saturés

On s'intéresse ici à des milieux dont la porosité est formée de microfissures, c'est à dire de pores ellipsoïdaux dont l'une des dimensions est très faible comparée aux deux autres. La phase solide est encore constituée d'un matériau élastique linéaire et les fissures sont saturées par un fluide à la pression  $p$ . On suppose dans toute cette section que les fissures sont connectées et ne changent pas d'état (c'est à dire qu'elles ne propagent pas et qu'elles ne referment pas).

### 1.2.1 Géométrie des fissures

L'espace poreux se réduit aux fissures. L'indice  $p$  qui désigne les pores va donc être remplacé par l'indice  $f$ . L'ensemble des fissures se compose de  $n$  familles de fissures, chaque famille (repérée par l'indice  $i$ ) rassemblant toutes les fissures de même taille et même orientation. Chaque famille de fissures est caractérisée par trois paramètres, la taille des fissures appartenant à la famille et les angles  $\psi_i$  et  $\theta_i$  définissant l'orientation des fissures.

Les fissures sont supposées de type « penny shape » (ellipsoïde aplati) et aléatoirement distribuées dans  $\Omega$  [20, 42, 48]. Chaque fissure dont la géométrie est caractérisée par son rayon  $a_i$ , sa hauteur  $c_i$  et son rapport d'aspect  $X_i$  occupe un domaine défini par l'équation suivante :

$$\frac{x_{i1}^2 + x_{i2}^2}{a_i^2} + \frac{x_{i3}^2}{c_i^2} \leq 1, \quad (1.49)$$

$$X_i = \frac{c_i}{a_i} \ll 1. \quad (1.50)$$

Le lien entre le repère global  $(O, x_1, x_2, x_3)$  et le repère local  $(O, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$  est défini sur la Fig. 1.3. Ici,  $\psi_i$  désigne l'angle entre l'axe  $x_{i3}$  et l'axe  $x_3$  tandis que  $\theta_i$  désigne l'angle entre l'axe  $x_1$  et la projection de l'axe  $x_{i3}$  sur le plan  $(O, x_1, x_2)$ .

L'axe  $x_{i3}$  est perpendiculaire au plan de fissure, l'axe  $x_{i1}$  appartient au plan  $(O, x_1, x_2)$ . On peut montrer que l'angle entre  $x_2$  et  $x_{i1}$  est égal à  $\theta_i$ . La matrice de passage  $[\mathbf{O}^i]$  qui définit la transformation de base du repère local  $(\underline{e}_1^i, \underline{e}_2^i, \underline{e}_3^i)$  vers le repère global  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  s'écrit :

$$\underline{e}_m^i = [\mathbf{O}^i] \cdot \underline{e}_p \equiv O_{mp}^i \underline{e}_p, \quad (m, p = 1, 2, 3), \quad (1.51)$$

$$[\mathbf{O}^i] = \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ -\cos \psi_i \cos \theta_i & -\cos \psi_i \sin \theta_i & \sin \psi_i \\ \sin \psi_i \cos \theta_i & \sin \psi_i \sin \theta_i & \cos \psi_i \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}. \quad (1.52)$$

La notation matricielle et les techniques de transformation de composantes dans un changement de repère sont présentées dans l'annexe A.

On suppose que le nombre de fissures est très grand et qu'elles sont distribuées aléatoirement. On introduit la fonction de densité  $w(a, \theta, \psi)$  qui permet de calculer

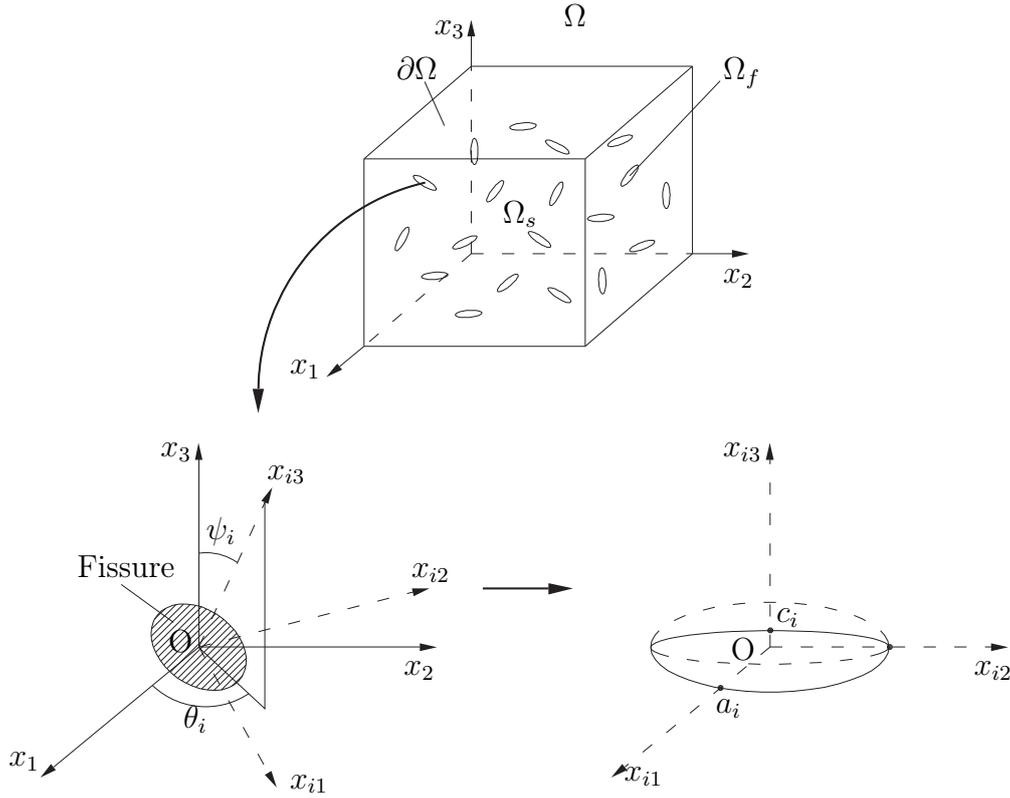


FIG. 1.3 – Le repère global et le repère local

le nombre de fissures par unité de volume dont la taille est comprise entre  $a$  et  $a + da$  et dont l'orientation appartient à l'intervalle défini par  $[\theta, \theta + d\theta]$ ,  $[\psi, \psi + d\psi]$  sous la forme  $w(a, \theta, \psi) \sin \psi da d\theta d\psi$ . Le nombre de fissures  $\mathcal{N}$  dans un domaine de volume unité se calcule en utilisant la relation :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{4\pi} \int_{a_m}^{a_M} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} w(a, \theta, \psi) \sin \psi da d\theta d\psi, \quad (1.53)$$

avec  $a_m$  et  $a_M$  désignent la taille minimale et maximale des fissures.

On suppose de plus que la taille des fissures est indépendante de l'orientation. Dans ce cas là, la fonction de densité s'écrit :

$$w(a, \theta, \psi) = w_r(a) w_o(\theta, \psi), \quad (1.54)$$

## 40 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

on a alors :

$$\mathcal{N} = \int_{a_m}^{a_M} w_r(a) da, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} w_o(\theta, \psi) \sin \psi d\theta d\psi = 1. \quad (1.55)$$

Il est clair que les propriétés de répartition aléatoire d'orientation des fissures (1.53) ou de taille de fissures indépendante de l'orientation ne sont conservées en cours de chargement que grâce aux hypothèses de non propagation et de non fermeture des fissures. Dans le cas où l'une de ces deux hypothèses n'est pas vérifiée, alors l'application d'une sollicitation non isotrope provoque des propagations ou des fermetures anisotropes des fissures.

On introduit le paramètre de densité de fissures  $\epsilon$  (comme proposé dans les références [20, 42]) :

$$\epsilon = \int_{a_m}^{a_M} a^3 w_r(a) da. \quad (1.56)$$

Quand toutes les fissures sont toutes de taille identique, on a :

$$\epsilon = \mathcal{N} a^3 \quad (1.57)$$

$$\text{et} \quad \phi = \frac{4}{3} \pi \mathcal{N} a^3 X = \frac{4}{3} \pi \epsilon X, \quad (1.58)$$

avec  $\phi$ , la fraction volumique occupée par les fissures, égale à la porosité dans la situation étudiée.

### 1.2.2 Le cas dilué

On adopte ici un schéma dilué, pertinent pour les situations où la densité de fissures est suffisamment faible et les fissures sont assez éloignées les unes des autres pour que les interactions entre elles soient négligeables.

A partir de l'équation (1.58), la fraction volumique  $\phi^i$  occupée par les fissures de la classe  $i$  s'écrit :

$$\phi^i = \frac{4}{3} \pi \mathcal{N}_i a_i^3 X^i = \frac{4}{3} \pi \epsilon_i X^i, \quad (1.59)$$

où  $\mathcal{N}_i$  et  $\epsilon_i$  sont respectivement le nombre de fissures et le paramètre de densité de fissures pour le  $i$ ème famille de fissures.

En reportant l'équation (1.59) dans la première équation (1.43), l'estimation du

tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^n \epsilon_i X^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right) = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathbb{T}^i \right), \quad (1.60)$$

$$\text{avec} \quad \mathbb{T}^i = \lim_{X^i \rightarrow 0} X^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1}. \quad (1.61)$$

On peut noter que la limite  $\mathbb{T}^i$  définie par l'équation (1.60) ne dépend que de l'orientation des fissures et des modules d'élasticité de la phase solide. Il possède la propriété de symétrie :  $T_{ijkl}^i = T_{jikl}^i = T_{ijlk}^i$ . Par ailleurs, le tenseur  $\mathbb{T}^i$  ne dépend pas de la valeur du rapport d'aspect des fissures. On en déduit qu'au premier ordre en  $X^i$ , le tenseur d'élasticité ne dépend pas du rapport d'aspect des fissures. Comme la relation de localisation (1.41) assure que sous l'action de la déformation, les fissures restent des ellipsoïdes de révolution, on en déduit que la prise en compte du couplage entre l'ouverture des fissures et la déformation macroscopique ne modifie pas le comportement du milieu fissuré.

### 1.2.2.1 Application à une famille de fissures ouvertes parallèles

Considérons maintenant la situation où l'espace poreux est constitué d'une seule famille de fissures parallèles de normale  $\underline{n}$  et supposons que la direction de la normale aux fissures est parallèle au vecteur  $\underline{e}_3$  du repère global ( $\underline{n} \equiv \underline{e}_3$ ). Les composantes non nulles du tenseur  $\mathbb{T}$  (comme il n'y a qu'une famille de fissures dans cette situation, on retire l'exposant  $i$  dans ce paragraphe) s'écrivent [20] :

$$T_{3311} = T_{3322} = \frac{4\nu^s(1-\nu^s)}{(1-2\nu^s)\pi}, \quad T_{3333} = \frac{4(1-\nu^s)^2}{(1-2\nu^s)\pi}, \quad T_{1313} = T_{2323} = \frac{2(1-\nu^s)}{(2-\nu^s)\pi}, \quad (1.62)$$

où  $\nu^s$  désigne le coefficient de Poisson de la matrice solide.

On obtient alors le tenseur d'élasticité homogénéisé et les relations de Biot :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3}\pi \epsilon \mathbb{T} \right), \quad \mathbf{B} = \frac{4}{3}\pi \epsilon \mathbf{I} : \mathbb{T}, \quad \frac{1}{N} = \frac{16(1-\nu^{s2})}{3E^s} \epsilon \quad (1.63)$$

Ces formules indiquent clairement que le matériau est anisotrope à l'échelle macroscopique.

### 1.2.2.2 Application à une distribution isotrope de fissures ouvertes

On considère maintenant le cas où les fissures ont toutes la même taille et sont distribuées de façon isotrope. De plus, la matrice solide est elle même constituée d'un matériau isotrope. Dans cette situation, le comportement macroscopique du matériau est alors élastique linéaire isotrope. La somme discrète dans l'équation (1.60) devient :

$$\frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathbb{T}_i = \epsilon \frac{4\pi}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \mathbb{T}^i(\psi, \theta) \frac{\sin \psi d\theta d\psi}{4\pi} = \epsilon \mathbb{Q}. \quad (1.64)$$

Le tenseur de quatrième ordre (isotrope)  $\mathbb{Q}$  est défini comme suit [20] :

$$\mathbb{Q} = Q_1 \mathbb{J} + Q_2 \mathbb{K}, \quad \text{avec } Q_1 = \frac{16(1 - \nu^{s2})}{9(1 - 2\nu^s)}, \quad Q_2 = \frac{32(1 - \nu^s)(5 - \nu^s)}{45(2 - \nu^s)}, \quad (1.65)$$

et  $\mathbb{J}$ ,  $\mathbb{K}$  sont les tenseurs du quatrième ordre qui vérifient les propriétés :

$$J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{K} + \mathbb{J}, \quad \mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K}, \quad \mathbb{J} : \mathbb{J} = \mathbb{J}, \quad \mathbb{J} : \mathbb{K} = 0 = \mathbb{K} : \mathbb{J}. \quad (1.66)$$

Le tenseur d'élasticité homogénéisé et les relations de Biot (1.43) s'écrivent alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \epsilon \mathbb{Q}), \quad \mathbf{B} = b \mathbf{I} \quad \text{avec } b = \epsilon \frac{16(1 - \nu^{s2})}{9(1 - 2\nu^s)}, \quad \frac{1}{N} = \frac{b}{k^s}, \quad (1.67)$$

où  $k^s$  désigne le module de compression de la matrice solide.

### 1.2.3 Schéma de Mori-Tanaka

Comme il a été dit dans le paragraphe 1.1.4.2, le schéma de Mori-Tanaka permet de rendre compte des interactions entre fissures pour les faibles valeurs de la porosité. Quand le rapport d'aspect de chaque famille de fissures  $X_i$  tend vers zéro, la porosité  $\phi_0$  tend vers zéro aussi. L'équation (1.48) devient alors [20] :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1}. \quad (1.68)$$

Le terme  $\sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1}$  de la relation (1.68) a été calculé au paragraphe précé-

dent pour estimer les caractéristiques homogénéisées de deux milieux fissurés dans le cadre dilué. En utilisant ces résultats, on obtient immédiatement les estimations suivantes :

*Porosité constitué d'une famille de fissures ouvertes parallèles*

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T} \right)^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} : \left( \mathbb{I} - \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T} \right)^{-1} \right), \quad \frac{1}{N} \simeq \frac{16(1 - \nu^{s2})}{3E^s} \epsilon. \quad (1.69)$$

*Porosité constitué de fissures ouvertes distribuée aléatoirement*

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} + \epsilon \mathbb{Q} \right)^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} : \left( \mathbb{I} - \left( \mathbb{I} + \epsilon \mathbb{Q} \right)^{-1} \right), \quad \frac{1}{N} = \frac{b}{(1+b)k^s} \simeq \frac{b}{k^s}. \quad (1.70)$$

### 1.2.4 Le cas des fissures fermées

On s'intéresse ici à la modélisation par homogénéisation du comportement du matériau dont toutes les fissures sont fermées et lisses (sans frottement). On propose alors de représenter la fissure fermée comme un milieu isotrope de module de compression  $k^s$  et de module de cisaillement nul. Le tenseur d'élasticité de la fissure s'écrit alors :  $\mathbb{C}^f = 3k^s \mathbb{J}$  [18].

On commence par le cas d'une seule famille de fissures parallèles de normale  $\underline{n}$  et on pose que la direction de la normale à la fissure est parallèle à la direction  $\underline{e}_3$  du repère global ( $\underline{n} \equiv \underline{e}_3$ ). En écrivant l'équation (1.7) pour un milieu biphasique, on montre que le tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit dans ce cas :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle^s + \phi_0 \mathbb{C}^f : \langle \mathbb{A} \rangle^f = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \mathbb{K} : \langle \mathbb{A} \rangle^f). \quad (1.71)$$

Dans ce cas dilué, le tenseur de localisation se calcule directement à partir des équations (1.38) et (1.42). On obtient :

$$\langle \mathbb{A} \rangle^f = \left( \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^0) \right)^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E : \mathbb{K})^{-1}. \quad (1.72)$$

En reportant ce résultat dans (1.71), on obtient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3} \pi \epsilon X \mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E : \mathbb{K})^{-1} \right) = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T} \right), \quad (1.73)$$

#### 44 Approche par homogénéisation du comportement des milieux fissurés

$$\text{avec } \mathbb{T}' = \lim_{X \rightarrow 0} X \mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E : \mathbb{K})^{-1}. \quad (1.74)$$

$\mathbb{T}'$  possède les propriétés de symétrie mineures ( $T'_{ijkl} = T'_{jikl} = T'_{ijlk}$ ) et les composantes non nulles du tenseur  $\mathbb{T}'$  s'écrivent [20] :

$$T'_{1313} = T'_{2323} = \frac{2(1 - \nu^s)}{(2 - \nu^s)\pi}. \quad (1.75)$$

Il est clair que l'on peut généraliser les résultats obtenus à la section précédente à partir de la connaissance de  $\mathbb{T}'$ . Alors en calculant  $\mathbb{Q}'$  défini par :

$$\mathbb{Q}' = \frac{4\pi}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \mathbb{T}'_{(\psi,\theta)} \frac{\sin \psi d\theta d\psi}{4\pi}, \quad (1.76)$$

on trouve le tenseur de quatrième ordre  $\mathbb{Q}'$ , défini comme suit :

$$\mathbb{Q}' = Q'_1 \mathbb{J} + Q'_2 \mathbb{K}, \quad \text{avec } Q'_1 = 0, \quad Q'_2 = \frac{32(1 - \nu^s)}{15(2 - \nu^s)}. \quad (1.77)$$

En remplaçant les tenseurs  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{Q}$  par les tenseurs  $\mathbb{T}'$  et  $\mathbb{Q}'$  dans les équations (1.63), (1.67), (1.69) et (1.70), on obtient le tenseur d'élasticité homogénéisé dans les différentes situations envisagées aux paragraphes 1.2.2 et 1.2.3.

En reportant la valeur de  $\mathbb{T}'$  pour une fissure fermée non flottante dans l'égalité (1.43), on obtient l'égalité :

$$\mathbf{B} = 4/3\pi\epsilon\mathbf{I} : \mathbb{T}' = 0. \quad (1.78)$$

Le tenseur de Biot et le coefficient de Biot sont donc nuls dans cette situation, ce qui traduit simplement le fait que la pression de la phase fluide ne joue aucun rôle quand les fissures sont fermées.

## 1.3 Annexe A

### 1.3.1 Notation matricielle pour les tenseurs symétriques

Soit  $\mathbb{A}$  un tenseur du quatrième ordre possédant la propriété de symétrie mineure et  $\mathbf{a}$  un tenseur du deuxième ordre symétrique. Si  $(\underline{e}_i)_{(i=1,2,3)}$  désigne une base orthonormée, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{A} = A_{ijkl}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l & : A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} \\ \mathbf{a} = a_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j & : a_{ij} = a_{ji} \end{cases} \quad (1.79)$$

On adopte dans la thèse la convention suivante pour représenter matricielle  $\mathbb{A}$  et  $\mathbf{a}$  :

$$[\mathbb{A}] = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{1131} & \sqrt{2}A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}A_{2231} & \sqrt{2}A_{2212} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} & \sqrt{2}A_{3331} & \sqrt{2}A_{3312} \\ \sqrt{2}A_{2311} & \sqrt{2}A_{2322} & \sqrt{2}A_{2333} & 2A_{2323} & 2A_{2331} & 2A_{2312} \\ \sqrt{2}A_{3111} & \sqrt{2}A_{3122} & \sqrt{2}A_{3133} & 2A_{3123} & 2A_{3131} & 2A_{3112} \\ \sqrt{2}A_{1211} & \sqrt{2}A_{1222} & \sqrt{2}A_{1233} & 2A_{1223} & 2A_{1231} & 2A_{1212} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}, \quad (1.80)$$

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ \sqrt{2}a_{23} \\ \sqrt{2}a_{31} \\ \sqrt{2}a_{12} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}. \quad (1.81)$$

L'intérêt de cette convention (par rapport de la notation dite « de Voigt ») est que tous les produits tensoriels ou contractés peuvent être remplacés par des opérations usuelles sur les matrices qui s'explicitent sans ambiguïté, quelle que soit la nature des quantités manipulées. Exemples :

$$\mathbb{A} : \mathbf{a} = [\mathbb{A}] \cdot [\mathbf{a}] \quad , \quad \mathbb{A} : \mathbb{B} = [\mathbb{A}] \cdot [\mathbb{B}] \quad , \quad \dots \quad (1.82)$$

### 1.3.2 Transformation des composantes dans un changement de repère

#### 1.3.2.1 Pour un tenseur du deuxième ordre symétrique

Comme il a déjà été indiqué dans la section 1.2 de ce chapitre, la matrice de passage  $[\mathbf{O}^i]$  permet de calculer les composantes des vecteurs de base du repère orthonormé local  $(\underline{e}_1^i, \underline{e}_2^i, \underline{e}_3^i)$  dans le repère orthonormé global. La matrice  $[\mathbf{O}^i]$  est définie par les relations :

$$\underline{e}_p^i = [\mathbf{O}^i] \cdot \underline{e}_m \equiv O_{pm}^i \underline{e}_m, \quad (m, p = 1, 2, 3), \quad (1.83)$$

$$[\mathbf{O}^i] = \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ -\cos \psi_i \cos \theta_i & -\cos \psi_i \sin \theta_i & \sin \psi_i \\ \sin \psi_i \cos \theta_i & \sin \psi_i \sin \theta_i & \cos \psi_i \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}. \quad (1.84)$$

Soit  $\mathbf{a}$  un tenseur du second ordre quelconque. Ce tenseur admet une représentation dans chacune des deux bases associées aux deux repères.

$$\mathbf{a} = a_{mn} \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n = a_{pq}^i \underline{e}_p^i \otimes \underline{e}_q^i = a_{mn} (O_{mp}^i \underline{e}_p) \otimes (O_{nq}^i \underline{e}_q), \quad (1.85)$$

on a donc :

$$a_{pq}^i = O_{pm}^i O_{qn}^i a_{mn} \quad (1.86)$$

On définit alors le tenseur de quatrième ordre  $\mathbb{O}$  qui présente la transformation des composantes d'un tenseur de deuxième ordre dans un changement de repère :

$$[\mathbf{a}^i] = [\mathbb{O}^i] \cdot [\mathbf{a}], \quad \text{avec} \quad (1.87)$$

$$[\mathbb{O}^i] = \begin{bmatrix} O_{11}^i O_{11}^i & O_{12}^i O_{12}^i & O_{13}^i O_{13}^i & \sqrt{2} O_{12}^i O_{13}^i & \sqrt{2} O_{13}^i O_{11}^i & \sqrt{2} O_{11}^i O_{12}^i \\ O_{21}^i O_{21}^i & O_{22}^i O_{22}^i & O_{23}^i O_{23}^i & \sqrt{2} O_{22}^i O_{23}^i & \sqrt{2} O_{23}^i O_{21}^i & \sqrt{2} O_{21}^i O_{22}^i \\ O_{31}^i O_{31}^i & O_{32}^i O_{32}^i & O_{33}^i O_{33}^i & \sqrt{2} O_{32}^i O_{33}^i & \sqrt{2} O_{33}^i O_{31}^i & \sqrt{2} O_{31}^i O_{32}^i \\ \sqrt{2} O_{21}^i O_{31}^i & \sqrt{2} O_{22}^i O_{32}^i & \sqrt{2} O_{23}^i O_{33}^i & O_{22}^i O_{33}^i + O_{23}^i O_{32}^i & O_{23}^i O_{31}^i + O_{21}^i O_{33}^i & O_{21}^i O_{32}^i + O_{22}^i O_{31}^i \\ \sqrt{2} O_{31}^i O_{11}^i & \sqrt{2} O_{32}^i O_{12}^i & \sqrt{2} O_{33}^i O_{13}^i & O_{32}^i O_{13}^i + O_{33}^i O_{12}^i & O_{33}^i O_{11}^i + O_{31}^i O_{13}^i & O_{31}^i O_{12}^i + O_{32}^i O_{11}^i \\ \sqrt{2} O_{11}^i O_{21}^i & \sqrt{2} O_{12}^i O_{22}^i & \sqrt{2} O_{13}^i O_{23}^i & O_{12}^i O_{23}^i + O_{13}^i O_{22}^i & O_{13}^i O_{21}^i + O_{11}^i O_{23}^i & O_{11}^i O_{22}^i + O_{12}^i O_{21}^i \end{bmatrix}. \quad (1.88)$$

On montre sans difficulté que l'on a les règles de calcul suivante

$$T[\mathbf{O}^i] = [\mathbf{O}^i]^{-1} \Rightarrow T[\mathbb{O}^i] = [\mathbb{O}^i]^{-1} \Rightarrow [\mathbf{a}] = T[\mathbb{O}^i] \cdot [\mathbf{a}^i]. \quad (1.89)$$

### 1.3.2.2 Pour tenseur du quatrième ordre

Soit  $\mathbb{A}$  un tenseur du quatrième ordre possédant la propriété de symétrie mineure. Décomposons  $\mathbb{A}$  dans les 2 bases de tenseurs d'ordre 4 associées aux deux repères :

$$\mathbb{A} = A_{mnkl} \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = A_{pqgh}^i \underline{e}_p^i \otimes \underline{e}_q^i \otimes \underline{e}_g^i \otimes \underline{e}_h^i, \quad (1.90)$$

on pose  $\mathbf{e}_{mn} = \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_{kl} = \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$ ,  $\mathbf{e}_{pq}^i = \underline{e}_p^i \otimes \underline{e}_q^i$  et  $\mathbf{e}_{gh}^i = \underline{e}_g^i \otimes \underline{e}_h^i$ ,

$$\mathbb{A} = A_{mnkl} \mathbf{e}_{mn} \otimes \mathbf{e}_{kl} = A_{pqgh}^i \mathbf{e}_{pq}^i \otimes \mathbf{e}_{gh}^i = A_{pqgh}^i (O_{pqmn}^i \mathbf{e}_{mn}) \otimes (O_{ghkl}^i \mathbf{e}_{kl}), \quad (1.91)$$

on a donc :

$$A_{mnkl} = A_{pqgh}^i O_{pqmn}^i O_{ghkl}^i \Leftrightarrow \mathbb{A} = {}^T \mathbb{O}^i : \mathbb{A}^i : \mathbb{O}^i, \quad (1.92)$$

soit encore matriciellement :

$$[\mathbb{A}] = {}^T [\mathbb{O}^i] \cdot [\mathbb{A}^i] \cdot [\mathbb{O}^i] \Rightarrow [\mathbb{A}^i] = [\mathbb{O}^i] \cdot [\mathbb{A}] \cdot {}^T [\mathbb{O}^i]. \quad (1.93)$$



---

### Comportement des matériaux mésolfissurés non saturés

---

#### 2.1 Introduction

Les travaux présentés dans ce chapitre prolongent la modélisation des déformations occasionnées par des variations de saturation d'un matériau méso-fissuré à matrice élastique linéaire développée dans [57]. Le modèle développé par Yue Xu dans sa thèse repose sur l'hypothèse classique qu'il est possible de modéliser les fissures par des cavités ellipsoïdales aplaties même dans leur configuration déformée. Or, on peut montrer que la prise en compte des efforts capillaires liés à la présence simultanée de deux fluides différents au sein d'une fissure occupant dans sa configuration non chargée un domaine ellipsoïdal aplati engendre une déformation de la fissure qui ne respecte pas cette hypothèse. Ce résultat s'obtient en renonçant à l'hypothèse consistant à représenter le chargement des fluides et des interfaces capillaires sur la fissure par une contrainte équivalente. Cette question et la validité de cette hypothèse sont étudiées en détail dans la suite de ce chapitre. De même, on peut légitimement s'interroger sur la validité, ou sur le domaine de validité de l'approximation consistant à prendre en compte l'effet du champ de contraintes complexe régnant dans la fissure au moyen d'une contrainte uniforme.

Dans une première étape, on rappelle brièvement les résultats disponibles concer-

nant la modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties développée par Chateau et al. [11, 12, 13] et Xu [57]. A la fin de cette première partie, on complète les résultats de Xu concernant l'influence de l'histoire de chargement sur la réponse du matériau.

Dans une deuxième étape, on s'attache à valider une partie des résultats obtenus en prenant en compte les efforts capillaires dans chaque fissure par une précontrainte homogène en se référant aux solutions analytiques exactes disponibles dans la littérature permettant de décrire le comportement d'une fissure isolée au sein d'une matrice élastique. Pour cela, on utilise la solution analytique de Bui [8] valable pour une fissure plane occupant un domaine circulaire plan dans un matériau dont l'état naturel est pris comme état de référence, soumise à un chargement homogène à l'infini et à une répartition de pression sur les lèvres de la fissure rendant compte de la présence de deux fluides séparés par une interface capillaire.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on s'intéresse aux situations où il n'existe pas de solution analytique. Dans cette situation, on utilise un outil numérique pour valider les solutions approchées.

## 2.2 Modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties

### 2.2.1 Modélisation des efforts intérieurs dans un milieu poreux non saturé

On considère dans ce chapitre un milieu fissuré occupant le domaine  $\Omega$  dont la matrice est constituée d'un solide élastique linéaire occupant le domaine  $\Omega_s$  et dont les fissures sont saturées par deux fluides immiscibles : un liquide occupant le domaine  $\Omega_\ell$  et un gaz occupant le domaine  $\Omega_g$ . On note  $\omega_{\ell g}$  la surface séparant le domaine liquide  $\Omega_\ell$  du domaine gazeux  $\Omega_g$  tandis que  $\omega_{s\ell}$  et  $\omega_{sg}$  désignent respectivement les surfaces séparant le domaine  $\Omega_\ell$  du domaine  $\Omega_s$  et le domaine  $\Omega_g$  du domaine  $\Omega_s$  (Fig. 2.1).

Ces trois surfaces s'intersectent éventuellement le long d'une courbe dite « ligne triple » notée  $\partial\omega_{s\ell g}$ . Ces interfaces doivent être considérées comme une phase constitutive du milieu fissuré non saturé au même titre que les trois autres phases volumiques.

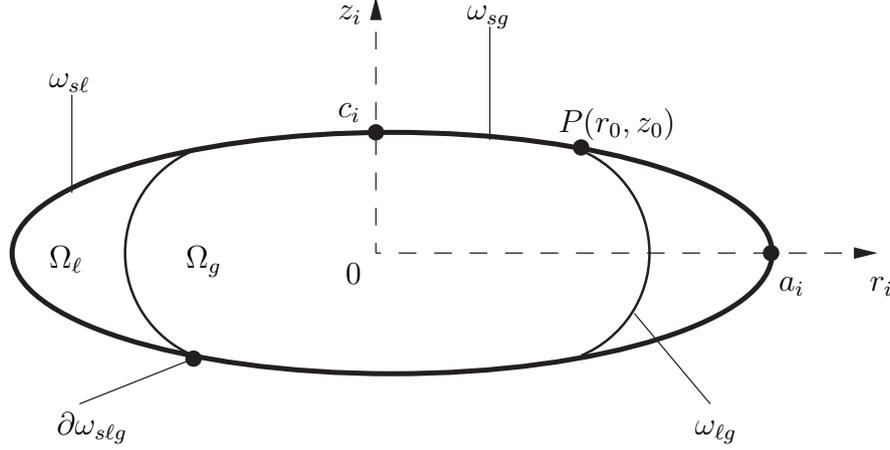


FIG. 2.1 – Le repère cylindrique associé à une fissure modélisée par un ellipsoïde de révolution dans la situation non saturée

Du point de vue mécanique, les interfaces entre phases ( $\omega_{lg}$ ,  $\omega_{sl}$ ,  $\omega_{sg}$ ) se comportent comme des membranes dont les efforts intérieurs s'écrivent [10] :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \gamma(\underline{x})\mathbf{I}_{T\omega_\alpha(\underline{x})} \quad (\forall \underline{x} \in \omega_\alpha; \alpha = lg, sl, sg), \quad (2.1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$  désigne le tenseur des contraintes de membrane dans  $\omega = \omega_{sl} \cup \omega_{sg} \cup \omega_{lg}$ ,  $\gamma(\underline{x})$  la valeur de la tension surface, fonction uniquement de la nature des fluides séparés par l'interface au point  $\underline{x}$  et de la température et  $\mathbf{I}_{T\omega(\underline{x})}$  le tenseur unité du second ordre du plan tangent  $T\omega(\underline{x})$  à la surface  $\omega$  au point  $\underline{x}$ .

Dans ce chapitre nous nous intéressons au comportement d'un Volume Élémentaire Représentatif de milieu poreux non saturé. Les systèmes matériels considérés sont donc à l'équilibre avec des forces de volume nulles. On a donc

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_\alpha = 0 \quad : \quad (\Omega_\alpha), (\alpha = s, l, g). \quad (2.2)$$

Pour les phases fluides, les efforts intérieurs sont représentés par des champs de pression uniforme. On a donc

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = -p_\alpha\mathbf{I} \quad : \quad (\Omega_\alpha), (\alpha = l, g). \quad (2.3)$$

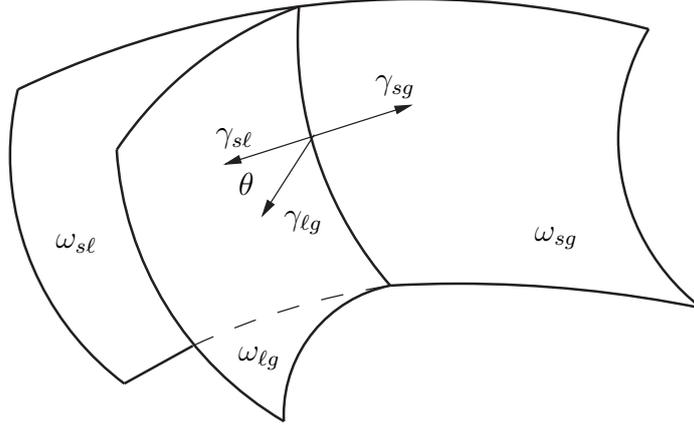


FIG. 2.2 – Equilibre de la ligne triple

Pour les interfaces entre les trois phases, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} p_c = p_g - p_\ell = \gamma_{lg} \text{tr} \mathbf{b} \quad : \quad (\omega_{lg}) \\ \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{n} = -p_g \underline{n} + \gamma_{sg} \text{tr} \mathbf{b} \underline{n} \quad : \quad (\omega_{sg}) \\ \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{n} = -p_\ell \underline{n} + \gamma_{sl} \text{tr} \mathbf{b} \underline{n} \quad : \quad (\omega_{sl}) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où  $\underline{n}$  désigne le vecteur unitaire normal extérieur à  $\Omega_s$  le long des interfaces  $\omega_{sl}$  et  $\omega_{sg}$ ,  $\mathbf{b}$  le tenseur de courbure des interfaces et  $\text{tr} \mathbf{b}$  la courbure de l'interface. Le long de l'interface  $\omega_{lg}$ , le tenseur de courbure  $\mathbf{b}$  est calculé pour un vecteur  $\underline{n}$  normal unitaire à la surface  $\omega_{lg}$  extérieur au domaine  $\Omega_\ell$ .

Pour la ligne triple  $\partial\omega_{slg}$  séparant les trois phases solide, liquide et gaz, on se restreint au cas particulier où les plans tangents à l'interface  $\omega_{sl}$  et  $\omega_{sg}$  sont identiques le long de  $\partial\omega_{slg}$ . Dans le cas d'une phase solide déformable, cette situation s'obtient quand d'une part la frontière  $\partial\Omega_s$  du domaine  $\Omega_s$  est suffisamment régulière pour que le plan tangent soit partout continu et d'autre part quand l'une des deux phases fluides mouille parfaitement la phase solide. Dans le cadre de ce travail, on suppose que la phase liquide mouille parfaitement la phase solide. Dans cette situation, l'équation d'équilibre de la ligne triple s'écrit (Fig. 2.2) :

$$\begin{cases} \underline{F}_{\partial\omega_{s\ell g}} = \underline{0} \\ \gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \gamma_{\ell g} \quad : \quad (\forall x \in \partial\omega_{s\ell g}) \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\underline{F}_{\partial\omega_{s\ell g}}$  désigne la densité linéique d'effort appliquée par le solide sur la ligne triple le long de  $\partial\omega_{s\ell g}$ . Si on complète à l'hypothèse que la phase liquide mouille parfaitement le solide en supposant que la valeur de la tension superficielle est nulle dans l'interface  $\omega_{sl}$  ( $\gamma_{sl} = 0$ ), les relations (2.5) deviennent :

$$\begin{cases} \underline{F}_{\partial\omega_{s\ell g}} = \underline{0} \\ \gamma_{sg} = \gamma_{\ell g} = \gamma \end{cases} \quad (2.6)$$

Il convient de noter que dans le cadre d'hypothèses défini ci-dessus, on néglige l'influence de la tension superficielle solide-liquide sur les déformations de la phase solide.

Dans cette partie, les fissures sont modélisées comme des ellipsoïdes aplatis même quand le milieu se déforme. Avant d'examiner comment il est possible de modéliser le comportement de ce matériau dans le cadre d'une approche par changement d'échelle, on commence par résoudre le problème capillaire dans un pore ellipsoïdal.

### 2.2.2 Approximation toroïdale

Dans ce paragraphe, on suppose que l'influence des déformations de l'interface pore-solide sur la moyenne des efforts de précontrainte dans la fissure est négligable. On considère donc que l'interface pore-solide est indéformable. On adopte toujours l'hypothèse que la phase liquide mouille parfaitement la phase solide et que la tension superficielle dans l'interface  $\omega_{s\ell}$  est nulle.

On suppose que la répartition des phases fluides au sein de chacune des fissures vérifie la propriétés de symétrie cylindrique autour du petit axe des fissures. La résolution de ce problème s'effectue dans le cadre de l'approximation toroïdale présentée en détail dans la thèse de Xu [57], qui consiste à assimiler l'intersection de l'interface liquide-gaz avec un plan radial contenant le petit axe de l'ellipsoïde par un cercle de rayon  $R_1$ , dont le centre se trouve dans le plan  $Orz$  à une distance  $R_2$  de l'axe  $Oz$

(Fig. 2.3).

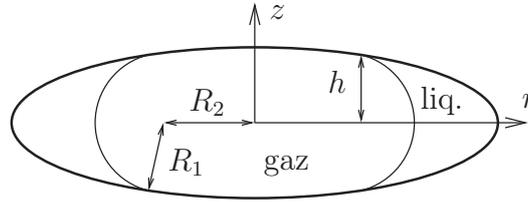


FIG. 2.3 – Fissure non saturée

Dans le repère cylindrique  $Orz$ , l'équation du profil radial de l'interface liquide-gaz s'écrit :

$$(r - R_2)^2 + z^2 = R_1^2. \quad (2.7)$$

L'équation paramétrique de la frontière de l'ellipsoïde s'écrit :

$$x_1 = a \sin \varphi \cos \theta, \quad x_2 = a \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 = c \cos \varphi, \quad (2.8)$$

avec  $0 \leq \varphi \leq \pi$  et  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Les coordonnées du point représentant la ligne triple dans le plan  $z > 0$  (Fig. 2.3) sont définies par :

$$r_0 = a \sin \varphi_0, \quad z_0 = c \cos \varphi_0, \quad \varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (2.9)$$

Les deux rayons de courbure du ménisque sont alors donnés par :

$$R_1 = \frac{h}{\cos \psi_0} \quad \text{et} \quad R_2 = a \sin \varphi_0 - R_1 \sin \psi_0 \quad (2.10)$$

avec  $\psi_0 = \arctan(X \tan \varphi_0)$  et  $h = z_0 = c \cos \varphi_0$ . On rappelle que  $X = c/a$ .

La pression capillaire se calcule alors grâce à l'équation suivante :

$$p_c = \gamma \text{tr} \mathbf{b} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right). \quad (2.11)$$

Un simple calcul analytique permet de déterminer le volume occupé par la phase liquide :

$$v_\ell = v_1 - v_2, \quad \text{avec} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2\pi}{3} a^2 h (3 - \cos^2 \varphi), \\ v_2 &= 2\pi \left( R_1^2 h + R_2^2 h + R_2 h \sqrt{R_1^2 - h^2} - \frac{1}{3} h^3 + R_1^2 R_2 \arcsin \frac{h}{R_1} \right). \end{aligned}$$

La saturation en liquide  $S_r$  est alors définie par

$$S_r = \frac{v_\ell}{v_p} \quad \text{avec} \quad v_p = \frac{4}{3} \pi X a^3. \quad (2.13)$$

En reportant dans les formules (2.11) et (2.13) l'approximation  $X \ll 1$  pour la valeur du rapport d'aspect, on obtient les relations suivantes pour la courbe capillaire :

$$p_c = \frac{\gamma}{aX} \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{et} \quad S_r = \cos^3 \varphi. \quad (2.14)$$

En combinant les équations (2.11) et (2.13), on peut tracer les courbes capillaires ( $p_c$  en fonction de  $S_r$ ) pour différentes valeurs du rapport d'aspect. On trouve dans la thèse de Xu [57] une analyse détaillée de la stabilité des configurations d'équilibre du système matériel interface capillaire-fluides. Pour ce qui nous nous intéresse ici, il suffit de retenir que seule la partie décroissante de la courbe capillaire doit être considérée dans la suite de ce travail (Fig. 2.4).

### 2.2.3 Approche linéaire du comportement

On s'intéresse dans cette section aux situations où les efforts capillaires sont calculés sur la configuration non déformée. Dans ce cas, le rapport d'aspect de fissures est toujours égal à la valeur initiale à l'état de référence  $X_0$ . La prise en compte des non linéarités géométriques sera abordée dans la section suivante.

#### 2.2.3.1 Homogénéisation

Comme décrit dans le paragraphe 2.2.1, les efforts à l'intérieur des fissures sont constitués d'une part des champs de pression au sein de chacun des fluides et d'autre part des champs d'effort de membrane définis sur les surfaces séparant deux à deux

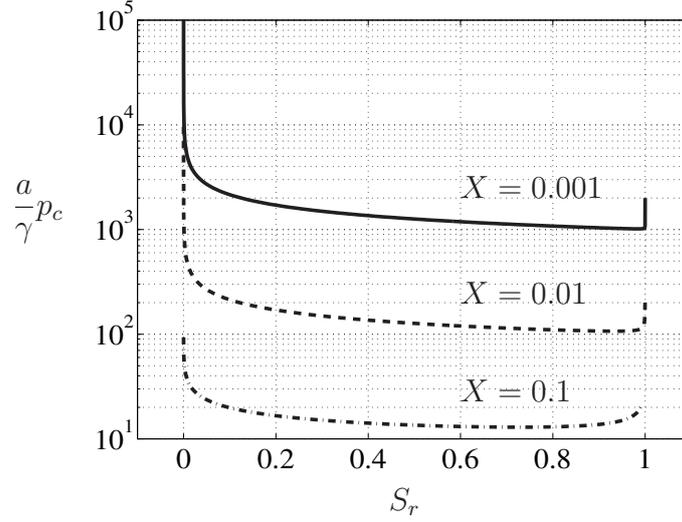


FIG. 2.4 – Courbes capillaires pour trois valeurs du rapport d’aspect.

les domaines occupés par chacune des trois phases solide, liquide et gazeuse. On décrit ces efforts par le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$  :

$$\boldsymbol{\sigma}^p(\underline{x}) = -p_\ell \mathbf{I} \chi_\ell(\underline{x}) - p_g \mathbf{I} \chi_g(\underline{x}) + \gamma(\underline{x}) \mathbf{I}_{T\omega(\underline{x})} \delta_{\omega(\underline{x})} \quad (2.15)$$

Dans (2.15),  $\chi_\alpha$  désigne la fonction caractéristique du domaine  $\Omega_\alpha$  ( $\chi_\alpha(\underline{x}) = 1$  si  $\underline{x} \in \Omega_\alpha$ ,  $\chi_\alpha(\underline{x}) = 0$  sinon) et  $\delta_{\omega(\underline{x})}$  la mesure de Dirac de support l’interface  $\omega$ . En utilisant le théorème de Levin [12], on montre qu’à l’échelle macroscopique le comportement du matériau poreux non saturé considéré ici s’écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^p \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Sigma}^p = \langle \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{A} \rangle = \sum_i^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{A} \rangle^i, \quad (2.16)$$

avec  $\phi_i$  désigne la fraction volumique occupée par les fissures de la classe  $i$ .

$\boldsymbol{\Sigma}^p$  désigne le tenseur de précontrainte macroscopique qui peut aussi s’écrire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}^p = -\phi_0 S_r p_\ell \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^\ell - \phi_0 (1 - S_r) p_g \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^g + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_\omega \gamma \mathbf{I}_{T\omega(\underline{x})} : \mathbb{A}(\underline{x}) dS. \quad (2.17)$$

Dans le cas d’un milieu fissuré où les pressions des phases fluides  $p_\ell$  et  $p_g$  ainsi que la valeur de la tension surface  $\gamma$  sont données et où l’on accepte l’approximation

toroïdale (paragraphe 2.2.2) qui permet de déterminer les domaines occupés par les phases fluides, la procédure d'homogénéisation se ramène à la détermination des tenseurs de localisation. Dans la situation diluée traitée ici, les interactions entre les fissures étant négligeables, le tenseur de localisation est uniforme dans chacune des fissures. L'expression du tenseur  $\Sigma^p$  (2.16) devient donc :

$$\Sigma^p = \sum_i^n \phi_0^i \langle \sigma^p \rangle^i : \langle \mathbb{A} \rangle^i. \quad (2.18)$$

Il suffit donc de calculer la moyenne du champ de précontrainte dans chacune des classes de fissures pour identifier complètement la loi de comportement macroscopique.

