UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

# REDUCCION DE LA DIMENSION EN LA PROGRAMACION DINAMICA DISCRETA

Por:

MAYRA TREJOS DE LEBRIJA

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática

Panamá, República de Panamá

1 9 8 6

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Director de Tesis ______________________
Dr. JOSE DEL R. GARRIDO

Miembro del Jurado ______________________
Dr. CARLOS SANCHEZ

Miembro del Jurado ______________________
Dr. ROGELIO ROSAS

Fecha: 7 de marzo de 1986

Ciudad Universitaria "Octavio Méndez Pereira"
ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA. R. DE P.

# DEDICATORIA

Entre las grandes satisfacciones que tenemos en la vida hay pocas comparables a la que se obtiene al concluir un capítulo anhelado, una nueva etapa de superación profesional.

Dedico este trabajo a mi esposo Eduardo y a mis hijos Eduardo, Analinnette y Edwin, con ellos comparto este momento de alegría ya que con su cariño, animosidad y paciencia fueron fuente de energía y fortaleza para lograr el éxito.

A mis padres Cosme y Consuelo y a mis hermanos José y Jaime quienes se mantuvieron espiritualmente siempre cerca de mi.

Mayra,

AGRADECIMIENTO

Quiero dejar muestra perenne de gratitud al Dr. JOSE DEL ROSARIO GARRIDO, director de tesis, quien con dedicación, juicios críticos y gran madurez profesional, contribuyó en todo momento en la realización del presente trabajo.

A mis profesores y compañeros de estudio, en especial a mi amiga LITA, quien con su gran capacidad, compañerismo y espíritu de trabajo me alentó constantemente.

Al amigo OSCAR MARTINEZ, que tan amablemente aportó parte de su valioso tiempo para la culminación de este trabajo.

A las autoridades universitarias por la oportunidad que me brindaron para realizar mis estudios. A la Sra. HILMA VILLA por su colaboración mecanográfica.

C O N T E N I D O

# INTRODUCCION

Uno de los problemas críticos en la aplicación de la Matemática consiste en la dificultad de realizar los cálculos involucrados en la solución de problemas concretos. En este sentido un algoritmo lógicamente correcto y de gran precisión teórica puede resultar inoperante si el volúmen de información que es necesario procesar sobrepasa las posibilidades operativas, pues uno de los mayores obstáculos en el uso de las computadoras es la limitación de la capacidad de memoria.

Un problema típico de la matemática aplicada es el de la búsqueda de soluciones óptimas para una función objetivo, sujeta a restricciones.

Generalmente, la resolución de estos problemas requiere de cálculos exahustivos que no siempre son posibles de realizar. Dentro de este panorama surge una alternativa que se basa en la posibilidad de descomponer el problema en una serie de subproblemas en los que intervienen menos variables con la finalidad de hacer más accesibles los cálculos.

En este trabajo, el proceso modelado está enmarcado dentro de esta visión; es un proceso secuencial que se desarrolla en etapas donde la función objetivo depende del estado en que se encuentra el sistema y la decisión adoptada en cada etapa. Este proceso se basa en el conocido Principio de Optimalidad de Richard Bellman, que permite descomponer problemas sumamente complejos en una serie de subproblemas más simples, lo cual facilita la realización de los cálculos del valor óptimo de la función en cualquiera de las etapas del proceso.

Este principio constituye el fundamento de una joven disciplina cuyo desarrollo se ha incrementado notablemente en la última década, la programación dinámica.

Nuestro trabajo es un estudio de la estructuración teórica de los tipos de análisis necesarios para la búsqueda de una "política óptima" y de una alternativa para la reducción de la dimensión, en un problema que exige un proceso secuencial de toma de decisiones.

En el primero y segundo capítulo, se introducen conceptos fundamentales de la programación dinámica, la descomposición prospectiva y/o retrospectiva de las funciones objetivos para calcular el óptimo con la ayuda de los respectivos análisis y la utilización del principio de optimalidad.

En el tercero y último capítulo se analiza el problema de la reducción de la dimensión de las variables (de decisión y estado), cuando estas no son unidimensionales. Luego se pone en evidencia la ventaja de esa reducción para la resolución de problemas con alto grado de complejidad que se plantean en la programación dinámica.

En cuanto a la metodología utilizada, el Seminario de Tópicos (III Semestre) y el Seminario de Tesis (IV Semestre) permitieron enriquecer nuestra visión de la matemática aplicada pudiendo así seleccionar este tema. Una etapa de familiarización con la bibliografía relacionada con nuestro interés nos permitió determinar los lineamientos generales de este trabajo y con posterioridad nos dedicamos a formalizar y ultimar los distintos aspectos teóricos necesarios para su completa terminación. El otro aspecto de la metodología del trabajo fue cubierto con las regulares discusiones con el Director de Tesis.

# CAPITULO I

## EL PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE RICHARD BELLMAN.

## 1.1.- Política óptima en un Sistema Controlable.

El proceso secuencial de la toma de decisiones aparece en la conducción de un sistema controlable. Lo esencial en Programación Dinámica radica en el hecho de que el proceso que ella modela está dado por etapas y que para pasar de una etapa a la otra, es necesario tomar una decisión "óptima" del conjunto de decisiones factibles.

Definición 1.1.1.- Se llamará coordenadas de fase del sistema S a los parámetros numéricos que caracterizan los estados del sistema.

En lo sucesivo se supondrá que todos los estados del sistema poseen el mismo número de coordenadas de fase; y cada estado se identificará con un vector $x=(x^1,...,x^m)$, donde $x^1,...,x^m$ son las coordenadas de fase que lo caracterizan. En los sistemas concretos los estados admisibles están determinados por restricciones que deben cumplir las coordenadas de fase del sistema.

Considerando dos momentos $t_o$ y $t_1$, $t_o < t_1$ y un sistema S, se dirá que el sistema S evoluciona en el tiempo, si para cada $t \in [t_o, t_1]$ existe un conjunto no vacío $X_t \subset \mathbb{R}^m$ llamado el conjunto de los estados admisibles al instante t.

Independientemente del tiempo, algunas veces es necesario considerar la evolución del sistema a partir de un estado $x_o$, de manera que el conjunto de los estados hacia los cuales puede evolucionar el sistema a partir de $x_o$ se indicará con $X_{x_o}$.

<u>Definición 1.1.2.</u> Sea S un sistema que evoluciona en el intervalo $[t_o, t_1]$ tal que para $t \in [t_o, t_1]$, S toma un determinado estado $x(t)=(x^1(t),\dots,x^m(t)) \in X_t$, la aplicación x definida como sigue:

$$x : [t_o, t_1] \longrightarrow \bigcup_{t \in [t_o, t_1]} X_t$$

$$t \longmapsto x(t)$$

se llamará <u>trayectoria de fase</u> del sistema.

De esta definición se desprende que una trayectoria de fase determina la evolución del sistema en el tiempo.

En adelante se denotará el estado $x(t_i)$ en la forma simplifacada $x_i$.

En un sistema controlable es posible modificar el estado adoptando decisiones cuyo efecto será hacer evolucionar el sistema del estado en que se encuentra a un nuevo estado. Las decisiones se caracterizan, como en el caso de los estados, por una serie de valores reales llamados variables de decisión y están sujetas a restricciones que deben respetarse.

Si se supone que el número de variables de decisión $r$ es el mismo para cualquier estado del sistema se puede entonces identificar cada decisión con un vector $y=(y^1,\dots,y^r)$.

<u>Definición 1.1.3</u>.- Dado $t_o,t_1 \in \mathbb{R}^+$, $t_o < t_1$, sea $Y_t \neq \emptyset$ el conjunto de decisiones posibles en el instante $t \in [t_o,t_1]$. Se llamará <u>política</u> a una aplicación

$$y : [t_o,t_1] \longrightarrow \bigcup_{t\in[t_o,t_1]} Y_t$$

tal que $y(t) \in Y_t$ para todo $t \in [t_o,t_1]$.

Por <u>subpolítica</u> de una política $y: [t_o,t_1] \longrightarrow \bigcup_{t\in[t_o,t_1]} Y_t$ se entenderá la restricción de la aplicación $y$ a un intervalo $[t_2,t_3]$ con $t_o \leqslant t_2 < t_3 \leqslant t_1$.

Como en el caso de los estados de un sistema, $Y_{x_o}$ indicará el conjunto de las políticas admisibles a partir de un estado dado $x_o$.

Nuestra atención se limitará a sistemas que evolucionan en el tiempo y para los que es válida la siguiente hipótesis.

Hipótesis 1.

Dado $x_o$ existe un conjunto de políticas $\mathcal{Y}_{x_o}$ tal que para toda $y \in \mathcal{Y}_{x_o}$, se puede determinar de modo único una trayectoria de fase x que caracteriza la evolución del sistema en un intervalo de tiempo $[t_o, t_1]$

Es decir, la evolución del sistema a partir del estado inicial $x_o$, es función de la política seleccionada. Esta relación entre el estado inicial y política dependerá en cada caso concreto de la estructura interna del sistema.

Para que el proceso secuencial de decisiones esté completamente definido, es necesario introducir criterios que permitan seleccionar, en cada instante la política adecuada. Un criterio utilizado con frecuencia consiste en asignar una función objetivo en x e y, F(x,y) que pueda ser calculada y seleccionar entonces como política, aquella que optimiza esta función. Precisando, "entre todas las políticas, que hacen evolucionar el sistema del estado $x_o$ al estado $x_1$, se selecciona aquella política $y^*$ para la cual la función F alcanza su valor óptimo".

Si $x^*$ es la trayectoria de fase que corresponde a la política $y^*$ (hipótesis 1) se tendrá que :

$F(x,y) \leqslant F(x^*,y^*)$ para toda y, en el caso de maximización ó

$F(x^*,y^*) \leqslant F(x,y)$, para toda y, en el caso de minimización.

La política $y^*$ se denominará <u>política óptima</u>.

1.2.- <u>El Teorema de Optimalidad</u>.

La propiedad fundamental que se utiliza para resolver diversos problemas mediante métodos de Programación Dinámica es el "principio de optimalidad" de Richard Bellman el cual establece que para un sistema controlable S "toda subpolítica de una política óptima es a su vez óptima".

Utilizando las notaciones introducidas, si la política y hace evolucionar el sistema de un estado inicial $x_o$ al estado final $x_1$ pasando por los estados intermedios $x_2$ y $x_3$ se puede formular el principio de optimalidad como sigue:

<u>Teorema de Optimalidad</u>.

Sea $\hat{y}: [t_o, t_1] \longrightarrow \bigcup_{t \in [t_o, t_1]} Y_t$ una política óptima que hace evolucionar al sistema del estado $x_o$ al estado $x_1$. Toda subpolítica $\bar{y}$ de $\hat{y}$ definida en $[t_2, t_3]$ con $t_o \leqslant t_2 < t_3 \leqslant t_1$ es también óptima para la evolución del sistema del estado $x_2$ a $x_3$.

Demostración: Sea $\hat{y}$ una política óptima definida en $[t_o, t_1]$. Supóngase que la subpolítica $\bar{y}$ de $\hat{y}$ definida en $[t_2, t_3]$, con $t_o \leqslant t_2 < t_3 \leqslant t_1$, no es óptima para la evolución del sistema del estado $x_2$ a $x_3$, entonces existe una política $y^*$ mejor que la política $\bar{y}$ en el mismo intervalo. En este caso la política y' definida en $[t_o, t_1]$, de la siguiente manera:

$$y'(t) = \begin{cases} y^*(t) & \text{si} \quad t \in [t_2, t_3] \\ \hat{y}\,(t) & \text{si} \quad t \notin [t_2, t_3] \end{cases}$$

es mejor que $\hat{y}\,(t)$ lo cual es una contradicción.

