

Trabajo Fin de Grado Grado en Ingeniería Aeroespacial

Simulaciones del Transporte de Iones en un Tokamak y Aplicación ASCOT al MAST-U (Reino Unido)

Autor: Antonio del Valle Hernández

Tutores: Manuel Toscano Jiménez y Juan Francisco Rivero Rodríguez

**Dpto. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Simulaciones del Transporte de Iones en un Tokamak y Aplicación ASCOT al MAST-U (Reino Unido)

Autor:

Antonio del Valle Hernández

Tutores:

Manuel Toscano Jiménez y Juan Francisco Rivero Rodríguez

Dpto. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021

Trabajo Fin de Grado: Simulaciones del Transporte de Iones en un Tokamak y Aplicación
ASCOT al MAST-U (Reino Unido)

Autor: Antonio del Valle Hernández

Tutores: Manuel Toscano Jiménez y Juan Francisco Rivero Rodríguez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

Me gustaría comenzar agradeciendo a mis compañeros del grupo PSFT por el acogimiento y el fantástico trato y apoyo recibido durante estos meses de tan duro esfuerzo. Especialmente, mencionar a mis tutores, Manuel y Juanfran, por su implicación en el desarrollo de este trabajo y mi aprendizaje en este nuevo campo, y a mi compañera de máster Lina por toda la cooperación y apoyo mutuo que hemos tenido.

Agradecer también a mis amigos de siempre y de la universidad por estar siempre ahí, pese a la distancia o las obligaciones que suponen nuestras metas. Por último, me gustaría expresar un especial cariño y agradecimiento a mi familia y mi novia Isamar por estar a mi lado durante toda esta primera etapa universitaria, dándome la vitalidad, el amor y la ayuda para lograr mis sueños.

Resumen

El transporte de iones rápidos (aquellos que tienen una energía superior a la energía del plasma térmico) es de suma importancia en reactores de fusión por confinamiento magnético, pues tiene implicaciones directas sobre el calentamiento del plasma y la inducción de corriente en el mismo, necesaria para la estabilidad dinámica del sistema. De hecho, uno de los métodos de calentamiento más utilizados y desarrollados en estos dispositivos es la inyección de haz de neutrales (NBI, *Neutral Beam Injection*), que genera una distribución de iones rápidos en el seno del plasma para que estos le transfieran progresivamente su energía.

Sin embargo, la mayor energía de los iones rápidos provoca una cierta tendencia a escapar del confinamiento magnético, lo cual da lugar a pérdidas por colisión con la pared interna de la cámara de vacío del reactor, poniendo en peligro su integridad material y mermando el rendimiento operativo. Este efecto motiva la gran importancia que tiene un buen confinamiento de los iones rápidos en el correcto funcionamiento del reactor.

Por tanto, el enfoque principal del trabajo es realizar un análisis de sensibilidad de la inyección NBI y el transporte de iones aplicado a un tokamak (reactor toroidal basado en el confinamiento magnético mediante líneas de campo cerradas), a través de un conjunto de simulaciones variando los parámetros geométricos del inyector y las condiciones iniciales de los iones rápidos generados.

En aras de apoyar el diseño y optimización de la inyección NBI en el tokamak SMART de la US, y con el fin de producir una serie de resultados que sirvan de referencia en dicha tarea, este análisis se aplicará al tokamak MAST-U. Este dispositivo es una mejora reciente del tokamak esférico MAST, uno de los reactores experimentales más grandes de este tipo y, asimismo, uno de los más prometedores en la demostración de ideas innovadoras y del potencial de la configuración esférica para su uso futuro en reactores de fusión operativos.

El flujo del trabajo principal será el siguiente: en primer lugar, se implementarán las características reales de MAST-U y sus inyectores NBI para simular la inyección utilizando el código BBNBI (*Beamlet-Based NBI-model*) y, posteriormente, seguir el conjunto de órbitas de los iones rápidos generados mediante el código ASCOT (*Accelerated Simulation of Charged particle Orbits in Toroidal devices*), registrando las colisiones con la pared. Ambos códigos, por su alta complejidad y coste computacional, han de ser ejecutados en un supercomputador, siendo utilizados en nuestro caso los recursos de MARCONI en Italia. Tras analizar los resultados del estudio de sensibilidad respecto a los parámetros de inyección del NBI, se tomarán las propiedades de iones representativos para simular las órbitas individuales y analizar su topología y su forma en función de las condiciones iniciales.

De forma previa al trabajo en ASCOT, se elaborará un modelo aproximado del campo magnético de MAST-U para implementarlo en un código de MATLAB que será capaz de calcular las órbitas individuales de los iones. Ajustando los parámetros del campo magnético y de las propias partículas para equipararlos al estudio realizado en ASCOT, se realizará el mismo tipo estudio de sensibilidad a las condiciones iniciales, comparándolo con el anterior.

Índice

<i>Resumen</i>	III
1 Introducción	3
1.1 La fusión como fuente de energía	3
1.2 Tokamaks y Neutral Beam Injector	4
1.3 Iones rápidos	6
1.4 Objeto y contexto: el tokamak MAST-U	7
2 Fundamento teórico	11
2.1 Campo magnético inducido por distintas geometrías de corriente eléctrica	11
2.1.1 Campo magnético de un hilo infinito	12
2.1.2 Campo magnético de una espira circular	13
2.1.3 Campo magnético de una bobina toroidal	14
2.2 Movimiento de una partícula cargada bajo la acción de un campo magnético	15
2.2.1 Ecuaciones de movimiento de la órbita	15
2.2.2 Descripción analítica del movimiento en un campo magnético	16
2.2.3 Invariantes adiabáticos y tipos de órbitas	18
2.3 Métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de movimiento	19
3 Aproximación en MATLAB a la simulación del transporte de iones rápidos en un tokamak	21
3.1 Estudios preliminares del movimiento de iones en campos magnéticos	21
3.1.1 Comparación de los métodos de resolución numérica	21
3.1.2 Simulación del efecto de espejo magnético en una espira	23
3.1.3 Estudio de la topología de la órbita de un ión cercano a la espira	27
3.1.4 Órbitas de un protón en el interior de una bobina toroidal superpuesta a una espira circular	29
3.2 Estudio de sensibilidad de las órbitas de iones rápidos en MATLAB	33
4 Simulación del transporte de iones en ASCOT	37
4.1 El código ASCOT	37
4.2 Inputs	38
4.3 Estudio de sensibilidad de la inyección mediante NBI	40
4.3.1 Posición inicial de los iones generados por la inyección NBI	41
4.3.2 Posición final de los iones rápidos que impactan con la pared	45
4.3.3 Histogramas pitch-energía de las partículas que colisionan con la pared	46

4.4	Estudio de sensibilidad de las órbitas de iones rápidos en ASCOT	52
4.5	Influencia de las colisiones coulombianas	56
5	Conclusiones y trabajos futuros	59
	<i>Índice de Figuras</i>	61
	<i>Índice de Tablas</i>	63
	<i>Bibliografía</i>	65
	<i>Anexo</i>	67

1 Introducción

1.1 La fusión como fuente de energía

Una de las fuentes de energía más prometedoras en el futuro es la fusión nuclear, cuya investigación motivó a su vez el gran desarrollo de la física del plasma a partir de la década de 1950, con múltiples aplicaciones más allá de este ámbito. La fusión se define como la unión de los núcleos de dos átomos ligeros para dar lugar a uno o varios átomos más pesados y liberar energía en el proceso, ligada a la diferencia de masa según la ecuación de Einstein ($E = mc^2$).¹

Durante todas estas décadas, se han sometido a estudio diversas reacciones de fusión con distintos núcleos, siendo la denominada reacción D-T aquella que se muestra más plausible en la Tierra, debido a su relativamente elevada sección eficaz (a mayor sección eficaz, mayor probabilidad de efectuarse la fusión en un conjunto de partículas). Como su nombre indica, esta reacción involucra la unión de un núcleo de deuterio (^2H , D) y uno de tritio (^3H , T), ambos isótopos del hidrógeno (H). Como resultado, se obtiene una partícula α (^4He) y un neutrón (n), los cuales asimilan la energía producida en la reacción en forma de energía cinética.



Con esto, queda patente una ventaja fundamental de la fusión nuclear: entre los productos de la reacción no se encuentran residuos radiactivos de larga duración ni gases de efecto invernadero. Además, ambos reactivos presentan una gran disponibilidad en nuestro planeta, puesto que el deuterio puede extraerse del agua marina y, el tritio, de la reacción de litio (metal abundante en la corteza terrestre) con los propios neutrones resultantes de la fusión.

No obstante, la consecución de un número considerable de reacciones de fusión requiere una energía suficientemente elevada para que los núcleos atómicos implicados superen la repulsión coulombiana, hecho que motiva el uso de un plasma de $D - T$ confinado a altas temperaturas. Esa condición de autosostenimiento del sistema se puede estimar realizando el balance entre la energía entregada por la reacción y las pérdidas de energía del plasma. Así, el criterio de Lawson para la reacción D-T expresa que el triple producto entre la densidad, la temperatura y el tiempo característico de confinamiento ha de ser $nT\tau_E \geq 3 \cdot 10^{21} \text{ keV s/m}^3$.

La imposibilidad del confinamiento del plasma de fusión mediante paredes materiales ante la alta temperatura que impone la condición anterior ha supuesto el desarrollo de dos enfoques a dicho problema:

¹ El contenido de esta sección se basa en los apuntes de Fernando O. Minotti. [1]

- El confinamiento inercial se basa en una compresión radial rápida del plasma dirigiendo haces de láser o partículas energéticas sobre pequeños haces esféricos de $D - T$. Por tanto, se maximiza la densidad y la inercia se opone a la disgregación del plasma, pero el tiempo característico de confinamiento es muy reducido.
- El confinamiento magnético aprovecha su condición de gas ionizado para contenerlo con fuertes campos magnéticos, pues se trata de un gas caliente ionizado, colectivamente cuasi-neutro, pero cuyas partículas cargadas tenderán a moverse a lo largo de las líneas de campo. Ello da lugar a tiempos de confinamiento mucho mayores, pero a una densidad menor que en el caso anterior. A su vez, dentro de esta categoría, destacan varios tipos:
 - La configuración de líneas abiertas se basa en el efecto de espejo magnético, incrementando su intensidad en los extremos, como se describirá más adelante.
 - Las configuraciones cerradas utilizan líneas de campo toroidales a las que se les introduce una torsión mediante bobinas externas (stellarators) o con las propias corrientes del plasma (tokamaks).

1.2 Tokamaks y Neutral Beam Injector

Los tokamaks constituyen actualmente la tecnología más extendida de confinamiento para la fusión nuclear. Hasta el momento, la mayor potencia de fusión (según el criterio de Lawson) se ha obtenido en el tokamak JET, en Culham (Inglaterra); y se pretende superar con ITER, en construcción en Cadarache (Francia), hasta alcanzar la ignición del plasma.

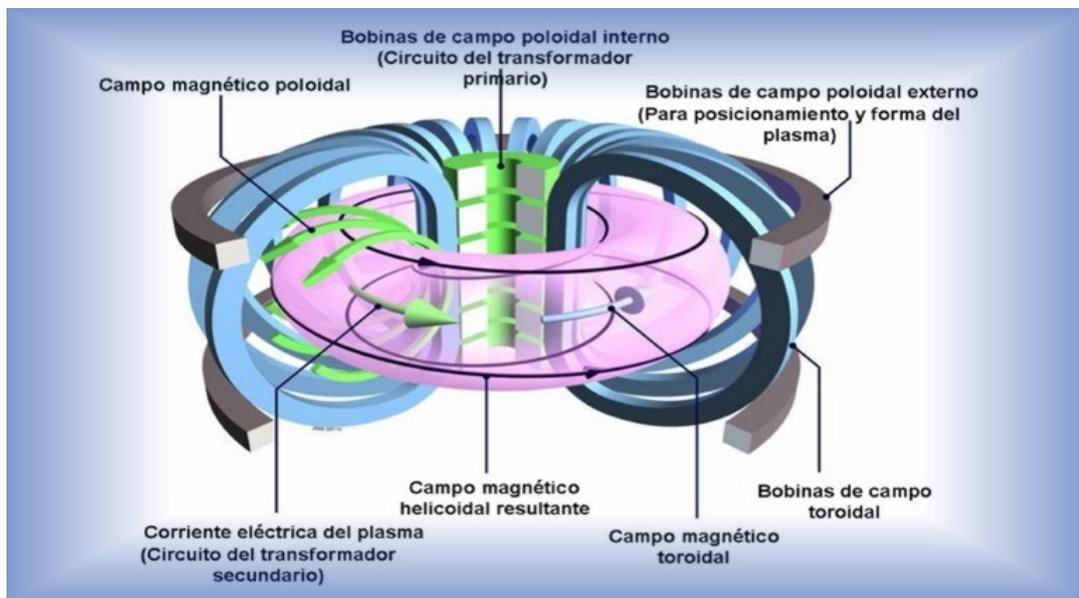


Figura 1.1 Esquema de los campos magnéticos en un tokamak [2].

Un tokamak (acrónimo ruso para «cámara toroidal con bobinas magnéticas») es un dispositivo con forma de toroide formado por un conjunto de bobinas magnéticas, cuyo objetivo es confinar el plasma en una cámara de vacío interna. En líneas generales, en su interior se genera un campo magnético helicoidal mediante la superposición de un campo magnético toroidal inducido por un bobinado toroidal y un campo magnético poloidal generado por la corriente eléctrica del propio plasma en movimiento. Esta corriente, a su vez, es inducida por un solenoide central que funciona

como primario de un transformador en que el plasma es el secundario.²

Aunque esta forma helicoidal del campo magnético es el pilar fundamental del confinamiento, en un tokamak también se instalan bobinas poloidales o, lo que es lo mismo, bobinas de campo poloidal, que se encargan de dar forma a la sección poloidal del plasma. La Figura 1.2 muestra un estudio de esta técnica, denominada *plasma shaping*, realizado en el tokamak TCV (*Tokamak à Configuration Variable*) de Lausana (Suiza), especializado en esta investigación. Se pueden enumerar dos razones principales que motivan la necesidad de dar forma al plasma:

- Influye directamente en la estabilidad magnetohidrodinámica (MHD) del mismo, según describe la ecuación de Grad-Shafranov para plasmas con simetría axial como es el contenido en un toroide.
- Utilizando divertores magnéticos, permite evitar el contacto entre el límite exterior del plasma y la pared material del dispositivo, reduciendo así la transferencia de impurezas y la pérdida de energía.

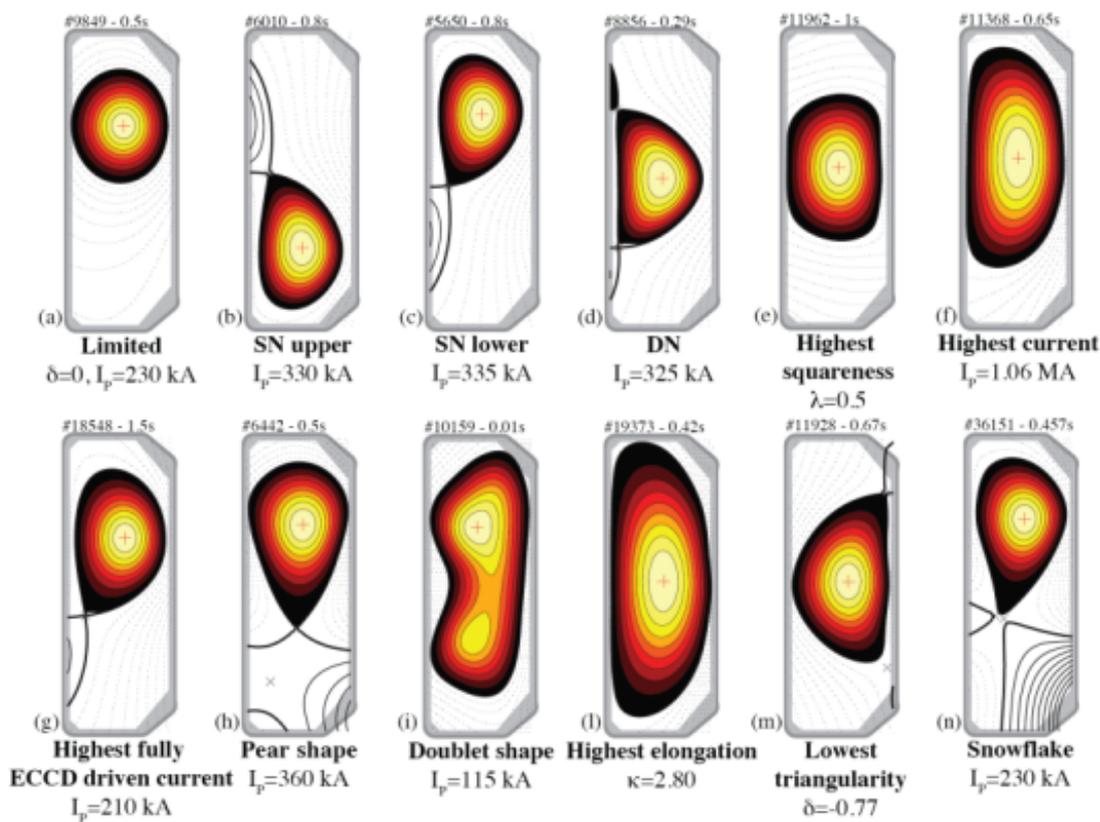


Figura 1.2 Diversas configuraciones de sección poloidal del plasma en el TCV [4].

En lo que respecta al balance de energía en el tokamak, se espera que las partículas α producto de la fusión sean una fuente de calentamiento del plasma que permita su autosostenimiento, una vez se alcance su ignición. Previo a ese punto de operación, se necesitan dos métodos de aporte externo de energía, dado que el calentamiento por efecto Joule de la corriente de plasma no es suficiente para alcanzar temperaturas significativas, que son:

² El contenido restante de este capítulo se basa en el TFM de Juan Francisco Rivero Rodríguez. [3]

- Calentamiento por radiofrecuencia (RF). Consiste en someter al plasma a ondas electromagnéticas de elevada potencia, calentando por radiofrecuencia una cierta población de partículas en función de su frecuencia de ciclotrón.
- Inyección de haz de neutrales (*Neutral Beam Injection*, NBI). El inyector NBI se trata de un dispositivo que genera haces de átomos neutrales de las especies que conforman el combustible para la fusión (H, D, T) a elevadas energías. Las colisiones coulombianas provocan la ionización gradual de dichos neutrales, convirtiéndose en iones rápidos que quedan sometidos a la acción del confinamiento magnético y ceden su energía al colisionar con las partículas del plasma.

Por último, si clasificamos la geometría de un tokamak en función de su relación de aspecto (Figura 1.3), podemos hablar de tokamaks convencionales ($AR \sim 2.5$) y esféricos ($AR \sim 1.5$). Dicha relación de aspecto se define como el cociente entre el radio mayor (R_0 , distancia del eje de simetría al eje magnético) y el radio menor (a , radio de la sección poloidal del plasma) del toroide: $AR = \frac{R_0}{a}$.

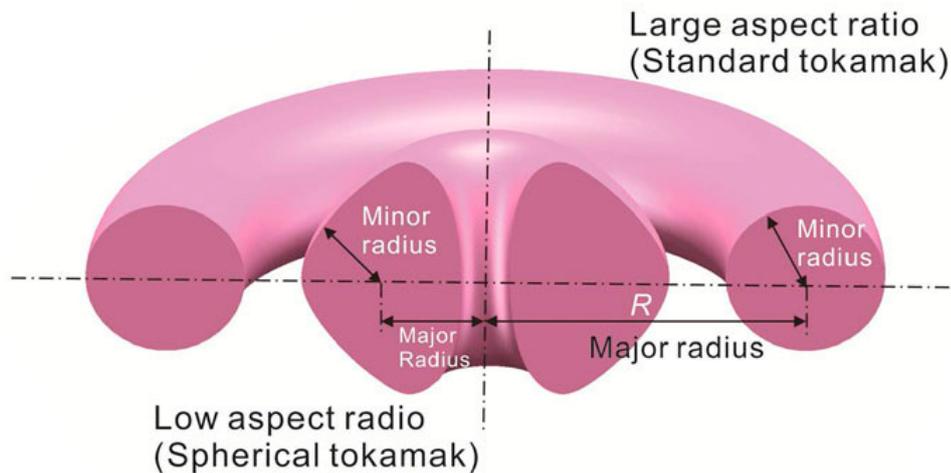


Figura 1.3 Comparación entre un tokamak convencional y uno esférico [5].

El enfoque del trabajo se centra en tokamaks esféricos, por lo que se detallarán sus particularidades. Su característica forma esférica es el resultado de reducir al mínimo la columna central, junto a una sección poloidal con forma de D. Las ventajas que presenta esta configuración, de forma concisa, son: una menor inductancia en el plasma, menor cantidad de energía requerida para una presión de plasma dada (mayor $\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0}$), y retraso en la aparición de inestabilidades al alcanzar β elevados (mayor β_{crit}).

1.3 Iones rápidos

Se consideran iones rápidos aquellos con una energía superior a la energía térmica del plasma, aquella que corresponde al equilibrio entre partículas. Pese a que representan una fracción reducida de la población total de iones ($\sim 5\%$), su elevada energía da lugar a órbitas con mayor girorradio, que favorecen la aparición de efectos de resonancia con inestabilidades MHD o su escape del confinamiento magnético.

Cabe destacar cuatro causas de la pérdida de iones rápidos:

- Pérdidas instantáneas: corresponden a aquellos iones que siguen órbitas perdidas desde su aparición.
- Colisiones coulombianas: permiten la transferencia de energía de los iones rápidos al conjunto del plasma, pero a la vez causan una dispersión del *pitch angle* (ángulo entre la velocidad de la partícula y el campo magnético correspondiente a su posición), lo que perturba significativamente la órbita de algunos de ellos.
- Ruptura en la axisimetría del campo magnético: los iones rápidos presentan una mayor sensibilidad a efectos de este tipo.
- Inestabilidades magnetohidrodinámicas (MHD): la interacción con estos efectos puede dar lugar a una redistribución más acentuada de la población de iones rápidos, facilitando su pérdida.

1.4 Objeto y contexto: el tokamak MAST-U

El objetivo del trabajo consiste en el estudio del transporte de iones en el seno del plasma de un tokamak, desde dos enfoques distintos, pero complementarios:

- Una primera aproximación mediante la implementación del campo magnético de un tokamak y la resolución de las ecuaciones de movimiento de un ión con unas condiciones iniciales impuestas, mediante un código de MATLAB.
- Un conjunto de estudios sobre las características reales del tokamak, haciendo uso del código BBNBI para generar la distribución de iones producto de la inyección NBI y, del código ASCOT, para la simulación de las órbitas de ese conjunto de partículas.

Sobre esa base, se realizará un estudio de sensibilidad a las condiciones iniciales de las órbitas y las características de los iones que escapan del confinamiento magnético y colisionan con la pared del tokamak. Asimismo, se tratará que el código desarrollado y las condiciones de simulación en MATLAB sean lo más parecidas posibles al modelo más realista del tokamak implementado en ASCOT.

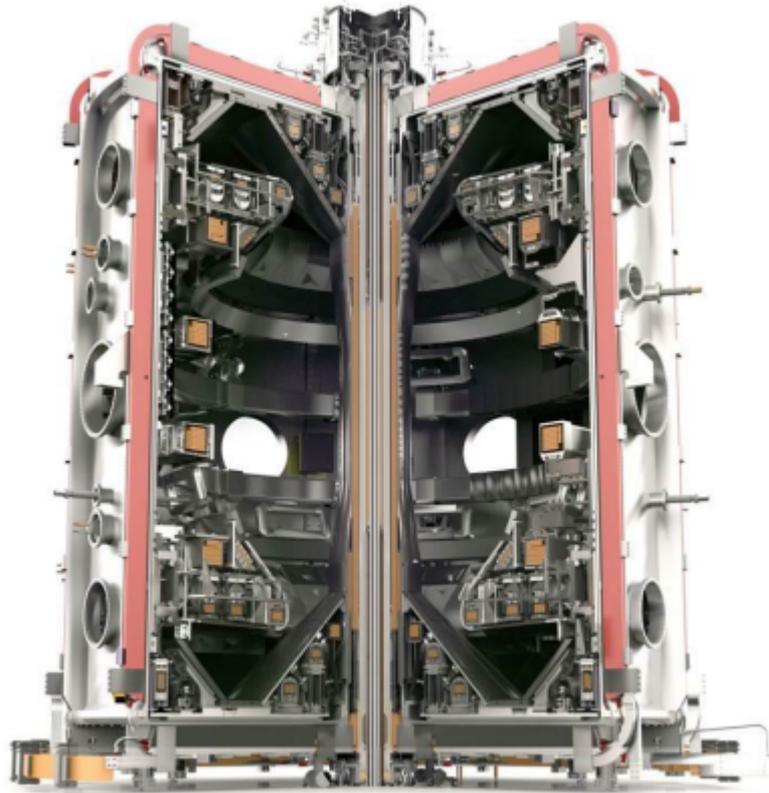
En el marco de la investigación del grupo de *Plasma Physics and Fusion Technology* (PSFT) de la Universidad de Sevilla, se persigue que los resultados hallados en el presente trabajo sirvan de referencia para el diseño de la inyección NBI del tokamak SMART (*Small Aspect Ratio Tokamak*).

El tokamak objeto de estudio será MAST-U (*Mega Amp Spherical Tokamak - Upgrade*), debido a varios motivos: destaca en la investigación de los tokamaks esféricos, siendo uno de los más grandes del mundo (SMART también es esférico, aunque a menor escala), y se dispone de abundante información y resultados de referencia gracias al trabajo realizado por el tutor Juan Francisco Rivero Rodríguez en dicho proyecto. [6]

MAST-U [7] es una versión renovada del tokamak MAST [8], situado en el Culham Centre for Fusion Energy (CCFE), Abingdon, en las afueras de Oxford, Reino Unido. El tokamak original comenzó su operación en el año 2000, convirtiéndose en el sucesor del *Small Tight Aspect Ratio Tokamak* (START) para confirmar y desarrollar sus exitosos resultados. En 2013 interrumpió su operación para alojar los trabajos de mejora hacia el concepto de MAST-U, que introduce ideas innovadoras (por ejemplo, las nuevas configuraciones de divertor) y mejoras operativas, como una mayor capacidad de las bobinas, que le otorga un incremento en la corriente del plasma, el campo magnético y la duración de los pulsos. Pese a esto, mantiene elementos que han demostrado su gran utilidad, como su cámara de vacío cilíndrica, de gran accesibilidad a los sistemas que aloja.

Tabla 1.1 Parámetros físicos y geométricos generales de MAST y MAST-U.

Parámetro	MAST	MAST-U
Radio mayor, R_0 [m]	0.70	0.85
Radio menor, a [m]	0.50	0.65
Relación de aspecto, AR [-]	1.40	1.31
Corriente del plasma, I_p [MA]	1.3	2.0
Campo magnético, B en $R = R_0$ [T]	0.52	0.75

**Figura 1.4** Diseño renderizado de la cámara de vacío de MAST-U [7].

Además del bobinado toroidal y el solenoide central, MAST-U estará formado por 17 nuevas bobinas poloidales encargadas del *plasma shaping* y la consecución de las innovadoras configuraciones de divertor, el cual se trata de un dispositivo situado en el interior del tokamak que permite la captación y retirada del material que escapa del plasma confinado (Figura 1.5). Sin embargo, al no encontrar datos concretos de estas bobinas para MAST-U, se han tomado en consideración las principales bobinas poloidales de MAST (en la Tabla 1.2 se muestran solo las utilizadas posteriormente en el trabajo y, en la Figura 1.6, su posición en la cámara de vacío).