En utilisant l'équation (2.15), on calcule la moyenne des efforts de précontrainte dans chaque fissure. On obtient :

$$\langle \sigma^p \rangle^i = (S_r p_c - p_g) \mathbf{I} + \frac{3\gamma}{4\pi X_0^i a_i^3} \int_{\omega_\ell \cup \omega_g} \mathbf{I}_{T_{\omega(x)}} dS \quad (2.19)$$

Dans le repère local attaché à chacune des fissures, et en utilisant l'approximation  $X_0 \ll 1$  dans la relation (2.19), on montre que la moyenne des efforts de précontrainte dans la fissure est égale au premier ordre à [57] :

$$\sigma_i^p = \langle \sigma^p \rangle^i = \frac{\gamma}{a_i X_0^i} \left( \frac{3 - \cos(\varphi)^2}{2} (\underline{e}_1^i \otimes \underline{e}_1^i + \underline{e}_2^i \otimes \underline{e}_2^i) + \cos(\varphi)^2 \underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i \right) - p_g \mathbf{I}. \quad (2.20)$$

Il est commode pour la suite de poser

$$\sigma_p = \sigma_i^p : (\underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i) = \frac{\gamma \cos(\varphi)^2}{a_i X_0^i} - p_g = \frac{\gamma^3}{a_i^3 X_0^{i3}} \frac{1}{p_c^2} - p_g. \quad (2.21)$$

Dans la suite de ce chapitre, on utilise ce calcul de la moyenne des efforts de précontrainte dans la fissure pour déterminer la loi de comportement macroscopique pour deux matériaux définis par deux configurations différentes du réseaux de fissures : des fissures non saturées identiques parallèles entre elles et une distribution isotrope de fissures non saturées identiques.

### 2.2.3.1.1 Fissures non saturées identiques parallèles entre elles

On considère un matériau pour lequel toutes les fissures sont identiques et parallèles entre elles. Pour simplifier, la direction  $\underline{e}_3$  du repère global est choisie de façon à être perpendiculaire au plan des fissures. Dans ce cas, la contrainte moyenne  $\boldsymbol{\sigma}^p$  est la même dans toutes les fissures. Le problème étant linéaire, le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dépend linéairement de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et de la contrainte moyenne équivalente  $\boldsymbol{\sigma}^p$ . On choisit ici de construire le tenseur de localisation en déformation du quatrième ordre  $\mathbb{A}$  engendré par la déformation  $\mathbf{E}$  pour une précontrainte nulle et le tenseur de localisation en déformation du quatrième ordre  $\mathbb{A}'$  engendré par la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$  pour une déformation macroscopique nulle pour déterminer la loi de comportement homogénéisé du milieu. On a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} + \mathbb{A}'(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (2.22)$$

Le champ de contrainte microscopique dans le domaine solide s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^s : \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} + \mathbb{C}^s : \mathbb{A}'(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (2.23)$$

La moyenne du champ de contrainte qui définit la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  est donnée par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega_0|} \left( \int_{\Omega_{s0}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Omega_{f0}} \boldsymbol{\sigma}^p d\Omega \right) = (1 - \phi_0) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^s + \phi_0 \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (2.24)$$

En reportant l'équation (2.23) dans (2.24), on obtient la relation suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \mathbb{B} : \boldsymbol{\sigma}^p, \quad (2.25)$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\mathbb{B}$  désignent respectivement le tenseur d'élasticité macroscopique drainé et le tenseur du quatrième ordre de Biot,

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle^s = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f), \quad (2.26)$$

$$\mathbb{B} = \phi_0 \mathbb{I} + (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A}' \rangle^s. \quad (2.27)$$

Par ailleurs, à partir de l'équation (2.22), on calcule sans difficulté la moyenne de

la déformation microscopique dans l'espace poreux en fonction des paramètres de chargement macroscopiques :

$$\phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f = \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f : \mathbf{E} + \phi_0 \langle \mathbb{A}' \rangle^f : \boldsymbol{\sigma}^p, \quad (2.28)$$

comme on a la propriété :  $(1 - \phi_0) \langle \mathbb{A}' \rangle^s + \phi_0 \langle \mathbb{A}' \rangle^f = 0$ , on a donc :

$$\phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f = \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f : \mathbf{E} - (1 - \phi_0) \langle \mathbb{A}' \rangle^s : \boldsymbol{\sigma}^p \quad (2.29)$$

$$= \mathbb{B}' : \mathbf{E} + \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (2.30)$$

On en déduit :

$$\mathbb{B}' = \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f \quad \text{et} \quad \mathbb{N} = -(1 - \phi_0) \langle \mathbb{A}' \rangle^s. \quad (2.31)$$

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti pour le milieu solide, avec la sollicitation 1 définie par  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^p = 0$  et la sollicitation 2 définie par  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^p = \boldsymbol{\sigma}_0$  et l'hypothèse introduite plus haute que  $\partial\Omega_{s0} = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_{f0}$ , s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega_{s0}} \underline{\xi}^{(1)} \cdot \underline{T}^{(2)} dS = \int_{\partial\Omega_{s0}} \underline{\xi}^{(2)} \cdot \underline{T}^{(1)} dS, \quad (2.32)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega_0} \underline{\xi}^{(1)} \cdot \underline{T}^{(2)} dS + \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(1)} \cdot \underline{T}^{(2)} dS = \int_{\partial\Omega_0} \underline{\xi}^{(2)} \cdot \underline{T}^{(1)} dS + \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(2)} \cdot \underline{T}^{(1)} dS, \quad (2.33)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega_0} \underline{\xi}^{(1)} \cdot \underline{T}^{(2)} dS + \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(1)} \cdot \underline{T}^{(2)} dS = \int_{\partial\Omega_0} \underline{0}^{(2)} \cdot \underline{T}^{(1)} dS + \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(2)} \cdot \underline{0}^{(1)} dS = 0. \quad (2.34)$$

On a donc :

$$\int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{E}_0 : \underline{x}) \cdot \underline{T}^{(2)} dS = \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \underline{n} dS, \quad (2.35)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_0 : \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} d\Omega = \boldsymbol{\sigma}_0 : \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(1)} \otimes \underline{n} dS, \quad (2.36)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_0 : \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} d\Omega = \frac{|\Omega_{f0}|}{|\Omega_0|} \boldsymbol{\sigma}_0 : \frac{1}{|\Omega_{f0}|} \int_{\partial\Omega_{f0}} \underline{\xi}^{(1)} \otimes \underline{n} dS, \quad (2.37)$$

où  $\underline{n}$  désigne le vecteur unitaire normal au domaine occupé par la phase solide orienté vers le pore. En reportant les équations (2.25) et (2.30) on trouve que  $\forall \mathbf{E}_0, \forall \boldsymbol{\sigma}_0$ ,

on a

$$\mathbf{E} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\sigma}^p = \phi_0 \boldsymbol{\sigma}^p : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f = \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{B}' : \mathbf{E}. \quad (2.38)$$

On en déduit

$$\mathbb{B}' = {}^T\mathbb{B} = \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f, \quad (2.39)$$

où  ${}^T\mathbb{B}$  désigne le transposé du tenseur  $\mathbb{B}$ .

En reportant l'égalité (2.39) dans l'équation (2.27), on obtient

$$\phi_0 \mathbb{I} + (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A}' \rangle^s = \phi_0 {}^T \langle \mathbb{A} \rangle^f, \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow \mathbb{N} = \phi_0 \mathbb{S}^s : (\mathbb{I} - {}^T \langle \mathbb{A} \rangle^f) = \mathbb{S}^s : (\phi_0 \mathbb{I} - \mathbb{B}). \quad (2.41)$$

Finalement, le comportement macroscopique de ce matériau s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \mathbb{B} : \boldsymbol{\sigma}^p \\ \phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f = {}^T\mathbb{B} : \mathbf{E} + \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^p \end{array} \right. \quad (2.42)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f) \\ {}^T\mathbb{B} = \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^f = \mathbb{I} - \mathbb{S}^s : \mathbb{C}^{hom} \\ \mathbb{N} = \phi_0 \mathbb{S}^s : (\mathbb{I} - {}^T \langle \mathbb{A} \rangle^f) = \mathbb{S}^s : (\phi_0 \mathbb{I} - \mathbb{B}) \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Il convient de souligner ici que la seconde loi (2.42) n'est pas une des deux lois complémentaires classiques de comportement d'un milieu poreux à matrice élastique dont l'espace poreux est saturé par deux fluides immiscibles [14, 16]. Le fait que l'on obtienne « naturellement » une loi de comportement qui relie la déformation moyenne de l'espace poreux aux valeurs de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et de la précontrainte dans les pores  $\boldsymbol{\sigma}^p$  est évidemment une conséquence du fait que les efforts capillaires sont pris en compte au travers de la moyenne des contraintes. Un examen plus détaillé du résultat est nécessaire pour évaluer si le résultat obtenu ici est cohérent avec l'écriture classique de la loi de comportement d'un matériau poroélastique non saturé.

On remarque en plus que les relations (2.42) et (2.43) sont valables pour n'importe quel milieu poreux dès lors que la précontrainte dans l'espace poreux est uniforme. On aurait pu obtenir les mêmes résultats sans faire intervenir le tenseur  $\mathbb{A}'$  en utilisant le théorème de Levin et en calculant directement la quantité  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f$ .

On peut noter que les tenseurs  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{N}$  satisfont la condition de symétrie  $B_{ijkl} = B_{ijlk} = B_{jikl}$  et  $N_{ijkl} = N_{ijlk} = N_{jikl}$ . En plus, on peut déduire sans difficulté que  $\mathbb{N} = -(1 - \phi_0) \langle {}^T \mathbb{A}' : \mathbb{C}^s : \mathbb{A}' \rangle^s$ . Cette relation permet notamment de montrer la symétrie par rapport aux couples d'indice (ij) et (kl) du tenseur  $\mathbb{N}$ .

Dans le cas  $\boldsymbol{\sigma}^p = -p\mathbf{I}$ , on retrouve le cas saturé avec une pression de fluide égale à  $p$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbb{B} : \mathbf{I} = \phi_0^T \langle \mathbb{A} \rangle^f : \mathbf{I} = \phi_0 \mathbf{I} : \langle \mathbb{A} \rangle^f \\ \frac{1}{N} = -\mathbf{I} : \mathbb{N} : \mathbf{I} = \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - \phi_0 \mathbf{I}) \end{cases} \quad (2.44)$$

En utilisant les résultats obtenus dans le cas du milieu saturé, on obtient finalement les relations homogénéisées pour le schéma dilué :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbf{I} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T} \right), \quad \mathbb{B} = \frac{4}{3} \pi \epsilon^T \mathbb{T}, \quad \mathbb{N} = -\frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{S}^s : {}^T \mathbb{T}. \quad (2.45)$$

$\mathbb{T}$  étant toujours défini par la relation (1.62).

### 2.2.3.1.2 Le cas d'une distribution isotrope de fissures identiques

On examine maintenant le cas d'un milieu fissuré non saturé, isotrope. Les fissures sont toutes de même taille et dans le même état hydrique. On désigne par  $\boldsymbol{\sigma}_i^p$  la contrainte moyenne équivalente qui règne dans chaque fissure. Comme toutes les fissures ont les mêmes caractéristiques dans leur repère local et sont dans le même état hydrique (pression capillaire), la valeur de  $\boldsymbol{\sigma}_i^p$  est la même dans le repère local attaché à chaque fissure. On note de nouveau  $\mathbf{E}$  la déformation macroscopique du milieu. En utilisant le théorème de Levin, on montre que le comportement macroscopique de ce milieu dans le cas où les interactions entre fissures sont négligeables s'écrit pour un milieu dont l'espace poreux est décrit par  $n$  familles de fissures :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \sum_{i=1}^n \mathbb{B}^i : \sigma_i^p \\ \phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f = \sum_{i=1}^n {}^T \mathbb{B}^i : \mathbf{E} + \sum_{i=1}^n \mathbb{N}^i : \sigma_i^p \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Il convient de noter que les tenseurs  $\mathbb{B}^i$  et  $\mathbb{N}^i$  sont définis par les relations (2.39) et (2.41) pour la  $i$ ème famille de fissure. On a donc :

$$\mathbb{B}^i = \phi_0^i {}^T \langle \mathbb{A} \rangle_i^f \quad \text{et} \quad \mathbb{N}^i = \mathbb{S}^s : (\phi_0^i \mathbb{I} - \mathbb{B}^i). \quad (2.47)$$

Le calcul des caractéristiques macroscopiques s'effectue de la même façon que dans la situation saturée (chapitre 1 de ce document). On obtient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \epsilon \mathbb{Q}), \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^n {}^T \mathbb{B}^i = \epsilon \mathbb{Q}. \quad (2.49)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{B}^i : \sigma_i^p = \sum_{i=1}^n \phi_0^i \sigma_i^p : \langle \mathbb{A} \rangle_i^f = \sum_{i=1}^n \frac{4}{3} \pi \epsilon^i \sigma_i^p : \mathbb{T}^i = \frac{\epsilon}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \psi \sigma_{\psi,\theta}^p : \mathbb{T}_{\psi,\theta} d\psi, \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbb{B}^i : \sigma_i^p = \Sigma^p = \sigma_p b \mathbf{I}. \quad (2.51)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{N}^i : \sigma_i^p = \sum_{i=1}^n \mathbb{S}^s : (\phi_0^i \mathbb{I} - \mathbb{B}^i) : \sigma_i^p \simeq - \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^p : {}^T \mathbb{B}^i \right) : \mathbb{S}^s, \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbb{N}^i : \sigma_i^p = -\sigma_p b \mathbf{I} : \mathbb{S}^s = -\frac{\sigma_p b}{3k^s} \mathbf{I}. \quad (2.53)$$

Les relations (2.46) décrivant le comportement macroscopique du matériau s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \epsilon \mathbb{Q}) : \mathbf{E} + \sigma_p b \mathbf{I} \\ \phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f = \epsilon \mathbb{Q} : \mathbf{E} - \frac{\sigma_p b}{3k^s} \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Les expressions pour  $\mathbb{Q}$  et  $b$  sont données par les formules (1.65) et (1.67).

Dans le cas où ce matériau est soumis à un chargement macroscopique isotrope défini par  $\mathbf{E} = E\mathbf{I}$  et  $\Sigma = \Sigma\mathbf{I}$ . La première loi de comportement (2.54) s'écrit :

$$\Sigma = 3k^{hom}E + \sigma_p b \quad \text{avec} \quad k^{hom} = k^s(1 - b). \quad (2.55)$$

### 2.2.3.2 Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope

On s'intéresse à une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle. On choisit de prendre la pression du gaz comme référence. La déformation macroscopique prévue selon (2.55) par ce modèle est sphérique et s'écrit  $\mathbf{E} = E\mathbf{I}$  avec :

$$E = -\frac{b}{3k^{hom}}\sigma_p = -\frac{b}{3k^s(1-b)}\frac{\gamma^3}{a^3 X_0^3} \frac{1}{p_c^2}. \quad (2.56)$$

On reprend ici l'idée proposée dans [57] que dans une expérience de séchage à partir de l'état saturé, il est nécessaire d'augmenter la pression capillaire jusqu'à la pression d'entrée d'air notée  $p_c^{ea}$  pour qu'une interface capillaire puisse se former à l'intérieur du pore. Si l'on suppose que les rayons des canaux sont du même ordre de grandeur que la demi-hauteur  $c$  de la fissure, la valeur de  $p_c^{ea}$  est alors égale  $2\gamma/aX_0$ . On montre à partir de l'équation (2.14), qu'une interface capillaire ne peut se former que pour les valeurs de  $p_c$  supérieure à  $p_c^{ea} = \gamma/aX_0$ . La quantité  $p_c^{ea}$  définit donc la valeur de la pression d'entrée de la phase gazeuse dans les fissures.

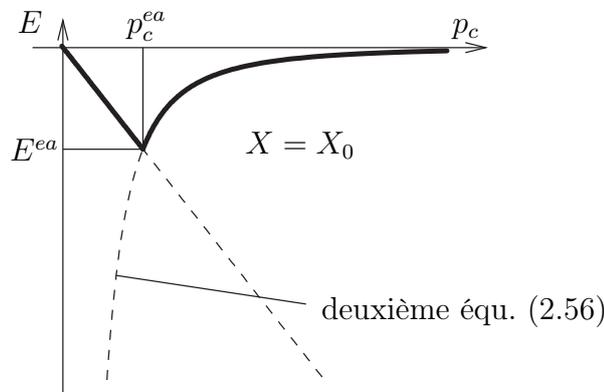


FIG. 2.5 – Séchage du milieu fissuré isotrope - cas linéaire

On a représenté sur la Fig. 2.5 la déformation prédite par le modèle pour une ex-

périence de séchage à contrainte macroscopique nulle à partir de l'état de référence saturé. On soumet le matériau à une augmentation de la pression capillaire à partir de la valeur zéro. Tant que la pression capillaire reste inférieure à la pression  $p_c^{ea}$ , le matériau reste saturé par la phase liquide à la pression  $p_\ell = -p_c$  et la déformation  $E$  est une fonction linéaire décroissante de la pression capillaire  $p_c$  (première équation (2.56)). Pour les valeurs de la pression capillaire supérieures à  $p_c^{ea}$ , la déformation macroscopique  $E$  est maintenant contrôlée par la seconde équation (2.56). Le matériau est dans un état non saturé et le séchage s'accompagne d'une dilatation qui ramène le VER dans sa configuration initiale.

La non prise en compte de la déformation des pores pour le calcul de la précontrainte capillaire au moyen de la formule (2.21) est tout à fait justifiée quand la valeur du rapport d'aspect  $X_0$  est suffisamment « grande » pour que l'hypothèse des petites perturbations soit valide. Comme on va le montrer dans le paragraphe 2.2.5, cette approximation n'est plus pertinente pour les « faibles » valeurs de  $X_0$ .

#### 2.2.4 Validité de l'approximation $X \rightarrow 0$

Dans les calculs effectués pour obtenir la courbe représentée sur la Fig. 2.5, on a procédé à 3 approximations différentes.

1. On a supposé que la forme de l'interface capillaire pouvait être assimilée à un tore de révolution (paragraphe 2.2.2).
2. On a remplacé le groupement  $X(\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1}$  par sa limite  $\mathbb{T}$  quand  $X$  tend vers 0 (paragraphe 1.2.2, formule (1.61)).
3. On a remplacé les valeurs moyennes du tenseur de précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$  dans chaque fissure par le terme dominant de son développement limité pour  $X$  tendant vers 0 (paragraphe 2.2.3.1, formules (2.20) et (2.21)).

On se propose dans ce paragraphe d'examiner plus en détail le domaine de validité des deuxième et troisième approximations ( $X \rightarrow 0$ ), la validité de la première approximation ayant été étudiée en détail dans [57].

Pour mener cette étude, on compare les résultats obtenus pour un milieu fissuré dont l'espace poreux est constitué d'une seule famille de fissures identiques en utilisant les formules exactes pour le calcul de la localisation et de la précontrainte à ceux

obtenus en ne gardant que les termes dominants du développement limité de ces quantités.

La loi de comportement de ce matériau s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^p, \quad (2.57)$$

avec  $\boldsymbol{\Sigma}^p = \mathbb{B} : \boldsymbol{\sigma}^p$  (première équation (2.42)).

Dans le cas où l'on ne retient que les termes dominants du développement limité en  $X$  des termes  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}^p$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_0^p &= \frac{16}{3} \epsilon \left( \frac{\gamma \cos^2 \varphi}{aX} - p_g \right) \frac{1 - \nu^s}{1 - 2\nu^s} \left( \nu^s (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (1 - \nu^s) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right) \\ &= \frac{16}{3} \epsilon \sigma_p \frac{1 - \nu^s}{1 - 2\nu^s} \left( \nu^s (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (1 - \nu^s) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

tandis que le tenseur des modules d'élasticité drainé est donné par la première relation (1.63). On peut également calculer la déformation macroscopique à contrainte macroscopique nulle pour les états non saturés du matériau dans le cadre de cette approximation (notée  $\mathbf{E}^0$ ). On obtient :

$$\mathbf{E}^0 = \frac{8\gamma \cos^2 \varphi}{aX \mu^s} \epsilon \frac{(1 - \nu^s)(1 - 2\nu^s)}{16\epsilon(1 - \nu^s)^2 - 3(1 - 2\nu^s)} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (2.59)$$

où  $\mu^s$  désigne le module de cisaillement de la matrice solide.

Ces quantités sont à comparer évidemment aux mêmes grandeurs calculées en utilisant les relations exactes pour  $\boldsymbol{\sigma}^p$  et  $\mathbb{A}^f$ . La comparaison entre les valeurs exactes (notées  $\boldsymbol{\Sigma}_{ref}^p$  et  $\mathbf{E}_{ref}$ ) et leur approximation ( $\boldsymbol{\Sigma}_0^p$  et  $\mathbf{E}^0$ ) est représentée sur les Fig. 2.6 et Fig. 2.7. On a adopté les valeurs suivantes pour les quantités intervenant dans le calcul :  $p_g = 0Pa$ ,  $\gamma = 1Nm^{-1}$ ,  $a = 1m$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\mu^s = 1Pa$ ,  $\nu = 0,2$  et  $X = 0,01$  ou  $0,001$ .

Comme attendu, on constate sur les figures que l'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée pour chacune des grandeurs testées diminue quand  $X$  diminue, à l'exception des déformations  $E_{xx}^0$  et  $E_{yy}^0$  dont l'écart entre valeur approchée et valeur exacte reste du même ordre quand on passe de  $X = 0.01$  à  $X = 0.001$ . On constate également sur ces figures que les valeurs approchées et exactes n'admettent pas les mêmes limites quand  $\varphi$  tend vers  $\pi/2$  (situation sèche). Ainsi, on montre

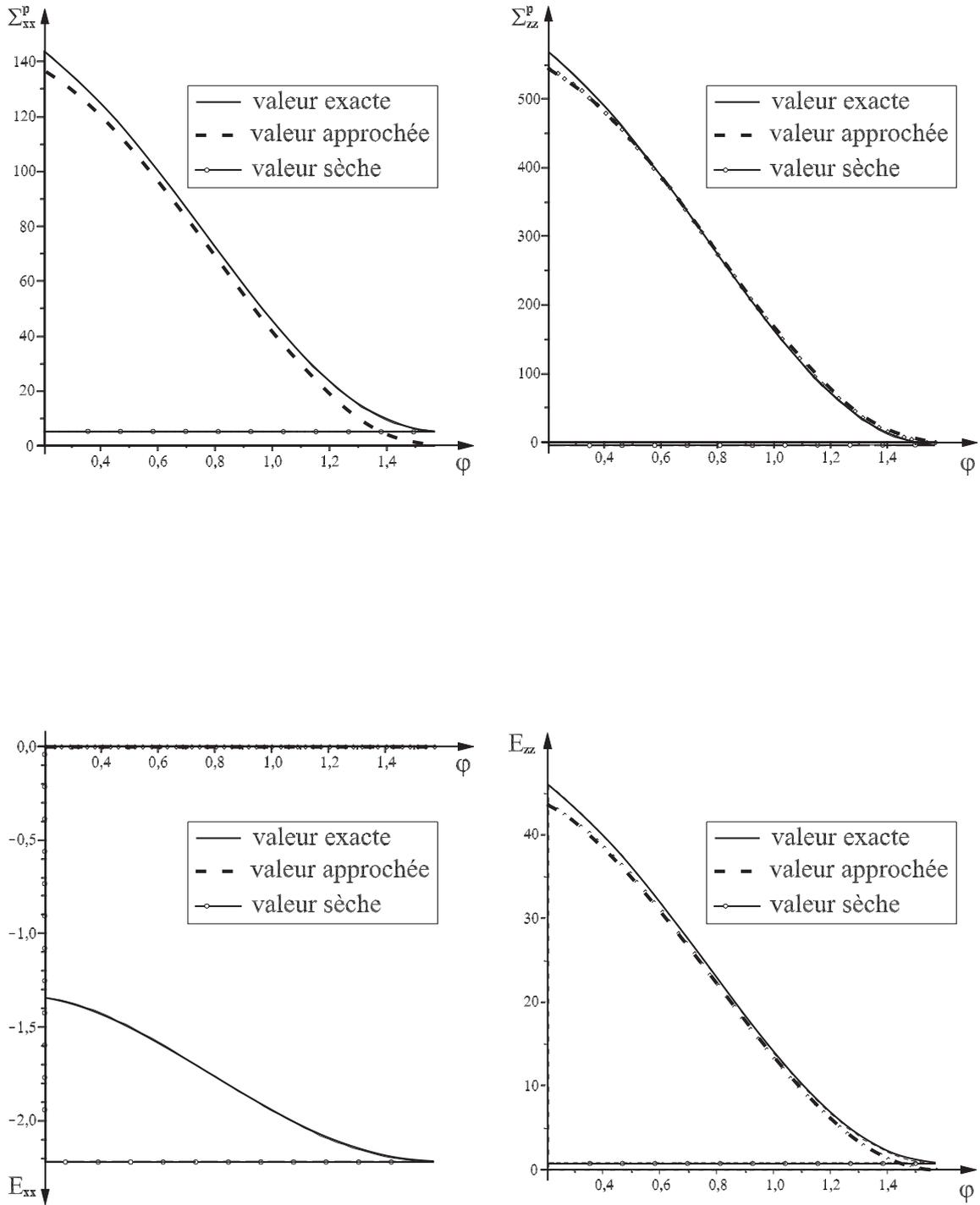


FIG. 2.6 – Comparaison entre les valeurs exactes et les valeurs approchées ( $X = 0,01$ )

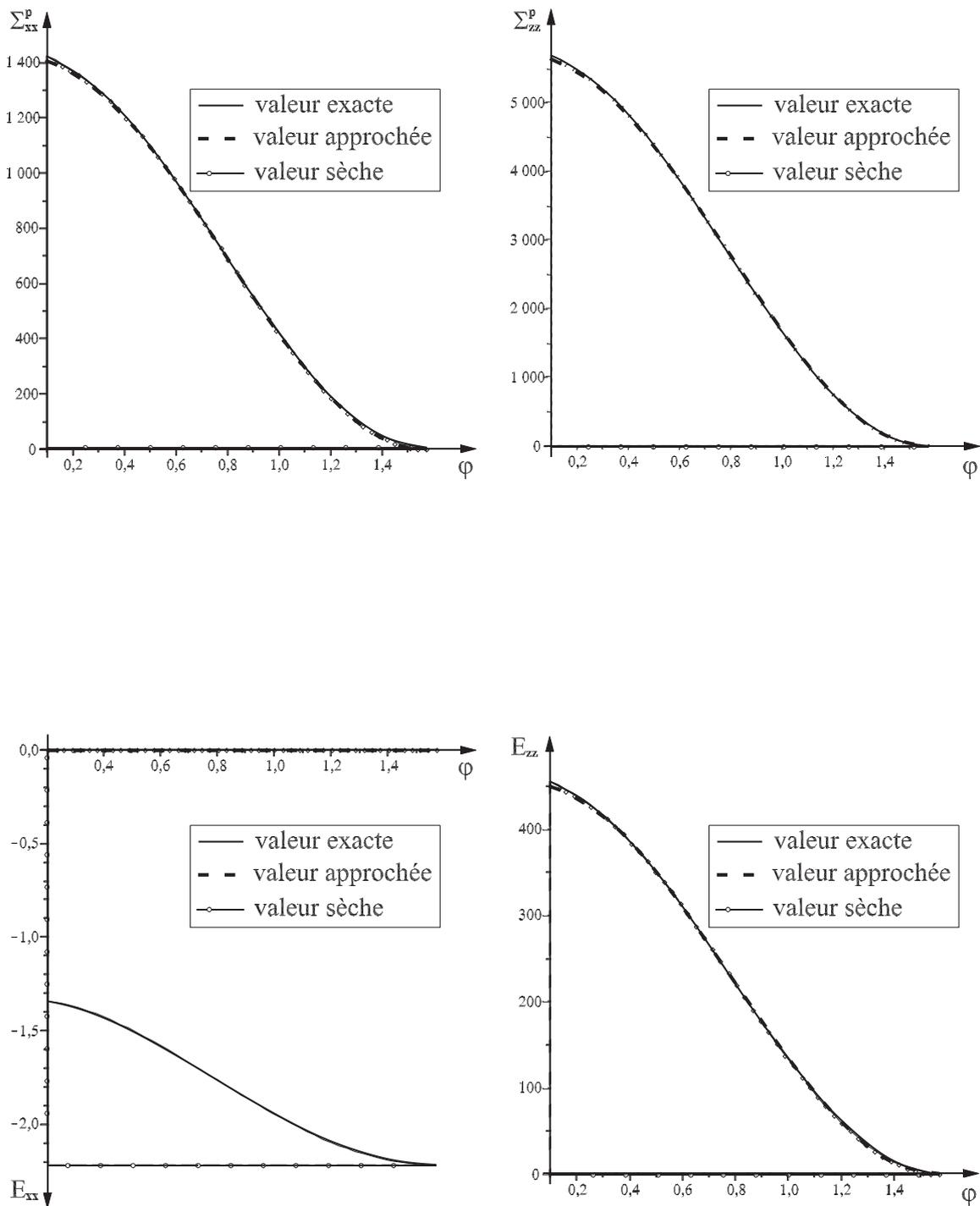


FIG. 2.7 – Comparaison entre les valeurs exactes et les valeurs approchées ( $X = 0,001$ )

sans difficulté que l'on a :

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Sigma_0^p = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \mathbf{E}^0 = 0 \quad (2.60)$$

alors que l'on a

$$\Sigma_{sec}^p = \frac{2\gamma\pi\epsilon}{a} (1 - \nu^s) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{E}_{sec} = -\frac{\gamma\pi\epsilon}{\mu^s a} \frac{1 - \nu^s}{1 + \nu^s} \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \frac{32\epsilon(1 - \nu^s) - 3(1 - 4\nu^{s2})}{16\epsilon(1 - \nu^s)^2 - 3(1 - 2\nu^s)} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right) \quad (2.62)$$

avec  $\Sigma_{sec}^p = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Sigma_{ref}^p$  et  $\mathbf{E}_{sec} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \mathbf{E}_{ref}$ .

Alors que l'approche au premier ordre prédit que l'échantillon de matériau saturé à pression de liquide nulle et contrainte macroscopique nulle occupe exactement la même configuration que le même échantillon à l'état sec et libre d'effort, on constate donc que le calcul exact aboutit à une conclusion différente.

La différence entre les termes  $\Sigma_0^p$  et  $\mathbf{E}^0$  pour  $\varphi$  tendant vers  $\pi/2$  et les termes  $\Sigma_{sec}^p$  et  $\mathbf{E}_{sec}$  est due au fait que le terme dominant du développement en série des quantités  $\Sigma_{ref}^p$  et  $\mathbf{E}_{ref}$  s'annule quand  $\varphi$  tend vers  $\pi/2$ . Comme on a conservé que ce terme pour les expressions approchées, on obtient alors des estimations nulles dans cette situation alors que le calcul exact permet de tenir compte du terme d'ordre supérieur en  $X$  qui ne s'annule pas quand  $\varphi$  tend vers  $\pi/2$ .

Il convient bien de noter que cette erreur n'a pas de conséquence importante puisque les déformations maximales prédites par le modèle dans la direction  $zz$  sont beaucoup plus grandes de l'ordre de  $1/X$  (voir formule (2.59)) alors que les déformations à l'état sec sont toujours de l'ordre de 1 pour  $X \ll 10^{-2}$  (voir Fig. 2.8).

En conclusion, les approximations consistant à ne retenir que les termes du premier ordre dans un développement limité autour de la valeur  $X = 0$  pour les quantités intervenant dans la loi de comportement sont donc tout à fait pertinentes pour les applications courantes. Elles ont de plus l'avantage de fournir des expressions analytiques faciles à manipuler. La seule restriction que l'on peut mettre à leur usage concerne la prédiction des effets capillaires quand on compare la situation complètement saturée à la situation sèche, même si ces effets sont négligeables dans la plupart des situations.

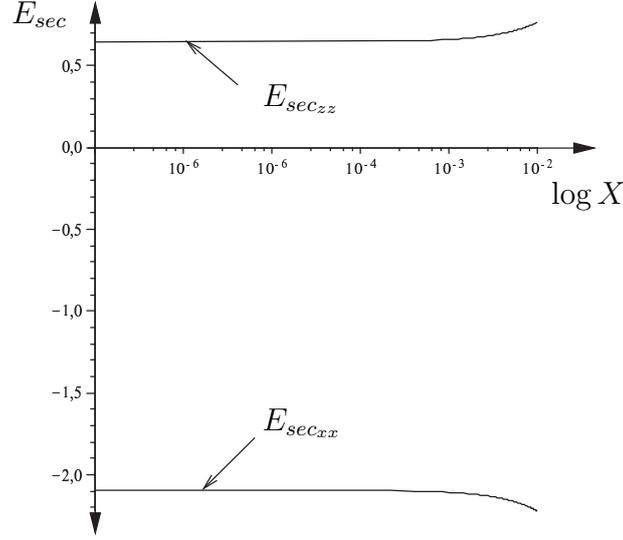


FIG. 2.8 – Déformations à l'état sec (prenant en compte les effets de la tension surface) et à contrainte macroscopique nulle

### 2.2.5 Prise en compte des non linéarités géométriques

Dans ce paragraphe, on tient compte des variations de  $X$  dans le calcul de  $\sigma_i^p$ . Le modèle construit permet donc de rendre compte des variations du rapport d'aspect sur le comportement macroscopique. Pour rendre compte du couplage entre déformation du milieu fissuré et effet capillaire, il est nécessaire de mettre en œuvre une approche incrémentale. Tant que les fissures restent ouvertes et qu'elles ne se propagent pas, on peut écrire la loi macroscopique décrivant le comportement du milieu sous la forme :

$$d\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : d\mathbf{E} + d\Sigma^p, \quad (2.63)$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  est toujours donné par (1.60) tandis que  $d\Sigma^p$  est défini par la relation :

$$d\Sigma^p = \sum_{i=1}^n \frac{4}{3} \pi \epsilon^i d\sigma_i^p : \mathbb{T}^i. \quad (2.64)$$

On rappelle que l'état de référence est l'état naturel dans lequel  $\Sigma = \Sigma^p = 0$  (état saturé à pression de fluide nulle). En admettant que les fissures restent ellipsoïdales quand le milieu se déforme, on montre que la valeur de  $\mathbb{T}^i$  ne dépend pas de  $X^i$

(au premier ordre) quand  $X^i$  tend vers zéro. L'estimation de  $\mathbb{C}^{hom}$  n'est donc pas modifiée si l'on prend en compte les variations du rapport d'aspect. En conséquence, l'intégration de (2.63) à partir de l'état de référence fournit l'équation de comportement macroscopique :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \Sigma^p \quad \text{avec} \quad \Sigma^p = \sum_{i=1}^n \frac{4}{3} \pi \epsilon^i \boldsymbol{\sigma}_i^p : \mathbb{T}^i. \quad (2.65)$$

Il convient de noter que dans la situation non saturée traitée ici, l'hypothèse que les fissures restent toujours à chaque instant de forme ellipsoïdale constitue une première approche de la prise en compte de l'évolution de la géométrie des fissures. La second approximation utilisée pour construire cette estimation du comportement consiste à remplacer le champ d'efforts intérieurs hétérogènes dans la fissure (2.15) par sa moyenne géométrique (2.20). Il convient néanmoins de garder à l'esprit que dans la situation diluée, on peut rigoureusement justifier cette substitution une fois que la première hypothèse a été admise [57].

En faisant  $\mathbb{C}_I = 0, \mathbb{P} = \mathbb{S}_E^i : \mathbb{S}^s$  dans (1.38), on obtient l'estimation de l'incrément de déformation dans la fissure numéro  $i$  en fonction de  $d\mathbf{E}$  et de  $d\boldsymbol{\sigma}_i^p$  :

$$d\boldsymbol{\epsilon}^i = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : (d\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^i : \mathbb{S}^s : d\boldsymbol{\sigma}_i^p). \quad (2.66)$$

La variation du rapport d'aspect s'écrit alors :

$$dX^i = X^i (\underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i) : d\boldsymbol{\epsilon}^i = X^i (\underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i) : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : (d\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^i : \mathbb{S}^s : d\boldsymbol{\sigma}_i^p). \quad (2.67)$$

$$\Rightarrow X^i - X_0^i = X^i (\underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i) : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : (\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^i : \mathbb{S}^s : \boldsymbol{\sigma}_i^p), \quad (2.68)$$

où  $X_0^i$  désigne le rapport d'aspect des fissures dans la configuration initiale. En utilisant la propriété  $X^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \rightarrow \mathbb{T}^i$  quand  $X^i \rightarrow 0$  et la formule  $\mathbb{T}^i : \mathbb{S}_E^i = \mathbb{T}^i$  qui n'est pas difficile à obtenir, on montre que la variation du rapport d'aspect s'écrit :

$$X^i - X_0^i = (\underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i) : \mathbb{T}^i : (\mathbf{E} - \mathbb{S}^s : \boldsymbol{\sigma}_i^p). \quad (2.69)$$

Pour évaluer l'effet des non linéarités géométriques, on considère ici le cas d'un matériau constitué d'une phase solide élastique linéaire isotrope dont les fissures ont toutes la même taille, le même état de précontrainte et présentent une répartition

d'orientation isotrope. Le VER est soumis à un chargement isotrope défini par  $\Sigma = \Sigma \mathbf{I}$  et  $\mathbf{E} = E \mathbf{I}$ . La relation (2.55) décrit alors la loi de comportement macroscopique du système avec  $\sigma_p$  décrit par l'équation (2.21) ( $X_0$  est remplacé par  $X$  dans cette équation) quand les fissures sont non saturées et  $\sigma_p$  égal à  $-p_\ell$  quand les fissures sont saturées par la phase liquide. En combinant les relations (1.62) et (2.55), on obtient la relation suivante :

$$\Delta X = X - X_0 = \frac{9b}{4\pi\epsilon} \left( E - \frac{\sigma_p}{3k^s} \right), \quad (2.70)$$

qui relie l'ouverture de fissure, la déformation macroscopique et la précontrainte dans les fissures.

En incorporant la formule (2.55) dans (2.70), on obtient :

$$\Delta X = X - X_0 = X_0 \left( \frac{E}{E^*} - \frac{\Sigma}{3k^s E^*} \right) \quad \text{avec} \quad E^* = \frac{4\pi\epsilon}{9} X_0. \quad (2.71)$$

### 2.2.5.1 Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope

Dans cette partie, on s'intéresse à la situation où la contrainte macroscopique et la pression dans la phase gazeuse sont nulles. L'équation (2.71) devient :

$$X = X_0(1 + \bar{E}) \quad \text{avec} \quad \bar{E} = \frac{E}{E^*}. \quad (2.72)$$

Observant que  $4\pi\epsilon\Delta X/3$  représente la variation de volume des fissures, on note que l'égalité ci-dessus signifie que la déformation volumique macroscopique  $3E$  est égale à la variation du volume des fissures. La quantité  $E^* \mathbf{I}$  s'interprète comme la déformation macroscopique pour laquelle les fissures sont entièrement refermées par séchage sous contrainte nulles. En introduisant l'équation (2.72) dans (2.56), on obtient la relation adimensionnée :

$$\bar{p}_c = \frac{p_c}{p_c^*} = \left( \frac{1}{-\bar{E}(1 + \bar{E})^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad p_c^* = \sqrt{\frac{b(\gamma/aX_0)^3}{3k^{hom} E^*}}. \quad (2.73)$$

La courbe représentant la relation (2.73) liant  $\bar{p}_c$  à  $\bar{E}$  est tracée sur la Fig. 2.9. On note que la prise en compte des variations du rapport d'aspect des fissures modifie l'allure de la courbe  $p_c$  fonction de  $E$  pour les « fortes » déformations de

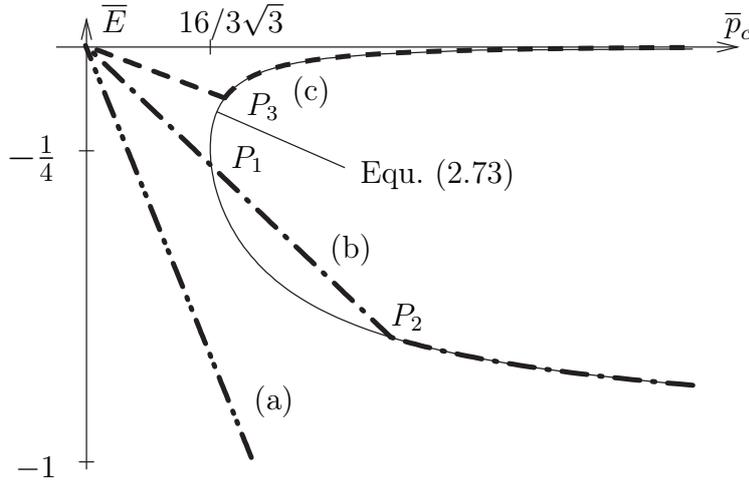


FIG. 2.9 – Séchage sous contrainte nulle du milieu fissuré isotrope - cas non linéaire

retrait ( $E < -E^*/4$ ) avec une nouvelle branche correspondant à un comportement contractant au séchage. Pour les « faibles » déformations de retrait ( $E > -E^*/4$ ) on retrouve une branche correspondant à un comportement dilatant au séchage comme prédit par le modèle sans couplage géométrique.

Afin d'évaluer les modifications induites sur le comportement du matériau par la prise en compte du couplage géométrique entre la déformation des pores et les effets capillaires, on s'intéresse de nouveau au comportement prédit par le modèle pour une sollicitation correspondant à une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle conduite à partir de l'état saturé à pression capillaire nulle pris comme état de référence. Dans un premier temps, l'augmentation à partir de la valeur nulle de la pression capillaire ne provoque pas la désaturation des fissures. La contrainte  $\sigma_p$  est donc égale à la pression capillaire  $p_c$  et la déformation macroscopique  $E$  se calcule en fonction de  $\sigma_p$  en utilisant la première égalité de (2.56).

Pour déterminer le moment où la phase gazeuse pénètre dans les fissures, on combine la première équation de (2.56) pour  $\sigma_p = p_c = \gamma/(aX)$  avec l'équation (2.71). On montre que, au moment où la phase gazeuse pénètre dans les fissures, le rapport d'aspect  $X$  est solution de l'équation :

$$\frac{\gamma}{aX} = -\frac{4\pi}{3} \frac{k^{hom}\epsilon}{b} (X - X_0). \quad (2.74)$$

L'équation (2.74) n'admet de solution que si  $X_0 \geq X_0^*$  avec

$$X_0^* = \left( \frac{3b\gamma}{\pi\epsilon ak^{hom}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.75)$$

Il est commode pour la suite d'introduire la quantité  $\bar{v}_\ell$  défini comme le rapport du volume occupé par la phase liquide dans une fissure sur le volume de la fissure dans la configuration initiale.

$$\bar{v}_\ell = \frac{v_\ell}{v_0} = \frac{S_r \phi}{\phi_0} \quad \text{avec} \quad \phi_0 = \frac{4}{3} \epsilon \pi a^3 X_0. \quad (2.76)$$

En combinant les équations (2.13), (2.14), (2.71) et (2.76), on obtient les expressions suivantes :

$$\bar{v}_\ell = 8 \left( \frac{X_0}{X_0^*} \right)^3 (-\bar{E})^{\frac{3}{2}} (1 + \bar{E})^{\frac{5}{2}}, \quad (2.77)$$

$$S_r = 8 \left( \frac{X_0}{X_0^*} \right)^3 (-\bar{E})^{\frac{3}{2}} (1 + \bar{E})^{\frac{3}{2}}. \quad (2.78)$$

Le comportement du matériau est représenté sur la Fig. 2.9 dans le plan  $(\bar{p}_c, \bar{E})$  pour les différentes situations.

