研究ノート

最適経済成長モデルによる環境問題分析の基礎

前田　純一・浦瀬　康裕

（受付　2021 年 5 月 31 日）

1.　は　じ　め　に

本稿は，環境保全と経済成長の両立という観点から経済成長と環境問題について分析をおこなうための基本モデルの 1 つとして，最適経済成長モデルに環境汚染問題，および，資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなうことを目的としている。

最適経済成長モデルは Ramsey（1928）を開祖とし，Cass（1965）や Koopmans（1965）らによって基礎付けがおこなわれた後，1960年代後半以降に精力的に研究が進められたモデルである。それらの研究を受けて，1970年代からは最適経済成長モデルに環境問題や資源問題を導入する試みが，たとえば，Forster（1973），Gruver（1976）などによっておこなわれるようになり，その後，比較的近年の研究としては，たとえば，Mohtadi（1996），Rosendahl（1996），Schou（2000）などによって環境汚染問題や資源問題を導入した最適経済成長モデルが展開され，経済成長と環境問題に関する分析がおこなわれている。

本稿においては，これらの先行研究において分析にもちいられている自然資源や生産活動によって発生する環境汚染を導入した最適経済成長モデルについて，その基本的な枠組みを詳細に検討していく。そして，そのモデルをもちいて社会的厚生を最大化することを目的とした社会的最適成長経路，および，市場経済システムを前提とした市場均衡成長経路についてそれぞれ分析をおこない，社会的最適解と市場均衡解が乖離することも確認していく。さらに，2 つの分析を比較することによって，市場均衡解を社会的最適解に一致させるための政策についても言及していく。

本稿は以下のように構成されている。第 2 節においては，Mohtadi（1996），Rosendahl（1996），Schou（2000）などを参照しながら，自然資源および環境汚染を導入した最適経済成長モデルの基本的な枠組みを詳細に検討する。第 3 節においては，社会的最適成長経路の分析を，第 4 節においては，市場均衡成長経路の分析をそれぞれおこない，最適性の必要条件について検討をおこなう。第 5 節においては，第 3 節，第 4 節の分析を受けて，市場均衡解を社会的最適解に一致させるための政策について考察する。第 6 節においては，今後の研

究の方向性について言及する。

2. 基本モデル

この節では，環境問題および資源問題を導入した最適経済成長モデルの基本構造を詳細に検討する。経済には，経済主体として家計と企業が存在している。人口は一定と仮定し，全く同質的な家計が多数存在しているとする。そして，その規模は 1 に規準化されているとする。労働供給は非弾力的におこなわれると仮定し，その規模も 1 に規準化される。以下，生産関数，汚染排出関数，自然資源ストック，環境汚染ストック，効用関数，資本ストックの動きについて詳細に検討していく。

2.1 生産関数

生産は，資本ストック K，自然資源の生産活動への投入量 R によって決定され，かつ，環境汚染ストック P によってマイナスの影響を受けるという意味で，P によっても決定されているとする。なお，ここでは，資本ストック K には物的資本の他に知識資本や人的資本も含まれているとする。

以上のことから，生産量 Y は以下の生産関数によって決定されるものとする。

$$Y = \begin{cases} Y(K,R,P) & if \quad P < \bar{P} \\ 0 & if \quad P \geq \bar{P} \end{cases} \tag{1}$$

（1）において $\bar{P}$ は環境汚染ストックの閾値を表しており，環境汚染ストック P がこの値を超えてしまうと経済システムが崩壊してしまう値を表している。なお，生産活動には労働も雇用されているが，その大きさを 1 に規準化しているため（1）には記載されていない。

生産関数 Y（K, R, P）は，資本ストック K と自然資源の投入量 R に関しては増加関数であるが，P に関しては減少関数であると仮定し，さらに以下のような性質をもつものとする。

$$\mathrm{Y(0,R,Y) = Y(K,0,P) = 0,} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \quad \lim_{K\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial K} = 0, \tag{2b}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} < 0, \quad \lim_{R\to 0}\frac{\partial Y}{\partial R} = \infty, \quad \lim_{R\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial R} = 0, \tag{2c}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial P^2} < 0, \quad \lim_{P\to 0}\frac{\partial Y}{\partial P} = 0, \quad \lim_{P\to \bar{P}}\frac{\partial Y}{\partial P} = -\infty, \tag{2d}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial R} > 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial P} < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial R \partial P} < 0. \tag{2e}$$