Tabla 1.2 Características básicas de las bobinas poloidales de MAST.

Bobina	Propósito	R [m]	Z [m]	Número de vueltas	Intensidad de alimentación [kA]
P2i,o	Divertor	0.50	± 1.65	12+8	27
P4	<i>shaping</i>	1.50	± 1.10	23	-18
P5	<i>shaping</i>	1.65	± 0.50	23	-17

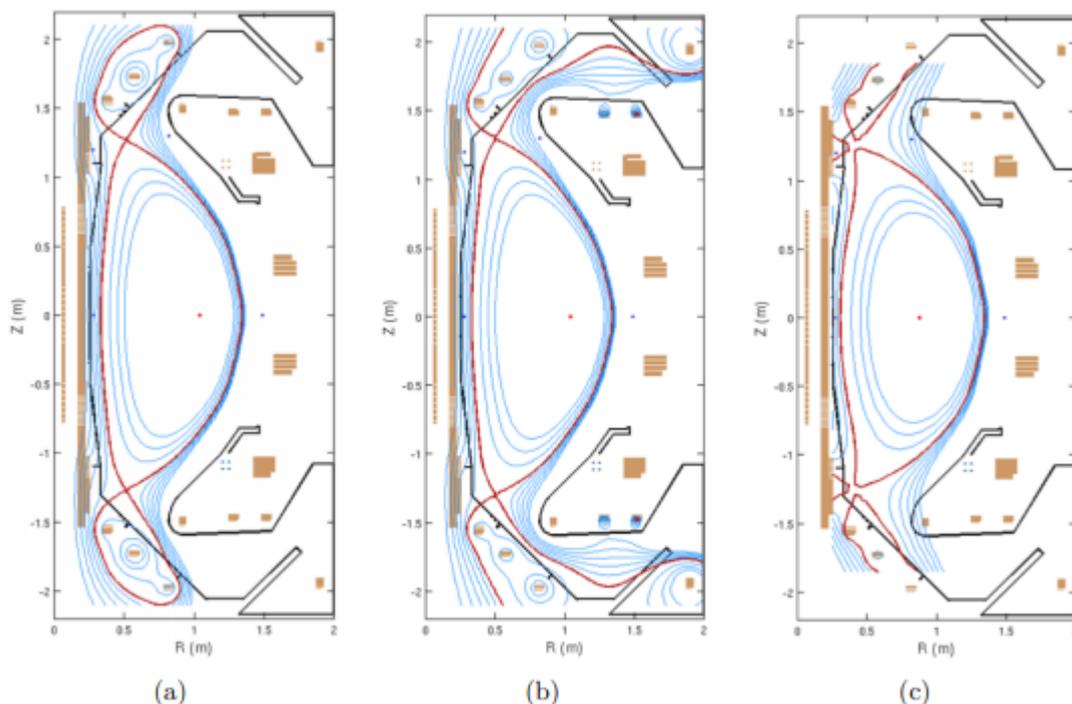


Figura 1.5 Configuraciones principales de divertor en MAST-U; de izquierda a derecha: (a) convencional, (b) super-X y (c) *snowflake* [7].

La población de iones rápidos de MAST-U es generada por dos inyectores NBI, proporcionando cada uno de ellos una potencia de 2.88 MW a una energía máxima de 75 keV: uno situado en el plano ecuatorial (SS, *on-axis*) y, el otro, 650 mm sobre dicho plano (SW, *off-axis*). [6] Ambos pueden inyectar tanto hidrógeno (H) como deuterio (D), aunque solo se estudiará la inyección de la segunda especie.

De forma resumida, la geometría del NBI viene dada por la posición central de la cuadrícula con los agujeros de inyección (R_c , ϕ_c , Z_c), punto respecto al cual se orienta el haz de neutrales emitido, según los ángulos ϕ_s y θ_s , medidos alrededor del eje vertical (dirección Z) y horizontal (dirección toroidal) locales a dicho punto, respectivamente. Dichos parámetros, definidos en [9], quedan recogidos en la siguiente tabla.

Tabla 1.3 Parámetros geométricos de los inyectores NBI de MAST-U..

NBI	R_c [m]	ϕ_c [°]	Z_c [m]	ϕ_s [°]	θ_s [°]
SS	7.0518	-89.25	0.00	-5.74	0.00
SW	7.0137	-150.80	0.65	-6.55	0.00

Otro elemento importante instalado en MAST-U es el *Fast-Ion Loss Detector* (FILD), que se encuentra situado 109 mm sobre el plano ecuatorial del tokamak y a $R = 1.4$; m; es decir, fuera del plasma, entre la separatrix y la pared. Este dispositivo detecta los iones rápidos que escapan del plasma confinado y chocan con este, registrando su energía y su *pitch angle*.

En la próxima fase de mejora se instalará en MAST-U otro NBI *off-axis* para aumentar la potencia de calentamiento; mientras que, en la sucesiva fase, se añadirá un cuarto NBI, esta vez *on-axis* pero contra la corriente del plasma. Con todo, el propósito de MAST-U y de muchos otros tokamaks

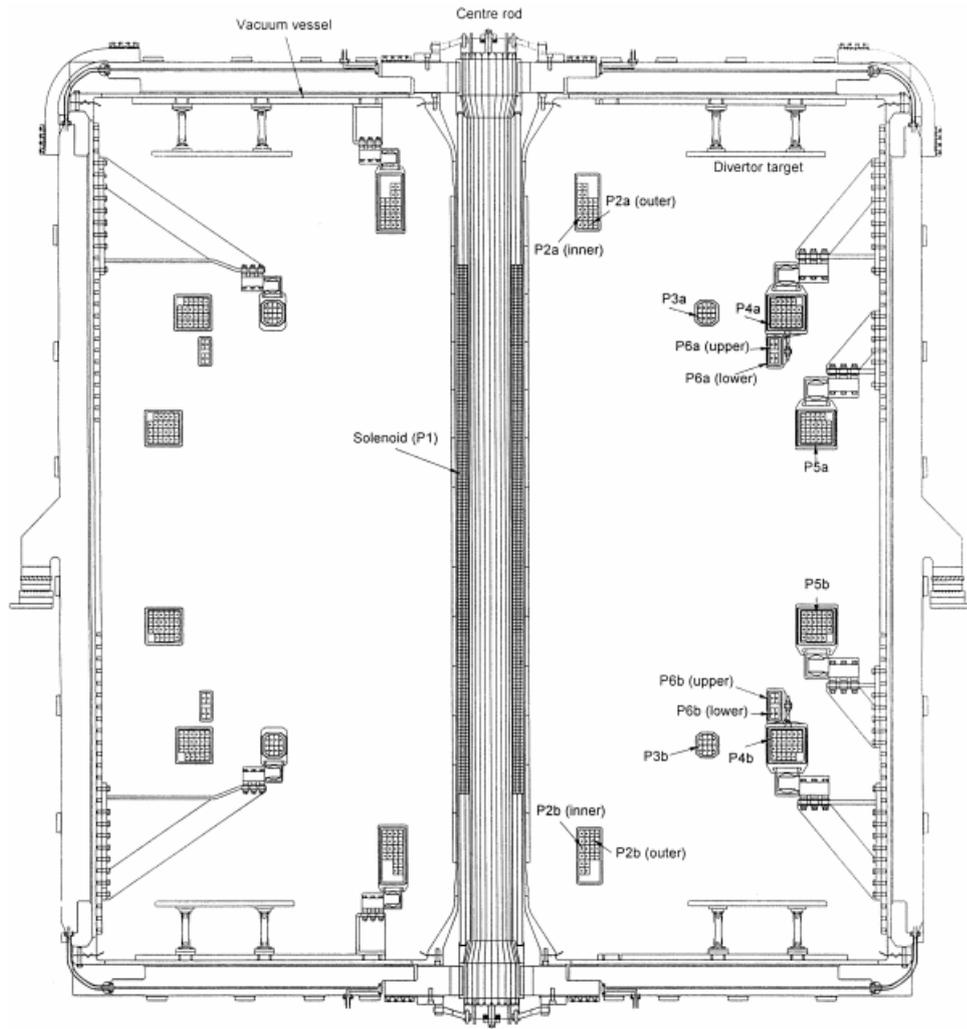


Figura 1.6 Sección transversal de la cámara de vacío de MAST, donde se indica la posición de las distintas bobinas poloidales [8].

actuales es aportar conocimiento para ITER y DEMO. A ello se suman los esfuerzos para situar a la configuración de tokamak esférico como firme candidato para la *Component Test Facility* (CTF) a través del proyecto STEP, futuro reactor de fusión de prueba de estados estacionarios.

2 Fundamento teórico

2.1 Campo magnético inducido por distintas geometrías de corriente eléctrica

Un tokamak genera, en líneas generales, su campo magnético helicoidal mediante la superposición de un campo magnético poloidal inducido por la corriente eléctrica toroidal del plasma en movimiento y un campo magnético toroidal inducido por la corriente eléctrica en un bobinado toroidal. Por tanto, es conveniente comenzar estudiando tres geometrías de corriente: un hilo recto infinito, una espira circular y un toroide.

Por una parte, la ley de Ampère rige la relación entre la circulación del campo magnético estático y la intensidad de corriente eléctrica estacionaria que atraviesa la superficie cerrada correspondiente (I), donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A es la permeabilidad magnética del vacío. [10] Su uso será muy útil en condiciones de simetría de la corriente.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (2.1)$$

Por otra parte, la ley de Biot-Savart deriva de la anterior y proporciona la contribución de cada diferencial de corriente eléctrica ($I d\mathbf{l} \mathbf{e}_l$) en un punto Q de la curva al campo magnético inducido en el punto P del espacio.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \mathbf{e}_l \times \mathbf{QP}}{|\mathbf{QP}|^3} \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta la geometría del tokamak, será conveniente utilizar hasta tres sistemas de coordenadas diferentes para calcular los campos magnéticos y trabajar con las ecuaciones de movimiento. El vector de posición se denotará por $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$, siendo r su módulo.

- Sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z): eje OZ situado en el eje de simetría del toroide y la espira y coincidente con el hilo recto infinito, y ejes OX y OY conteniendo a la espira y formando el plano ecuatorial del toroide.
- Sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z): R corresponde a la coordenada radial medida desde el eje OZ y ϕ a la coordenada angular medida desde el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} x = R \cos \phi \\ y = R \sen \phi \\ z = Z \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

- Sistema de coordenadas toroidales (ρ, θ, ϕ) : ρ denota el radio poloidal, θ el ángulo poloidal y ϕ el ángulo toroidal, como se muestra en la Figura 2.1. [11]

$$\left. \begin{aligned} x &= (R_0 + \rho \cos \theta) \cos \phi \\ y &= (R_0 + \rho \cos \theta) \sin \phi \\ z &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sqrt{(R - R_0)^2 + Z^2} \\ \tan \theta &= \frac{Z}{R - R_0} \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

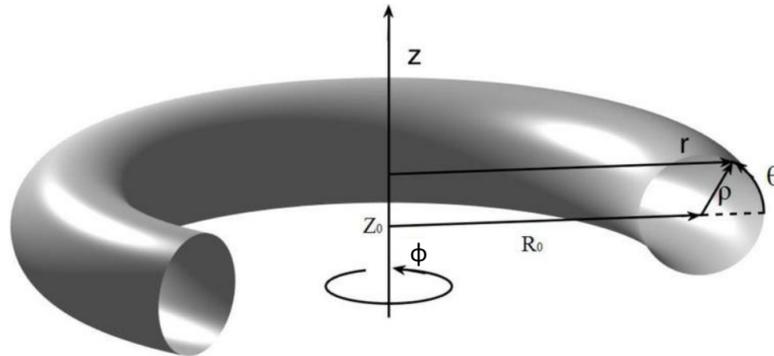


Figura 2.1 Sistema de coordenadas toroidales y cilíndricas [12] (donde se muestra r , en nuestra nomenclatura refiere a R).

Una magnitud de gran importancia en nuestro análisis es el flujo poloidal de campo magnético, que se define según la siguiente ecuación. En MATLAB se calculará realizando un mallado en $R - Z$ de la región donde se desea hallar su valor y se aproximará mediante integración trapezoidal (trapz).

$$\psi(R, Z) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^R B_z(R, Z) \cdot 2\pi R dR \quad (2.5)$$

A partir de este flujo, se puede definir una coordenada poloidal normalizada (ρ_{pol}), que toma valor 0 en el eje magnético ($\psi = \psi_{axis}$) y 1 en la separatrix ($\psi = \psi_{sep}$). Esta coordenada es muy útil para definir propiedades 1D del plasma.

$$\rho_{pol} = \sqrt{\frac{\psi - \psi_{axis}}{\psi_{sep} - \psi_{axis}}} \quad (2.6)$$

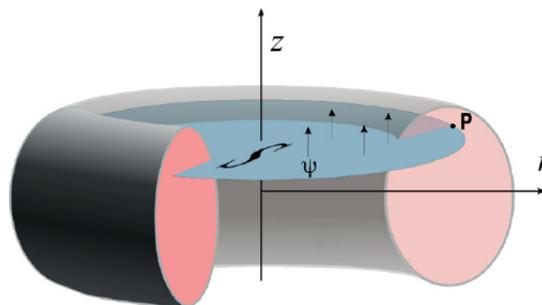


Figura 2.2 Definición de la superficie para el cálculo del flujo poloidal [13].

2.1.1 Campo magnético de un hilo infinito

Este primer caso consistirá en un hilo recto de sección despreciable y longitud infinita alineado con el eje OZ y a través del cual circula una intensidad de corriente eléctrica I en el sentido

positivo de la coordenada Z . La ley de Biot-Savart aplicada a este caso determina de forma sencilla la expresión del campo magnético inducido en coordenadas cilíndricas, cuyas líneas de campo describen circunferencias concéntricas al hilo. [14]

$$\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{e}_\phi \quad (2.7)$$

2.1.2 Campo magnético de una espira circular

Ahora se considera una espira circular de sección despreciable y radio R_0 , situada en el plano OXY , y por la que circula una corriente eléctrica de intensidad I en sentido dextrógiro. Siguiendo el procedimiento descrito en [15], primero hay que definir la geometría implicada en la ley de Biot-Savart: por una parte la descripción curvilínea de la espira mediante su radio R_0 y el ángulo polar φ medido desde OX ; por otra, el vector que une cada punto de la espira con el punto en que se desea calcular el campo \mathbf{QP} . Gracias a la axisimetría del problema es suficiente considerar únicamente los puntos P en el plano OYZ .

$$d\mathbf{l} \mathbf{e}_1 = R_0 d\varphi (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{QP} = -R_0 \cos \varphi \mathbf{e}_x + (y - R_0 \sin \varphi) \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (2.9)$$

$$|\mathbf{QP}| = \sqrt{R_0^2 + y^2 + z^2 - 2R_0 y \sin \varphi}$$

El resultado de la ley de Biot-Savart es susceptible de simplificación debido a la simetría del problema, que ya se ha aplicado para considerar únicamente el plano OYZ . En primer lugar, la componente $B_x = 0$ puesto que los diferenciales de campo en X a un lado de dicho plano se cancelan con los simétricos del otro lado. Además, por axisimetría se puede extrapolar el resultado en dicho plano a infinitos planos que se cortan en el eje OZ , identificando B_y con B_r (componente radial en coordenadas cilíndricas) y obteniendo una descripción en coordenadas cilíndricas en la que $B_\phi = 0$: $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_z \mathbf{e}_z$. Así pues, la expresión analítica del campo magnético queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} R_0 Z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \varphi}{(R_0^2 + R^2 + Z^2 - 2R_0 R \sin \varphi)^{3/2}} d\varphi \quad (2.10)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R_0 - R \sin \varphi}{(R_0^2 + R^2 + Z^2 - 2R_0 R \sin \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

Estas ecuaciones son resolubles de forma trivial en el caso particular de campo magnético en el eje OZ ($R = 0$), pues al ser el eje de simetría las componentes radiales se anulan entre sí ($B_r = 0$). Por consiguiente, el campo magnético adopta la siguiente expresión, donde se observa que disminuye con el cubo de la distancia Z y va en sentido creciente del eje OZ si la corriente circula en sentido dextrógiro.

$$\mathbf{B}(R = 0) = B_z \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R_0^2}{(Z^2 + R_0^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (2.11)$$

No obstante, en cualquier otro punto, las ecuaciones (2.10) corresponden a integrales elípticas. Pese a carecer de solución analítica, existen unas integrales elípticas básicas de 1ª y 2ª especie, denotadas por $K(m)$ y $E(m)$ respectivamente, que se encuentran perfectamente tabuladas; en

MATLAB se calculan con la función $[K, E] = \text{ellipke}(m)$.

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (2.12)$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta$$

Para expresar nuestras integrales de interés en función de esas integrales elípticas tabuladas, se ha seguido el procedimiento expuesto en [16], llegando a las expresiones finales que nos permitirán calcular las componentes del campo magnético, donde $m = \frac{4R_0R}{R_0^2 + Z^2 + R^2 + 2R_0R}$.

$$B_r = \frac{\mu_0 I Z}{2\pi R} \sqrt{\frac{m}{4R_0R}} \left[\frac{2-m}{2-2m} E(m) - K(m) \right] \quad (2.13)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sqrt{\frac{m}{4R_0R}} \left[RK(m) + \frac{R_0m - (2-m)R}{2-2m} E(m) \right]$$

Finalmente se muestran las líneas de campo correspondientes a este caso, que por definición son aquellas curvas tangentes a \mathbf{B} en cada punto. Su expresión diferencial se ha aproximado mediante diferencias finitas, donde se ha tomado $\Delta h = 0.1 \ll 1$. Así, se fijan unos puntos iniciales con coordenadas en $z = 0$ y $r = R_0 \cdot k/10$, con $k \in [0, 9] \subset \mathbb{N}$, a partir de los cuales se van calculando los puntos de las líneas de campo en las distintas iteraciones. Esto se realiza para la región del primer cuadrante ($z \in [0, 5R_0]$, $r \in [0, 5R_0]$) y se extiende por simetría al resto.

$$r_j = r_{j-1} + B_r \Delta h \quad (2.14)$$

$$z_j = z_{j-1} + B_z \Delta h$$

2.1.3 Campo magnético de una bobina toroidal

La aplicación de la ley de Ampère permite calcular de forma sencilla el campo magnético producido por una bobina formada por N espiras enrolladas alrededor de un toroide de radio menor a y radio mayor R_0 , por las que circula una corriente eléctrica de intensidad i . [17] En primer lugar, conociendo que el campo magnético inducido será paralelo a circunferencias de radio R (sobre las que se calculará la integral curvilínea), teniendo por tanto solo componente toroidal, se puede calcular de forma sencilla el primer término de la mencionada ley. Además, puesto que la corriente solo atraviesa circunferencias de radio R , tales que estén contenidas en el interior del toroide ($\rho \leq a$), \mathbf{B} se anula en puntos exteriores al mismo. En definitiva, se obtiene un campo magnético con una expresión análoga al inducido por el hilo infinito de corriente pero confinado en el interior de la bobina.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B_\phi dl = B_\phi \cdot 2\pi R \implies B_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} & \text{si } \rho \leq a \\ 0 & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (2.15)$$

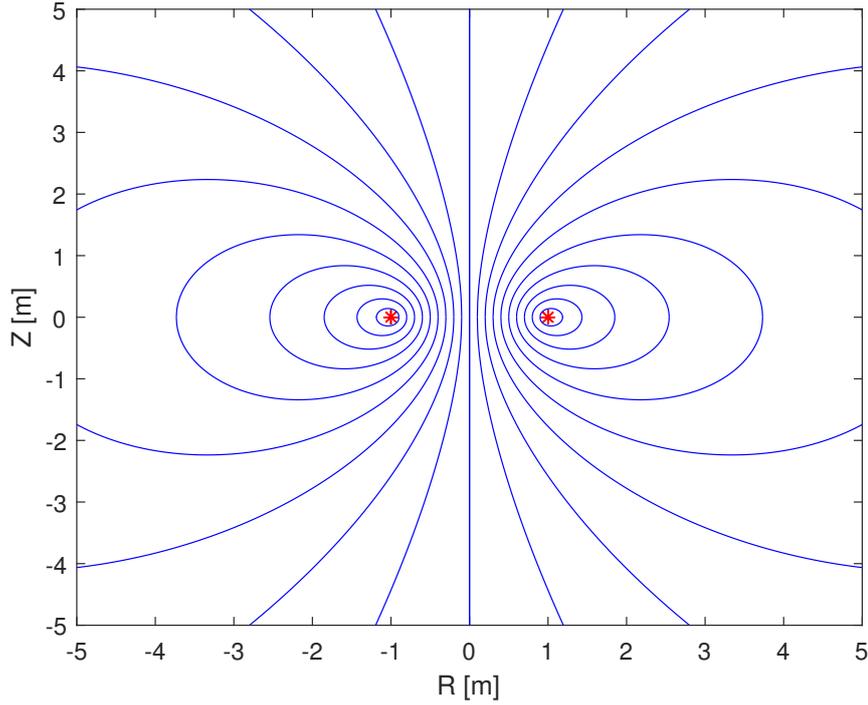


Figura 2.3 Líneas de campo magnético de una espira circular de intensidad $I = 0.1$ MA y $R_0 = 1$ m, valores dentro del intervalo de tokamaks medianos o pequeños.

2.2 Movimiento de una partícula cargada bajo la acción de un campo magnético

2.2.1 Ecuaciones de movimiento de la órbita

En los estudios físicos que se van a realizar sobre el tokamak se conoce el campo magnético en cada punto, que habitualmente viene dado en coordenadas cilíndricas: $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\phi \mathbf{e}_\phi + B_z \mathbf{e}_z$. Así, una partícula cargada (como son los iones rápidos) situada inicialmente en una posición $\mathbf{r}(0) = [x_0, y_0, z_0]$ y con una velocidad $\mathbf{v}(0) = [v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}]$, que se mueve en el seno de dicho campo magnético, experimentará en cada punto de su trayectoria una fuerza \mathbf{F} determinada por la ley de Lorentz (donde se ha omitido la fuerza debida al campo eléctrico, $q\mathbf{E}$).

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{2.16}$$

La fuerza magnética obtenida, por la segunda ley de Newton, producirá una aceleración en la partícula de carga q y masa m que modificará su trayectoria en cada instante. Resulta así un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, en las que aparecen las coordenadas cartesianas de la posición (implícitas en las componentes del campo magnético) y sus derivadas primera (componentes de la velocidad) y segunda, y que constituye el problema matemático a resolver para

hallar la órbita.

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \frac{q}{m} (B_z \dot{y} - B_y \dot{z}) \\ \ddot{y} = \frac{q}{m} (B_x \dot{z} - B_z \dot{x}) \\ \ddot{z} = \frac{q}{m} (B_y \dot{x} - B_x \dot{y}) \end{cases} \quad (2.17)$$

Dichas componentes cartesianas del campo magnético resultan de realizar el cambio de base al vector dado en coordenadas cilíndricas, adoptando la siguientes expresiones para cada punto (x, y, z) , siendo $R = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} B_x &= B_r \frac{x}{R} - B_\phi \frac{y}{R} \\ B_y &= B_r \frac{y}{R} + B_\phi \frac{x}{R} \\ B_z &= B_z \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2.2 Descripción analítica del movimiento en un campo magnético

Las propiedades fundamentales del movimiento de partículas cargadas bajo la acción de campos magnéticos pueden extraerse del caso simple de campo magnético uniforme y estacionario. Sobre este, pueden añadirse modificaciones del propio campo u otro tipo de fuerzas, que dan lugar a derivas respecto a dicha trayectoria básica.¹

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.19)$$

Comenzaremos entonces trabajando sobre la ecuación de movimiento para el caso de \mathbf{B} constante. En primer lugar, si se multiplica la ecuación (2.19) escalarmente por \mathbf{v} , se deduce la invariancia de la energía cinética de la partícula ($W = \frac{1}{2}mv^2 = cte$).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{m} = 0 \implies v = cte \quad (2.20)$$

Por otra parte, la velocidad puede ser descompuesta en una componente paralela al campo magnético (\mathbf{v}_\parallel) y una perpendicular al mismo (\mathbf{v}_\perp). Operando con la ecuación de movimiento de forma similar, se obtiene que ambas componentes son constantes en este caso.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp \implies \begin{cases} \mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \frac{\mathbf{B}}{B^2} \implies v_\parallel = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel \implies v_\perp = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel| \end{cases} \quad (2.21)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = m \frac{dv_\parallel}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = 0 \implies v_\parallel = cte \quad (2.22)$$

$$v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2 \implies v_\perp = cte \quad (2.23)$$

Finalmente, se concluye que en la ecuación de movimiento solo la componente perpendicular experimenta interacción con el campo magnético, dando lugar a un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular a \mathbf{B} . El centro instantáneo de rotación, que denominaremos girocentro,

¹ Esta sección está redactada a partir de las fuentes [1] [3] [18].

se desliza en la dirección del campo magnético con una velocidad v_{\parallel} . Si la carga es positiva (por ejemplo, iones), el giro es dextrógiro respecto a \mathbf{B} ; mientras que, si es negativa (por ejemplo, electrones), el giro es levógiro.

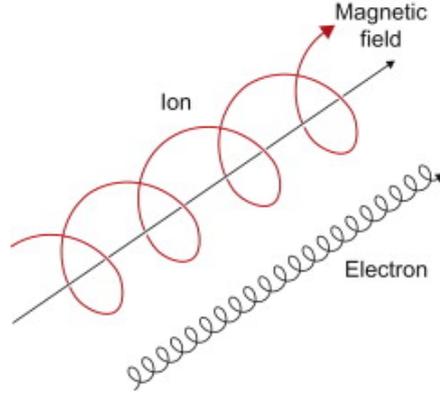


Figura 2.4 Trayectoria helicoidal de un ión y un electrón alrededor de una línea de campo magnético uniforme [19].

El resultado es una trayectoria helicoidal alrededor en la dirección del campo magnético, viene definida por tres parámetros clave:

- Girorradio, radio ciclotrónico o radio de Larmor: distancia entre la partícula y el girocentro.

$$R_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (2.24)$$

- Frecuencia de ciclotrón: frecuencia del movimiento circular alrededor del girocentro.

$$\omega_c = \frac{v_{\perp}}{R_L} = \frac{|q|B}{m} \quad (2.25)$$

- Ángulo de inclinación (*pitch angle*): se define como el ángulo entre el campo magnético y la velocidad \mathbf{v} , lo que es equivalente, entre v_{\parallel} y v .

$$\lambda = \cos \Lambda = \frac{v_{\parallel}}{v} \quad (2.26)$$

Si al caso básico anterior se añaden fuerzas externas, se producen dos efectos sobre el movimiento de la partícula cargada, concretamente sobre su girocentro: la componente paralela al campo magnético (F_{\parallel}) acelera la partícula en dicha dirección una cantidad F_{\parallel}/m , mientras que la componente perpendicular (F_{\perp}) provoca una deriva constante en el movimiento del girocentro. La ecuación de movimiento queda:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F} \quad (2.27)$$

Considerando por separado el movimiento del girocentro, su posición (\mathbf{r}_c) respecto a la de la partícula (\mathbf{r}) queda definida a través del radio de Larmor y, derivando esta, se puede determinar una expresión para su velocidad (\mathbf{v}_c). En el desarrollo intermedio se ha utilizado la propia ecuación de movimiento y la relación vectorial: $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -v_{\perp} B^2 \hat{\mathbf{r}}$.

