UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMÁTICA

FAMILIAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD Y OPERADORES DIFERENCIALES

RODRIGO Y. COMBE

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA PURA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2005

APROBADO POR:

- 6 MAR 2006

Dr. Rogelio Rosas
PRESIDENTE

Dr. Jaime Gutiérrez
MIEMBRO

MSc. Elmir de Carvalho
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 15 de diciembre de 2005

Profesor Asesor:

Doctor: Rogelio Rosas.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA.

DEDICATORIA

A Dios Todopoderoso, fuente de luz y saber, quien supo encaminar mis pasos por el sendero justo y recto proceder y fue mi guía en todo momento brindándome paciencia y fortaleza para seguir adelante en mis estudios.

Al Doctor Rogelio Rosas quien me brindó sus conocimientos y asesoría en el aspecto teórico y demostrativo, a la vez que me ofreció parte de su valioso tiempo para llevar a feliz término el presente trabajo.

A mis padres y a mis hermanos por el respaldo moral y económico que siempre he recibido de ellos. A mis compañeros y profesores de la Maestría en Matemática y a todas aquellas personas que de una forma u otra contribuyeron con su ayuda a alcanzar mis objetivos.

RODRIGO.

Página

RESUMEN

El presente trabajo conlleva al estudio de las familias de existencia y unicidad de operadores lineales acotados como una herramienta para manejar el problema abstracto de Cauchy, así como algunas aplicaciones con operadores diferenciales relacionados con familias de existencia.

Por razones técnicas, hemos dividido este trabajo en tres capítulos y un apéndice.

En el primer capítulo se estudian las integrales de Riemann y las transformadas de Laplace para funciones valuadas en un espacio de Banach, así como el teorema de acotamiento uniforme.

El segundo capítulo es una presentación de las definiciones y propiedades básicas de la nueva familia de existencia así como su compañera familia de unicidad que incluye sus conexiones con el problema abstracto de Cauchy.

El tercer y último capítulo se enfoca en el problema de cuando los operadores diferenciales, así como los operadores matriciales tienen familias E_0 de existencia.

En el apéndice se presentan los espacios de Sobolev y los teoremas de inmersión, temas que son necesarios para el desarrollo del tercer capítulo.

SUMMARY

The present work bears to the study of the existence families and uniqueness of bounded lineal operators as a tool to deal the abstract Cauchy problem, as well as some applications with differential operators related with existence families.

For technical reasons, we have divided this work in three chapters and an appendix.

In the first chapter the Riemann integral are studied and those Laplace transforms for functions valued in a space of Banach, as well as the uniform boundedness theorem.

The second chapter is a presentation of the definitions and basic properties of the new existence family as well as its partner uniqueness family that includes its connections with the abstract problem of Cauchy.

The third and last chapter is focused in the problem of when the differential operators, as well as the matrix operators E_0 - existence families.

In the appendix the spaces of Sobolev and the immersion theorems are presented, topics that are necessary for the development of the third chapter.

INTRODUCCIÓN

La teoría de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach juega un papel importante en Matemática. Un tema importante en esta teoría es el problema de abstracto de Cauchy.

Durante la última década el estudio de algunas generalizaciones de los semigrupos fuertemente continuos clásicos; tales como los semigrupos integrados, los semigrupos regularizados y las familias de existencia de operadores lineales acotados en X, han llamado mucho la atención porque estos nuevos tipos de familias de operadores equipan al Problema Abstracto de Cauchy con sistemas de operadores para controlar los problemas bien y mal puestos.

En este trabajo se presenta un sistema de operadores más general, la familia E_0 de existencia para un operador lineal A, de operadores lineales acotados de un espacio de Banach Y (puede ser diferente de X) en X como una nueva herramienta por tratar con Problema Abstracto de Cauchy. Esta idea es algo diferente de lo tradicional. Este nuevo sistema resulta ser más útil (en algunos aspectos) que los conocidos de X a sí mismo. Como se verá ésto produce un conjunto más grande de datos iniciales para que las soluciones existan y dan una buena estimación de las soluciones.

Como una aplicación se considerará una clase de operadores diferenciales elípticos en $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ con coeficientes variables y la condición frontera de Dirichlet (o Neumann). Se probará que estos operadores tienen familias E_0 de existencia de $L^2(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$ (si $p \geq 2$) para un conveniente E_0.

PRIMER CAPÍTULO

CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo, las integrales de Riemann para funciones valuadas en espacios de Banach son definidas y desarrolladas. Además se presenta una caracterización de las transformadas de Laplace para funciones continuas.

1.1 Integral de Riemann.

El siguiente Teorema se usará en lo sucesivo para definir las transformaciones lineales.

Teorema 1.1. (Teorema de Transformación Lineal Acotada).

Suponga que Z es un espacio normado, X es un espacio de Banach, y $S \subset Z$ es un subespacio lineal, denso de Z. Si $T: S \to X$ es una transformación lineal acotada (es decir que existe $C < \infty$ tal que $\|Tz\| \leq C\|z\|$ para todo $z \in S$), entonces T tiene una única extensión a un elemento $\overline{T} \in L(Z, X)$ y esta extensión todavía satisface

$$\|\bar{T}z\| \le C\|z\| \text{ para todo el } z \in \bar{S}.$$

En lo que resta de esta sección, sean $[a,b]$ un intervalo compacto fijo y X un espacio de Banach. La colección $S = S([a,b],X)$ de funciones de paso, $f:[a,b] \to X$, consiste de todas las funciones f que pueden escribirse de la forma

$$(1.1) \qquad f(t) = x_0 1_{[a,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

donde $\pi \equiv \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$, 1_B es la función característica del conjunto B y $x_i \in X$. Para f como en la ecuación 1.1, sea

$$(1.2) \qquad I(f) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) x_i \quad \in \quad X.$$

Teorema 1.2. (Integral de Riemann).

La función lineal $I : S \to X$ se extiende en forma única a un operador lineal continuo $\bar{I}$ de $\bar{S}$ (la clausura de las funciones de paso dentro de $l^\infty([a,b],X)$ a X y este operador satisface,

$$(1.3) \qquad \|\bar{I}(f)\| \le (b-a)\|f\|_\infty \quad \text{para todo } f \in \bar{S}.$$

Además, $C([a,b],X) \subset \bar{S} \subset l^{\infty}([a,b],X)$ y $f \in \bar{S}$, que puede computarse como

$$(1.4) \qquad \bar{I}(f) = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i^{\pi}(t_{i+1} - t_i),$$

donde $\pi \equiv \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ denota una partición de $[a,b]$, $|\pi| = \max\left\{|t_{i+1} - t_i| : \quad i = 0,...,n-1\right\}$ es el tamaño de la malla de π y c_i^{π} puede escogerse arbitrariamente dentro de $[t_i, t_{i+1}]$.

Demostración:

Tomando la norma de la Ecuación (1.2) y usando la desigualdad triangular se muestra que,

$$(1.5) \qquad \|I(f)\| \le \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\,\|x_i\| \le \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\,\|f\|_{\infty} \le (b-a)\|f\|_{\infty}.$$

La existencia de $\bar{I}$ que satisface la Ecuación (1.3) es una consecuencia del Teorema 1.1.

Para $f \in C([a,b],X)$, $\pi \equiv \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$, y $c_i^{\pi} \in [t_i, t_{i+1}]$ para $i = 0,\ 1,\ 2,...,\ n-1$, sea

$$f_{\pi}(t) \equiv f(c_0)_0 1_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} f(c_i^{\pi}) 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t).$$

Entonces $I(f_\pi)=\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i^\pi)(t_{i+1}-t_i)$ para terminar la prueba de la ecuación (1.4) y que $C([a,b],X)\subset \bar{S}$, es suficiente observar que $\lim_{|\pi|\to 0}\|f-f_\pi\|_\infty=0$ porque f es uniformemente continua en $[a,b]$. □

Observaciones.

1. Para $f\in\bar{S}$ y $a\le\alpha<\beta\le b$ se escribe y denota $\bar{I}(1_{[\alpha,\beta]}f)$ por

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \quad \text{o} \quad \int_{[\alpha,\beta]} f(t)dt.$$

2. Siguiendo la convención usual, si $a\le\alpha<\beta\le b$, sea

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = -\bar{I}(1_{[\beta,\alpha]}f) = -\int_\beta^\alpha f(t)dt.$$

3. Si $f_n\in S$ y $f\in\bar{S}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$, entonces para $a\le\alpha<\beta\le b$, entonces $1_{[\alpha,\beta]}f_n\in S$ y $\lim_{n\to\infty}\|1_{[\alpha,\beta]}f-1_{[\alpha,\beta]}f_n\|_\infty=0$. Esto muestra $1_{[\alpha,\beta]}f\in\bar{S}$ siempre que $f\in\bar{S}$.

El próximo Lema contiene algunas de las muchas propiedades de la integral de Riemann.

Lema 1.1.

Para $f \in \overline{S}([a,b],X)$ y α, β, $\gamma \in [a,b]$, la integral de Riemann satisface:

1. $\left\| \int_\alpha^\beta f(t)dt \right\|_\infty \leq (\beta-\alpha)\sup\{\|f(t)\| : \alpha \leq t \leq \beta\}$.

2. $\int_\alpha^\gamma f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(t)dt$.

3. La función $G(t) := \int_a^t f(\tau)d\tau$ es continua en $[a,b]$.

4. Si Y es un espacio de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces $Tf \in \overline{S}([a,b],Y)$ y

$$T\left(\int_\alpha^\beta f(t)dt \right) = \int_\alpha^\beta Tf(t)dt .$$

5. La función $t \to \|f(t)\|_X$ esta en $\overline{S}([a,b],\mathbb{R})$ y

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt .$$

6. Si f, $g \in \overline{S}([a,b],\mathbb{R})$ y $f \leq g$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt .$$

Teorema 1.3. (Teorema de Fubini).

Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ y $f(s,t) \in X$ una función continua de (s,t) para s entre a y b y t entre c y d. Entonces las aplicaciones $t \to \int_a^b f(s,t)ds \in X$ y $s \to \int_c^d f(s,t)dt$ son continuas y

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(s,t)ds \right] dt = \int_a^b \left[\int_c^d f(s,t)dt \right] ds. \tag{1.6}$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $a < b$ y $c < d$. Por continuidad uniforme de f,

$$\sup_{c \le t \le d} \| f(s,t) - f(s_0,t) \| \to 0 \quad \text{cuando } s \to s_0$$

y por el Lema 1.1

$$\int_c^d f(s,t)dt \to \int_c^d f(s_0,t)dt \text{ cuando } s \to s_0$$

mostrando la continuidad de $s \to \int_c^d f(s,t)dt$. La otra aserción de continuidad se demuestra similarmente.