- Si  $X_0 < X_0^*$ , l'équation (2.74) n'a pas de solution. L'augmentation de la pression capillaire ne provoque pas la désaturation des fissures. La déformation volumique du matériau est alors proportionnelle à la valeur du  $\bar{p}_c$  et les fissures restent constamment saturées jusqu'à leur fermeture totale. Cette situation est représentée par le trajet (a) sur les Fig. 2.9 et Fig. 2.10.
- Si  $X_0^* < X_0 < 2X_0^*/\sqrt{3}$ , l'équation (2.74) admet deux solutions qui correspondent aux deux points  $P_1, P_2$  de la Fig. 2.9. En utilisant la formule (2.78), on montre que la saturation reste toujours supérieure à 1 pour tous les points de la courbe décrivant l'équation (2.73) situés entre les deux points d'intersection  $P_1$  et  $P_2$ . La phase gazeuse pénètre donc dans la fissure au point  $P_2$ . Le comportement du matériau est alors décrit par les trajets (b) sur les Fig. 2.9 et Fig. 2.10. On prédit dans ces situations que le séchage du matériau s'accompagne d'une déformation de retrait de l'échantillon.
- Si  $X_0 > 2X_0^*/\sqrt{3}$ , la phase gazeuse pénètre dans la fissure au point  $P_3$ . La désaturation du matériau provoque alors un gonflement du matériau d'autant plus important que la pression capillaire est importante. On obtient donc un compor-

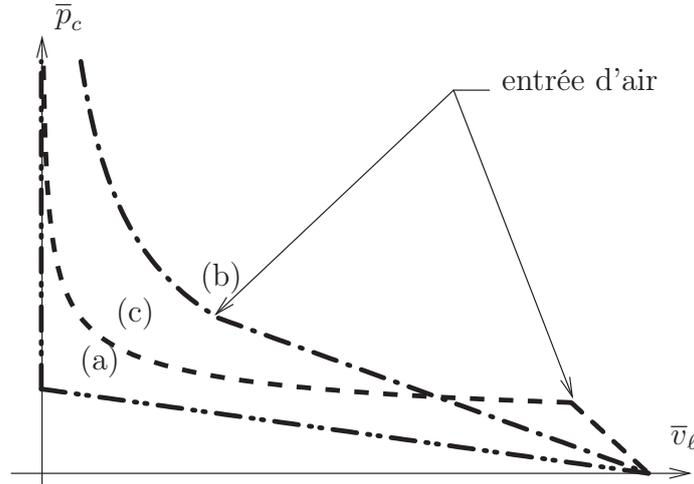


FIG. 2.10 – Relation entre la pression capillaire et le volume du liquide

tement similaire à celui prédit par le modèle ne prenant pas en compte le couplage entre la déformation des fissures et les efforts capillaires (trajet (c) sur les Fig. 2.9 et Fig. 2.10).

En utilisant les relations (2.73) et (2.77) on a représenté sur la Fig. 2.10 les variations de la quantité d'eau contenue dans chaque fissure en fonction de la pression capillaire pour les trois situations décrites ci-dessus.

### 2.2.5.2 Prise en compte de l'influence de l'histoire de chargement

Comme on l'a mis en évidence dans la section précédente, la prise en compte du couplage entre efforts capillaires et ouverture des fissures entraîne une perte d'unicité de la solution du problème mécanique lorsque l'on contrôle la pression capillaire et la contrainte macroscopique. Pour certaines valeurs de la pression capillaire  $p_c$ , un échantillon du matériau laissé libre de contrainte peut donc se trouver dans deux états de déformation différents. On s'attache ici à étudier l'influence de l'histoire de chargement sur la réponse du matériau initialement dans l'état de référence saturé à pression capillaire et contrainte macroscopique nulles. Dans la situation isotrope traitée ici, la contrainte macroscopique est sphérique et s'écrit  $\Sigma = \Sigma \mathbf{I}$ . La réponse d'un échantillon de matériau soumis à une sollicitation isotrope est décrite par les équations (2.55) et (2.71), avec  $p_c$  et  $\sigma_p$  définis par (2.14) et (2.21).

On choisit ensuite de représenter les résultats en utilisant des formules adimension-

nées. On introduit pour cela les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$x_0 = \frac{X_0}{X_0^*}, x = \frac{X}{X_0}, \bar{E} = \frac{E}{E^*}, \bar{p}_c = \frac{p_c}{p_c^*}, \bar{\Sigma} = \frac{\Sigma}{\Sigma^*}, \quad (2.79)$$

avec  $\Sigma^* = 8p_c^*x_0^3$  et  $E^*, p_c^*, X_0^*$  encore définis par les équations (2.71), (2.73), et (2.75). L'équation maîtresse pour le problème prenant en compte le couplage entre les changements géométriques des fissures, la contrainte et la déformation macroscopique de l'échantillon s'écrit :

$$x - 1 = \bar{E} + \bar{\Sigma}\left(1 - \frac{1}{b}\right). \quad (2.80)$$

Cette équation est valable pour les deux situations saturée et non saturée. Dans la situation non saturée, le comportement du matériau est décrit par les équations :

$$\bar{p}_c = \sqrt{\frac{1}{x^3(\bar{\Sigma} + 1 - x)}}, \quad S_r = 8x_0^3x^{\frac{3}{2}}(\bar{\Sigma} + 1 - x)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.81)$$

alors que dans le cas saturé on a :

$$\bar{p}_c = 8x_0^3(\bar{\Sigma} + 1 - x). \quad (2.82)$$

Les deux expressions (2.81) et (2.82) suggèrent de représenter le comportement de ce matériau dans le plan  $(\bar{\Sigma} - x)$ . Le domaine grisé de la Fig. 2.11 correspond aux configurations non saturées du matériau. Ce domaine est limité par la droite  $x = 0$ , la courbe représentant la seconde équation (2.81) pour  $S_r = 0$  et la courbe « d'entrée d'air » obtenue en prenant  $S_r = 1$  dans la seconde équation (2.81). Alors que les deux premières courbes définissant la frontière sont indépendantes de la valeur de  $x_0$ , la courbe « d'entrée d'air » dépend de la valeur de  $x_0$ . L'aire du domaine non saturé augmente lorsque la valeur de  $x_0$  diminue.

A titre d'exemple, on considère ici un matériau avec  $x_0 = 1.5$ . Comme annoncé au paragraphe précédent, dans une expérience de séchage à contrainte macroscopique nulle (augmentation de la pression capillaire) du matériau initialement saturé, celui-ci a un comportement gonflant dans sa phase non saturée (trajet (c) sur les Fig. 2.9 et Fig. 2.10). A la fin de l'expérience de séchage, les fissures restent donc ouvertes. On va maintenant montrer que l'on peut appliquer à ce matériau une histoire de chargement de façon à obtenir un état final libre de contrainte où les fissures sont

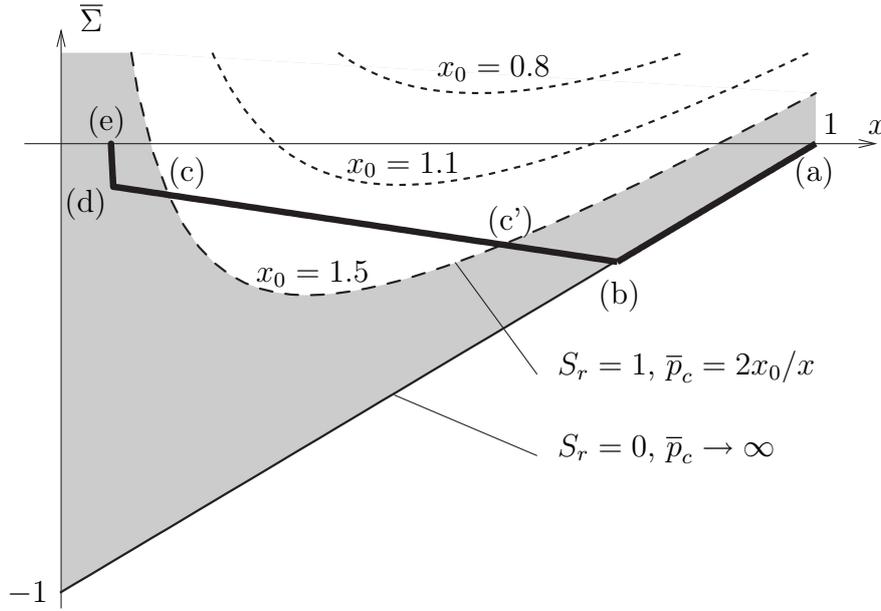


FIG. 2.11 – Configuration non saturée du matériau fissuré dans le plan  $(x, \bar{\Sigma})$

désaturées et fermées. Ce trajet est défini comme suit :

**Configuration initiale :** Le matériau est dans l'état de référence saturé à pression capillaire et contrainte macroscopique nulles ( $S_r = 1, \bar{E} = 0, \bar{\Sigma} = 0, x = 1, \bar{p}_c = 0$ ).

**Compression isotrope :** On augmente la contrainte macroscopique  $\bar{\Sigma}$  jusqu'à la valeur  $\bar{\Sigma}^d$  en laissant le matériau à l'état saturé à pression capillaire nulle ( $S_r = 1, \bar{p}_c = 0$ ). Une phase de retrait est observée et la déformation  $\bar{E}$  diminue jusqu'à  $\bar{E}^d = \bar{\Sigma}^d/b$  (ligne (a) (b) sur la Fig. 2.11).

**Séchage :** On augmente la pression capillaire jusqu'à la valeur  $\bar{p}_c = \bar{p}_c^d$  en bloquant la déformation macroscopique ( $\bar{E} = \bar{E}^d$ ). La ligne  $\bar{\Sigma} - x$  (ligne (b)-(d) sur la Fig. 2.11) coupe la courbe « d'entrée d'air » en deux points (point (c') et point (c) sur la Fig. 2.11). La phase gazeuse pénètre dans la fissure au point (c); le matériau est non saturé entre les points (c) et (d) alors qu'il est saturé entre les points (b) et (c).

**Relaxation :** On diminue la contrainte macroscopique jusqu'à zéro en maintenant la valeur de la pression capillaire ( $\bar{p}_c = \bar{p}_c^d$ ). Une phase de faible dilatation est observée tandis que l'ouverture des fissures diminue encore. Cette étape est représentée par la ligne joignant les points (d) et (e) sur la Fig. 2.11.

**Configuration finale :** La contrainte macroscopique est nulle et la pression capillaire est égale à  $\bar{p}_c^d$ . Le matériau est non saturé et les fissures sont presque totalement

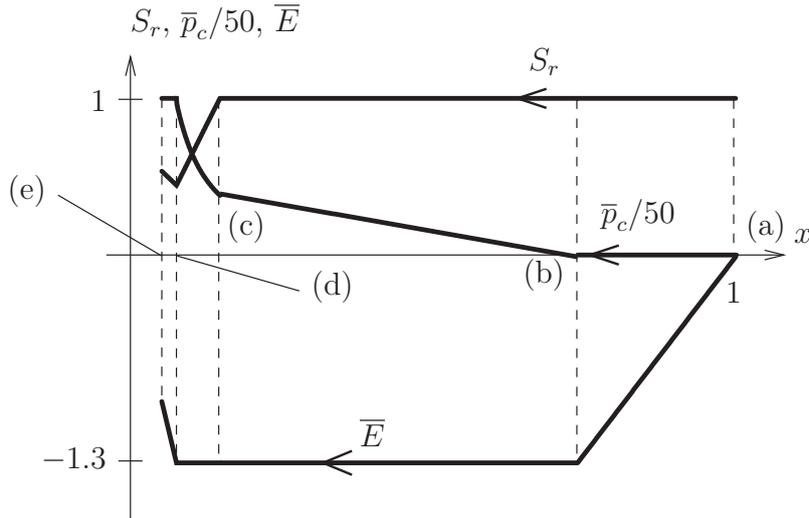


FIG. 2.12 – Relations entre la saturation, la pression capillaire et la déformation macroscopique en fonction de  $x$

refermées. Un retrait de séchage est observé.

La Fig. 2.12 résume les relations entre la saturation, la pression capillaire et la déformation macroscopique en fonction de  $x$ . On a utilisé les valeurs  $x_0 = 1.5$ ,  $\bar{E}^d = -1.3$  et  $\bar{p}_c^d = 50$  pour tracer les courbes des deux figures 2.11 et 2.12. Au point (e), on a  $\bar{E}_{(e)} = -0.92$  et  $x_{(e)} = 0.077$  tandis que l'on atteint  $\bar{E} = -0.0007$  et  $x = 0.9996$  si l'on soumet l'échantillon à un séchage sous contrainte macroscopique nulle.

En conclusion, en imposant au matériau une histoire de chargement plus complexe, on atteint le second état final libre de contrainte où les fissures sont désaturées et fermées tandis que le premier état pouvait être atteint dans une expérience de séchage sous contrainte nulle où les fissures sont désaturées et ouvertes. Cette étude confirme que la prise en compte du couplage entre déformation des fissures et effets capillaires joue un rôle déterminant sur les propriétés macroscopiques du matériau. Ce couplage permet d'expliquer des phénomènes d'hystérésis réversible du comportement du système qui ne sont pas liés aux phénomènes d'hystérésis capillaire classiquement observés dans les matériaux poreux non saturés.

## 2.3 Solution analytique exacte du problème de fissures non saturés

L'approche par homogénéisation du comportement d'un milieu mésofissuré non saturé qui a été développée dans les paragraphes précédents repose principalement sur la prise en compte des effets capillaires au travers de la précontrainte moyenne  $\sigma^p$  (équation (2.20) et suivantes). Comme on l'a déjà indiqué, ce terme permet de rendre compte exactement des effets capillaires dans le cas dilué sans prise en compte du couplage entre déformation de la fissure et effort capillaire dans la relation liant la contrainte macroscopique, la déformation macroscopique et la pression capillaire. Par contre dans toutes les autres situations (interaction entre les fissures, couplage géométrique ...), le calcul n'est plus rigoureusement exact. Par ailleurs, l'utilisation de la relation de Levin ne permet pas de calculer la déformée de la fissure, et donc les volumes occupés respectivement par la phase liquide et la phase gazeuse dans la configuration déformée. Ces informations sont néanmoins nécessaires pour pouvoir complètement identifier la loi de comportement macroscopique du milieu dans le cadre d'une approche par changement d'échelle

Afin de remédier à cette difficulté, on se propose de calculer la configuration déformée d'une fissure isolée dans un milieu infini élastique homogène isotrope soumise à un chargement correspondant à l'application d'une déformation homogène à l'infini et à la présence de deux fluides non miscibles dans la fissure (voir Fig. 2.13)

La solution de ce problème peut évidemment être utilisée comme la solution du problème d'Eshelby pour construire des estimations du comportement macroscopique du milieu mésofissuré non saturé. Elle permettra également d'aborder d'autres problématiques comme la propagation de l'endommagement en situation non saturée en s'appuyant sur une estimation des facteurs d'intensité de contrainte prenant en compte l'effet des chargements sur les faces de la fissure (cette problématique est traitée au chapitre 3 de ce mémoire).

Pour calculer la solution du problème décrit sur la Fig. 2.13, on s'appuie sur les résultats de Bui et al. [7, 9] concernant la modélisation d'un solide fissuré dans le cas où la fissure contient dans sa partie centrale une petite quantité de fluide non mouillant, qui exerce donc une pression positive sur les faces de la fissure. Ce travail a permis notamment d'expliquer l'affaiblissement de la ténacité provoquée par la

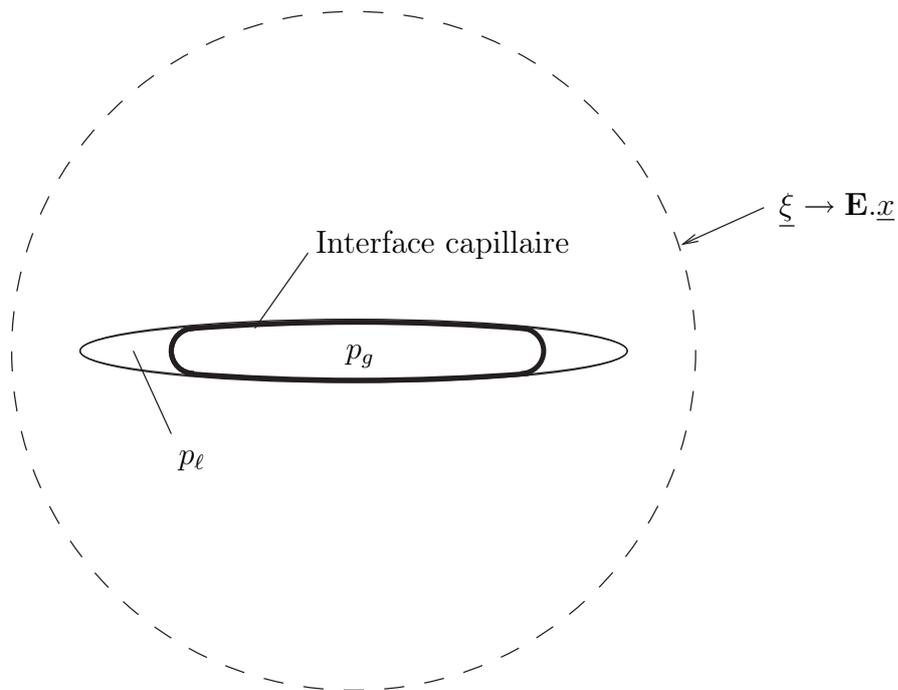


FIG. 2.13 – Fissure plane de révolution (penny shape crack) isolée dans un milieu infini soumis à une déformation homogène à l’infini en situation non saturée

présence du liquide au sein de la fissure (effet Rehbinder [47]).

Ce travail a été prolongé par l’étude de Feraille-Fresnet et al. consacrée à la situation où le liquide contenu dans la fissure est mouillant vis à vis du solide [26, 27]. Dans ce cas, le liquide occupe un domaine de révolution en pointe de fissure tandis que la phase gazeuse non mouillante occupe la partie centrale de la fissure. En conséquence, la pression régnant dans la phase liquide est négative. Feraille-Fresnet et al. ont considéré deux situations différentes :

- Le cas où le chargement appliqué loin de la fissure correspond à des efforts nuls et où il existe des échanges de matière entre la phase liquide et phase gazeuse (changement de phase eau-vapeur).
- Le cas où le volume occupé par la phase liquide est fixé et où un chargement en contrainte est appliqué sur le bord extérieur du domaine élastique en tournant la fissure.

Dans ces deux situations, on montre que l’effort de traction exercé par la phase liquide sur les lèvres de la fissure provoque une augmentation de la ténacité par

rapport à la situation où aucun effort n'est exercé sur la fissure.

Dans la suite de ce paragraphe, on s'appuie sur ces travaux pour calculer la solution en déplacement pour une fissure dont l'espace poreux est occupé par deux fluides. Les formules analytiques obtenues sont tout d'abord comparées aux résultats obtenus dans le cas dilué sans couplage pour vérifier qu'il est bien possible de déterminer le comportement macroscopique du milieu fissuré non saturé en utilisant la solution de Bui. Dans un second temps, on utilisera cette approche pour examiner les effets de la déformation des fissures sur le comportement du système. Avant d'examiner en détail ces deux problèmes, on rappelle rapidement les résultats nécessaires à ce travail.

### 2.3.1 Equations du problème

On considère ici une fissure de forme ellipsoïdale de rapport d'aspect initial  $X_0 \ll 1$  et de rayon  $a$ , située dans un milieu solide élastique isotrope. On impose sur le solide à l'infini un chargement homogène en déformation. La surface de la fissure est perpendiculaire à la direction  $\underline{e}_3$ . La fissure est saturée par deux fluides, un liquide à la pression  $p_\ell$  qui se trouve à côté de la pointe de fissure et un gaz à la pression  $p_g$  qui se trouve au centre de la fissure.  $\theta$  désigne l'angle de mouillage liquide-solide,  $\gamma$  la valeur de la tension de surface liquide-gaz.  $F$  est la densité linéique d'effort appliqué sur le solide défini par l'équation (2.5). On se place de nouveau dans le cadre de l'approximation toroïdale. Le profil radial du ménisque est un arc de cercle de rayon  $R$  et  $\alpha a$  désigne la position du point triple par rapport au centre de la fissure ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Bui [8] a construit la solution permettant de calculer l'ouverture et le facteur d'intensité de contrainte en mode I d'une fissure circulaire isolée dans un milieu homogène élastique avec un chargement nul à l'infini. On a dans ce cas :

$$\omega(r) = \frac{1 - \nu^s}{\mu^s} p_0 a \psi(r) \quad \text{et} \quad K_I = 2p_0 \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} g(t=1), \quad (2.83)$$

avec

$$\psi(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^1 g(t) \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (2.84)$$

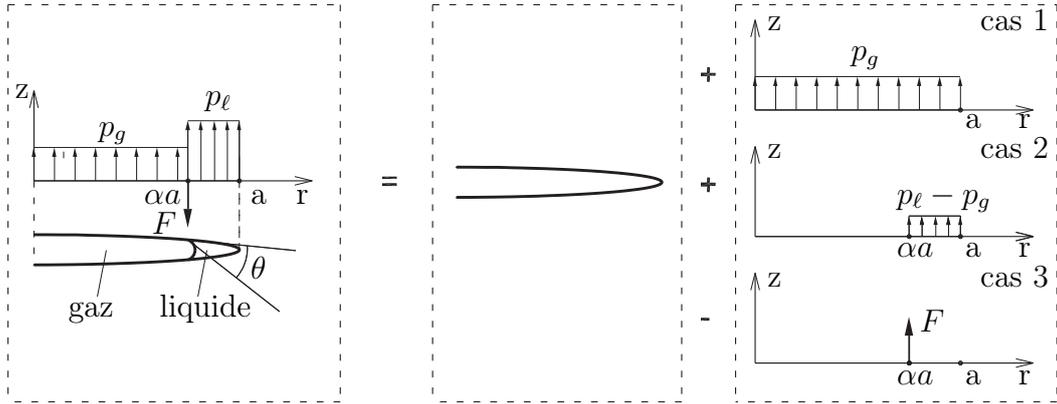


FIG. 2.14 – Décomposition du problème complet d’une fissure isolée non saturé en trois sous problèmes élémentaires

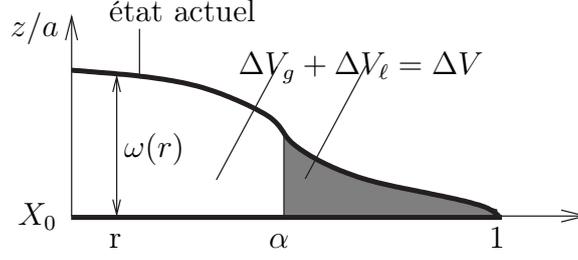
et

$$g(t) = \int_0^1 K(tu) \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} \text{ avec } r = tu, \quad (2.85)$$

$$T(r) = p_0 K(r) = p_0 K(tu). \quad (2.86)$$

Ici,  $\omega(r)$  désigne la demi-ouverture de la fissure,  $K_I$  le facteur d’intensité de contrainte en mode I et  $r = x/a$  le rayon adimensionné du point canant avec  $x$  la distance du point considérée au centre de fissure.  $T(r)$  est la traction normale au plan de la fissure.

Pour utiliser les formules de Bui rappelées ci-dessus, il nous faut accepter ici l’hypothèse que les lèvres de la fissure sont perpendiculaires à l’axe de symétrie de la fissure. L’approximation est donc pertinente dans le cas où le rapport d’aspect de la fissure est beaucoup plus petit que 1 (rigoureusement égal à zéro en fait). Pour calculer la solution du problème quand l’espace poreux de la fissure est saturé par deux fluides, on utilise le principe de superposition comme schématisé sur la Fig. 2.14. On calcule donc la variation de l’ouverture de la fissure, le facteur d’intensité de contrainte et la variation du volume de la fissure dans chaque situation puis on ajoute les trois contributions. Les calculs détaillés sont présentés dans l’annexe B. On donne ici le résultat final obtenu en sommant la contribution de chacun des trois sous problèmes considérés.

FIG. 2.15 – Forme d'une fissure ( $X_0 = 0$ )

$$\omega(r) = \omega(r)_1 + \omega(r)_2 - \omega(r)_3 = \frac{2}{\pi} a B \left( p_g \sqrt{1-r^2} + (p_\ell - p_g) \int_{sup(r,\alpha)}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt - \frac{\gamma \sin \theta}{a} \alpha \int_{sup(r,\alpha)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \alpha^2)(t^2 - r^2)}} \right), \quad (2.87)$$

$$K_I = K_I^1 + K_I^2 - K_I^3 = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left( p_g + (p_\ell - p_g) \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{\gamma \sin \theta}{a} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right), \quad (2.88)$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 - \Delta V_3 = \frac{8}{3} a^3 B \left( p_g + (p_\ell - p_g) (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\gamma \sin \theta}{a} \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \right), \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_\ell &= \Delta V_{\ell 1} + \Delta V_{\ell 2} - \Delta V_{\ell 3} \\ &= \frac{8}{3} a^3 B \left( p_g (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} + (p_\ell - p_g) (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) - \frac{3\gamma \sin \theta}{a} \alpha (1 - \alpha) \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

avec

$$B = \frac{1 - \nu^s}{\mu^s} = \frac{2(1 - \nu^{s2})}{E^s} = \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{2\mu^s(\lambda^s + \mu^s)}. \quad (2.91)$$

$\Delta V$  et  $\Delta V_\ell$  sont respectivement la variation de volume total et de la phase liquide. Il nous faut signaler de plus que les formules (2.87) à (2.91) sont exactes quand  $X = 0$ . Dans ce cas, l'ouverture  $\omega(r)$  et la variation de volume de la fissure ( $\Delta V$ ), de la phase liquide ( $\Delta V_\ell$ ) et de la phase gazeuse ( $\Delta V_g$ ) sont définies sur la Fig. 2.15.

### 2.3.2 Comportement macroscopique du matériau. Le cas linéaire - Situation diluée

Comme on l'a vu au paragraphe 2.2.3 de ce chapitre, il est possible de résoudre rigoureusement le problème d'homogénéisation pour un matériau fissuré non saturé dans la situation diluée et dans le cadre d'une approche linéaire utilisant l'approximation toroïdale. On s'intéresse ici à la résolution du même problème en utilisant les équations (2.87) à (2.91) pour rendre compte du chargement capillaire sur la matrice solide constituant le VER. Ce faisant, on va pouvoir évaluer la pertinence de l'approximation consistant à calculer la valeur de la fonction  $\omega(r)$  (relation (2.87)) sur le disque d'équation ( $z = 0, |r| \leq 1$ ) alors que le chargement capillaire est appliqué sur l'interface solide-pore d'équation ( $z = X_0 a \sqrt{1 - r^2}, |r| \leq 1$ ). Pour mesurer la pertinence de cette approximation, on comparera le résultat en utilisant les relations (2.87) à (2.91) à la loi de comportement (2.57) et (2.58) obtenue en utilisant le théorème de Levin.

Tous les caractéristiques mécaniques et géométriques du matériau fissuré non saturé traité ici ont été introduites aux paragraphes précédents. Pour déterminer le comportement macroscopique pertinent dans ce cas, on soumet le VER de matériau à une sollicitation homogène en déformation  $\mathbf{E}$ . Le système de chargement se compose de la déformation macroscopique appliquée au contour  $\mathbf{E}$  et du champ de précontrainte au sein des fissures  $\boldsymbol{\sigma}^p$ . On décompose ce problème noté (P) en deux problèmes plus simples notés respectivement (P') et (P'') (voir Fig. 2.16).

1.  $\mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}^p = 0$
2.  $\mathbf{E} = 0, \boldsymbol{\sigma}^p$

Le premier problème a été traité au paragraphe 2.2.3.1, sa solution permet de déterminer le tenseur d'élasticité drainé  $\mathbb{C}^{hom}$  tel que dans la sollicitation 1, on ait :

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E}. \quad (2.92)$$

Le deuxième problème correspond au cas où le matériau est sollicité seulement par le champs de précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$ . On peut calculer la valeur de la précontrainte macroscopique dans ce cas :

$$\boldsymbol{\Sigma}'' = \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}'' + \boldsymbol{\sigma}^p \rangle \quad (2.93)$$

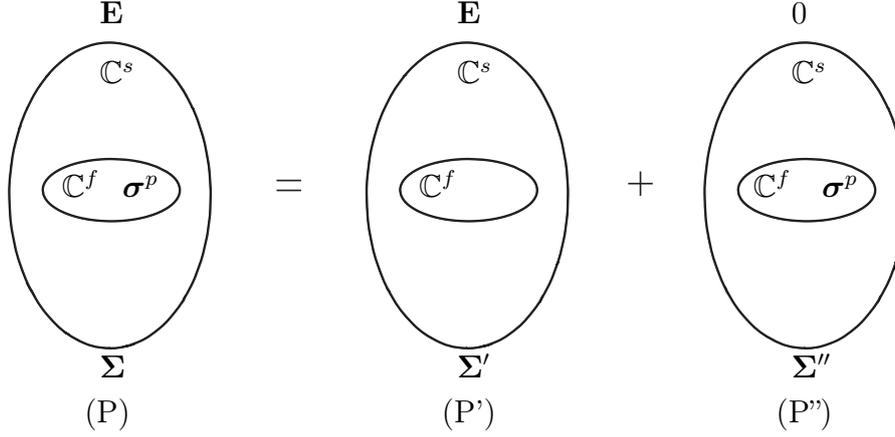


FIG. 2.16 – Décomposition du problème complet d'un milieu fissuré non saturé en deux sous-problèmes élémentaires

$$= \sum_{i=1}^n \left( (1 - \phi_0^i) \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^s + \phi_0^i \mathbb{C}^f : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} + \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi} \right). \quad (2.94)$$

où  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^s$  et  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi}$  désignent respectivement la déformation moyenne dans la matrice solide et dans la  $i$ ème famille de fissures. Comme on impose une déformation macroscopique nulle, on a la relation suivante :

$$\mathbf{E}'' = \sum_{i=1}^n \left( (1 - \phi_0^i) \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^s + \phi_0^i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} \right) = 0. \quad (2.95)$$

En combinant les équations (2.92), (2.94) et (2.95), on montre que le comportement macroscopique est alors donné par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \sum_{i=1}^n \left( \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi} - \phi_0^i \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} \right). \quad (2.96)$$

Dans la formule (2.96), on sait calculer  $\langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi}$  pour une fissure ellipsoïdale dans le cadre de l'approximation toroïdale (équation (2.20)) tandis que la déformation moyenne engendrée par le champ de précontrainte est obtenue en utilisant la formule de l'ouverture de la fissure (2.87). Le résultat dépend donc de l'orientation des fissures. On va traiter dans la suite deux cas particuliers : une famille de fissures parallèles les unes aux autres et une distribution isotrope de fissures identiques.

### 2.3.2.1 Une unique famille de fissure

Les fissures sont toutes de même dimension, dans le même état hydrique et parallèles entre elles. On désigne par  $\mathcal{N}$  la densité volumique de fissures. La surface des fissures est perpendiculaire à la direction  $\underline{e}_3$ . La déformation moyenne dans toutes les fissures ( $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f$ ) est donc égale à celle dans une fissure ( $\boldsymbol{\varepsilon}''_i$ ). L'équation (2.96) devient alors :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \phi_0 \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^f - \phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f \quad (2.97)$$

avec

$$\phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f = \mathcal{N} \int_{\delta\Omega_i^f} \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{u}) dS. \quad (2.98)$$

Avec  $\underline{u} = 2\omega(r)\underline{e}_3$  et  $\underline{n} = \underline{e}_3$ ,  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f$  n'a qu'une composant non nulle notée  $\varepsilon''_{33}$  dans la suite, les autres sont nulles.

$$\phi_0 \varepsilon''_{33} = \mathcal{N} \int_0^1 2\omega(r) d(\pi a^2 r^2). \quad (2.99)$$

Dans la situation avec l'angle de mouillage nul traité ici ( $\omega(r)_3 = 0$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_0 \varepsilon''_{33} &= 4\mathcal{N}\pi a^2 \int_0^1 (\omega(r)_1 + \omega(r)_2) r dr \\ &= 8\epsilon B \left( p_g \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr - p_c \int_0^1 \left( \int_{sup(r,\alpha)}^1 \sqrt{\frac{t^2-\alpha^2}{t^2-r^2}} dt \right) r dr \right). \end{aligned} \quad (2.100)$$

En utilisant la formule (2.153) de l'annexe B,

$$\int_0^1 \int_{sup(r,\alpha)}^1 \sqrt{\frac{t^2-\alpha^2}{t^2-r^2}} dt r dr = \int_\alpha^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{1}{3} (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.101)$$

on obtient :

$$\phi_0 \varepsilon''_{33} = -\frac{8}{3} \epsilon B \left( p_c (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} - p_g \right). \quad (2.102)$$

On pose ensuite,

$$p_c(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - p_g = \sigma^b. \quad (2.103)$$

On obtient alors, l'expression de  $-\phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f$  :

$$-\phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f = \frac{16}{3} \epsilon \sigma^b \frac{1 - \nu^s}{1 - 2\nu^s} \left( \nu^s (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + (1 - \nu^s) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) \quad (2.104)$$

Dans ce paragraphe, on ne prend pas en compte les non linéarités géométriques, les fissures sont donc des cavités ellipsoïdales aplaties, c'est à dire que  $p_c$  et  $\alpha$  sont toujours reliés par les relations :

$$p_c = \frac{\gamma}{aX_0} \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{et} \quad \alpha = \sin \varphi \Rightarrow \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{\gamma}{aX_0} \frac{1}{p_c}. \quad (2.105)$$

On a alors  $\sigma^b \equiv \sigma_p$ . En comparant ce résultat avec l'équation (2.58), on en déduit que :

$$-\phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f = \boldsymbol{\Sigma}_0^p. \quad (2.106)$$

En reproduisant exactement la même démarche qu'au paragraphe 2.2.4, on compare la valeur exacte de la précontrainte macroscopique ( $\boldsymbol{\Sigma}''$ ) et son approximation ( $-\phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f$ ). On obtient les mêmes conclusions que celles données au paragraphe 2.2.4 :

- Les approximations sont donc tout à fait pertinentes pour les applications courantes.
- Elles ont de plus l'avantage de fournir des expressions analytiques faciles à manipuler.
- La seule restriction concerne la prédiction des effets capillaires quand on compare la situation complètement saturée à la situation sèche, même si ces effets sont négligeables dans la plupart des situations.

On a donc :

$$\phi_0 \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^f \ll -\phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi} \ll \sum_{i=1}^n -\phi_0^i \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi}. \quad (2.107)$$

On en déduit que la loi de comportement macroscopique (2.97) s'écrit :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \phi_0 \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f . \quad (2.108)$$

La loi (2.96) s'écrit donc :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \sum_{i=1}^n -\phi_0^i \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} . \quad (2.109)$$

### 2.3.2.2 Distribution isotrope de fissures

Dans le cas où les fissures ont toutes la même dimension, la même disposition des phases fluides et admettent une répartition d'orientation isotrope, la valeur de pré-contrainte macroscopique  $\Sigma''$  est donnée par :

$$\Sigma'' = -\mathcal{N} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \phi_0^i \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^f (\theta, \psi) \frac{\sin \psi}{4\pi} d\psi d\theta. \quad (2.110)$$

On a donc

$$\Sigma'' = \frac{16}{9} \epsilon \frac{(1-\nu)\nu}{1-2\nu} \sigma^b \mathbf{I} = b\sigma^b \mathbf{I}. \quad (2.111)$$

La loi de comportement du matériau (2.96) s'écrit alors :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + b\sigma^b \mathbf{I}. \quad (2.112)$$

A titre d'exemple, dans une expérience de séchage d'un milieu isotrope sous contrainte macroscopique nulle, la pression dans la phase gazeuse est nulle et à l'état initial, le matériau est saturé par la phase liquide à la pression  $p_\ell = 0$ . La déformation macroscopique prévu selon (2.112) par ce modèle est sphérique et s'écrit  $\mathbf{E} = E\mathbf{I}$  avec :

$$E = -\frac{b}{3k^{hom}} \sigma^b = -\frac{b}{3k^s(1-b)} p_c (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.113)$$

Il convient de noter ici que l'équation (2.113) est identique à l'équation (2.56) et la relation entre  $p_c$  et  $\alpha$  est toujours définie par l'équation (2.105). La première (2.113) contrôle la déformation du VER à l'état saturé ( $\sigma^b = p_c = -p_\ell$ ) tandis que la seconde équation s'applique à l'état non saturé. Si l'on pose :

$$\bar{E} = \frac{E}{E^*}, \quad E^* = \frac{4\pi\epsilon}{9} X_0, \quad \bar{p}_c^b = \frac{p_c B}{X_0} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_b = \frac{\gamma B}{a_0 X_0^2} \quad (2.114)$$

l'équation sous forme adimensionnée (2.113) s'écrit :

$$\bar{E} = -\frac{2}{\pi(1-b)} \frac{B}{X_0} \sigma^b = -\frac{2}{\pi(1-b)} \bar{p}_c^b (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\pi(1-b)} \frac{\bar{\gamma}_b^3}{\bar{p}_c^b}. \quad (2.115)$$

Il convient de noter ici que l'on obtient la quatrième équation (2.115) en utilisant la relation  $p_c - \alpha$  définie à l'équation (2.105).

Pour conclure ce paragraphe, on vient de vérifier que l'approche par homogénéisation du comportement d'un milieu fissuré non saturé qui a été développée dans la section 2.2 de ce chapitre et l'approche utilisant les formules analytiques présentée ici sont identiques dans le cas dilué sans couplage géométrique. Ce résultat n'est finalement pas très surprenant quand on se souvient que dans l'approche classique, on n'a retenu que les termes dominants dans un développement limité des solutions autour de la valeur  $X_0 = 0$ . Ainsi le résultat que nous venons d'obtenir semble indiquer que l'approximation utilisée pour calculer  $\omega(r)$  (chargement appliqué sur une fissure plane et non par sur une fissure elliptique) introduit une erreur du 2nd ordre quand  $X$  tend vers zéro. Ce résultat acquis, on va maintenant pouvoir utiliser les formules (2.87) à (2.91) pour déterminer la première loi de comportement macroscopique (relation  $\Sigma, \mathbf{E}, p_c$ ) dans les situations où les couplages entre effet capillaire et déformation des fissures ne peuvent pas être négliger.

### 2.3.3 Prise en compte des non linéarités géométriques

#### 2.3.3.1 Equation géométrique

Comme on l'a signalé plus haut, la prise en compte du couplage entre déformations des fissures et effets capillaires modifie radicalement le comportement du matériau fissuré non saturé dans le cas des fissures de forme ellipsoïdale très aplaties. Dans la situation où la configuration déformée de fissures est traitée ici, pour tenir en compte des couplages géométriques, on s'intéresse tout d'abord à établir la formule de l'ouverture de la fissure ( $\omega(r)$ ). Pour cela, on admet l'hypothèse de superposition (Fig. 2.17) :

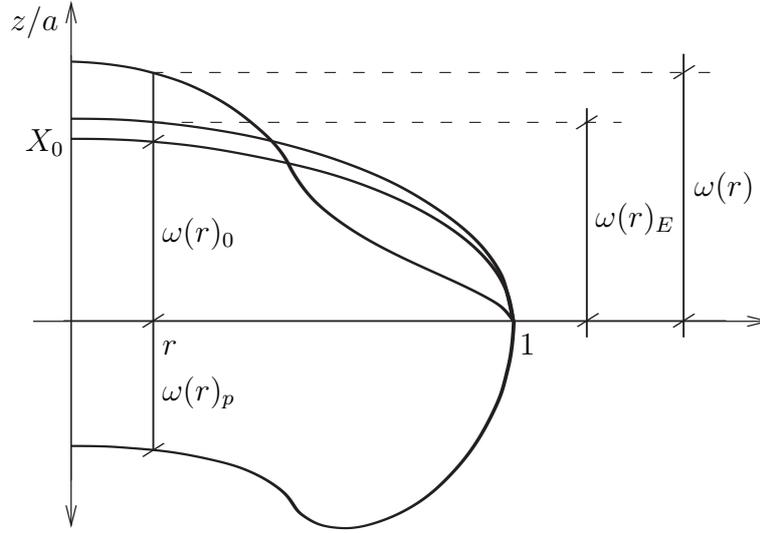


FIG. 2.17 – Hypothèse de superposition de l'ouverture de la fissure

$$\omega(r) = \omega(r)_0 + \omega(r)_E + \omega(r)_p, \quad (2.116)$$

où  $\omega(r)_0$ ,  $\omega(r)_E$  et  $\omega(r)_p$  désignent respectivement l'ouverture initiale, l'ouverture engendrée par la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et l'ouverture engendrée par le chargement capillaire.

On se place toujours dans le même cadre d'hypothèses que celui adopté dans le reste du chapitre : la phase liquide mouille parfaitement la phase solide ( $\theta = 0$ ), la pression de la phase gazeuse est nulle et l'état de référence est l'état saturé à pression capillaire et contrainte macroscopique nulles. De ces hypothèses, on déduit immédiatement que seul le second terme de (2.87) est non nul, on a donc :

$$\omega(r)_p = -\frac{2}{\pi} a B p_c \int_{\sup(r, \alpha)}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt. \quad (2.117)$$

Par ailleurs, dans l'état de référence, la fissure occupe un domaine ellipsoïdal de rapport d'aspect  $X_0$ . On a donc :

$$\omega(r)_0 = a X_0 \sqrt{1 - r^2}. \quad (2.118)$$

L'ouverture de la fissure engendrée par la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  est calculée en utilisant le résultat du problème d'Eshelby (équation (1.41)). On a alors,

$$\omega(r)_E = \underline{\xi} \cdot \underline{e}_3 = (\underline{\varepsilon}_I \cdot \underline{x}) \cdot \underline{e}_3, \quad (2.119)$$

avec

$$\underline{\varepsilon}_I = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1} : \mathbf{E}. \quad (2.120)$$

En utilisant l'approximation  $X \ll 1$  pour la valeur du rapport d'aspect, on obtient :

$$\omega(r)_E = \begin{cases} \frac{4aE(1 - \nu^{s2})}{\pi(1 - 2\nu^s)} \sqrt{1 - r^2} & : \text{ si } \mathbf{E} = E\mathbf{I} \\ \frac{4aE(1 - \nu^s)^2}{\pi(1 - 2\nu^s)} \sqrt{1 - r^2} & : \text{ si } \mathbf{E} = E\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{cases} \quad (2.121)$$

On s'intéresse ici le cas où  $\mathbf{E} = E\mathbf{I}$ . L'équation (2.116) s'écrit dans cette situation :

$$\omega(r) = aX_0\sqrt{1 - r^2} + \frac{4aE(1 - \nu^{s2})}{\pi(1 - 2\nu^s)} \sqrt{1 - r^2} - \frac{2}{\pi} aBp_c \int_{sup(r,\alpha)}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt \quad (2.122)$$

A l'état non saturé, la surface de séparation entre la phase gazeuse et la phase liquide est à double courbure. Dans la suite, pour simplifier nous supposons que l'ouverture  $\omega(r)$  de la fissure reste faible. Dans ce cas, la première courbure de la surface ( $1/\alpha a$ ) est alors négligeable devant la second égale à l'ouverture de la fissure au voisinage de  $r = \alpha$ . Le rayon de courbure du ménisque est donc égal à l'ouverture de la fissure ( $\omega(\alpha)$ ) en  $r = \alpha$ .

La pression capillaire se calcule alors grâce à l'équation suivante :

$$p_c = \gamma \text{tr} \mathbf{b} = \gamma \frac{1}{R} = \frac{\gamma}{\omega(\alpha)}. \quad (2.123)$$

En posant  $r = \alpha$  dans l'équation (2.122) et puis en introduisant cette équation dans l'équation (2.123), on trouve l'équation géométrique permettant de prendre en compte le couplage entre déformations des fissures et effets capillaires :

$$R = \omega(\alpha) = \frac{\gamma}{p_c} = aX_0\sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{4aE(1 - \nu^{s2})}{\pi(1 - 2\nu^s)} \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2}{\pi} aBp_c(1 - \alpha). \quad (2.124)$$

En utilisant les grandeurs adimensionnées (2.114), l'équation (2.124) sous forme adimensionnée s'écrit :

$$(1 + b\bar{E}) \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2}{\pi} \bar{p}_c^b (1 - \alpha) = \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c^b}. \quad (2.125)$$

### 2.3.3.2 Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope

Ce paragraphe a pour objectif de comparer les résultats des deux approches dans le cas dilué avec prise en compte du couplage géométrique. Pour cela, on s'intéresse de nouveau au comportement du matériau où les fissures ont toutes la même dimension, la même disposition des phases fluides, admettent une répartition d'orientation isotrope, lors d'une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle conduite à partir de l'état de référence saturé à pression capillaire nulle. La loi de comportement du matériau est toujours définie dans l'équation (2.115)

$$\bar{E} = -\bar{b}\bar{p}_c^b = -\bar{b}\bar{p}_c^b(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{avec} \quad \bar{b} = \frac{2}{\pi(1 - b)} \quad (2.126)$$

tandis que l'équation géométrique (2.125) définissant la relation  $p_c - \alpha$  dans ce cas s'écrit :

$$\left(1 - b\bar{b}\bar{p}_c^b(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}\right) \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2}{\pi} \bar{p}_c^b (1 - \alpha) - \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c^b} = 0. \quad (2.127)$$

On observe tout d'abord une phase où les fissures restent saturées par la phase liquide à la pression  $-p_c$  avant que l'air ne pénètre dans les fissures. Le matériau est alors non saturé à la la pression capillaire  $p_c$  calculée par l'équation (2.127). L'équation (2.127) admet deux solutions  $\bar{p}_{c1}^b, \bar{p}_{c2}^b$  avec  $\bar{p}_{c1}^b < \bar{p}_{c2}^b$  pour chaque valeur de  $\alpha$ . On constate que dans le cas où  $\bar{p}_c^b = \bar{p}_{c1}^b$ , une phase de diminution de  $p_c$  est toujours prédite (trajet (c) sur la Fig. 2.18 avec  $\bar{p}_c^b = \bar{p}_{c1}^b$ ). Dans cette approche, on a donc une seule solution acceptable correspondant à  $\bar{p}_c^b = \bar{p}_{c2}^b$ .