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \frac{m}{qB^2} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_{\parallel} + \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \implies \mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (2.29)$$

Por tanto, la componente perpendicular de la fuerza externa introduce una variación en la velocidad del girocentro, que denominamos deriva (\mathbf{v}_d). A continuación se comentan brevemente algunas causas de estas derivas:

- Deriva por campo eléctrico ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift): la fuerza debida a un campo eléctrico, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, genera una deriva independiente de la carga, que desplaza el girocentro en la dirección perpendicular a \mathbf{E} y \mathbf{B} .

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.30)$$

- Deriva por curvatura (*curvature drift*): una partícula moviéndose a lo largo de líneas de campo magnético curvadas sufre la acción de una fuerza centrífuga en la dirección del radio de curvatura \mathbf{R}_B , $\mathbf{F} = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_B}{R_B^2}$, que produce una deriva tal que mantenga su trayectoria a lo largo de la línea de campo.

$$\mathbf{v}_{\text{curv}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2 R_B^2} (\mathbf{R}_B \times \mathbf{B}) \quad (2.31)$$

- Deriva por gradiente (*gradient drift*): suponiendo que la variación relativa de \mathbf{B} es pequeña a lo largo de un giro de ciclotrón, un gradiente transversal del campo magnético provoca la siguiente deriva.

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3} (\mathbf{B} \times \nabla_{\perp} \mathbf{B}) \quad (2.32)$$

Una vez conocidos los distintos efectos que pueden ocurrir en el movimiento de partículas cargadas en el seno de un campo magnético, consideremos su implicación en el confinamiento magnético de un tokamak. Si solo se tuviera un campo toroidal, la fuerza centrífuga debida a la curvatura y el gradiente del campo magnético darían lugar a una deriva vertical. Esta desplazaría los iones positivos y los electrones en direcciones opuestas, generando a su vez una deriva por campo eléctrico, perdiendo el confinamiento. Esto explica la importancia del campo magnético poloidal, que curva las líneas de campo aportándoles una forma helicoidal, compensando así los efectos anteriormente mencionados.

2.2.3 Invariantes adiabáticos y tipos de órbitas

Según la mecánica analítica, un invariante adiabático se define como aquella acción $J = \oint p dq$ de una coordenada generalizada q y su momento conjugado p , que es constante bajo un cambio lento en un parámetro externo. Si este parámetro no cambia, se asume que el movimiento es periódico y la integral se reduce a un periodo.

En física del plasma existen tres tipos de invariantes adiabáticos, pero solo se nombrará el invariante correspondiente al movimiento de giro de Larmor, por su importancia en nuestro análisis. Este se trata del momento magnético, que aparece por la equivalencia entre la trayectoria helicoidal con una bobina de corriente eléctrica. Su valor μ es el cociente entre la energía cinética de la partícula en el movimiento de rotación perpendicular a \mathbf{B} y el módulo de este, y su dirección es opuesta al campo magnético, lo que aporta propiedades diamagnéticas al plasma.

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B} \quad (2.33)$$

Precisamente, el efecto de espejo magnético se explica por la invariancia del momento magnético: si una partícula se mueve a lo largo de una línea de campo magnético en sentido creciente del gradiente, como B aumenta, v_{\perp} tiene que aumentar también para mantener μ constante, lo que a su vez implica una disminución del valor de v_{\parallel} . Una partícula será reflejada si, moviéndose desde una posición de B_{min} hasta B_{max} , v_{\parallel} se anula y cambia de signo. Por tanto, el criterio de reflexión por este efecto es (siendo Λ_0 el ángulo de incidencia en la posición de B_{min}):

$$\lambda_0 = \cos \Lambda_0 < \sqrt{1 - \frac{B_{min}}{B_{max}}} \quad (2.34)$$

Esta condición determina la principal diferencia entre los dos tipos de órbitas más usuales en un tokamak, que además serán objeto de estudio en los capítulos posteriores. El campo magnético de un tokamak es inversamente proporcional a la coordenada radial R , lo que permite identificar dos posiciones límite del valor de B : B_{max} se produce en la mínima R del plasma (*high field side*, HFS), mientras que B_{min} tiene lugar en la máxima R (*low field side*, LFS).

- Órbitas pasantes (*passing orbits*): son aquellas que no cumplen el criterio de reflexión, luego la partícula es capaz de completar una vuelta cerrada alrededor del toroide, con una trayectoria similar a la forma de las líneas magnéticas.
- Órbitas atrapadas (*trapped orbits*): comúnmente conocidas como órbitas banana por su característica proyección poloidal, cumplen el criterio anterior, por lo que las partículas se encuentran atrapadas en el LFS con un movimiento periódico de vaivén entre dos espejos magnéticos.

2.3 Métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de movimiento

Junto a las condiciones iniciales, el sistema resultante, conformado por las ecuaciones de movimiento (2.17), constituye un problema de valor inicial (PVI) de segundo orden compuesto por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, por lo que se recurrirá a métodos numéricos para su resolución. Estos métodos parten de un PVI de primer orden, por lo cual debemos transformar nuestro sistema de la siguiente manera:

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \implies \dot{Y} = f(Y) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{q}{m} (B_z \dot{y} - B_y \dot{z}) \\ \dot{y} \\ \frac{q}{m} (B_x \dot{z} - B_z \dot{x}) \\ \dot{z} \\ \frac{q}{m} (B_y \dot{x} - B_x \dot{y}) \end{bmatrix} \quad Y(t=0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_{x0} \\ y_0 \\ v_{y0} \\ z_0 \\ v_{z0} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Este PVI de primer orden es resoluble numéricamente, mediante métodos que parten de una discretización adecuada de las variables implicadas:

- El tiempo se discretiza en N intervalos, dando lugar a un vector t_j con $j = 1, 2, \dots, N + 1$. Fijando los instantes inicial ($t_1 = 0$) y final ($t_{N+1} = t_f$), obtenemos un paso de integración $\Delta t = \frac{t_{N+1} - t_1}{N}$.

- El vector de incógnitas Y será tratado como la matriz Y_{ij} , donde las filas $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ representan las incógnitas del PVI y las columnas $j = 1, 2, \dots, N + 1$ denotan los instantes temporales, acorde a t_j .

En lo que sigue se exponen brevemente las fórmulas a seguir en cada iteración (desde $j = 1$ hasta $j = N$) para integrar el PVI de primer orden en cuestión. Se considerarán los siguientes métodos (en la sección dedicada al análisis con MATLAB se valorará la precisión y conveniencia de cada uno de ellos):

- **Método de Euler**

$$Y_{j+1} = Y_j + \Delta t f(Y_j) \quad (2.36)$$

- **Método de Runge-Kutta de orden 2**

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = f(Y_j) \\ k_2 = f\left(Y_j + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow Y_{j+1} = Y_j + k_2 \Delta t \quad (2.37)$$

- **Método de Runge-Kutta de orden 4**

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = f(Y_j) \\ k_2 = f\left(Y_j + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 = f\left(Y_j + k_2 \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 = f(Y_j + k_3 \Delta t) \end{array} \right\} \Rightarrow Y_{j+1} = Y_j + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.38)$$

3 Aproximación en MATLAB a la simulación del transporte de iones rápidos en un tokamak

3.1 Estudios preliminares del movimiento de iones en campos magnéticos

Previamente a la simulación de órbitas en un tokamak utilizando MATLAB, se ha realizado una serie de ejercicios de cálculo y análisis de órbitas de un protón, moviéndose bajo campos magnéticos creados por las geometrías de corriente eléctrica sencillas ya expuestas. En cada uno de ellos, se extraen distintas conclusiones interesantes para construir el modelo del campo magnético del tokamak y para el análisis completo.

3.1.1 Comparación de los métodos de resolución numérica

En primer lugar, se tiene un hilo infinito alineado con el eje OZ, por el que circula una corriente de intensidad $I = 5$ MA. Suponiendo las siguientes condiciones iniciales, siendo $v_0 = c/300$, $R_0 = 1$ m y c la velocidad de la luz, se va a calcular la órbita de un protón en el seno de dicho campo magnético para un tiempo de simulación de 100 periodos ciclotrónicos ($t_f = 100T_c$), siendo $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{|q|B}$, con B calculado en la posición inicial. En la elección de estos datos, se ha tratado de tomar valores de órdenes de magnitud análogos a MAST-U.

$$\begin{aligned} R(0) &= R_0 & \phi(0) &= 0 & Z(0) &= 0 \\ v_r(0) &= v_0 & v_\phi(0) &= v_0/10 & v_z(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

La resolución de las ecuaciones de movimiento mediante los tres métodos numéricos presentados en la Sección 2.3 permitirá realizar una comparación entre ellos, considerando el error relativo cometido (se estimará comparando la velocidad calculada en cada instante con la velocidad inicial, ya que por la invariancia de la energía cinética, esta ha de mantenerse constante) y el coste computacional asociado. Como es previsible, los métodos de Runge-Kutta serán mucho más precisos que el método de Euler, lo cual se refleja a la hora de determinar el número de intervalos de tiempo N necesario para obtener un error menor a las milésimas en la energía. Mientras que para los métodos de Runge-Kutta basta con considerar $N \sim 10^4$, para el método de Euler es necesario tener $N \sim 10^7$.

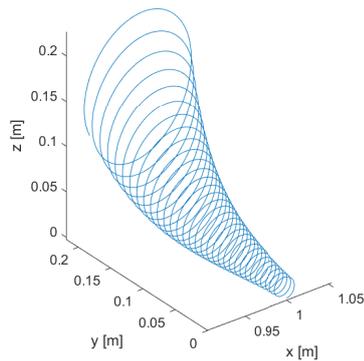
Así, para $N = 4 \cdot 10^7$, el método de Euler proporciona un error relativo máximo $\varepsilon = 1.2013 \cdot 10^{-3}$, muy cercano a la parte por mil que se pide. Se observa la cantidad de recursos (tiempo y capacidad de computación) que requiere un algoritmo tan simple, pues prácticamente todo el peso de

la aproximación recae sobre la discretización. De hecho, esta debe rozar el tamaño infinitesimal ($\Delta t \sim 10^{-14}$ s) para poder obtener una precisión aceptable.

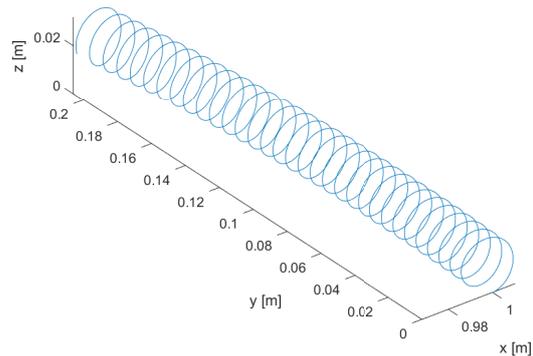
Tabla 3.1 Error relativo máximo para cada método numérico, con $N = 10^4$.

Método numérico	Error relativo máximo
Euler	$5.3230 \cdot 10^1$
Runge-Kutta de orden 2	$6.1041 \cdot 10^{-4}$
Runge-Kutta de orden 4	$2.1313 \cdot 10^{-4}$

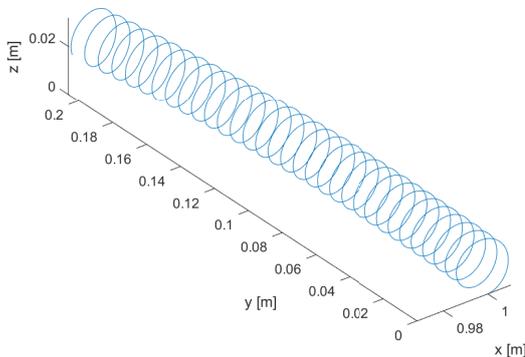
Cuando se analizan los resultados de los tres métodos para $N = 10^4$, se observa que la diferencia entre los métodos de Runge-Kutta a nivel gráfico son inapreciables, lo cual no ocurre con el método de Euler, donde se destaca visualmente el error obtenido. Además, a nivel de error cometido en el análisis energético, se puede estimar una tendencia decreciente clara. Concluimos entonces que el método de Runge-Kutta de orden 4 (como era de esperar) tiene una mayor eficiencia en cuanto a que necesita una N menor, lo que implica menor tiempo de cálculo, y además proporciona un error bastante reducido respecto a los demás métodos.



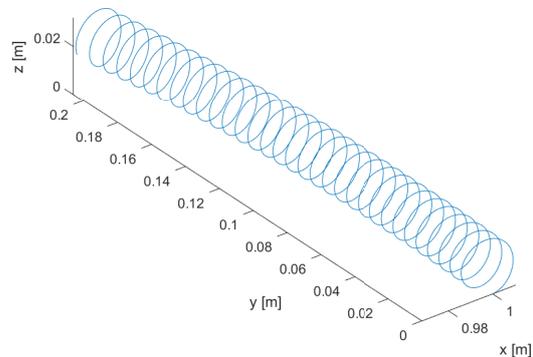
(a) Método de Euler con $N = 10^4$



(b) Método de Euler con $N = 4 \cdot 10^7$



(c) Método de Runge-Kutta de orden 2 con $N = 10^4$



(d) Método de Runge-Kutta de orden 2 con $N = 4 \cdot 10^4$

Figura 3.1 Órbita de un protón en el campo magnético de un hilo infinito, calculada con diferentes métodos numéricos.

3.1.2 Simulación del efecto de espejo magnético en una espira

El análisis se centra ahora en el caso de una espira circular de corriente eléctrica $I = 0.5$ MA y radio $R_0 = 1$ m, con un protón situado inicialmente en $\mathbf{r}(0) = [0, 0, -R_0]$ y con una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = v_0[0, 1, 1]$, siendo $v_0 = c/1000$. La simulación numérica se realizará durante un tiempo $t_f = 100T_c$, estimando el periodo ciclotrónico con el valor inicial del campo magnético, y mediante una discretización del tiempo de $N = 10^4$ intervalos. Con esta definición del problema se busca estudiar el efecto de campo magnético que sufre una partícula cargada al moverse su girocentro en la dirección del eje de simetría de la espira, debido al gradiente creciente de \mathbf{B} al acercarse a esta (B_{max} se daría en $z = 0$ m).

Si se calcula y representa la órbita seguida por el protón, en primer lugar se observa la forma helicoidal típica del movimiento de partículas cargadas bajo un campo magnético. Entrando en detalle, inicialmente la partícula asciende por inercia hacia la espira, pero el campo magnético la frena hasta llegar a un punto de velocidad paralela nula. Justo a partir de ese instante se invierte el sentido del movimiento del girocentro y la acción repulsiva del campo magnético de la espira se suma a la inercia del protón, alejándolo indefinidamente.

Este fenómeno de reflexión de una partícula cargada bajo un gradiente de campo magnético se trata, efectivamente del espejo magnético, uno de los métodos de confinamiento magnético. Colocando otra espira a una determinada distancia por debajo se podría lograr la reflexión del protón repelido por la primera espira, de tal forma que quedaría en un movimiento periódico entre ambas espiras. En este caso concreto, la reflexión (instante en que $v_{\parallel} = 0$) se produce en $\mathbf{r}(t = 3.0626 \mu s) = [0.0389, 0.0063, -0.5086]$ m.

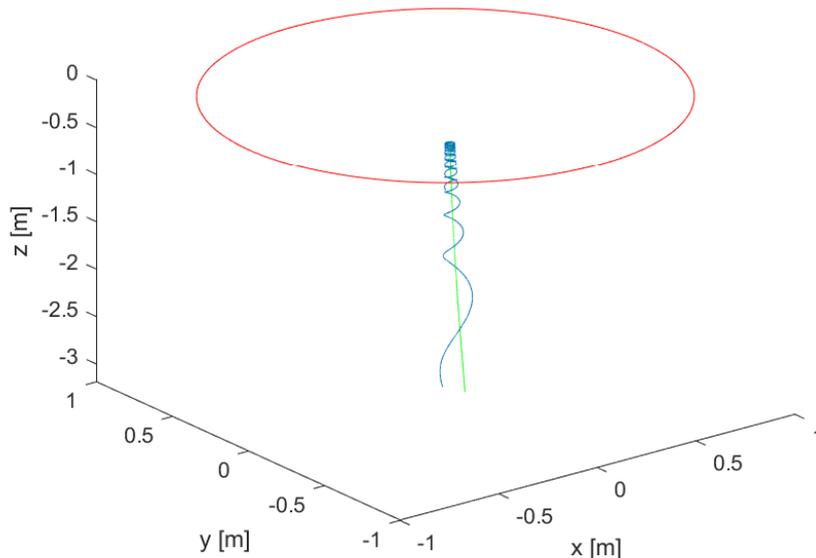


Figura 3.2 Posición (azul) y girocentro (verde) de la órbita del protón. En rojo, la espira.

Por otra parte, el análisis de las componentes naturales de la velocidad es muy descriptivo de la física del problema. La componente paralela al campo magnético disminuye progresivamente hasta el instante de reflexión, donde se anula, para luego aumentar en valor absoluto, pero con signo

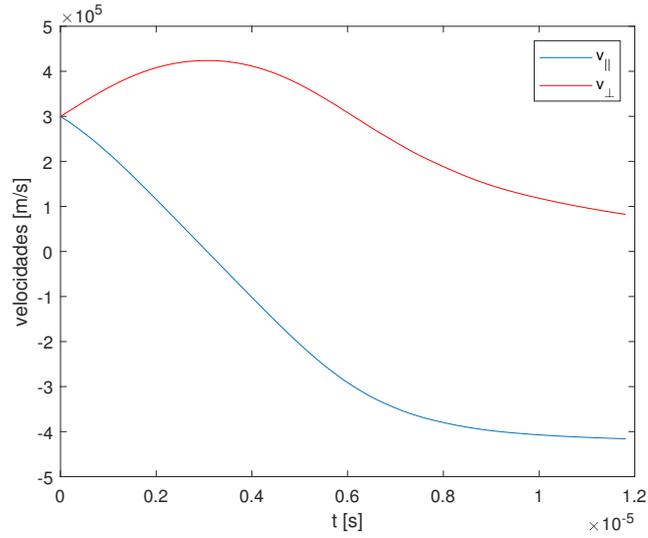
negativo, lo que implica una aceleración al alejarse de la espira. La componente perpendicular varía en consonancia con la anterior, de forma que la energía cinética permanece constante.

Efectivamente, de la gráfica de la energía cinética en función del tiempo se deduce su invariancia: el valor de W se mantiene constante salvo un error relativo del orden de $7.7776 \cdot 10^{-9}$ (cuya causa puede establecerse por el propio método numérico, aunque se considera suficientemente preciso). En cuanto al momento magnético, por su carácter de invariante adiabático, oscila periódicamente con una amplitud relativa pequeña, permaneciendo constante su valor medio.

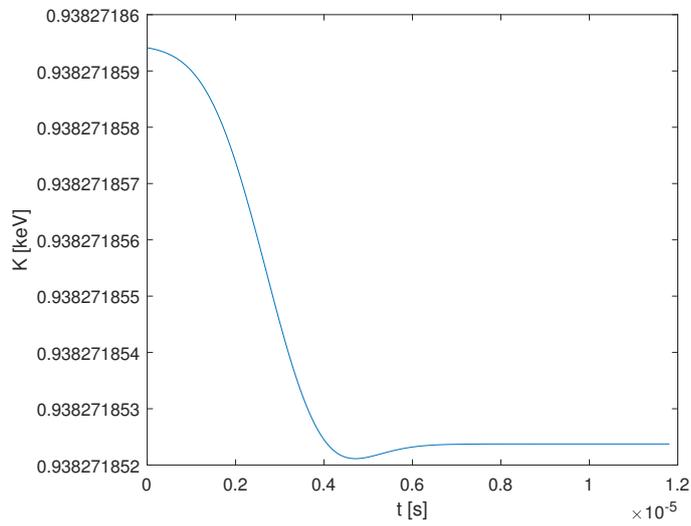
Una vez estudiado este caso concreto, se va a analizar con más detalle la influencia de la velocidad inicial del protón en el efecto de espejo magnético. Así, tomando un tiempo de simulación de 100 periodos ciclotrónicos, discretizado en $N = 10^5$ intervalos, $I = 1$ MA, $R_0 = 1$ m, $\mathbf{r}(0) = [0, 0, -R_0]$ y definiendo $\mathbf{v}(0) = v_0[0, \lambda_v, \mu_v]$ y partiendo de $\lambda_v = 1$ y $\mu_v = 1$, se va a aumentar μ_v para incrementar la componente axial (componente z) de la velocidad inicial hasta que sea suficiente para vencer la reflexión de la espira. Es importante aclarar que se ha añadido el subíndice v para distinguir μ_v y λ_v del momento magnético y el *pitch*, no guardando relación alguna.

Efectivamente, esta ruptura del efecto de espejo magnético se da para $\mu_v = \mu_v^* = 1.352$. A partir de este valor, la componente paralela a \mathbf{B} de la velocidad del protón tiene un valor suficiente como para no anularse y cambiar de signo, permitiendo que la partícula supere el plano de la espira, continuando con una órbita helicoidal cuyo eje se ve curvado por las derivas debidas al campo magnético. Por último, se comprueba que el correspondiente *pitch* asociado a ese μ_v de transición es totalmente coincidente con el que predice la condición teórica de espejo magnético.

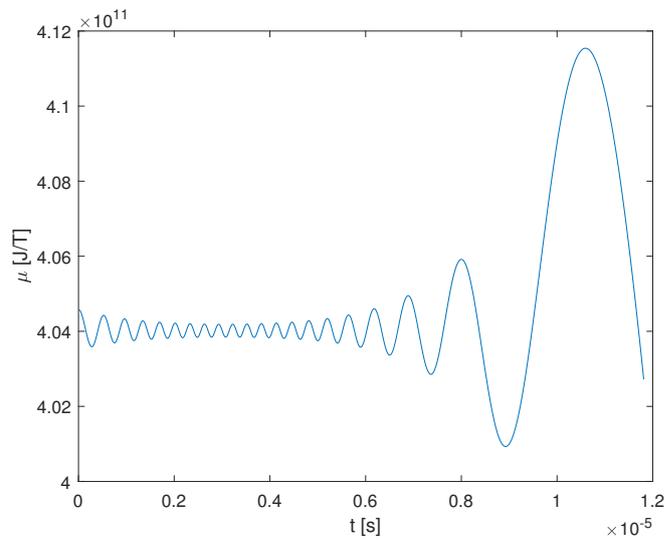
$$\cos \Lambda^* = \sqrt{1 - \frac{B_{min}}{B_{max}}} = \sqrt{1 - \frac{B(z = -R_0)}{B(z = 0)}} = 0.8040 \quad (3.2)$$



(a) velocidades



(b) energía cinética



(c) momento magnético

Figura 3.3 Propiedades de la órbita del protón en función del tiempo.

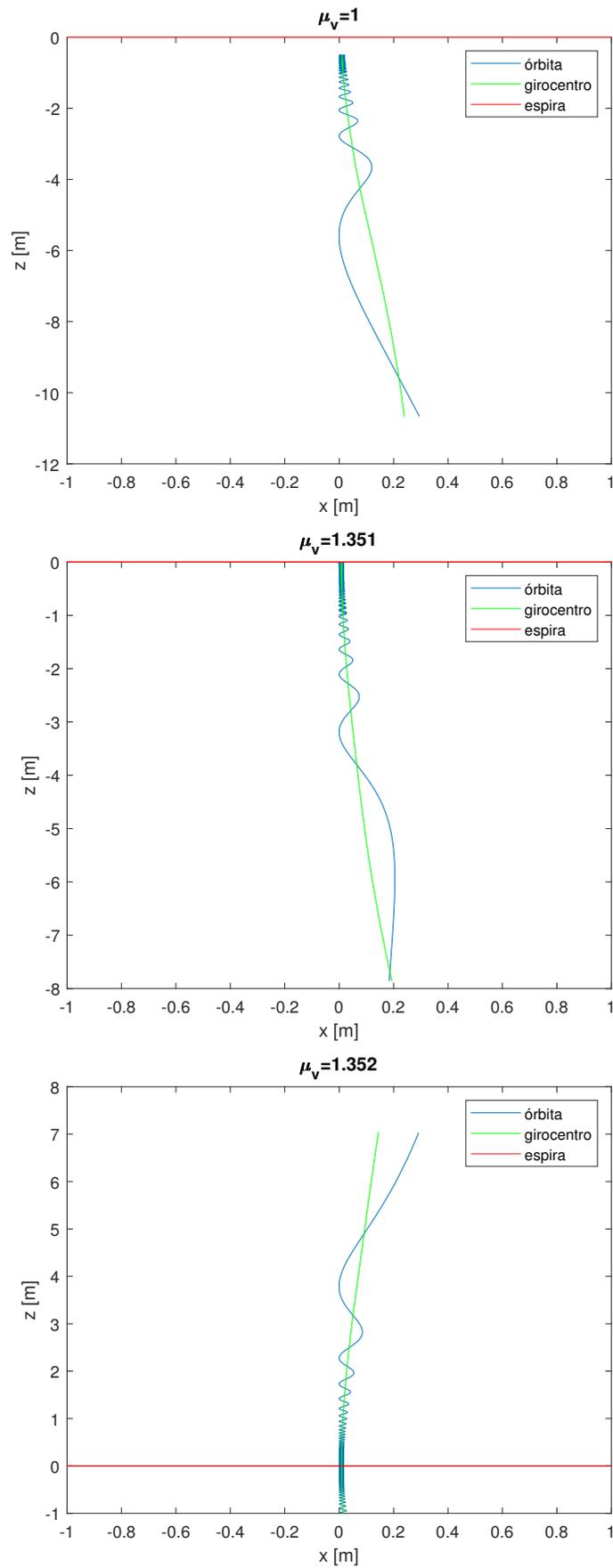


Figura 3.4 Proyección sobre el plano XZ de la órbita del protón situado inicialmente en el eje OZ bajo el campo magnético de la espira para distintos valores de μ_v .

3.1.3 Estudio de la topología de la órbita de un ión cercano a la espira

Ahora el caso de interés consiste en un protón situado a corta distancia de la espira, de forma que quede confinado en su movimiento alrededor de esta. Así, se tomará: $t_f = 300T_c$, $N = 10^5$, $I = 1 \text{ MA}$, $R_0 = 1 \text{ m}$, $\alpha = 1/5$, $\mathbf{r}(0) = R_0[1, 0, \alpha]$, $\mathbf{v}(0) = v_0[\lambda, \mu_v, 0]$, con $v_0 = c/1000$. El estudio se basará en la modificación del valor de los parámetros λ_v y μ_v para analizar su influencia en el tipo de órbita, ya sea pasante (P) o banana (B).