（2a）は資本ストック K と自然資源の投入量 R の両方が生産に不可欠であることを表している。（2b）は資本の限界生産力は逓減することを表し，（2c）も自然資源の限界生産力が逓減することを表している。（2d）は環境の悪化によって生産性が減少していくことを表している。そして，（2e）においては $\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial R} > 0$ は資本と自然資源が代替可能であること，$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial P} < 0$ および $\frac{\partial^2 Y}{\partial R \partial P} < 0$ は環境の悪化が各生産要素の限界生産力を低下させることが，それぞれ表されている。

2.2　汚染排出関数

生産関数（1）による生産活動によって汚染が排出されることを想定するが，汚染排出量 E は生産に投入される資本ストック K が大きいほど多くなると仮定する。その一方で，汚染排出を抑制・削減するための活動がおこなわれれば汚染の排出量を少なくすることが可能であると考えられるので，資本ストック，および，汚染排出を抑制・削減するための活動と汚染排出量との関係を以下の関係式で表すことにする。

$$E = E(K, A) \tag{3}$$

A は汚染排出を防止・削減するための支出水準を表している。この汚染排出関数 $E(K, A)$ については，K の増加関数，A の減少関数と仮定するが，さらに以下の性質も満たすものとする。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial A^2} > 0, \quad \lim_{A \to 0} \frac{\partial E}{\partial A} = -\infty, \quad \lim_{A \to \infty} \frac{\partial E}{\partial A} = 0. \tag{4b}$$

$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0$ は排出量の増加分は資本ストックの増加にともない逓増的あるいは比例的になっていることを表し，$\frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0$ は汚染防止支出の増加によって排出量の増加分が減少することを表している。さらに（4b）は汚染防止支出の限界生産性が逓減することを表している。

2.3　自然資源ストック

t 時点における自然資源のストック水準を $S(t)$ で表すことにする。自然資源は生産活動に

使用されることでそのストックが減少していくことになるが，自らの再生能力によってストックを増加させることも可能であるとする。そして，その再生スピードは現在の自然資源ストックの水準以外に環境汚染にも影響を受けると仮定する。

以上のことから，自然資源ストックの時間を通じての変化が以下の式で表されるとする。

$$\dot{S}(t) = \Gamma(S(t), P(t)) - R(t), \quad S(0) = S_0 \tag{5}$$

$S_0 > 0$ は自然資源ストックの初期水準を表し，$\Gamma(S(t), P(t))$ は自然資源ストックの再生スピードを表す関数とし，さらに以下の性質を満たしているものとする。

$$\Gamma(0,0) = \Gamma(\bar{S},0) = \Gamma(S,\bar{P}) = 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial S} > (=,<)0 \quad if \quad S < (=,>) S_M, \ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial S^2} < 0, \tag{6b}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial P} < 0, \ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial P^2} \le 0, \ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial S \partial P} \le 0. \tag{6c}$$

（6a）の $\bar{S} > 0$ は生産活動のための自然資源の採取，および，環境汚染が存在しない場合の自然資源ストックの水準を表した環境容量とよばれるものである。S_M は $\Gamma(S(t), P(t))$ の値を最大にする自然資源ストックの水準を表している。

2.4　環境汚染ストック

環境汚染ストック P は，以下の微分方程式にしたがって変化すると仮定する。

$$\dot{P}(t) = E(t) - \Phi(P(t), S(t)), \qquad P(0) = P_0 \tag{7}$$

$P_0 \ge 0$ は環境汚染ストックの初期水準を表している。ここで，生産活動によって発生する汚染物質の一部は自然環境に同化・吸収されていくと想定し，この同化・吸収作用は環境汚染ストックの水準，および，自然資源ストックの水準に依存しているものとする。

このような環境汚染の同化・吸収関数を $\Phi(P(t), S(t))$ と表し，以下の性質を満たすものとする。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} > 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} \le 0, \frac{\partial \Phi}{\partial S} > 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} \le 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P \partial S} \ge 0, \tag{8a}$$

$$\Phi(P,S) = 0 \quad for \quad P \ge \bar{P}. \tag{8b}$$

（8a）は環境汚染ストックや自然資源ストックの水準が大きいほど汚染物質が同化・吸収される量が多くなることを表し，（8b）は環境汚染ストック P が閾値 $\bar{P}$ を超えてしまうと汚染物