On montre de plus qu'au moment où le gaz pénètre dans les fissures ( $\alpha = 0$ ), l'équation (2.127) n'admet de solution que si :

$$2\sqrt{\bar{b}\bar{\gamma}_b} \leq 1 \Leftrightarrow X_0 \geq \sqrt{\frac{8\gamma B}{\pi(1 - b)a}}. \quad (2.128)$$

En combinant les équations (2.75) et (2.114), on montre que :

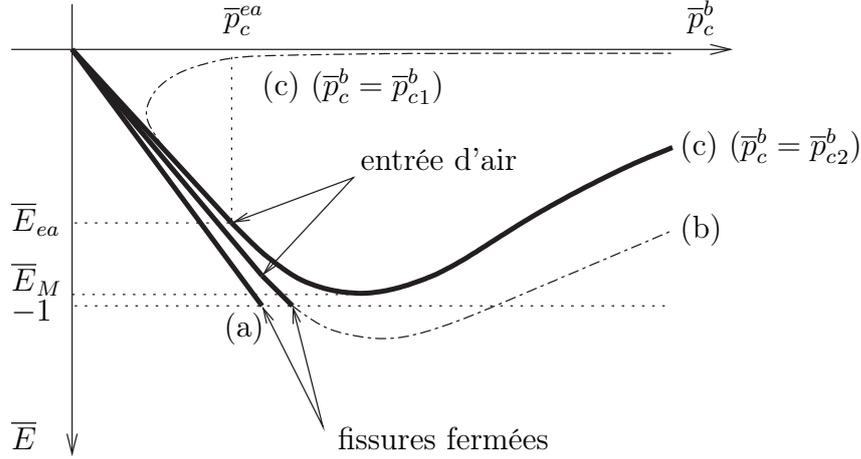


FIG. 2.18 – Déformation de séchage en fonction de la pression capillaire - cas non linéaire.

$$\sqrt{\frac{8\gamma B}{\pi(1-b)a}} = \left(\frac{3b\gamma}{\pi\epsilon a k^{hom}}\right)^{\frac{1}{2}} = X_0^*. \quad (2.129)$$

La condition d'entrée de l'air au sein des fissures est donc identique pour les deux approches.

Différentes situations peuvent se présenter.

- Si  $X_0 < X_0^*$ , l'augmentation de la pression capillaire s'accompagne d'une déformation volumique de retrait du matériau mais sans désaturation des fissures (trajet (a) sur la Fig. 2.18).
- Si  $X_0^* < X_0$  la désaturation du matériau provoque tout d'abord la fermeture des fissures. Une fois la valeur minimale de la déformation macroscopique  $\bar{E}_M$  atteinte, la désaturation des fissures s'accompagne d'une réouverture de ces dernières. La valeur numérique de  $\bar{E}_M$  peut être calculée sans difficulté. La phase de dilatation n'est observée que quand  $\bar{E}_M > -1$  (trajet (c) sur la Fig. 2.18 avec  $\bar{p}_c = \bar{p}_{c2}^b$ ), en revanche quand  $\bar{E}_M < -1$  une seule phase de retrait est observée jusqu'à la fermeture rapidement totale des fissures (trajet (b) sur la Fig. 2.18).

Il nous faut noter ici que quand  $\bar{E}_M = -1$ , on a  $X_0 = X_0^M$ . La valeur numérique de  $X_0^M$  est bien inférieure à 1 et peut être calculée en fonction des paramètres du matériau (comme  $X_0^*$ ). La condition  $\bar{E}_M < -1$  correspond à la condition où la valeur  $X_0$  doit être plus petite que celle  $X_0^M$ . Cette condition confirme que l'approche

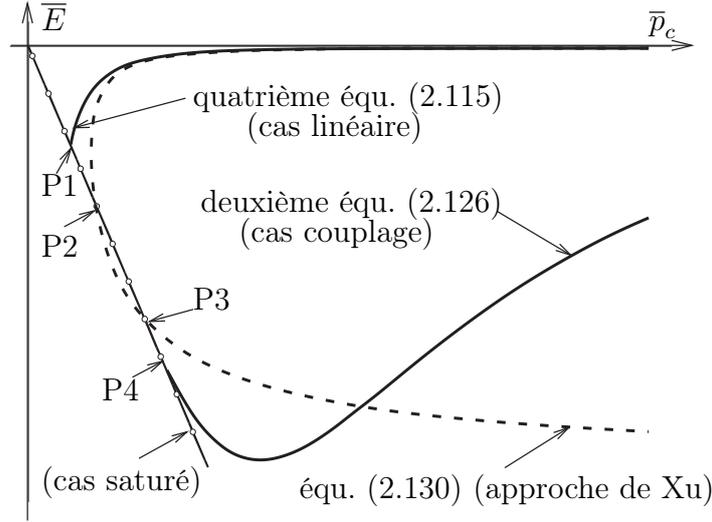


FIG. 2.19 – Comparaison entre les deux approche - Séchage sous contrainte macroscopique nulle

présentée ici n'est valable que pour le cas où le rapport d'aspect de la fissure est bien inférieur à 1.

En utilisant les grandeurs adimensionnées (2.114), l'équation (2.73) exprimant la relation entre la déformation de séchage et la pression capillaire selon l'approche de modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties devient :

$$\bar{p}_c^b = \left( \frac{\bar{b}\bar{\gamma}_b^3}{-\bar{E}(1+\bar{E})^3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.130)$$

La Fig. 2.19 présente les différents comportements prédits par les deux approches. P1, P2, P3, P4 sont respectivement les points d'entrée d'air selon l'approche linéaire (sans couplage géométrique) (P1), l'approche par la contrainte équivalente (P2 et P3) et l'approche utilisant les formules analytiques (P4).

### 2.3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la modélisation d'un milieu mésofissuré non saturé en utilisant les formules analytiques exactes permettant de calculer la configuration déformée d'une fissure isolée dans un milieu infini élastique homogène isotrope soumise à un chargement correspondant à l'application d'une déformation homogène à

l'infini et à la présence de deux fluides non miscibles à l'intérieure de la fissure. On a comparé ces résultats avec les résultats obtenus à la section 2.2 concernant l'approche de modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties (approche par la contrainte équivalente). On peut dégager les conclusions suivantes des résultats obtenus dans ce travail :

On a démontré que les deux approches donnaient exactement les mêmes résultats dans le cas sans couplage géométrique.

Dans le cas avec couplage, les deux approches sont également identiques pour les valeurs les plus faibles du rapport d'aspect où les fissures se ferment en restant constamment saturées.

Pour les valeurs les plus importantes du rapport d'aspect, une phase de désaturation, similaire à celle obtenue dans le cas sans couplage, qui s'accompagne tout de suite d'une réouverture des fissures n'est pas observée. Cependant, il faut signaler ici que cette phase n'est observée que pour les valeurs les plus importantes du rapport d'aspect dans l'approche par la contrainte équivalente tandis que l'approche utilisant les formules analytiques présentée ici est valable seulement dans le cas des fissures très aplaties.

Enfin pour les valeurs intermédiaires du rapport d'aspect, la désaturation du matériau provoque tout d'abord la fermeture des fissures jusqu'à une valeur minimale de la déformation de séchage, puis une réouverture des fissures est prédite pour les valeurs plus élevées de la pression capillaire.

En résumé, la solution des formules analytiques exactes présentée dans cette section est utilisée évidemment comme solution de base pour construire des estimations du comportement macroscopique du milieu mésolfissuré non saturé. L'intérêt de cette approche par rapport à l'approche par la contrainte équivalente est de permettre de mieux décrire la propagation de l'endommagement en situation non saturée, problème abordé au chapitre 3 de ce mémoire.

## 2.4 Validation numérique

Dans cette dernière section, on cherche à vérifier par voie numérique la pertinence des solutions obtenues au paragraphe précédent en utilisant le code d'élément finis Cast3M. Pour cela, on considère le problème auxiliaire décrit sur la Fig. 2.14, pour

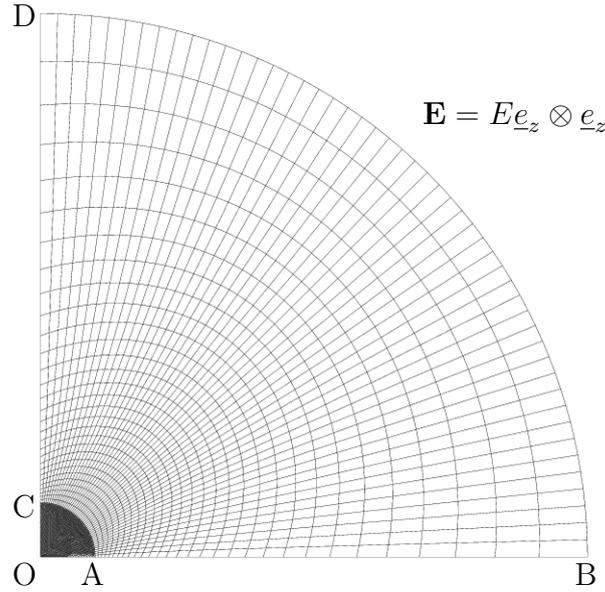


FIG. 2.20 – Maillage du problème

une structure constituée d'une fissure circulaire aplatie parfaite ( $X_0 = 0$ ) dans l'état initial, immergée au sein d'un milieu solide élastique homogène soumis à un chargement en déformation homogène  $\mathbf{E}$ . En négligeant l'influence de la tension surface liquide-gaz (angle de mouillage  $\theta = 0$ ), le champ de pression des phases fluides est encore modélisé comme pour les deux premiers cas représenté sur la Fig. 2.14.

On s'intéresse ici au chargement  $\mathbf{E} = E \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ . L'équation (2.122) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \omega(r)_E + \omega(r)_1 + \omega(r)_2 \\ &= \frac{4a_0 E (1 - \nu^s)^2}{\pi(1 - 2\nu^s)} \sqrt{1 - r^2} + \frac{2}{\pi} a_0 B \left( p_g \sqrt{1 - r^2} + (p_\ell - p_g) \int_{\sup(r, \alpha)}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt \right). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Pour chercher la solution numérique du problème, on assimile le domaine infini à une sphère de rayon « grand » vis à vis de la taille de la fissure. Les chargements présentés ici vérifient les propriétés de symétrie de révolution, c'est à dire que le choix de cette géométrie permet de se ramener à des problèmes bidimensionnels axisymétriques plus faciles à résoudre que des problèmes tridimensionnels.

La Fig. 2.20 représente le maillage utilisé. La surface ABDC se compose d'éléments quadratiques à huit noeuds tandis que la surface OAC utilise un maillage plus raffiné

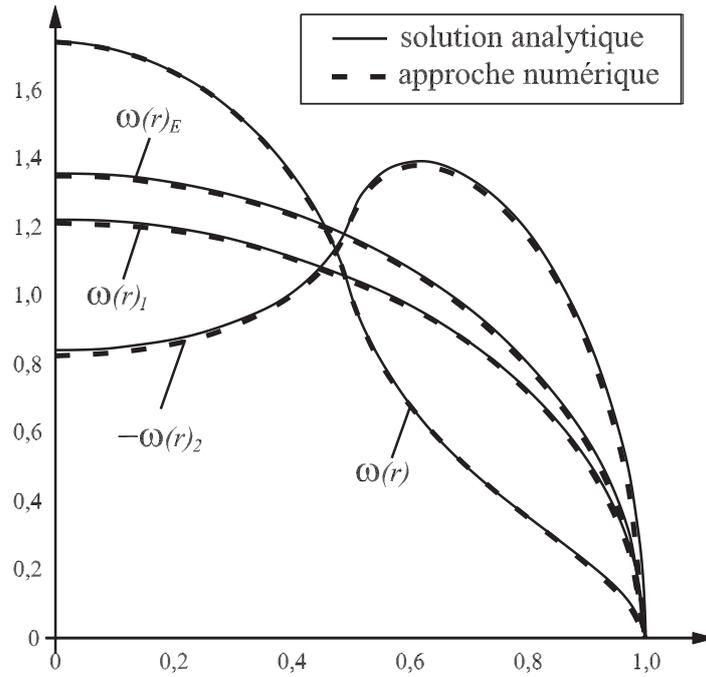


FIG. 2.21 – La comparaison entre l’approche numérique et la solution analytique

d’éléments triangles à six noeuds. On a présenté les 3 cas de chargement sur la Fig. 2.14 et permettant de calculer  $(\omega(r))$  comme indiqué dans l’équation (2.131). Dans le repère cylindrique, la déformation macroscopique est défini par  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ . La ligne OA présente une demi-longueur de la fissure.

La Fig. 2.21 présente la comparaison entre les résultats obtenus par les deux approches. Les paramètres utilisés dans les calculs sont les suivants :  $E^s = 1; a = 1; p_g = 1; p_\ell = -1; \alpha = 0.5; \gamma = 0.1; \nu^s = 0.2$ .

On vérifie que les résultats sont presque identiques pour les deux approches.

## 2.5 Annexe B - Calculs détaillés de la solution exacte

Comme annoncé au paragraphe 2.3.1, en utilisant les résultats exacts disponibles dans la littérature, on peut calculer l'ouverture, le facteur d'intensité de contrainte en mode I, et le volume d'une fissure circulaire non saturée isolée dans un milieu homogène élastique avec un chargement nul à l'infini en fonction de la pression des phases fluides. L'annexe a pour but de présenter en détail les calculs concernant les trois cas de chargement (Fig. 2.14), en commençant par les calculs de déformation et de facteur d'intensité de contrainte.

### 2.5.1 Calcul de la déformation et du facteur d'intensité de contrainte

#### 2.5.1.1 Le cas 1

A partir des formules (2.83), (2.84), (2.85) et (2.86), on commence par déterminer la fonction de charge  $T(r)$ . Dans ce cas, on a :

$$T(r) = p_0 K(r) = p_g \Rightarrow p_0 = p_g \text{ et } K(r) = 1. \quad (2.132)$$

$$\Rightarrow g(t) = \int_0^1 \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = 1 \text{ et } \psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_r^1 \frac{tdt}{\sqrt{t^2-r^2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-r^2}. \quad (2.133)$$

$$\Rightarrow \omega(r)_1 = aBp_g \frac{2}{\pi} \sqrt{1-r^2} = p_g \omega(r)_1^* \text{ et} \quad (2.134)$$

$$K_{I1} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} p_g. \quad (2.135)$$

#### 2.5.1.2 Le cas 2

Avec  $\alpha = \frac{c}{a}$  et  $r = tu$ , on a :

$$T(r) = p_0 K(r) = \begin{cases} p_\ell - p_g \Rightarrow p_0 = p_\ell - p_g, K(r) = 1 & : \text{ si } \alpha < r \leq 1 \\ 0 & : \text{ si } 0 \leq r < \alpha \end{cases} \quad (2.136)$$

$$\Rightarrow g(t) = \int_0^1 K(tu) \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\frac{\alpha}{t}} 0 du + \int_{\frac{\alpha}{t}}^1 \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{t^2}}. \quad (2.137)$$

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_r^1 g(t) \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_r^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt & : \text{ si } \alpha < r \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt & : \text{ si } 0 \leq r < \alpha \end{cases} \quad (2.138)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\sup(\alpha, r)}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt. \quad (2.139)$$

$$\Rightarrow \omega(r)_2 = aB(p_\ell - p_g) \frac{2}{\pi} \int_{\sup(\alpha, r)}^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt = (p_\ell - p_g) \omega(r)_2^* \quad \text{et} \quad (2.140)$$

$$K_{I2} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} (p_\ell - p_g) \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad (2.141)$$

### 2.5.1.3 Le cas 3

Dans ce cas, la fonction de charge  $T(r)$  est définie par :

$$T(r, \theta) = p_0 K(r, \theta) = \frac{\gamma \sin \theta}{a} \delta_\alpha(r) \Rightarrow p_0 = \frac{\gamma \sin \theta}{a} \quad \text{et} \quad K(r) = \delta_\alpha(r). \quad (2.142)$$

$\delta_\alpha(r)$  est la fonction de Dirac au point  $\alpha$ .

$$\Rightarrow g(t) = \int_0^1 \delta_\alpha(r) \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \delta_\alpha(r) \frac{\frac{\alpha}{t} d(\frac{r}{t})}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{t^2}}} = \frac{\alpha}{t\sqrt{t^2 - \alpha^2}}. \quad (2.143)$$

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_r^1 g(t) \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\pi} \int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \alpha^2)(t^2 - r^2)}} & : \text{ si } \alpha < r \leq 1 \\ \frac{2\alpha}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \alpha^2)(t^2 - r^2)}} & : \text{ si } 0 \leq r < \alpha \end{cases} \quad (2.144)$$

$$= \frac{2}{\pi} \alpha \int_{\sup(\alpha, r)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \alpha^2)(t^2 - r^2)}}. \quad (2.145)$$

$$\Rightarrow \omega(r)_3 = aB \frac{\gamma \sin \theta}{a} \frac{2}{\pi} \alpha \int_{\sup(\alpha, r)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \alpha^2)(t^2 - r^2)}} = \frac{\gamma \sin \theta}{a} \omega(r)_3^* \quad \text{et} \quad (2.146)$$

$$K_{I3} = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\gamma \sin \theta}{a} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (2.147)$$

### 2.5.2 Calcul de la variation de volume

En utilisant les formules permettant de calculer l'ouverture de la fissure obtenues à la section précédente, on s'intéresse ici à la variation de volume de la fissure et de la phase liquide. Pour simplifier les expressions de ces volumes, nous négligerons la courbure des ménisques. Cela revient à dire que du point de vue des volumes, nous supposons le liquide et le gaz séparés par une surface cylindrique verticale en  $r = \alpha$ . Compte tenu des difficultés techniques à résoudre les formules intégrales, on applique ici le théorème de Maxwell-Betti. Pour cela, on s'intéresse tout d'abord à la situation de base où les chargements concernant les trois cas ci-dessus sont égaux unités :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_g = 1 \quad : \text{cas 1} \\ p_\ell - p_g = 1 \quad : \text{cas 2} \\ \frac{\gamma \sin \theta}{a} = 1 \quad : \text{cas 3} \end{array} \right. \quad (2.148)$$

En reportant l'équation (2.148) dans les équations (2.134), (2.140) et (2.146), on a alors :

$$\omega(r)_1 = \omega(r)_1^* \quad , \quad \omega(r)_2 = \omega(r)_2^* \quad , \quad \omega(r)_3 = \omega(r)_3^*. \quad (2.149)$$

En utilisant le théorème de Maxwell-Betti pour la situation de base, les égalités sont alors établies comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(r)_2^* r dr &= \int_\alpha^1 \omega(r)_1^* r dr \quad , \quad \int_0^1 \omega(r)_3^* r dr = \int_0^1 \delta_\alpha(r) \omega(r)_1^* r dr \quad , \\ \int_\alpha^1 \omega(r)_3^* r dr &= \int_0^1 \delta_\alpha(r) \omega(r)_2^* r dr. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Dans la suite, on va utiliser les égalités ci-dessus pour calculer les variations de volume de la fissure et de la phase liquide (cas 2 et cas 3). Il convient de rappeler que pour chaque cas de chargement, le rapport d'aspect à l'état initial est toujours égal à zéro. La variation de volume de la fissure et de la phase liquide pour chaque cas de chargement sont donc toujours définies comme sur la Fig. 2.15.

### 2.5.2.1 Cas 1

La variation de volume de la fissure est donnée par :

$$\Delta V_1 = p_g \left( 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \omega(r)_1^* x dx \right) = 4\pi p_g a^2 \int_0^1 \omega(r)_1^* r dr = \frac{8}{3} a^3 B p_g. \quad (2.151)$$

Tandis que la variation de volume de la phase liquide s'obtient grâce à la relation suivante :

$$\Delta V_{\ell 1} = p_g \left( 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_\alpha^1 \omega(r)_1^* x dx \right) = 4\pi p_g a^2 \int_\alpha^1 \omega(r)_1^* r dr = \frac{8}{3} a^3 B p_g (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.152)$$

### 2.5.2.2 Cas 2

Variation de volume de la fissure :

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= (p_\ell - p_g) \left( 2a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \omega(r)_2^* r dr \right) = 4\pi (p_\ell - p_g) a^2 \int_\alpha^1 \omega(r)_1^* r dr \\ &= \frac{8}{3} a^3 B (p_\ell - p_g) (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

La variation de volume de la phase liquide s'écrit  $\Delta V_{\ell 2} = \Delta V_2 - \Delta V_{g2}$ , avec  $\Delta V_{g2}$ , la variation de volume gazeuse calculée par :

$$\Delta V_{g2} = (p_\ell - p_g) \left( 2a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \omega(r)_2^* r dr \right) \quad (2.154)$$

$$= 8a^3 B (p_\ell - p_g) \int_0^\alpha \left( \int_\alpha^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt \right) r dr \quad (2.155)$$

$$= \frac{8}{3}a^3B(p_\ell - p_g) \left( (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - 1 + 3\alpha^2 - 2\alpha^3 \right). \quad (2.156)$$

On en déduit

$$\Delta V_{\ell 2} = \frac{8}{3}a^3B(p_\ell - p_g) (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \quad (2.157)$$

### 2.5.2.3 Cas 3

Variation de volume de la fissure :

$$\Delta V_3 = \frac{\gamma \sin \theta}{a} \left( 2a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \omega(r)_3^* r dr \right) = 2 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \delta_\alpha(r) \omega(r)_1^* r dr \quad (2.158)$$

$$= 8 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^3 B \int_0^1 \delta_\alpha(r) \sqrt{1 - r^2} r dr = 8 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^3 B \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (2.159)$$

Variation de volume de la phase liquide :

$$\Delta V_{\ell 3} = 2 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_\alpha^1 \omega(r)_3^* r dr = 2 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \delta_\alpha(r) \omega(r)_2^* r dr \quad (2.160)$$

$$= 8 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^3 B \int_0^1 \delta_\alpha(r) \left( \int_r^1 \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^2}{t^2 - r^2}} dt \right) r dr = 8 \frac{\gamma \sin \theta}{a} a^3 B \alpha (1 - \alpha). \quad (2.161)$$



## CHAPITRE 3

---

### Critère d'endommagement d'un milieu mésolfissuré en conditions saturée et non saturée

---

#### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la formulation des critères d'endommagement d'un matériau fragile hétérogène méso-fissuré non saturé (verre, béton, roche, ...) dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. On rappelle que la mécanique linéaire de la rupture est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations dans la zone entourant la pointe d'une fissure préexistante dans la structure étudiée. Pour cela on s'appuie sur les deux approches présentées au chapitre 2 concernant la modélisation du comportement macroscopique d'un milieu mésolfissuré non saturé : la modélisation des fissures non saturées par des cavités ellipsoïdales aplaties (approche par la contrainte équivalente) et la modélisation utilisant des formules analytiques exactes (approche analytique). Comme il a été dit, l'approche par la précontrainte moyenne permet de rendre compte exactement dans la relation liant la contrainte macroscopique à la déformation macroscopique et la pression capillaire des effets capillaires dans la situation diluée sans prise en compte du couplage entre déformation de la fissure et effort capillaire. Par contre dans toutes les autres situations (interaction entre les fissures, couplage géométrique,

...), cette approche n'est pas rigoureusement exacte.

On s'intéresse donc tout d'abord à la comparaison des critères de rupture obtenus par les deux approches dans une situation simple (chargement macroscopique nul, une unique famille de fissures). Pour conduire l'approche par la contrainte équivalente, on se base sur l'approche reposant sur une généralisation du raisonnement énergétique de Griffith pour le cas saturé [19, 20, 46] qui est présentée dans les sections 3.3 et 3.4. Pour conduire l'approche analytique, on s'appuie sur les résultats de Bui et al. [7, 9] et de Feraille-Fresnet et al. [26, 27] concernant la modélisation d'une fissure plane non saturée occupant un domaine circulaire plan dans un matériau solide (équations (2.88) et suivantes) et sur la solution analytique obtenue pour la validation de l'approche par changement d'échelle du comportement des matériaux méso-fissurés en condition non saturée présentée à la section 2.3.

On cherche ensuite à intégrer dans une modélisation globale de la propagation de l'endommagement en condition non saturée les effets locaux induits par la non saturation des fissures dans le cadre de l'approche analytique. L'interaction entre les fissures est prise en compte dans le cadre d'un schéma de Mori-Tanaka.

On s'intéresse également aux lois de propagation sous critique qui sont également abordées dans ce chapitre.

## 3.2 Généralité sur la rupture

Pour commencer, il est utile de rappeler quelques définitions fondamentales de la mécanique de la rupture fragile, définissons et concepts qui sont exposées en détail dans de très nombreux ouvrages [8, 32, 35, 38].

La rupture est caractérisée, au moins localement, par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique  $S$ . La coupure existante ou nouvellement créée est appelée *fissure*. C'est une surface de discontinuité pour le champ de déplacement. Cette discontinuité est appelée ouverture de la fissure.

En pratique, la sollicitation appliquée à la fissure est décomposée en trois modes de sollicitation associés chacun à un mode de propagation possible (Fig. 3.1). Le mode I, appelé également mode d'ouverture, est considéré comme le plus important en mécanique de la rupture pour beaucoup de matériaux. Les modes II et III

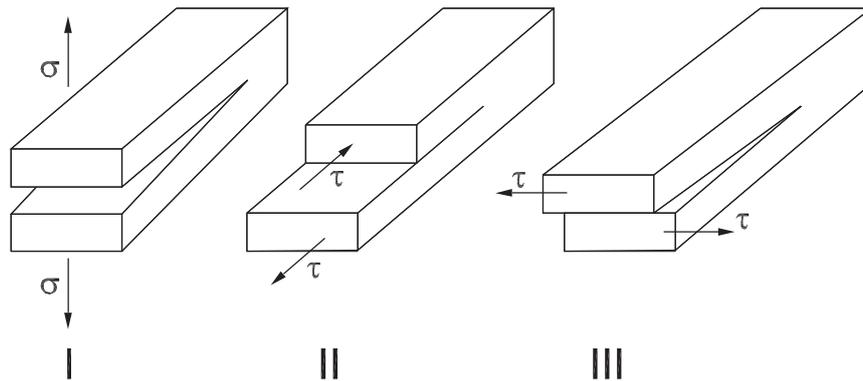


FIG. 3.1 – Les trois modes de rupture : mode I (ouverture), mode II (glissement plan), mode III (glissement antiplan).

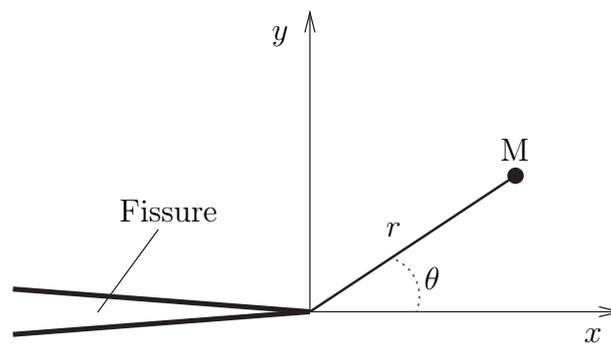


FIG. 3.2 – Au voisinage d'une pointe de fissure

correspondent localement à des glissements parallèles au plan tangent à la surface de discontinuité près de la pointe de la fissure.

Le champ de contrainte au voisinage d'une fissure est de la forme [35] :

$$\sigma_{ij} = K_L (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^L(\theta), \quad (3.1)$$

avec  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires du repère associé à la fissure comme indiqué sur la Fig. 3.2.

Ici,  $f_{ij}^L(\theta)$  désigne une fonction de l'angle  $\theta$  qui dépend du mode (I, II ou III) de sollicitation.  $K_L$  désigne le *facteur d'intensité de contrainte* (l'indice L correspond aux trois modes de rupture et prend les valeurs I, II, ou III). Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte dépendent des caractéristiques du système (configuration

géométrique, modes de sollicitation) et peuvent être calculées pour des cas particuliers par différentes méthodes [8] :

- Méthodes semi-analytiques. Il s'agit de méthodes utilisant des fonctions analytiques combinées avec une résolution numérique. Cette technique a été utilisée pour résoudre de nombreux problèmes pratiques.
- Méthodes numériques utilisant la technique des éléments finis ou la technique des éléments de frontière.
- Méthodes analogiques ou expérimentales permettant parfois d'accéder directement au facteur d'intensité de contrainte sur une structure réelle.

Le critère de rupture est l'ensemble des formules qui définit la condition permettant de prévoir l'évolution d'une fissure existant dans une pièce mécanique. La plupart des théories de rupture fragile utilise la notion de seuil critique, non pas pour la contrainte qui est infinie en fond de fissure, mais pour les facteurs d'intensité de contrainte. Le critère de rupture valable pour une fissure sollicitée en mode I s'écrit :

$$K_I - K_{IC} = 0. \tag{3.2}$$

$K_{IC}$  est une caractéristique physique du matériau appelée *ténacité*, introduite initialement par Irwin (1958) ([38]). Elle est déterminée expérimentalement. Quand  $K_I$  reste inférieur à la ténacité, il n'y a pas de propagation de la fissure. La relation (3.2) permet de calculer les chargements admissibles pour une structure ayant une fissure donnée, ou encore de calculer les longueurs de fissures admissibles dans une structure appelée à travailler dans des conditions de charge bien définies [38].

D'un autre côté, au lieu des calculs concernant la singularité des contraintes (dite théorie du  $K_{IC}$ ), le problème de la rupture des systèmes fissurés est également abordé par une approche énergétique consistant à calculer l'énergie dissipée lors de la propagation éventuelle de la fissure. Cette grandeur, usuellement notée  $G$  et appelée *taux de restitution d'énergie* a été introduite à l'origine par Griffith [29]. Le critère de propagation de Griffith s'écrit par :  $G \geq 2\gamma$  avec  $2\gamma$  l'énergie lors de dissipée la propagation de la fissure. Si à tout moment on a l'égalité  $G = 2\gamma$ , on dit que la rupture est contrôlée avec une croissance stable de la fissure. Si, au contraire,  $G$  est supérieur à  $2\gamma$ , la fissure se propagera de façon instable. L'expression de  $G$  peut être calculée soit par une méthode analytique, soit par une méthode numérique basée sur une autre expression de  $G$  sous la forme d'une intégrale de contour, dite inté-

gale de Rice (1968) (cité dans [8]). Dans ce chapitre, nous utiliserons une méthode analytique pour calculer la grandeur  $G$ .

L'équivalence entre les deux théories (singularité des contraintes et énergie) est assurée par la formule d'Irwin, qui relie le taux de restitution d'énergie  $G$  aux facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2. \quad (3.3)$$

Il convient de souligner ici que l'expression  $G \geq 2\gamma$  définit un critère 3D (en mode mixte) tandis que la formule (3.2) définit un critère de rupture unique en mode d'ouverture (mode I). Pour pouvoir établir l'équivalence entre deux formules, il nous faut accepter dans ce chapitre comme hypothèse que les fissures se propagent dans leur plan. Les fissures restent modélisées par des interfaces circulaires (ellipsoïdes très aplaties) et leur propagation est quantifiée par une augmentation de leur rayon ou du paramètre de densité de fissures correspondant. Dans ce cadre, les fissures se propagent donc uniquement en mode I et les facteurs d'intensité de contrainte en mode II et III sont toujours égaux à zéro. La formule d'Irwin (3.3) s'écrit dans ce cas :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2. \quad (3.4)$$

Une modélisation plus réaliste où les fissures se propagent en mode mixte sera présentée dans la quatrième chapitre de ce mémoire.

## 3.3 Modélisation de la propagation d'une fissure saturée

### 3.3.1 Loi d'évolution

Considérons maintenant le cas d'un matériau fissuré contenant d'une seule fissure de surface  $s$ . Comme nous l'avons déjà introduit, le volume élémentaire représentatif de ce matériau occupe le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . La phase solide occupe le domaine  $\Omega_s$  de frontière  $\partial\Omega_s$  tandis que la fissure occupe le domaine  $\Omega_f$  de frontière  $\partial\Omega_f$ , complémentaire de  $\Omega_s$  dans  $\Omega$ . La phase solide est encore constituée d'un matériau

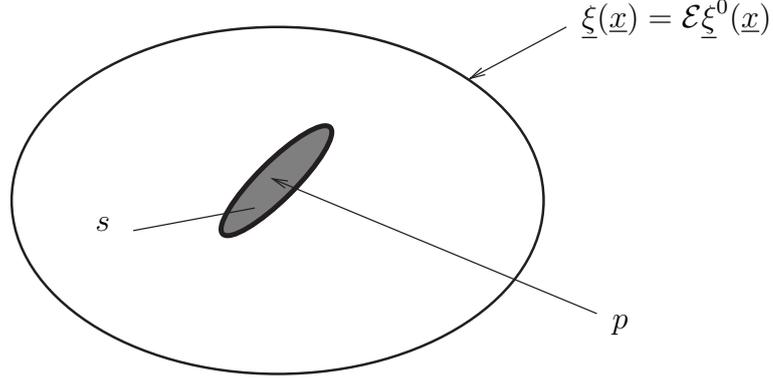


FIG. 3.3 – Matériau avec une seule fissure saturée

élastique linéaire et la fissure est saturée par un fluide à la pression  $p$ . Le champ de déplacement imposé à la frontière du VER est défini par :  $\underline{\xi}(\underline{x}) = \mathcal{E}\underline{\xi}^0(\underline{x})$ .  $\underline{\xi}^0(\underline{x})$  est une fonction définie sur  $\partial\Omega$  tandis que  $p$  et  $\mathcal{E}$  sont des variables d'évolution. Pour simplifier la présentation, on s'intéresse dans ce cas aux évolutions quasi-statiques et isothermes de ce système.

Pour ce milieu, on rappelle que la puissance dissipée dans une évolution est la différence entre la puissance des efforts extérieurs et la variation de l'énergie élastique stockée dans la matrice solide pour le problème mécanique. Cela s'écrit :

$$\dot{D} = \dot{W}_{ext} - |\Omega_0|\dot{\Psi} \geq 0. \quad (3.5)$$

Avec  $\dot{D}$  la puissance dissipée,  $\dot{W}_{ext}$  la puissance des efforts extérieurs et  $|\Omega_0|\Psi$  l'énergie élastique stockée dans la phase solide du VER de milieu poreux saturé.

On sait que l'énergie potentielle pour ce problème s'écrit :

$$\Psi^* = \Psi - p \frac{|\Omega_f| - |\Omega_{f0}|}{|\Omega_0|} = \Psi - p(\phi - \phi_0), \quad (3.6)$$

avec  $|\Omega_0|$  et  $|\Omega_{f0}|$  respectivement le volume du VER et le volume du domaine de la fissure à l'état initial.  $\Psi^*$  est une fonction de  $\mathcal{E}, p$  et  $s$ . Dans une évolution du système définie par  $\dot{\mathcal{E}}, \dot{p}$  et  $\dot{s}$ , l'équation (3.5) s'écrit :

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = \dot{\mathcal{E}} \left( \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\partial\Omega_0} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^0 dS - \frac{\partial\Psi^*}{\partial\mathcal{E}} \right) - \dot{p}(\phi - \phi_0 + \frac{\partial\Psi^*}{\partial p}) - \frac{\partial\Psi^*}{\partial s} \dot{s} \geq 0. \quad (3.7)$$

Une évolution à  $\dot{s} = 0$  étant réversible, on obtient les lois suivantes pour le système :

$$\Sigma_0 = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\partial\Omega_0} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^0 dS = \frac{\partial\Psi^*}{\partial\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \phi - \phi_0 = -\frac{\partial\Psi^*}{\partial p} \quad (3.8)$$

qui sont à rapprocher des lois (1.32) obtenues au chapitre 1 pour un matériau poroélastique saturé.

La propagation de la fissure est définie par  $\dot{s} > 0$ . Elle est par nature dissipative. En introduisant la quantité  $G$  définie par :

$$G = -|\Omega_0| \frac{\partial\Psi^*}{\partial s}(p, \mathcal{E}), \quad (3.9)$$

et on a

$$\dot{D} = G\dot{s} \geq 0. \quad (3.10)$$

La loi de propagation la plus simple envisageable est une loi du type plastique parfaite, qui correspond en fait à une loi de propagation pour un matériau fragile. Cette loi s'écrit :

$$G - G_f \leq 0 \quad , \quad \dot{s} \geq 0 \quad , \quad (G - G_f)\dot{s} = 0, \quad (3.11)$$

avec  $G$  le taux de restitution d'énergie et  $G_f$  l'énergie de rupture qui est une propriété de la matrice solide. La puissance dissipée dans une propagation de la fissure s'écrit alors :

$$\dot{D} = G_f \dot{s}. \quad (3.12)$$

Pour cette loi, un raisonnement classique en mécanique de la rupture fragile [20, 38] permet de statuer sur le caractère stable ou instable de la propagation de la fissure pour un chargement réalisant la condition  $G = G_f$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } \frac{\partial G}{\partial s} = -|\Omega_0| \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial s^2} < 0 & : \text{Propagation stable} \\ \text{Si } \frac{\partial G}{\partial s} = -|\Omega_0| \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial s^2} > 0 & : \text{Propagation instable} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

La modélisation d'une loi de propagation de la fissure différente d'une loi de la

rupture fragile est évidemment possible. On s'intéresse dans la suite à décrire la propagation de la fissure dans le régime sous critique qui est un des principaux facteurs affectant la durée de vie des matériaux fragiles comme les roches.

### 3.3.2 Propagation sous critique des fissures

La propagation lente ou sous critique des fissures est un phénomène qui a lieu pour des valeurs du facteur d'intensité de contrainte inférieures à  $K_{IC}$ . Les travaux expérimentaux et théoriques de Wiederhorn et al. [54, 56], de Lawn [35], de Michalske et al. [41], d'Atkinson [2, 3] ont mis en évidence le rôle clef joué par l'eau ainsi que par l'environnement sur la propagation. On a en effet observé que la contrainte à la rupture d'un verre était trois fois plus faible dans l'air que dans le vide.

Il apparaît donc essentiel de tout d'abord comprendre les phénomènes, puis de les décrire en identifiant la loi de propagation d'une fissure en fonction des chargement qui lui sont appliqués avant de proposer une loi macroscopique pertinente pour ces matériaux.

Les travaux expérimentaux disponibles dans la littérature ont montré qu'il existe une relation entre la vitesse de propagation d'une fissure  $v$  et le facteur d'intensité de contrainte ou le taux de restitution d'énergie, pour des conditions d'environnement et de température données. Cette relation peut être représentée par un diagramme logarithmique à trois régions de croissance des fissures pour  $K_I < K_{IC}$ , suivant les matériaux et les conditions expérimentales (Fig. 3.4) [2, 3, 40, 54, 55].

Pour les faibles valeurs de  $K_I$ , on observe généralement qu'il existe une valeur du facteur seuil d'intensité de contrainte  $K_{I0}$  au-dessous duquel il n'y a pas de propagation de fissures. Ce seuil est un paramètre très important en pratique puisqu'il définit un domaine de travail parfaitement sûr.

Pour les valeurs de  $K_I$  légèrement supérieures à  $K_{I0}$ , la propagation se fait à une vitesse très lente. C'est le domaine I de la courbe  $v - K_I$  qui est attribué à la cinétique d'un mécanisme de type corrosion sous contrainte composé de deux phénomènes : d'abord le transfert de molécules d'eau jusqu'au fond de fissure, puis la réaction chimique entre ces molécules et le solide.

Lorsque  $v$  croît et atteint une valeur  $v_t$ , la vitesse de propagation du front de fissure est plus rapide que la vitesse d'avancée du fluide. La courbe  $v - K_I$  présente alors un plateau (domaine II) qui se produit dans des environnements gazeux (matériau

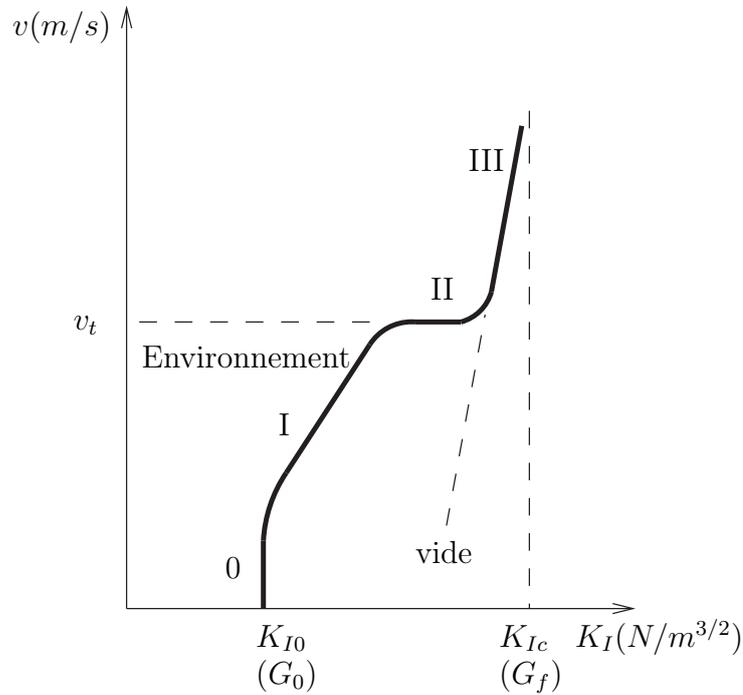


FIG. 3.4 – La propagation d'une fissure en régime sous critique

poreux sec). Il est caractérisé par une quasi-indépendance entre la vitesse de propagation des fissures et le facteur d'intensité de contrainte. Le transport de l'humidité du front au fond de la fissure réduit sensiblement la vitesse de propagation, qui devient contrôlée par la diffusion des molécules d'eau.

Enfin, le domaine III correspond à des vitesses de propagation de la fissure encore plus grandes. Il est indépendant de l'environnement et correspond aux conditions de propagation dans le vide. Ce domaine peut être interprété par le processus physique ou chimique intrinsèque de rupture du solide et est considéré comme le début de mouvement déterminé par le critère de rupture de Griffith.

Le domaine II peut être considéré comme une branche de connexion entre la rupture des liaisons dans l'eau (domaine I) et la rupture dans le vide (domaine III).

Ces trois régions sont généralement décrites par des lois en puissance de type :

$$v = AK_I^m \quad (3.14)$$

où  $A$  et  $m$  sont des constantes caractéristiques de chacune des régions et du matériau constitutif de la structure étudiée.

Comme nous l'avons discuté à la fin de la section 3.2, la fissure est modélisée par une interface circulaire de rayon  $a$  et elle se propage dans son plan. La vitesse de propagation de la fissure  $v$  ( $m/s$ ) est donc égale à la variation du rayon de la fissure  $\dot{a}$  :

$$v = \dot{a} = \frac{\dot{s}}{2\pi a} \quad (3.15)$$

En utilisant la relation (3.4) liant  $K_I$  et  $G$ , on montre sans difficulté que la loi (3.14) s'écrit sous la forme :

$$\dot{s} = \frac{2\pi a A}{\left(\frac{1 - \nu^{s2}}{E^s}\right)^{m/2}} G^{m/2}. \quad (3.16)$$

La loi (3.16) est valable pour les situations où le matériau constitutif de la matrice du matériau poreux est isotrope élastique linéaire. Il convient de noter de plus que cette loi combinée à la condition  $\dot{s} \geq 0$  assure la positivité de la dissipation  $D$  définie par l'équation (3.5). La loi de propagation sous critique s'énonce dans ce cas :

$$\begin{cases} \dot{s} = 0 & : \text{ si } G \leq G_0 \\ \dot{s} = \frac{2\pi a A}{\left(\frac{1 - \nu^{s2}}{E^s}\right)^{m/2}} G^{m/2} & : \text{ si } G_0 < G \leq G_{0c} \end{cases} \quad (3.17)$$

avec

$$G_0 = \frac{1 - \nu^{s2}}{E^s} K_{I0} \quad \text{et} \quad G_{0c} = G_f = \frac{1 - \nu^{s2}}{E^s} K_{Ic}. \quad (3.18)$$

### 3.4 Modélisation de l'endommagement d'un milieu poreux saturé. Approche par homogénéisation

On résume dans la section les calculs énergétiques pour un matériau fissuré saturé présentés dans [19, 20]. La méthode consiste à construire l'expression de la dissipation d'énergie du système en fonction des caractéristiques homogénéisées du matériau et des chargements macroscopiques appliqués au volume élémentaire représentatif. Partant de ces résultats de la littérature, on s'intéresse ensuite à la prise

en compte des lois de propagation sous critique dans le cadre d'une approche par changement d'échelle.