En primer lugar, se fija $\lambda_v = 1$ y se comienza con $\mu_v = 0$, resultando una órbita pasante que realiza vueltas completas alrededor de la espira. Al aumentar el valor de μ_v , se llega a un valor a partir del cual la órbita no completa la vuelta. Esta órbita banana se da a partir de $\mu_v = 1.141$.

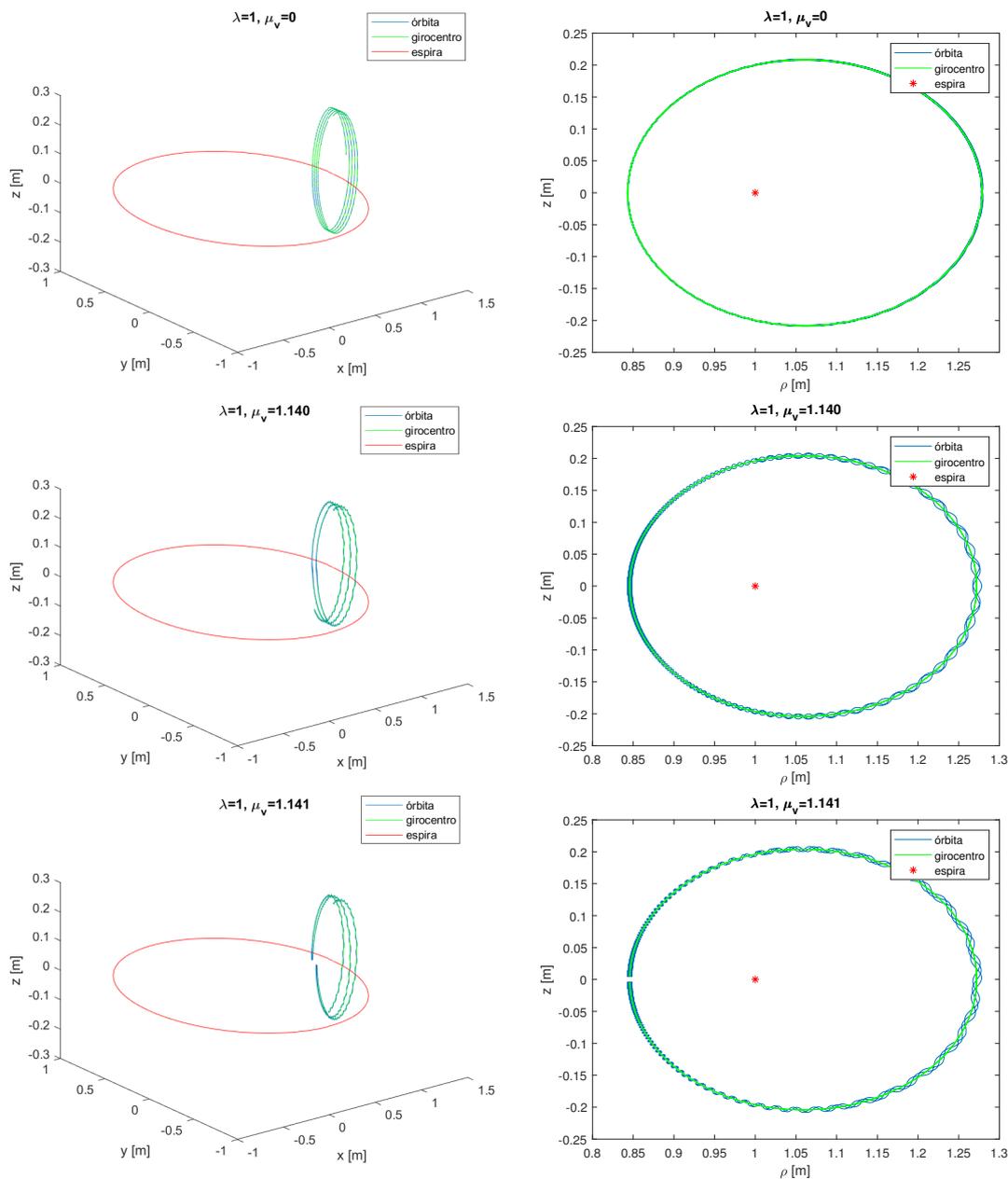


Figura 3.5 Órbita de un protón alrededor de la espira para distintos valores de μ_v .

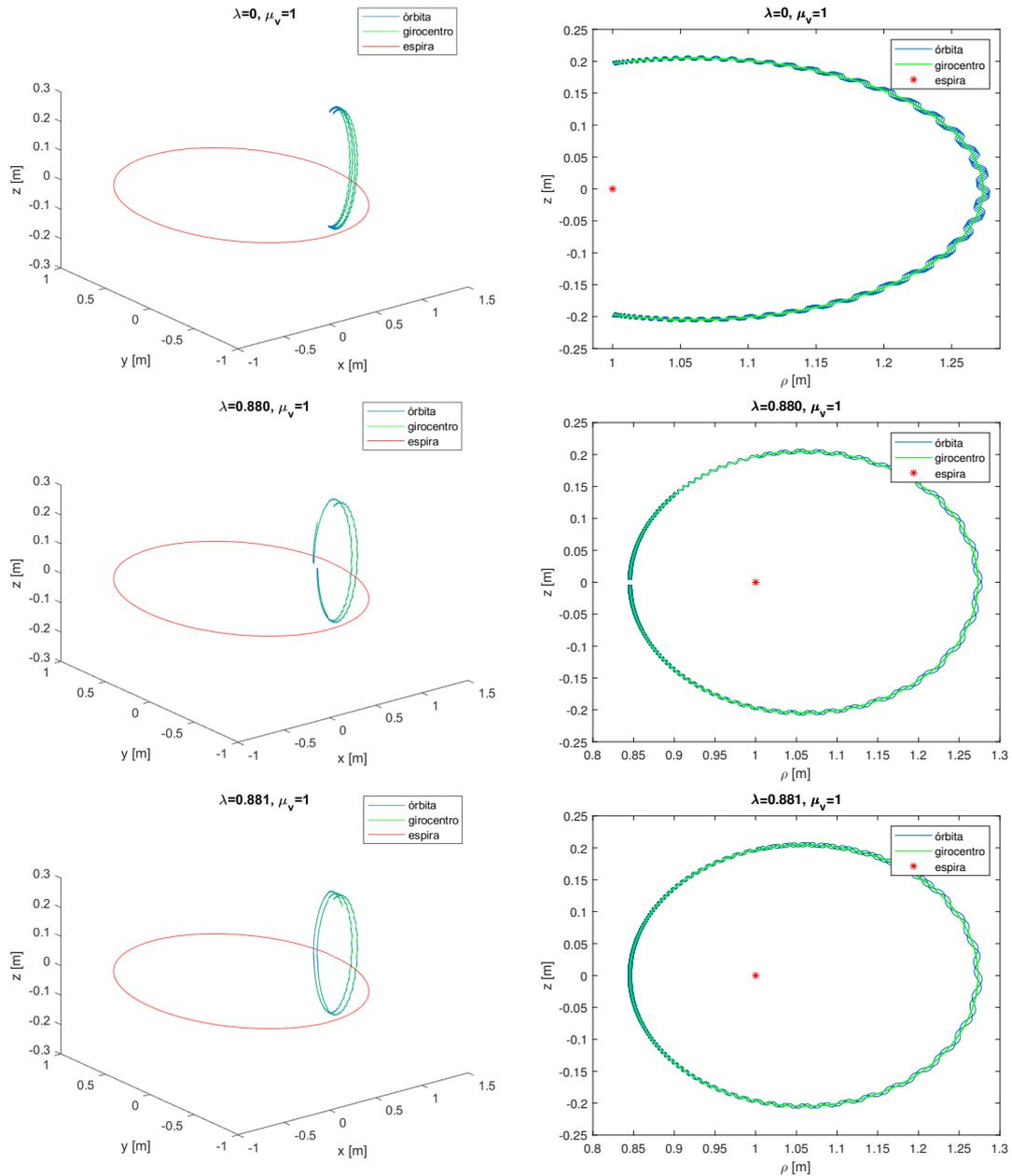


Figura 3.6 Órbita de un protón alrededor de la espira para distintos valores de λ_v .

El mismo procedimiento se ha seguido fijando $\mu_v = 1$ y, tras empezar con $\lambda_v = 0$, se ha analizado su influencia al verse incrementado: la órbita banana inicial se va cerrando hasta completarse la vuelta a partir de $\lambda_v = 0.881$.¹

Como conclusión, la influencia de ambos parámetros se puede condensar en uno solo, teniendo en cuenta que la posición inicial sea la misma: el *pitch angle* (Λ) inicial, ya que de su valor depende en esencia la forma de la órbita. Así, se observa un único *pitch* de transición entre el tipo de órbita pasante y banana, cuyo valor se sitúa entre 50.45° (para $\lambda_v = 0.881$ y $\mu_v = 1$) y 50.59° (para $\lambda_v = 1$ y $\mu_v = 1.141$), discrepancia debida a la precisión del cálculo. Por debajo de este valor la órbita sería pasante y, por encima, banana.

¹ En las Figuras 3.5 y 3.6, ρ refiere a la coordenada cilíndrica radial R .

3.1.4 Órbitas de un protón en el interior de una bobina toroidal superpuesta a una espira circular

A la espira circular de la subsección anterior, de intensidad $I = 1 \text{ MA}$ se superpone un toroide de radio mayor $R_0 = 1 \text{ m}$ igual al radio de la espira. El radio menor a y la corriente por el número de vueltas del toroide Ni quedarán definidos a través de los siguientes parámetros: $\lambda_r = a/R_0$ (el inverso de la relación de aspecto del tokamak) y $\lambda_i = Ni/I$. Esto se ha determinado así para realizar un estudio de la influencia que ejerce la introducción del toroide en el problema.

El inverso de la relación de aspecto se va fijar a un valor $\lambda_r = 3/4$, de manera que $a = 0.75 \text{ m}$, resultando un toroide de forma similar a un tokamak esférico. Por tanto, el análisis se va a centrar en la variación de λ_i desde 0 (únicamente la espira) hasta 1, con un tiempo de simulación de $20 \mu\text{s}$, aplicándolo a los dos casos anteriormente estudiados de condiciones iniciales: por un lado $\lambda_v = 1$ y $\mu_v = 0$; por otro, $\lambda_v = 0$ y $\mu_v = 1$. Recordemos la forma de las condiciones iniciales ($\alpha = 1/5$): $\mathbf{r}(0) = R_0[1, 0, \alpha]$ y definiendo $\mathbf{v}(0) = v_0[0, \lambda_v, \mu_v]$, con $v_0 = c/1000$.²

En ambos casos se observa que el aumento del peso relativo del toroide en la generación del campo magnético respeta el tipo de órbita, manteniéndose pasante en el primer caso y, banana, en el segundo. Esto se observa con más claridad en la proyección poloidal R-Z de las distintas órbitas, donde hay que hacer zoom de varios órdenes de magnitud para poder apreciar cierto desfase en las trayectorias helicoidales seguidas.

El resultado de mayor interés es la disminución del periodo toroidal al incrementar λ_i . La introducción de una componente toroidal del campo magnético da lugar a un mayor movimiento del girocentro a lo largo de dicha dirección, afectando de manera mucho más significativa al caso de órbita pasante, donde se alcanza hasta $1/4$ del toroide en el tiempo de simulación. En el caso de la órbita banana, la trayectoria se va haciendo cada vez más oblicua al plano poloidal, situándose su punto de retorno inferior cada vez más lejos al aumentar el peso de B_ϕ .

² En las Figuras 3.7 y 3.8, r refiere a la coordenada cilíndrica radial R .

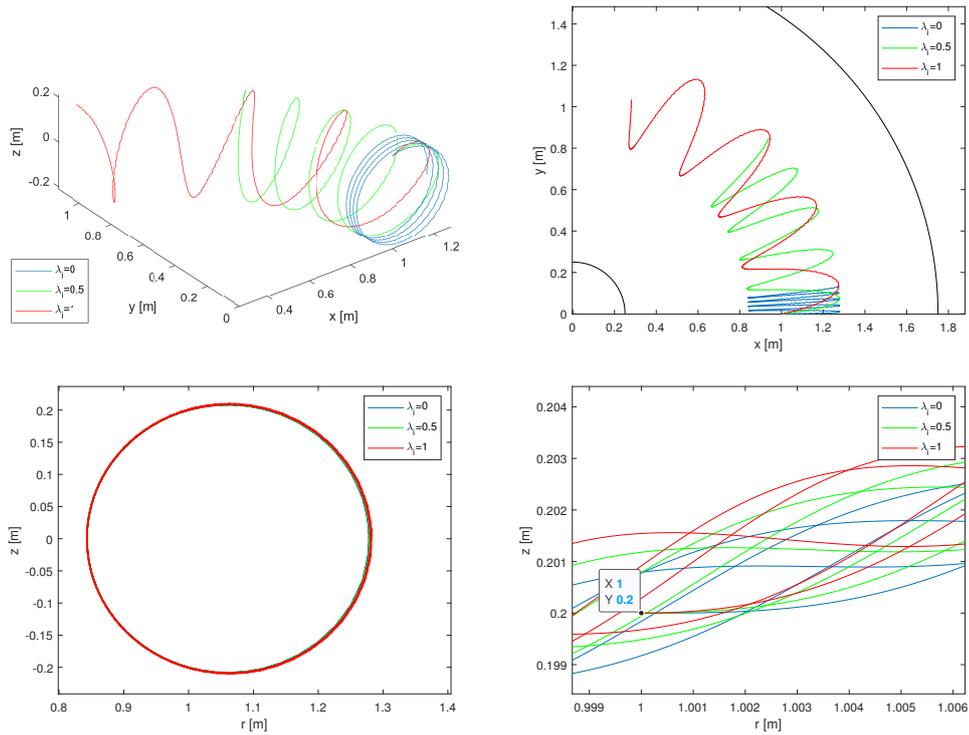


Figura 3.7 Órbitas del protón para $\lambda_v = 1$ y $\mu_v = 0$ (órbita pasante), con distintos valores de λ_i .

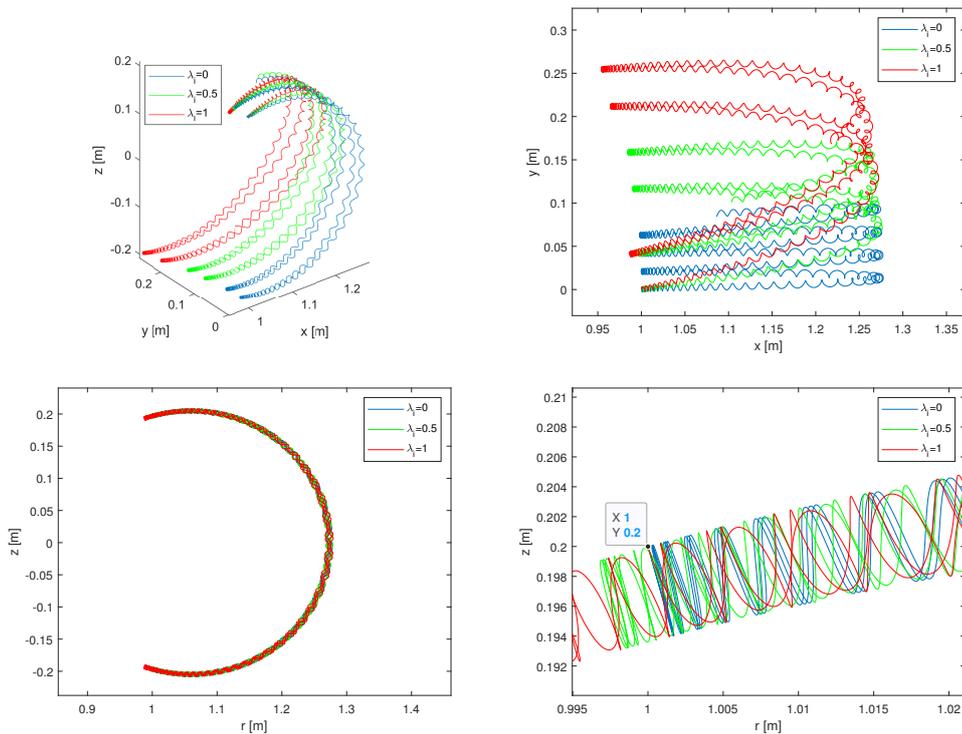


Figura 3.8 Órbitas del protón para $\lambda_v = 0$ y $\mu_v = 1$ (órbita banana), con distintos valores de λ_i .

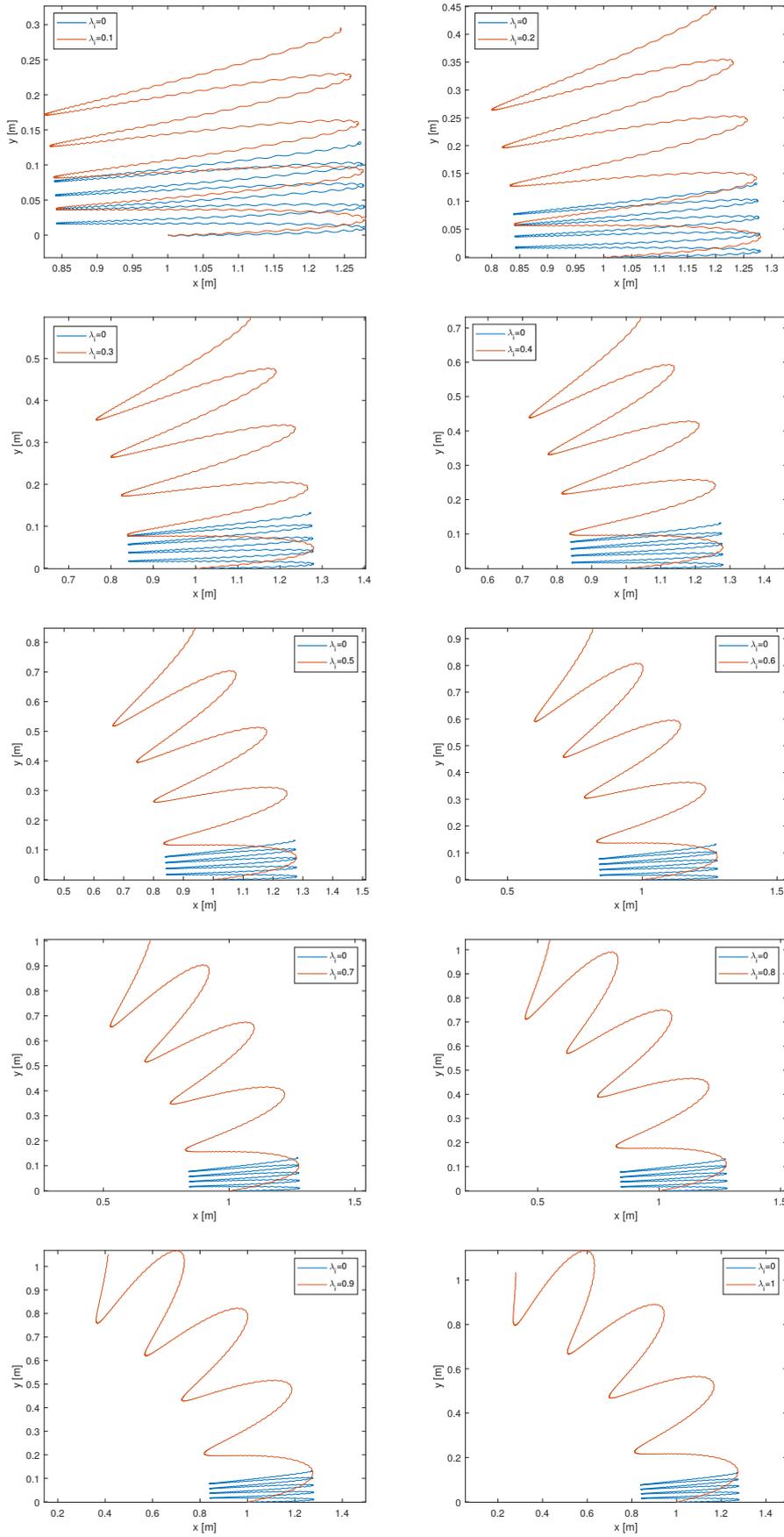


Figura 3.9 Proyección x-y de la órbita pasante para distintos valores de λ_i .

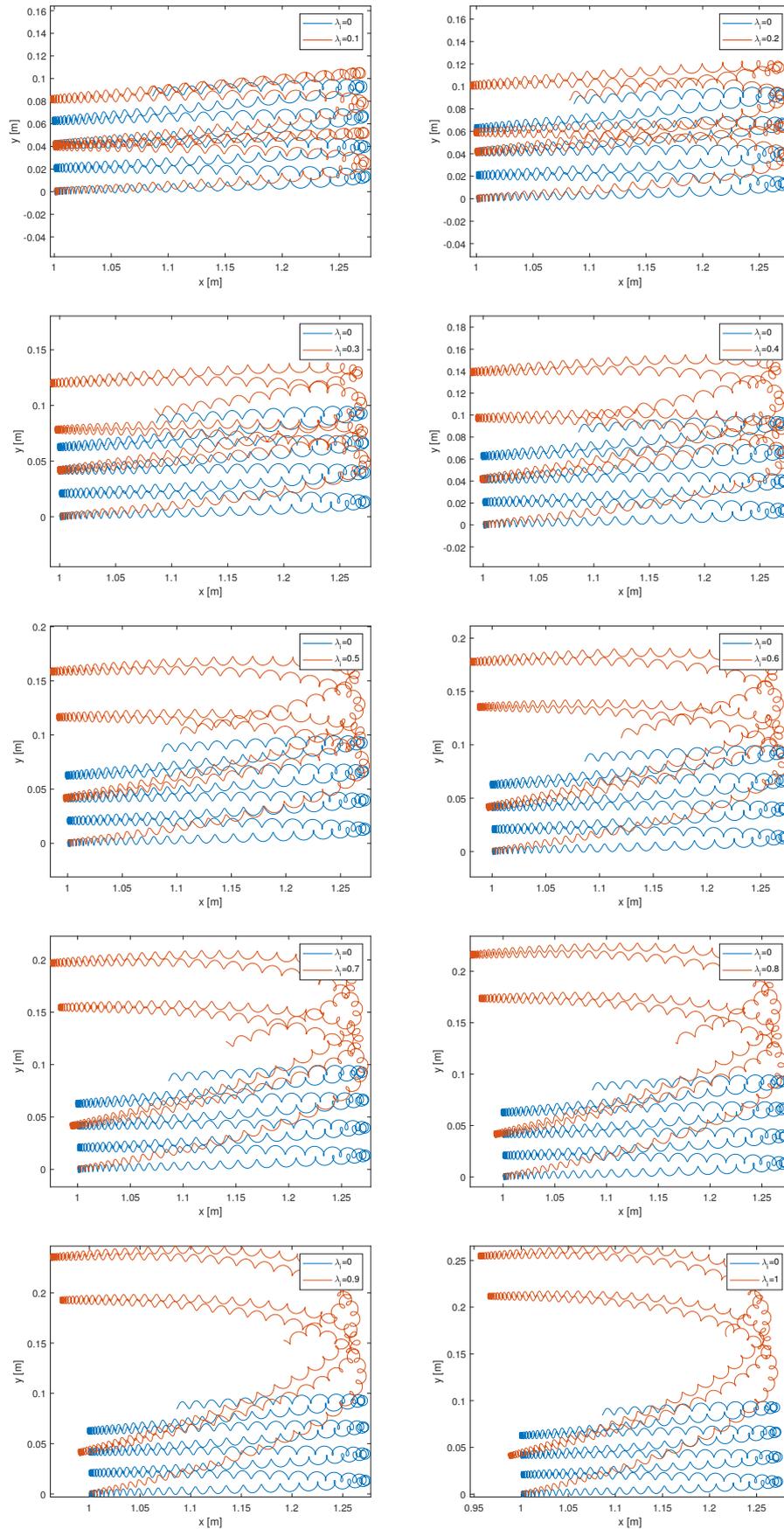


Figura 3.10 Proyección x-y de la órbita banana para distintos valores de λ_i .

3.2 Estudio de sensibilidad de las órbitas de iones rápidos en MATLAB

En primer lugar, para poder simular órbitas en un tokamak, es necesario definir el campo magnético. Puesto que se desea que los resultados sean lo más fieles posibles a los obtenidos en ASCOT para MAST-U, se va a realizar un modelo aproximado de las distintas bobinas y corrientes eléctricas que componen el dispositivo. De esta forma, las bobinas toroidales serán equivalentes a un toroide de intensidad Ni y sección rectangular ($R_0 - a \leq R \leq R_0 + a$, $-2 \text{ m} \leq Z \leq 2 \text{ m}$), la corriente inducida en plasma podría equipararse a una espira circular de corriente I_p y radio R_0 y, por último, las bobinas de campo poloidal se modelarán como espiras con los datos de la Tabla 1.2.

La aproximación posee bastante validez en lo que respecta al campo toroidal y las bobinas de campo poloidal; sin embargo, el modelado de la corriente del plasma presenta inconvenientes: el campo poloidal debería anularse en el eje magnético y aumentar en valor absoluto con ρ hasta llegar a la separatrix, fuera de la cual el campo volvería a decrecer tendiendo a cero. En nuestro modelo, en cambio, el campo poloidal tiende a infinito en el eje magnético y su valor absoluto decrece con ρ . Esto se explica porque se va a modelar una corriente circular con sección finita mediante una corriente circular de sección puntual; en el interior de una espira de sección finita el campo magnético posee tal comportamiento. No obstante, se va a asumir esta imprecisión, ya que el transporte de iones objeto de estudio se produce cerca de la separatrix, alrededor de la cual el modelo da mejores resultados.

Puesto que de ASCOT conocemos el campo magnético en cualquier punto del interior de MAST-U ($R_0 = 0.85 \text{ m}$, $a = 0.65 \text{ m}$, $I_p = 2 \text{ MA}$), se pueden ajustar iterativamente las intensidades del toroide y las espiras de campo poloidal para que el campo magnético en el punto de la separatrix situado en $Z = 0 \text{ m}$, que estará a $R = 1.357 \text{ m}$. Siguiendo este procedimiento, resulta que $Ni = -2.415 \text{ MA}$ y es necesario multiplicar las intensidades definidas para cada espira por un factor dimensionador de 0.82. Con todo, se obtiene un campo magnético poloidal con la forma de D de MAST-U, aunque algo achatada en la dirección Z y sin la configuración exacta de su divertor.