Ahora sean

$$\pi \equiv \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b\} \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \{c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d\}$$

las particiones de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente. Para $s \in [a,b]$ sea $s_\pi = s_i$ si $s \in (s_i, s_{i+1}]$ y $i \leq 1$ y $s_\pi = s_0 = a$ si $s \in [s_0, s_1]$. Se define $t_{\pi'}$ análogamente para $t \in [c,d]$. Entonces

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(s,t)dt \right] ds = \int_a^b \left[\int_c^d f(s,t_{\pi'})dt \right] ds + \int_a^b \in_{\pi'}(s)ds$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(s_\pi, t_{\pi'})dt \right] ds + \delta_{\pi,\pi'} + \int_a^b \in_{\pi'}(s)ds$$

donde

$$\in_{\pi'}(s) = \int_c^d f(s,t)dt - \int_c^d f(s,t_{\pi'})dt$$

y

$$\delta_{\pi,\pi'} = \int_a^b \left[\int_c^d \{f(s,t_{\pi'}) - f(s_\pi, t_{\pi'})\} dt \right] ds .$$

Por la continuidad uniforme de f y las estimaciones

$$\sup_{s \in [a,b]} \|\in_{\pi'}(s)\| \leq \sup_{c \leq t \leq d} \int_c^d \|f(s,t) - f(s,t_{\pi'})\| dt$$

$$\leq (d-c) \sup \{ \|f(s,t) - f(s,t_{\pi'})\| : (s,t) \in \mathbf{Q} \}$$

y

$$\|\delta_{\pi,\pi'}\| \leq \int_a^b \left[\int_c^d \|f(s,t_{\pi'}) - f(s_\pi, t_{\pi'})\| dt \right] ds$$

$$\leq (b-a)(c-d) \sup \{ \|f(s,t) - f(s,t_{\pi'})\| : (s,t) \in \mathbf{Q} \},$$

se concluye que

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(s,t)dt\right]ds - \int_a^b\left[\int_c^d f(s_\pi,t_{\pi'})dt\right]ds \to 0 \text{ cuando } |\pi|+|\pi'| \to 0.$$

Por simetría,

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(s,t)ds\right]dt - \int_c^d\left[\int_a^b f(s_\pi,t_{\pi'})dt\right]ds \to 0 \text{ cuando } |\pi|+|\pi'| \to 0.$$

Esto completa la prueba ya que

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(s_\pi,t_{\pi'})dt\right]ds = \sum_{0\le i<m,0\le j<n} f(s_i,t_j)(s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)$$

$$= \int_c^d\left[\int_a^b f(s,t)ds\right]dt. \square$$

1.2 El Teorema Fundamental de Cálculo.

La próxima meta es mostrar el Teorema Fundamental de Cálculo, es decir que la integral de Riemann actúa recíprocamente con la diferenciación. Antes de realizar esto son necesarias algún par de definiciones y resultados básicos.

Definición 1.1.

Sea $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Una función $f:(a,b) \to X$ es diferenciable en $t \in (a,b)$ si $L := \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ existe en X. El limite L, si este existe, será denotado por $\dot{f}(t)$ o $\dfrac{df}{dt}(t)$. También se dice que $f \in C^1((a,b),X)$ si f es continuamente diferenciable en todos los puntos $t \in (a,b)$ y $\dot{f} \in C^1((a,b),X)$.

Teorema 1.4.

Suponga que $f:[a,b] \to X$ es una función continua tal que $\dot{f}(t)$ existe y es igual a cero para $t \in (a,b)$. Entonces f es constante.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (a,b)$ dado. (Se permitirá después que $\varepsilon \downarrow 0$ y $\alpha \downarrow a$)[1]. Por la definición de derivada, para todo $\tau \in (a,b)$ existe δ_τ tal que

(1.7) $\quad \|f(t)-f(\tau)\| = \|f(t)-f(\tau)-\dot{f}(\tau)(t-\tau)\| \le \varepsilon\,|t-\tau|$ si $|t-\tau| < \delta_\tau$.

Sea

(1.8) $$A = \{t \in [\alpha,b] : \|f(t)-f(\alpha)\| \le \varepsilon(t-\alpha)\}$$

y el t_0 es el límite superior para A. La ecuación 1.7 con $\tau = \alpha$ muestra que $t_0 > \alpha$ y la continuidad simple de f en t_0 muestra que $t_0 \in A$, es decir

(1.9) $$\|f(t_0)-f(\alpha)\| \le \varepsilon(t_0-\alpha).$$

Supongamos que $t_0 < b$. Por las ecuaciones 1.7 y 1.9,

[1] La notación $\varepsilon \downarrow 0$ indica que los valores de ε considerados tienden a cero de manera decreciente.

$$\left\| \int_a^{t+h} f(\tau)d\tau - \int_a^t f(\tau)d\tau - f(t)h \right\| \le \left\| \int_t^{t+h} (f(\tau) - f(t))\,d\tau \right\|$$

$$\le \int_t^{t+h} \|(f(\tau) - f(t))\|\,d\tau$$

$$\le \; h\varepsilon(h),$$

donde $\varepsilon(h) \equiv \max_{\tau\in[t,t+h]}\|(f(\tau) - f(t))\|$. Combinando esto con un cálculo similar cuando $h<0$ se muestra que para todo $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño,

$$\left\| \int_a^{t+h} f(\tau)d\tau - \int_a^t f(\tau)d\tau - f(t)h \right\| \le |h|\varepsilon(h),$$

donde ahora

$$\varepsilon(h) \equiv \max_{\tau\in[t-|h|,t+|h|]}\|(f(\tau) - f(t))\|.$$

Por la continuidad de f en t, $\varepsilon(h) \to 0$ y así pues $\dfrac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau$ existe y es igual a $f(t)$.

Para 2, sea $G(t) \equiv \int_a^t \dot{F}(\tau)d\tau - F(t)$. Entonces G es continua por el Lema 1.1 y $\dot{G}(t) = 0$ para todo $t \in (a,b)$ por 1. Una aplicación del Teorema 1.4 muestra que G es una constante y en particular $G(b) = G(a)$, es decir

$$\int_a^b \dot{F}(\tau)d\tau \; - \; F(b) \; = - \; F(a),$$

entonces

$$\int_a^b \dot{F}(\tau)d\tau = F(b) - F(a). \square$$

Corolario 1.1 (Desigualdad de Valor Medio).

Supongamos que $f:[a,b] \to X$ es una función continua tal que $\dot{f}(t)$ existe para $t \in (a,b)$ y $\dot{f}$ se extiende a una función continua sobre $[a,b]$. Entonces

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt \leq (b-a)\|\dot{f}\|_\infty . \tag{1.10}$$

Demostración:

Por el Teorema Fundamental de Cálculo, $f(b)-f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt$ y entonces por Lema 1.1,

$$\|f(b)-f(a)\| = \left\| \int_a^b \dot{f}(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt \leq \int_a^b \|\dot{f}\|_\infty dt \leq (b-a)\|\dot{f}\|_\infty . \square$$

Definición 1.2. (Integral de Riemann Generalizada).

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f:[a, +\infty] \to X$ continua, donde X es un espacio de Banach, si existe,

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt$$

se dice que f es integrable en sentido generalizado en $[a, +\infty]$ y el límite anterior se llama integral generalizada de Riemann de f en $[a, +\infty]$ y se denota:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

1.3 Caracterizaciones de la Transformada de Laplace.

Definición 1.3.

Sea $f \in L^\infty(0,\infty)$. La transformada de Laplace F de f esta dada por

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt \qquad (\lambda > 0).$$

Widder caracterizó las funciones F que son transformadas de Laplace de la siguiente forma: Una función F en $(0,\infty)$ es la transformada de Laplace de $f \in L^\infty(0,\infty)$ si y sólo si F es infinitamente diferenciable y satisface

1.11 $$\sup\left\{ \left|\frac{1}{n!}\lambda^{n+1}F^{(n)}(\lambda)\right| : \lambda > 0, \quad n \in N \cup \{0\} \right\} < \infty.$$

El resultado siguiente da una caracterización de las $F \in C(0,\infty)$ que son transformadas de Laplace de un elemento f en $L^{\infty}(0,\infty)$. Esta caracterización involucra sólo la función original F, no sus derivadas de orden superior.

Teorema 1.6.

Sea $F \in C(0,\infty)$. Las aserciones siguientes son equivalentes:

1. F es la transformada de Laplace de algún $f \in L^{\infty}(0,\infty)$.

2. Existen $\forall$ M, $\lambda > 0$ tales que $|\lambda F(\lambda)| \leq M$, casi en todas partes, y

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{jn} \lambda F(j\lambda) \right| \leq M$$

casi en todas partes para $\lambda > 0$, para infinitos $n \in \mathbb{N}$.

3. Igual que (2), sólo que las desigualdades se verifican para todo $\lambda > 0$ y todos los $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

(1 implica 3) Pongamos $M = ess\ \sup_{0<t<\infty} |f(t)|$. [2] Está claro que $|\lambda F(\lambda)| \leq M$ para $\lambda > 0$. Sea $\lambda > 0$ y n $\in \mathbb{N}$. Entonces

[2] Véase Apéndice, páginas 69 y 70.

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{jn}\lambda F(j\lambda)\right| = \left|\int_0^{\infty}\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{jn}e^{-j\lambda t}f(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_0^{\infty}\lambda e^{-e^{n-\lambda t}}e^{n-\lambda t}f(t)dt\right|$$

$$\leq M\ .$$

(3 implica 2) Obvio.