質の同化・吸収作用が働かなくなることを表している。

2.5　効用関数

代表的消費者の効用水準は，消費水準 C，および，環境の質（自然資源ストック S，環境汚染のフロー E，環境汚染のストック P）に依存すると想定し，代表的消費者の効用関数は以下のように表されるものとする。

$$U = U(C, E, S, P) \tag{9}$$

（9）は凹関数であるとし，さらに以下の性質を満たすと仮定する。

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0, \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \quad \lim_{C \to 0} \frac{\partial U}{\partial C} = \infty, \lim_{C \to \infty} \frac{\partial U}{\partial C} = 0, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial E} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial E^2} < 0, \quad \lim_{E \to 0} \frac{\partial U}{\partial E} = 0, \lim_{E \to \bar{E}} \frac{\partial U}{\partial E} = -\infty, \tag{10b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} > 0, \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} < 0, \quad \lim_{S \to 0} \frac{\partial U}{\partial S} = \infty, \lim_{S \to \infty} \frac{\partial U}{\partial S} = 0, \tag{10c}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} < 0, \quad \lim_{P \to 0} \frac{\partial U}{\partial P} = 0, \lim_{P \to \bar{P}} \frac{\partial U}{\partial P} = -\infty. \tag{10d}$$

（10a）は，消費量の増加は効用水準を高めるが，限界効用は逓減することを表している。（10c）に示されているように，自然資源ストックについても同様のことが仮定されている。また，（10d）に示されているように，汚染の増加による環境悪化は効用を低下させ，かつ，限界不効用は逓増する。

2.6　資本ストックの動き

生産関数（1）によって生産され，消費されたものの残りは投資に回されて資本ストックを形成していくことになるが，その資本ストックの蓄積は以下の微分方程式で表されるとする。

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0. \tag{11}$$

$K_0 > 0$ は資本ストックの初期値を表し，$\delta \geq 0$ は資本減耗率を表している。

3.　社会的に最適な成長経路

この節では，前節で詳細に検討した基本モデルをもちいながら社会的に最適な経済成長経路について検討をおこなう。社会的に最適な経済成長経路とは，社会的厚生を（1），（3），（5），（7），（11）の制約のもとで最大化するような消費 C，自然資源投入量 R，汚染防止支出 A，資本ストック K，自然資源ストック S，汚染ストック P の時間経路を求めることによって得ることができるものである。

3.1　動学的最適化の条件

分析を進めるために社会的厚生を定義しなければならないので，ここでは各時点の効用の割引現在価値の合計として社会的厚生を定義することにする。よって社会的厚生は以下のように表される。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U(C(t),E(t),S(t),P(t))dt \tag{12}$$

$\rho > 0$ は時間選好率を表しており，ρ の値が大きくなるほど将来の効用は低く評価されることになる。（12），および，（5），（7），（11）によって社会的に最適な経済成長経路を求める問題は，以下のような動学的最適化問題となる。

$$\begin{aligned}
\max \quad & \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U(C(t),E(K,A)(t),S(t),P(t))dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t), \qquad K(0) = K_0, \\
& \dot{S}(t) = \Gamma(S(t),P(t)) - R(t), \qquad S(0) = S_0, \\
& \dot{P}(t) = E(t) - \Phi(P(t),S(t)), \qquad P(0) = P_0.
\end{aligned} \tag{13}$$

この動学的最適化問題（13）の制御変数は C，R，A であり，状態変数は K，S，P であるが，この問題はポントリアーギンの最大値原理をもちいて解くことができる。そのために経常価値ハミルトニアンを次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \equiv\ & U(C(t),E\left(K,A\right)(t),S(t),P(t)) + m_K\left[Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t)\right] \\
& + m_S\left[\Gamma(S(t),P(t)) - R(t)\right] + m_P\left[E(t) - \Phi(P(t),S(t))\right]
\end{aligned}$$

