

Homográfiabecslés affin transzformációból¹

Baráth Dániel

MTA SZTAKI

Geometriai Modellezés és Számítógépes Látás Laboratórium

barath@sztaki.hu

Abstract. A homográfiabecslés olyan feladat, amely a számítógépes látás sok területén alapvető fontosságú, akár rekonstrukciós algoritmusokról beszélünk, akár kamerakalibrációról. Számtalan jól működő algoritmus érhető el ebben a témakörben, azonban én új irányból közelítem meg a problémát. Az a feltevés, hogy a hagyományos algoritmusoknál jobb minőségben becsülhető a homográfia az epipoláris geometriából ismert fundamentális mátrix és az affin transzformáció ismeretében. Tanulmányomban megmutatom, hogyan lehet homográfiát becsülni teljesen ismert, illetve csak félig ismert affin transzformáció esetén.

Kulcsszavak: Homográfia, Affin transzformáció, becslés, pontmegfeleltetés

1 Bevezetés

A homográfia becslésére számos kiváló kutató publikált már módszereket. Megemlíthetünk akár pontmegfeleltetés-alapú – például a DLT algoritmus [1] – régió-alapú, például Németh és mtsai. módszere [4], akár említhetünk kontúr-alapú, vagy egyenesmegfeleltetési eljárásokat [2]. A pontmegfeleltetésből dolgozó eljárások közül a Direct Linear Transform (DLT) az egyik legelterjedtebb, amely négy azonos síkon fekvő pontmegfeleltetésből kiszámolja a síkhomográfiát, illetve túlhatarozott problémára is felírható, így zajos pontmegfeleltetésekből robusztusabban lehet számolni. Ez a módszer is felírható természetesen fundamentális mátrix segítségével, ekkor három pontmegfeleltetésből lehet már számolni. Ezen algoritmusra, elgondolásra is épít ez az elméleti cikk, azonban kihasználja azt a sajátosságot, hogy ha adott pont környezetére ismerjük az affin transzformációt, akkor azt fel tudjuk használni arra, hogy kiszámoljuk a homográfiát [1].

2 Feladat

2.1. Geometriai háttér

A szintér a háromdimenziós euklideszi tér: \mathbb{R}^3 , aminek i, j, k legyen az egymásra kölcsönösen merőleges standard bázisa és Y, Z -vel jelöljük a

¹ Kuba Attila díjra pályázó tanulmány

Baráth D. - Homográfia becslés affín transzformációból

térkoordinátákat. Az objektumok legyenek határoló felületeikkel reprezentálva. Ezekről parametrikus formában beszélünk.

$$X, Y, Z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, u, v: \mathbb{R} \quad (1)$$

$$S(u, v) = X(u, v) * \mathbf{i} + Y(u, v) * \mathbf{j} + Z(u, v) * \mathbf{k} \quad (2)$$

Itt az X, Y, Z függvények a megfelelő térkoordinátákra képzik le az u, v paramétereket. Felső indexszel jelöljük inntől kezdve azt, hogy hányadik képre vonatkozik az adott változó. A megfigyelt pont körüli differenciálok ekkor:

$$\begin{aligned} dx^{(i)} &= x^{(i)}(u + du, v + dv) - x^{(i)}(u, v) \\ dy^{(i)} &= x^{(j)}(u + du, v + dv) - x^{(j)}(u, v) \end{aligned} \quad (3)$$

Ebben az esetben, ha elsőrendben közelítjük a differenciálokat, megkapjuk a

$$\begin{bmatrix} dx^{(i)} \\ dy^{(i)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\delta x^{(i)}}{\delta u} & \frac{\delta x^{(i)}}{\delta v} \\ \frac{\delta y^{(i)}}{\delta u} & \frac{\delta y^{(i)}}{\delta v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = J^{(i)} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \quad (4)$$

egyenletet ($J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a Jakobi mátrix) [5]. Kifejezve innen $\begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix}^T$ -t adódik, hogy

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = J^{(i)-1} \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ezt behelyettesítve a második vetülethez tartozó egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \end{bmatrix} = J^{(j)} J^{(i)-1} \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

A megjelenő $A^{(i,j)} (= J^{(j)} J^{(i)-1}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot nevezzük ezentúl affín transzformációnak. Tehát a

$$\begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \end{bmatrix} = A^{(i,j)} \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

egyenlet adódik [6].