(2 implica 1) Sea $f_n(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{jn}\frac{n}{t}F\left(\frac{jn}{t}\right)$. Entonces la condición dada sobre F implica que existe $n_1<n_2<\ldots$ tal que (f_{n_l}) es una sucesión acotada en $L^{\infty}(0,\infty)$. Dado que $L^{\infty}(0,\infty)$ es el dual del espacio separable $L^1(0,\infty)$, (f_{n_l}) tiene una subsucesión $(f_{n_{l_k}})$ que converge según la topología débil de $f\in L^{\infty}(0,\infty)$. En particular, para cada $\lambda>0$,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f_{n_{l_k}}(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)dt\,.$$

Por otro lado, como

$$\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{jn}}{(j-1)!}\frac{n}{s}\left|F\left(\frac{1}{s}\right)\right|\ e^{-\lambda t}dt\ <\ \infty$$

y

$$\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{jn}}{(j-1)!}\frac{n}{s}\left|F\left(\frac{1}{s}\right)\right|\ e^{-\lambda jns}ds\ <\ \infty,$$

se tiene que

$$\int_o^{\infty} f_n(t)\, e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{jn} \frac{n}{t} F\left(\frac{jn}{t}\right) e^{-\lambda t} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{jn} \int_0^{\infty} \frac{n}{s} F\left(\frac{1}{s}\right) e^{-\lambda jns} ds$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-e^{n(1-\lambda s)}} e^{n(1-\lambda s)} \frac{n}{s} F\left(\frac{1}{s}\right) ds$$

$$= \int_{-n}^{\infty} e^{-e^{-u}} e^{-u} \frac{n}{n+u} F\left(\frac{\lambda n}{n+u}\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-n,\infty)}\, e^{-e^{-u}} e^{-u} \frac{n}{n+u} F\left(\frac{\lambda n}{n+u}\right) du,$$

así por el teorema de la convergencia dominada (usando la condición $|\lambda F(\lambda)| \le M$ casi en todas partes para $\lambda > 0$),

$$\lim_{n\to\infty} \int_o^{\infty} f_n(t)\, e^{-\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{-u}} e^{-u} F(\lambda) du = F(\lambda).$$

Así, F es la transformada de Laplace de f.□

En la prueba del teorema anterior, se usa la versión siguiente del teorema de convergencia dominada: si $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} |g_j| < \infty$, entonces $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} g_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X g_j$.

Corolario 1.2.

Sea F una función continua sobre $(0,\infty)$ que satisface

$$\sup_{\lambda>0} |\lambda F(\lambda)| < \infty$$

y

$$\sup_{\lambda>0,\ n\in N} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{jn} \lambda F(j\lambda) \right| < \infty$$

Entonces F es infinitamente diferenciable y puede extenderse a una función analítica sobre el semiplano derecho $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

1.4 Transformadas de Laplace de Funciones a Valores Vectoriales.

Dada $f \in L^{\infty}((0,\infty),E)$, donde E es un espacio de Banach, usando el mismo argumento de la demostración del Teorema 1.6, se tiene que la transformada de Laplace F de f satisface

$$(\mathrm{P}_{\infty}) \qquad \sup_{\lambda>0} \|\lambda F(\lambda)\| < \infty \qquad \text{y} \qquad \sup_{\lambda>0, n\in N} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{jn} \lambda F(j\lambda) \right| < \infty .$$

Teorema 1.7.

Sea E un espacio de Banach y $F \in C((0,\infty),E)$. Las siguientes aserciones son equivalentes:

1. Existe una función continua Lipschitziana $\alpha:[0,\infty)\to E$ con $\alpha(0)=0$ tal que:

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\alpha(t)dt \quad \forall\lambda>0.$$

2. F satisface la condición (P_∞).

3. F es infinitamente diferenciable y

$$\sup\left\{\left\|\frac{1}{n!}\lambda^{n+1}F^{(n)}(\lambda)\right\|:\ \lambda>0,\ n\in N\cup\{0\}\right\}<\infty.$$

Para f continua en $L^\infty((0,\infty),E)$, donde E es un espacio de Banach, se obtiene la fórmula de la inversión siguiente.

Teorema 1.8.

Sea E un espacio de Banach. Sea $f:(0,\infty)\to E$ una función continua acotada y F su transformada de Laplace. Entonces

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{jnt}\,n\,F(jn) \qquad \forall t>0,$$

la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de $(0,\infty)$, y uniforme sobre acotados de $(0,\infty)$. Si $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ existe, entonces

$$f(0+) = (1-e^{-1})^{-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}F(jn).$$

Demostración:

Sea $t \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{jnt}\,n\,F(jn) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{jnt}e^{-jnr}f(r)dr$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}n\,e^{-e^{n(t-r)}}e^{n(t-r)}f(r)dr$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-nt}^{\infty}e^{-e^{-u}}e^{-u}f\left(\frac{nt+u}{n}\right)du$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{-u}}e^{-u}f(t)du & \text{si } t>0, \\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-e^{-u}}e^{-u}f(0+)du & \text{si } t=0 \text{ y} \\ & f(0+) \text{ existe,} \end{cases}$$

donde la última igualdad se sigue del teorema de la convergencia dominada y del la continuidad de f. Puesto que f es uniformemente continua sobre $[a,b]$ para $0<a<b<\infty$ (sobre $(0,b]$ si $f(0+)$ existe), la convergencia cedida en la última igualdad es uniforme en $[a,b]$ (sobre $(0,b]$ si $f(0+)$ existe).□

Observación.

Usando la misma idea de la prueba anterior, se observa que la sucesión (f_n) construida en la demostración del Teorema 1.6 converge a f para todo

$t > 0$ si f es continua. Sin embargo, no se puede considerar la convergencia en $t = 0$ para esta sucesión.

Teorema 1.9. (Teorema de Unicidad de Transformadas de Laplace)

Sea E un espacio de Banach. Sean f, $g : (0, \infty) \to E$ funciones continuas acotadas y F, G sus respectivas transformadas de Laplace. Si para todo $\lambda > 0$ se tiene que $F(\lambda) = G(\lambda)$, entonces $f(t) = g(t)$, $\forall t > 0$.

Demostración.

Sea $\lambda > 0$, se probará que si $(F - G)(\lambda) = 0$, entonces $(f - g)(t) = 0$, $\forall t > 0$.

Utilizando el Teorema 1.8 a $f - g$, se obtiene que

$$(f - g)(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{jnt} \, n(F - G)(jn) \qquad \forall t > 0,$$

pero como

$$(F - G)(jn) = 0,$$

entonces

$$(f - g)(t) = 0 \qquad \forall t > 0.$$

Por consiguiente

$$f(t) = g(t) \qquad \forall t > 0. \square$$

1.5 El Teorema de Acotamiento Uniforme.

El Teorema de Acotamiento Uniforme (o el Principio del Acotamiento Uniforme) propuesto por S. Banach y H. Steinhaus (1927) es de gran importancia. A lo largo del análisis hay muchos casos de resultados relacionados con este teorema. El Teorema de Acotamiento Uniforme es considerado como una de las piedras fundamentales del Análisis Funcional.

Teorema 1.10: (Banach – Steinhaus).

Sean X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Sea I un conjunto de índices y para cada $i \in I$ sea $T_i \in L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son mutuamente excluyentes:

1. $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.
2. Existe un sub-conjunto de X_0 denso en X, X_0 tal que para todo $x \in X_0$ resulta:

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| = +\infty .$$

El teorema siguiente es una consecuencia directa del Teorema de Banach – Steinhaus.

Teorema 1.11:

Sean X, Y un espacio de Banach, $(M,\ d)$ es un espacio métrico y para cada $y \in M$ sea $T(y) \in L(X,Y)$. Supongamos que existe $y_0 \in M$ tal que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{y \to y_0} T(y)x$.

Entonces existe $\delta > 0$ y $K > 0$ tales que para todo $y \in M$ con $d(y, y_0) < \delta$ se tiene que:

$$\|T(y)\| \leq K.$$

Demostración:

Supongamos, razonando por absurdo que no se cumple la tesis enunciada. En este caso para cada n $\in \mathbb{N}$ existe $y_n \in M$ tal que:

(i) $d(y_n, y_0) < \dfrac{1}{n}$.

(ii) $\|T(y_n)\| > n$.

Por la hipótesis (ii) se tiene que

$$\sup_{n \in N} \|T(y_n)\| = +\infty.$$

Por el Teorema 1.10 (Banach – Steinhaus) existe $X_0 \subseteq X$ denso tal que para cada $x \in X_0$:

$$\sup_{n \in N} \|T(y_n)x\| = +\infty.$$

Por esto contradice la hipótesis de que $\lim_{y \to y_0} T(y)x$ existe, pues $y_n \to y_0$ por lo que $\lim_{n \to \infty} T(y_n)x = \lim_{y \to y_0} T(y)x \in X$ así pues existen $\delta > 0$ y $K > 0$ tales que

$$d(y, y_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|T(y)\| \leq K . \square$$

Observación:

La existencia del límite de la sucesión $\{T(y_n)x\}$ implica que la sucesión es acotada.

SEGUNDO CAPÍTULO

FAMILIAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Sean X, Y espacios de Banach. Se introducirá una familia de operadores lineales acotados de Y a X, como una nueva herramienta para manejar el problema abstracto de Cauchy en X: $u'(t) = Au(t)$, $t \geq 0$, $u(0) = x$. Esta herramienta resulta ser más útil que las familias de operadores tradicionales.

2.1. Introducción.

Se considerá el Problema Abstracto de Cauchy (PAC)

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x, & \end{cases}$$

donde A es un operador lineal en un espacio de Banach.

A lo largo de este trabajo X, Y, Z son espacios de Banach. Se denotará por $L(Y,X)$ al espacio de todos los operadores lineales acotados de Y en X; $L(X,X)$ se abrevia como $L(X)$. Para un operador A, denotaremos $D(A)$ como el dominio de A, $R(A)$ como el rango de A, $\rho(A)$ como el conjunto resolvente de A, y A^* como el adjunto de A.

$[D(A)]$ define el espacio normado $D(A)$ con la norma gráfica

$$\|x\|_{[D(A)]} := \|x\| + \|Ax\| \ , \ x \in D(A).$$

Cuando $C \in L(Y,X)$, $[R(C)]$ denota el espacio de Banach $R(C)$ con la norma

$$\|x\|_{[R(C)]} := \inf\{\|y\|;\ Cy = x\}.$$

Se escribe $Z \hookrightarrow X$ si $Z \subset X$ y Z está continuamente inmerso en X, es decir, la inyección canónica, de Z a X, es continua. $A|_Z$ se define como $A|_Z x = Ax$, para todo $x \in D(A|_Z)$, con

$$D(A|_Z) := \{x \in D(A) \cap Z;\ Ax \in Z\}.$$

Observación: $A|_Z$ denota la parte de A en Z.

Definición 2.1.