m_K, m_S, m_P はそれぞれ状態変数 K，S，P に対応する共状態変数であり，各ストック変数のシャドープライスを表してる。

社会的に最適な経済成長経路となるための必要条件は，最大値原理を適用することによっ

て以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C}=\frac{\partial U}{\partial C}-m_K=0, \tag{14a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R}=m_K\frac{\partial Y}{\partial R}-m_S=0, \tag{14b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A}=\left(\frac{\partial U}{\partial E}+m_P\right)\frac{\partial E}{\partial A}-m_K=0, \tag{14c}$$

$$\dot{m}_K=\rho m_K-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}=m_K\left(\rho+\delta-\frac{\partial Y}{\partial K}\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial E}+m_P\right)\frac{\partial E}{\partial K}, \tag{14d}$$

$$\dot{m}_S=\rho m_S-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S}=m_S\left(\rho-\frac{\partial \Gamma}{\partial S}\right)-\frac{\partial U}{\partial S}+m_P\frac{\partial \Phi}{\partial S}, \tag{14e}$$

$$\dot{m}_P=\rho m_P-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}=m_P\left(\rho+\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)-\frac{\partial U}{\partial P}-m_K\frac{\partial Y}{\partial P}-m_S\frac{\partial \Gamma}{\partial P}. \tag{14f}$$

（14a），（14b），（14c）の 3 本の式は，各制御変数がハミルトニアンを最大化するように選択されていることを表している。（14d），（14e），（14f）の 3 本の式はオイラー方程式とよばれ，各ストック変数の変化が効用に及ぼす影響を調整するようにシャドープライスが時間を通じて変化していくことを表している。

なお，$\mathcal{H}$が制御変数と状態変数について凹関数であるならば，（14a）から（14f）までの各式，および，以下の 3 つの横断性条件が最適化のための必要十分条件となる。

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}m_K(t)K(t)=0, \tag{15a}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}m_S(t)S(t)=0, \tag{15b}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}m_P(t)P(t)=0. \tag{15c}$$

横断性条件は，各ストック変数の現在価値が最終時点，つまりは無限の将来においてゼロになることを表している。

3.2　社会的最適経路の性質

これらの条件式をもちいながら，社会的に最適な経済成長経路がもつ性質について検討を進めていこう。はじめに，（14a），（14b），（14c）をもちいながら静学的な最適資源配分の条件について検討する。そのために，以下の定義をおくことにする。

$$\mu_s \equiv \frac{m_s}{\partial U/\partial C},\quad \mu_p \equiv -\frac{m_p}{\partial U/\partial C} \tag{16}$$

これは，ハミルトニアンの定義においてもちいられたシャドープライス m_S, m_P を消費の限界効用で除することで，それぞれのシャドープライスを消費財の価値で測り直したものである。（16）における μ_S の定義に（14a)，（14b）を代入し，（14c）に（14a）と（16）における μ_P の定義を代入すると，以下の 2 つの関係式を得る。

$$\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial R} = \mu_S, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial C} = \left(\frac{\partial U}{\partial E} - \mu_P \frac{\partial U}{\partial C}\right)\frac{\partial E}{\partial A}. \tag{18}$$

（17）の左辺は自然資源の限界生産力を表しており，右辺は自然資源ストックの社会的限界価値を表している。自然資源の生産活動への追加的投入は限界生産力の分だけ生産性を高めるが，一方で，自然資源ストックの減少はその社会的限界価値の分だけ社会的なコストをもたらすことになる。(17）は自然資源の限界生産力と社会的限界価値が均等化すべきであることを表している。

（18）の右辺においては，第 1 項は汚染排出量を削減させることで効用を増加させる効果を表しており，第 2 項は，汚染排出量を削減させることでその社会的費用が低下するが，その低下によって効用が増加する効果を表している。よって，2 つの効果を合わせた全体としての効果が，汚染排出量の削減に使用した生産物を消費した場合の限界効用の大きさと等しくなるように資源配分がおこなわれるべきであることを（18）は表している。

次に，動学的な最適資源配分の条件について検討しよう。(14a）を時間で微分した式に（14d）を代入して整理すると，異時点間の消費配分に関する以下の式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta + \frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A} + \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial C \partial E}\cdot \dot{E} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial C \partial S}\cdot \dot{S} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial C \partial P}\cdot \dot{P}}{\partial U/\partial C} - \rho\right] \tag{19}$$