Molnár és mtsai. cikkéből [6] láthatjuk, hogy adott H homográfia esetén az előzőleg bevezetett A affín transzformáció felírható az alábbi módon

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x^{(1)}} = \frac{1}{s} * (h_{11} - h_{31} * x^{(2)}), & a_{12} &= \frac{\partial x^{(2)}}{\partial y^{(1)}} = \frac{1}{s} * (h_{12} - h_{31} * x^{(2)}), \\ a_{21} &= \frac{\partial y^{(2)}}{\partial x^{(1)}} = \frac{1}{s} * (h_{21} - h_{31} * y^{(2)}), & a_{22} &= \frac{\partial y^{(2)}}{\partial y^{(1)}} = \frac{1}{s} * (h_{22} - h_{31} * y^{(2)}) \end{aligned} \quad (8)$$

2.2. Megoldandó feladat

A cikk alapötlete, hogy az előzőekben felvázolt affin transzformációt – amennyiben részben vagy teljesen ismerjük – felhasználhatjuk a homográfia becslésére. A tanulmány során több irányból közelítjük meg a problémát.

Először egy olyan esetet vizsgálunk, amikor nem ismert a sztereo képpár közötti fundamentális mátrix. Erre az esetre kiegészítjük a hagyomány algoritmust egy stabilabb eredményt nyújtó változattal.

Megvizsgáljuk még a problémát ismert fundamentális mátrix esetére is. Erre két lehetséges irány adódik – egyrészt az, hogy amennyiben teljesen ismerjük adott pontban az affin transzformációt, lényegesen jobb, robusztusabb eredményt tudunk elérni a becslés során, mint a hagyományos algoritmusok; illetve amennyiben nem ismerünk minden affin paramétert, akkor is kiszámolható a homográfia. Ez már akár ismert fundamentális mátrix, két pontmegfeleltetés és legalább az egyik pontban ismert vízszintes skálázás esetén egzakt eredményt ad.

3 Homográfia-becslés ismeretlen fundamentális mátrixra

A probléma az epipoláris geometriából jól ismert fundamentális mátrix nélkül is felhasználható a homográfia-becslés pontosítására. Az alábbi fejezetben ezt az eljárást vázoljuk fel. Ezentúl is jelöljük felső indexszel (jel.: $p^{(i)}$) a kép indexét, három-, illetve kétdimenziós pontok esetén pedig az alsó index (jel.: p_i) jelölje a pont indexét az adott képen.

3.1. Homográfia kifejezése az affin transzformációból

Felhasználva a Molnár és mtsai. [6] által bevezetett affin transzformációra és homográfia-ra vonatkozó egyenleteket kifejezhetjük a homográfia-ból az affin transzformációt az egyenletek egyszerű átrendezésével. Adott egy

(9)

affin transzformáció, illetve p_1 pont az első képről, és p_2 pont a p_1 megfelelője a második képen

(10)

Akkor az affin transzformáció komponensei

$$\begin{aligned} & \text{-----}, a \quad \text{-----}, \\ & \text{-----}, a \quad \text{-----} \end{aligned} \quad (11)$$

Baráth D. - Homográfiabecslés affin transzformációból

Alakítsuk át az egyenletrendszert úgy, hogy rendezzük bal oldalra, illetve emeljük ki az ismeretleneket.

(12)

(13)

(14)

(15)

3.2. Homográfia becslése az affin transzformációval

Az előző fejezetben leírt egyenletekből (12-15) látszik, hogy a teljes homográfia nem írható fel ilyen módon, hiszen egyik egyenlet sem vonatkozik a komponensekre. Tehát kizárólag az affin transzformációra vonatkozó egyenletek felhasználásával nem számolható ki a homográfia. Ennek ellenére adódik az a megoldás, hogy ha magában nem is elegendő az információ a feladat megoldására, de megtámogathatunk a felírt egyenletekkel más homográfia-becslő eljárást.

A hagyományos DLT pontmegfeleltetéseket [1] használó egyenletei könnyen kiegészíthetőek a fenti egyenletrendszerrel (12-15), amennyiben ismerjük adott pontokban az affin transzformációt.