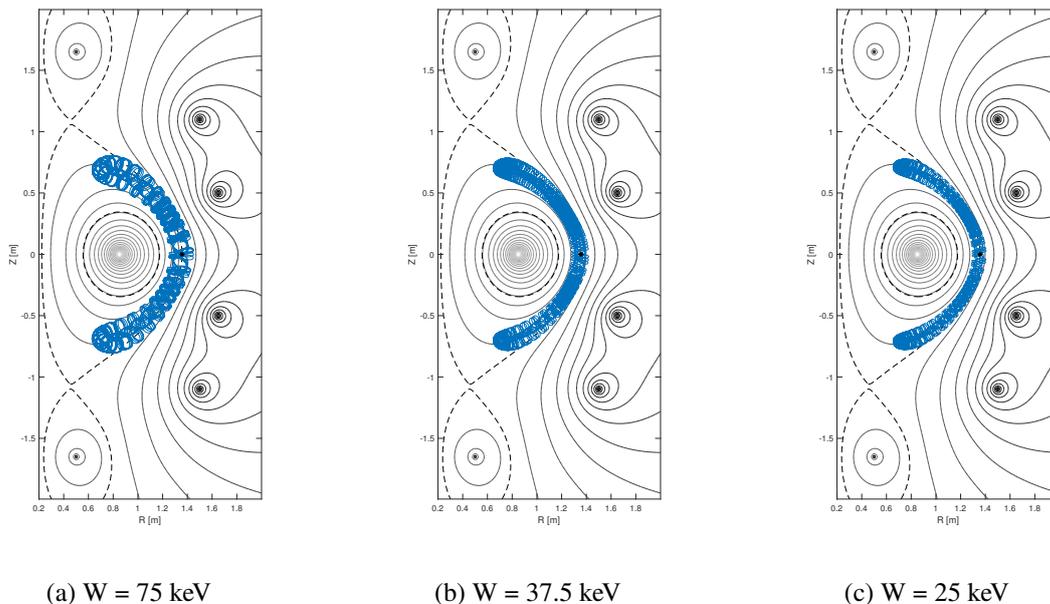
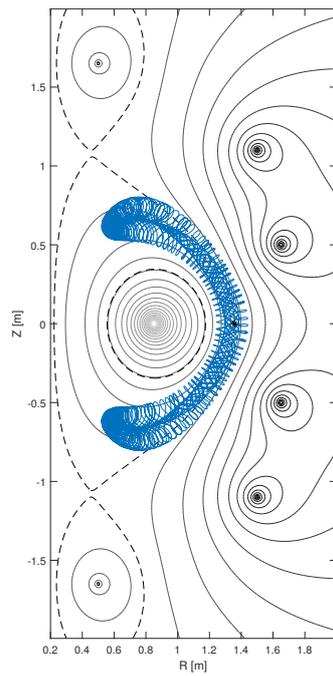
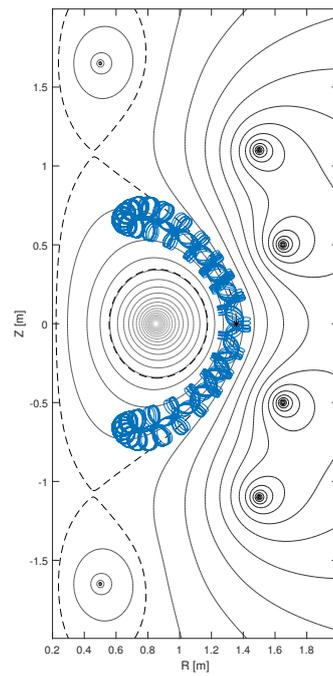


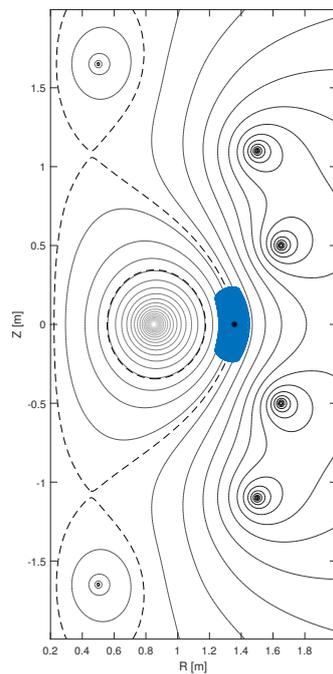
Figura 3.11 Aproximación en MATLAB de la órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a $\Lambda = 70^\circ$ para las distintas energías de inyección.



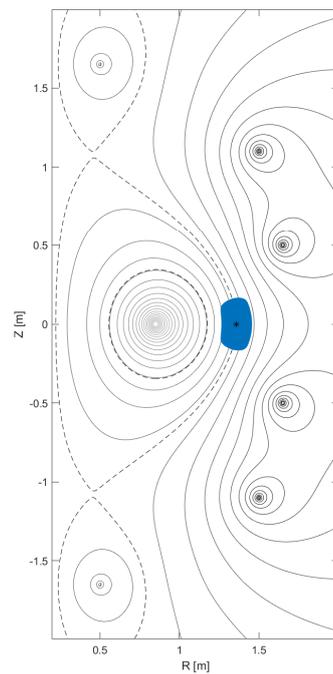
(a) $\Lambda = 60^\circ$



(b) $\Lambda = 65^\circ$

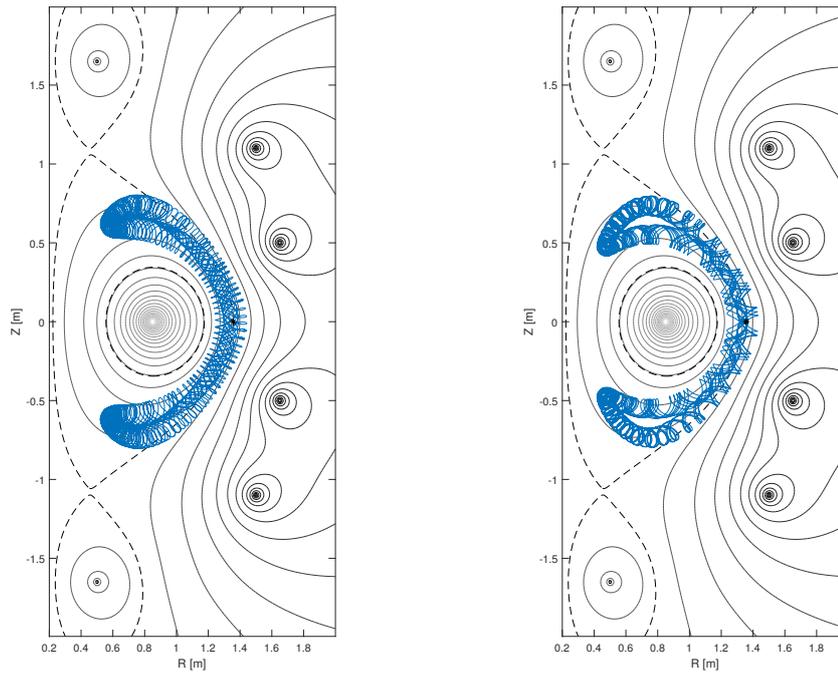


(c) $\Lambda = 75^\circ$



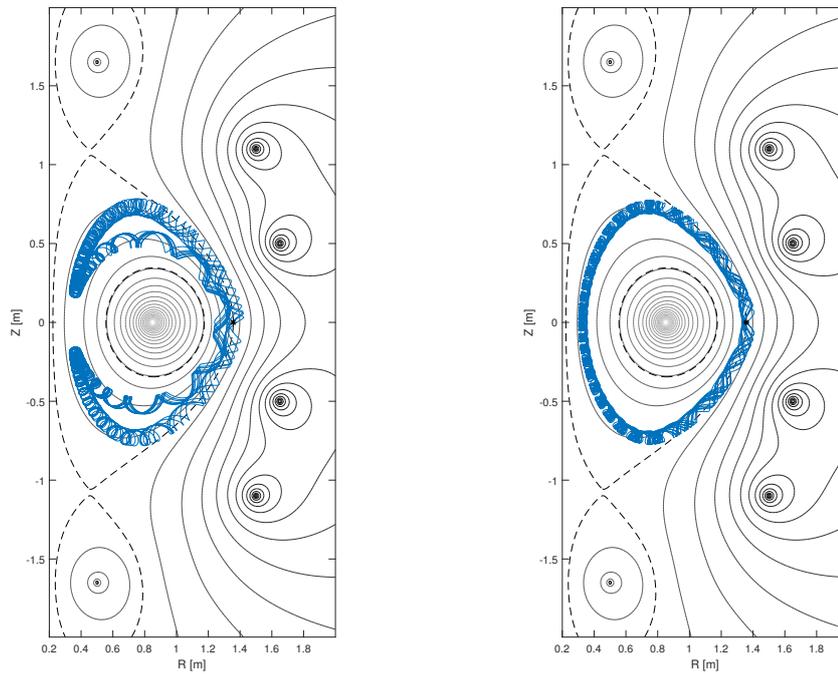
(d) $\Lambda = 80^\circ$

Figura 3.12 Aproximación en MATLAB de la órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a $W = 75$ keV para distintos valores de Λ .



(a) $\Lambda = 60^\circ$

(b) $\Lambda = 50^\circ$



(c) $\Lambda = 40^\circ$

(d) $\Lambda = 30^\circ$

Figura 3.13 Aproximación en MATLAB de la órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a $W = 75$ keV para distintos valores de Λ .

El análisis de sensibilidad se va a realizar sobre un hipotético ión rápido generado a través del inyector SS sobre la separatrix ($R = 1.357$ m, $Z = 0$ m), ya que se ha tratado de ajustar al máximo la precisión en el entorno de ese punto, lo que dará resultados coherentes al ser comparados con los obtenidos mediante ASCOT. En cuanto a la órbita de una partícula inyectada por el NBI SW, carece de interés su análisis, puesto que la forma de la separatrix (y el campo magnético) presenta una mayor discrepancia alrededor de su hipotética posición inicial, respecto a la real de MAST-U. Aun así, cabe mencionar que el resultado que se obtendría para dicha partícula del NBI SW es coherente con el campo magnético implementado en MATLAB, aunque no sea comparable con los resultados de ASCOT.

Entrando en materia, se ha tomado $\Lambda = 70^\circ$ como ángulo de incidencia del caso base y un tiempo de simulación de 0.05 ms. Se verá que la órbita para este caso básico es análoga a la que produce el análisis en ASCOT, salvando las diferencias propias de la aproximación y las hipótesis tomadas. Teniendo en cuenta esto, se encuentra que las variaciones en la energía y en el *pitch angle* provocan efectos esperables teóricamente: el girorradio se ve reducido al disminuir la energía y la órbita banana se alarga o se acorta según se disminuye o se aumente Λ .

Finalmente, en la Figura 3.13 se ha seguido disminuyendo Λ , hasta alcanzar la ruptura del efecto de espejo magnético y lograr una órbita pasante. Como se comprueba, al alargarse la órbita atrapada a lo largo de las líneas de campo, se llega a un cierto valor de Λ en que la condición de espejo magnético deja de cumplirse. Este cambio a órbita pasante se da para un valor del *pitch* entre 30 y 40 grados.

4 Simulación del transporte de iones en ASCOT

4.1 El código ASCOT

El código ASCOT (*Accelerated Simulations of Charged Orbits in Toroidal devices*) es una herramienta de simulación numérica diseñada para seguir la trayectoria de partículas cargadas en tokamaks y que permite incluir las colisiones coulombianas mediante el método de Monte Carlo. [20] Desde que fue creado en la década de 1990, ha sufrido múltiples mejoras para satisfacer, por un lado, la demanda de resultados más precisos y con una física más completa y, por otro, la propia evolución de la computación informática. De esta forma se ha llegado a la versión actual, ASCOT5, que comprende el propio código principal de cálculo, así como múltiples librerías de Python que permiten, de forma general, generar los datos de entrada de la simulación (*inputs*) y manejar los resultados obtenidos.

En líneas generales, ASCOT utiliza las ecuaciones de movimiento hamiltonianas no canónicas, análogas a las utilizadas en nuestro código de MATLAB, para calcular las órbitas completas ($\mathbf{r}(t)$) de cada partícula con masa m , carga q y velocidad \mathbf{v} .

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\end{aligned}\tag{4.1}$$

Estas ecuaciones podrían ser resueltas mediante el método de Runge-Kutta de orden 4, tal y como se ha hecho en MATLAB. Sin embargo, este algoritmo presenta una tendencia a provocar una deriva en la energía total, rompiendo la invariancia. Por tanto, se introduce el método Boris de salto de rana, con las ecuaciones siguientes para cada iteración en un instante t_j , que conserva la energía de forma explícita por la propiedad $\mathbf{v}_{j+1} \cdot \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j$ cuando $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{j+1} &= \mathbf{v}_j + \Delta t \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_j + \frac{\mathbf{v}_{j+1} + \mathbf{v}_j}{2} \times \mathbf{B}_j \right) \\ \mathbf{r}_{j+1} &= \mathbf{r}_j + \Delta t \mathbf{v}_j\end{aligned}\tag{4.2}$$

ASCOT también permite realizar simulaciones enfocándose únicamente en la trayectoria del girocentro, utilizando las ecuaciones ya definidas para el mismo, con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo [21]. Sin embargo, esta aproximación solo será válida y suficientemente precisa si el campo magnético presenta una variación lenta en el tiempo y el espacio, en comparación con el

movimiento de la partícula. Esta propiedad se puede identificar con la constancia del momento magnético de la partícula (invariante adiabático).

Respecto a las colisiones coulombianas, estas se tienen en cuenta como interacciones de tipo eléctrico entre la partícula seguida y el extenso conjunto de partículas del plasma (*background plasma*), a través de pequeños pasos de tiempo Δt . Como se adelantó, estas interacciones provocan una dispersión en la velocidad de la partícula, lo que afecta directamente a la *pitch angle* y la energía. Concretamente, estos efectos son evaluados por ASCOT mediante operadores de Monte Carlo que asumen colisiones de pequeña desviación [22].

Por un lado, se tiene la siguiente ecuación para la variación del *pitch* ($\lambda = v_{\parallel}/v$) debida a colisiones coulombianas en un intervalo de tiempo Δt , donde ν es la frecuencia de colisiones sobre el *pitch* y δ_1 representa el signo (+1 o -1) distribuido forma aleatoria y equiprobable. El resultado es una distribución uniforme en que el primer término representa el efecto determinista y establece la media a cero, mientras que el segundo tiene un carácter estocástico que dispersa los valores de Δt .

$$\Delta\lambda = -\nu\lambda\Delta t + \delta_1[(1-\lambda^2)\nu\Delta t]^{1/2} \quad (4.3)$$

Por otro, la ecuación 4.4 expresa la variación de la energía (W) debida a las colisiones, siendo: $\nu_{\epsilon,S}$ y T_S la frecuencia de las colisiones sobre la energía y la temperatura medida en unidades de energía de la especie S , respectivamente, p la cantidad de movimiento de la partícula y δ_2 el signo (+1 o -1) distribuido de forma aleatoria y equiprobable. El primer término corresponde a la fricción, que hace tender la energía de la partícula a la del plasma térmico, mientras que el segundo tiene de nuevo un carácter estocástico y conduce a una distribución maxwelliana.

$$\Delta W = -\sum_s 2\nu_{\epsilon,S}\Delta t \left[W - \frac{3}{2}T_S - \frac{1}{2} \frac{T_S p}{\nu_{\epsilon,S}} \frac{d\nu_{\epsilon,S}}{dp} \right] + \delta_2 \left[\sum_s 4T_S W \nu_{\epsilon,S}\Delta t \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

Trabajar con colisiones por el Método de Monte Carlo permite evitar la enorme dificultad de abordar el problema MHD acoplado entre iones rápidos y el plasma de fondo, al mover estos iones en el modelo fijando las condiciones físicas del resto del sistema. Dicho problema busca la solución completa del sistema con las ecuaciones de Navier-Stokes, acompañadas de las ecuaciones de Maxwell, de continuidad y de Ohm generalizada, como hacen los miembros del PSFT que trabajan con el modelo híbrido MEGA; primero obteniendo las condiciones de equilibrio dinámico del sistema, y luego estudiando diferentes tipos de inestabilidades de interés en el campo de la fusión nuclear.

4.2 Inputs

El código ASCOT trabaja con un archivo de formato hdf5 que contiene el conjunto de datos de entrada (*inputs*) que caracterizan el plasma y el tokamak y la configuración de la simulación, y recoge los resultados para su postprocesado. Puesto que de la correcta definición de los *inputs* depende el carácter realista y preciso de los resultados, se va a describir brevemente aquellos con mayor relevancia [20] [21].

- **Campo magnético.** El modelo de campo magnético consta de una matriz 2D o 3D que incluye las tres componentes del mismo en coordenadas cilíndricas (B_r, B_z, B_ϕ). En el caso axisimétrico, ASCOT utiliza la componente toroidal B_ϕ y el flujo poloidal ψ_{pol} para calcular el resto de componentes. Estos datos vendrán dados por estudios realizados mediante otros códigos de reconstrucción de equilibrio. Si se desea un campo magnético 3D, ASCOT

combina las componentes asociadas a la perturbación (B'_r, B'_z, B'_ϕ) con el campo axisimétrico anterior.

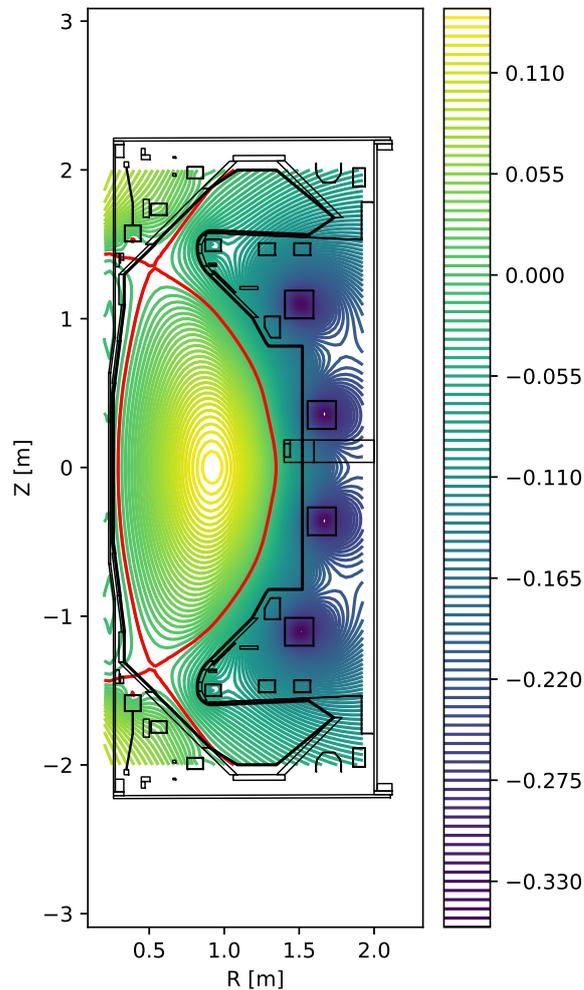


Figura 4.1 Flujo magnético poloidal de MAST-U (ψ [Tm²]) sobre un esquema de la proyección poloidal de la cámara de vacío. En rojo, la separatrix; en negro, la pared 2D.

- **Partículas.** ASCOT recibe como entrada fundamental el conjunto de partículas cuya trayectoria se desea trazar. Así, deben incluirse matrices que contengan la masa, carga y posición y velocidad iniciales de cada partícula a simular (denominada marcador o *marker*). Para las primeras simulaciones sencillas con bajo número de partículas se ha elaborado un código de Python que calcula dichos parámetros en función de la energía y el *pitch* de inyección. No obstante, simulaciones más realistas requieren contemplar millones de partículas inyectadas con distintas velocidades a través de un NBI. Es por esto que existe en ASCOT una herramienta independiente llamada BBNBI [23] capaz de generar la distribución de iones rápidos producida por los inyectores NBI.
- **Cinética del plasma.** Para trabajar con el operador de colisiones coulombianas anteriormente comentado y también con BBNBI, ASCOT necesitará recibir como entrada los perfiles cinéticos del plasma; esto es, perfiles 1D de la densidad y la temperatura de los iones y electrones en función de la coordenada poloidal ρ . Otras características incorporables son: la

velocidad de rotación del plasma y el campo eléctrico radial. En nuestro caso de estudio en MAST-U, se considera un plasma formado por iones de deuterio (D^+) y trazas de carbono en baja proporción, además de una población numerosa de electrones.

- **Geometría de la pared.** Modelar la pared de la cámara de vacío de un tokamak es fundamental para el estudio de pérdidas por colisiones con la misma y por ello ASCOT permite introducir geometrías realistas. Estas pueden ser 2D, donde se proporciona únicamente la sección poloidal, o 3D, para las que se realiza un mallado triangular de todo detalle.

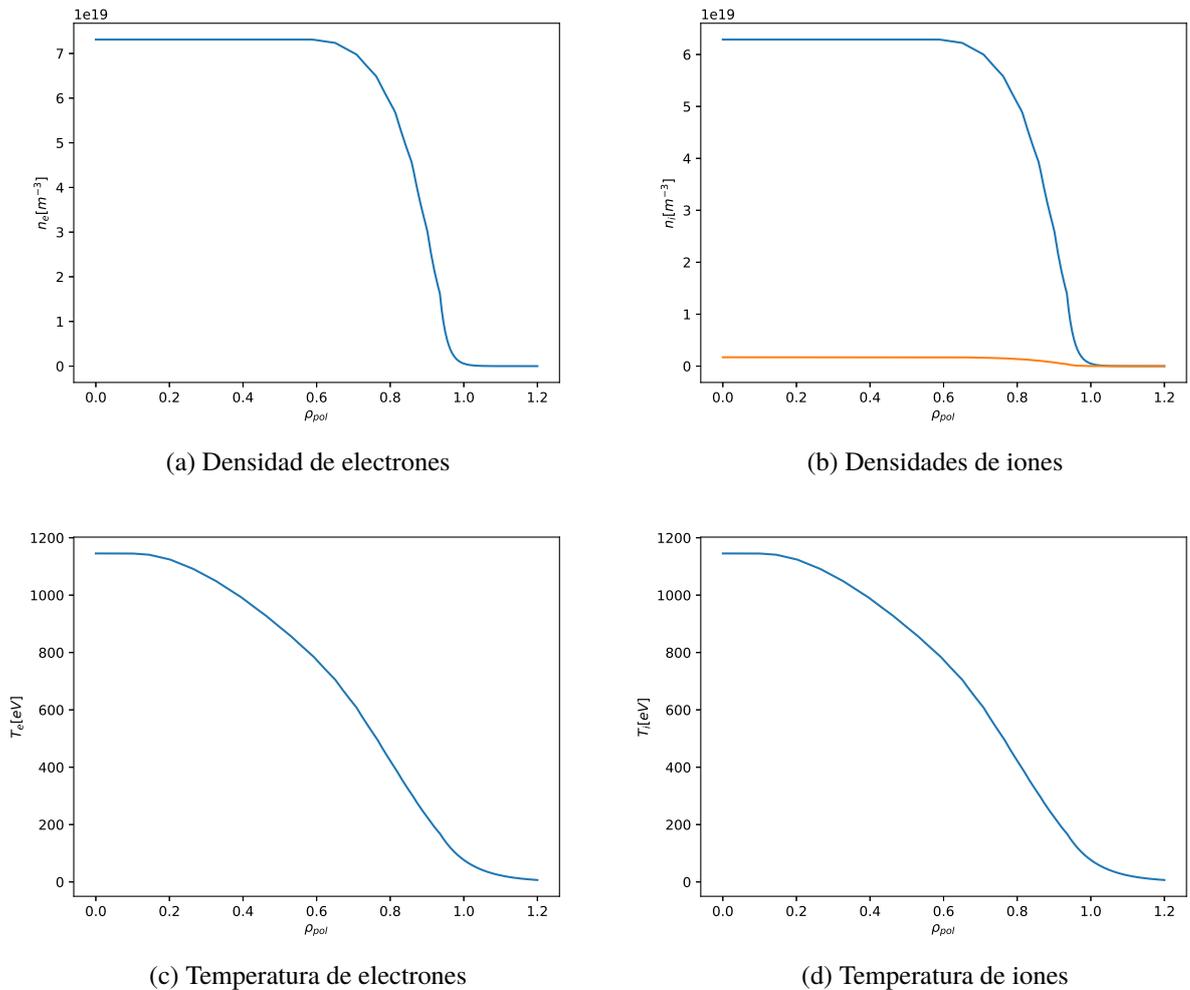


Figura 4.2 Perfil de densidades y temperaturas de la población de iones y electrones del plasma. En (b), los iones de deuterio corresponden a la curva azul, mientras que los de carbono, a la naranja.

4.3 Estudio de sensibilidad de la inyección mediante NBI

El objetivo de esta sección es simular con BBNBI una inyección de 5 millones de partículas de los NBIs en MAST-U (2.5 millones por cada NBI) para analizar la posición inicial del haz de neutrales ionizado en el plasma y, con esos iones generados, simular su transporte mediante ASCOT, determinando las características de aquellos iones rápidos que escapan del confinamiento magnético y colisionan con la pared de la cámara de vacío. En esa línea, se comenzará presentando el caso base, en que los NBIs SS y SW poseen sus características de diseño para los estudios físicos (expuestas

en la introducción y recogidas en [9]): $\phi_s = -5.74^\circ$ y $\theta_s = 0^\circ$ para SS y $\phi_s = -6.55^\circ$ y $\theta_s = 0^\circ$ para SW. Tras ello, se variará la orientación del haz de neutrales, introduciendo un incremento positivo o negativo de 1 o 2 ° en dichos ángulos, par así observar su repercusión en el perfil de iones originado y su confinamiento.

4.3.1 Posición inicial de los iones generados por la inyección NBI

El proceso de ionización es calculado estocásticamente por BBNBI, y la distribución de la población de iones rápidos resultante dependerá de diversos factores, como la geometría, la temperatura y la densidad del plasma. Representando el número de iones generados en cada posición al ionizarse el haz de neutrales inyectado, mediante un histograma en el plano poloidal (R-Z), se observa una mayor concentración de partículas inmediatamente al cruzar la separatrix del plasma. El perfil de ionización decae al alejarse de dicho límite del plasma, en la dirección del haz de neutrales (representado con una línea verde).

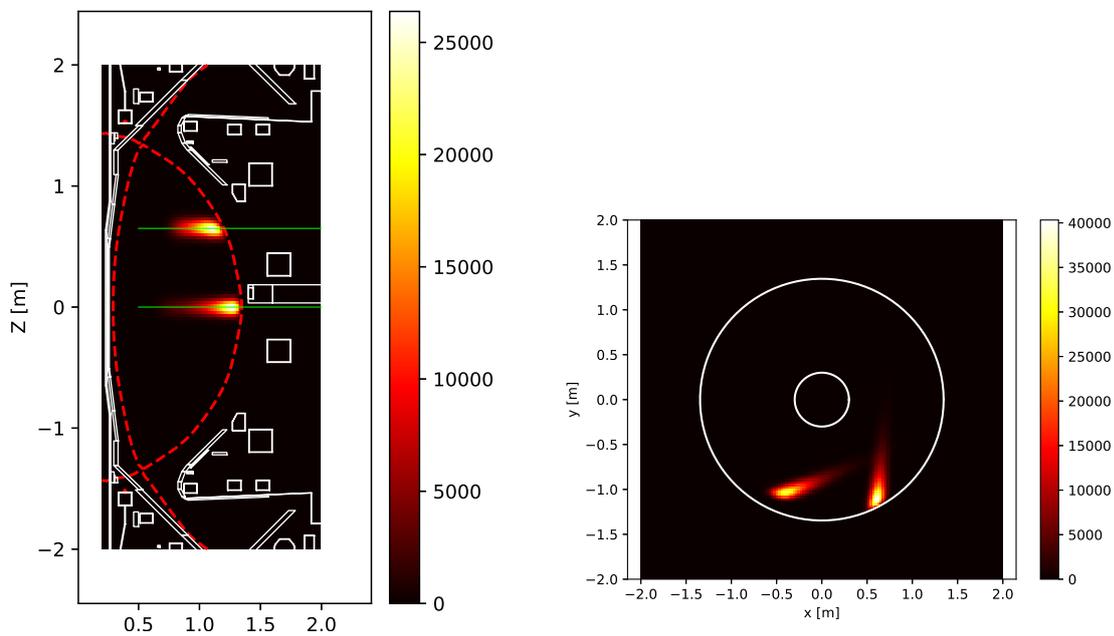


Figura 4.3 Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial, para la configuración original del NBI (la resolución de los histogramas es de 150x150).