### 3.4.1 Milieu fissuré contenant une unique famille de fissures

Considérons maintenant le cas d'un milieu fissuré contenant une famille de fissures toutes parallèles entre elles. Comme dans les parties précédentes, le réseau de fissures est caractérisé par le paramètre de densité de fissures qui est ici une variable interne du matériau. Quand les fissures se propagent, le paramètre de densité de fissures varie. La relation (3.10) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = -\frac{\partial\Psi^*}{\partial s}\dot{s} = -\frac{\partial\Psi^*}{\partial\epsilon}\dot{\epsilon}. \quad (3.19)$$

La force thermodynamique associée à la propagation de fissures associée à la variable  $\epsilon$  s'écrit [19, 20] :

$$G_\epsilon = -\frac{\partial\Psi^*}{\partial\epsilon} = -\frac{1}{2}\mathbf{E} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial\epsilon} : \mathbf{E} + \frac{p^2}{2}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{N}\right) + p\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\epsilon} : \mathbf{E}. \quad (3.20)$$

En utilisant les équations (1.30), (1.31) et (1.32), on montre que la fonction  $G_\epsilon$  s'écrit :

$$G_\epsilon = -\frac{1}{2}(\mathbf{E} + p\mathbb{S}^s : \mathbf{I}) : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial\epsilon} : (\mathbf{E} + p\mathbb{S}^s : \mathbf{I}). \quad (3.21)$$

Soit encore :

$$G_\epsilon = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma} + p\mathbf{I}) : \mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial\epsilon} : \mathbb{S}^{hom} : (\boldsymbol{\Sigma} + p\mathbf{I}). \quad (3.22)$$

En utilisant la formule  $\mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^{hom} = \mathbb{I}$ , on montre sans difficulté la relation suivante :

$$\mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial\epsilon} : \mathbb{S}^{hom} = -\frac{\partial\mathbb{S}^{hom}}{\partial\epsilon}. \quad (3.23)$$

L'expression de  $G_\epsilon$  en fonction de la contrainte macroscopique s'écrit donc :

$$G_\epsilon = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma} + p\mathbf{I}) : \frac{\partial\mathbb{S}^{hom}}{\partial\epsilon} : (\boldsymbol{\Sigma} + p\mathbf{I}). \quad (3.24)$$

Le critère de rupture d'un matériau constitué d'une matrice fragile s'écrit donc dans

ce cas :

$$\begin{cases} G_\epsilon - G_c \leq 0 \\ \dot{\epsilon} \geq 0 \\ (G_\epsilon - G_c)\dot{\epsilon} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$G_c$  joue le même rôle que l'énergie de rupture  $G_f$ , mais n'est pas une propriété du matériau constitutif de la matrice solide.

La surface d'une fissure de rayon  $a$  est égale à  $s = \pi a^2$  tandis que  $\epsilon$  le paramètre de densité de fissures dans le cas d'une seule famille de fissures est égal à  $\mathcal{N}a^3$ , avec  $\mathcal{N}$  la densité volumique de fissures, on a donc :

$$\frac{d\epsilon}{ds} = \mathcal{N} \frac{3a}{2\pi}. \quad (3.26)$$

Le taux de restitution d'énergie  $G$  pour une fissure est calculé par :

$$G = -\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \Psi^*}{\partial s} = -\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial s} = \frac{3a}{2\pi} G_\epsilon. \quad (3.27)$$

On trouve facilement la relation liant  $G_c$  et  $G_f$  :

$$G_c = \frac{2\pi}{3} \frac{G_f}{a}. \quad (3.28)$$

En utilisant la relation liant  $G_c$  et  $\epsilon$ , on peut étudier les conditions de stabilité de propagation du système de fissures :

Si  $G_c$  ne dépend pas de la valeur de  $\epsilon$  :

$$\frac{\partial G_\epsilon}{\partial \epsilon}(\mathbf{E}, p, \epsilon) = -\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \epsilon^2}(\mathbf{E}, P, \epsilon) < 0. \quad (3.29)$$

Si  $G_c$  dépend de la valeur de  $\epsilon$  :

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \epsilon^2}(\mathbf{E}, p, \epsilon) + G'_c > 0. \quad (3.30)$$

### Loi de propagation sous critique

En introduisant les équations (3.26) et (3.27) dans (3.17), la loi de propagation sous critique s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = 0 & : \text{ si } G_\epsilon \leq G_{\epsilon 0} \\ \dot{\epsilon} = M\epsilon^{(m+4)/6}G_\epsilon^{m/2} & : \text{ si } G_{\epsilon 0} < G_\epsilon \leq G_c \end{cases} \quad (3.31)$$

avec

$$G_{\epsilon 0} = \frac{2\pi}{3a} \frac{1 - \nu^{s2}}{E^s} K_{I0} \quad , \quad M = 3A \left( \frac{3E^s}{2\pi(1 - \nu^{s2})} \right)^{m/2} \frac{1}{\mathcal{N}^{(m-2)/6}} \quad (3.32)$$

et  $G_\epsilon$  est calculé soit par l'équation (3.21) soit par (3.24). Il convient de noter que  $M$  est un paramètre de la structure tandis que  $G_{\epsilon 0}$  joue le même rôle que l'énergie  $G_0$  est un seuil très important définissant un domaine de travail parfaitement sûr. Comme dans la situation fragile ce n'est pas une propriété du matériau constitutif de la matrice solide.

### 3.4.2 Distribution isotrope de l'orientation des fissures

On s'intéresse maintenant au cas d'un matériau fissuré saturé isotrope soumis à un chargement macroscopique isotrope ( $\mathbf{E} = E\mathbf{I}$ ,  $\Sigma = \Sigma\mathbf{I}$ ). La propagation de l'endommagement est caractérisée donc par un seul paramètre de densité  $\epsilon$ . Les expressions (3.21), (3.22) et (3.25) représentent toujours le critère de rupture dans ce cas avec le tenseur d'élasticité homogénéisé et le tenseur des complaisances homogénéisés calculés dans le cas isotrope.

En utilisant l'équation (1.67), on montre que,  $G_\epsilon$  s'écrit dans le cas d'une sollicitation en déformation homogène dans la situation diluée :

$$G_\epsilon(\mathbf{E}, p) = \frac{k^s Q_1}{2} \left( 3E + \frac{p}{k^s} \right)^2. \quad (3.33)$$

En utilisant l'équation (1.70), on montre que,  $G_\epsilon$  s'écrit dans le cas de la sollicitation en déformation homogène pour l'estimation de Mori-Tanaka :

$$G_\epsilon(\mathbf{E}, p) = \frac{k^s Q_1}{2(1 + Q_1\epsilon)^2} \left( 3E + \frac{p}{k^s} \right)^2. \quad (3.34)$$

En examinant les deux équations (1.67), (1.70) et en utilisant le fait que  $\epsilon^2 \approx 0$ , on trouve que les expressions de  $\mathbb{S}^{hom}$  pour les deux schémas dilué et de Mori-Tanaka

sont identiques et s'écrivent :

$$\mathbb{S}^{hom} = \left( \mathbb{I} + \epsilon \mathbb{Q} \right) : \mathbb{S}^s. \quad (3.35)$$

$G_\epsilon(\boldsymbol{\Sigma}, p)$  est donc identique pour les deux schémas et s'écrit :

$$G_\epsilon(\boldsymbol{\Sigma}, p) = \frac{Q_1}{2k^s} (\boldsymbol{\Sigma} + p)^2. \quad (3.36)$$

pour ce qui concerne la propagation sous critique, les équations (3.31) et (3.32) représentent toujours le critère de propagation sous critique dans ce cas avec  $G_\epsilon$  qui est calculé soit par l'équation (3.33) soit par l'équation (3.34) dans les situations de déformation macroscopique imposée soit par l'équation (3.36) dans les situations de contrainte macroscopique imposée.

### 3.5 Rupture des matériaux fragiles non saturés

On s'intéresse maintenant aux critères de rupture d'un milieu fissuré en condition non saturée. Pour mener cette étude, on s'appuie à la fois sur la solution analytique obtenue pour la validation de l'approche par changement d'échelle du comportement des matériaux méso-fissurés en condition non saturée, détaillée à la section 2.3, et sur l'approche reposant sur une généralisation du raisonnement énergétique de Griffith pour le cas saturé décrite dans la section 3.4 .

Dans le paragraphe 3.5.1, on établit à l'aide d'un argument énergétique la formule permettant de calculer le taux de restitution de l'énergie en fonction de la contrainte équivalente dans les fissures  $\boldsymbol{\sigma}^p$ . On calcule ensuite le facteur d'intensité de contrainte en utilisant la formule d'Irwin (3.4), puis on compare le résultat obtenu au facteur d'intensité de contrainte calculé en utilisant l'approche analytique (équation (2.88)). Dans les paragraphes 3.5.2 et 3.5.3 concernant l'approche analytique, compte tenu des difficultés techniques à résoudre pour traiter le problème global, on cherche à décrire la propagation de fissures non par l'approche énergétique caractérisée par le taux de restitution d'énergie mais par la singularité de contrainte caractérisée par le facteur d'intensité de contrainte calculé en admettant l'hypothèse de superposition :

$$K_I = K_I^s + K_I^p, \quad (3.37)$$

où  $K_I^s$  est le facteur d'intensité de contrainte dans le cas sec, tandis que  $K_I^p$  est le facteur d'intensité de contrainte engendré par les effets locaux des pressions des fluides (formule (2.88)). Il convient de rappeler que dans cette approche, les fissures se propagent uniquement selon le mode  $I$ . Le critère de rupture est donc contrôlé par l'équation (3.2).

### 3.5.1 Taux de restitution d'énergie en pointe d'une fissure non saturée

L'objectif visé ici est d'estimer le taux de restitution d'énergie en pointe d'une fissure localisée au sein d'une matrice solide élastique linéaire infinie soumise à un chargement macroscopique homogène en déformation à l'infini. La configuration du système est identique à celle traitée au paragraphe 2.2.3.1.1. On s'intéresse ici de nouveau à la situation où toutes les fissures sont identiques et parallèles entre elles et la contrainte moyenne  $\boldsymbol{\sigma}^p$  (voir les équations (2.20) et (2.21)) est la même dans toutes les fissures. Le problème étant linéaire, le chargement est défini par la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et la contrainte moyenne équivalente  $\boldsymbol{\sigma}^p$  dans chaque fissure.

On s'intéresse tout d'abord à des évolutions réversibles et isothermes du système. Dans de telles évolutions, la puissance des efforts extérieurs est égale à la puissance de déformation de la phase solide, égale elle-même à la dérivée par rapport au temps de l'énergie élastique  $|\Omega_0|\dot{\Psi}$  stockée dans la phase solide. On a donc

$$\dot{W}_{ext} = |\Omega_0|\dot{\Psi}. \quad (3.38)$$

Avec le chargement défini ci-dessus ( $\mathbf{E}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^p$ ),  $\dot{W}_{ext}$  s'écrit :

$$\dot{W}_{ext} = \int_{\partial\Omega_0} \underline{\dot{\xi}} \cdot \underline{T} dS + \int_{\partial\Omega_{f_0}} \underline{\dot{\xi}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^p \cdot \underline{n} dS = |\Omega_0|(\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \phi_0 \boldsymbol{\sigma}^p : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle^f). \quad (3.39)$$

En reportant (3.39) dans (3.38), on obtient immédiatement :

$$\dot{\Psi} = (\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \phi_0 \boldsymbol{\sigma}^p : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle^f) \quad (3.40)$$

Comme dans le cas saturé,  $\Psi$  ne joue pas le rôle de potentiel thermodynamique pour une évolution où la précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$  est imposée dans les fissures. On introduit la

densité de potentiel thermodynamique  $\Psi^*(\mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}^p)$  défini comme la différence entre la densité d'énergie élastique dans le solide et le travail de la précontrainte moyenne appliquée dans les fissures :

$$|\Omega_0| \Psi^* = |\Omega_0| \Psi + \int_{\Omega_{f_0}} \boldsymbol{\sigma}^p : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega. \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow \Psi^* = \Psi + \phi_0 \boldsymbol{\sigma}^p : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f. \quad (3.42)$$

On a donc

$$\dot{\Psi}^* = \dot{\Psi} + \phi_0 \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f + \phi_0 \boldsymbol{\sigma}^p : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle^f = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + \phi_0 \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f. \quad (3.43)$$

En reportant l'équation (2.42) dans (3.43), on obtient les expressions suivantes pour les quantités  $\Psi^*$  et  $\Psi$  :

$$\Psi^* = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\sigma}^p + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^p, \quad (3.44)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (3.45)$$

Quand on s'intéresse à des évolutions irréversibles du système (propagation des fissures), les quantités ( $\mathbf{E}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^p$ ) et le paramètre de densité de fissure  $\epsilon$  constituent les variables naturelles argumentant le potentiel thermodynamique du système. L'inégalité de Clausius Duhem s'écrit alors :

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = \dot{\mathbf{E}} : \left( \boldsymbol{\Sigma} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{E}} \right) - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p : \left( \phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^f - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}^p} \right) - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (3.46)$$

En reproduisant exactement le même raisonnement que celui détaillé en début de ce chapitre pour le cas d'une unique fissurée saturée par un fluide à la pression  $p$ , on montre que dans la situation étudiée, la force thermodynamique liée à la propagation de la variable d'endommagement  $\dot{\epsilon} \geq 0$  s'écrit :

$$G_\epsilon = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbf{E} - \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^p - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^p : \frac{\partial \mathbb{N}}{\partial \epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^p \quad (3.47)$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbf{E} - \boldsymbol{\sigma}^p : \frac{\partial \mathbb{B}^T}{\partial \epsilon} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^p : \frac{\partial \mathbb{N}}{\partial \epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^p \quad (3.48)$$

On a montré au chapitre 2 (équation 2.43) que le tenseur  $\mathbb{B}$  était relié aux quantités  $\mathbb{S}^s$  et  $\mathbb{C}^{hom}$  :

$${}^T\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{S}^s : \mathbb{C}^{hom}. \quad (3.49)$$

On a donc :

$$\frac{\partial {}^T\mathbb{B}}{\partial \epsilon} = -\mathbb{S}^s : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon}. \quad (3.50)$$

De la même façon, on a montré :

$$\mathbb{N} = {}^T\mathbb{N} = {}^T(\phi_0\mathbb{I} - \mathbb{B}) : \mathbb{S}^s. \quad (3.51)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \mathbb{N}}{\partial \epsilon} = \mathbb{S}^s : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}^s. \quad (3.52)$$

En reportant les deux égalités (3.50) et (3.52) dans (3.48), on obtient :

$$\Rightarrow G_\epsilon = -\frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbb{S}^s : \boldsymbol{\sigma}^p) : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : (\mathbf{E} - \mathbb{S}^s : \boldsymbol{\sigma}^p) \quad (3.53)$$

En utilisant la loi de comportement  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \mathbb{B} : \boldsymbol{\sigma}^p$  (équation (2.42)), on obtient une autre expression pour  $G_\epsilon$  en fonction de  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^p$  :

$$G_\epsilon = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma}^p) : \mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}^{hom} : (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma}^p) \quad (3.54)$$

Dans le cas d'un matériau poreux à phase solide élastique fragile, le critère de rupture s'énonce :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_\epsilon - G_c \leq 0 \\ \dot{\epsilon} \geq 0 \\ (G_\epsilon - G_c)\dot{\epsilon} = 0 \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Avec  $G_\epsilon$  défini par l'équation (3.53) pour un chargement à déformation macroscopique imposée, ou par l'équation (3.54) dans la situation où la contrainte macroscopique

rique homogène imposée.  $G_c$  est toujours défini par l'équation (3.28).

Lorsque la contrainte macroscopique est nulle ( $\Sigma = 0$ ), l'expression de  $G_\epsilon$  devient :

$$G_\epsilon = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}^{hom} : \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (3.56)$$

En utilisant l'équation (3.27), le taux de restitution d'énergie  $G$  pour une fissure est donné par :

$$G = -\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \Psi^*}{\partial s} = -\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial s} = -\frac{3a}{4\pi} \boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}^{hom} : \boldsymbol{\sigma}^p. \quad (3.57)$$

En reportant les relations (2.20), (2.21) et (2.45) dans (3.57), on trouve :

$$G = \frac{4a(1-\nu^{s2})}{\pi E^s} \sigma_p^2. \quad (3.58)$$

En supposant que la pression dans la phase gazeuse est nulle et en utilisant la formule d'Irwin (3.4), le facteur d'intensité de contrainte en mode I pour une fissure s'écrit :

$$K_I^x = -2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sigma_p = -2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\gamma^3}{a^3 X^3 p_c^2}. \quad (3.59)$$

Il nous faut noter que dans la situation où le liquide contenu dans la fissure est mouillant vis à vis du solide, le liquide occupe un domaine de révolution en pointe de fissure. En conséquence, la pression régnant dans la phase liquide est négative et l'effort de traction exercé par la phase liquide sur les lèvres de la fissure provoque une diminution du facteur d'intensité de contrainte par rapport à la situation où aucun effort n'est exercé sur la fissure. C'est la raison pour laquelle, on prend la valeur négative dans l'équation (3.59).

Le facteur d'intensité de contrainte qui est calculé dans la formule (2.88) selon l'approche analytique s'écrit dans la même situation :

$$K_I^b = -2\sqrt{\frac{a}{\pi}} p_c \sqrt{1-\alpha^2}. \quad (3.60)$$

Dans la suite, on compare les deux expressions  $K_I^x$  et  $K_I^b$  dans deux situations différentes : une sans prise en compte du couplage géométrique et une avec prise en compte du couplage géométrique. On utilise de nouveau les grandeurs adimensionnelles utilisées au chapitre 2 (équation (2.114)) :

$$\bar{E} = \frac{E}{E^*}, \quad E^* = \frac{4\pi\epsilon}{9}X_0, \quad \bar{p}_c^b = \frac{p_c B}{X_0} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_b = \frac{\gamma B}{a_0 X_0^2}. \quad (3.61)$$

Dans le cas sans couplage, les équations décrivant la relation entre la pression capillaire et la saturation du milieu poreux (2.14) et (2.105) sont identiques pour les deux approches. Elle s'écrivent :

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{\gamma}{a X_0 p_c} \frac{1}{\bar{p}_c^b} = \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c^b}. \quad (3.62)$$

Les deux facteurs d'intensité de contrainte en mode I s'écrivent respectivement :

$$\bar{K}_I^x = \frac{K_I^x}{K_I^*} = -\frac{\bar{\gamma}_b^3}{\bar{p}_c^{b^2}} \quad \text{et} \quad \bar{K}_I^b = \frac{K_I^b}{K_I^*} = -\bar{\gamma}_b \quad \text{avec} \quad K_I^* = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{X_0}{B}. \quad (3.63)$$

L'équation (3.63) n'est valide que dans le cas non saturé quand la phase gazeuse a pénétrée dans les fissures. Avant d'atteindre l'état non saturé, l'espace poreux est saturé par la phase liquide avec  $\sigma^b = p_c$ . Le facteur d'intensité de contrainte vaut dans ce cas :

$$\bar{K}_I^s = \frac{K_I}{K_I^*} = -\bar{p}_c^b. \quad (3.64)$$

Dans le cas avec couplage géométrique, en reportant les résultats du paragraphe 2.3.3 décrivant l'effet des non linéarités géométriques des fissures sur les relations pression capillaire, saturation et déformation dans les deux équations (3.59) et (3.60), on montre les facteurs d'intensité de contrainte en mode I deviennent :

$$\bar{K}_I^x = -\frac{\bar{\gamma}_b^3}{(1 + \bar{E})^3} \frac{1}{\bar{p}_c^{b^2}} \quad (3.65)$$

avec  $\bar{E}$  fonction de  $\bar{p}_c^b$  (équation (2.130)) et

$$\bar{K}_I^b = -\bar{p}_c^b \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (3.66)$$

avec  $\bar{p}_c^b$  solution de l'équation (2.127) ( $\bar{p}_c^b = \bar{p}_{c2}^b$ ).

On rappelle que dans l'état saturé, le facteur d'intensité de contrainte est toujours donné par l'équation (3.64).

La Fig. 3.5 résume la comparaison entre les deux approches. Les points P1, P2, P3, P4 ont été présentées dans la Fig. 2.19. P1, P2, P3, P4 sont respectivement les points

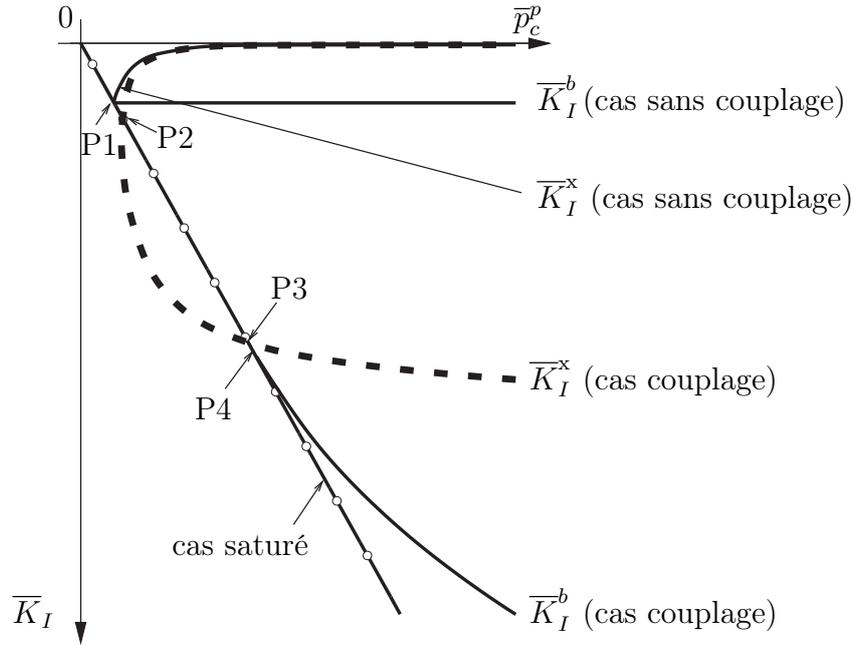


FIG. 3.5 – Facteur d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure non saturée - cas d'une contrainte macroscopique nulle.

d'entrée d'air selon l'approche linéaire (sans couplage géométrique) (P1), l'approche par contrainte équivalente (P2 et P3) et l'approche utilisant les formules analytiques (P4). On constate que pour le cas sans couplage géométrique,  $\bar{K}_I^b$  est constant tandis que  $\bar{K}_I^x$  tend vers zéro quand la pression capillaire tend vers l'infini. Pour le cas avec prise en compte du couplage géométrique, la valeur de  $\bar{K}_I^b$  est toujours supérieure à celle de  $\bar{K}_I^x$  et l'écart est de plus en plus grand quand la pression capillaire augmente. On en déduit que l'approche par la contrainte équivalente, si elle est plus simple et qu'elle donne de bons résultats pour estimer le comportement du milieu poreux non saturé (chapitre 2), ne permet pas d'étudier la propagation de l'endommagement en situation non saturée, puis que les valeurs de  $K_I$  ne sont pas bien estimées. Il est donc possible de proposer une façon habile de travailler. On calcule les relations ( $\Sigma$ ,  $\mathbf{E}$  et  $p_c$ ) en utilisant l'approche par la contrainte équivalente et les grandeurs caractérisant la rupture ( $K_I$  ou  $G$ ) avec les résultats de l'approche analytique généralisée de Bui. Pour comprendre mieux le comportement de ce matériau, on s'intéresse dans la suite à la situation plus générale où l'orientation des fissures est distribuée de façon aléatoire dans le VER de milieu fissuré et le matériau est soumis à une déformation

homogène à l'infini  $\mathbf{E}$  et à la pression capillaire  $p_c$ . Les résultats sont calculés en utilisant l'approche analytique généralisée de Bui dans deux situations différentes : le cas de fissures n'interagissant pas entre elles et le cas de fissures interagissant entre elles.

### 3.5.2 Le cas non interagissant - schéma dilué

On s'intéresse à la situation où les fissures sont toutes de même dimension, admettent une répartition d'orientation isotrope et sont toutes dans le même état hydrique (même valeur de la pression capillaire, même morphologie de répartition des phases fluides au sein des fissures). Le chargement est décrit par la déformation macroscopique isotrope  $\mathbf{E} = E\mathbf{I}$  et la pression capillaire  $p_c$ .

La première loi de comportement du milieu fissuré reliant la contrainte macroscopique au chargement imposé est l'équation (2.109). Dans le cas général où la contrainte macroscopique est non nulle, cette équation s'écrit :

$$\Sigma = 3k^s(1-b)E + b\sigma^b = 3k^s(1-b)E + bp_c(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.67)$$

En utilisant les équations (3.25), (3.28) et (3.33) on obtient l'expression de  $G_\epsilon$  dans le cas sec ( $p = 0$ ) pour cette configuration isotrope :

$$G_\epsilon(\mathbf{E}) = \frac{k^s Q_1}{2} (3E)^2 \leq \frac{2\pi G_f}{3} \frac{G}{a}. \quad (3.68)$$

En appliquant la formule d'Irwin (3.4), le facteur d'intensité de contrainte dans le cas sec  $K_I^s$  vaut :

$$K_I^s = \sqrt{\frac{E^s}{1-\nu^{s2}} \frac{3a}{2\pi} G_\epsilon(\mathbf{E})} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} 3k^s E. \quad (3.69)$$

En reportant les deux équations (2.88) et (3.69) dans l'équation (3.37) obtenue en considérant la répartition locale des phases fluides au voisinage de la pointe de fissure, on obtient l'expression du facteur d'intensité de contrainte pour ce problème :

$$K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} (3k^s E - p_c \sqrt{1-\alpha^2}). \quad (3.70)$$

Pour présenter les résultats on utilise de nouveau des formules adimensionnées. On utilise les grandeurs adimensionnées définies par (2.114), (3.63) et on introduit la

contrainte macroscopique adimensionnée  $\bar{\Sigma}^b = \Sigma B / X_0$ . Deux situations, sans couplage et avec couplage géométrique, sont examinées dans la suite. L'équation (3.62) décrit la relation saturation de la fissure-pression capillaire pour le cas sans couplage géométrique tandis que dans le cas avec couplage géométrique cette relation est décrit par (2.125). Les expressions adimensionnées des deux équations maîtresses pour le problème (3.67) et (3.70) qui représentent les relations  $\Sigma$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $p_c$  et permettent le calcul de  $K_I$  s'écrivent respectivement :

*Cas sans couplage géométrique*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c^b} \\ \bar{\Sigma}^b = \frac{b(1-b)\pi}{2} \bar{E} + b\bar{p}_c^b(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \\ \bar{K}_I = \frac{\pi}{2} b\bar{E} - \bar{p}_c^b \sqrt{1 - \alpha^2} \end{array} \right. \quad (3.71)$$

*Cas avec couplage géométrique*

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + b\bar{E}) \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2}{\pi} \bar{p}_c^b(1 - \alpha) = \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c^b} \\ \bar{\Sigma}^b = \frac{b(1-b)\pi}{2} \bar{E} + b\bar{p}_c^b(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \\ \bar{K}_I = \frac{\pi}{2} b\bar{E} - \bar{p}_c^b \sqrt{1 - \alpha^2} \end{array} \right. \quad (3.72)$$

où les grandeurs adimensionnées utilisées dans les équations (3.71) et (3.72) s'écrivent :

$$\bar{E} = \frac{E}{4\pi\epsilon} \frac{1}{9} X_0, \quad \bar{p}_c^b = \frac{p_c B}{X_0}, \quad \bar{\gamma}_b = \frac{\gamma B}{aX_0^2}, \quad \bar{\Sigma}^b = \frac{\Sigma B}{X_0} \quad \text{et} \quad \bar{K}_I = \frac{K_I}{2\sqrt{\frac{a}{\pi} X_0} B} \quad (3.73)$$

A titre d'illustration, on considère ici un matériau avec  $b = 0.5$  et  $\bar{\gamma}_b = \pi/10$ . On va maintenant étudier la réponse du matériau quand il est soumis à un trajet de chargement se composant des deux étapes définies comme suit :

*Cas sans couplage géométrique*

**Etape 1 :** Le matériau est initialement dans l'état de référence saturé à pression capillaire et déformation macroscopique nulle. On augmente la pression capillaire jusqu'à la valeur  $\bar{p}_c^b = \bar{p}_c^d$  en gardant la déformation macroscopique nulle ( $\bar{E} = 0$ ). On choisit la valeur de  $\bar{p}_c^d$  supérieure à  $\bar{p}_c^{ea} = \bar{\gamma}_b$  (correspondant  $p_c^{ea} = \gamma/aX_0$  décrit dans le paragraphe 2.2.3.2). Tant que la pression capillaire reste inférieure à la pression  $p_c^{ea}$ , le matériau reste saturé par la phase liquide à la pression  $p_\ell = -p_c$ . La contrainte  $\Sigma$  est une fonction linéaire croissante de la pression capillaire  $p_c$  tandis que le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  est une fonction linéaire décroissante de la pression capillaire  $p_c$  (trajet (c) sur les Fig. 3.6 (A) et Fig. 3.6 (B)). Pour les valeurs de la pression capillaire supérieures à  $\bar{p}_c^{ea}$ , l'état du matériau est non saturé, la contrainte  $\Sigma$  diminue rapidement vers zéro tandis que  $K_I$  reste constant (trajet (b) sur les Fig. 3.6 (A) et Fig. 3.6 (B)).

**Etape 2 :** On augmente la déformation macroscopique en bloquant la pression capillaire ( $\bar{p}_c^b = \bar{p}_c^d$ ). Le matériau est dans un état presque sec, la contrainte macroscopique  $\Sigma$  et le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  sont des fonctions linéaires croissantes de la déformation macroscopique  $E$  (trajet (b) sur les Fig. 3.6 (C) et Fig. 3.6 (D)). Les trajets (d) sur les Fig. 3.6 (C) et Fig. 3.6 (D)) représentent les relations  $\Sigma - E$  et  $K_I - E$  pour le cas sec. On trouve que les trajets (b) et (d) sont parallèles et la distance entre les deux lignes est très petite.

*Cas avec couplage géométrique*

**Etape 1 :** On constate que quand  $\alpha = 0$  (correspondant au moment où la phase gazeuse entre dans les fissures), il existe deux valeurs de  $\bar{p}_c^b$  solutions de l'équation (2.125) (points (1) et (2) sur les Fig. 3.6 (A) et Fig. 3.6 (B)). On montre sans difficulté que la valeur de  $\alpha$  est toujours négative pour toutes les valeurs  $\bar{p}_c^b$  comprises entre ces deux valeurs. La phase gazeuse pénètre donc dans la fissure au point (2), le matériau est non saturé. La contrainte macroscopique  $\Sigma$  augmente jusqu'à un pic puis diminue (trajet (a) sur la Fig. 3.6 (A)) tandis que le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  est une fonction non linéaire décroissante de la pression capillaire  $p_c$  (trajet (a) sur la Fig. 3.6 (B)).

**Etape 2 :** Les courbes (a), (b), (c) et (d) sur les Fig. 3.6 (C) et Fig. 3.6 (D) représentent respectivement le matériau à l'état non saturé avec prise en compte du couplage géométrique, non saturé sans prise en compte du couplage géométrique, saturé et sec. On constate que les lignes (c) sont des tangentes aux courbes (a).

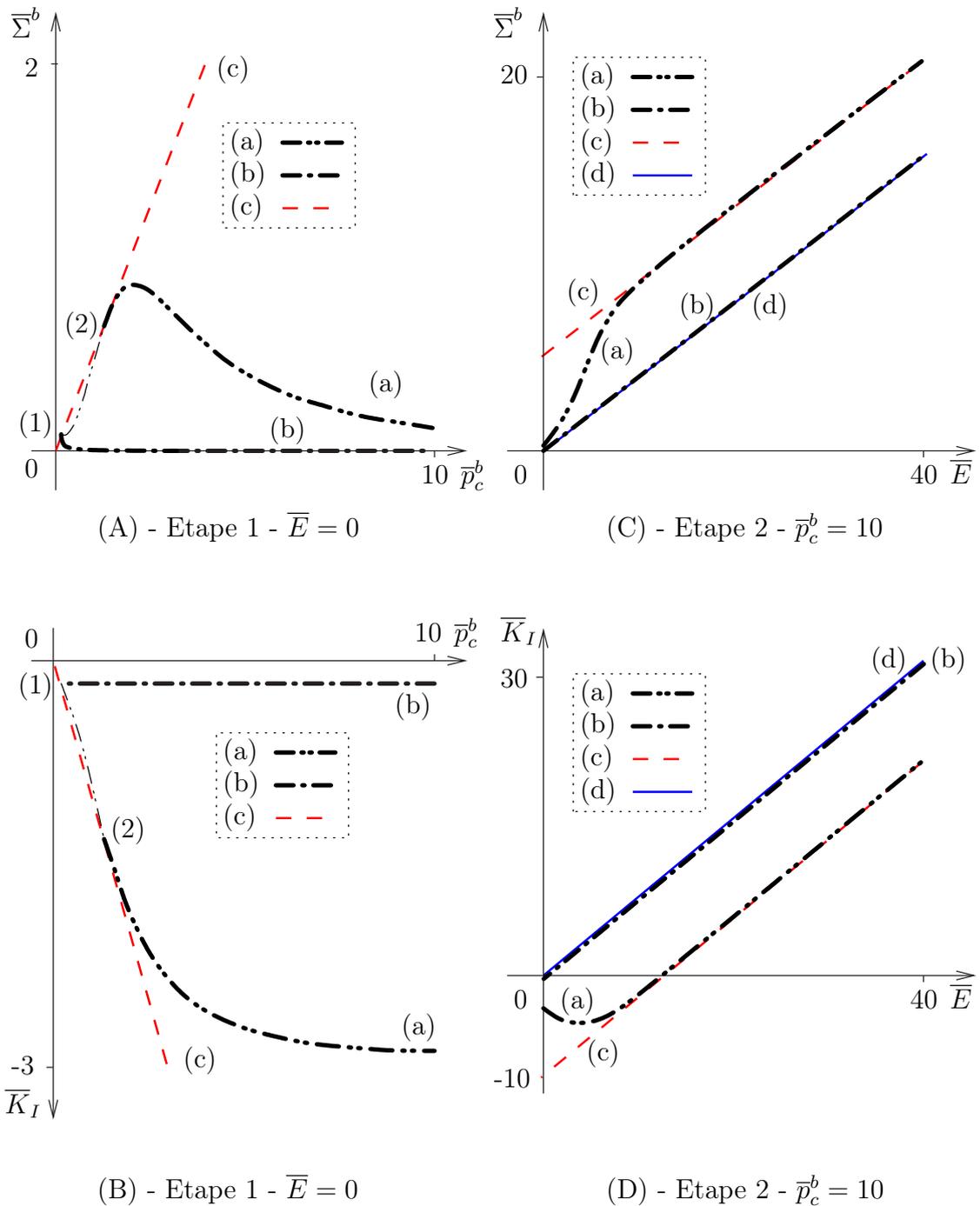


FIG. 3.6 – Comportement du milieu fissuré non saturé isotrope - cas dilué ((a) : cas non saturé avec couplage; (b) : cas non saturé sans couplage; (c) : cas saturé; (d) : cas sec)

C'est-à-dire que lorsque l'on prend en compte le couplage géométrique, quand on augmente la déformation macroscopique  $E$ , le matériau retrouve l'état saturé dans un premier temps, puis dans un deuxième temps un comportement saturé est observé quand la valeur de  $E$  est plus élevée.

Il convient de rappeler ici que l'on peut prédire le comportement saturé ou sec du matériau (courbes (c) et (d) sur la Fig. 3.6) en faisant soit  $\alpha = 0$  et  $p_c = -p_\ell$  (cas saturé) soit  $\alpha = 1$  (cas sec) dans le deuxième et troisième équations de (3.71) et (3.72).

En résumé, on constate que, quand la valeur de  $E$  est plus élevée et la pression  $p_c$  est fixée, le matériau reste toujours à l'état saturé. Ce résultat n'est pas rigoureusement exact. En effet, on sait que le rapport d'aspect des fissures augmente avec l'augmentation de la déformation  $E$  tandis que l'approche analytique utilisée dans la situation avec couplage géométrique n'est valable qu'aux très petites valeurs du rapport d'aspect (rigoureusement égal à zéro en fait). C'est la raison pour laquelle, on élimine la solution avec prise en compte du couplage géométrique (courbes (a) sur les Fig. 3.6 (C) et Fig. 3.6 (D)) dans la situation où le chargement macroscopique est le plus élevé. On ne retient donc que la solution sans prise en compte du couplage géométrique (courbes (b) sur les Fig. 3.6 (C) et Fig. 3.6 (D)).

### 3.5.3 Le cas interagissant - schéma de Mori-Tanaka

Dans cette section, en utilisant la technique d'estimation de Mori-Tanaka décrite au paragraphe 1.1.4.2, on propose d'estimer les caractéristiques globales d'un matériau contenant différentes familles de fissures non saturées interagissantes entre elles. Le chargement est toujours décrit par  $\mathbf{E}$  la déformation macroscopique au contour du VER et  $\boldsymbol{\sigma}^p$  le champ de précontrainte au sein des fissures. Il est important de souligner que la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$  utilisée ici ne joue que le rôle de « représentant » du champ de pression des phases fluides ( $p_g$  et  $p_\ell$ ) au sein des fissures. Dans la suite, comme au paragraphe 2.3.2, on s'appuie sur la solution analytique en déplacement (équations (2.87) et suivantes) pour calculer le travail concernant les lois de comportement du matériau (termes contenant  $\boldsymbol{\sigma}^p$  sont négligés).

Nous considérons maintenant une fissure comme une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice solide homogène infinie de module  $\mathbb{C}^s$  soumise à l'infini à une déformation auxiliaire  $\mathbf{E}_0$  à déterminer et au champ de précontrainte au sein des fissures

$\sigma^p$ . On note  $(P_a)$ , ce problème auxiliaire dans la suite du paragraphe. Le problème consiste donc à choisir la valeur de  $\mathbf{E}_0$  qui gère l'interaction entre les fissures. Il nous faut donc établir la déformation moyenne dans chaque fissure  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{fi}$ .

Pour cela, on décompose le problème auxiliaire  $(P_a)$  en deux problèmes plus simples notés respectivement  $(P'_a)$  et  $(P''_a)$  (même démarche que celle décrite au début du paragraphe 2.3.2).

1.  $\mathbf{E}_0, \boldsymbol{\sigma}^p = 0$
2.  $\mathbf{E}_0 = 0, \boldsymbol{\sigma}^p$

Le premier sous-problème a été traité aux paragraphes 1.1.3.3 et 1.1.4.2, la déformation moyenne solution du premier sous-problème élémentaire  $(P'_a)$  de la fissure s'écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle^{fi} = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \mathbf{E}_0. \quad (3.74)$$

La déformation moyenne solution du deuxième sous-problème élémentaire  $(P''_a)$  de la fissure a été calculée au paragraphe 2.3.2.1. En généralisant les relations décrites dans ce paragraphe, l'expression de  $\phi_0^i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi}$  dans le repère local s'écrit :

$$\phi_0^i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} = \phi_0^i \varepsilon_{33}^i \underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i = -\frac{8}{3} \varepsilon^i B \sigma_i^b \underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i \quad (3.75)$$

avec

$$\sigma_i^b = p_c (1 - \alpha_i^2)^{\frac{3}{2}} - p_g. \quad (3.76)$$

On a donc

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} = -\frac{2}{\pi X_0^i} B \sigma_i^b \underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i. \quad (3.77)$$

$B$  est toujours défini par la formule (2.91).

La déformation moyenne de la  $i$ ème famille de fissures est alors égale à :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{fi} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle^{fi} + \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \mathbf{E}_0 - \frac{2}{\pi X_0^i} B \sigma_i^b \underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i. \quad (3.78)$$

Il convient de rappeler ici que la déformation moyenne de la  $i$ ème famille de fissures est égale à celle dans une fissure.

La déformation auxiliaire  $\mathbf{E}_0$  est déterminée en utilisant la condition de moyenne  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}$  avec  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^s = \mathbf{E}_0$ . Sachant que :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E} = (1 - \phi_0) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^s + \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{fi}. \quad (3.79)$$

On en déduit que

$$\mathbf{E} = (1 - \phi_0) \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^n \phi_0^i \left( (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i^E)^{-1} : \mathbf{E}_0 + \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} \right). \quad (3.80)$$

L'inversion de (3.80) fournit la valeur cherchée de  $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_0 = \left( (1 - \phi_0) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i^E)^{-1} \right)^{-1} : \left( \mathbf{E} - \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} \right). \quad (3.81)$$

La première loi de comportement macroscopique reliant la contrainte et la déformation s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^p \rangle = (1 - \phi_0) \langle \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s \rangle + \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi} \quad (3.82)$$

$$= (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi}. \quad (3.83)$$

En reportant l'équation (3.81) dans (3.83), on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} = (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : & \left( (1 - \phi_0) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i^E)^{-1} \right)^{-1} : \left( \mathbf{E} - \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

En reportant les approximations décrites par l'équation (2.107), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \phi_0^i \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^{fi} \ll \sum_{i=1}^n -\phi_0^i \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi} \simeq (1 - \phi_0)^2 \sum_{i=1}^n -\phi_0^i \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle^{fi}. \quad (3.85)$$

On peut donc négliger la partie de la précontrainte moyenne dans la formule (3.84). En utilisant le fait que le tenseur d'élasticité homogène  $\mathbb{C}^{hom}$  s'écrit dans ce cas :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - \phi_0)\mathbb{C}^s : \left( (1 - \phi_0)\mathbb{I} + \sum_{i=1}^n \phi_0^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1}, \quad (3.86)$$

on obtient donc finalement :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \mathbb{C}^{hom} : \sum_{i=1}^n \phi_0^i < \boldsymbol{\varepsilon}'' >^{fi}, \quad (3.87)$$

où  $< \boldsymbol{\varepsilon}'' >^{fi}$  est toujours défini par la relation (3.77). De plus, il convient de noter que les deux équations (3.86) et (1.48) sont identiques ; la valeur de  $\mathbb{C}^{hom}$  ne dépend donc toujours pas de la saturation du milieu.