Legyenek $\mathbf{X}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ ($i \in [1, N], N \geq 4$) pontok a háromdimenziós térben euklideszi koordináta-rendszerben megadva, illetve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ perspektív kameramátrixok. Legyenek

(16)

az \mathbf{X}_i pont vetületei sztereo képpáron. Ekkor a hagyományos DLT algoritmus az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert oldja meg a homográfia kiszámolására.

4 pontmegfeleltetésre megoldható az egyenletrendszer, és $N > 4$ -re pedig egy túlhatározott egyenletrendszert kapunk.

(17)

ahol

(18)

az ismeretlen változókat tartalmazó vektor és

Baráth D. - Homográfiabecslés affín transzformációból

(19)

a változók együtthatóit tartalmazó mátrix. Egészítsük ki az mátrixot az affín transzformációra vonatkozó egyenletekkel (12-15). Ekkor az

(20)

homogén lineáris egyenletrendszer megoldva adódnak a homográfia paraméterei.

4 Homográfiabecslés ismert fundamentális mátrixra

Az alábbi fejezetben azt mutatom meg, hogy ismert fundamentális mátrix esetén a probléma némiképp egyszerűsödik.

4.1. Homográfia kifejezése a fundamentális mátrix segítségével.

Az epipoláris geometriából jól ismert [1] összefüggés alapján

(21)

ahol, (jelöljük most csak \mathbf{e} -vel) a sztereo képpár második képén az epipólus, \mathbf{H}) a homográfia, $\mathbf{F}(\in \mathbb{R}^{3 \times 3})$ pedig a két kép közötti fundamentális mátrix, illetve \mathbb{R}) egy skálafaktor. Az $[\mathbf{e}]_x$ pedig felírható az alábbi módon

(22)

Kifejtve az előzőeket

(23)

(24)

Mivel az előállítható és lineáris kombinációjaként, tehát

(25)

Baráth D. - Homográfiabecslés affin transzformációból

ezért az mátrix utolsó sorának eltávolításával nem veszünk információt. Így adódik a következő összefüggés

(26)

Elvégezve a bal oldali mátrixok összeszorzását.

(27)

Kifejezve a homográfia paramétereit az egyenleteinkből

$$\begin{aligned} & \dots, a \dots, \\ & \dots, a \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

Egyértelműen látszik a fenti hat egyenletből (28), hogy a homográfia ismert fundamentális mátrix esetén felírható az utolsó sor (), és egy skálafaktor ($\lambda \in \mathbb{R}$) ismeretében, így négyre csökkentettük a szabadságfokokat.

4.2. Homográfia kiszámolása egyetlen pontmegfeleltetés, és a hozzá tartozó affin transzformáció ismeretében

A homográfiára vonatkozó előző fejezetben leírt egyenleteket (28) felhasználhatjuk arra, hogy a Molnár és mtsai. által levezetett affin transzformációra vonatkozó egyenletekből kifejezhessük a homográfiát – úgy mint a 3. fejezetben (11), csak most lényegesen kevesebb ismeretlen paraméterünk marad.

$$\begin{aligned} & \dots, a \dots, \\ & \dots, a \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Ekkor behelyettesítve az egyenletekbe az előző fejezet végén megjelenő kifejezéseket a következő összefüggések adódnak

$$\begin{aligned} & \dots, \dots, \\ & \dots, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Rendezzük bal oldalra az egyenleteket, illetve emeljük ki az ismeretlen paramétereket.

(31)

Baráth D. - Homográfiabecslés affin transzformációból

(32)

(33)

(34)

Ekkor ha veszünk egy a változók együtthatóit tartalmazó mátrixot

(35)

illetve az x vektort, amely az ismeretlen változókat tartalmazza

(36)

akkor egy homogén lineáris egyenletrendszer kapunk. Ennek legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldása $A^T * A$ legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektora lesz. Ekkor a kiszámolt x vektort a