Una solución de (PAC) es una función valuada en X, $u(t)$ continuamente diferenciable en $[0,+\infty)$ tal que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ y tal que (PCA) se satisface.

Definición 2.2.

La clase de funciones $LT_W - L(Y,X)$ se define de la siguiente manera: $G \in LT_W - L(Y,X)$ si existe $a > 0$ y una aplicación fuertemente continua $H : [0,\infty) \to L(Y,X)$ de orden $O(e^{wt})$ tal que para $\lambda > a$

$$G(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} H(t) y dt, \quad y \in Y,$$

con $G(\cdot) : (a,\infty) \to L(Y,X)$.

2.2 Semigrupos de Operadores.

Definición 2.3.

Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$. Una familia $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados en X es llamado un semigrupo, si

1. $E(0) = I$ (operador identidad),
2. $E(t+s) = E(t)E(s), \quad \forall\, s,\ t \geq 0$.

Definición 2.4.

Un semigrupo $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado fuertemente continuo, si

$$\lim_{t\to 0^+} E(t)x = x \quad \forall x \in X .$$

Un semigrupo fuertemente continuo es llamado un semigrupo regularizado.

Definición 2.5.

Un semigrupo $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es no degenerativo si $E(t)x = 0$, para todo $t \geq 0$, implica que $x = 0$.

Definición 2.6.

El generador infinitesimal de un semigrupo $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es el operador lineal A definido por

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{E(t)x - x}{t},$$

y su dominio de definición $D(A)$ es el espacio de todos los $x \in X$ para los cuales este límite existe.

Teorema 2.1.

Sea $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo que es fuertemente continuo para en un espacio de Banach X que satisface $\bigcap_{t>0} KerE(t)=\{0\}$. Entonces el generador A de $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ genera un semigrupo regularizado.

Lema 2.1.

El generador A de $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ genera un semigrupo generalizado si y sólo si existe una aplicación inyectiva $C\in L(X)$ la cual conmuta con todo $E(t)$, $t>0$, y satisface

$$imC \subset \Sigma := \{x\in X : \lim_{t\to 0^+} E(t)x = x\}.$$

Definición 2.7.

Un semigrupo $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado un semigrupo exponencialmente acotado si existen constantes $M\geq 0$ y $\omega\in \mathbb{R}$ tal que

$$\|E(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ para } t\geq 0.$$

Una importante clase de semigrupos, relacionados a ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, comprende aquellos semigrupos

$\{E(t)\}_{t\geq 0}$ los cuales admiten una continuación analítica a algún sector del plano complejo que contiene los ejes reales positivos.

Definición 2.8.

Un semigrupo $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado analítico u holomórfico, si este puede extenderse a una función analítica compleja $E(z)$ para z en un sector en el plano complejo que contiene los ejes reales positivos.

2.3 Teorema de Stone sobre Grupos Unitarios de un Parámetro.

El teorema de Stone sobre grupos unitarios de un parámetro es un teorema básico del análisis funcional el cual establece una correspondencia uno a uno entre operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert H y familias de un parámetro de operadores unitarios

$$\{U(t)\}_{t\in R}$$

las cuales son fuertemente continuas, es decir que

$$\lim_{t\to t_0} U(t)\xi = U(t_0)\xi\,,\quad \forall\, t\in \mathbb{R},\ \ \xi\in H$$

y son homomorfismos:

$$U(t+s) = U(t)U(s).$$

Tales familias de un parámetro son ordinariamente referidas como grupos unitarios fuertemente continuos de un parámetro. El teorema fue formulado y demostrado por Marshall Stone en 1932. [3]

Teorema 2.2. (Stone).

Sea A un operador autoadjunto sobre un eapacio de Hilbert. Entonces

$$U(t) = e^{itA} \qquad t \in \mathbb{R}$$

es una familia fuertemente continua de un parámetro de operadores unitarios. El generador infinitesimal de $\{U(t)\}_{t\in R}$ es el operador iA. Esta aplicación es una correspondencia biyectiva.

Ejemplo 2.1.

La familia de operadores de traslación

$$[T(t)\varphi](x) = \varphi(x+t)$$

es un grupo unitario de un parámetro de operadores unitarios; el generador infinitesimal de esta familia es una extensión del operador diferencial

$$\frac{d}{dx} = i\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

definido sobre el espacio de funciones de valores complejos continuamente diferenciables de soporte compacto sobre $\mathbb{R}$. Así

[3] Ver Stone'Theorem, Wikipedia.

$$T(t) = e^{t\frac{d}{dx}}.$$

2.4 Familias de Existencia y Unicidad.

Sea A como en (PAC). Sea $E_0 \in L(Y,X)$, y sea $U_0 \in L(X)$ inyectiva.

Definición 2.9.

1. La familia fuertemente continua de operadores $\{E(t)\}_{t\geq 0} \subset L(Y,X)$ es llamada una familia E_0 de existencia para A, si para cada $y \in Y$, $t \geq 0$, $\int_0^t E(s)yds \in D(A)$ y

$$A\left(\int_0^t E(s)yds\right) = E(t)y - E_0 y. \tag{2.1}$$

También se dice que A tiene una familia E_0 de existencia $\{E(t)\}_{t\geq 0}$.

2. La familia fuertemente continua de operadores $\{U(t)\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ es llamada una familia U_0 de unicidad para A, si para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$,

$$\int_0^t U(s)Axds = U(t)x - U_0 x. \tag{2.2}$$

También se dice que A tiene una familia U_0 de unicidad $\{U(t)\}_{t\geq 0}$.

Definición 2.10.

$D_{E_0}(A)$ es el subespacio de $D(A)$ que consiste de aquellos elementos x para los cuales $Ax \in R(E_0)$.

Teorema 2.2.

1. Si existe una familia E_0 de existencia $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ para A, entonces (PAC) admite una solución $u(\cdot)$ para todo $x \in D_{E_0}(A)$ que satisface:

$$\|u(t)\|_{[D(A)]} \leq M(t)\left(\|A\|_{[R(E_0)]} + \|x\|\right), \quad t \geq 0 \tag{2.3}$$

para cierta función positiva localmente acotada $M(t)$ sobre $[0,\infty]$.

2. Si existe una familia U_0 de unicidad $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ para A, entonces todas las soluciones de (PAC) son únicas.

Demostración:

1. Sea $x \in D_{E_0}(A)$. Sea un $y_0 \in Y$ tal que $Ax = E_0 y_0$. Se definirá, para $t \geq 0$,

$$u(t) := x + \int_0^t E(s) y_o ds. \tag{2.4}$$

Verifiquemos que $u(t)$ satisface (PAC). Al derivar (2.4) se obtiene que:

$$u'(t) = E(t)y_o,$$

además

$$Au(t) = A\left(x + \int_0^t E(s)y_o ds\right)$$

$$Au(t) = Ax + A\left(\int_0^t E(s)y_o ds\right)$$

$$Au(t) = E_o y_o + E(t)y_o - E_o y_o$$

$$Au(t) = E(t)y_o.$$

Por consiguiente, u definida por (2.4) satisface (PAC). Obsérvese que $\|E(t)\|$ es localmente acotada sobre $[0,\infty]$, debido al Teorema 1.11. Así (2.3) se sigue de la arbitrariedad de y_0.

2. Sea u una solución de (PAC) con $x = 0$. Si se despeja $U(t)x$ de (2.2) se obtiene

$$U(t)x = U_0 x + \int_0^t U(s)Axds$$

y luego si cambia t por $t-s$,

$$U(t-s)x = U_0 x + \int_0^{t-s} U(s)Axds$$

y derivando con respecto a s

$$\frac{d}{ds}U(t-s)x = -U(t-s)Ax$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{ds}U(t-s) \quad = \quad -U(t-s)A.$$

Luego

$$\frac{d}{ds}\big(U(t-s)u(s)\big) \quad = \quad -U(t-s)Au(s) \quad + \quad U(t-s)u'(s)$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad t \geq s \geq 0.$$

Por otro lado

$$U_0 u(t) = U(t)u(0) = 0 \qquad t \geq 0$$

y por consiguiente $u(t) \equiv 0$, debido a la inyectividad de U_0.□

El siguiente ejemplo muestra que la elección de un espacio de Banach Y diferente de X produce un conjunto grande de datos iniciales.

Ejemplo 2.2.

Sea A el operador lineal en $C_0(\mathbb{R})$, definido por

$$(Af)(x) := xf(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

para toda

$$f \in D(A) := \{f \in C_0(\mathbb{R});\ xf(x) \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

Entonces es fácil verificar que A tiene una familia E_0 de existencia $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores en $L(C_b(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}))$ y una familia U_0 de unicidad $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores en $L(C_0(\mathbb{R}))$. Aquí para $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, se tiene que

$$(E(t)f)(x) := e^{-x^2} e^{tx} f(x), \qquad f \in C_b(\mathbb{R}),$$

$$U(t) := E(t)\big|_{C(R)},$$

$$E_0 = E(0), \qquad U_0 = U(0).$$

Por el Teorema 2.3, se deduce que el (PAC) admite una única solución siempre que el valor inicial este en

$$D_{E_0}(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R});\ xe^{x^2} f(x) \text{ es acotado en } \mathbb{R}\}.$$

Ciertamente, $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ es también una familia U_0 de existencia en $L(C_0(\mathbb{R}))$ para A. Pero hay que recordar que en este caso,

$$D_{E_0}(A) = U_0(D(A)) = \{f \in C_0(\mathbb{R});\ xe^{x^2} f(x) \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

Lema 2.2.

Sean h_1, $h_2 \in C([0,\infty], X)$ con $\|h_i(t)\| \leq ke^{wt}$ (k una constante, $t \geq 0$, $i = 1, 2$) para algún $w > 0$. Sea A un operador cerrado en X tal que para todo $\lambda > w$, $\int_0^\infty e^{-\lambda t} h_1(t)dt \in D(A)$ y

$$A\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h_1(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h_2(t)dt.$$

Entonces para todo $t \geq 0$, $h_1(t) \in D(A)$ y $Ah_1(t) = h_2(t)$.

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema de Unicidad de Transformadas de Laplace (Teorema 1.9) y del hecho de que el operador A es cerrado.□

Ahora, se caracterizarán las familias E_0 de existencia $O(e^{wt})$ en lenguaje de transformadas de Laplace.

Teorema 2.4.