Este teorema garantiza que los algoritmos que diseñan políticas óptimas para un proceso que se desarrolla en etapas permiten obtener una trayectoria del proceso que es en cualquier intervalo, la mejor posible. Esta formulación de la política es la que mejor satisface los objetivos del proceso.

# CAPITULO II

# PROCESOS SECUENCIALES DE TOMA DE DECISIONES

Introducción.

En muchos problemas prácticos de optimización intervienen factores aleatorios que modifican los estados independientemente de nuestra voluntad; este estudio se limitará, a una serie amplia de problemas determinísticos, en los cuales, dado un estado fijo x, es posible hacer evolucionar el sistema en términos de las políticas escogidas (hipótesis 1). Aún dentro de esta restricción se considerarán sólo problemas en que el número de etapas del proceso, u horizonte del problema, es finito.

## 2.1.- Análisis prospectivo.

Considérese un sistema cuyo estado en cada momento $t$ está definido por un punto $x(t)$ en un espacio de dimensión $m$, que puede controlarse mediante un vector $y(t)$ de modo que $x(t)$ pueda calcularse a través de $y(t)$ (hipótesis 1).

Se denotará con $Y_t(x)$ el conjunto de decisiones que pueden ser adoptadas en el momento (ó etapa) $t$, si el sistema se fija en el estado $x \in X$, donde $X$ representa el conjunto de estados posibles asumiendo el parámetro $t$ discreto, y con valores en un conjunto finito de números reales.

Siguiendo las notaciones introducidas en la definición 1.1.3, si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los valores sucesivos que puede adoptar el parámetro $t$, los correspondientes conjuntos de decisiones se denotarán respectivamente con, $Y_{t_1}, Y_{t_2} \ldots, Y_{t_n}$, notación que se simplificará en la forma siguiente:

$$Y_i = Y_{t_i} \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (2.1)$$

Un método recursivo utilizado para resolver los problemas enmarcados en este capítulo se describe del modo siguiente:

Si un sistema se sitúa inicialmente en el estado $x_o \in X$, entonces, en el momento $n=1$, se adopta la decisión

$y_1 \in Y_1(x_o)$ que tiene como efecto el paso del sistema a otro estado $x_1 \in X$.

En general, en todo momento i, $1 \leqslant i \leqslant n$, se adopta la decisión $y_i \in Y_i(x_{i-1})$ que hace que el sistema evolucione del estado $x_{i-1}$ a otro estado $x_i$.

Se ha supuesto que el sistema evoluciona dependiendo del estado en que se encuentra y de la decisión asumida, es decir, que si se encuentra en el estado x, al tomar la decisión y, el sistema pasará a un nuevo estado x'. Esto se expresa con relaciones del tipo $x' = \varphi(x,y)$ con $y \in Y(x)$ (2.2)

Para el caso en cuestión, se introducirá una notación con la que se pone de manifiesto la etapa del proceso:

$$x_i = \varphi_i(x_{i-1}, y_i) \qquad y_i \in Y_i(x_{i-1}) \qquad (2.3)$$

con i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Esto indica que las funciones de paso $\varphi_i$ de un estado al siguiente pueden ser distintas en cada etapa.

Se denotará con $u_i(x_i, y_i)$, la utilidad asociada a la etapa i, $1 \leqslant i \leqslant n$, si el sistema se sitúa en el estado $x_i$ y la decisión adoptada es $y_i$.

La función objetivo $f_n$ que corresponde a un proceso secuencial de decisión con horizonte n, será una función de las utilidades parciales $u_i(x_i,y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ que con frecuencia se define aditivamente

$$f_n(u_1(x_1,y_1),\ldots,u_n(x_n,y_n)) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i,y_i) \quad (2.4)$$

Se puede también describir el proceso para un estado inicial $x_o \in X$ y para una política $y=(y_1,\ldots,y_n)$ fija, en base a los cuales se determina la trayectoria $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, los conjuntos $Y_i(x_{i-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ y la función objetivo. En efecto, con ayuda de la relación (2.3) se determinará una única trayectoria $(x_1,\ldots,x_n)$, que se expresará mediante la siguiente notación:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = \varphi_1(x_o,y_1) = \tilde{\varphi}_1(x_o,y_1) \\
x_2 = \varphi_2(\tilde{\varphi}_1(x_0,y_1),y_2) = \tilde{\varphi}_2(x_o,y_1,y_2) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n = \varphi_n(\tilde{\varphi}_{n-1}(x_o,y_1,\ldots,y_{n-1}),y_n) = \tilde{\varphi}_n(x_o,y_1,\ldots,y_n)
\end{array}\right\} (2.5)$$

Similarmente, para los conjuntos $Y_i(x_{i-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}
Y_1(x_o) = \widetilde{Y}_1(x_o) \\
Y_2(x_1) = Y_2(\widetilde{\varphi}_1(x_o,y_1)) = \widetilde{Y}_2(x_o,y_1) \\
Y_3(x_2) = Y_3(\widetilde{\varphi}_2(x_o,y_1,y_2))=\widetilde{Y}_3(x_o,y_1,y_2) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
Y_n(x_{n-1})= Y_n(\widetilde{\varphi}_{n-1}(x_o,y_1,\ldots,y_{n-1}))=\widetilde{Y}_n(x_o,y_1,\ldots,y_{n-1})
\end{array}\right\} (2.6)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las fórmulas 2.5 las utilidades en cada etapa se escribirán:

$$\left.\begin{array}{l}
u_1(x_1,y_1)=u_1(\widetilde{\varphi}_1(x_o,y_1),y_1)=\widetilde{u}_1(x_o,y_1) \\
u_2(x_2,y_2)=u_2(\widetilde{\varphi}_2(x_o,y_1,y_2),y_2)=\widetilde{u}_2(x_o,y_1,y_2) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
u_n(x_n,y_n)=u_n(\widetilde{\varphi}_n(x_o,y_1,\ldots,y_n),y_n)=\widetilde{u}_n(x_o,y_1,\ldots,y_n)
\end{array}\right\} (2.7)$$

con lo que $f_n$ admite la siguiente representación:

$$f_n(\widetilde{u}_1(x_o,y_1),\ldots,\widetilde{u}_n(x_o,y_1,\ldots,y_n))=\widetilde{f}_n(x_o,y_1,\ldots,) \qquad (2.8)$$

Para efectuar un proceso secuencial de decisiones mediante el análisis prospectivo se formulará el problema de la manera siguiente:

"Entre todas las políticas $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ que hacen que el sistema evolucione de un estado $x_o$ hasta un estado $x_n=\overline{\varphi}_n(x_o,y_1,y_2,\ldots,y_n)$, determinar aquellas para las cuales la función objetivo $f_n$ alcanza su valor óptimo".

Usualmente existe un conjunto de estados iniciales factibles, a partir de los cuales puede iniciarse el proceso. De cada uno de estos estados iniciales, tomando adecuadas decisiones se puede pasar a nuevos estados en la siguiente etapa y así sucesivamente.

Sea $X_{oo}$ el conjunto de los estados iniciales factibles, los estados sucesivos se denotarán en forma recursiva, es decir, si se tiene el conjunto de estados $X_{o,i-1}$ y el conjunto de decisiones y $Y_i(x')$ para cada $x' \in X_{o,i-1}$; entonces el conjunto de los estados sucesivos quedará definido como sigue:

$$X_{oi} = \left\{ x \in X : \exists x' \in X_{o,i-1}, \exists y \in Y_i(x') : x = \varphi_i(x', y) \right\}$$

donde $1 \leqslant i \leqslant n$.

Por simplicidad se escribirá $X_o$ en lugar de $X_{oo}$.

Obsérvese que si $x \in X - X_{oi}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, x es un estado no accesible en el paso i.

Fijado un estado inicial $x_o \in X_o$, una política óptima es siempre de la forma:

$$y_i^* = y_i^*(x_o) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (2.9)$$

Si se toma el estado inicial $x_o^* \in X_o$ y $y^* = (y_1^*(x_o^*), \ldots, y_n^*(x_o^*))$ es una política óptima, el estado alcanzado por el sistema en el paso i estará dado por:

$$x_i^* = \varphi_i(x_{i-1}^*, y_i^*) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (2.10)$$

Se ha visto así un proceso secuencial de toma de decisiones desde el estado inicial $x_o$ hasta el estado final $x_n$. Un análisis de este tipo se llamará <u>análisis prospectivo</u>.

## 2.2.- <u>Análisis retrospectivo</u>.

Otra forma de analizar un proceso secuencial de decisiones es el llamado análisis retrospectivo. Este es el caso en que se quiere diseñar una política que lleve el sistema hasta un estado prefijado.

En este tipo de análisis el estado final $x_n$ del sistema S y el número n de etapas del proceso son fijos. Se denotará por $Y_i(x_i)$ al conjunto de decisiones posibles a partir del estado $x_i$ en la etapa i-ésima, $1 \leqslant i \leqslant n$.

La descripción recursiva del proceso es la siguiente: Dado el estado $x_n$, existe un conjunto de decisiones $Y_n(x_n)$ que hacen evolucionar el sistema a un nuevo estado. Si se toma una decisión $y_n \in Y_n(x_n)$, se supondrá que el estado del sistema es modificado determinísticamente por esta decisión; es decir que se obtendrá un nuevo estado $x_{n-1}$ dado por una relación del tipo

$$x_{n-1} = \tau_n(x_n, y_n) \tag{2.11}$$

Suponiendo que se han tomado i decisiones, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, llevando el sistema hasta un estado $x_{i-1}$, la siguiente decisión $y_{i-1}$ se tomará en el conjunto $Y_{i-1}(x_{i-1})$ y hará pasar el sistema a un nuevo estado $x_{i-2}$ dado por

$$x_{i-2} = \tau_{i-1} (x_{i-1}, y_{i-1}) \tag{2.12}$$

Para que este análisis se pueda llevar a cabo es necesario que para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n$, exista el conjunto de los estados que pueden ser alcanzados tomando decisiones $y_i \in Y_i(x_i)$ y que estos conjuntos sean no vacíos.

Bajo estas hipótesis las caracterizaciones homólogas a las del caso prospectivo son del tenor siguiente:

Sea S un sistema controlable y $x_n$ un estado final fijado. Si $y=(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1)$ es una política admisible para la evolución del sistema, entonces

a) La evolución retrospectiva de S y

b) El conjunto de decisiones $Y_i(x_i)$ en el momento i, para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

quedan completamente determinados en función del estado $x_n$ y la política y.