$$\begin{matrix} ; & ; & ; \\ ; & ; & ; \end{matrix} \quad (37)$$

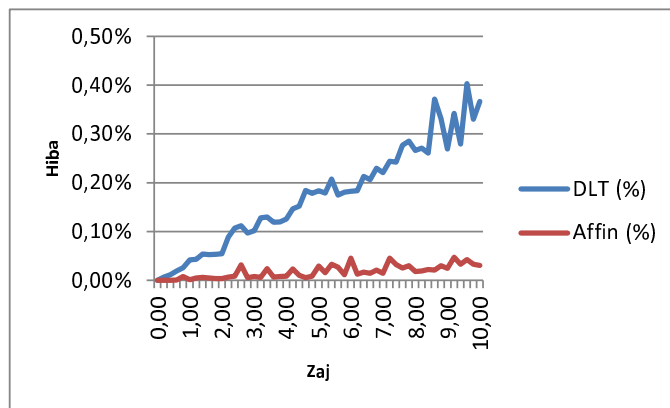
egyenletekbe behelyettesítve megkapjuk a homográfiát. Ez természetesen felírható túlhatározott egyenletrendszerként is $N > 1$ pontmegfeleltetésre, ekkor bővítsük az A mátrixot a többi pontpárnak megfelelő egyenletekkel, és úgy oldjuk meg az egyenletrendszert.

4.3. Tesztek

Az elméleti eredmények természetesen tesztelve lettek szintetikus környezetben különböző zajszinteken. Generáltunk két véletlenszerű perspektív kameramátrixot egy az origótól 100 egység távolságra levő síklapon úgy, hogy a kamerák mindig az origót nézik. Generáltunk 200 random pontot a háromdimenziós síkon, amely áthalad az origón. Ezeket a pontokat vetítettük rá az első, illetve a második kamerára.

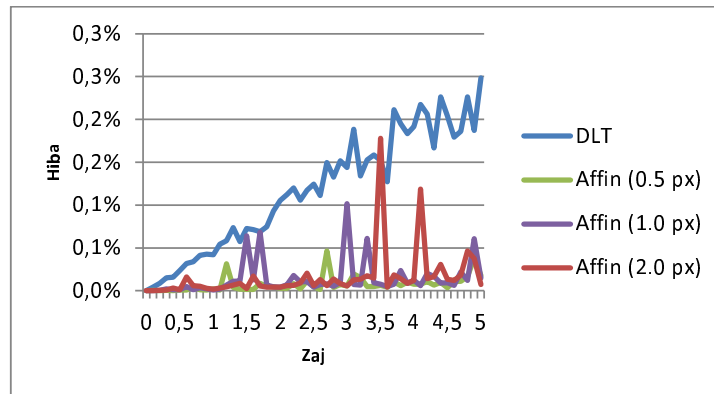
Baráth D. - Homográfia-becslés affin transzformációból

Az első diagrammon a második képre vetített pontokat zajosítottuk adott szórású Gauss-zajjal. A diagrammon a vízszintes tengely a kontúrponthoz hozzáadott zaj szórása. A függőleges tengely pedig az eredményben keletkező hiba. Ez a hiba százalékban értendő, és úgy keletkezik, hogy miután megbecsültük a homográfát kiválasztunk egy random pontot az első kamera képéről, majd a becsült H homográfíával kiszámoljuk a második képen a pont vetületének becsült pozícióját. A hiba a ground truth (az háromdimenziós pont vetítés utáni pozíciója a második képen) értéktől való eltérése a becsült homográfíával számolt pontnak. Majd ezt az értéket leosztottuk – normalizálva azt – a pont origótól vett távolságával.



1. Hiba a zaj függvényében

A diagrammon azt látjuk, hogy amennyiben ismerjük a valódi affin transzformációt a pontokban, és a pontmegfeleltetéseket zajosítjuk, akkor a hagyományos pontmegfeleltetés-alapú DLT algoritmushoz képest az affin transzformációt is használó algoritmus körülbelül 10-szer kevésbé érzékeny erre a zajra. A kék görbe a DLT-ben keletkező hiba, míg a piros görbe a fejezetben bemutatott algoritmusban keletkező hiba.



2. Hiba a zaj függvényében

Ezen a második diagrammon azokat a pontmegfeleltetéseket is zajosítottuk, amelyből az affin transzformáció számolódik. A diagram tengelyei ugyanazok, mint az előzőé. A kék vonal szintúgy a DLT algoritmus hibája – ezt természetesen nem befolyásolja az affin transzformációban levő zaj. A zöld vonal azt mutatja, hogy ha az affin transzformáció pontmegfeleltetéseire 0.5 szórású Gauss-zaj van hozzáadva (pixelben), akkor hogyan reagál az eljárás. A lila vonal 1.0 pixelnyi szórásra, a piros görbe pedig 2.0 pixelnyi szórásra mutatja ugyanezt. Azt látjuk, hogy nem lineárisan nő zajos affin transzformációra a hiba, az eljárás alapvetően jól teljesít, de bizonyos esetekre instabil.