$\sigma_C \equiv -\dfrac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial C^2}\cdot C}{\partial U/\partial C}$ は消費の限界効用の弾力性を表している。ここで，(19）によって示されていることについて考察しよう。まず，右辺の括弧内の $\dfrac{\partial Y}{\partial K} - \delta$ の部分については以下のことを表していると考えられる。すなわち，生産されたもののうち消費されなかった部分は貯蓄に回されるが，その貯蓄は全て資本蓄積に充てられる。その結果，資本の純限界生産力 $\dfrac{\partial Y}{\partial K} - \delta$ で表される大きさだけ将来の生産量が増加することを表している。次に，$\dfrac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}$ の部分につ

いては以下のことを表している。消費されず貯蓄に回された部分は資本ストックを増加させるが，その増加は同時に汚染排出量も増加させるため，汚染防止活動への支出がおこなわれることになる。すなわち，$\dfrac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}$は汚染の限界削減率に対する汚染の限界発生率の割合を表しており，消費へのマイナス効果を表している。最後に，$\dfrac{\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial E}\cdot\dot{E}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial S}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial P}\cdot\dot{P}}{\partial U/\partial C}$の部分については以下のことを表していると考えられる。資本ストックが変化することで汚染排出量が変化するが，その変化によって限界効用が変化する。また，資本ストックの変化を通じた自然資源ストックの変化によっても限界効用の大きさが変化する。さらに，資本ストックの変化を通じた汚染ストックの変化によっても限界効用の大きさは変化する。$\dfrac{\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial E}\cdot\dot{E}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial S}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial P}\cdot\dot{P}}{\partial U/\partial C}$の部分は，消費の限界効用に対するそれらの変化の合計割合がどの程度になるかを表している。

これら 3 つの効果を合わせた大きさが時間選好率を上回るとき，(19) の左辺は正の値を取り，将来の消費が増加することになる。

4.　市場経済における成長経路

前節では，社会的に最適な経済成長経路を実現するために，経済の構造を知っている社会計画者が存在し，すべての資源配分を決定することを想定していた。一方，この節では，家計，企業，自然資源採取業者，および，政府から構成される分権化された市場経済を想定して最適経済成長経路について検討する。

そこで，まず家計，企業，自然資源採取業者のそれぞれの主体的均衡条件を導出し，市場均衡条件について考察をおこなった後，市場経済における最適経済成長経路について検討をおこなう。

企業は，家計が供給する資本ストックと自然資源採取業者から購入する自然資源を生産要素としてもちいながら生産活動をおこなう。その生産過程において環境汚染物質が排出されるため，政府によって環境税が課されるとする。自然資源採取業者は，自然資源を採取し，企業に販売するが，その売上げに対しては政府によって売上税が課されるものとする。政府は，それぞれの税による税収を一括補助金として家計に給付する。家計は，利子収入，利潤配当，および，政府からの補助金によって消費をおこない，消費しなかった部分を資本蓄積に充てる。ここでは，企業，および，自然資源採取業者は家計によって所有され，企業の利潤は家計に還元されるものとしている。

4.1　家計の主体的均衡条件

まず，家計の主体的均衡条件について考察しよう。資本のレンタル料を $r(t)$，企業の利潤を $\prod_F(t)$，自然資源採取業者の利潤を $\prod_R(t)$，政府からの補助金を T(t) の記号をもちいてそれぞれ表すと，家計の予算制約式は以下のようになる。

$$\dot{K}(t)=\Pi_F(t)+\Pi_R(t)+\left[r(t)-\delta\right]K(t)+T(t)-C(t) \tag{20}$$

家計は，（20）の制約のもとで効用の割引現在価値（12）を最大にするように消費の時間経路を決定する。この動学的最適化問題を（19）を求めたときと同様の方法で解くと，消費の変化率に関する以下の関係式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{1}{\sigma_C}\left[r-\delta+\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial E}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial S}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial P}\cdot\dot{P}}{\frac{\partial U}{\partial C}}-\rho\right] \tag{21}$$