En efecto, dado $y_n \in Y_n(x_n)$, utilizando la relación

(2.11) se obtiene un estado

$$x_{n-1}=\tau_n(x_n,y_n)=\bar{\bar{\tau}}_n(x_n,y_n)$$

Si se supone que se ha ejecutado la subpolítica$(y_n,\ldots,y_{i+1})$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, entonces como resultado se alcanzará un estado $x_i$, con:

$$x_i=\bar{\bar{\tau}}_{i+1}(x_n,y_n,\ldots,y_{i+1})$$

y el conjunto de decisiones,

$$Y_i(x_i)=\bar{Y}_i(x_n,y_n,\ldots,y_{i+1})$$

en concordancia con la notación utilizada en 2.1. Al tomar la decisión $y_i\in Y_i(x_i)$ el sistema pasará por (2.12), al estado

$$x_{i-1}=\tau_i(x_i,y_i)=\tau_i(\bar{\bar{\tau}}_{i+1}(x_n,y_n,\ldots,y_{i+1}),\ y_i)$$
$$=\bar{\bar{\tau}}_i(x_n,y_n,\ldots,y_i)$$

y el conjunto de decisiones a partir de este estado será:

$$Y_{i-1}(x_{i-1})=Y_{i-1}(\tau_i(x_i,y_i))=Y_{i-1}(\bar{\bar{\tau}}_i(x_n,y_n,\ldots,y_i))$$
$$=\bar{Y}_{i-1}(x_n,y_n,\ldots,y_i)$$

Así pues, las relaciones

$$x_{i-1}=\bar{\bar{\tau}}_i(x_n,y_n,\ldots,y_i)\quad \text{para } 1\leqslant i\leqslant n \quad \text{y}$$

$$Y_{i-1}(x_{i-1})=\overline{Y}_{i-1}(x_n,y_n,\ldots,y_i) \text{ para } 1\leqslant i\leqslant n$$

determinan respectivamente a) y b).

En este mismo contexto se dará a la función objetivo $f_n$ la representación:

$$f_n(u_1(x_1,y_1),\ldots,u_n(x_n,y_n))=\overline{f}_n(x_n,y_n,\ldots,y_1) \qquad (2.13)$$

que se obtiene de manera similar al caso del análisis prospectivo.

El problema central del proceso secuencial de toma de decisiones en este caso se enuncia como sigue:

"Entre todas las políticas $y=(y_n,\ldots,y_1)$ que hacen que el sistema evolucione de un estado final dado $x_n$ hasta un estado inicial $x_o=\overline{\overline{\tau}}_1(x_n,y_n,\ldots,y_1)$, determinar aquellas para las cuales la función objetivo alcanza el óptimo".

Como en el caso prospectivo, el estado final $x_n$ no puede elegirse arbitrariamente; se dispondrá de un conjunto $X_{n,n}$ de los estados posibles para el sistema en el momento final n. Los otros estados, o conjuntos de estados admisibles se darán en forma recursiva como se verá a continuación:

Si se tienen determinados los conjuntos $X_{n,i+1}$ de estados accesibles (retrospectivamente) en la i+1-ésima etapa $0\leqslant i\leqslant n-1$ y los conjuntos de decisiones $Y_{i+1}(x')$, para cada $x' \in X_{n,i+1}$ entonces el conjunto de los estados admisibles en la etapa i quedará definido de la manera siguiente:

$$X_{n,i}=\left\{ x\in X:\ \exists x'\in X_{n,i+1},\ \exists y\in Y_{i+1}(x'):x=\tau_{i+1}(x',y)\right\}$$

con $0\leqslant i\leqslant n-1$

El conjunto $X_{nn}$ se denotará con $X_n$.

Evidentemente que si $x\in X-X_{n,i}$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, entonces x es un estado no accesible en el momento i.

Fijado un estado final $x_n\in X_n$, una política óptima es siempre de la forma:

$$y_i^*=y_i^*(x_n) \qquad 1\leqslant i\leqslant n\ , \qquad x_n\in X_n \tag{2.14}$$

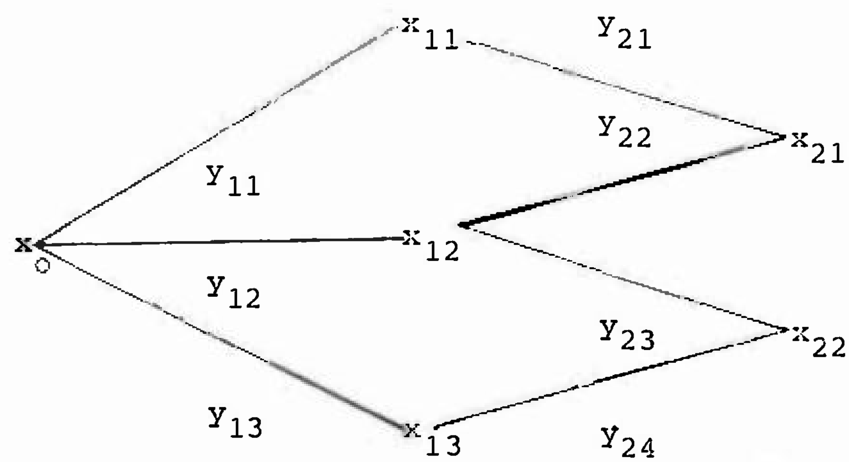
Si se toma el estado final $x_n^*\in X_n$, y la política $y^*=(y_1^*(x_n^*),\ldots,y_n^*(x_n^*))$ es una política óptima, el estado alcanzado por el sistema en el paso i-1, quedará dado por:

$$x_{i-1}^*=\tau_i(x_i^*,y_i^*) \qquad 1\leqslant i\leqslant n \tag{2.15}$$

<u>Observaciones</u>.

1. El conjunto de decisiones posibles $Y_i(x_{i-1})$, para el caso del análisis prospectivo es en general distinto del conjunto $Y_i(x_i)$ en el análisis retrospectivo,

véase el ejemplo siguiente:




$$Y_1(x_o)=\left\{y_{11},y_{12},y_{13}\right\} \quad \neq \quad Y_1(x_{11}) = \left\{y_{11}\right\}$$

(caso prospectivo) (caso retrospectivo)

2. Haciendo abstracción de la observación anterior, la única diferencia entre el análisis prospectivo y el análisis retrospectivo de un proceso secuencial de decisiones consiste en el modo en que es concebida la evolución del sistema. Aunque el análisis prospectivo parece ser más natural, también resulta eficiente el análisis retrospectivo desde el punto de vista del cálculo de una política óptima. En todo caso la elección de uno u otro tipo de análisis depende de la naturaleza del problema.

## 2.3.- Modelo matemático para la determinación de una política óptima.

La determinación de una política óptima en un proceso secuencial de decisiones puede realizarse ya sea con el análisis prospectivo o el retrospectivo. Para el caso prospectivo el problema puede enunciarse como sigue:

Para un estado inicial fijo $x_o^* \in X_o$, determinar una política $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ de modo que

$$\tilde{f}_n(x_o^*, y_1^*, \dots, y_n^*) = \max \tilde{f}_n (x_o^*, y_1, \dots, y_n) \qquad (2.16)$$

donde el máximo se toma con respecto a todas las

$$y_i \in \tilde{Y}_i(x_o^*, y_1, \dots, y_{i-1}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

De manera similar, en el caso retrospectivo, dado un estado final $x_n^* \in X_n$ se trata de determinar una política $y^* = (y_n^*, \dots, y_1^*)$ de modo que

$$\bar{f}_n(x_n^*, y_n^*, \dots, y_1^*) = \max \bar{f}_n(x_n^*, y_n, \dots, y_1) \qquad (2.17)$$

con $y_i \in \bar{Y}_i(x_n^*, y_n, \dots, y_{i+1}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$

Por supuesto que valen las consideraciones análogas en el caso de mínimo.

Los modelos anteriores serán utilizados con las siguientes reformulaciones:

Dado un estado inicial $x_o^* \in X_o$, determinar una política $y^*=(y_1^*,\ldots,y_n^*)$ y una trayectoria $x^* = (x_o^*,\ldots,x_n^*)$ de manera que:

$$f_n(u_1(x_1^*,y_1^*),\ldots,u_n(x_n^*,y_n^*)) =$$

$$= \max_{\substack{y_i \in Y_i(x_{i-1}) \\ 1\leqslant i\leqslant n}} f_n(u_1(x_1,y_1),\ldots,u_n(x_n,y_n)) \qquad (2.18)$$

sujeto a las restricciones

$$x_i=\varphi_i(x_{i-1},y_i) \qquad 1\leqslant i\leqslant n \qquad (2.19)$$

Este máximo se denotará con $h_n(x_o^*)$.

Para el caso retrospectivo, fijado el estado final $x_n^* \in X_n$, se debe determinar una política $y=(y_n^*,\ldots,y_1^*)$ y una trayectoria $x^* = (x_o^*,\ldots,x_n^*)$ de manera que

$$f_n(u_1(x_1^*,y_1^*),\ldots,u_n(x_n^*,y_n^*))=\max_{\substack{y_i \in Y_i(x_i) \\ 1\leqslant i\leqslant n}} f_n(u_1(x_1,y_1),\ldots,u_n(x_n,y_n)) \qquad (2.20)$$

sujeto a las restricciones

$$x_{i-1}=\mathcal{T}_i(x_i,y_i) \qquad 1\leqslant i\leqslant n \qquad (2.21)$$

El máximo en este caso se indicará con $g_n(x_n^*)$.

Estas nuevas formulaciones aumentan el número de variables que aparecen en los problemas (de n a 2n), lo que podría inducir a pensar que la formulación inicial es más adecuada por ser más simple, sin embargo, el principio de optimalidad de Bellman permite reducir los dos últimos problemas a n subproblemas de 2 variables (una de decisión y una de estado).

2.3.1.- Descomposición retrospectiva de la función objetivo.

Desde el punto de vista de las aplicaciones concretas resulta más interesante el caso en que la función objetivo se define aditivamente, sin embargo, se verán algunos resultados más generales que permiten establecer relaciones de recurrencia válidas para resolver problemas de Programación Dinámica que evidentemente serán aplicables al caso aditivo.

Con estas referencias se introducirá la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Se dirá que la función objetivo $f_n$ admite una descomposición retrospectiva si:

1) Existe una función $\Phi_n$ de dos variables, tal que:

$$f_n(u_1(x_1,y_1),\dots,u_n(x_n,y_n)) =$$

$$= \Phi_n(u_n(x_n,y_n),f_{n-1}(u_1(x_1,y_1),\dots,u_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}))) \quad (2.22)$$

para $n \geqslant 2$

2) Para todo $n \geqslant 2$ y para cada $u_n(x_n,y_n)$ la función real $z \leadsto \Phi_n(u_n(x_n,y_n),z)$ es monótona (creciente si el problema es de máximo y decreciente si es de mínimo).

A propósito de las funciones que se pueden descomponer retrospectivamente se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. Si la función objetivo $f_n$ se puede descomponer retrospectivamente entonces:

$$g_n(x_n) = \max_{y_n \in Y_n(x_n)} \Phi_n(u_n(x_n,y_n),g_{n-1}(\tau_n(x_n,y_n))), \quad (2.23)$$

para todo n, $n \geqslant 2$,

Demostración:

Si se tiene en cuenta la definición de $g_n(x_n)$ dada en la sección 2.3 resulta que

$$f_{n-1}(u_1(x_1,y_1),\dots,u_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}))\leqslant g_{n-1}(x_{n-1}),$$

con $x_{n-1} = \mathcal{T}_n(x_n,y_n)$.