A stabilitás megőrzésére triviálisan adódik az a módszer, hogy a pontmegfeleltetéseket normalizáljuk, és ezen adatokon számoljunk.

5 Homográfia-becslés ismert fundamentális mátrixra, részben ismert affin transzformációból és két pontmegfeleltetésből

A homográfia-egyenletek felírhatóak úgy is, hogy csak az affin transzformáció egy részét ismerjük – a nyírást; elforgatást; X, Y tengelyek menti skálát. Ismert fundamentális mátrix esetén az elforgatás egyértelműen adódik a később leírt módon. Ezen felül a nyírás vagy az X tengely menti skála ismeretében már kiszámolható az egzakt homográfia.

5.1. Affin transzformációs model

Ezt a fejezetet az az elgondolás ihlette, hogy ismert fundamentális mátrix esetén az adott pont környezetére vonatkozó affín transzformáció egy részét ismerjük – az elforgatás szöge egyértelműen adódik. Ez úgy képzelhető el geometriailag, hogy vesszük a pont vetületét az egyik képen és a vetületét a másik képen, ekkor az epipoláris geometriából jól ismert tulajdonság miatt a második vetületnek az első vetület által meghatározott epipoláris egyenes párján kell elhelyezkednie. Így az affín transzformáció szöge a két epipoláris egyenes által bezárt szögeként adódik.

Ekkor felírhatunk egy affín transzformációs modellt, amely kielégíti ezeket a geometriai követelményeket.

(38)

Ahol

- Az epipoláris egyenesek által bezárt szög
- A második képen levő epipoláris egyenes meredeksége
- Forgatási mátrix
- Nyírási mátrix
- A képsík X tengelye menti skálázási mátrix
- A képsík Y tengelye menti skálázási mátrix

Tehát ez a model (38) úgy írja le az első és a második pontkörnyezet közötti affín transzformációt, hogy először az első környezet átforgatjuk a második környezetbe (\mathbf{R}_α). Második transzformációként forgatunk a második epipoláris egyenes meredekségével (\mathbf{R}_β), így a vízszintes tengellyel párhuzamossá téve az epipoláris egyenest. Majd elvégezzük az egyenes menti (\mathbf{S}_u), és az egyenesre merőleges (\mathbf{S}) skálázásokat, illetve a nyírást (\mathbf{W}). Legvégül visszaforgatjuk az eredeti szögébe a mintát ($\mathbf{R}_{-\beta}$). Mivel α , és β szögeket ismerjük, módosítsuk az egyenletet (38).

(39)

ahol

(40)

Fejesszük ki \mathbf{A} mátrix elemeit a mátrixszorzásokat elvégezve.

(41)

(42)

(43)

ahol

$$\begin{aligned} & \dots & (44) \\ & \dots & (45) \\ & \dots & (46) \\ & \dots & (47) \\ & \dots & (48) \end{aligned}$$

Vezessünk be segédváltozókat az egyszerűség kedvéért:

$$\begin{aligned} & \dots, s_2 = r_{-\beta,11} * m_{21}, s_3 = r_{-\beta,12} * m_{21}, \dots, \\ & \dots, \dots, \dots, \dots, \\ m, s_{10} = r_{-\beta,21} * m_{12}, s_{11} = r_{-\beta,21} * m_{22}, s \end{aligned} \quad (49)$$

Helyettesítsük be őket a megfelelő egyenletekbe (45-48).

$$\begin{aligned} & \dots, t, \dots, t, \\ & \dots, \dots, \dots, \dots \end{aligned} \quad (50)$$

Most, hogy újabb egyenleteink adódtak az affín transzformáció paramétereire, használjuk fel az előző fejezetben a homográfiából és a fundamentális mátrixból kifejezett formulákat (30), illetve vezessünk be egy alsó indexet – mint az előző fejezetben – amellyel azt jelöljük, hanyadik indexű pontpárról, illetve affín transzformációról van szó.

$$\text{-----} \quad (51)$$

$$\text{-----} \quad (52)$$

$$\text{-----} \quad (53)$$

$$\text{-----} \quad (54)$$

Így két pontmegfeleltetés esetén $2h$ darab egyenletünk van, és $10h$ ismeretlen paraméterünk (λ, h) . Felírhatjuk azonban a hagyományos pontmegfeleltetés alapú DLT algoritmusból származó egyenleteket is.