On propose d'illustrer ces résultats en simulant le comportement d'un matériau fissuré non saturé isotrope soumis à une déformation isotrope  $\mathbf{E} = EI$ . On choisit de prendre la pression du gaz comme référence ( $p_g = 0$ ). En utilisant les équations (1.68), (1.70), (3.75) et (3.77), les relations (3.81) et (3.87) deviennent respectivement :

$$E_0 = \frac{1}{1+b}E + \frac{b}{1+b} \frac{p_c(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{3k^s}, \quad (3.88)$$

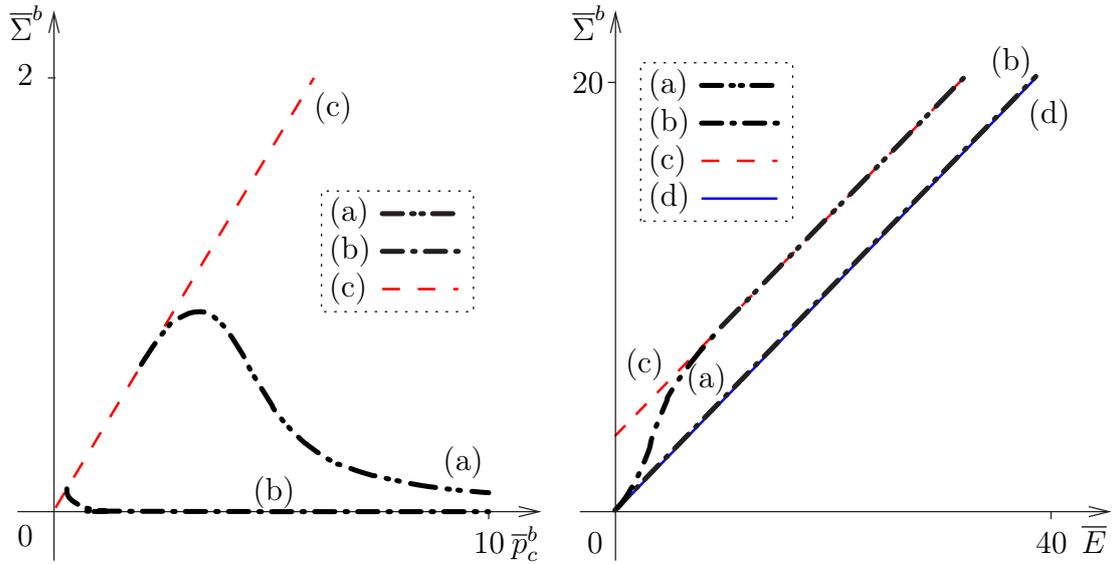
et

$$\Sigma = \frac{3k^s}{1+b}E + \frac{b}{1+b}p_c(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.89)$$

En remplaçant  $E$  par  $E_0$  dans l'équation (3.70), on obtient que le facteur d'intensité de contrainte pour le schéma de Mori-Tanaka s'écrit :

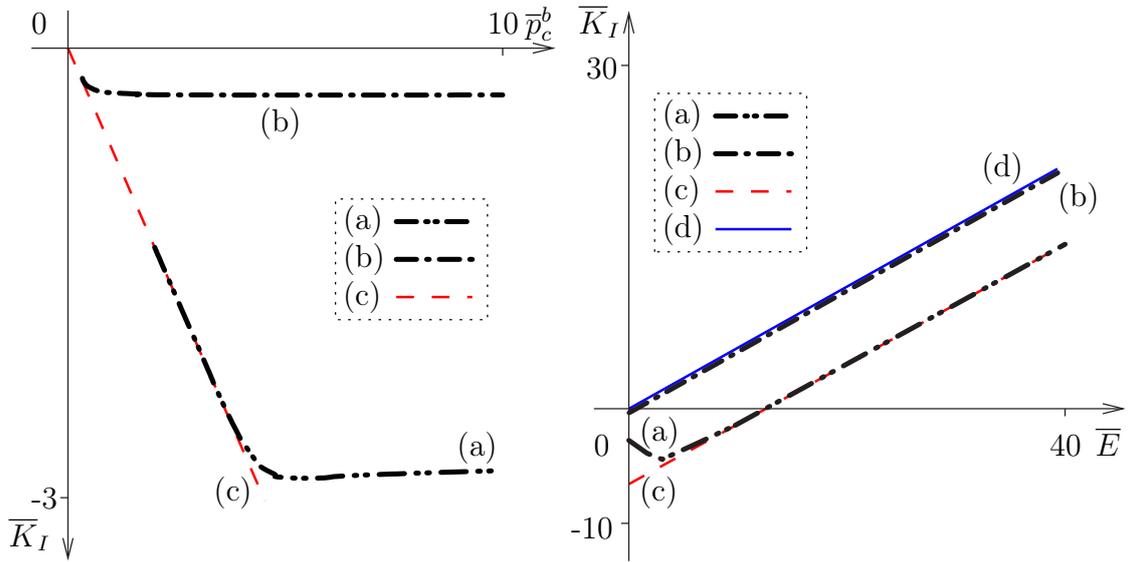
$$\begin{aligned} K_I &= 2\sqrt{\frac{a_0}{\pi}}(3k^s E_0 - p_c\sqrt{1-\alpha^2}) \\ &= 2\sqrt{\frac{a_0}{\pi}} \left( \frac{3k^s}{1+b}E + \frac{b}{1+b}p_c(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} - p_c\sqrt{1-\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Comme dans les sections précédentes, on examine successivement la situation où le couplage entre déformation du milieu et effet capillaire n'est pas prise en compte et la situation où ce couplage est pris en compte. En faisant apparaître les grandeurs



(A) - Etape 1 :  $\bar{E} = 0$

(C) - Etape 2 :  $\bar{p}_c^b = 10$



(B) - Etape 1 :  $\bar{E} = 0$

(D) - Etape 2 :  $\bar{p}_c^b = 10$

FIG. 3.7 – Comportement du milieu fissuré non saturé isotrope - cas de Mori-Tanaka ((a) : cas non saturé avec couplage; (b) : cas non saturé sans couplage; (c) : cas saturé; (d) : cas sec)

adimensionnées définies par l'équation (3.73) et en remplaçant  $E$  par  $E_0$  dans l'équation géométrique (2.125), on obtient finalement les équations d'état adimensionnées pour le schéma de Mori-Tanaka :

*Cas sans couplage géométrique*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c} \\ \bar{\Sigma}^b = \frac{\pi}{2} \frac{b}{1+b} \bar{E} + \frac{b}{1+b} \bar{p}_c^b (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \\ \bar{K}_I = \frac{\pi}{2} \frac{b}{1+b} \bar{E} + \frac{b}{1+b} \bar{p}_c^b (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \bar{p}_c^d \sqrt{1 - \alpha^2} \end{array} \right. \quad (3.91)$$

*Cas avec couplage géométrique*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + \frac{b}{1+b} \left( \bar{E} + \frac{2}{\pi} \bar{p}_c^b (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right) \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2}{\pi} \bar{p}_c^b (1 - \alpha) = \frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{p}_c} \\ \bar{\Sigma}^b = \frac{\pi}{2} \frac{b}{1+b} \bar{E} + \frac{b}{1+b} \bar{p}_c^b (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \\ \bar{K}_I = \frac{\pi}{2} \frac{b}{1+b} \bar{E} + \frac{b}{1+b} \bar{p}_c^b (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \bar{p}_c^b \sqrt{1 - \alpha^2} \end{array} \right. \quad (3.92)$$

En utilisant les caractéristiques du matériau et le trajet de chargement décrits dans la section précédente, on obtient les comportements décrits sur la Fig. 3.7. En comparant les comportements du matériau décrits sur la Fig. 3.6 (schéma dilué) et sur la Fig. 3.7 (schéma de Mori-Tanaka), on observe les similitudes et les différences entre les deux lois de comportement obtenues suivantes :

- La forme et la tendance des courbes obtenues selon les deux schémas sont assez similaires.
- Quand le chargement macroscopique est le plus élevé, la solution décrivant la situation avec couplage géométrique n'est pas valable pour les deux schémas.
- A l'étape 1 où le chargement macroscopique est nul (Fig. 3.6 (A), Fig. 3.6 (B) et Fig. 3.7 (A), Fig. 3.7 (B)), la différence de comportements pour les deux schémas est faible. L'interaction entre les fissures peut donc être négligée dans ce cas.
- La différence entre les résultats pour les deux schémas devient importante à l'étape 2 où le chargement macroscopique est élevé (Fig. 3.6 (C), Fig. 3.6 (D) et Fig.

3.7 (C), Fig. 3.7 (D)). Cette différence est décrite sur la Fig. 3.8 (courbes (b)). On constate que quand la déformation macroscopique augmente, la différence entre les facteurs d'intensité de contrainte calculés pour les deux schémas est plus grande que la différence entre les contraintes macroscopiques calculées pour les deux schémas. Cela confirme que la prise en compte de l'interaction entre des fissures joue un rôle important dans les calculs concernant les propriétés de rupture de ce matériau.

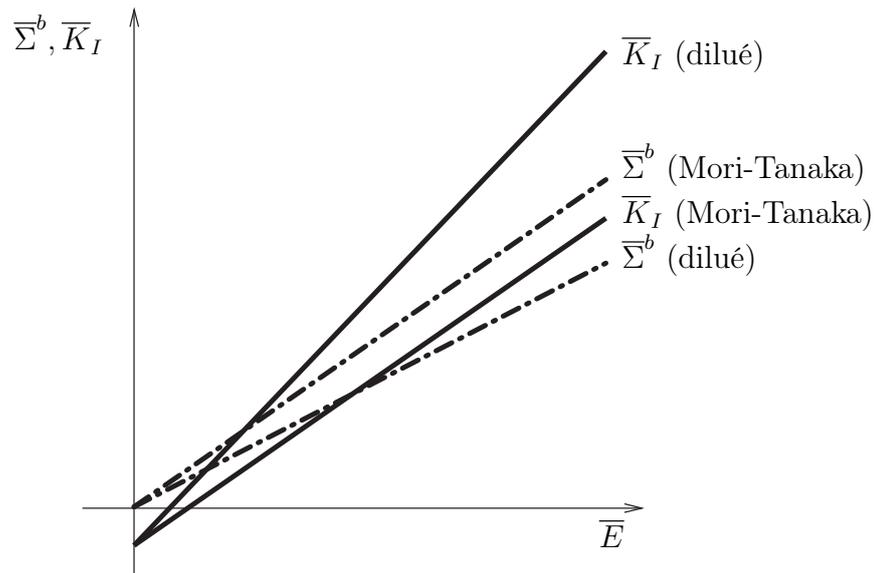


FIG. 3.8 – Comparaison entre les résultats calculés pour les deux schémas (courbes (b) sur les Fig. 3.6 et Fig. 3.7

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des études concernant les propriétés de rupture d'un matériau fragile hétérogène méso-fissuré dans les situations saturée et non saturée dans le cadre d'une approche par changement d'échelle. On a décrit tout d'abord une loi de propagation sous critique reliant la variation du paramètre de densité de fissures aux chargements macroscopiques. Bien sur cette loi dépend de la morphologie du matériau et donc des schémas d'estimation utilisés. On a comparé ensuite les facteurs d'intensité de contrainte calculés pour les deux approches (approche par

la contrainte équivalente et approche analytique) dans un cas simple (chargement macroscopique nul, une unique famille de fissures). On a démontré que l'approche analytique est plus pertinente pour calculer les grandeurs contrôlant la rupture de ces matériaux. On a proposé également une façon de travailler où on calcule les relations contrainte-déformation en utilisant l'approche par la contrainte équivalente et les propriétés de rupture en utilisant les résultats de l'approche analytique généralisée de Bui. A partir de ces résultats, on a modélisé des lois de comportements du matériau dans les situations où le matériau est non saturé, l'orientation des fissures est aléatoire et l'interaction entre les fissures est prise en compte. Cette étude confirme que la prise en compte de l'interaction entre les fissures joue un rôle déterminant sur les propriétés de rupture du matériau.

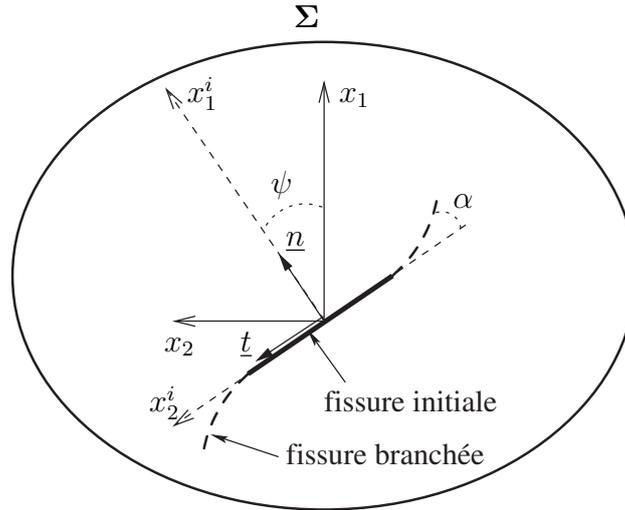
---

### Endommagement des milieux fissurés en mode mixte

---

#### 4.1 Introduction

On s'intéresse ici aux propagations d'un ensemble de fissures planes disposées dans une matrice élastique isotrope homogène. Il est en effet bien connu que la compréhension et la résolution de ce type de problème constituent des étapes essentielles sur la voie conduisant à l'identification d'une loi de comportement macroscopique pour un matériau mésosfissuré du type roche ou béton [5, 17, 33, 34, 43, 46, 48]. Parmi les méthodes de changement d'échelle appliquées pour aborder ce problème, on s'intéresse dans la suite aux techniques d'homogénéisation des milieux désordonnés [17, 20]. Dans ce type d'approche, les fissures sont modélisées comme des ellipsoïdes aplatis (approche tridimensionnelle) ou des fissures planes (approche bidimensionnelle) entourées du matériau constitutif de la matrice. Les déformations des fissures sont estimées en utilisant la solution d'Eshelby qui permet de calculer la déformation dans une hétérogénéité occupant un domaine ellipsoïdal, entourée d'une matrice solide élastique homogène soumise à une déformation uniforme à l'infini [23]. Divers schémas d'homogénéisation permettent de rendre compte des interactions entre fissures [20]. La prise en compte de la propagation des fissures s'effectue alors dans le cadre d'un raisonnement énergétique global généralisant l'approche de Griffith qui

FIG. 4.1 – Branchement de fissure en mode mixte  $I + II$ 

considère que les fissures se propagent uniquement selon le mode  $I$  [4, 46]. Cette approche a été utilisée dans le chapitre 3 de ce mémoire. Le principal inconvénient de l'approche est qu'elle ne permet pas de prendre en compte le phénomène de branchement des fissures observé quand on soumet une fissure à un chargement sollicitant les modes  $II$  et  $III$  de propagation.

On se propose ici d'évaluer l'impact de cette limitation en comparant les prédictions d'une approche énergétique de la propagation d'un réseau de fissures à celles obtenues dans le cadre d'une approche par homogénéisation s'appuyant sur la théorie locale de propagation des fissures prenant en compte les phénomènes de branchement développée par Leblond et al. [1, 37, 38, 39].

Compte tenu des difficultés techniques à résoudre pour traiter ces questions, on s'est limité dans la suite à la situation bidimensionnelle en déformation plane et à une distribution isotrope des orientations de fissures.

Dans l'état initial, les fissures occupent des segments de droite de longueur  $2a_0$  inclinée d'un angle  $\psi$  par rapport à la direction  $0x_2$  ( $0 \leq \psi \leq \pi/2$ ) dans le plan  $(0, x_1, x_2)$  (Fig. 4.1). On suppose de plus que leur ouverture est nulle dans l'état initial naturel pris comme référence.

On définit le critère initial d'endommagement global (surface-seuil) comme la courbe enveloppe intérieure des critères de propagation associés aux différentes familles de fissures (chaque famille de fissures est caractérisée par une valeur de l'angle  $\psi$ ). Le

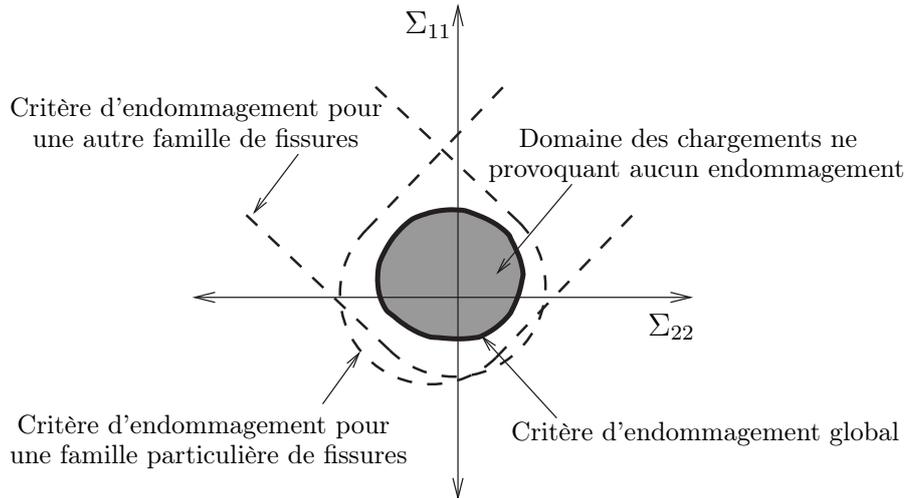


FIG. 4.2 – Obtention du critère d'endommagement initial

procédé utilisé pour obtenir le critère global consiste donc à établir le critère d'une famille quelconque en fonction de l'angle  $\psi$ . Quand l'angle  $\psi$  varie, on obtient la courbe qui définit un domaine de chargement sûr du point de vue de la propagation des fissures (schématisée sur la Fig. 4.2).

Compte tenu de l'isotropie de distribution des orientations de fissures, on ne s'intéresse qu'à des chargements de la forme :

$$\Sigma = \Sigma_{11}e_1 \otimes e_1 + \Sigma_{22}e_2 \otimes e_2. \quad (4.1)$$

## 4.2 Branchement de fissure en mode mixte

Le phénomène de branchement au cours de la propagation d'une ou plusieurs fissures préexistantes dans un milieu solide élastique a été étudié par de nombreux auteurs. Dans une large partie de ces travaux, la fissure branchée est remplacée par une fissure plane équivalente dont les caractéristiques sont identifiées à partir de la solution obtenue pour la propagation d'une unique fissure soumise à un chargement loin de la fissure. Les relations, en général non linéaire, reliant déformations et contraintes prenant en compte la propagation de plusieurs fissures sont alors obtenues remplaçant les fissures réelles par ces fissures planes équivalentes [5, 25, 30, 43, 44, 48, 51, 52]. La prise en compte des caractéristiques de la propagation des fissures après bran-

chement (direction de propagation, facteurs d'intensité de contrainte) en fonction des caractéristiques du système juste avant le branchement (chargement appliqué, orientation des fissures, ...) a été partiellement traité dans le cas bidimensionnel dans [50, 52]. Il semble qu'une relation globale dans ce cas concernant le critère d'endommagement initial ne soit pas disponible dans la littérature.

Un point central pour mener à bien ces approches est la prédiction des propriétés de la propagation des fissures en fonction du chargement appliqué en particulier. Différents critères ont été publiés dans la littérature dans le but de prédire l'angle de branchement pour une unique fissure plane soumise à un chargement uniforme loin de la fissure. Il a été notamment supposé que la direction de propagation d'une fissure pouvait être déterminée à partir d'un critère de « contrainte d'ouverture maximale » [22], ou un critère du « maximum du taux de restitution d'énergie » [31] ou encore obéissait à un principe de « symétrie locale » [38]. A côté de ces diverses propositions, l'équipe de J. B. Leblond a montré de façon convaincante qu'un critère énergétique local permettait de prédire de façon pertinente l'amorçage de la propagation et la direction de propagation et donc la forme d'une fissure branchée en fonction du chargement qui lui est appliqué. On adopte donc ce critère de propagation dans la suite de ce chapitre pour modéliser le critère d'initiation de la propagation de l'endommagement d'un milieu méso fissuré désordonné prenant en compte le phénomène de branchement en mode mixte.

Pour cela, on rappelle tout d'abord les résultats obtenus par Leblond et al. pour une fissure plane isolée dans une matrice solide. Le lecteur intéressé est renvoyé aux références [1, 37, 38, 39] pour un exposé détaillé de ces résultats qui sort du cadre fixé pour ce mémoire.

#### 4.2.1 Critère de propagation pour une fissure unique isolée dans un milieu infini homogène

En conservant toujours la convention de signe négatif pour les contraintes de compression, les contraintes normale et tangentielle aux lèvres de la fissure s'écrivent :

$$\sigma_n = \Sigma_{11} \cos(\psi)^2 + \Sigma_{22} \sin(\psi)^2, \quad (4.2)$$

$$\sigma_t = -\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{2} \sin 2\psi. \quad (4.3)$$

Ici  $\underline{\sigma} = \sigma_n \underline{n} + \sigma_t \underline{t}$  représente l'effort qui s'exercerait au travers du segment occupé par la fissure si les lèvres de la fissure étaient parfaitement adhérentes.

La fissure est ouverte si la condition d'ouverture  $\sigma_n \geq 0$  est vérifiée. Dans le cas contraire, il y a contact des deux lèvres de la fissure et cette dernière est fermée.

#### 4.2.1.1 Cas de la fissure ouverte

D'après Leblond [38], les facteurs d'intensité sont discontinus au point de branchement. Le facteur d'intensité de contrainte juste après propagation ( $\underline{K}^*$ ) peut être calculé en fonction du facteur d'intensité de contrainte en tête de fissure juste avant propagation ( $\underline{K}$ ) et de l'angle de branchement ( $\alpha$ ) de la fissure (voir la Fig. 4.1). On a donc :

$$\underline{K}^* = \mathbf{F}_\alpha \cdot \underline{K}, \quad (4.4)$$

avec

$$\underline{K} = (K_I, K_{II}); \quad K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a_0}; \quad K_{II} = \sigma_t \sqrt{\pi a_0}, \quad (4.5)$$

et

$$\mathbf{F}_\alpha = (F_{I,I}, F_{I,II}, F_{II,I}, F_{II,II}). \quad (4.6)$$

L'expressions de la matrice  $\mathbf{F}_\alpha$  a été obtenue par Leblond et al. [1, 37]. On rappelle que l'expression de  $\mathbf{F}_\alpha$  donnée ci-dessous est une relation approchée dépendant uniquement de l'angle de branchement  $\alpha$ .

$$F_{I,I} = 1 - (3\pi^2/8)m^2 + (\pi^2 - 5\pi^4/128)m^4 + (\pi^2/9 - 11\pi^4/72 + 119\pi^6/15360)m^6 + 5.07790m^8 - 2.88312m^{10} - 0.0925m^{12} + 2.996m^{14} - 4.059m^{16} + 1.63m^{18} + 4.1m^{20} \quad (4.7)$$

$$F_{I,II} = -3(\pi/2)m + (10\pi/3 + \pi^3/16)m^3 + (-2\pi - 133\pi^3/180 + 59\pi^5/1280)m^5 + 12.313906m^7 - 7.32433m^9 + 1.5793m^{11} + 4.0216m^{13} - 6.915m^{15} + 4.21m^{17} + 4.56m^{19} \quad (4.8)$$

$$F_{II,I} = (\pi/2)m - (4\pi/3 + \pi^3/48)m^3 + (-2/3\pi + 13/30\pi^3 - 59/3840\pi^5)m^5 - 6.176023m^7 + 4.44112m^9 - 1.5340m^{11} - 2.0700m^{13} + 4.684m^{15} - 3.95m^{17} - 1.32m^{19} \quad (4.9)$$

$$F_{II,II} = 1 - (4 + 3\pi^2/8)m^2 + (8/3 + 29\pi^2/18 - 5\pi^4/128)m^4 + (-32/15 - 4\pi^2/9 - 1159\pi^4/7200 + 119\pi^6/15360)m^6 + 10.58254m^8 - 4.78511m^{10} - 1.8804m^{12} + 7.280m^{14} - 7.591m^{16} + 0.25m^{18} + 12.5m^{20} \quad (4.10)$$

avec,

$$m = \frac{\alpha}{\pi}. \quad (4.11)$$

Le critère de branchement s'énonce donc comme suit :

- La propagation se fait dans la direction  $\alpha$  telle que  $K_{II}^*(\alpha) = 0$ .
- Elle se produit effectivement lorsque  $K_I^*(\alpha)$  atteint la valeur critique  $K_{Ic}$

$$\begin{cases} K_{II}^* = F_{II,I}K_I + F_{II,II}K_{II} = 0 \\ K_I^* = F_{I,I}K_I + F_{I,II}K_{II} = K_{Ic} \end{cases} \quad (4.12)$$

En reportant les équations (4.2) à (4.11) dans (4.12), on obtient un système de deux équations pour les quatre inconnues ( $\psi, \alpha, \Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{22}$ ). Ce critère permet donc de déterminer la courbe du plan ( $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}$ ) correspondant aux chargements pour lequel la fissure commence à se propager. Cette courbe dépend évidemment de l'orientation de la fissure, et donc de l'angle  $\psi$ . Pour simplifier le calcul, on ne prend en compte que les deux premiers termes (ordre 1 et 2) de l'expression  $\mathbf{F}_\alpha$ . Pour utiliser le critère de propagation mixte de Leblond, on considère successivement les situations  $K_I = 0$  et  $K_I > 0$  dans la suite.

4.2.1.2 Cas  $K_I = 0$ 

En reportant l'équation (4.2) dans les équations (4.5), on a dans ce cas :

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a_0} = 0 \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow \Sigma_{11} \cos(\psi)^2 + \Sigma_{22} \sin(\psi)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}} = -\tan(\psi)^2 = \tan \rho(\psi), \quad (4.14)$$

l'angle  $\rho(\psi)$  contrôle l'orientation de la droite séparant les situations où la fissure est ouverte des situations où la fissure est fermée.

L'équation (4.14) décrit la condition d'ouverture de la fissure (ligne (a) sur la Fig. 4.5).

En mode  $II$  pur traité ici ( $K_I = 0$ ), la première équation de (4.12) permet de calculer l'angle de branchement  $\alpha_0$ , on a alors :

$$K_{II}^* = 0 \Rightarrow F_{II,II}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 = \pm 65^\circ. \quad (4.15)$$

En remplaçant la valeur de  $\alpha_0$  dans la seconde équation de (4.12), on trouve :

$$K_I^* = K_{Ic} \Rightarrow F_{I,II}(\alpha_0) K_{II} = \pm K_{Ic}. \quad (4.16)$$

En combinant les deux équations (4.14) et (4.16), on obtient alors :

$$\Sigma_{11} = \pm \frac{L}{F_{I,II}(\alpha_0)} \tan \psi ; \quad \Sigma_{22} = \mp \frac{L}{F_{I,II}(\alpha_0)} \frac{1}{\tan \psi} \quad \text{avec } L = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a_0}} \quad (4.17)$$

On en déduit que la fissure se propage en mode  $II$  pur dès que l'on a :

$$\Sigma_{11} \Sigma_{22} = -\frac{L^2}{F_{I,II}(\alpha_0)^2}. \quad (4.18)$$

Il nous faut signaler ici que le signe étant opposé dans les équations (4.15), (4.16) et (4.17) à celui de  $K_{II}$ .

Les courbes (b) sur la Fig. 4.3 représentent l'expression (4.18) et elles ne dépendent pas de la valeur de  $\psi$ . En combinant les deux formules (4.14) et (4.18), on trouve que la ligne (a) coupe les courbes (b) en deux points  $A, B$ . Quand l'angle  $\psi$  varie, les deux extrémités  $A, B$  se déplacent sur les courbes (b) et le segment  $AB$  « tourne » autour de l'origine avec  $\rho(\psi)$  défini par l'équation :  $\rho(\psi) = -\arctan(\tan(\psi)^2)$ . Le segment  $AB$  représente les chargements  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  pour lesquels aucune propagation

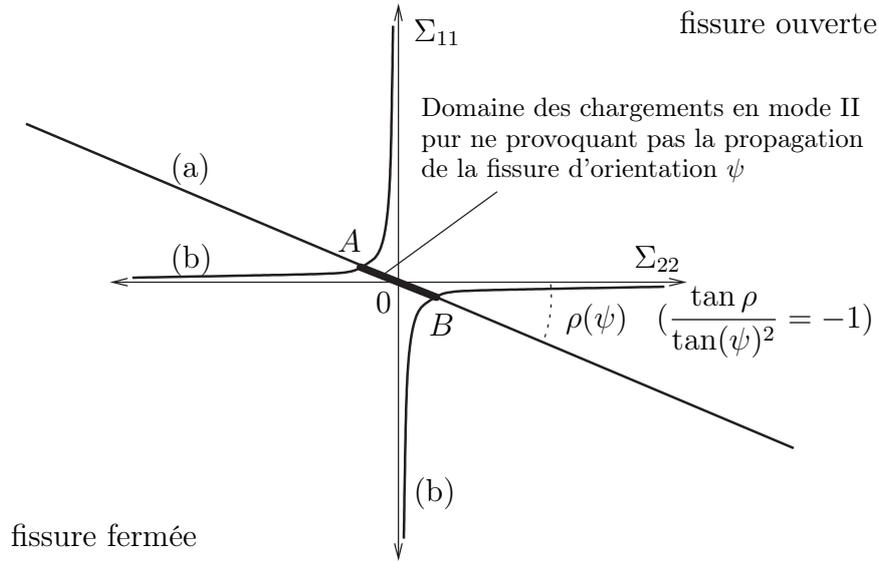


FIG. 4.3 – Premier critère d'endommagement local pour une fissure

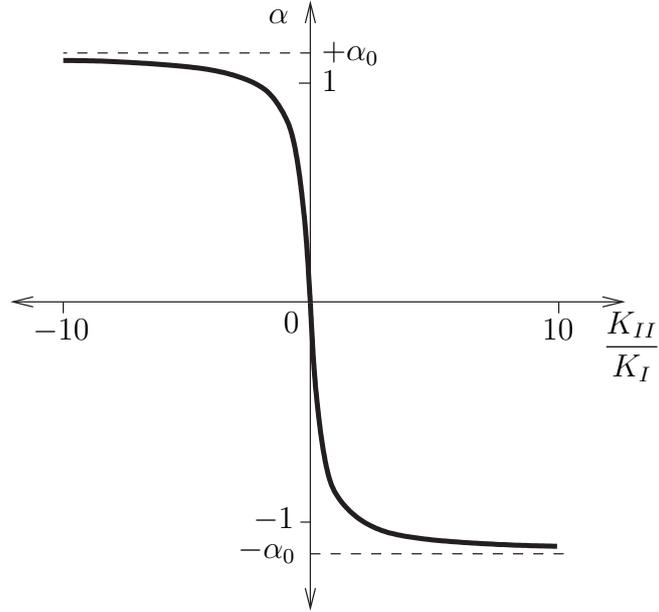
de la fissure ne se produit. En A et B le facteur d'intensité de contrainte  $K_I^*$  est égal à  $K_{Ic}$  tandis que pour les deux demi droites d'origine respectivement A et B, le facteur  $K_I^*$  est strictement supérieur à  $K_{Ic}$ .

#### 4.2.1.3 Cas $K_I > 0$

En posant  $k = K_{II}/K_I$  et en introduisant les équations (4.7) à (4.10) dans (4.12), le critère de branchement (4.12) s'écrit maintenant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} K_{II}^* = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \left(1 - \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{3}{8}\right)\alpha^2\right)k = 0 & \text{avec } k = \frac{K_{II}}{K_I} \\ K_I^* = K_{Ic} \Rightarrow 1 - \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha k - \frac{K_{Ic}}{K_I} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

La première équation (4.19) admet deux solutions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  avec  $\alpha_1 > \alpha_2$  pour chaque valeur positive de  $k$ . On constate que dans le cas où  $\alpha = \alpha_1$ , la valeur de  $\alpha$  tend vers infini quand  $k$  tend vers zéro. On a donc une seule solution acceptable  $\alpha = \alpha_2$  (première équation (4.20)). On a présenté sur la Fig. 4.4 les variations de l'angle de branchement en fonction du rapport  $K_{II}/K_I$ .

FIG. 4.4 – Angle de branchement en fonction du rapport  $K_{II}/K_I$ 

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_2 = \frac{2(\pi^2 - \sqrt{\pi^4 + 64k^2\pi^2 + 6k^2\pi^4})}{k(32 + 3\pi^2)} \\ 1 - \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha k - \frac{K_{Ic}}{K_I} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Pour résoudre les équations (4.20), on pose :

$$\Sigma_{11} = S \sin \theta \quad \text{et} \quad \Sigma_{22} = S \cos \theta. \quad (4.21)$$

On a donc

$$k = -\frac{(-\cos \theta + \sin \theta) \sin \psi \cos \psi}{(\sin \theta \cos(\psi)^2 + \cos \theta \sin(\psi)^2)} \quad (4.22)$$

et

$$\frac{K_{Ic}}{K_I} = \frac{L}{S(\sin \theta \cos(\psi)^2 + \cos \theta \sin(\psi)^2)}. \quad (4.23)$$

L'angle  $\theta$  devant respecter la condition d'ouverture (4.14), on a donc :

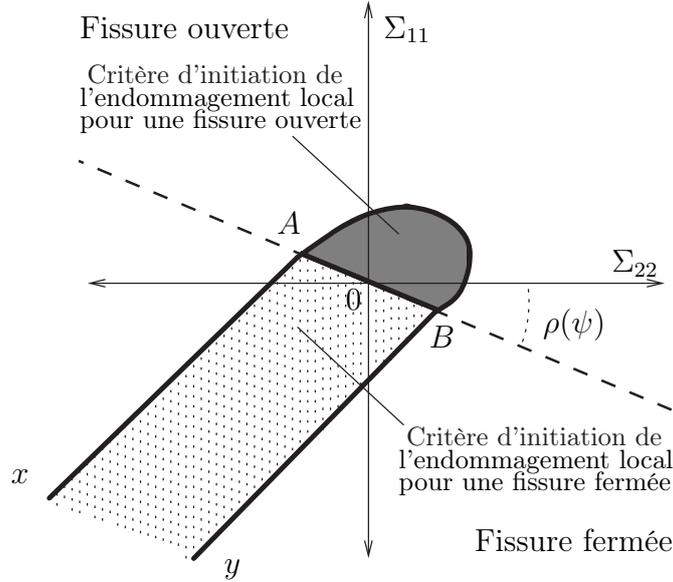


FIG. 4.5 – Domaine des chargements ne provoquant pas la propagation d’une fissure d’orientation  $\psi$  dans le cas où la fissure est ouverte et dans le cas où la fissure est fermée

$$-\arctan(\tan(\psi)^2) < \theta < \pi - \arctan(\tan(\psi)^2). \quad (4.24)$$

En introduisant les équations (4.22), (4.23) et la première équation (4.20) dans la deuxième équation (4.20), on obtient la relation entre  $S$  et les valeurs de  $\psi$  et  $\theta$ . On rappelle que  $L$  est un paramètre qui dépend du matériau et de la taille de la fissure. Pour une fissure d’orientation définie par l’angle  $\psi$ , on a unique relation reliant la valeur du paramètre  $S$  à la valeur de  $\theta$ . En reportant cette relation dans les formules (4.21) et (4.24), on obtient l’équation de la courbe décrivant les chargements critiques (c’est à dire tels que le facteur  $K_I^*$  soit égal à  $K_{Ic}$ ) dans le plan des paramètres de chargement  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ . Le domaine intérieur à cette courbe se trouvant du côté des chargements provoquant l’ouverture de la fissure (zone grisée sur la Fig. 4.5) est donc le domaine de non propagation d’une fissure d’orientation définie par l’angle  $\psi$ . On remarque que ce domaine est limité par le segment de droite correspondant aux chargements en mode II pur ne provoquant pas la propagation de la fissure. Evidemment, le domaine de sûreté représente sur la Fig. 4.5 dépend de la valeur de  $\psi$ .

#### 4.2.1.4 Cas de la fissure fermée

On s'intéresse maintenant aux chargements entraînant la fermeture de la fissure. Dans cette situation, la nature du contact entre les lèvres de la fissure influe sur les conditions de propagation de cette dernière. Pour simplifier, on suppose ici que les faces de la fissure sont parfaitement lisses et que le contact s'effectue sans frottement. D'après Leblond et al. [39], le critère de branchement s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} K_{II}^* = F_{II,II} K_{II} = 0 \\ K_I^* = F_{I,II} K_{II} = K_{Ic} \end{cases} \quad (4.25)$$

La première équation (4.25) correspond à la situation en mode  $II$  pur traité au paragraphe 4.2.1.2 ( $K_I = 0$ ) qui permet de calculer l'angle de branchement  $\alpha_0 = \pm 65^\circ$ . En remplaçant la valeur de  $\alpha_0$  dans la seconde équation (4.25), on trouve :

$$K_{II} = \frac{K_{Ic}}{F_{I,II}(\alpha_0)} \Rightarrow \Sigma_{11} = \Sigma_{22} \pm \frac{2L}{F_{I,II}(\alpha_0) \sin(2\psi)}. \quad (4.26)$$

On obtient donc le critère d'endommagement initial pour une fissure fermée d'orientation  $\psi$  en combinant les relations (4.14) et (4.26). Ce critère d'endommagement initial est parallèle à l'axe hydrostatique (ligne  $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$  dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ ) défini par l'équation (4.26) (lignes  $Ax$ ,  $By$  sur la Fig. 4.5).

La réunion des deux domaines de chargement ne provoquant pas la propagation d'une fissure de longueur  $a_0$  et d'orientation  $\psi$  définit le domaine d'intégrité pour une unique fissure dans un matériau de tenacité  $K_{Ic}$ . La taille de ce domaine est contrôlée par le paramètre  $L = K_{Ic}/\sqrt{\pi a_0}$  introduit plus haut. Il est donc d'autant plus grand que le matériau est résilient (forte valeur de  $K_{Ic}$ ) ou que la fissure est petite (faible valeur de  $a_0$ ).

## 4.2.2 Critère de propagation de l'endommagement pour un matériau méso fissuré

On s'intéresse ici à des matériaux fissurés dans la situation diluée. Dans ce cas le critère d'endommagement global du matériau est défini comme le domaine d'intersection des domaines de non propagation des fissures représenté sur la Fig. 4.5. On

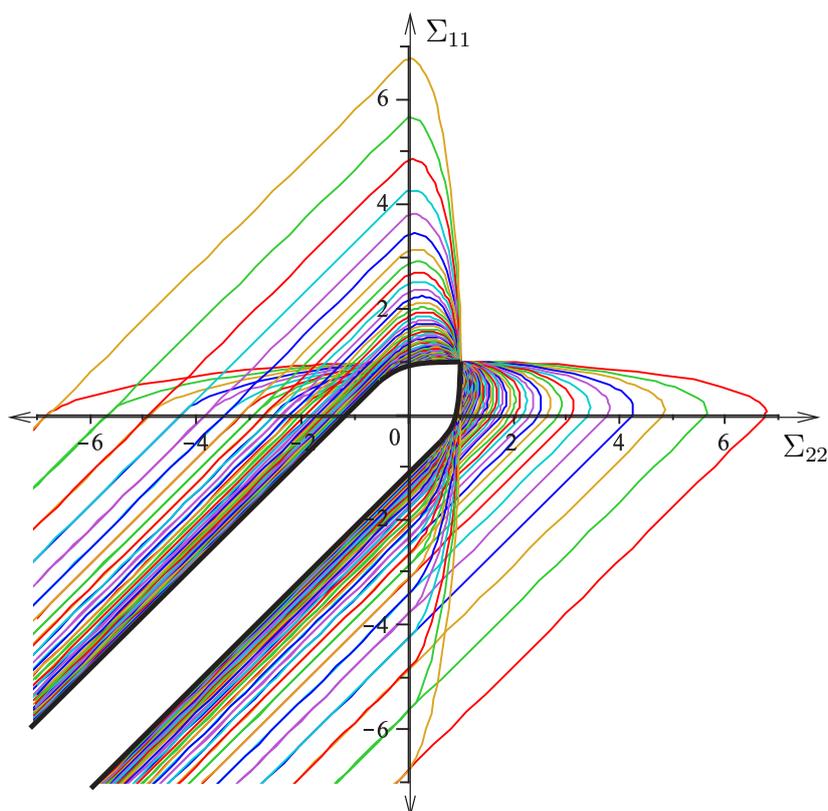


FIG. 4.6 – Critère d'endommagement initial pour un milieu dilué isotrope de fissures de même taille (solution approchée avec  $L = 1$ )

a tracé sur la Fig. 4.6 le critère d'initiation de l'endommagement dans le cas d'un matériau isotrope dont toutes les fissures sont de même taille. Les prédictions du modèle prenant en compte le branchement des fissures dans cette situation seront comparées aux prédictions du modèle reposant sur l'approche énergétique de Griffith dans la suite de ce chapitre.

Il convient de noter de plus que dans la situation diluée, la prédiction du critère de propagation de l'endommagement est particulièrement facile puisqu'il suffit de tracer les domaines de chargement ne provoquant pas la propagation de chaque famille de fissure (on rappelle que chaque famille est caractérisée par une taille et une orientation) pour obtenir le domaine pertinent pour le matériau étudié.

#### 4.2.2.1 Validité de la solution approchée

Dans les calculs effectués plus haut pour obtenir la courbe représentée sur la Fig. 4.6, on n'a pris en compte que les deux premiers termes (ordre 1 et 2) de l'expression  $\mathbf{F}_\alpha$ . Les résultats obtenus sont donc les solutions approchées. On se propose dans ce paragraphe de faire la comparaison entre la solutions approchée introduite ci-dessus et la solution exacte obtenue en utilisant l'expression exacte de  $\mathbf{F}_\alpha$  présentée aux équations (4.7) à (4.10).

On constate tout d'abord que la taille du domaine de non propagation de l'endommagement pour le matériau dépend de la valeur de  $F_{I,II}(\alpha_0)$ . La taille du domaine est plus petite si la valeur de  $F_{I,II}(\alpha_0)$  est plus grande. La Fig. 4.7 présente donc la comparaison entre les deux courbes  $\alpha - k$  obtenues en résolvant exactement ou de façon approchée le problème. On observe que quand le rapport  $k = K_{II}/K_I$  est petit, la différence entre les deux solutions est petite. Cette différence devient importante quand la valeur absolue de  $k$  est augmentée.

On s'intéresse ensuite à obtenir le critère d'endommagement initial pour un milieu isotrope où les fissures de même taille en utilisant l'expression exacte de  $\mathbf{F}_\alpha$ . Pour cela, on reprend la démarche de calcul décrite ci-dessus concernant la situation approchée. Le résultat obtenu est présenté sur la Fig. 4.8. En raison de la symétrie du critère, on ne s'intéresse qu'aux valeurs de  $\psi$  variant de 0 à  $\pi/4$  et aux valeurs de  $\theta$  supérieures à  $\pi/4$ . Il convient de noter de plus que les courbes obtenues sur la Fig. 4.8 sont des résultats numériques puisqu'il n'est pas possible d'obtenir une formule analytique pour le critère d'endommagement initial pour une famille quel-

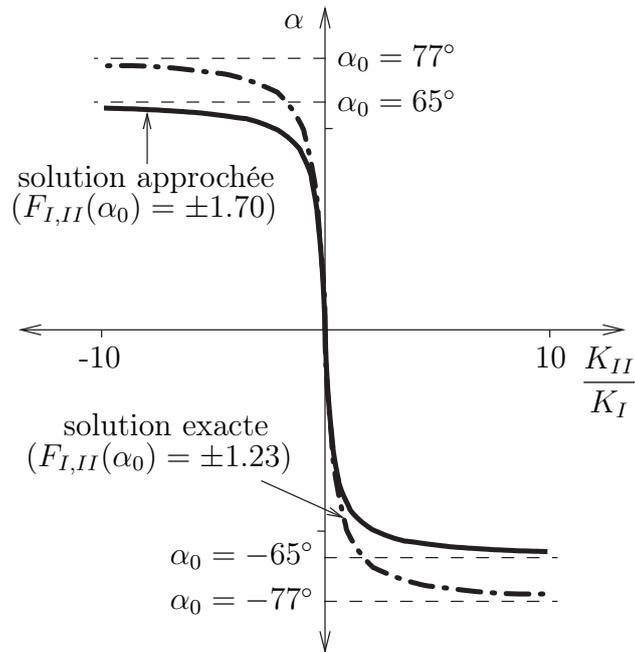


FIG. 4.7 – Angle de branchement en fonction du rapport  $K_{II}/K_I$  selon les deux solutions exacte et approchée

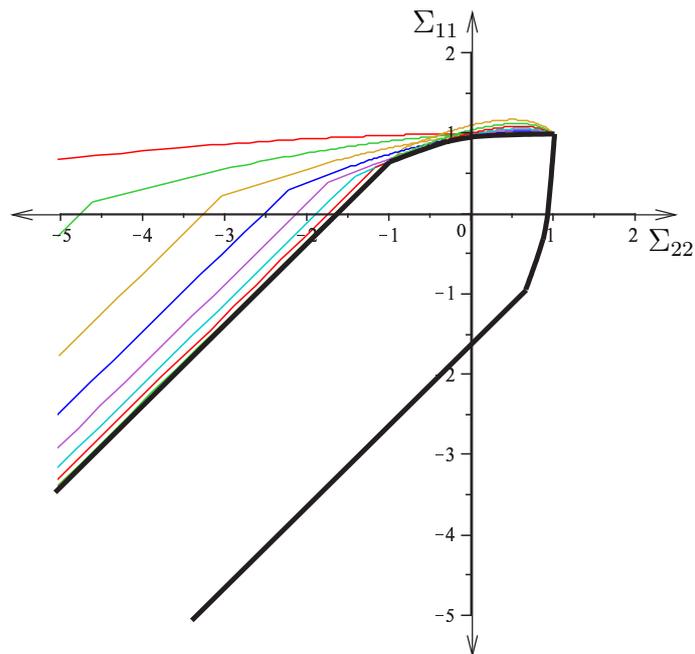


FIG. 4.8 – Critère d'endommagement initial pour un milieu dilué isotrope de fissures de même taille (solution exacte avec  $L = 1$ )

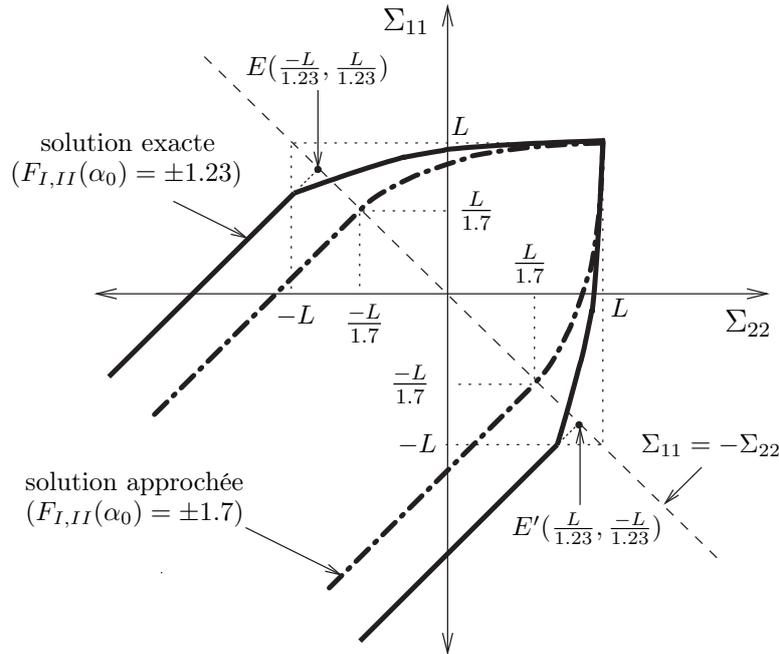


FIG. 4.9 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

conque de fissures.

La comparaison entre les deux solutions exacte et approchée est présentée sur la Fig. 4.9. On constate sur la figure que l'écart maximal entre les deux solutions est égal à  $L\sqrt{2}(1/1.23 - 1/1.7)$  ( $0.27\%L$ ). Cette différence n'est pas suffisamment faible pour que l'on puisse retenir la solution approchée dans les calculs présentés plus loin. Par contre, la solution approchée contenant les formules analytiques simples du critère d'endommagement initial pour chaque famille de fissures est néanmoins utile dans des cas particuliers.

### 4.3 Critère énergétique sans branchement de fissure

On souhaite comparer les prédictions obtenues en prenant en compte le phénomène de branchement de fissure traitées ci-dessus aux prédictions obtenues en mettant en œuvre l'approche énergétique et les techniques d'homogénéisation disponibles dans la littérature et utilisées au chapitre trois de ce mémoire.

### 4.3.1 Condition d'ouverture / fermeture de fissure

On considère maintenant le problème général déjà schématisé sur la Fig. 4.1. Un milieu solide  $\Omega$  sollicité en déformation plane, de forme arbitraire, est soumis à un chargement homogène en contrainte ( $\Sigma = \Sigma_{11}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Sigma_{22}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ ). Ce milieu contient des fissures droites de longueur  $2a_0$ . La  $i$ ème famille de fissures est inclinée d'un angle  $\psi^i$  par rapport à l'axe  $0x_2$  ( $0 \leq \psi^i \leq \pi/2$ ) dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ . On suppose de plus que leur ouverture est nulle dans l'état initial naturel pris comme référence.