Como $f_n$ se puede descomponer retrospectivamente, por la definición 2.3.1. resulta que:

$$\Phi_n(u_n(x_n,y_n),f_{n-1}(u_1(x_1,y_1),\dots,u_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})))\leqslant$$

$$\leqslant \Phi_n(u_n(x_n,y_n),\ g_{n-1}(x_{n-1}))$$

Cualesquiera que sean las etapas n, $n\geqslant 2$ y las decisiones $y_n$, donde las $x_i$ y las $y_i$ para $1\leqslant i\leqslant n-1$, están sujetas a las condiciones

$$x_{i-1} = \mathcal{T}_i(x_i,y_i) \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1$$

$$y_i \in Y_i(x_i) \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1$$

Tomando el máximo con respecto a las $y_i$, $1\leqslant i\leqslant n$ se tiene que:

$$g_n(x_n)=\max_{\substack{y_i \in Y_i(x_i) \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \Phi_n\left[u_n(x_n,y_n),f_{n-1}(u_1(x_1,y_1),\ldots,u_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})\right] \leqslant$$

$$\leqslant \max_{y_n \in Y_n(x_n)} \Phi_n\left[(u_n(x_n,y_n),g_{n-1}(x_{n-1})\right]$$

Para establecer la igualdad se observa que, de acuerdo a la definición de $g_n(x_n)$:

$$\Phi_n(u_n(x_n,y_n),g_{n-1}(x_{n-1}))\leqslant g_n(x_n), \quad \text{luego:}$$

$$\max_{y_n \in Y_n(x_n)} \Phi_n\left[u_n(x_n,y_n),g_{n-1}(x_{n-1})\right]\leqslant g_n(x_n)$$

Siempre que la función $f_n$ se pueda descomponer retrospectivamente, el teorema anterior permitirá dividir el problema en una serie de sub-problemas cada uno de los cuales tendrá una sola variable de decisión y de estado.

Si se hace $g_o(x_o) = 0$ y $\Phi_1(x,y) = x$ la relación (2.23) vale también para $n = 1$.

Considérese ahora el caso concreto en que la función objetivo se define aditivamente:

$$f_n(u_1(x_1,y_1),\ldots,u_n(x_n,y_n))= \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i,y_i) \qquad (2.24)$$

El problema (2.20), (2.21) toma la forma:

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i, y_i)$$

$$y_i \in Y_i(x_i)$$

$$1 \leqslant i \leqslant n$$

con $x_{i-1} = \zeta_i(x_i, y_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$

La función objetivo puede descomponerse retrospectivamente como sigue

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i, y_i) = u_n(x_n, y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i(x_i, y_i) \tag{2.25}$$

Es decir la expresión para la función $\Phi_n$ dada por (2.22) adquiere la forma:

$$u_n(x_n, y_n) + f_{n-1}(u_1(x_1, y_1), \ldots, u_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})) \tag{2.26}$$

esto es: $\Phi_n(p,q) = p+q$ (2.27)

El hecho de que la función $\Phi_n$ es creciente resulta de la compatibilidad de la relación de orden con respecto a la adición en $\mathbb{R}$.

La relación (2.23) del teorema 2.3.1. en este caso adquiere la forma:

$$g_n(x_n) = \max_{y_n \in Y_n(x_n)} \left[ u_n(x_n,y_n)+g_{n-1}(\tau_n(x_n,y_n)) \right] , \quad n \geqslant 1 \qquad (2.28)$$

con $g_o(x_o)=0$, tenemos que $g_1(x_1)= \max\limits_{y_1 \in Y_1(x_1)} u_1(x_1,y_1)$

Estas últimas relaciones se conocen como las ecuacio-de recurrencia de la Programación Dinámica.

Sea $Y_n^*(x_n)$ el conjunto de las decisiones que optimizan la función objetivo dada en (2.28) para n y $x_n$ fijos, es decir:

$$Y_n^*(x_n)= \left\{ y_n \in Y_n(x_n): g_n(x_n)=u_n(x_n,y_n)+g_{n-1}(\tau_n(x_n,y_n)) \right\} \qquad (2.29)$$

y supóngase este conjunto no vacío. Considérese un proceso secuencial de decisiones de $n^*$ etapas y $1 \leqslant n \leqslant n^*$.

Definición 2.3.2. Se llamará función de decisión óptima para el momento n, a una aplicación $y_n^*$ definida en $X_n$ con valores en $\mathbb{R}^r$, tal que $y_n^*(x_n) \in Y_n^*(x_n)$.

Si para cada etapa del proceso secuencial se ha asignado una función de decisión $y_n^*$, $1 \leqslant n \leqslant n^*$, se cumplen las relaciones

$$g_n(x_n)=u_n(x_n,y_n^*(x_n))+g_{n-1}(\tau_n(x_n,y_n^*(x_n))) \qquad (2.30)$$

para todo $x_n \in X_n$ y n, $1 \leqslant n \leqslant n^*$.

Dada una función de decisión óptima $y_n^*$ y un estado $x_n$, accesible retrospectivamente en el momento n, el valor $y_n^*(x_n)$ será concebido como la <u>mejor decisión posible</u> tomada del conjunto $Y_n(x_n)$ para adoptar en el momento n, si el sistema se encuentra en el estado $x_n$

Utilizando una función $y_n^*$ es posible definir de manera recursiva una política óptima y la correspondiente trayectoria como sigue:

Dado el estado final $x_{n*}^* \in X_{n*}$, se escoge la mejor decisión $y_{n*}^*$ correspondiente a ese estado. Si para $n \leqslant n^*$ se ha escogido el estado $x_n^*$ y la mejor decisión

$y_n^*(x_n^*) \in Y_n^*(x_n^*)$

se tendrá que: $x_{n-1}^* = \mathcal{T}_n(x_n^*, y_n^*)$ (2.31)

y $y_{n-1}^* = y_{n-1}^*(x_{n-1}^*)$ (2.32)

Continuando este proceso se obtendrá la política óptima $(y_1^*, \ldots, y_{n*}^*)$ y la trayectoria óptima $(x_o^*, \ldots, x_{n*}^*)$.

En las relaciones (2.23) (y por tanto en las ecuaciones de recurrencia (2.28)) se observa que si $y_n^*$ es una política óptima para un horizonte fijo de n etapas y para un estado final $x_n^* \in X_n$, entonces

$$(y_1^*, \dots, y_{n-1}^*) \tag{2.33}$$

es también óptima para un horizonte de n-1 etapas y un estado final

$$x_{n-1}^* = \mathcal{T}_n(x_n^*, y_n^*) \tag{2.34}$$

lo cual equivale al principio de Bellman.

Utilizando la función de decisión óptima $y_n^*$, se obtiene la trayectoria de fase $(x_o, x_1, \dots, x_{n*})$ definida por la relación de recurrencia

$$x_{n-1} = \mathcal{T}_n(x_n, y_n^*) \qquad 1 \leqslant n \leqslant n^* \tag{2.35}$$

donde $x_{n*} \in X_{n*}$ es un estado final fijo.

Esto permite describir la evolución del sistema, ya sea, utilizando la política escogida o en términos de los estados por los que atraviesa el sistema.

De hecho, a partir de la relaciones:

$$x_{n-1}^*(x) = \mathcal{T}_n(x, y_n^*(x)) \qquad x \in X_{n*,n}, \; n \geqslant 1 \tag{2.36}$$

se observa que el paso de una etapa a otra en el proceso, es función del estado que describe recursivamente la trayectoria de fase mediante la relación

$$x_{n-1} = x^{*}_{n-1}(x_n) \qquad (2.37)$$

Todo este proceso se esquematiza en la Fig. 1.

Para el caso general del teorema 2.3.1., las decisiones óptimas $y^{*}_{n}$, $n \geqslant 1$ se obtienen a partir de la relación

$$g_n(x_n) = \phi_n \left[u_n(x_n, y^{*}_n(x_n)), g_{n-1}(\mathcal{T}_n(x_n, y^{*}_n(x_n)))\right] \quad \text{y así}$$

se puede aplicar un procedimiento recursivo similar al anterior con una definición análoga de función de decisión óptima.

ESQUEMA DE CALCULO DEL ANALISIS RETROSPECTIVO

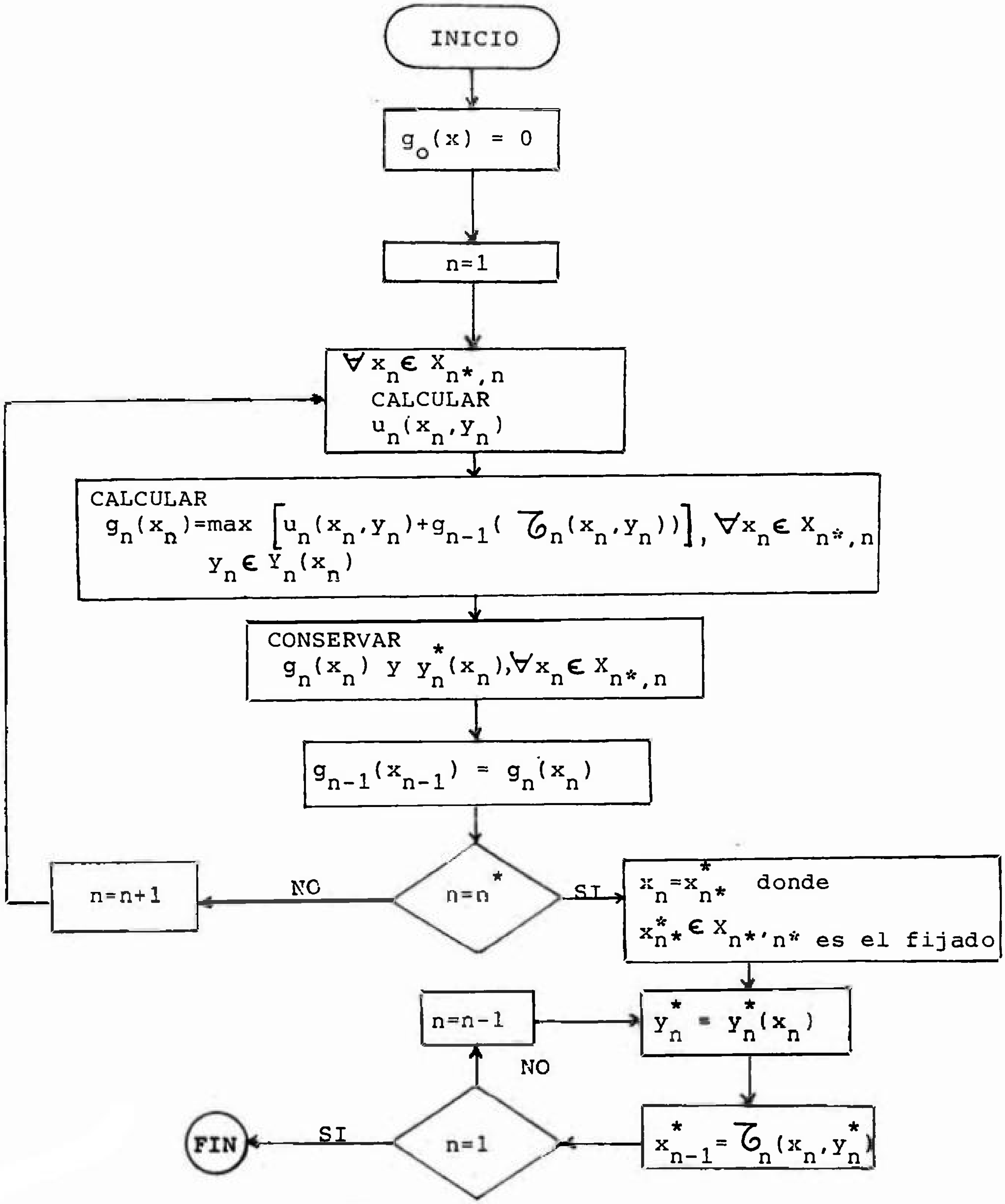



FIG. 1

Observación.

El método descrito anteriormente para determinar una política óptima supone que las funciones $g_n$ y $y_n^*$ han sido calculadas para cada n, $1 \leqslant n \leqslant n^*$ y para cada $x_n \in X_{n^*,n}$.
A pesar de que esto implica un gran número de cálculos, el hecho que las variables sean sólo dos en cada paso es lo que facilita la ejecución real de los mismos. Para cualquier estado del conjunto finito $X_{n^*,n}$ se pueden determinar los valores de $g_n$ y $y_n^*$, pero si $X_{n^*,n}$ es infinito deberá recurrirse a la interpolación dada la imposibilidad de la realización de estos cálculos.