5.2. Hagományos algoritmus (DLT) egyenletei

$$(55)$$

Baráth D. - Homográfiabecslés affin transzformációból

(56)

Elvégezve a mátrix-vektor szorzást és a fundamentális mátrixból kifejezett homográfiára vonatkozó egyenleteket behelyettesítve (34) (véges sok ekvivalens átalakítás után) adódik a következő egyenletrendszer.

$$\begin{array}{ccc} \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \end{array} \quad (57)$$

Balra rendezve az egyenleteket és kiemelve a változókat:

(58)

(59)

Ekkor két pont esetén egy alulhatározott inhomogén lineáris egyenletrendszer kapunk. Vegyünk egy, a két pontmegfeleltetésre vonatkozó egyenletek változóinak együtthatóit tároló mátrixot:

(60)

Legyen \mathbf{x} az ismeretleneket tartalmazó vektor.

(61)

Mivel az egyenletrendszerünk lineárisan összefüggő $\mathbf{A}^T * \mathbf{A}$ mátrixnak két zérus sajátértéke lesz. Így az \mathbf{x} vektor a két nulla sajátértékhez tartozó sajátvektor lineáris kombinációjaként áll elő.

(62)

Baráth D. - Homográfia-becslés affín transzformációiból

$$\alpha * \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \end{bmatrix} + \beta * \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^4$$

Itt \mathbf{v}_1 -et és \mathbf{v}_2 -t ismerjük – ezek a két nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorok. Két ismeretlen paraméterre szűkült tehát az egyenletrendszerünk: α -ra és β -ra.

5.3. A két egyenletrendszer egyesítése

Adódott a 5.1-es fejezetben affín transzformációkból kinyert egyenletrendszerünk (51-54), illetve a 5.2-es fejezetben pontmegfeleltetésekből kinyert (63). Ezeket egyesítsük, helyettesítsük be a 5.1-es fejezetben levő egyenletrendszer bal oldalába az előző fejezetben levő összefüggéseket. Az így adódó egyenleteink véges sok ekvivalens átalakítás után két pontmegfeleltetésre:

$$\frac{(v_{11} * f_{21} + (e_x - u_i^{(2)}) * v_{12}) * \alpha + (v_{21} * f_{21} + (e_x - u_i^{(2)}) * v_{22}) * \beta}{(v_{12} * u_i^{(1)} + v_{13} * v_i^{(1)} + v_{14}) * \alpha + (v_{22} * u_i^{(1)} + v_{23} * v_i^{(1)} + v_{24}) * \beta} = \quad (64)$$

$$= s_{i,1} * q_i + s_{i,2} * w_i * t_i + s_{i,3} * t_i$$

$$\frac{(v_{11} * f_{22} + (e_x - u_i^{(2)}) * v_{13}) * \alpha + (v_{21} * f_{22} + (e_x - u_i^{(2)}) * v_{23}) * \beta}{(v_{12} * u_i^{(1)} + v_{13} * v_i^{(1)} + v_{14}) * \alpha + (v_{22} * u_i^{(1)} + v_{23} * v_i^{(1)} + v_{24}) * \beta} = \quad (65)$$

$$= s_{i,4} * q_i + s_{i,5} * w_i * t_i + s_{i,6} * t_i$$

$$\frac{((e_y - v_i^{(2)}) * v_{12} - v_{11} * f_{11}) * \alpha + ((e_y - v_i^{(2)}) * v_{22} - v_{21} * f_{11}) * \beta}{(v_{12} * u_i^{(1)} + v_{13} * v_i^{(1)} + v_{14}) * \alpha + (v_{22} * u_i^{(1)} + v_{23} * v_i^{(1)} + v_{24}) * \beta} = \quad (66)$$