Efectivamente, al variar la orientación del haz de neutrales, se observan dichos efectos, produciéndose además la ionización alrededor de la nueva línea media del haz, cerca de esta. Así, un incremento negativo en ϕ_s sitúa el haz en una dirección más cercana a la del campo toroidal, mientras que un incremento negativo en θ_s causa lo propio respecto al campo poloidal, por la posición de base de los NBIs. Un incremento de signo opuesto en ambos casos provoca lo contrario. Sin embargo, el razonamiento aplicado para $\Delta\theta_s$ solo es aplicable al inyector SW, por su posición *off-axis*. El haz de neutrales del inyector SS, por estar este situado en el plano ecuatorial de simetría, tendría la misma incidencia respecto al plasma ante un mismo valor absoluto de $\Delta\theta_s$, sin importar el signo.

De la Figura 4.3, se puede considerar para el posterior análisis de órbitas de partículas individuales que estas se concentran inicialmente sobre la separatrix. Esto corresponde, aproximadamente, a las siguientes posiciones iniciales: $R = 1.346$ m, $Z = 0$ m, $\phi = 295^\circ$ para el inyector SS y $R = 1.201$ m,

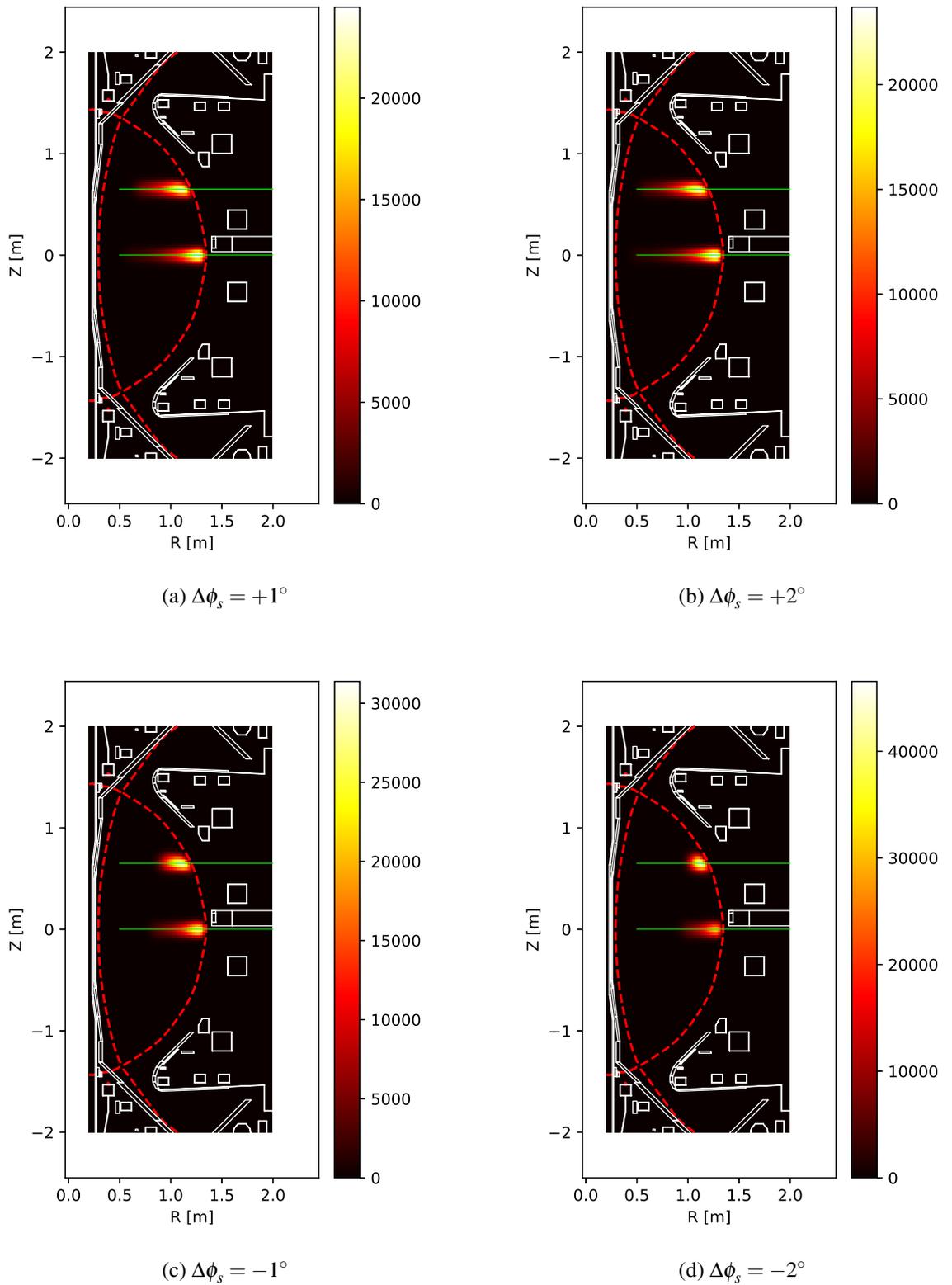


Figura 4.4 Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en R-Z, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI.

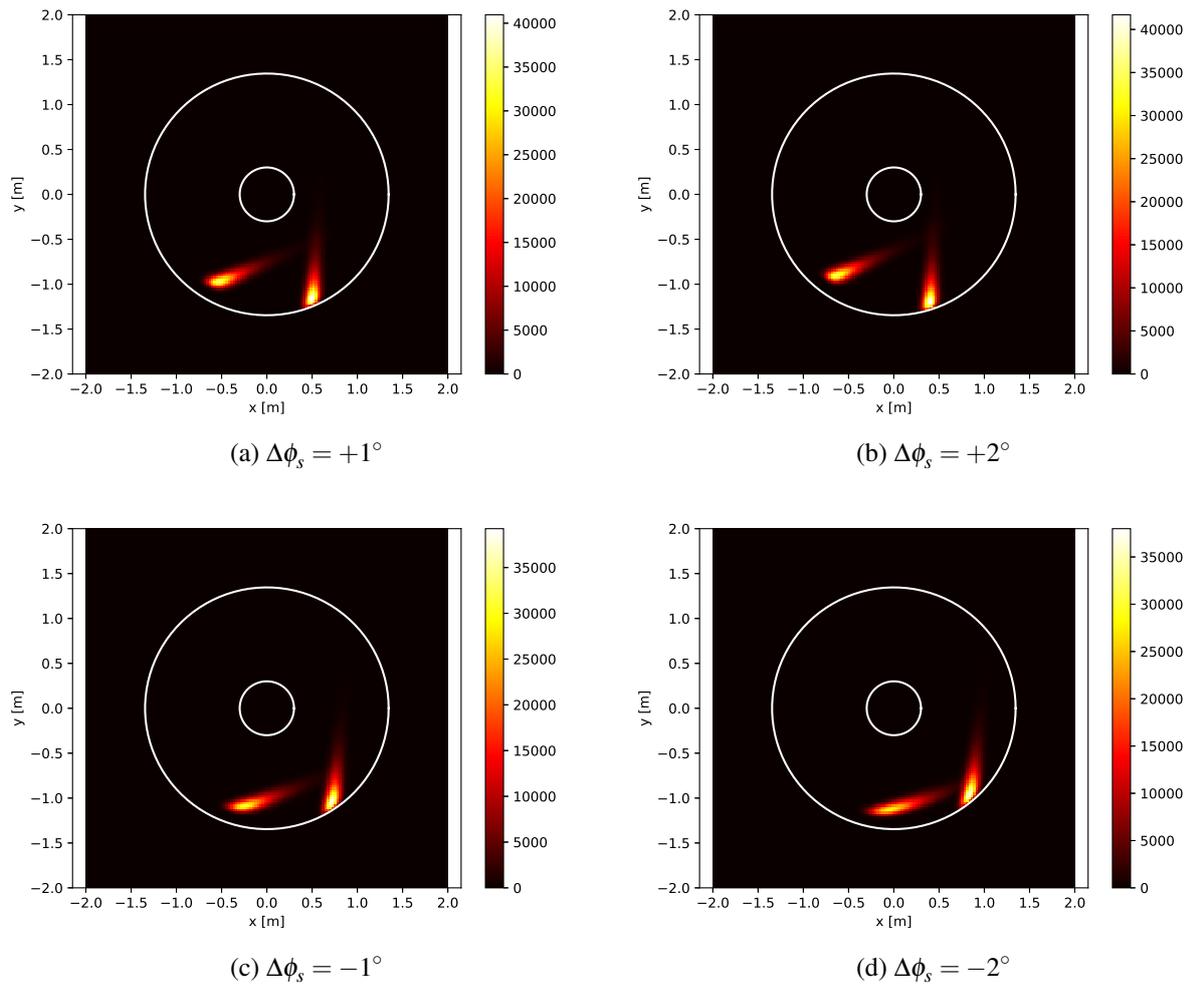


Figura 4.5 Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en x-y, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI.

$Z = 0.65$ m, $\phi = 240^\circ$ para el SW. De hecho, los iones rápidos más susceptibles de escapar del confinamiento magnético son los situados cerca del borde del plasma, por lo que la hipótesis es adecuada e incluso se ha comprobado inspeccionando los vectores de posición resultantes de la simulación de la inyección.

Los resultados del estudio de sensibilidad de la posición inicial frente a ϕ_s se muestran en la Figura 4.4, donde efectivamente se observa una compresión de la distribución de iones generados cerca de la separatrix al disminuir dicho ángulo, hecho que provoca una orientación más paralela al límite del plasma. Otra conclusión de interés es la mayor sensibilidad que posee dicha distribución inicial respecto a un decremento de ϕ_s , frente a la escasa variación que supone aumentarlo, ante un mismo valor absoluto del incremento.

En lo que respecta al análisis de la posición inicial frente a θ_s (Figura 4.6), hay que distinguir el comportamiento de ambos inyectores. Por un lado, en la inyección mediante el NBI SS destaca cierta simetría ante valores iguales de $\Delta\theta_s$ pero de distinto signo, por la propia posición y orientación base ($\theta_s = 0^\circ$) del inyector; siempre bajo pequeñas variaciones de dicha orientación, ya que se pueden apreciar algunas diferencias achacables a la distinta dirección y sentido del campo magnético. Por otro lado, la inyección a través del NBI SW tiene el comportamiento ya predicho: un decremento

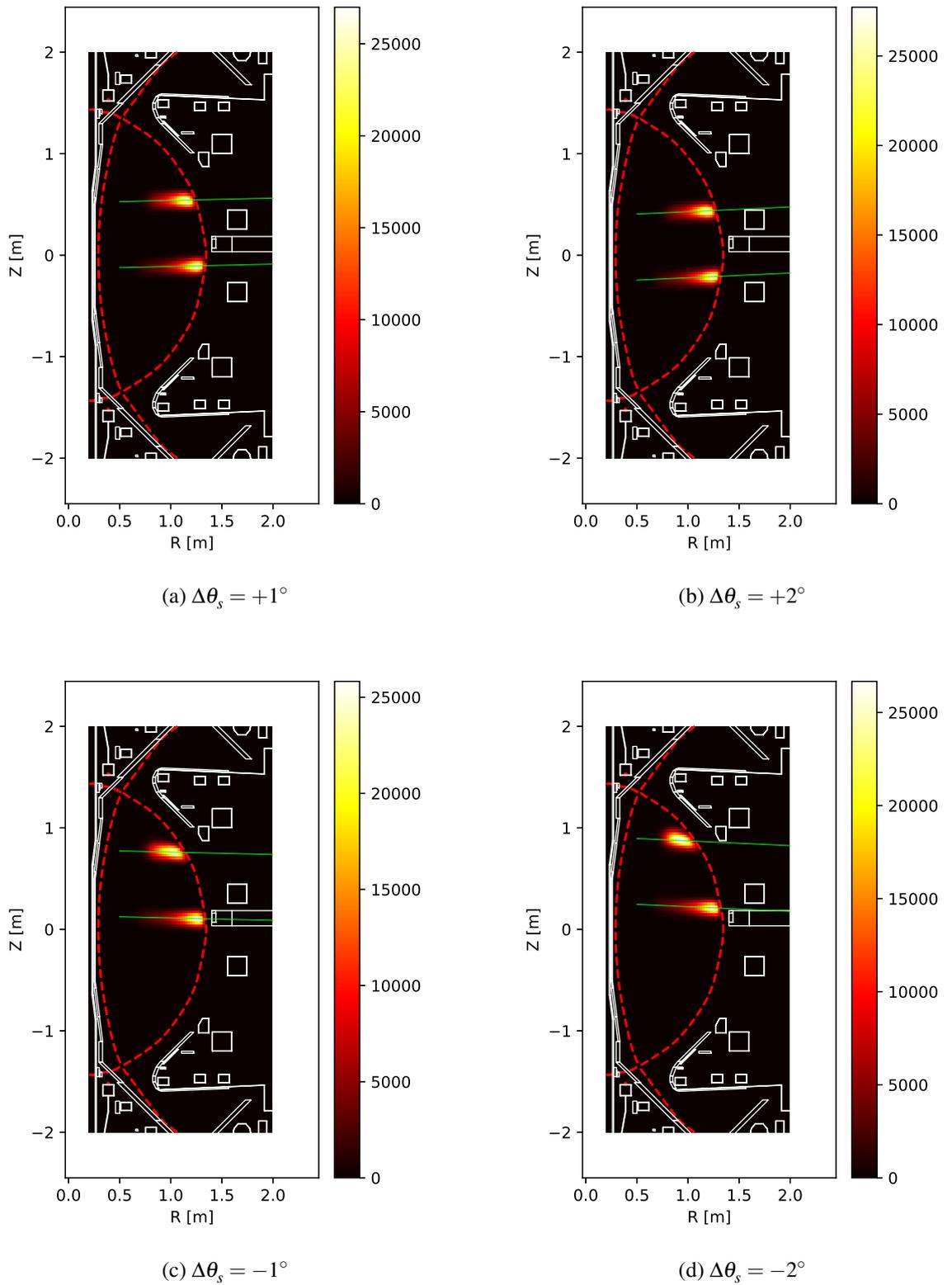


Figura 4.6 Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en R-Z, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI.

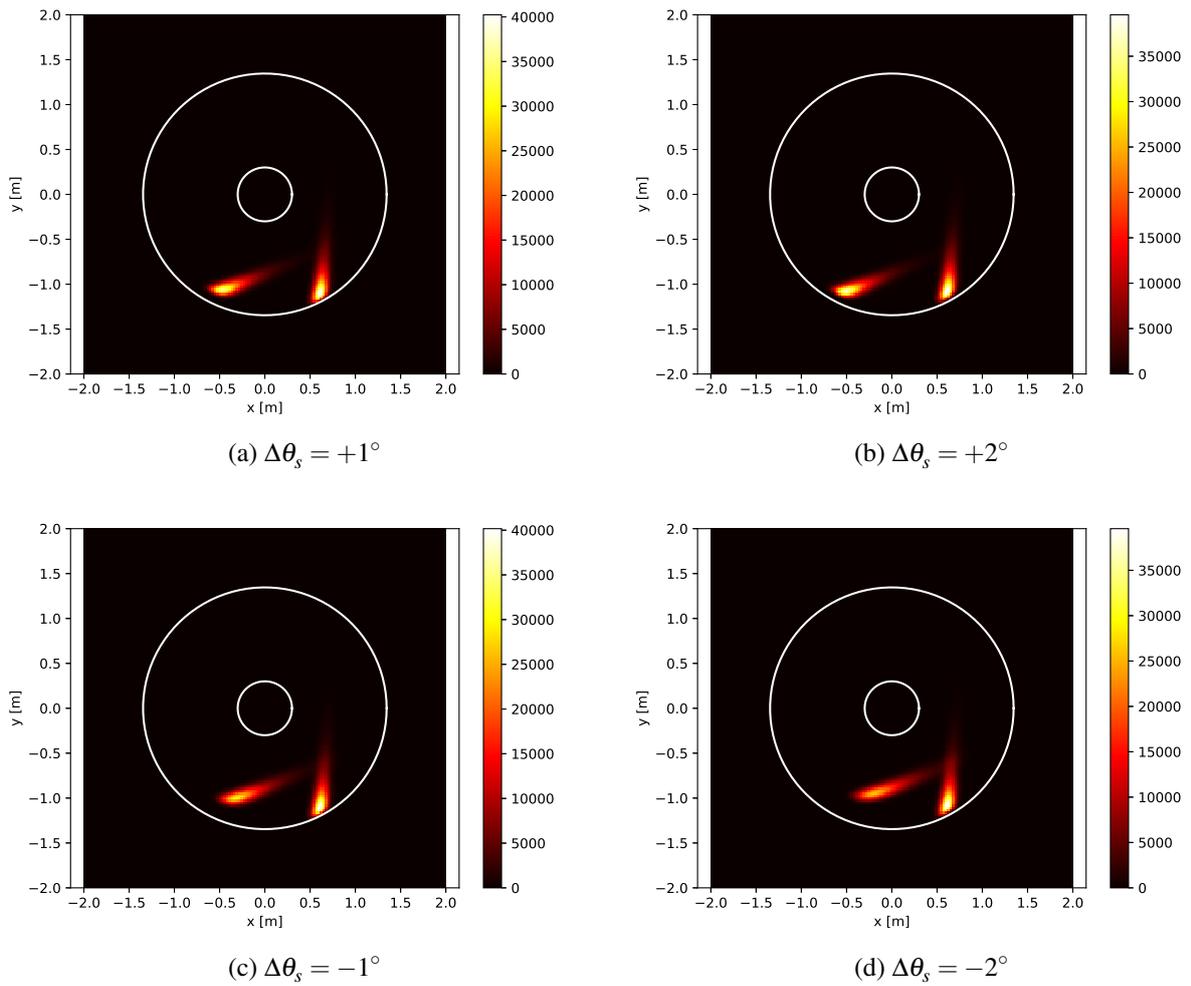


Figura 4.7 Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en x-y, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI.

de θ_s inclina hacia Z positivos el haz de neutrales, orientándose en una dirección más cercana a la de las líneas de campo magnético, lo que extiende la distribución de iones generados a una región mayor, incluso adoptando levemente la forma de dichas líneas.

4.3.2 Posición final de los iones rápidos que impactan con la pared

Tras simular mediante el código ASCOT la órbita de nuestra población de 5 millones de iones generados por los NBIs en las distintas configuraciones enumeradas, se puede determinar el estado final para cada partícula seguida; esto es, su posición, energía, *pitch angle* o su condición final de simulación, entre otras características. Esta última propiedad refiere al motivo que ha provocado el final del seguimiento de la órbita de la partícula, siendo de interés los dos siguientes: el tiempo de simulación y la colisión con la pared. Así, fijando un tiempo de simulación de 0.1 ms, todo ión cuya condición final sea alcanzar dicho instante se considera confinado en ese intervalo, mientras que aquellos que escapen y choquen con la pared registrarán la correspondiente condición. Aunque solo se expongan proyecciones poloidales, el modelo de la pared es tridimensional, encontrándose FILD únicamente en su posición toroidal y, además, la condición de choque se evalúa sobre toda ella.

Así pues, la Figura 4.8 ilustra las posiciones de la pared donde se produce la colisión de iones que,

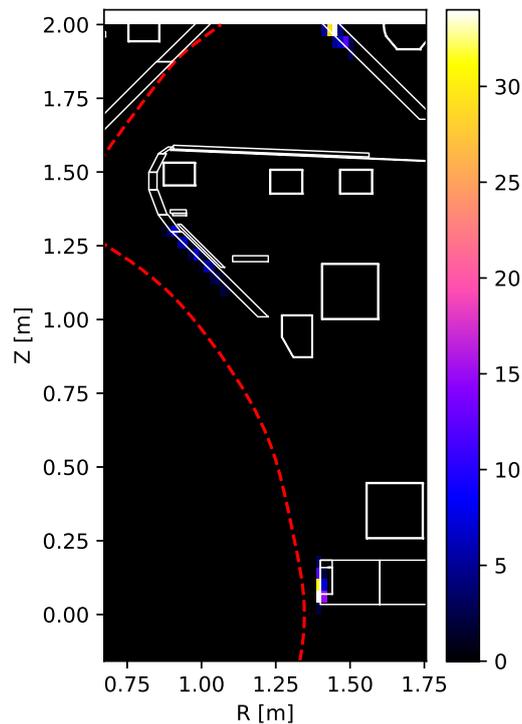


Figura 4.8 Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, para la configuración original del NBI.

fundamentalmente, se pueden dividir en tres zonas bien diferenciadas: por una parte, el detector FILD y la pared al final del divertor, donde se registra la gran mayoría de colisiones; y, por otra, la pared cercana a la entrada del divertor, que registra un número despreciable de pérdidas respecto a las otras dos. Esta concentración de impactos en el extremo del FILD y el divertor es un buen indicador del correcto diseño de ambas tecnologías, cuyo objetivo precisamente es interceptar las pérdidas de iones rápidos.

De la variación de ϕ_s (Figura 4.9) se deduce que, al aumentar dicho ángulo, gana peso la colisión con el detector FILD frente a las pérdidas por el divertor; mientras que, al disminuirlo, ambas zonas intercambian su peso relativo. Además, a mayor ϕ_s , mayor es el número de iones rápidos que rompen su confinamiento en el plasma y son detectados por FILD. Esa cantidad de choques con la pared se dispara para Δ_s positivos, mientras que se reduce levemente para incrementos negativos.

Un razonamiento similar puede aplicarse a la variación de θ_s (Figura 4.10): incrementos de dicho ángulo producen un mayor peso de FILD en el número de impactos (incluso llegando a concentrar casi la totalidad de los mismos para $\Delta\theta_s = +2^\circ$), mientras que los decrementos dan lugar a una mayor concentración en el divertor. No obstante, ahora el aumento en la cantidad de choques registrado está ligado a la disminución θ_s , lo que se traduce en un aumento de las colisiones en el divertor.

4.3.3 Histogramas pitch-energía de las partículas que colisionan con la pared

Una representación de especial interés es el histograma de *pitch angle* frente a la energía de los iones que impactan con la pared en su estado final. En este punto, cabe recalcar que, debido a que la

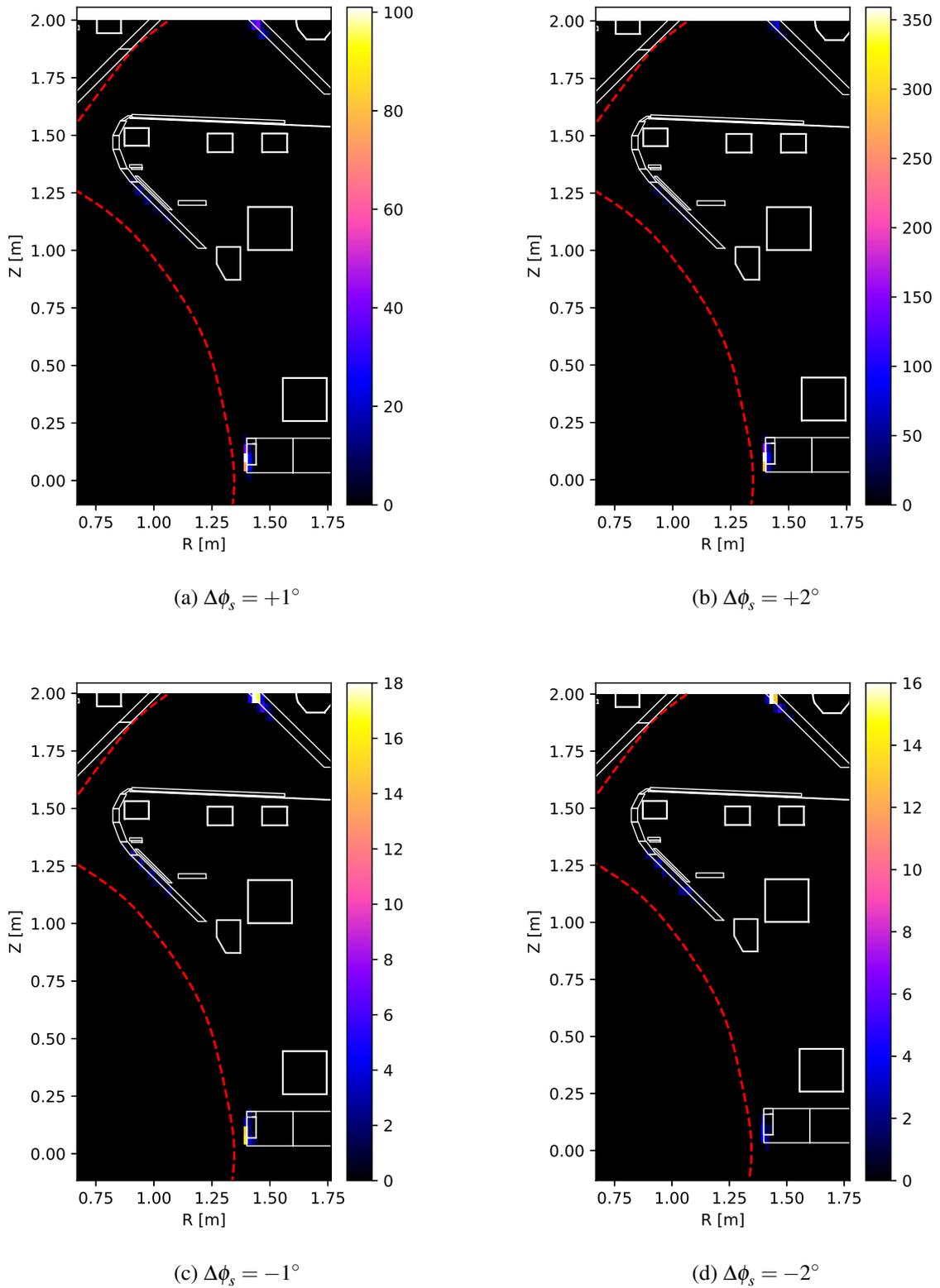


Figura 4.9 Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI.