Sea $w \in \mathbb{R}$ y sea $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ una familia de operadores fuertemente continuas en $L(Y,X)$ tal que

$$\|E(t)\| \leq ke^{wt}, \quad t \geq 0, \ k \text{ una constante.}$$

Supongamos que A es cerrado, y $\lambda - A$ es inyectiva para $\lambda > a$ (para algún $a > \max(w,0)$). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a. $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia E_0 de existencia para A.

b. $R(E_0) \subset R(\lambda - A)$ para $\lambda > a$ y

$$(\lambda - A)^{-1} E_o y = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} E(t) y dt, \qquad y \in Y \quad , \quad \lambda > a.$$

Demostración:

Primeramente supongamos que $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia E_0 de existencia para A y por lo tanto se verifica (2.1):

$$A\left(\int_0^t E(s)yds\right) = E(t)y - E_0 y.$$

Luego de (2.1) se despejará $E_0 y$

$$E_0 y = E(t)y - A\left(\int_0^t E(s)yds\right)$$

y multiplicando por $e^{-\lambda t}$ obtenemos

$$e^{-\lambda t}E_0 y = e^{-\lambda t}E(t)y - e^{-\lambda t}A\left(\int_0^t E(s)yds\right),$$

pero como A es lineal

$$e^{-\lambda t}E_0 y = e^{-\lambda t}E(t)y - A\left(e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)yds\right).$$

Para $\lambda > a$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}E_0 ydt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)ydt - A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)yds\right)dt$$

pero como

(2.5)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E_0 ydt &= E_0 y\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \\ &= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}E_0 y\Big|_o^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda}E_0 y,\end{aligned}$$

entonces

$$(2.6) \qquad \frac{1}{\lambda}E_0 y \;=\; \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)ydt \;-\; A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)yds\right)dt.$$

Se calculará $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)ydsdt$ mediante integración por partes. Para ello, tomemos

$$u = \int_0^t E(s)yds \qquad \text{y} \qquad dv = e^{-\lambda t}dt,$$

luego

$$du = E(t)ydt \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

Así

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)ydsdt \;=\; -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)yds\,|_0^\infty \;+\; \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}E(t)yds.$$

Debido a $\|E(t)\| \leq ke^{wt}$, $t \geq 0$, k una constante, entonces

$$-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)yds\,|_0^\infty \quad \to \quad 0,$$

ya que

$$\begin{aligned}
\left\|-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)yds\right\| &\leq \left(\int_0^t\|E(s)\|ds\right)\|y\|\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\\
&\leq k\|y\|\int_0^t e^{ws}ds\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\\
&\leq k\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\|y\|\frac{e^{ws}}{w}\Big]_0^t\\
&\leq -\frac{k\|y\|e^{-\lambda t}(e^{wt}-1)}{\lambda w} \quad \to \quad 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)y\,ds\,dt \quad = \quad \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt. \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) se observa que

$$\frac{1}{\lambda}E_0y \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt \quad - \quad A\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt\right).$$

Como A es un operador lineal,

$$\frac{1}{\lambda}E_0y \quad = \quad \int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda t}E(t)y\,dt \quad - \quad \frac{1}{\lambda}A\left(\int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda t}E(t)y\,dt\right).$$

Al multiplicar toda la expresión por λ

$$E_0y \quad = \quad \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt \quad - \quad A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt\right),$$

y factorizando se obtiene que

$$E_0y \quad = \quad (\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt$$

y por lo tanto

$$(\lambda - A)^{-1}E_0y \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt.$$

Recíprocamente supongamos que $R(E_0)\subset R(\lambda - A)$ para $\lambda > a$ y que

$$(\lambda - A)^{-1}E_oy \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt, \qquad y\in Y \quad , \quad \lambda \quad > \quad a.$$

Así por (2.7), se observa que

$$(\lambda - A)^{-1}E_o y \quad = \quad \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t E(s)y\,ds\,dt$$

luego,

$$\lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}E_o y \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t E(s)y\,ds\,dt$$

y multiplicando por A vemos que

(2.8) $$\lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}E_o y \quad = \quad A\int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t E(s)y\,ds\,dt\,.$$

Además

$$\lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}E_o y \quad = \quad -\lambda^{-1}E_o y \quad + \quad (\lambda - A)^{-1}E_o y\,,$$

ya que

$$\begin{aligned} -\lambda^{-1}E_o y \quad + \quad (\lambda - A)^{-1}E_o y \quad &= \quad -\frac{E_o y}{\lambda} \quad + \quad \frac{E_o y}{\lambda - A} \\ &= \quad \frac{-\lambda E_o y + AE_o y + \lambda E_o y}{\lambda(\lambda - A)} \\ &= \quad \frac{AE_o y}{\lambda(\lambda - A)} \\ &= \quad \lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}E_o y. \end{aligned}$$

Pero como

$$\lambda^{-1}E_0 y \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}E_0 y\,dt$$

y

$$(\lambda - A)^{-1}E_o y \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt\,,$$

se tiene que

$$\lambda^{-1}A(\lambda-A)^{-1}E_o y = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}E_0 y dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y dt,$$

y por lo tanto

$$\lambda^{-1}A(\lambda-A)^{-1}E_o y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(E(t)y-E_0 y)dt. \tag{2.9}$$

Así de (2.8) y (2.9) se obtiene que:

$$A\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)y ds dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(E(t)y-E_0 y)dt$$

y se deduce en virtud del Lema 2.2, que para todo $t \geq 0$, $y \in Y$,

$\int_0^t E(s)y ds \in D(A)$ y (2.1) se verifica.□

Teorema 2.5.

Si (a) o (b) del Teorema 2.4 se verifican, entonces para cada $x \in D_{E_0}(A)$,

(PAC) admite una única solución exponencialmente acotada $u(t)$ tal que

$$\|u(t)\|_{[D(A)]} \leq kM(t)\left(\|x\| + \|A\|_{[R(E_0)]}\right), \quad t \geq 0, \quad k \text{ una constante,}$$

donde

$$M(T) := \begin{cases} e^{\max(w,0)t} & \text{si } w \neq 0 \\ t & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

y si $x \in R(E_0)$, además

$$\|u(t)\| \leq ke^{wt}\|x\|_{[R(E_o)]}, \qquad t \geq 0. \tag{2.10}$$

Demostración:

Inmediatamente por el Teorema 2.3, así como su prueba, se muestran los resultados requeridos, excepto la estimación (2.10).

Sea $\lambda > \max(w,t)$. Al multiplicar (2.4) por $e^{-\lambda t}$

$$e^{-\lambda t}u(t) \quad = \quad e^{-\lambda t}x \quad + \quad \int_0^t e^{-\lambda t}E(s)y_o ds\,,$$

luego tomando transformadas de Laplace

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)dt \quad &= \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}xdt \quad + \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)y_o dsdt \\ &= \quad \lambda^{-1}x \quad + \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)y_o dsdt.\end{aligned}$$

Calculando mediante integración por partes, como en el Teorema 2.4 se verifica que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t E(s)y_o dsdt \quad = \quad \lambda^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y_o dt\,.$$

Así

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)dt \quad = \quad \lambda^{-1}x \quad + \quad \lambda^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(s)y_o ds\,.$$

Pero del Teorema 2.4 , se sabe que

$$(\lambda - A)^{-1}E_o y \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)ydt, \qquad y\in Y \quad , \quad \lambda \quad > \quad a,$$

y por consiguiente

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)dt \quad = \quad \lambda^{-1}x \quad + \quad \lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}E_o y_o. \tag{2.11}$$

Obsérvese que $E_0 y_0 = Ax$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)dt &= \lambda^{-1}x + \lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}Ax \\
&= \frac{x}{\lambda} + \frac{Ax}{\lambda(\lambda - A)} \\
&= \frac{\lambda x - Ax + Ax}{\lambda(\lambda - A)} \\
&= \frac{\lambda x}{\lambda(\lambda - A)} \\
&= \frac{x}{(\lambda - A)} \\
&= (\lambda - A)^{-1}x.
\end{aligned}$$

Cuando $x \in R(E_0)$, si se toma un $y_1 \in Y$ tal que $E_0 y_1 = x$, entonces por el Teorema 2.4 para $\lambda > a$,

$$(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}E_0 y_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y_1 dt.$$

Por consiguiente, de (2.11) y el Teorema de Unicidad para Transformadas de Laplace (Teorema 1.9), se tiene que $u(t) \equiv E(t)y_1$. Ahora (2.6) se sigue de la arbitrariedad de y_1.□

El próximo teorema es una caracterización de una familia U_0 de unicidad $O(e^{wt})$ para A en términos de transformadas de Laplace.

Teorema 2.6.

Sea $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ una familia fuertemente continua de operadores en $L(X)$ tal que

$$\|U(t)\| \leq ke^{wt} \quad , \quad k \text{ una constante, } t\geq 0 \text{ para algún } w\geq 0.$$

Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

a. $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia U_0 de unicidad para A.

b. Para $\lambda > w$,

$$U_0x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)(\lambda - A)xdt, \qquad x\in D(A).$$

Demostración:

Sea $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ una familia U_0 de unicidad para A. Luego se verifica (2.2). Si se multiplica (2.2) por $e^{-\lambda t}$ se obtiene que

$$e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axds = e^{-\lambda t}U(t)x - e^{-\lambda t}U_0x.$$

Para $\lambda > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_0xdt$$

pero como

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_0xdt &= U_0x\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \\ &= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}U_0x\Big|_o^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda}U_0x,\end{aligned}$$

entonces

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt \quad - \quad \frac{1}{\lambda}U_0x.$$

Ahora se multiplicará toda la expresión por λ

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt \quad = \quad \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt \quad - \quad U_0x$$

y al despejar U_0x se obtiene que

$$(2.12) \qquad U_0x \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)\lambda xdt \quad - \quad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt.$$

Calculemos $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt$ mediante integración por partes. Para ello se tomará

$$u = \int_0^t U(s)Axds \qquad \text{y} \qquad dv = \lambda e^{-\lambda t}dt,$$

luego

$$du = U(t)Axdt \qquad \text{y} \qquad v = -e^{-\lambda t}.$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt \quad = \quad -e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axds\,|_0^\infty \quad + \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Axdt.$$