Este proceso de puede realizar de la siguiente forma:
Supóngase que $X_{n^*,n}$ es un intervalo acotado y cerrado $X_{n^*,n} = \left[a_n, b_n\right]$ ; hágase una división del intervalo en $p+1$, $p \geqslant 1$ puntos equidistantes:

$$a_n, a_n + \sigma, \ldots, b_n = a_n + p\sigma \quad \text{donde} \quad \sigma = \frac{b_n - a_n}{p}$$

y anótese los cálculos relativos a $g_n$ y $y_n^*$ en estos puntos.
Para cubrir los valores $x_n \in \left[a_n, b_n\right]$ que no aparecen se

da a las funciones $g_n$ y $y_n^*$ los valores

$$g_n(x_n)=g_n(a_n+k\sigma) \quad y \quad y_n^*(x_n)=y_n^*(a_n+k\sigma)$$

cuando $a_n+k\sigma \leqslant x_n < a_n+(k+1)\sigma$ ; $0\leqslant k\leqslant p-1$

La bondad de estas aproximaciones dependerá de la naturaleza de las funciones.

Una variante para efectuar aproximaciones se da por medio de la interpolación lineal; en este caso

$$g_n(x_n)=g_n(a_n+k\sigma)+(x_n-a_n-k\sigma)\,\frac{g_n(a_n+(k+1)\sigma)-g_n(a_n+k\sigma)}{\sigma}$$

$$y_n^*(x_n)=y_n^*(a_n+k\sigma)+(x_n-a_n-k\sigma)\,\frac{y_n^*(a_n+(k+1)\sigma)-y_n^*(a_n+k\sigma))}{\sigma}$$

para $a_n+k\sigma \leqslant x_n \leqslant a_n+(k+1)\sigma$

Ejemplo. Problema de inversión y beneficio.

La suma de 6 millones de balboas va a ser utilizada en 5 regiones económicas. Los beneficios obtenidos dependen tanto de la inversión como de las regiones económicas. Se asumirá que el beneficio en cierta regiones económicas es independiente del modo en que se designan los fondos para otras regiones.

El problema consiste en asignar las inversiones entre las 5 regiones, tal que se obtenga el beneficio máximo.

Los beneficios correspondientes están dados en la tabla siguiente (las cantidades representan millones de balboas).

| x | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1 | 0.20 | 0.30 | 0.25 | 0.27 | 0.22 |
| 2 | 0.31 | 0.45 | 0.35 | 0.40 | 0.37 |
| 3 | 0.53 | 0.50 | 0.47 | 0.58 | 0.55 |
| 4 | 0.76 | 0.65 | 0.60 | 0.70 | 0.68 |
| 5 | 0.80 | 0.82 | 0.78 | 0.85 | 0.75 |
| 6 | 0.90 | 0.95 | 0.87 | 0.92 | 0.82 |

Tabla 1

Si se denota por $y_i$, (variables de decisión), $1 \leqslant i \leqslant 5$, la suma total invertida en la región i, y por $x_i$ (variables de estado), $1 \leqslant i \leqslant 5$, la suma invertida en las primeras i regiones, se tiene la siguiente relación:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} y_j \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5$$

sujeto a: $x_5 \leqslant 6$, $y_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant 5$

Si $b_i(y_i)$ es el beneficio obtenido en la región i, correspondiente a la inversión $y_i$, el problema es:

$$\max \sum_{i=1}^{5} b_i(y_i)$$

sujeto a: $\sum_{i=1}^{5} y_i \leqslant 6$, $y_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant 5$

aplicando el método expuesto se tiene que:

$$x_{i-1} = x_i - y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5 \quad \text{donde} \quad x_o = 0$$

además, $u_i(x_i, y_i) = b_i(y_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5$

$$\tau_i(x_i, y_i) = x_i - y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5$$

y $\qquad Y_i(x_i) = \left\{ 0, 1, \ldots, x_i \right\}$ $1 \leqslant i \leqslant 5$, donde

$x_5 = \left\{ 0, 1, 2, \ldots, 6 \right\}$

la ecuación de recurrencia (2.28) es:

$$g_n(x_n) = \max_{y_n \in Y_n(x_n)} \left\{ b_n(y_n) + g_{n-1}(x_n - y_n) \right\}, \quad 1 \leqslant n \leqslant 5$$

donde $g_o(x_o) = 0$

Para $n=1$ resulta que:

$$g_1(x_1) = b_1(x_1) \quad y \quad y_1^*(x_1) = x_1;$$

$$g_2(0) = \max_{y_2 \in Y_2(0)} \left\{ b_2(y_2)+g_1(0-y_2) \right\} = b_2(0)+g_1(0) = 0 \quad \text{luego } y_2^*(0)=0;$$

$$g_2(1) = \max_{y_2 \in Y_2(1)} \left\{ b_2(y_2)+g_1(1-y_2) \right\}$$

$$= \max \left\{ b_2(0)+g_1(1), b_2(1)+g_1(0) \right\} = \max \left\{ 0.20, 0.30 \right\} = 0.30$$

luego $y_2^*(1) = 1$

Continuando los cálculos se obtiene la siguiente tabla:

| x | $g_1$ | $y_1^*$ | $g_2$ | $y_2^*$ | $g_3$ | $y_3^*$ | $g_4$ | $y_4^*$ | $g_5$ | $y_5^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 0 | 0.00 | 0 | 0.00 | 0 | 0.00 | 0 | 0.00 | 0 |
| 1 | 0.20 | 1 | 0.30 | 1 | 0.30 | 0 | 0.30 | 0 | 0.30 | 0 |
| 2 | 0.31 | 2 | 0.50 | 1 | 0.55 | 1 | 0.57 | 1 | 0.57 | 0 |
| 3 | 0.53 | 3 | 0.65 | 2 | 0.73 | 1 | 0.82 | 1 | 0.82 | 0 |
| 4 | 0.76 | 4 | 0.83 | 1 | 0.85 | 1 | 1.02 | 1 | 1.04 | 1 |
| 5 | 0.80 | 5 | 1.06 | 1 | 1.08 | 1 | 1.15 | 2 | 1.24 | 1 |
| 6 | 0.90 | 6 | 1.21 | 2 | 1.31 | 1 | 1.35 | 1 | 1.39 | 2 |

Tabla 2.

se observa que: $\max g_5(x_5)=g_5(6)=1.39$

luego $x_5^* = 6$ de donde $y_5^*=y_5^*(x_5^*)=y_5^*(6)=2$

por consiguiente $x_4^*=x_5^* - y_5^*=6 - 2=4$ de donde $y_4^*(4)=1$

continuando los cálculos se obtiene la política óptima

$$y^*=(y_1^*,y_2^*,y_3^*,y_4^*,y_5^*) = (1,1,1,1,2)$$

2.3.2.- Descomposición prospectiva de la función objetivo.

Para el estudio de la descomposición en el caso prospectivo se considerará un problema de la forma

$$\max f_{n-i+1}(u_i(x_i,y_i),\ldots,u_n(x_n,y_n)) \tag{2.38}$$
$$y_j \in Y_j(x_{j-1})$$
$$i \leqslant j \leqslant n$$

$$x_j = \varphi_j(x_{j-1},y_j) \qquad i \leqslant j \leqslant n \tag{2.39}$$

Cuyo horizonte es de n-i+1 etapas. La definición 2.3.1 tomará la forma siguiente.

Definición 2.3.3. Se dirá que la función objetivo $f_{n-i+1}$ se puede descomponer prospectivamente si $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ las siguientes dos condiciones se cumplen

1) Existe una función $F_{n-i+1}$ de dos variables tal que: $f_{n-i+1}(u_i(x_i,y_i),\ldots,u_n(x_n,y_n)) =$

$= F_{n-i+1}((u_i(x_i,y_i),\ f_{n-i}((u_{i+1},y_{i+1}),\ldots,u_n(x_n,y_n)))$

2) Para todo i, y todo $u_i(x_i,y_i)$ dado, la función: $z \longrightarrow F_{n-i+1}(u_i(x_i,y_i),z)$ es monótona (creciente para un problema de máximo y decreciente para un problema de mínimo).

El valor máximo de la función objetivo del problema (2.38), (2.39) se denotará con $h_{n-i+1}(x_{i-1})$. Evidentemente esta función depende tanto del estado inicial $x_{i-1}$ como del número de etapas $n-i+1$.

El principio de optimilidad se evidencia, en este caso, con el siguiente teorema.

<u>Teorema 2.3.2.</u> Si la función objetivo $f_{n-i+1}$ se puede descomponer prospectivamente, entonces

$$h_{n-i+1}(x_{i-1}) = \max_{y_i \in Y_i(x_{i-1})} F_{n-i+1}\left[(\bar{u}_{i-1},y_i);\ h_{n-i}(\varphi_i(x_{i-1},y_i))\right] \qquad (2.40)$$

para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$

donde $\bar{u}_i(x_{i-1},y_i) = u_i(\varphi_i(x_{i-1},y_i),y_i)$

Demostración: Similar a la del teorema 2.3.1.

La relación (2.40) es también verdadera para i=n haciendo $h_o(x)=0$ y $F_1(x,y) = x$

Las funciones $h_{n-i+1}$, $1\leqslant i\leqslant n$ pueden determinarse de modo recurrente con la ayuda de la relación (2.40) lo cual permite definir, las funciones de decisión óptima $y_i^*(x_{i-1})$, $1\leqslant i\leqslant n$, que hacen que se verifiquen las siguientes ecuaciones:

$$h_{n-i+1}(x_{i-1}) =$$

$$= F_{n-i+1}\left[\bar{u}_i(x_{i-1},y_i^*(x_{i-1})),h_{n-i}(\varphi_i(x_{i-1},y_i^*(x_{i-1})))\right]$$

para todo i, $1\leqslant i\leqslant n$

Fijando entre los estados iniciales el óptimo de los mismos $x_o^*$ y el horizonte $n^*$; la política óptima $y^*=(y_1^*,\ldots,y_{n^*}^*)$ y la trayectoria óptima correspondiente $x^*=(x_o^*,\ldots,x_{n^*}^*)$ se calculan de modo recurrente con las fórmulas siguientes:

$$y_i^* = y_i^*(x_{i-1}^*) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n^*$$

$$x_i^* = \varphi_i(x_{i-1}^*, y_i^*) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n^*$$

En el caso que la función objetivo esté definida aditivamente, el problema toma la forma:

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i, y_i)$$
$$y_i \in Y_i(x_{i-1})$$
$$1 \leqslant i \leqslant n$$

con $x_i = \varphi_i(x_{i-1}, y_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$

Como la función objetivo se puede descomponer prospectivamente de manera análoga al del caso retrospectivo en 2.3.1, la relación (2.40) adquiere la forma:

$$h_{n-i+1}(x_{i-1}) = \max_{\substack{y_i \in Y_i(x_{i-1}) \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \left[ \bar{u}_i(x_{i-1}, y_i) + h_{n-i}(\varphi_i(x_{i-1}, y_i)) \right] \qquad (2.41)$$

donde $h_o(x)=0$ y $\bar{u}_i(x_{i-1}, y_i) = u_i(\varphi_i(x_{i-1}, y_i), y_i)$

que identifica las ecuaciones de recurrencia.

El esquema de cálculo para este caso (que fue descrito para el caso retrospectivo en 2.3.1), se resume en la fig. 2.