La condition d'ouverture pour une fissure s'écrit [46] :

$$\Sigma : (\underline{n} \otimes \underline{n}) > 0, \quad (4.27)$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale au plan de la fissure.

La fissure est ouverte si cette condition d'ouverture est vérifiée. Dans le cas contraire, il y a contact des deux lèvres de la fissure et cette dernière est fermée.

### 4.3.2 Homogénéisation d'un solide fissuré bidimensionnel

Une fissure peut être modélisée comme une cavité ellipsoïdale (cas 3D) ou elliptique (cas 2D) dont le rapport d'aspect tend vers zéro. En utilisant les résultats d'Eshelby [23], les techniques d'estimation de l'élasticité homogénéisée d'un matériau fissuré tridimensionnel ont été décrites dans plusieurs publications récentes [4, 17, 20, 46]. Ces techniques ont été présentées dans le chapitre bibliographique de ce mémoire.

On s'intéresse dans cette section aux chargements en déformation plane où la fissure est modélisée comme un cylindre de section droite elliptique de dimension infinie dans la direction  $\underline{e}_3$ . En utilisant les résultats présentés dans les chapitres précédents concernant l'homogénéisation d'un matériau fissuré dont les fissures sont modélisées par des cavités ellipsoïdales, on va mettre en œuvre une démarche d'estimation des caractéristiques élastiques de ce matériau. Pour cela, on utilise le tenseur d'Eshelby pour une inclusion dont la forme est une ellipse cylindrique. Les composantes de ce tenseur sont données dans l'annexe C. Les résultats bidimensionnels dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$  sont trouvés en supprimant toutes les composantes concernant la direction  $\underline{e}_3$ .

### 4.3.2.1 Une famille de fissures ouvertes parallèles

On considère ici la situation où il existe une seule famille de fissures parallèles de normale  $\underline{n}$  et on suppose que la direction de la normale à la fissure est parallèle à la direction  $\underline{e}_1$  du repère global ( $\underline{n} \equiv \underline{e}_1$ ). Conformément à ce qui a été dit plus haut, les fissures occupent des domaines cylindriques de direction parallèle à  $\underline{e}_3$  et de section droite elliptique.

Partant de la formule (1.43), on montre que le tenseur d'élasticité macroscopique  $\mathbb{C}^{hom}$  et le tenseur de complaisance macroscopique  $\mathbb{S}^{hom}$  s'écrivent pour ce cas :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \phi_0 (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^b(X))^{-1} \right) \\ \mathbb{S}^{hom} = \left( \mathbb{I} + \phi_0 (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^b(X))^{-1} \right) : \mathbb{S}^s \end{cases}, \quad (4.28)$$

où  $\phi_0$  désigne la porosité tandis que  $\mathbb{C}^s$  et  $\mathbb{S}^s$  désignent respectivement le tenseur d'élasticité et le tenseur de complaisance élastique du matériau constitutif de la matrice solide.

$\mathbb{S}_E^b(X)$  désigne le tenseur Eshelby dont l'expression est donnée dans l'annexe C. Dans la situation d'une unique famille de fissures parallèles traitée ici,  $\mathbb{S}_E^b(X)$  dépend uniquement du coefficient de Poisson  $\nu^s$  du matériau constitutif de la matrice solide et du rapport d'aspect  $X$  des fissures. La porosité est donnée dans ce cas par :

$$\phi_0 = \mathcal{N} \pi a_0^2 X = \pi \epsilon X \quad \text{avec} \quad \epsilon = \mathcal{N} a_0^2. \quad (4.29)$$

On rappelle que  $\mathcal{N}$  et  $\epsilon$  désignent respectivement la densité volumique de fissures et le paramètre de densité de fissures.

Si on considère que la forme d'une fissure dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$  est une ellipse dont le rapport d'aspect  $X$  très petit devant 1, la formule (4.28) devient :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \pi \epsilon \mathbb{T}^b \right) \\ \mathbb{S}^{hom} = \left( \mathbb{I} + \pi \epsilon \mathbb{T}^b \right) : \mathbb{S}^s \end{cases}, \quad (4.30)$$

avec,

$$\mathbb{T}^b = \lim_{X \rightarrow 0} X (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^b(X))^{-1}. \quad (4.31)$$

Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre 1, la limite  $\mathbb{T}^b$  définie par l'équation (4.31) ne dépend que de l'orientation des fissures et des modules d'élasticité du matériau constitutif de la phase solide. Par ailleurs, le résultat (4.31) est un résultat approché, valable au premier ordre en  $X$ .

Le tenseur  $\mathbb{T}^b$  possède la propriété de symétrie mineure ( $T_{ijkl}^b = T_{jikl}^b = T_{ijlk}^b$ ). Les composantes non nulles s'écrivent :

$$T_{1111}^b = \frac{2(1 - \nu^s)^2}{(1 - 2\nu^s)}, \quad T_{1122}^b = T_{1133}^b = \frac{2\nu^s(1 - \nu^s)}{(1 - 2\nu^s)}, \quad T_{1212}^b = \frac{(1 - \nu^s)}{2}, \quad T_{1313}^b = \frac{1}{2}. \quad (4.32)$$

$\mathbb{T}^b$  dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$  s'écrit sous forme matricielle :

$$[\mathbb{T}^b]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = \begin{bmatrix} \frac{2(1 - \nu^s)^2}{(1 - 2\nu^s)} & \frac{2\nu^s(1 - \nu^s)}{(1 - 2\nu^s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu^s \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}. \quad (4.33)$$

#### 4.3.2.2 Une distribution isotrope transverse de fissures ouvertes

Considérons maintenant un milieu élastique linéaire contenant  $n$  familles de fissures. On suppose que les orientations des fissures sont distribuées de façon aléatoire dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  (répartition isotrope) et on désigne toujours par  $\psi$  l'angle définissant l'orientation d'une fissure particulière dans le repère global (voir la Fig. 4.1). Toutes les fissures sont de même taille ( $2a_0$ ). Partant des équations (1.43) et (4.28), on montre que le tenseur d'élasticité et le tenseur de complaisance macroscopique s'écrivent dans ce cas :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \sum_i^n \phi_i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{bi}(\psi))^{-1} \right), \quad (4.34)$$

$$\mathbb{S}^{hom} = \left( \mathbb{I} + \sum_i^n \phi_i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{bi}(\psi))^{-1} \right) : \mathbb{S}^s. \quad (4.35)$$

où  $\phi_i$  désigne la porosité de la  $i$ ème famille de fissures :

$$\phi_i = \mathcal{N}_i \pi a_0^2 X = \pi \epsilon_i X \quad \text{avec} \quad \epsilon_i = \mathcal{N}_i a_0^2. \quad (4.36)$$

$\mathcal{N}_i$  et  $\epsilon_i$  désignent la densité volumique de fissures et le paramètre de densité de fissures pour la  $i$ ème famille de fissures. Comme on a supposé une distribution isotrope des orientations de fissures dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ,  $\mathcal{N}_i$  et  $\epsilon_i$  sont identiques pour toutes les familles de fissures. Les relations (4.34) et (4.35) deviennent donc :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \sum_i^n \pi \epsilon_i \mathbb{T}^{bi}(\psi) \right) = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \pi \epsilon < \mathbb{T}^b > \right), \quad (4.37)$$

$$\mathbb{S}^{hom} = \left( \mathbb{I} + \sum_i^n \pi \epsilon_i \mathbb{T}^{bi}(\psi) \right) = \left( \mathbb{I} + \pi \epsilon < \mathbb{T}^b > \right) : \mathbb{S}^s. \quad (4.38)$$

Avec,

$$< \mathbb{T}^b > = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbb{T}^{bi}(\psi) d\psi, \quad (4.39)$$

$$\epsilon = \sum_i^n \epsilon_i = n \epsilon_i \quad (4.40)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{T}^{bi}(\psi) = \lim_{X \rightarrow 0} X \left( \mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{bi}(X, \psi) \right)^{-1}. \quad (4.41)$$

En utilisant la matrice de changement de repère  $[\mathbb{O}]$  pour le tenseur du quatrième ordre présentée dans l'annexe A, on obtient l'expression de  $\mathbb{T}^{bi}(\psi)$  à partir de  $\mathbb{T}^b$  comme suit :

$$[\mathbb{T}^{bi}(\psi)] = [\mathbb{O}^i] \cdot [\mathbb{T}^b]^T \cdot [\mathbb{O}^i]. \quad (4.42)$$

Il convient de noter que dans la situation isotrope transverse traitée ici, la matrice de passage est différente de celle présentée dans (1.84). Elle s'écrit alors :

$$[\mathbb{O}^i] = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}. \quad (4.43)$$

Sous forme matricielle,  $\mathbb{T}^{bi}(\psi)$  et  $< \mathbb{T}^b >$  dans le plan le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$  s'écrivent alors

$$[\mathbb{T}^{bi}(\psi)]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cos(\psi)^2 (1-\nu^s)^2}{1-2\nu^s} & \frac{2(1-\nu^s)\nu^s \cos(\psi)^2}{1-2\nu^s} & \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\psi)(1-\nu^s)}{\sqrt{2}} \\ \frac{2(1-\nu^s)\nu^s \sin(\psi)^2}{1-2\nu^s} & \frac{2 \sin(\psi)^2 (1-\nu^s)^2}{1-2\nu^s} & \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\psi)(1-\nu^s)}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\psi)(1-\nu^s)}{\sqrt{2}(1-2\nu^s)} & \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\psi)(1-\nu^s)}{\sqrt{2}(1-2\nu^s)} & 1-\nu^s \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}, \quad (4.44)$$

et

$$[\langle \mathbb{T}^b \rangle]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu^s)^2}{1-2\nu^s} & \frac{(1-\nu^s)\nu^s}{1-2\nu^s} & 0 \\ \frac{(1-\nu^s)\nu^s}{1-2\nu^s} & \frac{(1-\nu^s)^2}{1-2\nu^s} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu^s \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}. \quad (4.45)$$

#### 4.3.2.3 Le cas de fissures fermées

Comme l'objet de ce chapitre est de comparer les prédictions obtenues en mettant en œuvre le raisonnement de Griffith aux prédictions d'une approche prenant en compte la possibilité de branchement des fissures, il nous reste à examiner la possibilité de propagation des fissures quand celles-ci sont fermées. Pour cela on s'appuie sur les résultats présentés au paragraphe (1.2.4) pour les situations où les fissures sont modélisées par des cavités ellipsoïdales fermées. Dans la situation bidimensionnelle traitée ici, il convient de remplacer le tenseur  $\mathbb{T}^f$  défini par l'équation (1.74) (situation tridimensionnelle) par le tenseur  $\mathbb{T}^{b'}$  défini par :

$$\mathbb{T}^{b'} = \lim_{X \rightarrow 0} X \mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^b(X) : \mathbb{K})^{-1}. \quad (4.46)$$

Le tenseur  $\mathbb{T}^{b'}$  possède la propriété de symétrie mineure. Ses composantes non nulles s'écrivent :

$$T_{1212}^{b'} = \frac{(1-\nu^s)}{2}, \quad T_{1313}^{b'} = \frac{1}{2}. \quad (4.47)$$

Sous forme matricielle dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ,  $\mathbb{T}^{b'}$  s'écrit :

$$[\mathbb{T}^{b'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}. \quad (4.48)$$

En utilisant la technique de changement de repère introduite au paragraphe précédent, le tenseur  $\mathbb{T}^{bi'}(\psi)$  pour une famille quelconque de fissures de même orientation définie par l'angle  $\psi$  et le tenseur moyen  $\langle \mathbb{T}^{b'} \rangle$  dans la situation isotrope transverse sont définis par les équations :

$$\mathbb{T}^{bi'}(\psi) = \lim_{X \rightarrow 0} X \mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{bi}(X, \psi) : \mathbb{K})^{-1} \quad \text{ou} \quad [\mathbb{T}^{bi'}(\psi)] = [\mathbb{O}^i] \cdot [\mathbb{T}^{b'}] \cdot {}^T[\mathbb{O}^i] \quad (4.49)$$

$$\text{et} \quad \langle \mathbb{T}^{b'} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbb{T}^{bi'}(\psi) d\psi. \quad (4.50)$$

Sous forme matricielle,  $\mathbb{T}^{bi'}(\psi)$  et  $\langle \mathbb{T}^{b'} \rangle$  s'écrivent alors dans le plan  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

$$[\mathbb{T}^{bi'}(\psi)]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = \begin{bmatrix} 2(1-\nu^s) \cos(\psi)^2 \sin(\psi)^2 & -2(1-\nu^s) \cos(\psi)^2 \sin(\psi)^2 & \sqrt{2}(1-\nu^s)(2 \cos(\psi)^2 - 1) \cos \psi \sin \psi \\ -2(1-\nu^s) \cos(\psi)^2 \sin(\psi)^2 & 2(1-\nu^s) \cos(\psi)^2 \sin(\psi)^2 & -\sqrt{2}(1-\nu^s)(2 \cos(\psi)^2 - 1) \cos \psi \sin \psi \\ \sqrt{2}(1-\nu^s)(2 \cos(\psi)^2 - 1) \cos \psi \sin \psi & -\sqrt{2}(1-\nu^s)(2 \cos(\psi)^2 - 1) \cos \psi \sin \psi & (1-\nu^s)(4 \cos(\psi)^4 - 4 \cos(\psi)^2 + 1) \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

et

$$\langle \mathbb{T}^{b'} \rangle_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = \frac{1-\nu^s}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Il convient de rappeler ici que, en remplaçant les tenseurs  $\mathbb{T}^b$ ,  $\mathbb{T}^{bi}(\psi)$ ,  $\langle \mathbb{T}^b \rangle$  par les tenseurs  $\mathbb{T}^{b'}(\psi)$ ,  $\mathbb{T}^{bi'}$ ,  $\langle \mathbb{T}^{b'} \rangle$  dans les équations des paragraphes 4.3.2.1 et 4.3.2.2, on obtient les caractéristiques élastiques macroscopiques du matériau dans la situation où toutes les fissures sont fermées.

### 4.3.3 Critère d'endommagement

On considère ici la situation d'une distribution isotrope de fissures distribuées dans une matrice solide élastique linéaire isotrope soumise au chargement à l'infini  $\Sigma$  dans la situation diluée. Le réseau des fissures se compose de  $n$  familles de fissures caractérisée chacune par l'angle  $\psi$ . Comme rappelé au chapitre 3, le critère de rupture pour la  $i$ ème famille de fissures s'écrit :

$$\begin{cases} G_\epsilon^i - G_c^i \leq 0 \\ \dot{\epsilon}^i \geq 0 \\ (G_\epsilon^i - G_c^i)\dot{\epsilon}^i = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

Dans la situation isotherme traitée ici, le taux de restitution d'énergie peut être calculé comme suit :

$$G_\epsilon^i = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^i} = -\frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon^i} : \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon^i} : \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \quad (4.54)$$

avec  $\Psi$  l'énergie libre macroscopique.

En utilisant la formule  $\mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^{hom} = \mathbb{I}$ , on montre sans difficulté la relation suivante :

$$\mathbb{S}^{hom} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \epsilon^i} : \mathbb{S}^{hom} = -\frac{\partial \mathbb{S}^{hom}}{\partial \epsilon^i}. \quad (4.55)$$

L'expression de  $G_\epsilon^i$  en fonction de la contrainte macroscopique s'écrit donc :

$$G_\epsilon^i = \frac{1}{2} \Sigma : \frac{\partial \mathbb{S}^{hom}}{\partial \epsilon^i} : \Sigma \quad (4.56)$$

En remplaçant dans la relation (4.56) le tenseur des complaisances macroscopiques par l'expression obtenue pour des fissures ouvertes puis par l'expression obtenue pour des fissures fermées, on obtient successivement les deux expressions suivantes :

$$\Rightarrow \begin{cases} G_\epsilon^i = \frac{1}{2} \pi \Sigma : \mathbb{T}^{bi}(\psi^i) : \mathbb{S}^s : \Sigma & \text{(cas d'une fissure ouverte)} \\ G_\epsilon^i = \frac{1}{2} \pi \Sigma : \mathbb{T}^{bi'}(\psi^i) : \mathbb{S}^s : \Sigma & \text{(cas d'une fissure fermée)} \end{cases} \quad (4.57)$$

$G_c^i$  joue le même rôle que l'énergie de rupture  $G_f$ , mais ce n'est pas une propriété de la matrice solide. L'approche proposée par Dormieux [20] permet de définir la relation entre  $G_c^i$  et  $G_f$ . On a dans la situation étudiée :

$$G_c^i = \frac{G_f}{a_0} = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{K_{Ic}^2}{a_0}. \quad (4.58)$$

Dans la formule du taux de restitution d'énergie pour la  $i$ ème famille de fissures ( $G_c^i$ ), on ne tient pas compte des interactions entre les fissures quand on calcule la

dissipation. La fissure est donc considérée comme isolée dans le domaine solide. On peut également noter que dans le cas général, la valeur  $G_c^i$  est différente pour chaque famille de fissure car elle dépend de la taille de la fissure considérée.

Dans le cas de déformation plane traité ici où le chargement est défini par (4.1), en combinant les formules (4.27) et (4.57), on montre que le critère de propagation s'énonce comme suit :

#### Cas d'une fissure ouverte

$$\begin{cases} \Sigma : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) \geq 0 \Leftrightarrow \Sigma_{11} \cos(\psi^i)^2 + \Sigma_{22} \sin(\psi^i)^2 \geq 0 \\ \Sigma_{11}^2 \cos(\psi^i)^2 + \Sigma_{22}^2 \sin(\psi^i)^2 = L_i^2 \end{cases} \quad (4.59)$$

#### Cas d'une fissure fermée

$$\begin{cases} \Sigma : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) < 0 \Leftrightarrow \Sigma_{11} \cos(\psi^i)^2 + \Sigma_{22} \sin(\psi^i)^2 < 0 \\ (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 \cos(\psi^i)^2 \sin(\psi^i)^2 = L_i^2 \end{cases} \quad (4.60)$$

avec  $L_i = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a_0^i}}$ .

Il apparaît clairement sur les équations (4.59) et (4.60) que la structure du critère de propagation de l'endommagement obtenue ici est identique à celle obtenue par l'approche développée au paragraphe 4.2. Le critère de propagation de chaque fissure s'écrit comme si cette fissure se trouvait isolée au sein de la matrice solide soumise au chargement macroscopique en contrainte loin de la fissure. On peut montrer, en reprenant la démarche exposée dans ce paragraphe, que les équations (4.59) et (4.60) sont valables quelque soit la distribution d'orientation et de taille des fissures (voir les formules (4.56) et (4.57) en particulier). Le résultat obtenu ici est donc valable dans la situation diluée quel que soient les propriétés du milieu fissuré. Ce résultat permet de construire immédiatement le critère de propagation de l'endommagement en construisant l'intersection dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  des domaines définis par les équations (4.59) et (4.60) pour chaque famille de fissures (même taille et même orientation). On a représenté sur la Fig. 4.10 le domaine obtenu en appliquant cette méthode dans le cas d'un matériau méso fissuré dans la situation où toutes les fissures sont de même taille et possèdent des orientations de direction distribuées

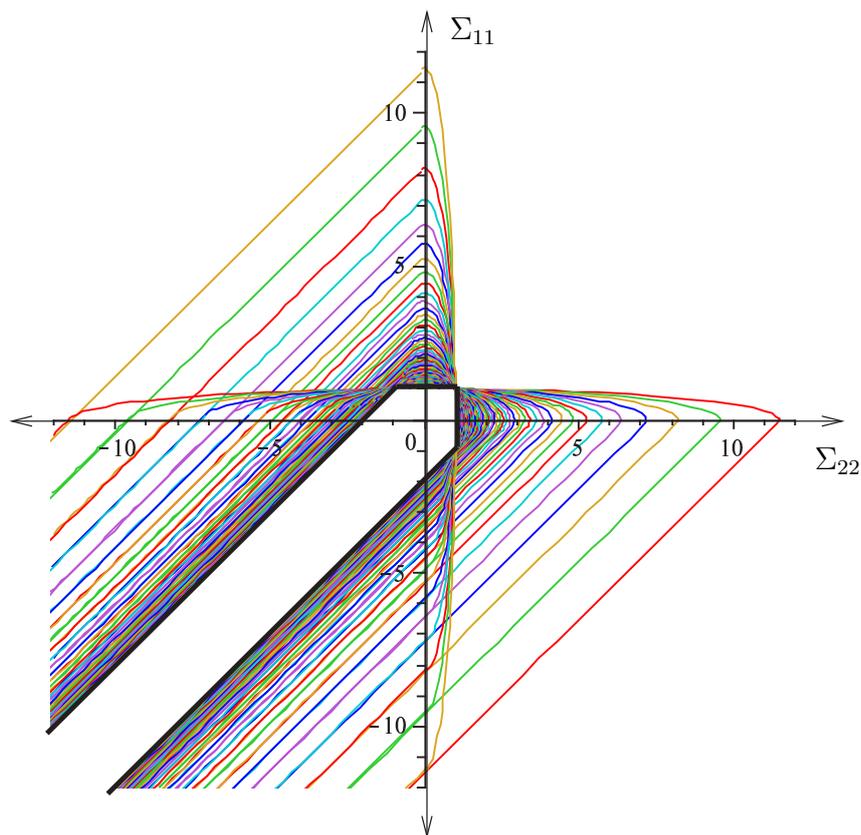


FIG. 4.10 – Le critère d'endommagement selon l'approche énergétique ( $L = 1$ )

aléatoirement (milieu isotrope).

#### 4.4 Comparaison et conclusion

La Fig. 4.11 présente la comparaison des prédictions obtenues en mettant en œuvre les deux approches présentées ci-dessus. Comme on le constate sur la figure, les limites prévues sont identiques pour une expérience de traction biaxiale. Dès que l'on sort de ce régime particulier, il existe un écart entre les deux modèles. De façon attendue cet écart augmente lorsque l'on s'écarte de la situation en traction biaxiale pour aller vers des états de cisaillement pur. Par contre, il est assez satisfaisant de constater que l'écart entre les deux approches reste toujours « raisonnable », ce qui valide l'approche énergétique. Il convient donc de garder à l'esprit que cette comparaison ne vaut que pour le déclenchement de la propagation de l'endommagement

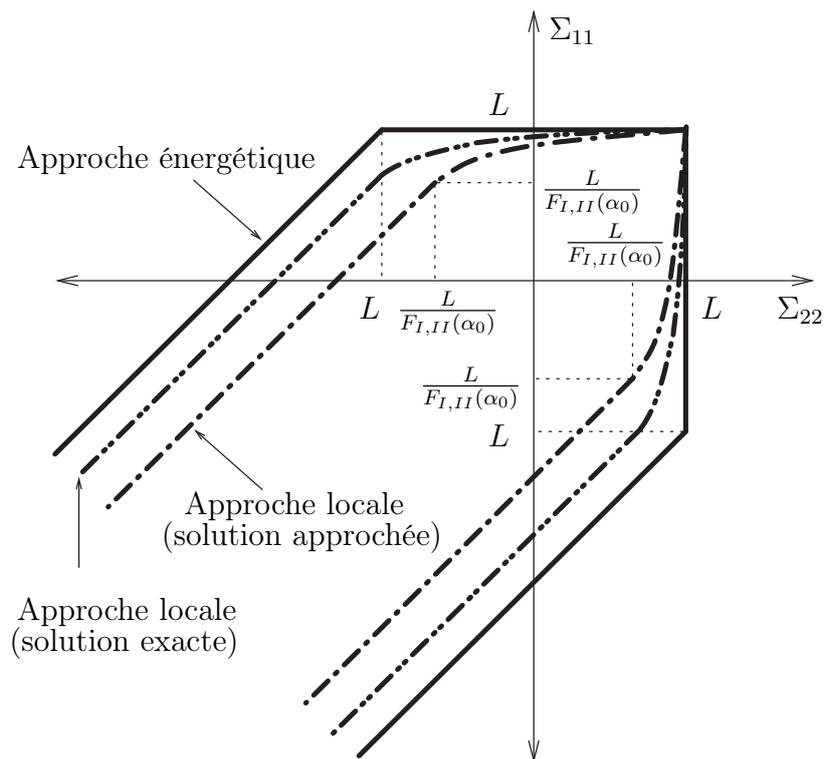


FIG. 4.11 – Comparaison entre les deux approches

et ne permet donc pas de se prononcer sur le comportement prédit par les deux approches lorsque le chargement appliqué a provoqué une propagation des fissures importantes.

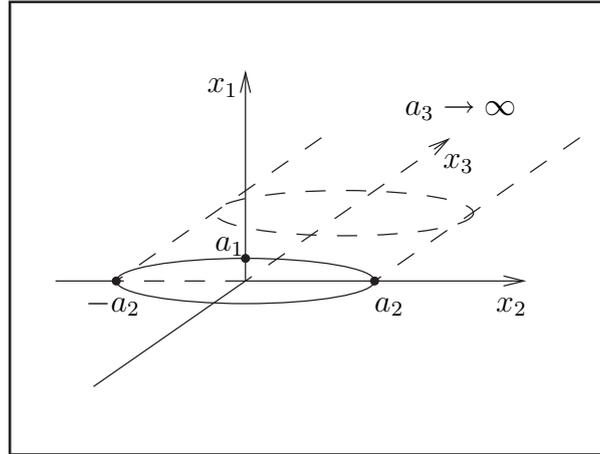


FIG. 4.12 – Ellipse cylindrique infini

## 4.5 Annexe C : Tenseur d'Eshelby pour une ellipse cylindrique infinie

Au chapitre 1 on a présenté la technique de changement d'échelle utilisant la solution d'Eshelby qui permet de déterminer les caractéristiques macroscopiques du matériau fissuré dont les fissures sont de forme ellipsoïdale aplatie ( $a_1 = a_2 \gg a_3$ ). Pour le cas particulier traité à ce chapitre où l'inclusion occupe une ellipse cylindrique infinie ( $a_1 = X * a_2, a_3 \rightarrow \infty$ ), le tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}_E^b$  dépend toujours de la forme de l'ellipse cylindrique, de l'orientation de l'inclusion, du tenseur des modules d'élasticité de la matrice solide et possède la propriété de symétrie mineure ( $S_{ijkl}^b = S_{jikl}^b = S_{ijlk}^b$ ).

Dans le cas où le comportement de la phase solide est isotrope et la configuration de l'inclusion est définie sur la Fig. 4.12, les coefficients non nuls du tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}_E^b$  s'écrivent [42] :

#### 4.5 Annexe C : Tenseur d'Eshelby pour une ellipse cylindrique infinie 61

---

$$\begin{aligned}S_{1111}^b &= \frac{1}{2} \frac{X(3 - 2\nu^s) + 2(1 - \nu^s)}{(1 - \nu^s)(X + 1)^2} \\S_{2222}^b &= \frac{1}{2} \frac{X(2X(1 - \nu^s) + (3 - 2\nu^s))}{(1 - \nu^s)(X + 1)^2} \\S_{1122}^b &= \frac{1}{2} \frac{X(2\nu^s - 1) + 2\nu^s}{(1 - \nu^s)(X + 1)^2} \\S_{2233}^b &= \frac{X\nu^s}{(1 - \nu^s)(X + 1)} \\S_{2211}^b &= \frac{1}{2} \frac{X(2\nu^s X + 2\nu^s - 1)}{(1 - \nu^s)(X + 1)^2} \\S_{1133}^b &= \frac{\nu^s}{(1 - \nu^s)(X + 1)} \\S_{1212}^b &= \frac{1}{2} \frac{(1 - \nu^s)(1 + X^2) + X(1 - 2\nu^s)}{(1 - \nu^s)(X + 1)^2} \\S_{2323}^b &= \frac{X}{2(X + 1)} \\S_{3131}^b &= \frac{1}{2(X + 1)}\end{aligned} \tag{4.61}$$



---

# Influence de la température sur le comportement des milieux poreux non saturés

---

## 5.1 Introduction

Il est bien connu que les propriétés d'un matériau (masse volumique, module d'élasticité, dilatation thermique, ténacité ...) dépendent de la température. On développe donc le modèle micromécanique décrit au chapitre 2 permettant d'identifier le comportement macroscopique des matériaux poreux en régime non saturé de façon à prendre en compte l'effet d'une variation de la température. Cette problématique est essentielle pour modéliser le comportement des roches argileuses utilisées comme matériaux de confinement dans les sites de stockage de déchets nucléaires. En effet, ces roches sont soumises à des chargements thermiques dus au dégagement de chaleur des colis de déchets radioactifs et leur porosité est constituée de fissures. De nombreuses études expérimentales ont été consacrées à cette problématique [6, 45, 49, 53]. A partir des résultats de ces expériences, plusieurs modèles macroscopiques ont été développés dans le but de prédire le comportement des sites de stockages [36, 45]. Par contre, à notre connaissance, le travail présenté dans ce chapitre constitue la première approche micromécanique du comportement thermomécanique de roches fissurées en situation non saturée. Comme on le verra dans la suite, l'approche par

changement d'échelle permet d'identifier au moins dans la situation simple traitée ici, l'influence d'une variation de température sur la courbe capillaire d'une roche mésolfissurée non saturé.

Pour la caractérisation du comportement de ces matériaux, pour différentes valeurs de la température, l'évolution du degré de saturation en fonction de la pression capillaire ou de la succion est une caractéristique essentielle pour l'identification des paramètres des lois de comportement. Il faut noter qu'on ne s'intéresse ici qu'à la succion matricielle qui correspond à la pression capillaire, le terme « pression capillaire » est donc préféré au terme succion dans la suite de ce chapitre.

Les résultats d'Olchitzky pour l'argile FoCa 7 [45] sont présentés sur la Fig. 5.1 tandis que ceux de Tang pour la bentonite MX80 [53] sont présentés sur la Fig. 5.2. On a également représenté les résultats de Romero et al. [49] sur la Fig. 5.3 concernant l'argile de Boom compactée à deux poids volumiques secs différents :  $13,7 \text{ kN/m}^3$  et  $16,7 \text{ kN/m}^3$  en condition isotherme à  $22^\circ\text{C}$  et à  $80^\circ\text{C}$ . Ces résultats montrent que l'effet de la température faible pour les petites valeurs de la pression capillaire et que la courbe de rétention d'eau est peu sensible aux variations de la température pour les grandes valeurs de la pression capillaire.

On observe sur les trois Fig. 5.1, 5.2 et 5.3 les mêmes phénomènes. Tout d'abord, il est clair que l'augmentation de la température provoque un abaissement de la capacité des matériaux étudiés à stocker de l'eau pour une valeur de la pression capillaire donnée. On constate également que pour une variation de température, le changement de la courbe capillaire pour des différentes pressions capillaires est différent. Une analyse dimensionnelle simple (ne prenant en compte que les variations de la tension interfaciales en fonction de la température) suggère qu'une variation de température provoque une simple translation de la courbe de rétention d'eau dans la direction de l'axe des pressions capillaires (axe des abscisses pour la Fig. 5.1, axe des ordonnées sur les Fig. 5.2 et 5.3). Clairement, les résultats expérimentaux représentés sur les Fig. 5.1 à 5.3 montrent que ce raisonnement simple ne s'applique pas ici.

Une modélisation de l'influence de la température sur la courbe de rétention d'eau ne prenant en compte que le changement de la tension surfacique eau-air n'est pas suffisante pour expliquer les phénomènes observés expérimentalement pour la bentonite MX80 [53]. La même conclusion a été obtenue par Olchitzky pour l'argile

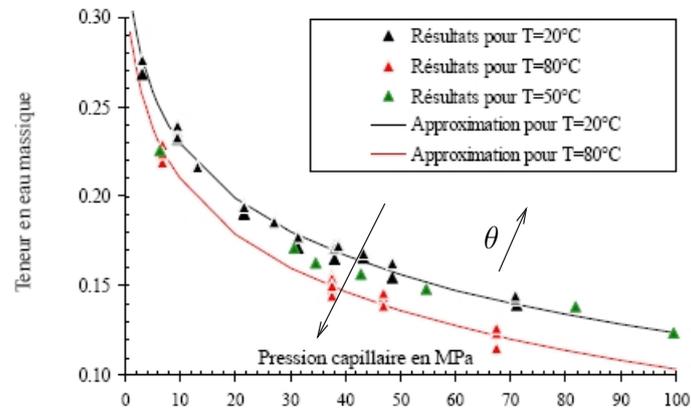


FIG. 5.1 – Courbes de rétention d'eau pour l'argile FoCa à deux température différentes [45]

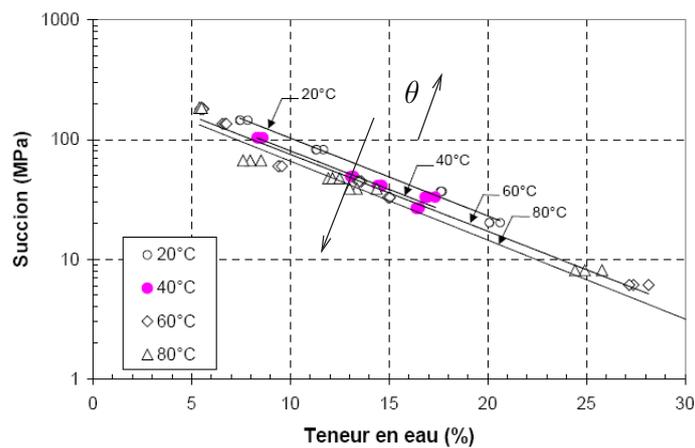


FIG. 5.2 – Courbes de rétention d'eau pour la bentonite MX80 à différentes températures [53].

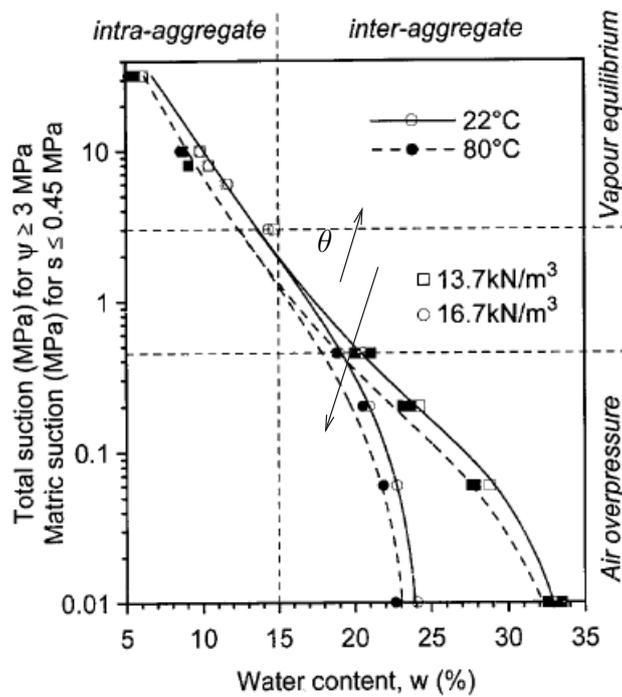


FIG. 5.3 – Courbes de rétention d'eau pour l'argile de Boom à différentes températures et pour deux états de compaction différents [49]

FoCa 7 [45].

Le but du travail présenté est donc d'étudier, à partir du modèle micromécanique présenté au chapitre 2, l'effet d'une variation de la température sur la courbe capillaire d'un milieu poreux mésolfissuré. Pour cela, on établit tout d'abord la loi de comportement thermo-hydro-mécanique macroscopique d'un milieu poreux saturé. Ensuite, deux modèles de milieux non saturés sont développés. Le deuxième modèle prend en compte le couplage géométrique entre les déformations du matériau et les effets capillaires.

## 5.2 Comportement thermoélastique d'un milieu poreux saturé

On commence par étudier le comportement thermoélasticité d'un milieu solide avant d'aborder l'approche micromécanique du problème thermo-poro-mécanique.

### 5.2.1 Thermoélasticité d'un milieu solide

Considérons dans ce paragraphe un VER de matériau solide supposé avoir un comportement thermoélastique linéaire caractérisé par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \mathbf{k}(\underline{x})\Theta \\ s(\underline{x}) = \mathbf{k}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + c(\underline{x})\Theta \end{cases} \quad (5.1)$$

On désigne par  $\Omega_s$  le domaine occupé par le VER.

Dans ces expressions,  $\Theta$  désigne l'écart de température par rapport à un état de référence supposé libre de contrainte. On suppose que le champ  $\Theta$  est uniforme sur tout  $\Omega_s$ .  $s(\underline{x})$  désigne l'accroissement de l'entropie tandis que  $\mathbf{k}(\underline{x})$  et  $c(\underline{x})$  désignent respectivement la contrainte qui s'établit dans le matériau solide lorsqu'on le soumet à une variation de température unitée sans le laisser se déformer et la chaleur spécifique à déformation constante. Dans la situation où le matériau est constitué d'une seule phase solide homogène, la loi de comportement thermoélastique macroscopique correspondante est de la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^s : \mathbf{E} - \mathbf{k}^s \Theta \\ S - S_0 = \mathbf{k}^s : \mathbf{E} + c^s \Theta \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $S$  et  $S_0$  sont l'entropie à l'état actuel et à l'état initial. La loi de comportement (5.2) peut aussi être exprimée sous la forme inverse équivalente :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}^s : \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\alpha}^s \Theta \\ S - S_0 = \boldsymbol{\alpha}^s : \boldsymbol{\Sigma} + c_\sigma^s \Theta \end{cases} \quad (5.3)$$

avec  $\boldsymbol{\alpha}^s$ , le tenseur de dilatation thermique macroscopique et  $c_\sigma^s$  la chaleur spécifique à contrainte constante. Il convient de remarquer que les propriétés matérielles pour la phase solide définies (5.2) et (5.3) sont dépendantes et sont reliées par les équations suivantes :

$$\mathbb{C}^s = \mathbb{S}^{s-1}, \quad \mathbf{k}^s = \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\alpha}^s, \quad c^s = c_\sigma^s - \boldsymbol{\alpha}^s : \mathbf{k}^s. \quad (5.4)$$

### 5.2.2 Localisation pour le problème thermo-poro-mécanique

On considère de nouveau un volume représentatif  $\Omega$  d'un milieu hétérogène poreux. Ce volume est constitué d'une phase solide homogène qui occupe le domaine  $\Omega_s$  et des pores occupent la partie  $\Omega_f$  du volume  $\Omega$  de sorte que  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$ . Le comportement du matériau constitutif de la phase solide obéit à la loi de thermoélasticité linéaire (5.2). L'espace poreux saturé par un fluide où règne une pression uniforme  $p$ . Le VER est par ailleurs soumis à un chargement couplé thermo-mécanique défini par une température uniforme  $\Theta = T - T_0$  mesurée par un écart de température entre l'état actuel et l'état de référence ( $T_0$ ) et une déformation homogène appliquée sur le bord du VER  $\mathbf{E}$ . Le problème à résoudre à l'échelle microscopique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & : (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \mathbf{k}^s \Theta & : (\Omega_s) \\ s(\underline{x}) = \mathbf{k}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + c^s \Theta & : (\Omega_s) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = -p \mathbf{I} & : (\Omega_f) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi}) & : (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & : (\partial\Omega) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = \underline{0} & : (\partial\Omega_f) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

En moyennant la solution du problème défini par les équations (5.5), on montre qu'à l'échelle macroscopique, le comportement thermo-poro-élastique s'écrit [15, 28] :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \mathbf{B}p - \mathbf{k}^{hom} \Theta \quad (5.6)$$

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p}{N} - 3\alpha_\phi^{hom} \Theta \quad (5.7)$$

$$S - S_0 = \mathbf{k}^{hom} : \mathbf{E} - 3\alpha_\phi^{hom} p + c^{hom} \Theta \quad (5.8)$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique  $\mathbb{C}^{hom}$ , le tenseur et le module de Biot  $\mathbf{B}$  et  $N$  sont toujours définis par les équations (1.19), (1.30) et (1.31) données au chapitre 1 pour la situation isotherme. Il convient de noter que ces relations obtenues pour le cas poroélastique isotherme sont encore valables dans la situation thermo-poro-élastique car on a négligé ici les variations de  $\mathbb{C}^s$  en fonction de la température. Le détail de la démonstration des formules (5.8) à partir des solutions du problème (5.5) est donné dans le paragraphe suivant.

Dans l'étape suivante, on s'intéresse à réaliser une procédure d'homogénéisation qui permet d'identifier les autres propriétés homogénéisées du matériau : le tenseur de contrainte thermique homogénéisé  $\mathbf{k}^{hom}$ , la chaleur spécifique homogénéisée  $c^{hom}$  et le coefficient de dilatation thermique homogénéisé  $\alpha_\phi^{hom}$ .

### 5.2.3 Homogénéisation du problème thermo-poro-mécanique

Compte tenu de la linéarité du problème (5.5), sa résolution peut être décomposée en 3 résolutions correspondant aux chargements élémentaires suivants :

1.  $\mathbf{E} \neq 0, p = 0, \Theta = 0$ , qui définit à un chargement mécanique pur imposé.
2.  $\mathbf{E} = 0, p \neq 0, \Theta = 0$ , qui définit à un chargement hydrique pur imposé.
3.  $\mathbf{E} = 0, p = 0, \Theta \neq 0$ , qui définit à un chargement thermique pur imposé.

*Loi de comportement (5.6)*

Pour les deux premiers chargements définis ci-dessus, le problème posé sur le VER est un problème purement mécanique. A partir de la solution de ces deux problèmes on montre que le tenseur d'élasticité macroscopique et le tenseur de Biot sont respectivement définis par les relations (1.19) et (1.30). Le tenseur des contraintes macroscopiques pour chacun des deux problèmes s'écrit respectivement :

$$1 \quad \Sigma^{\mathbf{E}} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (5.9)$$

$$2 \quad \Sigma^p = -\mathbf{B}p. \quad (5.10)$$

Considérons maintenant le troisième problème pour lequel le chargement appliqué consiste en un écart de température uniforme. En utilisant le théorème de Levin [12], on montre qu'à l'échelle macroscopique la contrainte qui s'établit dans le VER est définie par :

$$\Sigma^{\Theta} = - \langle \mathbf{k} : \mathbb{A} \rangle \Theta = -(1 - \phi_0) \mathbf{k}^s : \langle \mathbb{A} \rangle^s \Theta = -\mathbf{k}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^p) \Theta. \quad (5.11)$$

On pose alors :

$$\mathbf{k}^{hom} = \mathbf{k}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^p) = \boldsymbol{\alpha}^s : \mathbb{C}^{hom}. \quad (5.12)$$

On a donc

$$\Sigma^\Theta = -\mathbf{k}^{hom}\Theta. \quad (5.13)$$

De plus, dans la situation du milieu drainé ( $p = 0$ ), la déformation moyenne se calcule en utilisant l'équation :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \Sigma + \mathbb{S}^{hom} : \mathbf{k}^{hom}\Theta = \mathbb{S}^{hom} : \Sigma + \boldsymbol{\alpha}^{hom}\Theta, \quad (5.14)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}^{hom}$  désigne le tenseur de dilatation thermique drainé macroscopique. En comparant la formule (5.14) avec la formule (5.12), on déduit sans difficulté que  $\boldsymbol{\alpha}^{hom}$  et  $\boldsymbol{\alpha}^s$  sont identiques.

*Loi de comportement (5.7)*

Pour les deux premiers problèmes, la variation de la porosité se calcule en utilisant l'équation (1.32). On a donc :

$$1 \quad . \quad \delta\phi^{\mathbf{E}} = \mathbf{B} : \mathbf{E} \quad (5.15)$$

$$2 \quad . \quad \delta\phi^p = \frac{p}{N}, \quad (5.16)$$

où le coefficient de Biot  $N$  est calculé grâce à l'équation (1.31).

Pour calculer la variation de la porosité pour le troisième problème, on utilise les équation suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^\Theta = (1 - \phi_0) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^s + \phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^p = 0 \\ \Sigma^\Theta = (1 - \phi_0) \mathbb{C}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^s - (1 - \phi_0) \mathbf{k}^s \Theta = -\mathbf{k}^{hom} \Theta \end{cases} \quad (5.17)$$

On en déduit que

$$\phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^p = \mathbb{S}^s : (\mathbf{k}^{hom} - (1 - \phi_0) \mathbf{k}^s) \Theta \quad (5.18)$$

et :

$$\delta\phi^\Theta = \phi_0 \mathbf{I} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^p = \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{k}^{hom} - (1 - \phi_0)\mathbf{k}^s)\Theta. \quad (5.19)$$

On a donc :

$$3\alpha_\phi^{hom} = -\mathbf{I} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{k}^{hom} - (1 - \phi_0)\mathbf{k}^s) = -\phi_0 \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : \mathbf{k}^s : (\mathbb{I} - \langle \mathbb{A} \rangle^p) \quad (5.20)$$

*Loi de comportement (5.8)*

La troisième loi de comportement relie la variation de l'entropie de la phase solide aux variations de  $\mathbf{E}$ ,  $p$  et  $\Theta$ . En utilisant toujours le caractère linéaire du problème traité, on calcule les variations d'entropie pour les trois problèmes posés sur le VER.