4.2　企業の主体的均衡条件

次に，企業の主体的均衡条件について検討する。企業は，各期において利潤を最大化するように，資本 K，自然資源の雇用量 R，および，汚染防止活動の水準 A をそれぞれ決定する。自然資源の価格を q，環境税率を τ_E で表すと，企業の利潤は以下のように表される。

$$\Pi_F=Y(K,R,P)-rK-qR-\tau_E E(K,A)-A \tag{22}$$

（22）を最大にするように K，R，A の水準をそれぞれ選択すると，利潤最大条件は以下のように求められる。

$$Y_K=r+\tau_E E_K, \tag{23a}$$

$$Y_R=q, \tag{23b}$$

$$-\tau_E E_A=1. \tag{23c}$$

（23a）は資本の限界生産力がそのレンタル料と税負担の合計が等しいことを，（23b）は自然資源の限界生産力がその要素価値と等しいことを，（23c）は汚染防止活動の限界収入はその限界費用に等しいことを，それぞれ表している

4.3　自然資源採取業者の主体的均衡条件

最後に，自然資源採取業者の主体的均衡条件について検討する。自然資源採取業者は，（5）

の制約のもとで，（24）によって表される自然資源の販売から得られる純収入 $\Pi_R = \left[q - \tau_R\right]R$ の割引現在価値を最大にするように自然資源の採取量の時間経路を決定するとする。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t}\left[q(t) - \tau_R(t)\right]R(t)dt \tag{24}$$

τ_R は自然資源採取業者に課される売上税率を表している。（19）を求めたときと同様の方法でこの動学的最適化問題を解くと，最適性の必要条件が以下のように求められる。

$$\mathrm{q} = \tau_R + \mu, \tag{25a}$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \Gamma_S. \tag{25b}$$

μ は状態変数 S に対応する共状態変数であり，自然資源ストックのシャドープライスを表している。

4.4　市場均衡条件

以上の準備をもとにして市場均衡について考察をすすめよう。そのために，生産された財の市場，資本市場，自然資源の市場におけるそれぞれの市場需要関数と市場供給関数について検討をおこなわなければならないが，ここでワルラス法則について確認しよう。家計の予算制約（20）に（22），Π_R の式，および，政府の予算制約 $T = \tau_E E + \tau_R R$ を代入して整理すると以下のようになる。

$$\left[(C + \dot{K} + \delta K + A) - Y\right] + r\left[K^d - K^S\right] + q\left[R^d - R^S\right] = 0 \tag{26}$$

K^d は資本への需要，R^d は自然資源への需要，K^S は資本の供給，R^S は自然資源の供給をそれぞれ表している。（26）は各市場における超過需要の合計が恒等的にゼロになることを示しているので，たとえば資本市場と自然資源の市場が均衡していれば財市場も均衡していることになる。

そこで，資本市場，および，自然資源の市場の均衡について検討することにする。利潤最大化条件（23a），（23b），（23c）より，企業は r, q, τ_E, P を所与として資本 K への需要関数 $K^d(r,q,\tau_E,P)$，自然資源 R への需要関数 $R^d(r,q,\tau_E,P)$，および，汚染防止支出関数 $A(r,q,\tau_E,P)$ をそれぞれ決定する。一方，自然資源採取業者の最適性の条件（25a），（25b）より自然資源 R の供給関数 $R^S(q,\tau_R,S)$ が決定される。

以上のことから，資本市場，および，自然資源市場の均衡条件は，それぞれ以下のようになる。

$$K^d(r,q,\tau_E,P)=K^S, \tag{27}$$

$$R^d(r,q,\tau_E,P)=R^s(q,\tau_R,S). \tag{28}$$

(27)，(28) より明らかなように，両市場の均衡によって資本のレンタル率 r，自然資源の価格 q は，ストック変数 (K, S, P)，および，政策変数 (τ_E, τ_R) によって決定される。さらに，(5)，(7)，(11) よりストック変数 (K, S, P) も政策変数 (τ_E, τ_R) に依存しているので，市場経済の均衡成長経路は政策変数に依存していることになる。

5.　成長経路の比較と最適税率

この節では，ここまでの分析にもとづいて，社会的に最適な経済成長経路が満たす条件と市場均衡経路が満たす条件を比較し，両者の乖離を確認しながら政策によって市場均衡経路と社会的最適経路を一致させることについて検討をおこなう。