ESQUEMA DE CALCULO DEL ANALISIS PROSPECTIVO

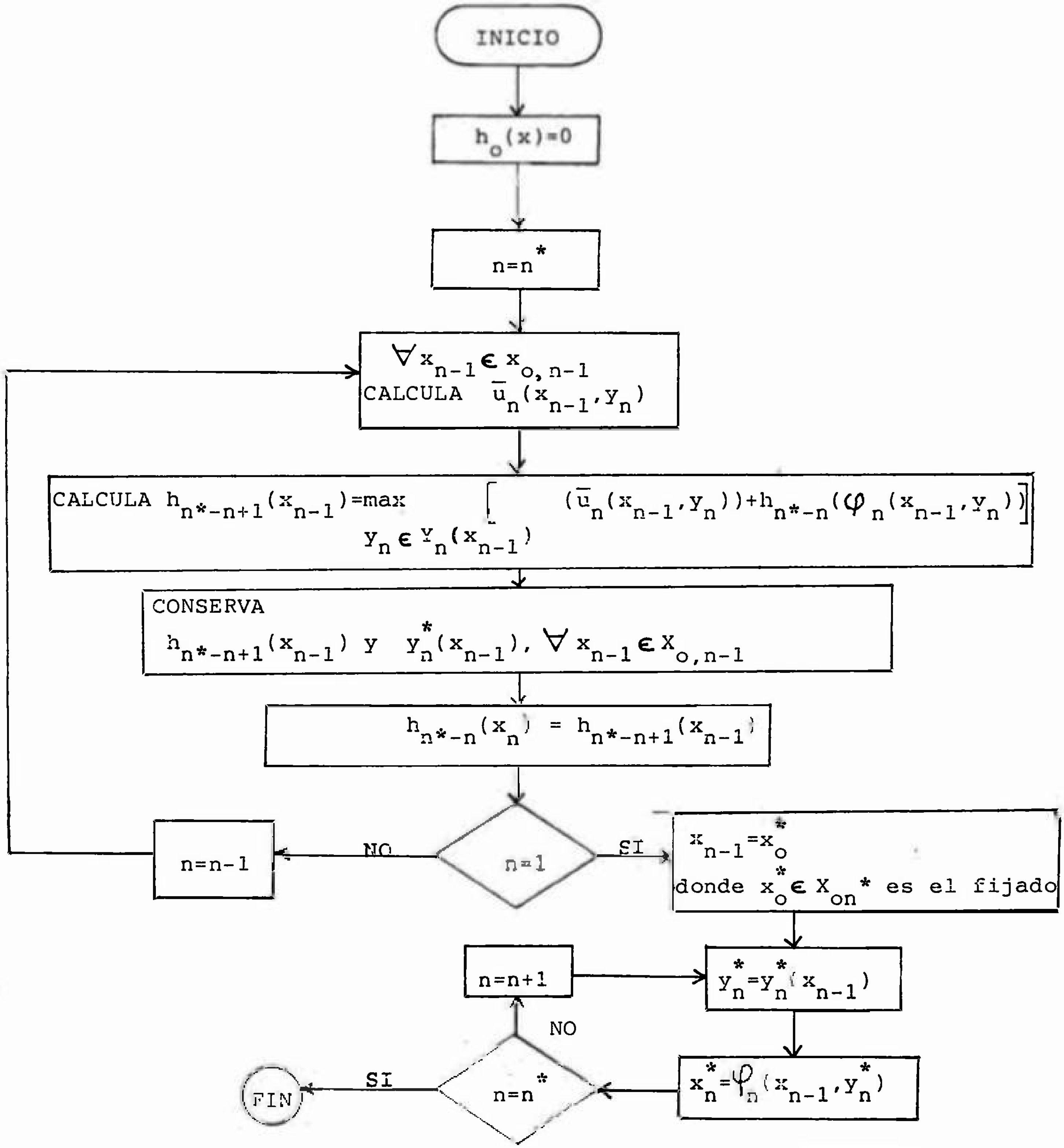



FIG. 2

Ejemplo. Problema de producción e inventario.

Un fabricante desea satisfacer una demanda conocida de artículos en N períodos al menor costo posible. En cada período i=1,2,...,N la demanda se indicará por . $r_i$. Si decide fabricar artículos en un período dado, debe pagar un costo fijo k y un costo c por artículo producido; si no existe producción, este costo será cero. Por otra parte, es posible almacenar artículos de un período a otro con un costo unitario a.

Se utilizarán las siguientes magnitudes para i=1,2,...,N

$x_i$ : cantidad de artículos almacenados al final del período i (variable de estado).

$r_i$ : demanda en el período i.

$y_i$ : cantidad de artículos que se debe producir en el período i (variables de decisión).

$x_o$ : es la disponibilidad inicial de artículos.

Las variables se relacionan de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$x_i=x_{i-1}+y_i-r_i, \quad \text{para} \quad i= 1,2,\ldots,N$$

Si $c_i(x_i,y_i)$ es el costo en la etapa i, se tiene que:

$$c_i(x_i,y_i)=\begin{cases} k + c\,y_i+a(x_{i-1}+y_i-r_i) & \text{si} \quad y_i > 0 \\ a(x_{i-1}-r_i) & \text{si} \quad y_i = 0 \end{cases}$$

$i=1,2,\ldots,N$

Se supone además que se cumplen las siguientes condiciones:

$$x_i \geqslant 0 \quad , \; y_i \geqslant 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,N \quad y \quad x_o=x_N=0.$$

Sea $h_{N-i+1}(x_{i-1})$ el valor mínimo de $\sum_{k=i}^{N} c_k(x_k,y_k)$, la ecuación de recurrencia es:

$$h_{N-i+1}(x_{i-1}) = \min_{y_i \in Y_i(x_{i-1})} \left[c_i(x_{i-1}+y_i-r_i,y_i)+h_{N-i}(x_{i-1}+y_i-r_i)\right]$$

Sea $N=3$, $r_1=3$, $r_2=2$, $r_3=3$, $k=2.5$, $c=1$ y $a=.3$ (las cantidades $r_1,r_2,r_3$ y $k$ representan 10,000 balboas por unidad)

Resolviendo la ecuación $h_1(x_2)=c_3((x_2+y_3-r_3),y_3)$ y atendiendo a que $x_3=0$ y $r_3=3$ resulta que $x_2$ y $y_3$ deben satisfacer la condición $x_2+y_3=3$, que sólo se cumple para las parejas (0,3); (1,2); (2,1) y (3,0). Haciendo los cálculos se obtiene la siguiente tabla.

| $x_2$ | $y_3$ | $h_1(x_2)$ | $y_3^*$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 5.5 | 3 |
| 1 | 2 | 4.5 | 2 |
| 2 | 1 | 3.5 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 1

Para calcular $h_2(x_1)$ se suponen satisfechas las demandas $r_2$ y $r_3$, además, la cantidad de artículos $x_1$ almacenados al final del primer período y la cantidad de artículos $y_2$ que se deben producir en el siguiente período se escogen de modo que los valores $x_1+y_2-r_2$ correspondan a la cantidad de artículos $x_2$ almacenados al final del segundo período (anteriormente tabulados).

Los cálculos conducen a la siguiente tabla.

| $c_2(x_1+y_2-2,y_2)+h_1(x_1+y_2-2)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ \ $y_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $h_2^*(x_1)$ | $y_2^*$ |
| 0 | | | 9.5 | 10.3 | 10.6 | 8.4 | 8.4 | 5 |
| 1 | | 9.0 | 9.3 | 9.6 | 7.4 | | 7.4 | 4 |
| 2 | 5.5 | 8.3 | 8.6 | 5.9 | | | 5.5 | 0 |
| 3 | 4.8 | 8.6 | 5.4 | | | | 4.8 | 0 |
| 4 | 6.1 | 4.4 | | | | | 4.4 | 1 |
| 5 | .9 | | | | | | .9 | 0 |

Tabla 2

Finalmente la tabla 3 corresponde a la evaluación de $h_3(x_o)$; la disponibilidad inicial de artículos $x_o$ y la cantidad $y_1$ que se debe producir en el primer período, se escogen de manera que los valores $x_o+y_1-r_3$ correspondan a las cantidades $x_1$ de artículos almacenados al final del primer período (de tabla 2). Como se ha supuesto que $x_o=0$, las condiciones posibles de $y_1$ son: 3,4,5,6,7 y 8.

| $x_o \backslash y_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $h_3^*(x_o)$ | $y_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_1(x_o+y_1-3,y_1)+h_2(x_o+y_1-3)$ | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | 13.9 | 14.2 | 14 | 14.2 | 15.1 | 12.9 | 12.9 | 8 |

Tabla 3

La política óptima es $y^* = (8,0,0)$.

## 2.4.- Diversos casos con respecto al estado inicial o final.

Las relaciones de recurrencia dadas en 2.3.1 permiten determinar una política óptima $y^*=(y_1^*,\ldots,y_{n*}^*)$ y una trayectoria óptima $x^*=(x_o^*,\ldots,x_{n*}^*)$ correspondientes a un estado final fijo $x_{n*}= x_{n*}^*$ considerando el estado inicial arbitrario. De manera similar en 2.3.2 se resuelve el problema de determinar política y trayectoria óptimas fijando el estado inicial $x_o^* \in X_o$ y dejando el estado final $x_{n*}^*$ arbitrario. Estas mismas relaciones pueden utilizarse para resolver el problema con estados iniciales y finales no fijados.

Si en un problema se recurre al análisis retrospectivo, una política óptima $y^* = (y_1^*,\ldots,y_n^*)$ correspondiente al estado final $x_{n*}^* \in X_{n*}$ determinada por la condición

$$g_{n^*}(x^*_{n^*}) = \max_{x_{n^*} \in X_{n^*}} g_{n^*}(x_{n^*})$$

sería también una política óptima para el problema en el cual ni el estado inicial, ni el estado final se han fijado.

El proceso será descrito como sigue:

Como $x^*_{n^*}$ no es fijo, se puede buscar un estado final que maximice la función $g_{n^*}$, la cual se calcula con respecto a cada estado final $x_{n^*}$, conservando en cada caso $g_{n^*}(x_{n^*})$ y $y^*_{n^*}(x_{n^*})$; una vez terminados estos cálculos, se determina el max $g_{n^*}(x_{n^*})$ que permite encontrar $x^*_{n^*}$ y $y^*_{n^*}(x^*_{n^*}), x_{n^*} \in X_{n^*}$. Se puede entonces fijar la política óptima $y^*$ y la trayectoria óptima $x^*$, utilizando las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} y^*_n &= y^*_n(x^*_n) \\ x^*_{n-1} &= \mathcal{T}_n(x^*_n, y^*_n), \end{aligned}\right\} \quad 1 \leqslant n \leqslant n^*$$

El esquema de cálculo se ilustra en la fig. 3. Análogamente si en un problema se recurre al análisis prospectivo, a partir de un estado inicial $x^*_o \in X_o$, determinado por la condición:

$$h_{n*}(x_o^*) = \max_{x_o \in X_o} h_{n*}(x_o)$$

se obtiene una política óptima $y^* = (y_1^*,\dots,y_{n*}^*)$, que será también óptima para el caso en que no estén fijos ni el estado inicial ni el final. El esquema de cálculo correspondiente está dado en la fig. 4.

El único caso aún no determinado es aquel en que el estado inicial $x_o^*$ y el final $x_{n*}^*$ son fijos.