Debido a $\|U(t)\| \;\leq\; ke^{wt}$, $t \geq 0$, k una constante, entonces

$$-e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axds\,|_0^\infty \qquad \to \quad 0$$

ya que

$$
\begin{aligned}
\left\| -e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axds \right\| &\leq \left(-e^{-\lambda t}\right)\left(\int_0^t \|U(s)\|ds\right)\|Ax\| \\
&\leq k\|Ax\|\left(-e^{-\lambda t}\right)\int_0^t e^{ws}ds \\
&\leq k\left(-e^{-\lambda t}\right)\|Ax\|\frac{e^{ws}}{w}\Big]_0^t \\
&\leq -\frac{k\|Ax\|e^{-\lambda t}(e^{wt}-1)}{w} \qquad \to \quad 0.
\end{aligned}
$$

Así

$$
(2.13) \qquad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt \;=\; \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Axdt.
$$

De (2.12) y (2.13) se observa que

$$
U_0x \;=\; \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)\lambda xdt \;-\; \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Axdt
$$

y por consiguiente

$$
U_0x \;=\; \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)(\lambda - A)xdt.
$$

Recíprocamente supongamos que para $x \in D(A)$ y $\lambda > w$ se tiene que:

$$
U_0x \;=\; \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)(\lambda - A)xdt, \qquad x \in D(A).
$$

Es claro que

$$
\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(U(t)x - U_0x\right)dt \;=\; \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt \;-\; \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_0xdt,
$$

pero como $\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_0xdt \;=\; U_0x$, entonces

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(U(t)x - U_0x)dt \quad = \quad \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt \quad - \quad U_0x.$$

Además

$$U_0x \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)(\lambda - A)xdt.$$

Luego

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(U(t)x - U_0x)dt &= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)(\lambda - A)xdt \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt - \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Axdt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Axdt.\end{aligned}$$

Esto, junto con (2.13), da por resultado

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(U(t)x - U_0x)dt \quad = \quad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t U(s)Axdsdt$$

y por el Teorema de Unicidad para Transformadas de Laplace (Teorema 1.9) se observa que (2.2) se satisface y por ende $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia U_0 de unicidad para A.□

Observación:

Cuando $X = Y$, E_0 es inyectiva y $E_0 A \subset AE_0$, es evidente que $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ en el Teorema 2.4 es también una familia E_0 de unicidad exponencialmente acotada para A.

Observación:

Del Ejemplo 2.2, se observa el buen comportamiento de $D_{E_0}(A)$. Sólo se dará énfasis en esto cuando $X = Y$ hace que $D(A)$ tenga sentido. Ahora, aclararemos la relación entre $D_{E_0}(A)$ y $E_0 D(A)$ en el caso $X = Y$. No es difícil de ver que

$$E_0 D(A) \subset D_{E_0}(A) \cap R(E_0),$$

mientras la inclusión opuesta es verdadera si y sólo si $\{x;\ AE_0 x \in R(E_0)\} \subset D(A)$; es decir que

$$E_0 D(A) = D_{E_0}(A) \tag{2.14}$$

si A es una aplicación uno a uno de $D(A)$ sobre X.

Los siguientes dos simples contraejemplos indican que la igualdad (2.14) puede fallar si A no es injectiva o suryectiva.

Ejemplo 2.3:

Sean X un espacio de Banach de dimensión infinita, y A, cualquier operador lineal en X, suryectivo pero no inyectivo. Sea $E_0 \equiv 0$ en X. Entonces

$$E_0 A \subset AE_0, \quad E_0 D(A) = \{0\},$$

$$D_{E_0}(A) = \{x \in X;\ \ Ax = 0\} \neq \{0\}.$$

Ejemplo 2.4:

Sea $X = l^2$ el conjunto de todas las sucesiones $u = \{u_m\}_{m \in N}$ de números complejos con

$$\|\{u_m\}\| \coloneqq \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|^2 < \infty.$$

Sean A, E_0 los operadores definidos por

$$A\{u_m\} = \{\tilde{u}_m\}, \quad \text{para toda } \{u_m\} \in X,$$

$$E_o\{u_m\} = \{\bar{u}_m\}, \quad \text{para toda } \{u_m\} \in X,$$

donde $\tilde{u}_1 = u_1$, $\bar{u}_1 = 0$ y

$$\tilde{u}_m = \bar{u}_m = \begin{cases} 2 & \text{si } m \text{ es par} \\ u_{i+1} & \text{si } m = 2i+1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

Obsérvese que

$$A\{u_m\} = \{\tilde{u}_m\} = \{u_1, 0, u_2, 0, u_3, 0, u_4, 0, \ldots\}, \quad \text{para toda } \{u_m\} \in X,$$

y

$$E_o\{u_m\} = \{\bar{u}_m\} = \{0, 0, u_2, 0, u_3, 0, u_4, 0, \ldots\}, \quad \text{para toda } \{u_m\} \in X.$$

Claramente A, $E_0 \in L(X)$, A es inyectiva pero no suryectiva. Además

$$E_0 A = AE_0 = \{0,0,0,0,u_2,0,0,u_3,0,0,u_4,0,0,\ldots\}$$

y

$$D_{E_0}(A) = \{\{v_m\} \in X;\ v_1 = 0\},$$

$$E_0 D(A) = \{\{v_m\} \in X;\ v_1 = v_m = 0 \text{ para cualquier } m \text{ par}\}.$$

2.5 Un Teorema de Interpolación Para las Familias de Existencia.

Teorema 2.7.

Sea $E_0 \in L(Y,X)$, $C \in L(X,Z)$, $\omega \in \mathbb{R}$, y A un operador lineal en X tal que $(a,\infty) \subset \rho(A)$ para algún $a > \max(\omega, 0)$. Supongamos que A tiene una familia E_0 de existencia $O(e^{\omega t})$ de operadores en $L(Y,X)$. Si $CA \subset AC$ y $Z \hookrightarrow X$, entonces $A|_Z$ posee una familia CE_0 de existencia $O(e^{\omega t})$ de operadores en $L(Y,Z)$.

Demostración:

Denotemos por $E(\cdot):[0,\infty) \to L(Y,X)$ la familia E_0 de existencia para A. Entonces por el Teorema 2.4 se tiene que

$$\|E(t)y\|_X \le ke^{wt}\|y\|_Y, \quad k \text{ una constante, } t \ge 0,\ y \in Y,$$

$$(\lambda - A)^{-1} E_o y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E(t) y\,dt, \qquad y \in Y \quad , \quad \lambda > a.$$

Por consiguiente

$$\|CE(t)y\|_Z \leq k\|E(t)y\|_X \leq ke^{wt}\|y\|_Y, \quad y \in Y, \, t \geq 0,$$

y

$$(2.15) \qquad \lambda \to C(\lambda - A)^{-1}E_0 \in LT_w - L(Y,Z).$$

Para cada $\lambda > a$, $x \in X$, se escribe $z_{\lambda,x} := (\lambda - A)^{-1}Cx$. Entonces

$$z_{\lambda,x} = C(\lambda - A)^{-1}x \in R(C) \subset Z$$

y por consiguiente

$$Az_{\lambda,x} = (A - \lambda)z_{\lambda,x} + \lambda z_{\lambda,x} = -Cx + \lambda z_{\lambda,x} \in Z.$$

De donde $z_{\lambda,x} \in D(A|_Z)$, lo que implica que

$$R(C) \subset R(\lambda - A|_Z) \text{ para todo } \lambda > a.$$

Así

$$(\lambda - A|_Z)^{-1}CE_0 = (\lambda - A)^{-1}CE_0 = C(\lambda - A)^{-1}E_0, \, \lambda > a.$$

Esto combinado con (2.15) muestra que

$$\lambda \to (\lambda - A|_Z)^{-1}CE_0 \in LT_w - L(Y,Z).$$

Esto acaba la prueba por el Teorema 2.4.□

TERCER CAPÍTULO

OPERADORES DIFERENCIALES RELACIONADOS A FAMILIAS DE EXISTENCIA.

Sea Ω un conjunto abierto acotado en el espacio euclideano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$. Sea a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ funciones a valores reales que pertenecen a [4] tal que $a_{ij} = a_{ji}$ y la condición del elipticidad siguiente es satisfecha

$$c_1 |\eta_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i \bar{\eta}_j \leq c_2 |\eta|^2, \qquad \eta \in \mathbb{C}^n, \text{ casi en todas partes en } \Omega,$$

para algunos c_1, $c_2 > 0$. Sea

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)}$$

la forma cuadrática simétrica no negativa a de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (respectivamente $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$) a $\mathbb{C}$. La forma corresponde a las condiciones de frontera de Dirichlet (respectivamente condiciones de frontera de Neumann). Se asumirá que $\partial\Omega$ es de clase C^1 cuando la condición de

[4] Los espacios $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ y similares se consideran en el apéndice.

Neumann esta involucrada. A_2 denota el operador autoadjunto asociado y positivo en $L^2(\Omega)$. Es conocido que

$$D\left(A_2^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\right) \subset L^p(\Omega), \qquad 2 \le p \le \infty. \tag{3.1}$$

Sean

$$A_p = A_2|_{L^p(\Omega)}, \qquad 2 < p < \infty,$$

y

$$A_q = A_p^*, \quad 1 < q < 2, \quad p = \frac{q}{q-1}.$$

Entonces para $1 < p < \infty$, $-A_p$ es el generador de un semigrupo holomórfico $T(\cdot)$ de ángulo $\frac{\pi}{2}$ sobre $L^p(\Omega)$.

Teorema 3.1.

Sea $p \in [2,\infty)$. Entonces cada uno de los $\pm iA_p$ tiene una familia de existencia $(\mu + A_2)^{-r}$ uniformemente acotada de operadores $L(L^2(\Omega), L^p(\Omega))$ para todo $r \ge \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$ donde $\mu \in \rho(-A_2)$.

Demostración:

Claramente, se tiene que

$$\lambda \to (\lambda \pm iA_2)^{-1} \in LT_0 - L(L^2(\Omega)), \tag{3.2}$$

dado que iA_2 genera un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios en $L^2(\Omega)$ por el Teorema de Stone (Teorema 2.2). Se observa que

$$\begin{aligned} R\left((\mu + A_2)^{-r}\right) &= D\left((\mu + A_2)^{r}\right) \\ &\subset D\left(A_2^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\right) \\ &\subset L^p(\Omega) \end{aligned}$$

por (3.1). Se sigue que $(\mu + A_2)^{-r}$ es un operador cerrado de $L^2(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$ notando que

$$(\mu + A_2)^{-r} \in L(L^2(\Omega))$$

y

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega). \tag{3.3}$$

Así

$$(\mu + A_2)^{-r} \in L(L^2(\Omega), L^p(\Omega)) \tag{3.4}$$

por el Teorema del Grafo Cerrado. Por lo tanto, combinando (3.2) – (3.4) y aplicando el Teorema 2.7 lleva al resultado deseado. La prueba está completa.□

Observación:

La versión del Teorema de Grafo Cerrado utilizada en el Teorema 3.1 es la siguiente: "Sean E y F espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador cerrado. Entonces T es continuo".