$$= s_{i,7} * q_i + s_{i,8} * w_i * t_i + s_{i,9} * t_i$$

$$\frac{((e_y - v_i^{(2)}) * v_{13} - v_{11} * f_{12}) * \alpha + ((e_y - v_i^{(2)}) * v_{23} - v_{21} * f_{12}) * \beta}{(v_{12} * u_i^{(1)} + v_{13} * v_i^{(1)} + v_{14}) * \alpha + (v_{22} * u_i^{(1)} + v_{23} * v_i^{(1)} + v_{24}) * \beta} = \quad (67)$$

$$= s_{i,10} * q_i + s_{i,11} * w_i * t_i + s_{i,12} * t_i$$

Mivel az egyenletek nemlineárisak, próbáljuk meg linearizálni őket. Erre kézenfekvő megoldás, hogy tegyünk megkötést a baloldali osztások nevezőjére. Legyen

$$(v_{12} * u_i^{(1)} + v_{13} * v_i^{(1)} + v_{14}) * \alpha + (v_{22} * u_i^{(1)} + v_{23} * v_i^{(1)} + v_{24}) * \beta = 1 \quad (68)$$

Fejezzük ki valamelyik ismeretlen paramétert az egyenletből, illetve vegyük észre, hogy ez a megkötés azzal jár, hogy minden különböző pontmegfeleltetésre vonatkozó négy egyenletenként különbözőek lesznek inentől kezdve az α és β paraméterek, ezért szükséges inentől kezdve ezeket is indexelni.

$$\alpha_i = \frac{1 - (v_{22} * u_i^{(1)} + v_{23} * v_i^{(1)} + v_{24}) * \beta_i}{v_{12} * u_i^{(1)} + v_{13} * v_i^{(1)} + v_{14}} \quad (69)$$

Baráth D. - Homográfia-becslés affin transzformációból

Ekkor az ismeretlenek száma nem változik – hiszen minden α_i, β_i párosból az egyik kifejezhető a másikkal, és az egyenletrendszerünk inentől egyetlen lépésre került attól, hogy lineáris legyen. Vezessünk be néhány segédváltozót

$$v, s \tag{70}$$

Ezeket helyettesítsük vissza az α_i -kre vonatkozó egyenletbe.

$$\text{-----} \tag{71}$$

Ezt helyettesítsük be az adott egyenletekbe (64-67), illetve a nevezőket cseréljük ki 1-re – ahogy a megkötésünk megköveteli. Ezen felül rendezzük, és emeljük ki az ismeretleneket az egyenletek bal oldalára, az inhomogén részt pedig a jobb oldalra, illetve vezessünk be újabb segédváltozókat. Legvégső lépésként helyettesítsük w szorzatot egy új wt_i változóval, ezzel már teljesen lineárisá téve az egyenletrendszert.

$$\text{-----} \tag{72}$$

$$\text{-----} \tag{73}$$

$$\text{-----} \tag{74}$$

$$\text{-----} \tag{75}$$

Ekkor véges sok ekvivalens átalakítás után:

$$\text{-----} \tag{76}$$

$$\text{-----} \tag{77}$$

$$\text{-----} \tag{78}$$

$$\text{-----} \tag{79}$$

Bevezethetünk egy olyan megkötést, ami azt garantálja, hogy mindkét pont ugyanazt a homográfiaát adja.

$$\tag{80}$$

Ez a megkötés két pontmegfeleltetés esetén az alábbi egyenleteket jelenti (már behelyettesítve az α_i helyére a megfelelő egyenletet (71)):

$$\text{-----} \quad \text{-----} \quad (81)$$

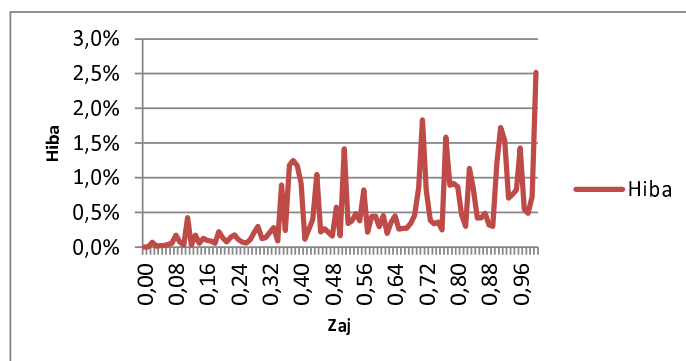
$$\text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \quad (82)$$