Tanto en el análisis prospectivo como en el retrospectivo es posible modificar las restricciones del problema de manera que el conjunto de estados accesibles al término de las $n^*$ etapas sea unitario. Es decir:

$$X_{o,n*} = \left\{ x_{n*}^* \right\} \quad y \quad X_{n*,o} = \left\{ x_o^* \right\} \text{ respectivamente.}$$

En el caso prospectivo, las nuevas restricciones del problema se definirán en forma recurrente como sigue:

$$\tilde{Y}_i(x_{i-1}) = \left\{ y_i \in Y_i(x_{i-1}) : \varphi_i(x_{i-1}, y_i) \in \tilde{X}_{oi} \right\} \quad 1 \leqslant i \leqslant n^*$$

$$\text{donde } \tilde{X}_{oi} = \begin{cases} \left\{ x_{n*}^* \right\} & \text{si } i = n^* \\ \left\{ x \in X_{oi} : \tilde{Y}_{i+1}(x) \neq \emptyset \right\} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n^*-1 \end{cases}$$

de donde se tiene que toda política $(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ con $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}_i(x_{i-1})$ hace evolucionar el sistema prospectivamente del estado $x_o^*$ al estado $x_{n*}^*$, afirmación que se puede verificar reemplazando el conjunto $Y_i(x_{i-1})$ por $\tilde{Y}_i(x_{i-1})$ en (2.18), (2.19).

Si la evolución es retrospectiva las modificaciones correspondientes son:

$$\bar{Y}_i(x_i)=\left\{y_i \quad Y_i(x_i) \mid \mathcal{T}_i(x_i,y_i)\in \bar{X}_{n*,i-1}\right\} \quad 1\leqslant i\leqslant n^*$$

$$\text{donde} \quad \bar{X}_{n*i} = \begin{cases} \left\{x_o^*\right\} & \text{si} \quad i=0 \\ \left\{ x\in X_{n*i}:\ \bar{Y}_i(x)\neq \phi\right\} & \text{si} \quad 1\leqslant i\leqslant n^*. \end{cases}$$

como antes, toda política $(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n*})$ con $\bar{y}_i\in \bar{Y}_i(x_i)$ hace evolucionar el sistema del estado $x_{n*}^*$ al estado $x_o^*$.

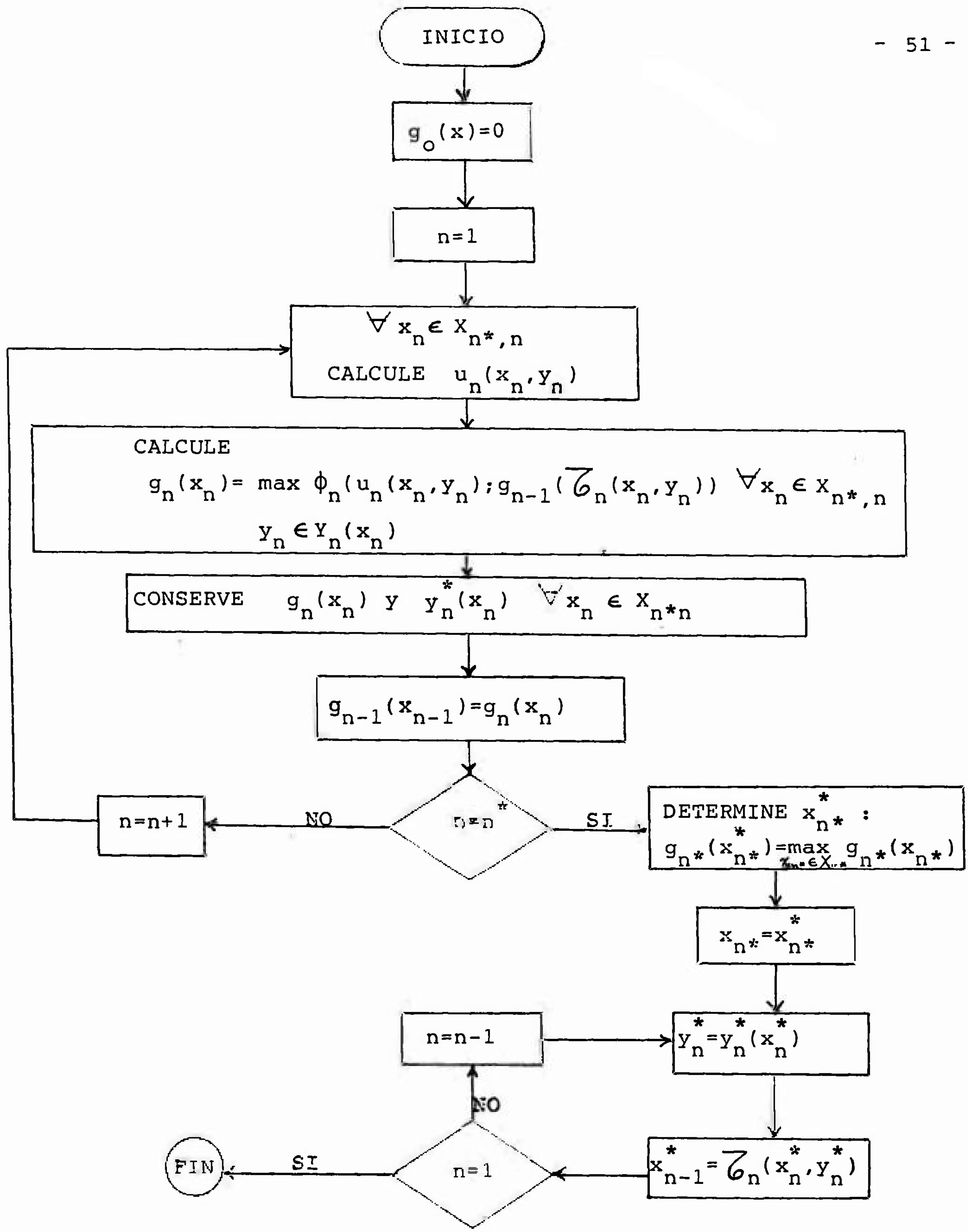

INICIO
g_o(x)=0
n=1
∀ x_n ∈ X_n*,n
CALCULE u_n(x_n,y_n)
CALCULE
g_n(x_n)= max φ_n(u_n(x_n,y_n);g_n-1(τ_n(x_n,y_n)) ∀x_n ∈ X_n*,n
y_n ∈ Y_n(x_n)
CONSERVE g_n(x_n) y y*_n(x_n) ∀x_n ∈ X_n*n
g_n-1(x_n-1)=g_n(x_n)
n=n*
NO
n=n+1
SI
DETERMINE x*_n* :
g_n*(x*_n*)=max g_n*(x_n*)
x_n*=x*_n*
y*_n=y*_n(x*_n)
n=n-1
x*_n-1=τ_n(x*_n,y*_n)
n=1
NO
SI
FIN

FIG. 3

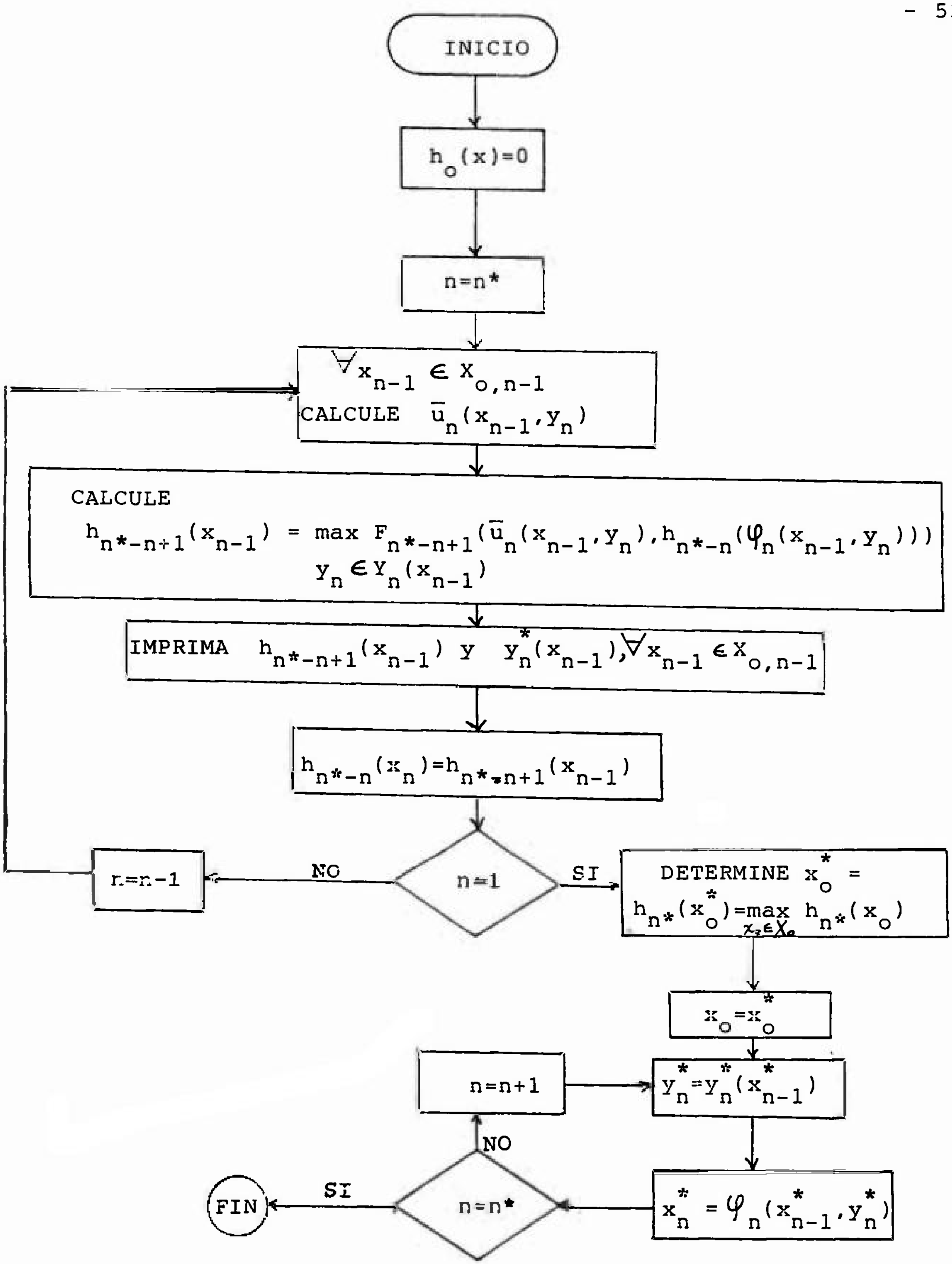

INICIO
$h_o(x)=0$
$n=n^*$
$\forall x_{n-1} \in X_{o,n-1}$
CALCULE $\bar{u}_n(x_{n-1},y_n)$
CALCULE
$h_{n^*-n+1}(x_{n-1}) = \max_{y_n \in Y_n(x_{n-1})} F_{n^*-n+1}(\bar{u}_n(x_{n-1},y_n),h_{n^*-n}(\varphi_n(x_{n-1},y_n)))$
IMPRIMA $h_{n^*-n+1}(x_{n-1})$ y $y_n^*(x_{n-1}), \forall x_{n-1} \in X_{o,n-1}$
$h_{n^*-n}(x_n)=h_{n^*-n+1}(x_{n-1})$
$n=1$
NO
$n=n-1$
SI
DETERMINE $x_o^* =$
$h_{n^*}(x_o^*)=\max_{x_o \in X_o} h_{n^*}(x_o)$
$x_o=x_o^*$
$y_n^*=y_n^*(x_{n-1}^*)$
$x_n^* = \varphi_n(x_{n-1}^*,y_n^*)$
$n=n^*$
NO
$n=n+1$
SI
FIN

FIG.4

## 2.5.- Procesos estacionarios. Política estacionaria.

Se considerarán en esta sección, problemas con función objetivo aditiva.