Corolario 3.1

Sea $1 < p < \infty$. Entonces cada uno de $\pm iA_p$ genera un semigrupo regularizado uniformemente acotado $(w + A_p)^{-r}$ sobre $L^p(\Omega)$ para todo $r > \frac{n}{2}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$, donde w es bastante grande

$$\left\| T_p(t) \right\| \leq ke^{(w-1)t}.$$

Demostración:

Esta es una consecuencia fácil del Teorema 3.1 para el caso $2 \leq p < \infty$, observando que

$$(w + A_2)^{-r}\Big|_{L^p(\Omega)} = (w + A_p)^{-r}.$$

Sea ahora $1 < p < 2$. Entonces

$$(iA_p)^* = iA_q, \qquad q = \frac{p}{p-1} > 2;$$

cada $\pm iA_p$ genera un semigrupo regularizado uniformemente acotado en $L^q(\Omega)$ por la justificación precedente. Según esto, una apelación al Teorema de la Generación de Semigrupos Regularizados completa la demostración. □

Ejemplo 3.1

Asumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto y acotado. Sea

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = i\Delta u(t,x) \ \text{ en } \ [0,\infty)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ en } \ \Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{ en } \ [0,\infty)\times\partial\Omega \end{cases}$$

el problema de valor inicial y de frontera para la ecuación de Schrödinger en el espacio $L^6(\Omega)$.

Aplicando el Teorema 3.1 para $p=6$ y $A_2 = -\Delta$ con la condición límite de Dirichlet, se obtiene que ese iA_6 tiene una familia de existencia $(\mu + A_2)^{-\frac{1}{2}}$ uniformemente acotada $(\mu \in \rho(-A_2))$, ya que

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Por otro lado, el Corolario 3.1 indica que iA_6 tiene una familia de unicidad $(\mu_0 + A_6)^{-\frac{1}{2}}$ (μ_0 bastante grande). Sea $E_0 = (\mu + A_2)^{-\frac{1}{2}}$. Se tomará $[R(E_0)] = H_0^1(\Omega)$. Mas aún, no es difícil ver

$$D(A_2) \supset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Note el que $R(E_0) \subset L^6(\Omega)$ por (3.1), lo que implica que $D_{E_0}(A_2) = D_{E_0}(A_6)$. Por consiguiente, se concluye por el Teorema 2.5 que para cualquier $\mu_0 \in H_0^3(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, el problema de valor inicial acotado (3.5) admite una única solución $u \in C^1([0,\infty), L^6(\Omega))$ que satisface

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq k\|u_0\|_{[R(E_0)]}, \quad k \text{ una constante} \tag{3.6}$$

$$\leq k\|u_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

Observación.

En el ejemplo anterior, iA_6 también es el generador de un semigrupo regularizado uniformemente acotado $(\mu_0 + A_6)^{-\frac{1}{2}}$ (μ_0 bastante grande) en vista del Corolario 3.1. Todavía el conjunto de datos iniciales dados por el semigrupo regularizado es $(\mu_0 + A_6)^{-\frac{1}{2}} D(A_6)$, el cual es más pequeño que

$D_{E_0}(A_6)$. Más aún la estimación 3.6 es buena, tal que esta dada por los semigrupos regularizados

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq \quad k\|u_0\|_{W^{1,6}(\Omega)}, \ k \text{ una constante.}$$

Ejemplo 3.2.

Asumamos que Ω es de clase C^2. Δ_p define el Laplaciano en $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Es bien conocido que Δ_p con dominio $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo. Sea $p \in [2,\infty)$, $q \in (1, p]$ y sea B un operador diferencial de segundo orden con coeficientes en $C^2(\overline{\Omega})$. Sea

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Delta_q & B \\ 0 & i\Delta_p \end{pmatrix},$$

el operador matriz en $L^q(\Omega) \times L^p(\Omega)$ con dominio

$$D(\mathcal{A}) := \left(W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)\right) \times \left(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right).$$

Está claro que $\mathcal{A}$ es cerrado. Además se obtiene, en vista del Teorema 3.1 y el siguiente teorema, que $\mathcal{A}$ posee una familia de existencia exponencialmente acotada

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I-\Delta_2)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-1} \end{pmatrix}$$

de operadores en $L\big(L^p(\Omega)\times L^2(\Omega), L^q(\Omega)\times L^p(\Omega)\big)$.

Teorema 3.2

Asumamos que A es un operador lineal en X tal que $\lambda - A$ es injectiva para $\lambda > a$ (para algún $a > 0$), y que B es un operador cerrado con $D(B) \supset D(A)$. Supongamos que G es el generador de un semigrupo fuertemente continuo. $T(\cdot)$ en Z, y que A tiene una familia de E_0 existencia exponencialmente acotada de operadores en $L(Y,X)$. Sea $\omega \in \rho(A)$. Entonces el operador matriz en el espacio $Z \times X$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} G & B \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

con

$$D(\mathcal{A}) := D(G) \times D(A),$$

posee una familia existencia C de operadores $W(\cdot)$ en $L(Z\times Y, Z\times X)$. Aquí

$$C := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (\omega - A)^{-1}E_0 \end{pmatrix},$$

y

$$W(t) := \begin{pmatrix} T(t) & \int_0^t T(t-s)B(\omega - A)^{-1}E(s)ds \\ 0 & (\omega - A)^{-1}E(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Demostración:

Por hipotesis, se tiene que para λ grande bastante

$$(\lambda - G)^{-1}z = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)zdt, \quad z \in Z,$$

$$(\lambda - A)^{-1}E_0 y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)ydt, \quad y \in Y,$$

y $B(\omega - A)^{-1} \in L(X, Z)$. Así para λ bastante grande,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_0^t T(t-s)B(\omega - A)^{-1}E(s)yds \right)dt = (\lambda - G)^{-1}B(\omega - A)^{-1}E_0 y, \quad y \in Y.$$

Por consiguiente, se consigue que para $z \in Z$, $y \in Y$ y para λ bastante grande,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} (\lambda - G)^{-1} & (\lambda - G)^{-1}B(\lambda - A)^{-1}(\omega - A)^{-1}E_0 \\ 0 & (\lambda - A)^{-1}(\omega - A)^{-1}E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - \mathcal{A})^{-1}C.$$

Por lo tanto, usando el Teorema 3.1 y notando la cerradura de $\mathcal{A}$ se verifica el resultado deseado.□

ÁPENDICE

I. LOS ESPACIOS DE SOBOLEV

Un espacio de Sobolev $W_p^\ell(\Omega)$ es un espacio de funciones $f = f(x) = f(x_1, \ . \ . \ . \ , x_n)$ sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (usualmente acotado) tal que la p-ésima potencia del valor absoluto de f y de sus derivadas generalizadas de incluso el orden ℓ son integrables. $(1 \leq p \leq \infty)$.

La norma de una función $f \in W_p^\ell(\Omega)$ está dada por

(1) $$\|f\|_{W_p^\ell(\Omega)} = \sum_{|k| \leq \ell} \|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)},$$

donde

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \quad f^{(0)} = f,$$

es la derivada parcial generalizada de f de orden $|k| = \sum_{j=1}^{n} k_j$, y

$$\| \ \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p \leq \infty).$$

Cuando $p = \infty$, esta norma es igual al supremo esencial:

$$\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} = ess \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \qquad (p=\infty),$$

es decir, al más grande límite del conjunto de todos los $A \in \mathbb{R}^+$ para los cuales $A < |\varphi(x)|$ sobre un conjunto de medida cero.

El espacio $W_p^\ell(\Omega)$ fue introducido como una aplicación a la teoría de problemas de valor en la frontera por S. L. Sobolev.

$W_p^\ell(\Omega)$ es un espacio de Banach. $W_p^\ell(\Omega)$ es considerado en conjunción con el subespacio lineal $W_{pc}^\ell(\Omega)$ que consiste de las funciones que tienen derivadas parciales de orden l uniformemente continuas sobre Ω. $W_{pc}^\ell(\Omega)$ tiene ventajas sobre $W_p^\ell(\Omega)$, aunque este no es cerrado en la métrica de $W_p^\ell(\Omega)$ y no es un espacio completo. Sin embargo, para una clase grande de dominios (aquellos con una frontera Lipschitziana) el espacio $W_{pc}^\ell(\Omega)$ es denso en $W_p^\ell(\Omega)$ para todo p, $1 \le p < \infty$, es decir, para tales dominios el espacio $W_p^\ell(\Omega)$ adquiere una nueva propiedad en adición a la completación, en que cada función que pertenece a él puede aproximarse arbitrariamente bien en la métrica de $W_p^\ell(\Omega)$ por funciones de $W_{pc}^\ell(\Omega)$.

Algunas veces es conveniente reemplazar la expresión (1) para la norma de $f \in W_p^\ell(\Omega)$ por la siguiente:

$$(2) \qquad \|f\|'_{W_p^\ell(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|k|\le \ell} \left| f^{(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty .$$

La norma (2) es equivalente a la norma (1),

$$c_1\|f\| \le \|f\|' \le c_2\|f\|,$$

donde c_1, c_2 >0 no dependen de f. Cuando $p=2$, (2) es una norma de Hilbert, este hecho se usa ampliamente en las aplicaciones.

La frontera Γ de un dominio acotado Ω se dice Lipschitziana si para cada $x^0 \in \Gamma$ existe un sistema de coordenadas rectangular $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ con origen x^0, de modo que el cubo

$$\Delta = \{\xi : \ |\xi_j| < \delta, \ \ j = 1, \ldots, n\}$$

es tal que la intersección $\Gamma \cap \Delta$ esta descrita por una función $\xi_n = \varphi(\xi')$, con

$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \ \in \ \Delta' = \{|\xi_j| < \delta, \ \ j = 1, \ldots, n-1\},$$

la cual se satisface sobre Δ' (la proyección de Δ sobre el plano $\xi_n = 0$) la condición Lipschitziana

$$|\varphi(\xi_1') - \varphi(\xi_2')| \ \le \ M|\xi_1' - \xi_2'|, \quad \xi_1', \xi_2' \in \Delta'$$

donde la constante M no depende de los puntos ξ_1', ξ_2', y $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2$.