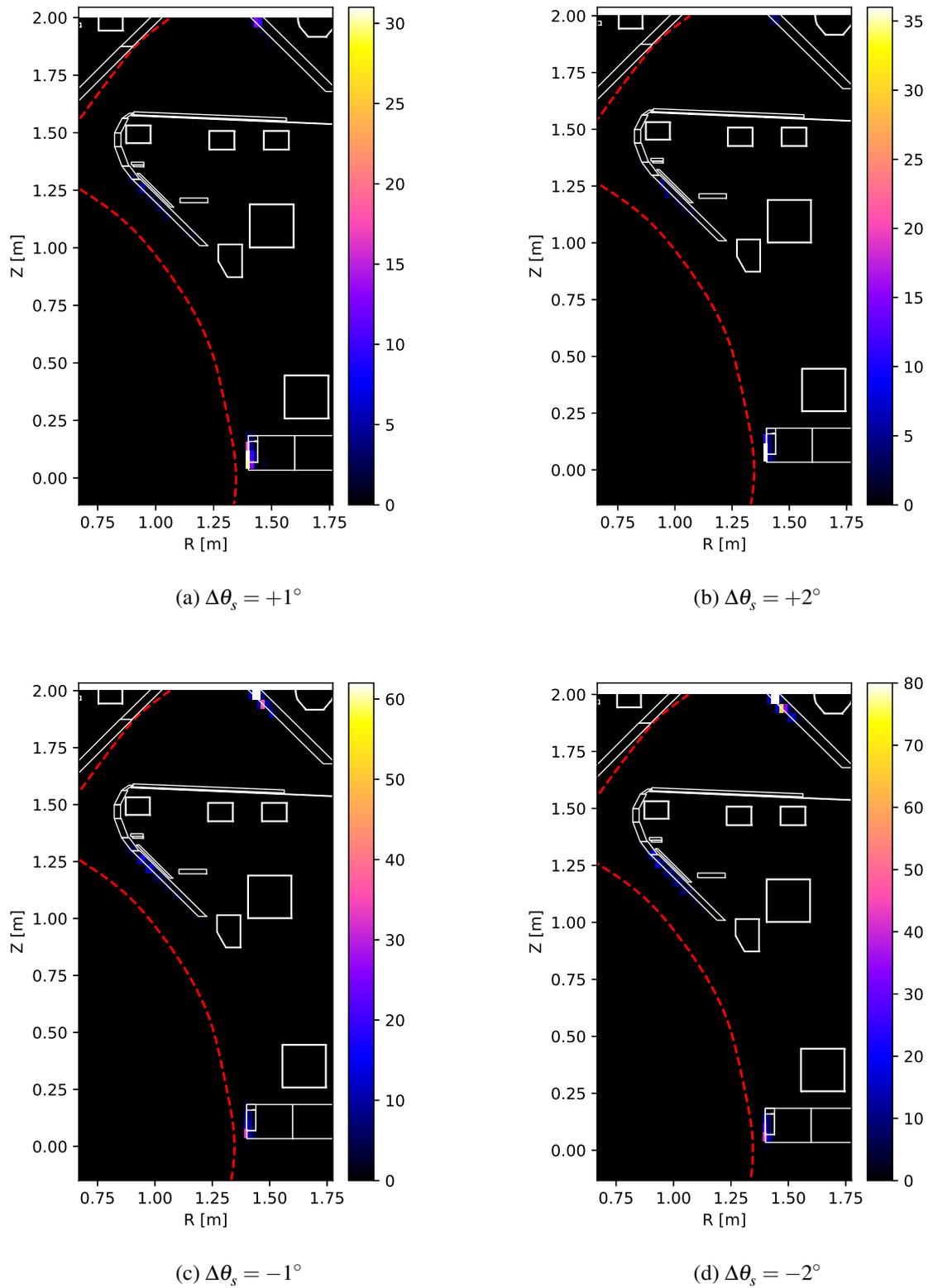


Figura 4.10 Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI.

inyección se realiza a favor de la corriente de plasma que, a su vez, tiene sentido opuesto al campo magnético (en la componente toroidal), el coseno del *pitch* será negativo. Por simplicidad, de ahora en adelante, el *pitch angle* representado será el suplementario (si Λ' es el original, ahora se tomará $\Lambda = 180^\circ - \Lambda'$), lo que corresponde al ángulo formado entre \mathbf{v} y $-\mathbf{B}$.

Pasando al análisis de los resultados, una conclusión común es la conservación de la energía a lo largo del movimiento; esto es, el estado final de las partículas se divide de forma clara y precisa en tres energías, equivalentes a las energías de inyección del NBI: $W_0 = 75$ keV, $W_0/2 = 37.5$ keV y $W_0/3 = 25$ keV. En los parámetros de diseño del NBI se especifican los porcentajes de población para cada energía, siendo mayoritaria W_0 para el caso base, seguida de $W_0/2$ y, por último, $W_0/3$.

Comenzando el estudio por la configuración original de los NBIs (Figura 4.11), se observan varios intervalos del *pitch angle*, ligeramente separados entre sí. Si se discriminan exclusivamente los iones que son interceptados por FILD (Figura 4.12), se puede identificar con mayor claridad a qué corresponden dichos tramos del histograma. FILD interceptará los iones cuyo Λ final esté comprendido entre $\sim 40^\circ$ y $\sim 85^\circ$, con una energía de 75 keV (salvando una cantidad despreciable de partículas a las energías inferiores). Por tanto, se infiere que el estado final de los iones rápidos que colisionan en el divertor está formado por aquellos con energías $W_0/2$ y $W_0/3$, así como los de W_0 con Λ inferior a $\sim 40^\circ$. A este respecto, también se ha representado el estado inicial para comprobar que los iones rápidos que detecta FILD tienen una energía de 75 keV y su *pitch* se halla en un intervalo centrado en $\Lambda = 54^\circ$, para los generados por el inyector SW, y $\Lambda = 73^\circ$, para el inyector SS.

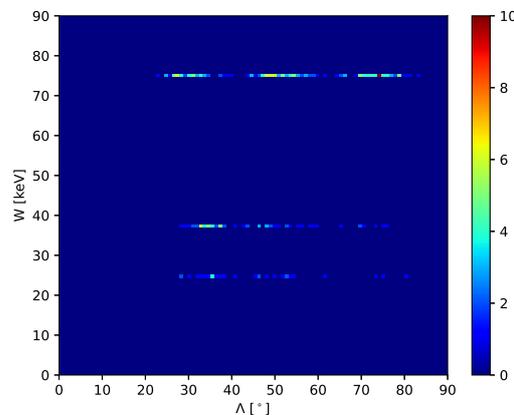


Figura 4.11 Histograma de *pitch* y energía de las partículas que colisionan con la pared, para la configuración original del NBI.

Del análisis de resultados del estudio de sensibilidad se pueden extraer conclusiones totalmente análogas a las comentadas en las subsecciones previas, por lo que nos centraremos en exponer nuevas ideas. La variación de la orientación del haz de neutrales lleva aparejado un cambio en el *pitch angle*, que desplazará horizontalmente los tramos en el histograma. Así, al aumentar ϕ_s y θ_s , tal desplazamiento se produce hacia la derecha, lo que significa que las partículas chocan con un Λ mayor; y al reducir ambos ángulos, sucede lo contrario.

En cuanto a la división entre iones que chocan con FILD o con el divertor, esta sigue siendo patente en todas las gráficas. Lo que sí cambia es la importancia relativa de cada zona según la cantidad de choques, en consonancia con las conclusiones de la subsección anterior: un incremento

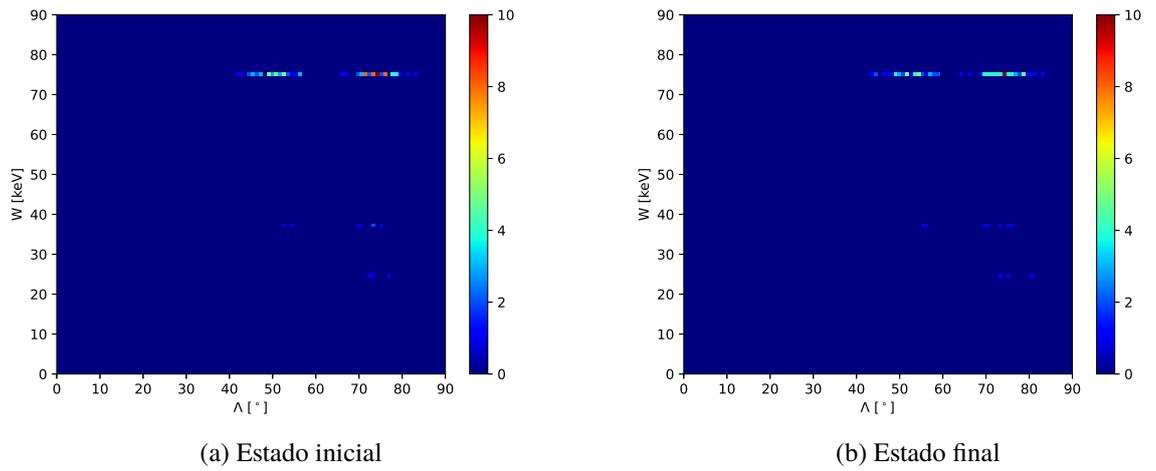


Figura 4.12 Histograma de *pitch* y energía de las partículas que colisionan con FILD.

positivo en ϕ_s y θ_s aumenta el número de partículas que intercepta FILD (frente al divertor), mientras que, ante un decremento, es el divertor quien gana peso en la cantidad de colisiones.

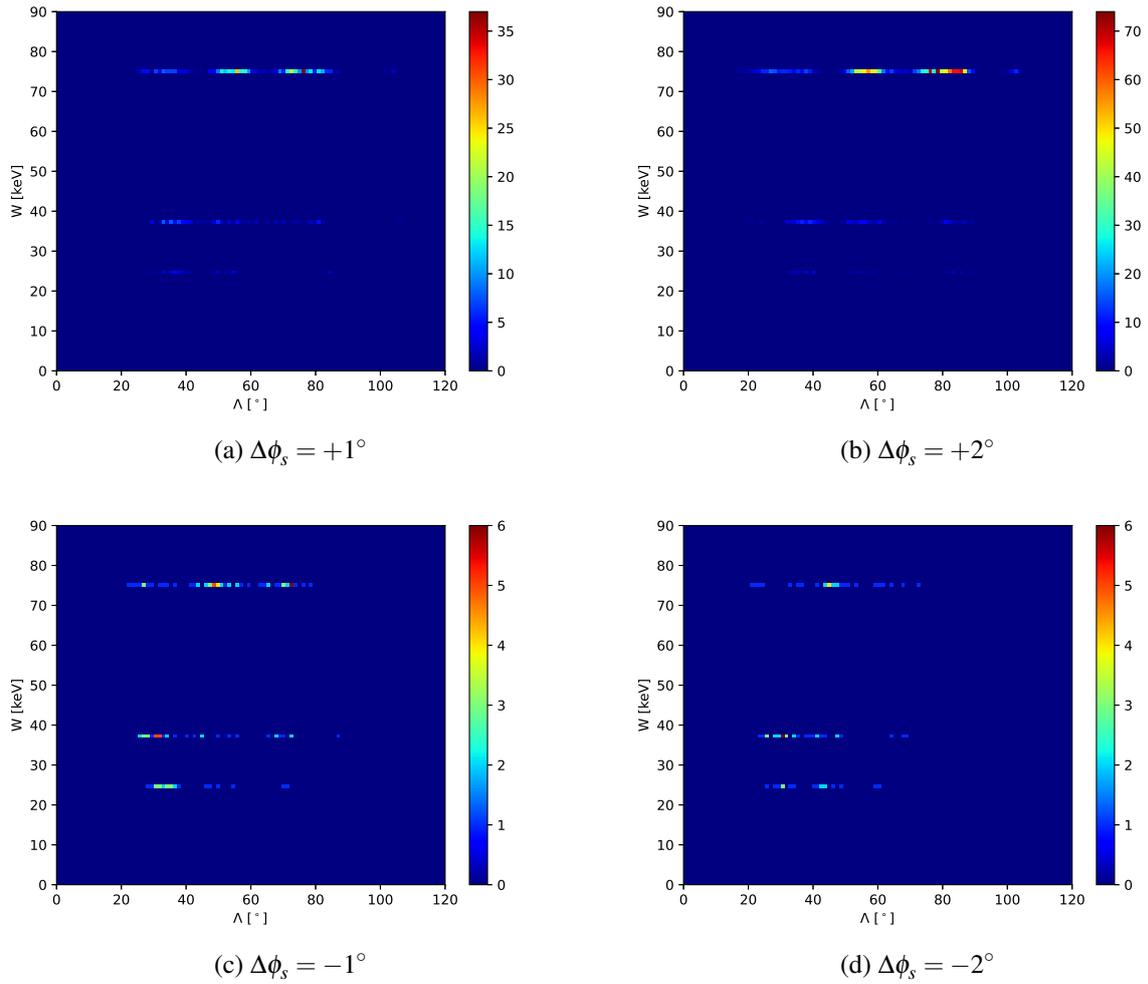


Figura 4.13 Histograma de *pitch* y energía de las partículas que colisionan con la pared, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI.

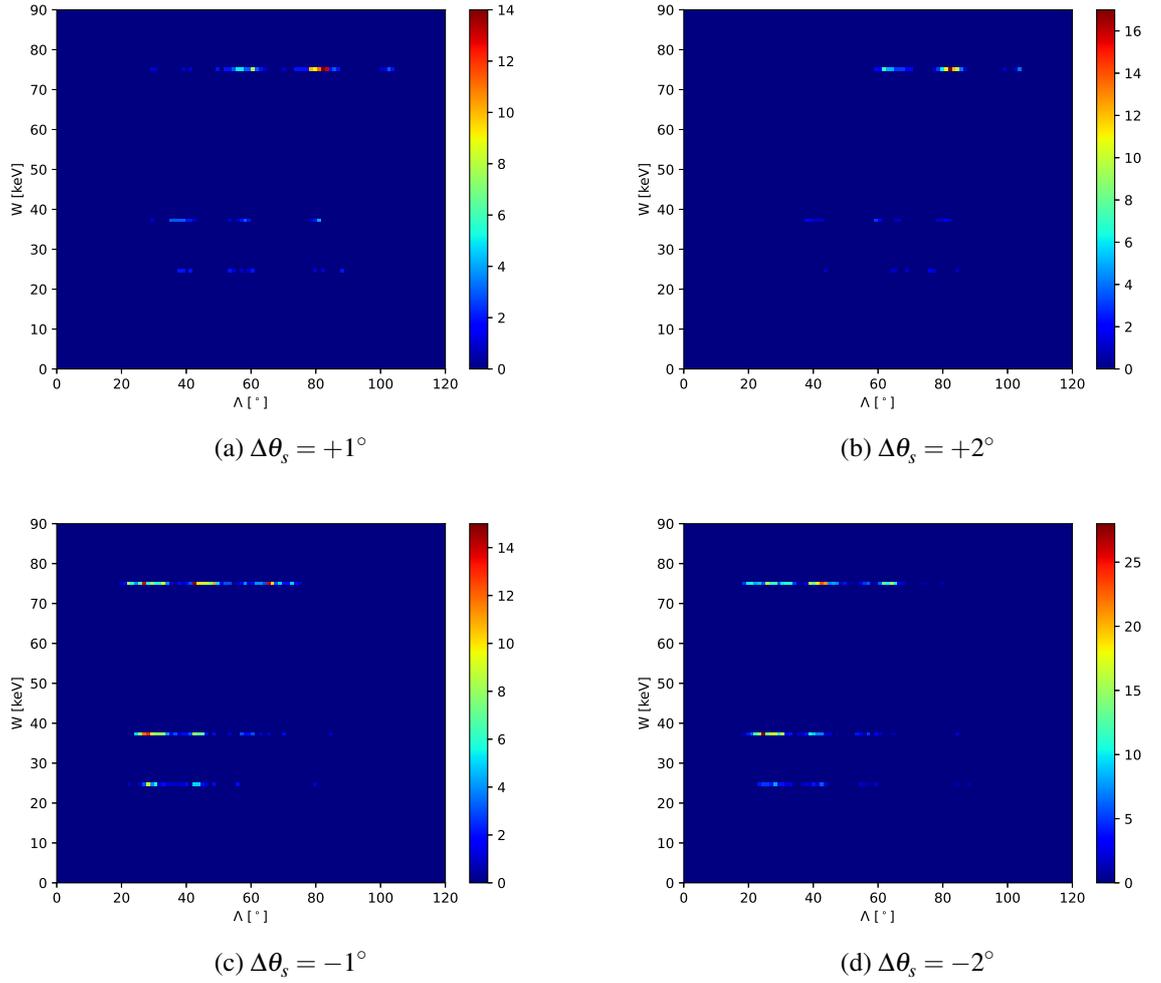


Figura 4.14 Histograma de *pitch* y energía de las partículas que colisionan con la pared, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI.

4.4 Estudio de sensibilidad de las órbitas de iones rápidos en ASCOT

La simulación de un gran conjunto de iones rápidos generado por la inyección NBI en diversas configuraciones del mismo ha aportado múltiples resultados de interés sobre el estado inicial y final de las partículas y su confinamiento magnético. Sin embargo, estas simulaciones de gran envergadura no permiten registrar las órbitas una a una, ya que ello ocuparía un tamaño desorbitado de información, quedando entonces una «caja negra» entre ambos estados. Por este motivo, se va a proceder a simular iones individuales con características representativas del conjunto. Como ya se adelantó, se considerará un ión de deuterio (con carga +1) cuya posición inicial se encuentra sobre la separatrix: $R = 1.346$ m, $Z = 0$ m, $\phi = 295^\circ$ para el inyector SS y $R = 1.201$ m, $Z = 0.65$ m, $\phi = 240^\circ$ para el SW.

El trazado de las órbitas se realizará durante un tiempo de simulación de 0.1 ms, siendo los parámetros del estudio de sensibilidad W y Λ en el instante inicial. Ambas magnitudes, junto a la condición $v_{\perp z} = 0$ (se ha escogido que \mathbf{v}_{\perp} tenga la dirección de $\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}$), permiten determinar las componentes de la velocidad inicial. Los parámetros base del estudio son: $\Lambda = 73^\circ$ para el inyector SS y $\Lambda = 54^\circ$ para el SW, más $W = 75$ keV en ambos casos.

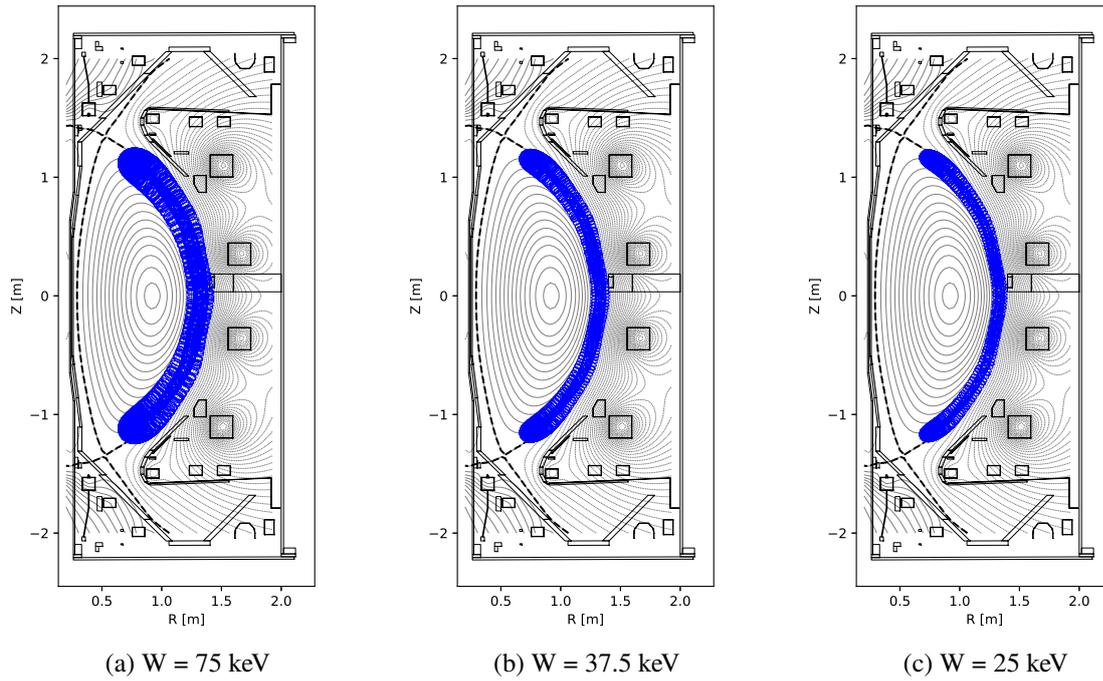


Figura 4.15 Órbita de una partícula inyectada por el NBI SS ($\Lambda = 73^\circ$) para las tres energías de inyección.

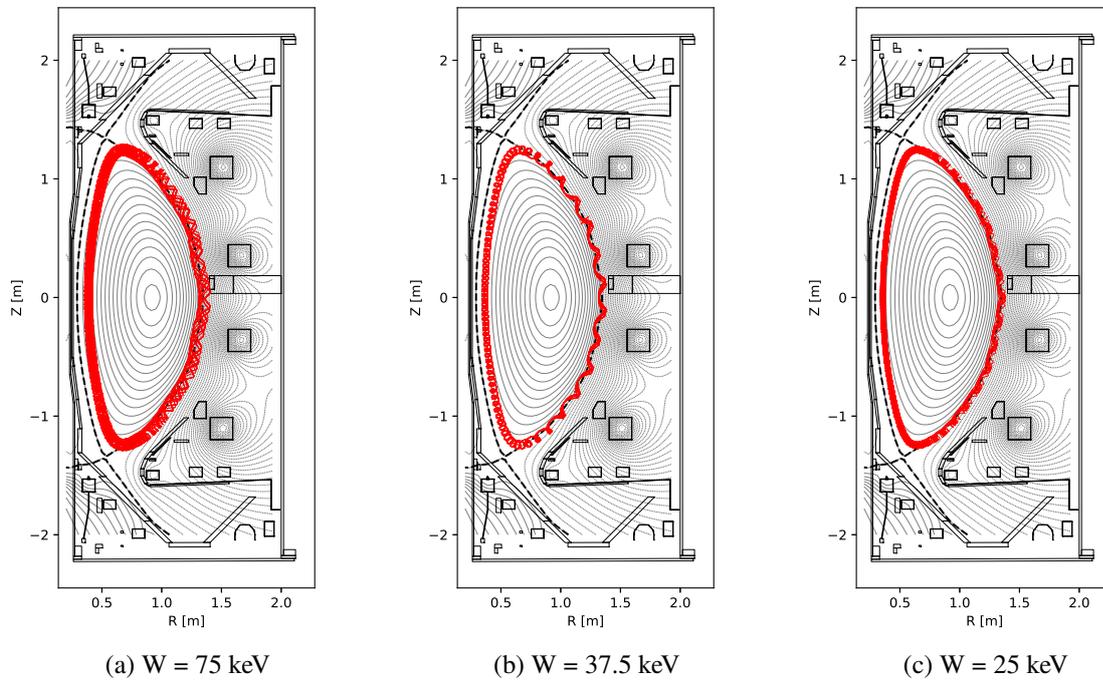


Figura 4.16 Órbita de una partícula inyectada por el NBI SW ($\Lambda = 54^\circ$) para las tres energías de inyección.

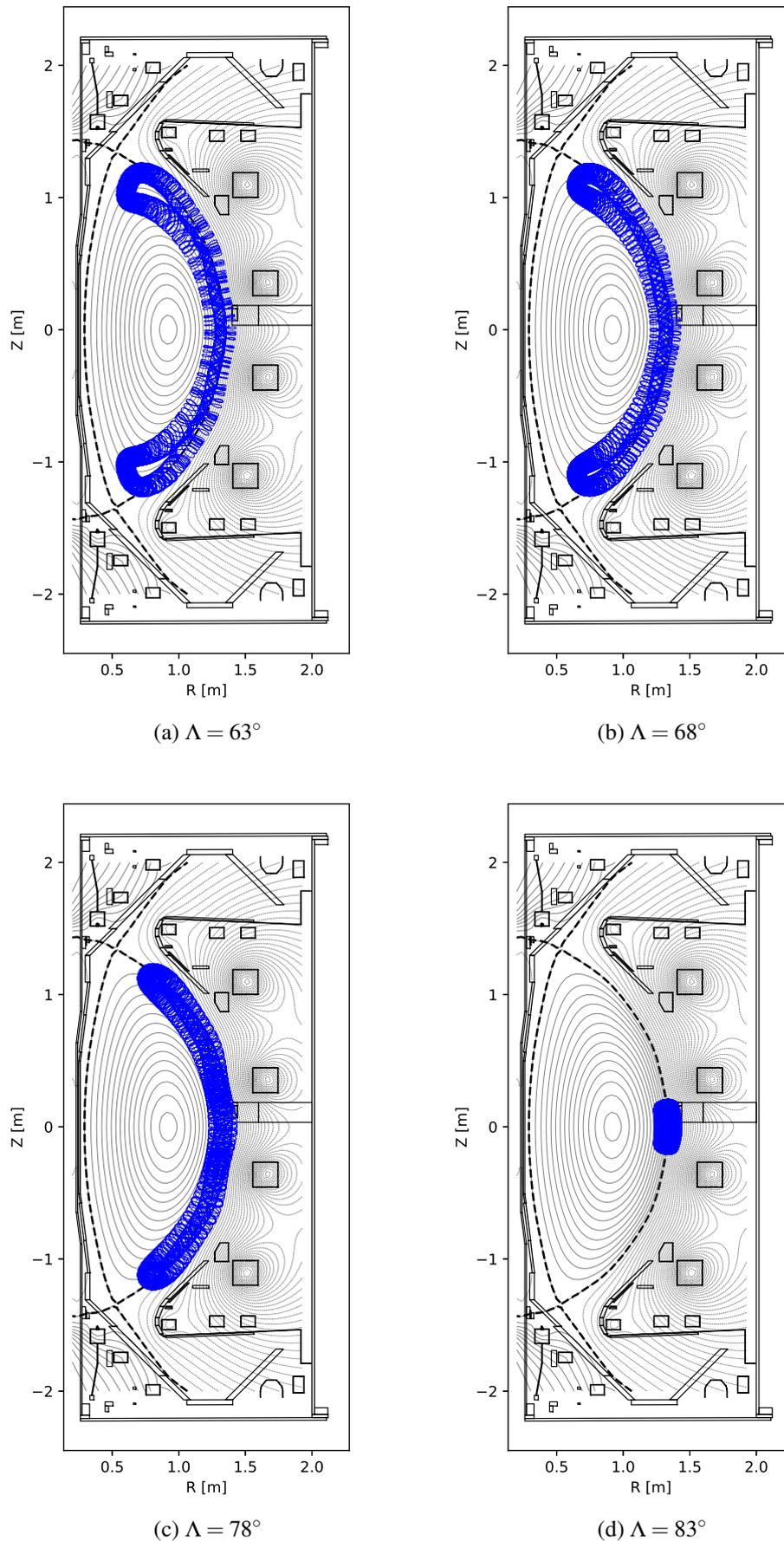


Figura 4.17 Órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a la energía $W = 75$ keV para diferentes valores de Λ .