市場均衡経路が満たす条件 (23b) および (25a) より，自然資源の限界生産力 Y_R は $Y_R=\tau_R+\mu$ と表されるが，これは社会的最適経路が満たす Y_R の条件 (17) とは一致していないので，２つの条件を一致させ，社会的最適経路を実現することを想定するのであれば，自然資源採取業者への最適売上税率 τ_R^* は以下のように決定されなければならない。

$$\tau_R^*=\mu_S-\mu \tag{29}$$

さらに，市場均衡経路が満たす条件 (23c) より $E_A=-1/\tau_E$ となるが，この関係式を社会的最適経路が満たす条件 (18) に代入して整理し，２つの経路を一致させることを想定すると，社会的最適経路を実現するための企業への最適環境税率 τ_E^* は以下のように決定されなければならない。

$$\tau_E^*=\mu_P-\frac{\partial U/\partial E}{\partial U/\partial C} \tag{30}$$

ここで，(29)，および，(30) が表していることについて検討する。(29) は，社会的最適解を想定した場合の自然資源ストックの社会的限界価値と市場均衡解を想定した場合の私的限界価値の差額を埋めるように売上税が政府によって課されなければならないことを表している。また，(30) は，社会的最適解を想定した場合の汚染ストックの社会的限界費用と市場均衡解を想定した場合の私的限界費用の差額を埋めるように環境税が課されなければならないことを表している。

6. おわりに

本稿においては，Mohtadi（1996），Rosendahl（1996），Schou（2000）などを参照しながら，まず最適経済成長モデルに環境汚染問題，および，資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細な検討をおこなった。次に，そのモデルをもちいて社会的最適成長経路と市場均衡成長経路の比較をおこない，２つの経路が乖離することを確認するとともに，その乖離を埋めるための政策についても言及した。

しかしながら，本稿におけるモデルは，環境汚染や自然資源の問題を包括的に導入しているため，たとえば，定常状態における解の存在や一意性の問題，および，定常状態への収束の問題などを取り扱うことができない。そのため，これらの問題を取り扱っていくためにモデルをより特定化して分析を進めることが必要となる。

また，最適経済成長モデルでは，無限時間視野をもった家計が想定されているが，たとえば，John and Pecchenino（1994）や Marini and Scaramozzino（1995）において分析にもちいられているような，家計の有限性を想定した世代重複モデルによって同様の分析をおこなうことも必要である。さらに，たとえば，Smulders（1999）や Jones and Manuelli（2001）において分析にもちいられているような，いわゆる内生的経済成長モデルによって同様の分析を試みることも必要である。

参考文献

[1] Blanchard, O. and S. Fisher（1989）, *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

[2] Cass, D.（1965）, Optimal Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies* **32**, 233–240.

[3] Forster, B. A.（1973）, Optimal Capital Accumulation in a Polluted Environment, *Southern Economic Journal* **39**, 544–547.

[4] Gruver, G. W.（1976）, Optimal Investment in Pollution Control in a Neoclassical Growth Context, *Journal of Environmental Economics and Management* **3**, 165–177.

[5] John, A. A. and R. A. Pecchenino（1994）, An Overlapping Generations Model of Growth and the Environment, *Economic Journal* **104**, 1393–1410.

[6] Johns, L. E. and R. E. Manuelli（2001）, Endogenous Policy Choice: The Case of Pollution and Growth, *Review of Economic Dynamics* **4**, 369–405.

[7] Koopmans, T. C.（1965）, On the Concept of Optimal Economic Growth, in *The Econometric Approach to Development Planning*, North-Holland.

[8] Marini, G. and P. Scaramozzino（1995）, Overlapping Generations and Environment Control, *Journal of Environmental Economics and Management* **29**, 64–77.

[9] Mohtadi, H.（1996）, Environment, Growth, and Optimal Policy Design, *Journal of Public Economics* **63**, 119–140.

[10] 林山泰久・武藤慎一・佐藤徹治（2005）.「環境資源経済学における最適成長論」『土木学会論文集』**799**,

IV66, 25–44.
[11] Rosendahl, K. E.（1996）, Does Improved Envitonment Policy Enhance Economic Growth? *Environmental and Resource Economics* **9**, 341–364.
[12] Schou, P.（2000）, Polluting Non-Renewable Resources and Growth, *Environmental and Resource Economics* **16**, 211–227.
[13] Smulders, S.（1999）, Endogenous Growth Theory and the Environment, in *Handbook of Environmental and Resource Economics*, Edward Elgar, Cheltenfam.