Para un dominio con una frontera Lipschitziana, (1) es equivalente a lo siguiente:

$$\|f\|_{W_p^\ell(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|'_{W_p^\ell(\Omega)},$$

donde

$$\|f\|'_{W_p^\ell(\Omega)} = \sum_{|k|=\ell} \left\|f^{(k)}\right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Las clases $W_p^1(\Omega)$ y $W_p^\ell(\Omega)$ pueden ser generalizadas al caso de fracciones ℓ, o vectores $1 = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ con componentes fraccionarios ℓ_j.

El espacio $W_p^\ell(\Omega)$ puede también ser definido para enteros no negativos ℓ. Estos elementos son usualmente funciones generalizadas, es decir, funcionales lineales (f, ϕ) sobre funciones infinitamente diferenciables ϕ con un soporte compacto en Ω.

Por definición, una función generalizada f pertenece a la clase $W_p^{-\ell}(\Omega)$ $(\ell = 1,\ 2, \ldots)$ si

$$\|f\|_{W_p^{-\ell}(\Omega)} = \sup(f, \varphi)$$

es finito, donde el supremo es tomado sobre todas las funciones $\varphi \in W_q^\ell(\Omega)$, con norma a lo sumo uno $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Las funciones $f \in W_p^{-\ell}(\Omega)$ forman el espacio adjunto del espacio de Banach $W_q^\ell(\Omega)$.

II. TEOREMAS DE INMERSIÓN

Los teoremas acerca de un tipo de problemas involucrados en el estudio de desigualdades entre las normas de una misma función en clases diferentes (espacios normados). Uno está normalmente interesado con dos clases M y M_1, donde M es una parte de M_1 ($M \subset M_1$), tal que la desigualdad

$$\|f\|_{M_1} \leq C\|f\|_M$$

se satisface para todo $f \in M$, donde C es una constante la cual es independiente de f, y $\|\cdot\|_M$, $\|\cdot\|_{M_1}$ son las normas de M y M_1, respectivamente. Bajo esas condiciones uno habla de una inmersión de M en M_1 o uno dice que M esta inmerso en M_1 y escribimos $M \to M_1$.

Para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$: Si $1 \leq m \leq n$, $1 < p < q < \infty$, $0 \leq k = l - n/p + m/q$, la siguiente inmersión es válida:

(1) $$W_p^{\ell}(\mathbb{R}^n) \to W_q^{[k]}(\mathbb{R}^m),$$

donde $[k]$ es la parte entera de k.

ÁPENDICE

Si $m<n$, esto significa que una función $f \in W_p^{\ell}(\mathbb{R}^n)$ tiene una traza sobre cualquier hiperplano $\mathbb{R}^m$ de dimensión m,

$$f\big|_{R^m} = \varphi \in W_q^{[k]}(\mathbb{R}^m)$$

y

$$\|f\|_{W_q^{[k]}(R^m)} \leq C\|f\|_{W_p^{\ell}(R^n)}$$

donde C no depende de f.

Una función f definida sobre $\mathbb{R}^n$ tiene una traza en $\mathbb{R}^m$, donde $\mathbb{R}^m$ es un subespacio coordenado m- dimensional de puntos $x=(x_1,\ldots,x_m,\ x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0)$ con $x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0$ fijos, si f puede modificarse en algún conjunto n- dimensional de medida cero, de manera que

(2) $$\left\| f(x_1,\ldots,x_m,\ x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0) - f(x_1,\ldots,x_m,\ x_{m+1},\ldots,x_n) \right\|_{L_p(R^m)} \to 0,$$

$$x_j \to x_j^0 \quad (j=m+1,\ldots,n),$$

se verifica para la función modificada (que se denota de nuevo por f).

Si M es un conjunto de funciones f definidas en $\mathbb{R}^n$, el problema de describir las propiedades de las trazas de esas funciones sobre un subespacio $\mathbb{R}^m$ $(1\leq m<n)$ se llama el problema de trazas para la clase M.

Una función f pertenece a la clase $H_p^r(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, si $f \in L_p(\Omega)$ y si para un arbitrario $j = 1, \ldots, m$ una derivada parcial generalizada

(3) $$D_j^{r_j} f = \frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}}$$

existe y satisface la desigualdad

(4) $$\left\| \Delta_{jh}^2 \left(D_j^{r_j} f \right) \right\|_{L_p(\Omega_{2h}')} \leq M \left| h \right|^{\alpha_j},$$

donde Δ_{jh}^2 denota el operador segunda diferencia de la función con respecto a la variable x_j, con paso h, y M es una constante independiente de h.

La clase $H_p^r(\Omega)$ es un espacio de Banach con norma

$$\|f\|_{H_p^r(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + M_f,$$

donde M_f es una constante más pequeña que M para la cual la desigualdad (4) se satisface. Si $r_1 = \cdots = r_n = r$, la respectiva clase es denotada por H_p^r. Si l es un entero, la clase H_p^ℓ esta cerca de las clases de Sobolev W_p^ℓ con una exactitud de $\varepsilon > 0$, en el sentido que

(5) $$H_p^{\ell+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \to W_p^\ell(\mathbb{R}^n) \to H_p^{\ell-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Los teoremas de Nikol'skii son válidos:

(6) $$H_p^r(\mathbb{R}^n) \to H_q^\rho(\mathbb{R}^m),$$

donde

$$1 \le p \le q \le \infty, \;\; 1 \le m \le n, \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m),$$

$$\rho_j = kr_j \quad (j = 1, \ldots, m),$$

$$k = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} - \frac{1}{p_j} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{r_j} > 0\,;$$

(7) $$H_p^r(\mathbb{R}^n) \to\leftarrow H_q^\rho(\mathbb{R}^m),$$

donde $1 \le p \le \infty$, $1 \le m \le n$, $\rho_j = kr_j \quad j = 1, \ldots, m$,

$$k = 1 - \frac{1}{p_j} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{r_j} > 0\,.$$

La inmersión (7) con la flecha superior también se da por un caso especial de (6), cuando $p = q$. Se declara que una función $f \in H_p^r(\mathbb{R}^n)$ tiene una traza $f|_{R^n} = \phi$ sobre $\mathbb{R}^m$ y que también

(8) $$\|\phi\|_{H_p^\rho(R^m)} \;\le\; C\|f\|_{H_p^r(R^n)}$$

donde C es independiente de f. La declaración inversa, simbolizada por la flecha de abajo, también es cierta, y debe entenderse en el sentido siguiente: Cualquier función $\varphi \in H_p^r(\mathbb{R}^m)$ definida sobre $\mathbb{R}^m$ puede extenderse a un espacio entero $\mathbb{R}^n$ para que la función resultante $f(x)$ (con traza en $\mathbb{R}^m$ igual a ϕ) pertenece a $H_p^r(\mathbb{R}^n)$ y satisface la desigualdad (inversa a (8))

$$\|f\|_{H_p^r(R^n)} \leq C\|\phi\|_{H_p^\rho(R^m)},$$

donde C es no depende de ϕ.

Las inmersiones mutuamente inversas (7) representan una solución completa al problema de trazas para clases H, en términos de esas clases.

La inmersión (6) es transitiva, lo cual significa que la transición

(9) $$H_p^r(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{\rho'}(\mathbb{R}^m) \to H_{p''}^{\rho''}(\mathbb{R}^m).$$

de la primera clase en la cadena (9) a la segunda, y entonces de la segunda a la tercera, donde los parámetros ρ', ρ'' son computadas por las fórmulas en (9), pueden reemplazarse por una transición directa de la primera a la tercera clase, ρ'' es calculada por las mismas fórmulas.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALVAREZ, F., PEYPONGUET, J. Introducción a la Teoría de Semigrupos.
Dim.uchile.cl/falvarez/notes/semigroups03.pdf

2. AMINI, M. On Generalized Stone' Theorem.
arxiv.org/abs/math/0205252.

3. ANONIMO. One Parameter Semigroups.
www.bis.uni-oldenburg.de/publikationen

4. ANONIMO. Stone' Theorem On One Parameter Unitary Groups.
http:// en.wikipedia.org/wiki/Stone%27s_theorem_on_one-parameter_unitary_groups

5. BUSE, C., DRAGOMIR, S. S. A New Proof for a Rolewicz's Type Theorem: An Evolution Semigroup Approach.
www.emis.de/journals/EJDE/2001/45/buse.pdf

6. CHILARESCU, C., PREDA, C., Some Financial Applications of the Evolution Partial Diferential Equations: a Dinamical System Approach.
www.ime2004rome.com/fullpapers/ChilarescuPAPE.pdf.

7. DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. Linear Operators. Interscience. New York, 1958.

8. DRIVER, B. K. Analysis Tools with Applications.
euclid.ucsd.edu/~driver/231-02-03/.../PDE-Anal-Book/analpde1-2p.pdf

9. KLUWER ACADEMIC PUBLISHER. Encycloapedia of Mathematics. Boston, 1995.

10.KREYSIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. New York.

11.KUNSTMANN, P. C. Regularization of Semigroups that are Strongly Continuous for $t > 0$.
ams.org/proc/1998-126-09/S0002-9939-98-04636-X.pdf

12.LARSSON, S. Preservation of Strong Stability Associated with Analytic Semigroups.
www.math.chalmers.se/~stig/papers/25.pdf.

13.PENG, J., CHUNG, J. K. Laplace Transforms and Generators of Semigroups of Operators.
ams.org/proc/1998-126-08/S0002-9939-98-04603-6.pdf

14.RUDIN, W. Functional Analysis. Segunda Edición. McGrawHill. 1991.

15.WANG, S. Properties of Subgenerators of C-Regularized Semigroups.
ams.org/proc/1998-126-09/S0002-9939-98-04145-8.pdf

16.XIAO, T. J., LIANG, J. Differential Operators and C-Wellposedness of Complete Second Order Abstract Cauchy Problems.
nyjm.albany.edu:8000/PacJ/1998/186-1-10.pdf

17.XIAO, T. J., LIANG, J. Existence Families and Diferential Operators.
citeseer.ist.psu.edu/430520.html