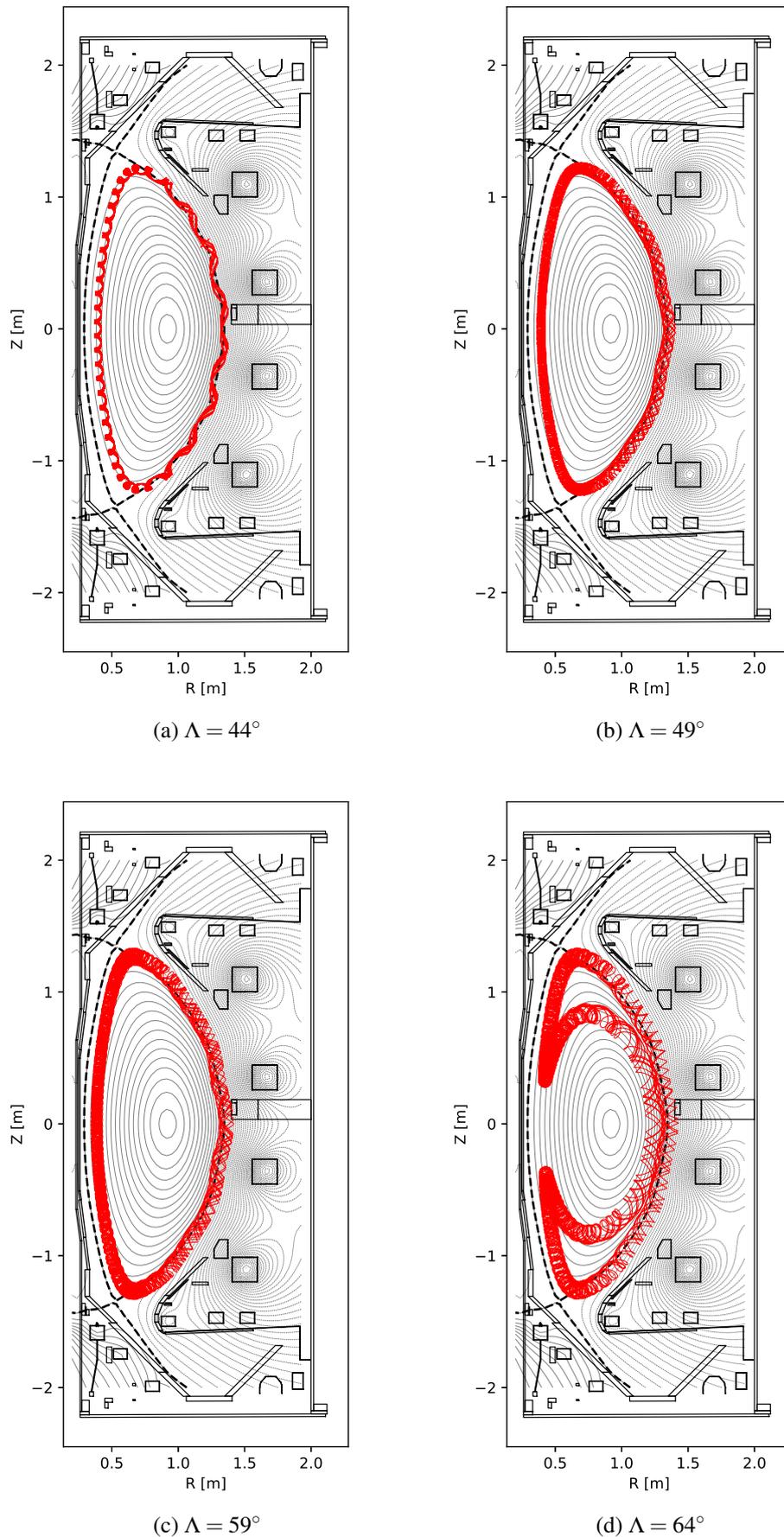


Figura 4.18 Órbita de una partícula inyectada por el NBI SW a la energía $W = 75$ keV para diferentes valores de Λ .

En primer lugar, se persigue analizar el efecto de la energía de inyección sobre la órbita (Figuras 4.15 y 4.16), partiendo del caso básico definido para cada NBI. En este caso, los iones generados por el inyector SS presentan una órbita atrapada (o banana) debido a su elevado ángulo de incidencia Λ ; mientras que, los generados por el inyector SW, con menor *pitch*, siguen una órbita pasante. Si se hace zoom sobre la correspondiente figura, en ambos casos se puede ver cómo la órbita intersecta al detector FILD. Ahora bien, cuando se disminuye la energía de las partículas (como es el caso, a $W_0/2$ y $W_0/3$) la forma de la órbita queda intacta, solo viéndose reducido el radio de Larmor. Dado que las tres energías son superiores a la energía térmica del plasma, en todo caso estamos tratando con iones rápidos, cuyo movimiento de rotación alrededor del girocentro no es despreciable, como queda patente en las figuras.

Profundizando ahora en la variación del ángulo de incidencia (*pitch*), fijando la energía a 75 keV, este parámetro va a modificar la forma de la órbita. Por un lado, para la órbita atrapada de un ión procedente del inyector SS, un aumento de Λ conllevará un acercamiento entre los puntos de reflexión por el efecto de espejo magnético, que en un principio será suave para volverse muy acusado a partir de $\Lambda \sim 80^\circ$. Al disminuir el *pitch* la característica forma de banana se alarga y se curva hacia el interior del plasma en las zonas cercanas al X-point de la separatrix. Si se siguiera disminuyendo, llegaría un cierto valor de Λ en que la órbita se volvería pasante (esto se estudió en la sección dedicada a simulaciones en MATLAB).

Por otro lado, la órbita de un ión procedente del inyector SW se distingue en que, de base, es pasante. Por tanto, al disminuir el *pitch* se acentúa ese carácter de órbita pasante, disminuyendo el girorradio; mientras que, al incrementar Λ , el movimiento de rotación se hace más significativo y las variaciones que ve la partícula en el campo magnético hacen aparecer el efecto de espejo magnético a partir de un cierto valor del *pitch*, convirtiéndose en una órbita atrapada.

4.5 Influencia de las colisiones coulombianas

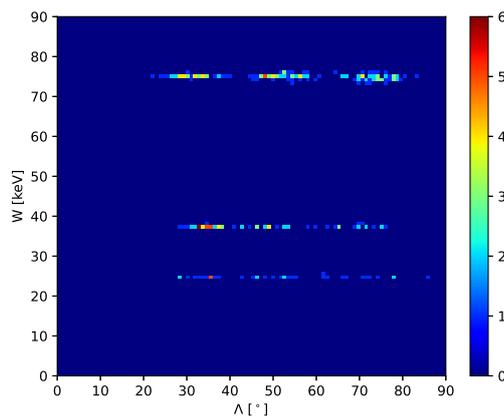


Figura 4.19 Histograma de *pitch* y energía de las partículas que colisionan con la pared, para la configuración original del NBI, teniendo en cuenta las colisiones coulombianas.

Por último, aunque el objetivo principal de este TFG es la aproximación ideal, es de interés comentar de forma breve la influencia que puede tener la inclusión de las colisiones coulombianas en los resultados de las simulaciones realizadas; esto se llevará a cabo para el caso base, comparando

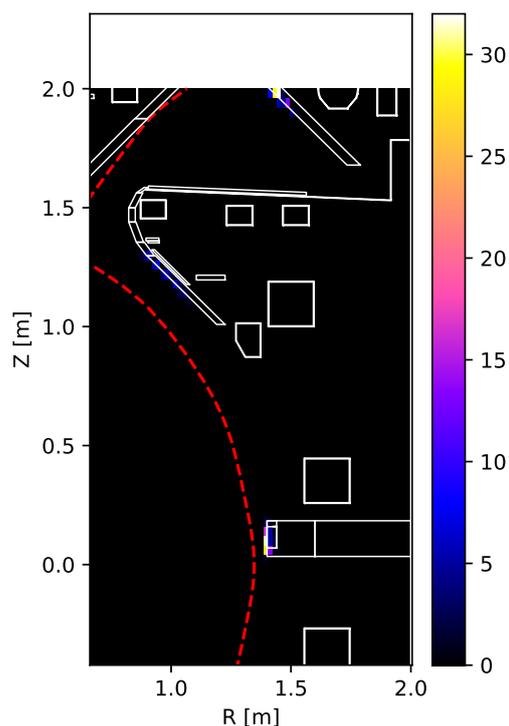


Figura 4.20 Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, para la configuración original del NBI, teniendo en cuenta las colisiones coulombianas.

el estado final de los iones rápidos que chocan con la pared. Así, en la Figura 4.19 queda patente la dispersión que provoca la interacción eléctrica de los iones simulados con el plasma:

- El *pitch* de las partículas sufre pequeñas desviaciones, lo que da lugar a dos efectos claramente apreciables: por un lado, la distribución de partículas sobre los valores del *pitch* varía ligeramente, aunque concentrándose sobre valores centrales similares; por otro, iones que no colisionarían con la pared, al sufrir desviaciones en la velocidad, pueden ser más propicios a chocar, lo que se refleja en un ligero aumento de número de iones en las energías inferiores.
- La energía final presenta ligeras dispersiones en torno al valor constante anterior (cuando se conservaba la energía cinética); ahora se observa cómo los iones rápidos ejercen su función de transmisión de energía al plasma, aunque la escala temporal y el tamaño de la muestra son tan pequeños que no da lugar a grandes variaciones.

Estas discrepancias con el caso original sin colisiones no son tan destacada en el histograma de posición final de los iones que chocan con la pared (Figura 4.20), pues la concentración relativa de partículas en cada zona permanece bastante similar. Algo similar sucede con las órbitas individuales, cuya variación es muy pequeña.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Durante este trabajo, se han acometido simulaciones del transporte de iones rápidos en el tokamak MAST-U, partiendo de la configuración real de inyección NBI e introduciendo variaciones en los parámetros implicados. Todo ello con el fin de recabar información sobre la sensibilidad de dicho transporte a las condiciones iniciales y de inyección de los iones, de tal forma que sirvan como referencia para el diseño de la inyección NBI de SMART.

Previamente, se ha modelado en MATLAB de forma aproximada el campo magnético de MAST-U, comparando los resultados obtenidos para la órbita de un ión generado por el inyector SS con los expuestos posteriormente utilizando ASCOT. Además, se ha ampliado el análisis a valores de *pitch* inferiores, tal que se encuentre y se ilustre la transición de una topología de órbita a otra.

Analizando la inyección del haz de neutrales, por medio de BBNBI y ASCOT, se ha determinado que su orientación es clave en la forma y propiedades de la distribución de iones rápidos que genera. En resumen, una inyección en una dirección más cercana a la de las líneas de campo magnético produce una distribución alargada a lo largo de dichas líneas, mientras que una transversal al plasma aumenta la probabilidad de ionización y causa una distribución compacta cerca de la separatrix. En cuanto a los impactos con la pared, en el primer caso (inyección más paralela) ganan peso porcentual las colisiones en el divertor, sucediendo en el segundo caso lo propio con el detector FILD.

Simulando órbitas de iones individuales mediante ASCOT, dotándoles de las condiciones y propiedades iniciales representativas de aquellos generados por el NBI SS y SW, respectivamente, se extraen varias conclusiones: a mayor energía, mayor es la importancia del movimiento rotatorio de Larmor alrededor del girocentro (por este motivo, en los iones rápidos no es despreciable dicho movimiento); la órbita de un ión característico del NBI SS es del tipo banana, mientras que la de uno del inyector SW es pasante; y una variación del *pitch angle* repercute directamente sobre la topología de la órbita y su forma. Sobre esto último, un incremento de Λ sobre una órbita atrapada da lugar a que sus extremos, donde la partícula se ve reflejada, se acerquen, sucediendo lo opuesto para un decremento del ángulo. Por tanto, existirá un valor Λ para el cual se produzca la transición de banana a pasante.

El presente trabajo tiene una conexión directa con el próximo diseño y optimización de la geometría de inyección NBI del tokamak SMART de la US, pues constituye su continuación natural en el trabajo investigador del grupo PSFT. De hecho, el autor ya ha sido capaz de implementar en ASCOT el campo magnético y el resto de *inputs* asociados a SMART, en colaboración con otros compañeros del grupo. Por tanto, los estudios se centran ahora en definir los parámetros del NBI y realizar un extenso estudio de sensibilidad que permita tomar decisiones eficaces sobre su diseño.

Otra posible línea de trabajo sería mejorar el modelo del campo magnético del tokamak en MATLAB, para convertir el código de simulación desarrollado en una herramienta sencilla y rápida que permita disponer de resultados preliminares que apoyen la batería de simulaciones en ASCOT, que poseen mayor complejidad y coste computacional. En cuanto a ASCOT, simulaciones más completas y realistas incluirían un análisis más detallado de la influencia de las colisiones coulombianas. La parte de las colisiones es fundamental, ya que dependerá de las propiedades físicas del sistema (campo de presiones, densidades, temperaturas, campos magnético y eléctrico) y de sus variadas condiciones de equilibrio magnetohidrodinámico (MHD).

Índice de Figuras

1.1	Esquema de los campos magnéticos en un tokamak [2]	4
1.2	Diversas configuraciones de sección poloidal del plasma en el TCV [4]	5
1.3	Comparación entre un tokamak convencional y uno esférico [5]	6
1.4	Diseño renderizado de la cámara de vacío de MAST-U [7]	8
1.5	Configuraciones principales de divertor en MAST-U; de izquierda a derecha: (a) convencional, (b) super-X y (c) <i>snowflake</i> [7]	9
1.6	Sección transversal de la cámara de vacío de MAST, donde se indica la posición de las distintas bobinas poloidales [8]	10
2.1	Sistema de coordenadas toroidales y cilíndricas [12] (donde se muestra r , en nuestra nomenclatura refiere a R)	12
2.2	Definición de la superficie para el cálculo del flujo poloidal [13]	12
2.3	Líneas de campo magnético de una espira circular de intensidad $I = 0.1$ MA y $R_0 = 1$ m, valores dentro del intervalo de tokamaks medianos o pequeños	15
2.4	Trayectoria helicoidal de un ión y un electrón alrededor de una línea de campo magnético uniforme [19]	17
3.1	Órbita de un protón en el campo magnético de un hilo infinito, calculada con diferentes métodos numéricos	22
3.2	Posición (azul) y girocentro (verde) de la órbita del protón. En rojo, la espira	23
3.3	Propiedades de la órbita del protón en función del tiempo	25
3.4	Proyección sobre el plano XZ de la órbita del protón situado inicialmente en el eje OZ bajo el campo magnético de la espira para distintos valores de μ_v	26
3.5	Órbita de un protón alrededor de la espira para distintos valores de μ_v	27
3.6	Órbita de un protón alrededor de la espira para distintos valores de λ_v	28
3.7	Órbitas del protón para $\lambda_v = 1$ y $\mu_v = 0$ (órbita pasante), con distintos valores de λ_i	30
3.8	Órbitas del protón para $\lambda_v = 0$ y $\mu_v = 1$ (órbita banana), con distintos valores de λ_i	30
3.9	Proyección x-y de la órbita pasante para distintos valores de λ_i	31
3.10	Proyección x-y de la órbita banana para distintos valores de λ_i	32
3.11	Aproximación en MATLAB de la órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a $\Lambda = 70^\circ$ para las distintas energías de inyección	33
3.12	Aproximación en MATLAB de la órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a $W = 75$ keV para distintos valores de Λ	34
3.13	Aproximación en MATLAB de la órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a $W = 75$ keV para distintos valores de Λ	35

4.1	Flujo magnético poloidal de MAST-U (ψ [Tm ²]) sobre un esquema de la proyección poloidal de la cámara de vacío. En rojo, la separatrix; en negro, la pared 2D	39
4.2	Perfil de densidades y temperaturas de la población de iones y electrones del plasma. En (b), los iones de deuterio corresponden a la curva azul, mientras que los de carbono, a la naranja	40
4.3	Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial, para la configuración original del NBI (la resolución de los histogramas es de 150x150)	41
4.4	Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en R-Z, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI	42
4.5	Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en x-y, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI	43
4.6	Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en R-Z, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI	44
4.7	Histograma del número de iones inyectados en función de su posición inicial en x-y, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI	45
4.8	Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, para la configuración original del NBI	46
4.9	Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI	47
4.10	Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI	48
4.11	Histograma de <i>pitch</i> y energía de las partículas que colisionan con la pared, para la configuración original del NBI	49
4.12	Histograma de <i>pitch</i> y energía de las partículas que colisionan con FILD	50
4.13	Histograma de <i>pitch</i> y energía de las partículas que colisionan con la pared, variando ϕ_s respecto a la configuración original del NBI	51
4.14	Histograma de <i>pitch</i> y energía de las partículas que colisionan con la pared, variando θ_s respecto a la configuración original del NBI	52
4.15	Órbita de una partícula inyectada por el NBI SS ($\Lambda = 73^\circ$) para las tres energías de inyección	53
4.16	Órbita de una partícula inyectada por el NBI SW ($\Lambda = 54^\circ$) para las tres energías de inyección	53
4.17	Órbita de una partícula inyectada por el NBI SS a la energía $W = 75$ keV para diferentes valores de Λ	54
4.18	Órbita de una partícula inyectada por el NBI SW a la energía $W = 75$ keV para diferentes valores de Λ	55
4.19	Histograma de <i>pitch</i> y energía de las partículas que colisionan con la pared, para la configuración original del NBI, teniendo en cuenta las colisiones coulombianas	56
4.20	Histograma del número de iones fugados que chocan con la pared en función de su posición final, para la configuración original del NBI, teniendo en cuenta las colisiones coulombianas	57

Índice de Tablas

1.1	Parámetros físicos y geométricos generales de MAST y MAST-U	8
1.2	Características básicas de las bobinas poloidales de MAST	8
1.3	Parámetros geométricos de los inyectores NBI de MAST-U.	9
3.1	Error relativo máximo para cada método numérico, con $N = 10^4$	22

Bibliografía

- [1] F. O. Minotti, *Apuntes de física del plasma*, Universidad de Buenos Aires (2012).
- [2] ININ, *Efectos de la fuerza ponderomotriz en la eficiencia de la corriente de impulsión por ondas ciclotrónicas y ablación láser (2ª. etapa)*, <http://www.inin.gob.mx/plantillas/investigacion.cfm?clave=4&campo=CB-807&id=214&year=2009>, consultado en mayo 2021.
- [3] J. F. Rivero Rodríguez, *Implementation of a fast-ion loss detector in the mast upgrade spherical tokamak*, Universidad de Sevilla (2017).
- [4] EPFL, *Tcv tokamak*, https://www.epfl.ch/research/domains/swiss-plasma-center/research/tcv/research_tcv_tokamak/, consultado en junio 2021.
- [5] Z. Gao, *Compact magnetic confinement fusion: Spherical torus and compact torus*, *Matter and Radiation at Extremes* **1** (2016), no. 3, 153–162.
- [6] J. F. Rivero Rodríguez et al, *Development and installation of a scintillator based detector for fast-ion losses in the mast-u tokamak*, 45th EPS Conference on Plasma Physics, EPS 2018, vol. 2018-July, ene 2018, pp. 233–236 (English).
- [7] Culham Centre for Fusion Energy, *Mast upgrade research plan*, (2019).
- [8] M. Cox, *The mega amp spherical tokamak*, *Fusion Engineering and Design* **46** (1999), no. 2, 397–404.
- [9] Tom Barrett, *Neutral beam physics and beamline position parameters*, Culham Center for Fusion Energy (2012).
- [10] P. A. Tipler & G. Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología, volumen 2 (6ª edición)*, Reverté (2010).
- [11] FusionWiki, *Toroidal coordinates*, http://fusionwiki.ciemat.es/wiki/Toroidal_coordinates, consultado en mayo 2021.
- [12] A. G. Chiariello et al., *Analytical representation of 3d magnetic surfaces*, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* **54** (2017), no. 4, 627–645.
- [13] Y. Ou et al, *Design and simulation of extremum-seeking open-loop optimal control of current profile in the diii-d tokamak*, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **50** (2008), no. 11.
- [14] A. Franco García, *Campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida*, <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/magnetico/linea/linea.html>, consultado en abril 2021.

- [15] A. Franco García, *Campo magnético producido por una corriente circular en un punto fuera de su eje*, http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/magnetico/espira/espira_1.html, consultado en abril 2021.
- [16] R. H. Good, *Elliptic integrals, the forgotten functions*, *European Journal of Physics* **22** (2001), no. 2, 119–126.
- [17] A. Franco García, *Campo magnético producido por un toroide*, <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/magnetico/toroide/toroide.html>, consultado en mayo 2021.
- [18] EPFL, *Plasma physics and applications*, <https://www.youtube.com/channel/UCM91JfbMXvtwKYNQAVI0YuQ>, consultado en marzo 2021.
- [19] G. McCracken & P. Stott, *Fusion (second edition)*, (2013).
- [20] E. Hirvijoki et al, *Ascot: Solving the kinetic equation of minority particle species in tokamak plasmas*, *Computer Physics Communications* **185** (2014), no. 4, 1310–1321.
- [21] L. Sanchís Sánchez, *Fast-ion transport induced by externally applied resonant magnetic perturbations in the asdex upgrade tokamak*, Universidad de Sevilla (2019).
- [22] O. Asunta, *Fast ions in fusion plasmas - towards numerical tokamaks*, Aalto University (2015).
- [23] O. Asunta et al, *Modelling neutral beams in fusion devices: Beamlet-based model for fast particle simulations*, *Computer Physics Communications* **188** (2015), 33–46.

Anexo: código de MATLAB para la simulación de órbitas de iones en un tokamak

Código 5.1 Código de MATLAB para la simulación de órbitas de iones en un tokamak.

```
clc; clear all; close all
global mu0 I Ni a R0 A

% Parámetros físicos y geométricos
mu0 = 4*pi*1e-7;
q = 1.602176487e-19;
m = 3.34358320e-27;
A = q/m;
I = 2e6;
Ni = 1.05*-2300000;
R0 = 0.85;
a = 0.65;

% Condiciones iniciales
E = 75*1.60217733e-16;
Lambda = (180-50)*pi/180;
Rini = 1.357;
phiini = (295-360)*pi/180;
Zini = 0;
X0 = [Rini*cos(phiini), Rini*sin(phiini), Zini];
v0 = sqrt(2*E/m);
[br0,bphi0,bz0] = B_EVAL(Rini,Zini);
b0 = sqrt(br0^2+bphi0^2+bz0^2);
vr0 = v0*cos(Lambda)*br0/b0+v0*sin(Lambda)*bphi0/sqrt(br0^2+bphi0^2);
vphi0 = v0*cos(Lambda)*bphi0/b0...
    -v0*sin(Lambda)*br0/sqrt(br0^2+bphi0^2);
vz0 = v0*cos(Lambda)*bz0/b0;
V0 = [vr0*cos(phiini)-vphi0*sin(phiini), ...
    vr0*sin(phiini)+vphi0*cos(phiini), vz0];
```

```

Y(:,1) = [X0(1), V0(1), X0(2), V0(2), X0(3), V0(3)]';

% Discretización del tiempo
N = 1e5;
t0 = 0;
tf = 5e-5;
h = (tf-t0)/N;
t = t0:h:tf;

% Método de Runge-Kutta de orden 4
for j=1:N
    k1 = fun(Y(:,j));
    k2 = fun(Y(:,j)+h/2*k1);
    k3 = fun(Y(:,j)+h/2*k2);
    k4 = fun(Y(:,j)+h*k3);
    Y(:,j+1) = Y(:,j)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    if abs(Y(5,j+1))>2 || sqrt(Y(1,j+1)^2+Y(3,j+1)^2)>2
        break
    end
end

% Resultados de la órbita
x = Y(1,:); y = Y(3,:); z = Y(5,:);
vx = Y(2,:); vy = Y(4,:); vz = Y(6,:);

% Cálculo del flujo poloidal
rpsi=0.2:0.005:2;
zpsi=-1.995:0.01:2;
for j2=1:length(zpsi)
    for j1=1:length(rpsi)
        [br,bphi,bz(j1,j2)] = B_EVAL(rpsi(j1),zpsi(j2));
    end
end
for j2=1:length(zpsi)
    psi(1,j2)=0;
    for j1=2:length(rpsi)
        psi(j1,j2)=trapz(rpsi(1:j1),2*pi*bz(1:j1,j2)'.*rpsi(1:j1));
    end
end
[Rpsi,Zpsi]=meshgrid(rpsi,zpsi);

% Gráficas de la proyección poloidal y ecuatorial de la órbita
figure(1)
contour(Rpsi,Zpsi,psi',40); colormap(gray); hold on
contour(Rpsi,Zpsi,psi',[1,0.028],'--k')
plot(sqrt(x.^2+y.^2),z,'LineWidth',0.01); plot(1.357,0,'*k')
xlabel('R [m]'); ylabel('Z [m]'); axis('equal')

figure(2)
plot(x,y); hold on

```

```

xlabel('x [m]'); ylabel('y [m]'); axis('equal')

% Evaluación de f(Y)
function f = fun(Y)
global A
x = Y(1); vx = Y(2); y = Y(3); vy = Y(4); z = Y(5); vz = Y(6);
R = sqrt(x^2+y^2);
[br,bphi,bz] = B_EVAL(R,z);
if R == 0
    bx = 0; by = 0;
else
    bx = br*x/R-bphi*y/R; by = br*y/R+bphi*x/R;
end
f(1) = vx;
f(2) = A*(vy*bz-vz*by);
f(3) = vy;
f(4) = A*(vz*bx-vx*bz);
f(5) = vz;
f(6) = A*(vx*by-vy*bx);
f = f';
end

% Campo magnético de la espira
function [br,bz] = B_ESPIRA(R,Z,R0,I)
mu0 = 4*pi*1e-7;
M = 4*R0*R/(R0^2+Z^2+R^2+2*R0*R);
C = mu0*I/(2*pi*R)*sqrt(M/(4*R0*R));
[K,E] = ellipke(M);
if R == R0 && Z == 0
    br = 0;
    bz = 0;
elseif R == 0
    br = 0;
    bz = mu0*I/2*R0^2/(Z^2+R0^2)^(3/2);
else
    br = C*Z*((2-M)/(2-2*M)*E-K);
    bz = C*(R*K+(R0*M-(2-M)*R)/(2-2*M)*E);
end
end

% Campo magnético de la bobina toroidal
function bphi = B_TOROIDE(R,Z)
global mu0 Ni a R0
rho = sqrt((R-R0)^2+Z^2);
if R >= R0-a && R <= R0+a && abs(Z) <= 2
    bphi = mu0*Ni/(2*pi*R);
else
    bphi = 0;
end
end
end

```

```
% Función que evalúa el campo magnético total
function [br,bphi,bz] = B_EVAL(R,Z)
[Br1,Bz1] = B_ESPIRA(R,Z,0.85,0.82*2e6);
[Br2,Bz2] = B_ESPIRA(R,Z-1.1,1.5,0.82*-23*18000);
[Br3,Bz3] = B_ESPIRA(R,Z+1.1,1.5,0.82*-23*18000);
[Br4,Bz4] = B_ESPIRA(R,Z-0.5,1.65,0.82*-23*17000);
[Br5,Bz5] = B_ESPIRA(R,Z+0.5,1.65,0.82*-23*17000);
[Br6,Bz6] = B_ESPIRA(R,Z-1.65,0.5,0.82*20*27000);
[Br7,Bz7] = B_ESPIRA(R,Z+1.65,0.5,0.82*20*27000);
br = Br1+Br2+Br3+Br4+Br5+Br6+Br7;
bz = Bz1+Bz2+Bz3+Bz4+Bz5+Bz6+Bz7;
bphi = B_TOROIDE(R,Z);
end
```