Vegyük észre, hogy mivel v_1, v_2 vektorok négy-négy komponensből állnak, ezért ez az egyenlet valójában négy egyenlet, amelyekben mindig az aktuális v koordináta szerepel ($k \in [1,4]$). Ekkor felírhatunk egy olyan A mátrixot, amely tartalmazza az egyenletrendszer összes egyenletének változóinak együtthatóit, egy x vektort, amely az ismeretlenek tárolja és egy b vektort, ami az inhomogén részt tartalmazza. Mivel ez egy túlhatározott inhomogén egyenletrendszer a legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldás az $A^+ * b = (A^T * A)^{-1} * A^T * b$ lesz.

Azonban bizonyos egyenletek lineáris összefüggősége miatt az eredmény ilyen módon nem stabil – bizonyos esetben jól közelíti a homográfiaát, de nem robusztus. Annak érdekében, hogy minden esetben az egzakt eredményt adja ismernünk kell legalább az egyik pontban vagy a vízszintes tengellyel párhuzamos skálázást (q_i), vagy a nyírást (w_i). Ezen bármelyikének ismeretében az eredmény stabil és pontos.

5.4. Tesztek

Ez a módszer is lett tesztelve zajosított adatokon – természetesen két pontmegfeleltetés esetén nem remélt eredmény az, hogy robusztus legyen a zajra. A stabilitás érdekében az eljárást ki kell és ki lehet terjeszteni pontmegfeleltetésre, illetve normalizálni kell az adatokat.



3. Pontmegfeleltetések zajosítása

Baráth D. - Homográfiabecslés affin transzformációból

A diagram azt mutatja be, hogy amennyiben van két pontmegfeleltetésünk, és mindkét pontban ismerjük az affin transzformációból a vízszintes skálát, akkor, ha zajosítjuk az eredményt, a módszer hogyan reagál erre a zajra. Minden zajszinten 50 futtatás átlagaként adódik adott pontban diagram értéke. A vízszintes és a függőleges tengely az előző diagrammokhoz hasonló. Azt látjuk, hogy 0 pixel szórású zajra a hiba természetesen zérus, de ahogy növeljük a zajt, a módszer instabillá válik.

6 Összefoglalás

Ebben a cikkben megmutattuk, hogy affin transzformáció ismeretében robusztusabban becsülhető a síkhomográfia. Erre mutattunk három lehetséges irányt. Egyet arra az esetre, ha nem ismerjük a fundamentális mátrixot. A második esetben mint a teljes affin transzformációt, mind a fundamentális mátrixot ismerjük. A harmadik módszer esetén a fundamentális mátrix mellett elég az affin transzformációt részletesen ismerni a homográfia kiszámolásához.

További feladat még a homográfiabecslő eljárások gyakorlati alkalmazása. Erre lehetséges útként adódik olyan pontmegfeleltetési algoritmusok használata, amely meghatározza az affin transzformáció bizonyos komponenseit is, például a KLT algoritmus [7]. A számolt adatokból ekkor már kiszámolható valós színterekre is a síkhomográfia a tanulmányban vázolt módszerekkel.

7 Irodalom

1. *Hartley, R. I. and Zisserman, A. (2003). Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge University Press*
2. *Yu, G. and Morel, J.-M. (2011). ASIFT: An Algorithm for Fully Affine Invariant Comparison. Image Processing On Line, 2011.*
3. *A Survey of Planar Homography Estimation Techniques, Anubhav Agarwal, C. V. Jawahar, and P. J. Narayanan IIT/TR/2005/12, 2005*
4. *Jozsef Nemeth, Csaba Domokos, and Zoltan Kato. Recovering Planar Homographies Between 2D Shapes. In Proceedings of International Conference on Computer Vision (ICCV), Kyoto, Japan, pages 2170-2176, September 2009. IEEE.*
5. *Kreyszig, E. (1991). Differential geometry. Dover Publications.*
6. *3D Reconstruction of Planar Surface Patches: A Direct Solution, Jozsef Molnar, Rui Huang, and Zoltan Kato, ACCV IMEV Workshop, 2014*
7. *B. D. Lucas and T. Kanade (1981), An iterative image registration technique with an application to stereo vision. Proceedings of Imaging Understanding Workshop, pages 121--130*