On a donc :

$$S - S_0 = \langle s(\underline{x}) \rangle = (1 - \phi_0) \langle s^{\mathbf{E}} \rangle^s + (1 - \phi_0) \langle s^p \rangle^s + (1 - \phi_0) \langle s^\Theta \rangle^s \quad (5.21)$$

Pour le premier problème, on a :

$$\begin{aligned} (1 - \phi_0) \langle s^{\mathbf{E}} \rangle^s &= (1 - \phi_0) \mathbf{k}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{E}} \rangle^s = (1 - \phi_0) \mathbf{k}^s : \langle \mathbb{A} \rangle^s : \mathbf{E} \\ &= \mathbf{k}^s : (\mathbb{I} - \phi_0 \langle \mathbb{A} \rangle^p) : \mathbf{E} = \mathbf{k}^{hom} : \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pour le deuxième problème, on a :

$$(1 - \phi_0) \langle s^p \rangle^s = (1 - \phi_0) \mathbf{k}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle^s = -\phi_0 \mathbf{k}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle^p. \quad (5.23)$$

De plus,

$$\delta\phi^p = \phi_0 \mathbf{I} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle^p = \frac{p}{N} = \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - \phi_0 \mathbf{I})p. \quad (5.24)$$

Donc :

$$\phi_0 \langle \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle^p = \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - \phi_0 \mathbf{I})p. \quad (5.25)$$

En reportant l'équation (5.25) dans l'équation (5.23), on obtient :

$$(1 - \phi_0) \langle s^p \rangle^s = \mathbf{k}^s : \mathbb{S}^s : (\phi_0 \mathbf{I} - \mathbf{B})p = \phi_0 \mathbf{k}^s : \mathbb{S}^s : \mathbf{I} : (\mathbb{I} - \langle \mathbb{A} \rangle^p)p. \quad (5.26)$$

En partant de l'équation (5.20), on montre sans difficulté que l'on a :

$$\begin{aligned} \phi_0 \mathbf{k}^s : \mathbb{S}^s : \mathbf{I} : (\mathbb{I} - \langle \mathbb{A} \rangle^p) &= \phi_0 \mathbf{I} : \mathbb{S}^s : \mathbf{k}^s : (\mathbb{I} - \langle \mathbb{A} \rangle^p) \\ &= -3\alpha_\phi^{hom}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

En reportant l'équation (5.27) dans l'équation (5.26), on obtient :

$$(1 - \phi_0) \langle s^p \rangle^s = -3\alpha_\phi^{hom}p. \quad (5.28)$$

Pour le troisième problème, on a :

$$(1 - \phi_0) \langle s^p \rangle^\Theta = (1 - \phi_0) \mathbf{k}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^s + (1 - \phi_0)c^s \Theta = -\phi_0 \mathbf{k}^s : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Theta \rangle^p + (1 - \phi_0)c^s \Theta. \quad (5.29)$$

En reportant l'équation (5.18) dans l'équation (5.29), on en déduit :

$$\begin{aligned} (1 - \phi_0) \langle s^p \rangle^\Theta &= (-\mathbf{k}^s : \mathbb{S}^s : (\mathbf{k}^{hom} - (1 - \phi_0)\mathbf{k}^s) + (1 - \phi_0)c^s) \Theta \\ &= c^{hom} \Theta. \end{aligned} \quad (5.30)$$

En sommant les trois équations (5.22), (5.28) et (5.30), on obtient finalement la troisième loi d'état (5.8).

### 5.3 Comportement thermoélastique du milieu poreux non saturé

Dans la section précédente, on a étudié le comportement thermomécanique du matériau poreux dont l'espace poreux connecté est saturé par un unique fluide. On s'intéresse, maintenant, aux spécificités du comportement thermomécanique dues à la présence simultanée de plusieurs fluides non miscibles au sein de l'espace poreux

ainsi qu'à l'existence de membranes capillaires séparant les différentes phases fluides. Pour fixer les idées, on suppose dans la suite que l'espace poreux est saturé par une phase liquide et une phase gazeuse. Dans ce cadre, on reprend les caractéristiques physiques, mécaniques et géométriques qui sont décrits au deuxième chapitre de la thèse pour ces deux phases fluides.

### 5.3.1 Effet d'une variation de température sur la courbe capillaire d'un milieu indéformable

Dans un premier temps, on s'intéresse au cas où la phase solide est constituée d'un matériau indéformable. On a donc  $\varepsilon(\underline{x}) = 0$  et  $\phi = \phi_0$ . Dans cette situation, la courbe capillaire qui permet de calculer la pression capillaire en fonction de la saturation en liquide ne dépend que de la morphologie de l'espace poreux et de la température. Pour étudier l'influence d'une variation de la température sur la courbe capillaire, seules les variations des tensions surfaces en fonction de la température doivent être prises en compte. Comme on l'a signalé au deuxième chapitre, les trois interfaces liquide-gaz, solide-liquide, solide-gaz se raccordent le long d'une courbe le long de la surface solide. Des considérations d'équilibre mécanique permettent de démontrer la relation  $\gamma_{\ell g} \cos \theta = \gamma_{sg} - \gamma_{sl}$  où  $\theta$  désigne l'angle de mouillage de la phase liquide sur la phase solide.

Pour simplifier, on suppose de nouveau que la phase liquide mouille parfaitement la phase solide ( $\theta = 0$ ) et que la tension de surface régnant dans l'interface solide-liquide est nulle. Cette dernière hypothèse conduit à négliger les effets d'une variation de la température sur la valeur de la tension de surface liquide-solide. Dans la mesure où les données expérimentales sur ce phénomène sont, à notre connaissance, extrêmement rares, cette hypothèse nous paraît ne pas limiter la portée des résultats obtenus ici.

Compte tenu de ces deux hypothèses, la tension de surface dans les interfaces liquide-gaz et solide-gaz s'écrit :

$$\gamma_{\ell g}(\Theta) = \gamma_{sg}(\Theta) = \gamma(\Theta) = \gamma_0 f(\Theta) \tag{5.31}$$

où  $\gamma_0$  est la tension surface dans l'état de référence.

La loi de Laplace s'écrit maintenant :

$$p_c(\Theta) = p_g(\Theta) - p_\ell(\Theta) = \frac{2\gamma(\Theta)}{r_{lg}} \quad (5.32)$$

où  $r_{lg}$  désigne le rayon de la courbure de l'interface liquide-gaz et  $p_c(\Theta)$  la pression capillaire. En combinant les équations (5.31) et (5.32), on obtient la relation entre la pression capillaire et la température quand la répartition des phases fluides au sein de l'espace poreux est figée :

$$p_c(\Theta) = \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} p_c(0). \quad (5.33)$$

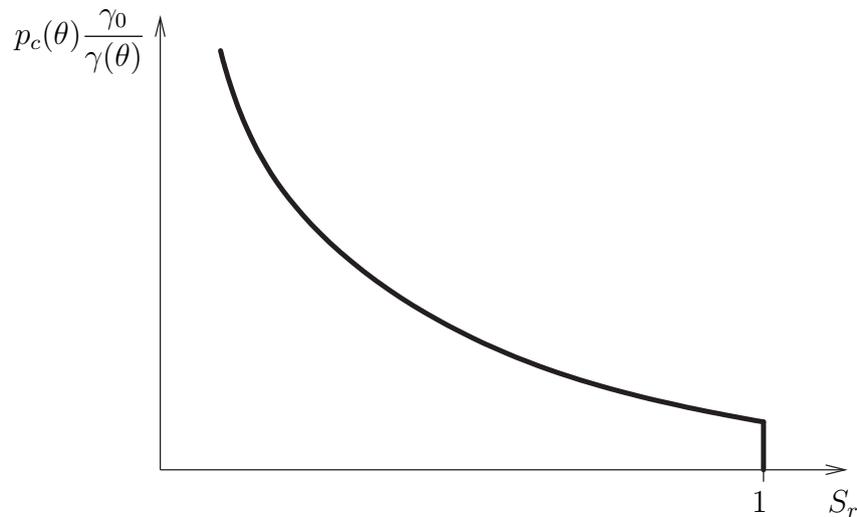


FIG. 5.4 – Relation entre la courbe capillaire et le température dans le cas indéformable

De l'équation (5.33), on déduit que la courbe de rétention en liquide du milieu poreux est décrite par une unique courbe dans le diagramme  $S_r - p_c \gamma_0 / \gamma(\Theta)$  comme représentée sur la Fig. 5.4. En conséquence, dans un diagramme  $S_r - p_c$ , une variation de température doit provoquer une translation verticale de la courbe capillaire. Plus précisément, la tension de surface est une fonction décroissante de la température. Pour les milieux poreux indéformables, on prévoit donc qu'une augmentation de température doit provoquer une translation vers le bas de la courbe capillaire. Comme on le constate immédiatement sur les Fig. 5.1, 5.2 et 5.3, les matériaux argileux utilisés pour confiner les déchets radioactifs ne satisfont pas à ces hypothèses.

### 5.3.2 Modèle thermo-poro-mécanique linéaire d'un milieu solide déformable

On s'intéresse maintenant à des matériaux dont la matrice solide est supposée avoir un comportement thermoélastique linéaire et dont l'espace poreux est constitué de pores sphériques répartis en  $n$  classes caractérisées chacune par un rayon  $R_\beta$ . De plus, on fait l'hypothèse que les pores appartenant à une classe donnée sont tous pleins de liquide à la pression  $p_\ell$  où tous pleins de gaz à la pression  $p_g$ , la répartition étant définie par l'ensemble  $\mathcal{I}_g$  tel que :

- $\beta \in \mathcal{I}_g$       les pores de la classe  $\beta$  sont pleins de gaz
- $\beta \notin \mathcal{I}_g$       les pores de la classe  $\beta$  sont pleins de liquide

La loi de comportement de ce matériau s'écrit [11, 12] :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + (S_r p_c - p_g) \mathbf{B} + \boldsymbol{\Sigma}_\beta \quad (5.34)$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma}_\beta = \sum_{\beta \in \mathcal{I}_g} S_\beta p_\beta \mathbf{B} \quad \text{et} \quad S_\beta = \frac{\phi_\beta}{\phi_0} \quad (5.35)$$

où  $\phi_\beta$  désigne la fraction volumique de la classe de pores de rayon  $R_\beta$  remplis de gaz et  $p_\beta$  représente l'effet de la tension surface pour ce pore, calculée par la relation :

$$p_\beta = \frac{2\gamma}{R_\beta}. \quad (5.36)$$

Dans le cas anisotherme, en combinant les formules (5.6), (5.12) valables pour la situation saturée et les formules (5.33), (5.34), on montre la loi macroscopique thermoélastique de ce milieu poreux non saturé s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{C}^{hom} : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}^s \Theta) + (S_r p_c(\Theta) - p_g) \mathbf{B} + \sum_{\beta \in \mathcal{I}_g} S_\beta \frac{2\gamma(\Theta)}{R_\beta} \mathbf{B} \\ &= \mathbb{C}^{hom} : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}^s \Theta) + \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} \left( S_r p_c(0) - p_g + \sum_{\beta \in \mathcal{I}_g} S_\beta \frac{2\gamma(0)}{R_\beta} \right) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Cette loi permet de prendre en compte l'effet d'une variation de température sur le comportement du matériau poreux non saturé due à une variation de la dilatation thermique de la phase solide et de la variation de la tension surface avec la température. Cependant, ce modèle ne permet pas d'identifier directement la relation entre la variation de la saturation  $S_r$  et la pression capillaire  $p_c$  qui joue un rôle important dans le comportement macroscopique du matériau lors du drainage ou de l'imbibition. Nous allons donc intégrer à notre modèle micromécanique le modèle capillaire microscopique présenté par Dullien dans [21]. Dans ce modèle, on suppose que le volume du réseau poreux connectant les différents pores entre eux est négligeable du point de vue mécanique et pour le calcul de la saturation ; mais qu'il joue un rôle déterminant pour les relations entre pression capillaire et saturation en liquide. On suppose que le réseau poreux est constitué d'une succession de pores de rayon  $R_\beta$  ( $1 \leq \beta \leq n$  et  $R_1 > R_2 > \dots > R_n$ ) décroissant reliés entre eux par des canaux de rayons  $r_\beta$  décroissants (Fig. 5.5). On suppose que le liquide mouille parfaitement le solide ( $\gamma_{sl} = 0, \theta = 0, \gamma_{lg} = \gamma_{sg}$ ), que les pores sont soit entièrement remplis de liquide soit entièrement remplis de gaz et que le ménisque capillaire étant toujours localisé dans le canal capillaire reliant les pores entre eux. Introduisons alors  $\beta^*$ ,  $1 \leq \beta^* \leq n$ , le nombre entier tel que tous les pores de classe  $\beta > \beta^*$  soient remplis de liquide et que tous les pores de classe  $\beta < \beta^*$  soient remplis de gaz. On suppose que lors de l'imbibition c'est le rayon du pore  $R_{\beta^*}$  qui détermine la valeur de la pression capillaire alors que lors du drainage c'est le rayon d'accès à ce pore  $r_{\beta^*}$  qui fixe la valeur de ma pression capillaire. On a donc les relations suivantes :

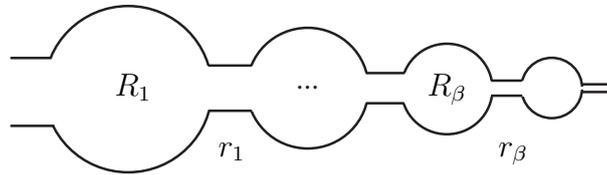


FIG. 5.5 – Modèle morphologique de l'espace poreux pour modéliser l'hystérésis capillaire

$$dS_r = - \sum_{\beta \in \mathcal{I}_g} dS_\beta = - \sum_{\beta=1}^{\beta^*} dS_\beta \quad (5.38)$$

avec

$$\text{si } dS_r > 0 \text{ (imbibition) : } p_c(\Theta) = \frac{2\gamma(\Theta)}{R_{\beta^*}} \quad (5.39)$$

et

$$\text{si } dS_r < 0 \text{ (drainage) : } p_c(\Theta) = \frac{2\gamma(\Theta)}{r_{\beta^*}}. \quad (5.40)$$

On introduit alors :

$$\begin{aligned} \Sigma_g(S_r, \Theta) &= \sum_{\beta \in \mathcal{I}_g} S_\beta \frac{2\gamma(\Theta)}{R_\beta} = \int_{S_r}^1 p_c(\Theta)(dS_r > 0) dS_r \\ &= \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} \int_{S_r}^1 p_c(0)(dS_r > 0) dS_r = \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} \Sigma_g(S_r, 0) \end{aligned} \quad (5.41)$$

où  $\Sigma_g(S_r, \Theta)$  et  $\Sigma_g(S_r, 0)$  désignent respectivement la précontrainte prenant en compte l'effet capillaire dans le domaine gazeux à l'état actuel et à l'état de référence.

La loi macroscopique (5.37) devient :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}^s \Theta) + \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} (S_r p_c(0) - p_g + \Sigma_g(S_r, 0)) \mathbf{B}. \quad (5.42)$$

On constate que pour cette configuration, la relation entre la pression capillaire, la température et la saturation est toujours décrite par une courbe capillaire possédant les mêmes propriétés que celles obtenues en supposant la phase solide indéformable (voir la Fig. 5.6), c'est à dire que la courbe de rétention en liquide est décrite par une courbe maîtresse dans le diagramme  $S_r - p_c \gamma_0 / \gamma(\Theta)$ . Par contre, on constate que le modèle de Dullien permet bien de rendre compte du phénomène d'hystérésis capillaire. Le modèle présenté ici permet donc de coupler déformation, variation de saturation et variation de température.

D'un point de vue pratique, il est intéressant d'observer que l'identification du comportement poro-thermo-élastique non saturé d'un milieu satisfaisant aux hypothèses énoncées ci-dessus peut se faire à partir d'expérience poromécanique en situation saturée (mesures de  $\mathbb{C}^{hom}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $N$ ), de dilatométrie en situation drainée libre de contrainte (mesure de  $\alpha^s$ ) et de sorption-désorption sans chargement mécanique (mesure des courbes capillaires) à une unique température. Il convient de noter que

les lois de variation de la tension de surface liquide-gaz en fonction de la température sont bien connues pour les fluides usuels.

Il n'en reste pas moins que ce modèle ne permet pas de rendre compte des résultats expérimentaux décrits sur les Fig. 5.1, 5.2 et 5.3.

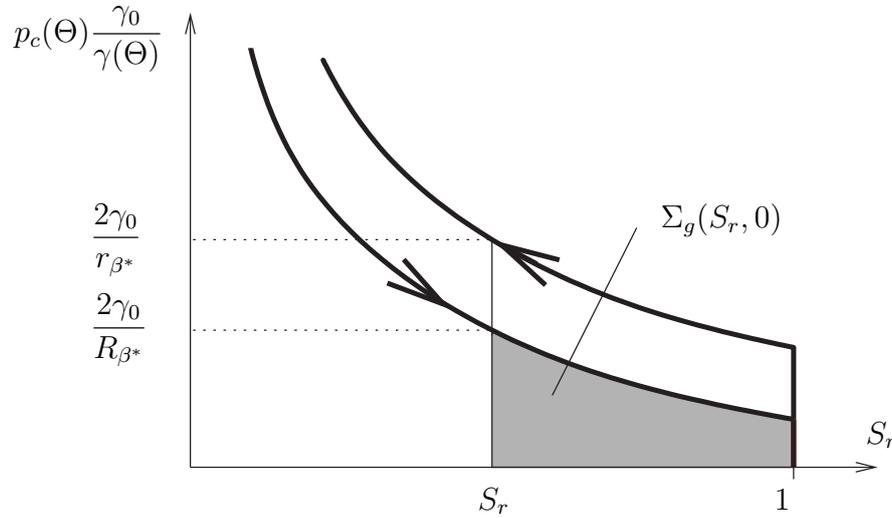


FIG. 5.6 – Modèle morphologique pour l’hystérésis capillaire

### 5.3.3 Modèle thermo-poro-mécanique non linéaire d’un milieu fissuré non saturé

A la différence de la section précédente, on prend maintenant en compte le couplage entre les changements de géométrie de l’espace poreux et les chargements y compris le changement de la température ( $\Theta$ ). Pour cela, on utilise le modèle non linéaire de comportement d’un milieu fissuré non saturé isotherme développé dans [57] et présenté au paragraphe 2.2.5. Comme l’on a déjà dit, ce modèle est caractérisé par deux équations : l’équation d’état macroscopique (2.65) et l’équation de couplage géométrique (2.69).

Dans le cas anisotherme traité ici, en reproduisant les mêmes raisonnements et les mêmes calculs qu’au paragraphe 2.2.5 pour la prise en compte du couplage entre déformations du milieu poreux et effets capillaires, au paragraphe 5.2 pour la prise en compte de la dilatation thermique du milieu solide et au paragraphe 5.3.1 pour la prise en compte de l’effet de la température sur la tension de surface dans les

interfaces, on montre que les deux équations du problème (2.65) et (2.69) s'écrivent dans cette situation :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : (\mathbf{E} - \alpha^s \Theta) + \Sigma^p \quad \text{avec} \quad \Sigma^p = \sum_{i=1}^n \frac{4}{3} \pi \epsilon^i \sigma_i^p(p_c, S_r, \Theta) : \mathbb{T}^i, \quad (5.43)$$

$$X^i - X_0^i = (\underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i) : \mathbb{T}^i : (\mathbf{E} - \alpha^s \Theta - \mathbb{S}^s : \sigma_i^p(p_c, S_r, \Theta)), \quad (5.44)$$

où  $\sigma_i^p(p_c, S_r, \Theta)$  est calculé par (2.20) avec  $\gamma = \gamma(\Theta)$  :

$$\sigma_i^p(p_c, S_r, \Theta) = \frac{\gamma(\Theta)}{a_i X_i} \left( \frac{3 - \cos^2 \varphi}{2} (\underline{e}_1^i \otimes \underline{e}_1^i + \underline{e}_2^i \otimes \underline{e}_2^i) + \cos^2 \varphi \underline{e}_3^i \otimes \underline{e}_3^i \right) - p_g \mathbf{I}. \quad (5.45)$$

Pour évaluer l'influence de la température sur le comportement du matériau et le rôle des couplages géométriques, on considère de nouveau le cas d'un matériau constitué d'une phase solide élastique linéaire isotrope dont les fissures sont toutes de mêmes tailles, sont dans le même état de précontraint et présentent une répartition d'orientation isotrope. Le VER est soumis à un chargement isotrope défini par  $\Sigma = \Sigma \mathbf{I}$  et  $\mathbf{E} = E \mathbf{I}$ . De plus, on s'intéresse à la situation où la contrainte macroscopique et la pression gazeuse sont nulles et on rappelle que l'état de référence est l'état naturel saturé dans lequel  $p_c = 0$  et  $\Theta = 0$ . Dans cette situation, les trois équations (5.43), (5.44) et (5.45) s'écrivent :

$$E - \alpha^s \Theta = -\frac{b}{3k^{hom}} \sigma_p = -\frac{b}{3k^s(1-b)} \frac{\gamma^3(\Theta)}{a^3 X^3} \frac{1}{p_c^2}, \quad (5.46)$$

$$X = X_0(1 + \bar{E}_\Theta) \quad \text{avec} \quad \bar{E}_\Theta = \frac{E - \alpha^s \Theta}{E^*} \quad \text{et} \quad E^* = \frac{4\pi\epsilon}{9} X_0 = \frac{\phi_0}{3}, \quad (5.47)$$

et

$$\sigma_p = \frac{\gamma^3(\Theta)}{a^3 X^3} \frac{1}{p_c^2}. \quad (5.48)$$

En rappelant la définition de la quantité d'eau présentée dans l'équation (2.76) et en utilisant les équations (5.48) et (5.47), on trouve finalement les équations adimensionnées décrivant le comportement du matériau :

$$\bar{p}_c = \frac{p_c}{p_c^*} = \left( \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{-\bar{E}_\Theta(1 + \bar{E}_\Theta)^3}} \quad \text{avec} \quad p_c^* = \sqrt{\frac{b(\gamma_0/aX_0)^3}{3k^{hom}E^*}}, \quad (5.49)$$

$$\bar{v}_\ell = 8 \left( \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{X_0}{X_0^*} \right)^3 (-\bar{E}_\Theta)^{\frac{3}{2}} (1 + \bar{E}_\Theta)^{\frac{5}{2}}, \quad (5.50)$$

$$S_r = 8 \left( \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{X_0}{X_0^*} \right)^3 (-\bar{E}_\Theta)^{\frac{3}{2}} (1 + \bar{E}_\Theta)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.51)$$

où  $X_0^*$  est calculé par (2.75) avec  $\gamma = \gamma_0$ .

Dans la situation saturée où  $\sigma_p = p_c$ , on trouve sans difficulté les relations adimensionnées suivantes :

$$\bar{p}_c = -8 \left( \frac{X_0}{X_0^*} \right)^3 \bar{E}_\Theta, \quad (5.52)$$

$$\bar{v}_\ell = 1 + \bar{E}_\Theta. \quad (5.53)$$

En reproduisant exactement la même démarche qu'au paragraphe 2.2.5, le comportement du matériau est représenté sur la Fig. 5.7 dans le diagramme  $(\bar{p}_c, \bar{E}_\Theta)$  pour les trois situations.

- Si  $X_0 < X_0^* \sqrt{\gamma(\Theta)/\gamma_0}$ , l'augmentation de la pression capillaire ne provoque pas la désaturation des fissures (trajet (a) sur la Fig. 5.7).
- Si  $X_0^* \sqrt{\gamma(\Theta)/\gamma_0} < X_0 < 2X_0^*/\sqrt{3} \sqrt{\gamma(\Theta)/\gamma_0}$ , on prédit que l'augmentation de la pression capillaire s'accompagne d'une déformation de retrait de l'échantillon (trajet (b) sur la Fig. 5.7).
- Si  $X_0 > 2X_0^*/\sqrt{3} \sqrt{\gamma(\Theta)/\gamma_0}$ , la désaturation du matériau provoque alors un gonflement du matériau d'autant plus important que la pression capillaire est importante (le trajet (c) sur la Fig. 5.7).

On examine maintenant l'influence de la température sur la courbe capillaire (courbe  $p_c(\bar{v}_\ell)$ ). A partir des équations (5.49), (5.50), (5.52) et (5.53), on constate que la relation  $\bar{p}_c - \bar{v}_\ell$  n'est pas proportionnelle au rapport  $\gamma(\Theta)/\gamma_0$  pour le cas non saturé et est indépendante de la variation de température dans le cas saturé.

Il est nécessaire pour la suite d'établir le lien entre la quantité d'eau  $\bar{v}_\ell$  du modèle et la teneur en eau massique  $\omega$  présentée sur les Fig. 5.1, 5.2 et 5.3 où sont représentés

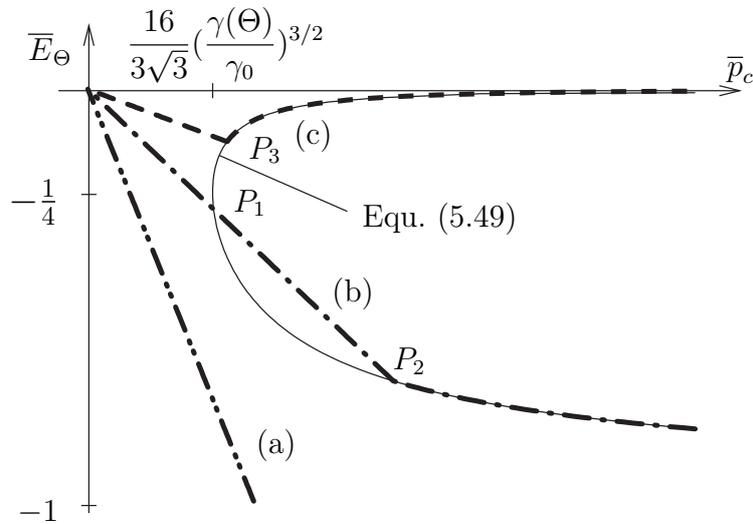


FIG. 5.7 – Comportement thermo-hydro-mécanique du milieu fissuré isotrope - cas contrainte imposée nulle

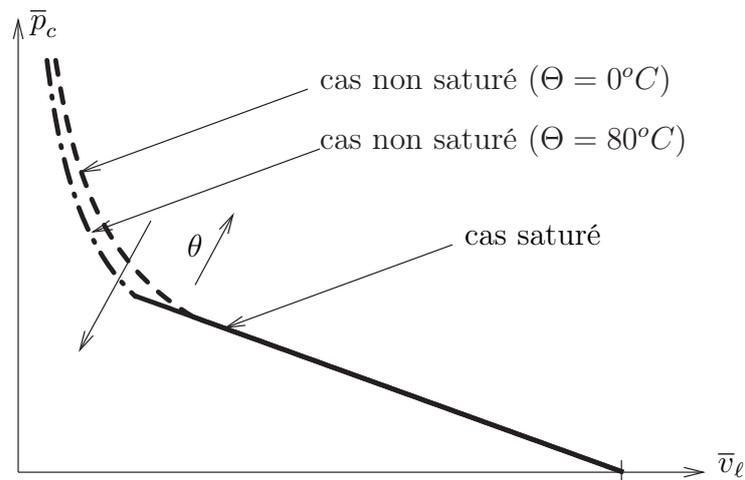


FIG. 5.8 – La modélisation de l'influence de la température sur la courbe de rétention d'eau - cas contrainte imposée nulle

les résultats expérimentaux. On a en effet :

$$\omega = \frac{m_\ell}{m_s} = \frac{\rho_\ell v_\ell}{\rho_s v_s} = \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \frac{\phi_0 \bar{v}_\ell}{1 - \phi_0} \quad (5.54)$$

où  $m_s, m_\ell, v_s, v_\ell, \rho_s, \rho_\ell$  désignent respectivement la masse de la partie solide de l'échantillon, la masse de l'eau contenue dans l'échantillon, le volume de la partie solide de l'échantillon, le volume de l'eau contenue dans l'échantillon, la masse volumique du constituant solide et la masse volumique de l'eau liquide.

A la température  $\Theta$ , la relation entre  $\bar{v}_\ell$  et  $\omega$  est donc linéaire, le diagramme  $\bar{p}_c$  et  $\bar{v}_\ell$  suffit pour analyser l'influence de la température sur la courbe de rétention d'eau.

En effet, les trois figures expérimentales (5.1, 5.2 et 5.3) ont été obtenues pour des matériaux gonflants à volume libre où les essais de sorption deviennent alors des essais à pression capillaire décroissante. C'est la raison pour laquelle, la courbe  $\bar{p}_c - \bar{v}_\ell$  correspondant à la situation (b) sur la Fig. 5.7 est tracée sur la Fig. 5.8. On choisit ici  $X_0 = X_0^*, T_0 = 20^\circ C$  et  $T = 100^\circ C$ , c'est à dire que  $\Theta = 80^\circ C$  et le rapport  $\gamma(\Theta)/\gamma_0 = 0,75$ . On constate sur la Fig. 5.8 que ce modèle explique très bien le phénomène expérimental. La teneur en eau diminue avec la température lorsque la pression capillaire est inférieure à une valeur de seuil et la diminution de la courbe capillaire pour des différentes valeurs de pression capillaire est différent. Au delà de cette valeur, deux courbes de rétention d'eau s'approchent. En plus, à l'état presque saturé à faible pression capillaire, les deux courbes sont presque identiques et l'influence de la température était donc très petite.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la modélisation de l'influence de la température sur le comportement des milieux poreux non saturés. La loi macroscopique homogénéisée du comportement thermo-hydro-mécanique d'un milieu poreux saturé et deux modèles non saturés linéaire et non linéaire ont été présentés.

Le modèle non saturé linéaire permet de prendre en compte l'effet de la température sur le comportement du matériau poreux non saturé aux variations de la dilatation thermique de la phase solide et aux variations de la tension surface en fonction de la température et d'expliquer l'hystérésis de la courbe capillaire .

Le modèle non linéaire démontre le rôle déterminant que peut jouer le couplage

entre déformation du milieu poreux et effets capillaires sur les propriétés d'un milieu mésosfissuré non saturé.

---

## Conclusions et perspectives

---

Cette étude a été consacrée à la modélisation du comportement d'un milieu mésos-fissuré non saturé dans le cadre des méthodes de changement d'échelle. Au cours de ce travail, nous avons obtenu différents résultats nouveaux. De ces résultats, on peut dégager les conclusions suivantes.

La première question abordée dans ce travail concerne la validation de l'approche par la contrainte équivalente déjà décrite dans la littérature. Trois problèmes différents ont été étudiés :

- On a examiné les calculs approximatifs du tenseur  $\mathbb{T}$  et de la contrainte moyenne  $\sigma^p$  quand le rapport d'aspect de fissures tend vers zéro ( $X \rightarrow 0$ ). On a montré que les approximations consistant à ne retenir que les termes du premier ordre dans un développement limité autour de la valeur  $X = 0$  pour les quantités intervenant dans la loi de comportement sont tout à fait pertinentes pour les applications courantes. Elles ont de plus l'avantage de fournir des expressions analytiques faciles à manipuler. La seule restriction que l'on peut mettre à leur usage concernent la prédiction des effets capillaires quand on compare la situation complètement saturée à la situation sèche, même si ces effets sont négligeables dans la plupart des situations.
- Dans la situation où le couplage géométrique entre efforts capillaires et ouverture des fissures est pris en compte, l'approche par la contrainte équivalente prédit que

pour certaines valeurs de l'humidité relative, un échantillon de ce matériau laissé libre de contrainte peut se trouver dans deux états de déformation différents. On s'est donc attaché à étudier l'influence de l'histoire de chargement sur la réponse du matériau. En imposant au matériau une histoire de chargement complexe, on atteint le second état final libre de contrainte où les fissures sont désaturées et fermées tandis que le premier état pouvait être atteint dans une expérience de séchage sous contrainte nulle où les fissures sont désaturées et ouvertes. Cette étude confirme que la prise en compte du couplage entre déformation des fissures et effets capillaires joue un rôle déterminant sur les propriétés macroscopiques du matériau. Ce couplage permet d'expliquer des phénomènes d'hystérésis réversible du comportement du système qui ne sont pas liés aux phénomènes d'hystérésis capillaire classiquement observés dans les matériaux poreux non saturés.

- La troisième validation concerne la modélisation d'un milieu mésolfissuré non saturé en utilisant les formules analytiques exactes permettant de calculer la configuration déformée d'une fissure non saturée isolée dans un milieu infini élastique homogène isotrope. On a comparé cette approche analytique développée dans ce mémoire avec l'approche par la contrainte équivalente. On a démontré que les deux approches donnaient exactement les mêmes résultats dans le cas sans couplage géométrique. Dans le cas avec couplage, les deux approches sont également identiques pour les valeurs les plus faibles du rapport d'aspect. Pour les valeurs intermédiaires du rapport d'aspect, les résultats selon les deux approches ne sont pas identiques mais assez similaires. La seule limitation de l'approche analytique est qu'elle n'est pertinente que dans le cas où le rapport d'aspect de la fissure est beaucoup plus petit que 1. Une comparaison entre les deux approches dans la situation où les fissures sont « assez » ouvertes est donc impossible. Enfin, on confirme alors que l'approche analytique présentée dans ce mémoire peut être utilisée comme solution de base pour construire des estimations du comportement macroscopique du milieu mésolfissuré non saturé.

La deuxième question abordée dans ce travail concerne la propagation de l'endommagement d'un matériau fragile hétérogène mésolfissuré dans les situations saturée et non saturée. Quatre problèmes différents ont été étudiés :

- Premièrement, on a proposé une loi de propagation sous critique reliant la va-

- riation du paramètre de densité de fissures et aux chargements macroscopiques appliqués.
- Deuxièmement, on a comparé les facteurs d'intensité de contrainte calculés selon les deux approches (approche par la contrainte équivalente et approche analytique) dans un cas simple (chargement macroscopique nul, une unique famille de fissures). On a montré que l'approche analytique est plus pertinente pour identifier les propriétés de rupture de ce matériau.
  - Troisièmement, on a intégré dans une modélisation globale de la propagation de l'endommagement en condition non saturée les effets locaux induits par la non saturation des fissures. Cette étude a confirmé que la prise en compte de l'interaction entre les fissures joue un rôle déterminant sur les propriétés de rupture du matériau.
  - Quatrièmement, on s'est attaché à comparer le critère d'endommagement initial prédit par deux approches (énergétique et locale). On a démontré que les limites prévues entre les deux critères selon les deux approches sont identiques pour une expérience de traction biaxiale. Dès que l'on sort de ce régime particulier, il existe un écart entre les deux modèles. Cet écart augmente lorsque l'on s'écarte de la situation de traction biaxiale pour aller vers des états de cisaillement pur. Par contre, il est assez satisfaisant de constater que l'écart entre les deux approches reste « raisonnable », ce qui valide l'approche énergétique.

La troisième question abordée dans ce travail concerne les effets d'une variation de la température sur les propriétés macroscopiques du matériau. On a développé une modélisation de l'influence de la température sur le comportement des milieux poreux non saturés. La loi macroscopique homogénéisée du comportement thermo-hydro-mécanique d'un milieu poreux saturé et deux modèles non saturés linéaire et non linéaire ont été présentés. Le résultat le plus important est que le modèle non linéaire permet d'expliquer pourquoi on constate expérimentalement pour certains matériaux qu'une variation de température ne provoque pas un simple décalage vertical des courbes de teneur en eau.

En ce qui concerne les perspectives ouvertes par ce travail, il nous semble intéressant d'étudier à partir des résultats décrits ici :

- L'influence des variations de la température sur les propriétés de rupture du matériau. On cherchera à développer l'approche en tenant compte du fait que les fissures peuvent se propager en incluant les effets liés aux variations de température dans la modélisation.
- Une question importante, qui n'a pas été abordée dans ce mémoire et qui mérite qu'on y consacre des efforts, concerne les phénomènes de transferts hydriques au sein de l'espace poreux. Pour cela, on peut mettre en œuvre une approche micromécanique. Partant d'une description distinguant géométriquement chacune des phases fluides ainsi que les interfaces capillaires au sein de l'espace poreux, on peut s'attacher tout d'abord à recenser puis à décrire convenablement les différents mécanismes de transferts des phases fluides liées aux variations de température (écoulement, changement de phase, diffusion, instabilités capillaires, influence des hystérésis de mouillage ...) avant de mettre en œuvre de nouveau des méthodes d'homogénéisation pour rendre compte de ces phénomènes à l'échelle macroscopique.
- On peut également s'intéresser au phénomène de bifurcation dans l'espace fissuré. En utilisant la technique d'homogénéisation déjà disponible, on peut chercher à intégrer dans une modélisation globale de comportement du matériau en condition non saturée les effets locaux induits par la propagation de fissure en mode mixte.

---

## Bibliographie

---

- [1] M. Amestoy and J. B. Leblond. Crack paths in plane situations - II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :465–501, 1992.
- [2] B. K. Atkinson. A fracture mechanics study of subcritical tensile cracking of quartz in wet environments. *Journal of Pure and Applied Geophysics*, 117(5) :1011–1024, 1979.
- [3] B. K. Atkinson. Subcritical crack growth in geological materials. *Journal of Geophysical Research*, 89(B6) :4077–4114, 1984.
- [4] J-F. Barthélémy. *Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [5] M. Basista and D. Gross. The sliding crack model of brittle deformation :an internal variable approach. *Int J. Solids Struc*, 35 :487–509, 1998.
- [6] F. Bernier, G. Volckaert, E. Alonso, and M. Villar. Suction-controlled experiments on boom clay. *Engineering Geology*, 47 :325–338, 1998.
- [7] H. D. Bui. Interaction between the griffith crack and a fluid : Theory of rehbinder’effect. In : *G.P. Cherepanov, Editor, FRACTURE : a topological encyclopedia of current knowledge*, Krieger, Melbourne, 1996.
- [8] H. D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris. 1978.

- [9] H.D. Bui, C. Guyon, and B. Thomas. On viscous fluid flow near the moving crack tip. In : *G.A. Maugin et al. Continuum Thermomechanics : The Art and Science of Modeling Matter's Behaviour*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [10] X. Chateau and L. Dormieux. Homogénéisation d'un milieu poreux non saturé : lemme de Hill et applications. *C. R. Acad. Sci., Série II b*, 320 :627–634, 1995.
- [11] X. Chateau and L. Dormieux. Approche micromécanique du comportement d'un milieu poreux non saturé. *C. R. Acad. Sci., Série II b*, 326 :533–538, 1998.
- [12] X. Chateau and L. Dormieux. Micromechanics of saturated and unsaturated porous media. *Int. J. Numer. Meth. Geomech*, 26, 2002.
- [13] X. Chateau, L. Dormieux, and Y. Xu. Approche micromécanique du comportement d'un milieu mésolfissuré non saturé. *Mécanique and Industries*, 4, 2003.
- [14] O. Coussy. *Mechanics of porous continua*. John Wiley, England. 1995.
- [15] O. Coussy. *Poromechanics*. John Wiley, England. 2004.
- [16] O. Coussy and P. Dangla. Approche énergétique du comportement des sols non saturés. In *Mécanique des sols non saturés*, Hermes Science. 2006.
- [17] V. Deudé. *Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : Apport des méthodes de changement d'échelle*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [18] V. Deude, L. Dormieux, D. Kondo, and V. Pense. Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré. *Comptes rendus Mécanique*, 330(8) :587–592, 2002.
- [19] L. Dormieux, D. Kondo, and F. J. Ulm. A micromechanical analysis of damage propagation in fluid-saturated cracked media. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(7) :440–446, 2006.
- [20] L. Dormieux, D. Kondo, and F. J. Ulm. *Microporomechanics*. John Wiley, England. 2006.
- [21] F. A. L. Dullien. *Porous media. Fluid transport and pore structure*. San Diego : Academic Press, England. 1992.

- [22] F. Erdogan and G. C. Sih. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear (Crack extension in a large plate under plane loading and transverse shear, studied in terms of local stress and strain concentrations). *ASme, Transactions, J. Basic Engineering*, 1963.
- [23] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. Lond, A* 241 :376–396, 1957.
- [24] J. D. Eshelby. Elastic inclusions and inhomogeneities. In *I.N. Sneddon and R. Hill (eds), Progress in. Solid Mechanics 2, North Holland, Amsterdam, II* :87–140, 1961.
- [25] D. Fanella and D. Krajcinovic. A micromechanical model for concrete in compression. *Engineering fracture mechanics*, 29(1) :49–66, 1988.
- [26] A. Feraille-Fresnet, B. H. Bui, and A. Ehrlacher. Hydrostatic interaction of a wetting fluid and a circular crack in an elastic material. *Mechanics of Materials*, 35(3-6) :581–586, 2003.
- [27] A. Feraille-Fresnet and A. Ehrlacher. Filling of a circular crack with two non-miscible fluids. *IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials*, Cardiff (UK) :89–93, 2001.
- [28] A. Giraud, D. Hoxha, D.P. Do, and V. Magnenet. Effect of pore shape on effective porothermoelastic properties of isotropic rocks. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :1–23, 2008.
- [29] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow of solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A.221 :163–198, 1920.
- [30] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Brittle failure in compression : splitting, faulting and brittle-ductile transition. *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A*, 319 :337–374, 1986.
- [31] M. A. Hussain, S. L. Pu, and J. Underwood. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *Fracture Analysis*, pages 2–28, 1974.
- [32] M.F. Kanninen and C.H. Popelar. *Advanced fracture mechanics*. Oxford University Press, New York. 1985.

- [33] J. M. Kemeny. A model for non-linear rock deformation under compression due to sub-critical crack growth. *Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 28(6) :459–467, 1991.
- [34] J. M. Kemeny and N.G.W. Cook. *Crack models for the failure of rocks in compression*. 2nd Int. Conf. and Short Course on constitutive Laws for Engng. Mat., ed. Desai et al., USA. 1987.
- [35] B. R. Lawn. *Fracture of brittle solids*. Second Edition. Cambridge. 1993.
- [36] T. T. Le. *Comportement thermo-hydro-mécanique de l'argile de Boom*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.
- [37] J. B. Leblond. Crack paths in plane situations - I. General form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 25(11) :1311–1325, 1989.
- [38] J. B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes, Paris. 2003.
- [39] J. B. Leblond and J. Frelat. Crack kinking from an initially closed crack. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :1595–1614, 2000.
- [40] T. A. Michalske and V. D. Frechette. Dynamic effects of liquids on crack growth leading to catastrophic failure in glass. *Journal of the American Ceramic Society*, 63(11) :603, 1980.
- [41] T. A. Michalske and S. W. Freiman. A molecular interpretation of stress corrosion in silica. *Nature*, 295 :511–512, 1981.
- [42] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. North Holland. 1993.
- [43] S. Nemat-Nasser and M. Obata. A microcrack model of dilatancy in brittle materials. *J. Applied Mech*, 55(B8) :6805–6821, 1988.
- [44] Y. Okui and H. Horii. Stress and time-dependent failure of brittle rocks under compression : A theoretical prediction. *Journal of Geophysical Research*, 102(B7) :14,869–14,881, 1997.
- [45] E. Olchitzky. *Couplage hydromécanique et perméabilité d'une argile gonflante non saturée sous sollicitations hydriques et thermiques : courbe de sorption et perméabilité à l'eau*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.

- [46] V. Pensée, L. Dormieux, D. Kondo, and V. Deudé. Poroélasticité d'un milieu mésofissuré : analyse micromécanique. *C. R. Mécanique*, 330 :147–152, 2002.
- [47] P. Rehbinder and V. Lichtman. Effet of surface active media on strain and rupture of solids. *Proc. 2nd Int. Cong. Surf Act.*, 3 :563–580, 1957.
- [48] V. Renaud. *Contributions à l'étude d'un modèle de mésofissuration : application au comportement d'un grès*. PhD thesis, Université de Lille 1, 1998.
- [49] E. A. Romero and A. Lloret. Temperature effects on the hydraulic behavior of an unsaturated clay. *Geotechnical and Geological Engineering*, 19 :311–332, 2001.
- [50] H. Schütte and OT Bruhns. On a geometrically nonlinear damage model based on a multiplicative decomposition of the deformation gradient and the propagation of microcracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(4) :827–853, 2002.
- [51] G. Swoboda and Q. Yang. An energy-based damage model of geomaterials-I. Formulation and numerical results. *International journal of solids and structures*, 36(12) :1719–1734, 1999.
- [52] G. Swoboda and Q. Yang. An energy-based damage model of geomaterials-II. Deduction of damage evolution laws. *International journal of solids and structures*, 36(12) :1735–1755, 1999.
- [53] A. M. Tang. *Effet de la température sur le comportement des barrières de confinement*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [54] S. M. Wiederhorn. Influence of water vapor on crack propagation in soda-lime glass. *Journal of The American Ceramic Society*, 50(8) :407–414, 1967.
- [55] S. M. Wiederhorn, S. W. Freiman, E. R. Fuller, and C. J. Simmons. Effects of water and other dielectrics on crack growth. *Journal of Materials Science*, 17(12) :3460–3478, 1982.
- [56] T. A. Wiederhorn and L. H. Bolz. Stress corrosion and static fatigue of glass. *Journal of The American Ceramic Society*, 53(10) :543–548, 1970.
- [57] Y. Xu. *Approche multi-échelle pour l'étude du comportement des systèmes polyphasiques - Application aux milieux poreux non saturés*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.

- [58] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours d'Ecole Polytechnique. 2000.