Normalmente, las utilidades son funciones, no sólo del estado y la política, sino que también dependen de la etapa del proceso; de ahí la notación $u_i$. Igual situación se da con respecto a los conjuntos de decisiones $Y_i$ y las funciones de paso $\varphi_i$, $\tau_i$.

Definición 2.5.1. Un problema de programación dinámica es estacionario (en su evolución prospectiva) si:

$$u_i(x_i,y_i) = u(x_i,y_i) \qquad i \geqslant 1 \tag{2.42}$$

$$Y_i(x_{i-1}) = Y(x_{i-1}) \qquad i \geqslant 1 \tag{2.43}$$

$$\varphi_i(x_{i-1},y_i) = \varphi(x_{i-1},y_i) \qquad i \geqslant 1 \tag{2.44}$$

Si se cumplen sólo las últimas dos condiciones se dirá que el problema es SEMI-ESTACIONARIO.

La definición anterior pone de manifiesto el hecho de que las utilidades, los conjuntos de decisiones, y las funciones de paso obedecen a leyes funcionales que son independientes de la etapa del proceso. Una decisión del conjunto $Y(x_{i-1})$, $i \geqslant 1$ será denominada decisión estacionaria.

Para el caso retrospectivo se da una definición similar:

Definición 2.5.2. Un problema de programación dinámica es semi-estacionario (en su evolución retrospectiva)si se cumplen las siguientes condiciones:

$$Y_i(x_i) = Y(x_i) \qquad i \geqslant 1 \tag{2.45}$$

$$\mathcal{T}_i(x_i, y_i) = \mathcal{T}(x_i, y_i) \qquad i \geqslant 1 \tag{2.46}$$

Si se verifica también 2.42, el problema es estacionario.

Considerando el caso prospectivo, las relaciones de recurrencia se tranforman, para un proceso con horizonte $n^*$, como siguen:

$$h_{n-i+1}(x) = \max_{y \in Y(x)} \left[ \bar{u}(x,y) + h_{n-i}(\varphi(x,y)) \right] \qquad 1 \leqslant i \leqslant n^*$$

donde $h_o(x) = 0$ y $\bar{u}(x,y) = u(\varphi(x,y),y)$

Para el caso retrospectivo estas relaciones toman la forma

$$g_i(x) = \max_{y \in Y(x)} \left[ u(x,y) + g_{i-1}(\mathcal{T}(x,y)) \right] \quad 1 \leqslant i \leqslant n^* \tag{2.47}$$

y $g_o(x) = 0$

A continuación se verá un ejemplo que ilustra la situación.

Ejemplo.

Si se considera un sistema cuyos estados posibles están dados en el conjunto $X=\left\{x_1,x_2,x_3\right\}$ tal que cada vez que el sistema se encuentra en cada uno de los estados $x_1,x_2$ y $x_3$, se pueden adoptar las decisiones,

$y_1$ ó $y_2$; $y_1$ ó $y_3$; $y_2$ ó $y_3$ respectivamente, esto es:

$$Y(x_1)=\left\{y_2,y_1\right\} \quad ; \quad Y(x_2)=\left\{y_1,y_3\right\} \quad ; \quad Y(x_3)=\left\{y_2,y_3\right\} \quad .$$

La evolución retrospectiva del sistema será definida por:

$$\tau(x_1,y_1) = x_2 \qquad \tau(x_1,y_2) = x_3$$

$$\tau(x_2,y_1) = x_3 \qquad \tau(x_2,y_3) = x_2$$

$$\tau(x_3,y_2) = x_2 \qquad \tau(x_3,y_3) = x_1$$

y las utilidades que se producen en el transcurso del proceso están dadas por:

$u(x_1,y_1) = 3$ $\qquad$ $u(x_1,y_2) = 1$

$u(x_2,y_1) = -2$ $\qquad$ $u(x_2,y_3) = 0$

$u(x_3,y_2) = 3$ $\qquad$ $u(x_3,y_3) = -1$

Utilizando la relación (2.47) se obtienen los valores de $g_i$, i= 1,2,3,4 y la política óptima, de la siguiente forma:

Para el estado $x_1$ en la primera etapa se tiene

$$g_1(x_1) = \max_{y \in Y(x_1)} u(x_1,y)$$

$$= \max\left\{u(x_1 y_1), u(x_1,y_2)\right\} = \max\left\{3,1\right\} = 3$$

y $\quad y_1^*(x_1) = y_1$ (el máximo valor de la función objetivo en la primera etapa, corresponde a la decisión $y_1$).

Continuando el cálculo:

$$g_1(x_2) = \max_{y \in Y(x_2)} u(x_2,y) = \max\left\{u(x_2,y_1), u(x_2 y_3)\right\}$$

$$= \max\left\{-2,0\right\} = 0 \quad y \quad y_1^*(x_2) = y_3$$

$$g_1(x_3) = \max_{y \in Y(x_3)} u(x_3,y) = \max \left\{ u(x_3,y_2), u(x_3,y_3) \right\}$$

$$= \left\{ 3,-1 \right\} = 3 \quad y \quad y_1^*(x_3) = y_2$$

en la segunda etapa se tiene:

$$g_2(x_1) = \max_{y \in Y(x_1)} \left[ u(x_1,y) + g_1(\mathcal{T}(x_1,y)) \right]$$

$$= \max \left\{ u(x_1,y_1) + g_1(\mathcal{T}(x_1,y_1)), u(x_1,y_2) + \right.$$
$$\left. + g_1(\mathcal{T}(x_1,y_2)) \right\}$$

$$= \max \left\{ 3+0, \ 1+3 \right\} = 4 \quad y \quad y_2^*(x_1) = y_2$$

$$g_2(x_2) = \max_{y \in Y(x_2)} \left[ u(x_2,y) + g_1(\mathcal{T}(x_2,y)) \right]$$

$$= \max \left\{ u(x_2,y_1) + g_1(\mathcal{T}(x_2,y_1), u(x_2,y_3) + \right.$$
$$\left. + g_1(\mathcal{T}(x_2,y_3)) \right\}$$

$$= \max \left\{ -2+3, 0+0 \right\} = 1 \quad y \quad y_2^*(x_2) = y_1$$

$$g_2(x_3) = \max_{y \in Y(x_3)} \left[ u(x_3,y)+g_1( \mathcal{T}(x_3,y)) \right]$$

$$= \max \left\{ u(x_3,y_2)+g_1( \mathcal{T}(x_3,y_2)), u(x_3,y_3) + \right.$$

$$\left. + \; g_1( \mathcal{T}(x_3,y_3)) \right\}$$

$$= \max \left\{ 3+0, \quad -1+3 \right\} = 3 \quad y \quad y_2^*(x_3) = y_2$$

En la tercera etapa:

$$g_3(x_1) = \max_{y \in Y(x_1)} \left[ u(x_1,y) + g_2( \mathcal{T}(x_1,y)) \right]$$

$$= \max \left\{ u(x_1,y_2)+g_2( \mathcal{T}(x_1,y_2)), u(x_1 y_1) + \right.$$

$$\left. + \; g_2( \mathcal{T}(x_1,y_1)) \right\}$$

$$= \max \left\{ 1+3, \; 3+1 \right\} = 4 \quad y \quad y_3^*(x_1) = y_2 , y_1$$

Continuando con las cálculos se obtiene la siguiente tabla:

| $x$ | $g_1(x)$ | $y_1^*(x)$ | $g_2(x)$ | $y_2^*(x)$ | $g_3(x)$ | $y_3^*(x)$ | $g_4(x)$ | $y_4^*(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | $y_1$ | 4 | $y_2$ | 4 | $y_1$ o $y_2$ | 5 | $y_2$ |
| $x_2$ | 0 | $y_3$ | 1 | $y_1$ | 1 | $y_1$ o $y_3$ | 2 | $y_1$ |
| $x_3$ | 3 | $y_2$ | 3 | $y_2$ | 4 | $y_2$ | 4 | $y_2$ |

donde puede observarse que a partir de la tercera etapa los valores de la función de decisión óptima estacionaria son:

$$y_i^*(x_1)=y_2;\ y_i^*(x_2) = y_1;\ y_i^*(x_3)=y_2,\ \text{para}\quad i \geqslant 3.$$

Una política formada por este tipo de decisiones se denominará política estacionaria.

Como conclusión se puede afirmar que las ecuaciones de recurrencia 2.28 y 2.41 y los esquemas de cálculo basados en las mismas, pueden aplicarse para determinar políticas (y trayectorias) óptimas en todos los procesos controlables que se desarrollan en etapas y cuyas funciones objetivos se descomponen prospectiva y/o retrospectivamente.

# CAPITULO III

# PROBLEMA DE LA DIMENSION EN PROGRAMACION DINAMICA.

## Introducción.

En las secciones anteriores se ha construído el esquema de cálculo de la Programación Dinámica.

Si las variables de estado y decisión son unidimensionales los procedimientos se aplican directamente, sin embargo, cuando estas variables son vectores de mayor dimensión, las fórmulas establecidas en 2.3.1 y 2.3.2. presentan grandes dificultades desde el punto de vista del cálculo, pues el número de operaciones necesarias para estimar $g_n$ y $y_n^*$ (ó $h_n$ y $y_n^*$) crecería rápidamente dependiendo de la dimensión de las variables; incluso para dimensiones relativamente pequeñas resulta imposible efectuar los cálculos necesarios.

Entre los instrumentos matemáticos que permiten reducir la dimensión del problema y por tanto hacerlo accesible al cálculo, se señala un método que resulta de una síntesis entre las ecuaciones de recurrencia de la programación dinámica y el método de los multiplicadores de Lagrange.

Esta síntesis permite descomponer el problema dado en una serie de problemas más simples, de menor dimensión.

El procedimiento tendrá su base en resultados sobre óptimos condicionados que se detallarán en esta sección.

## 3.1.- Métodos de los multiplicadores de Lagrange.

En el espacio $\mathbb{R}^k$ se utilizará la relación de orden que se denotará $\leqslant$ , definida como sigue: para todo

$x=(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$, $0 \leqslant x \Longleftrightarrow x_i \geqslant 0$, $\forall i$, $i= 1,2,\ldots,k$

y $x \leqslant y \Longleftrightarrow 0 \leqslant y-x$

Considérense las funciones $f$ y $a_i$, $i=1,\ldots,m$ con valores reales definidos en un conjunto $X \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Se denotará con $a(x)$ al vector:

$$a(x)=(a_1(x),\ldots,a_m(x)),x \in X$$

Teorema 3.1.1. Sea $u \in \mathbb{R}^m$ un vector de componentes positivas. Si $x^*$ es una solución óptima del problema de programación no lineal:

$$\max \left\{ f(x)-u'a(x):x \in X \right\}, \qquad (3.1)$$

entonces $x^*$ es también solución óptima del problema:

$$\max \left\{f(x):a(x) \leqslant a(x^*),x \in X\right\} \qquad (3.2)$$

Demostración: Dado que $x^*$ es solución óptima del problema (3.1) resulta que:

$$f(x^*)-u' \, a(x^*) \geqslant f(x)-u' \, a(x) \qquad \forall x \in X$$

Sea $P = \left\{ x \in X : a(x^*) \geqslant a(x) \right\}$, entonces $x^* \in P$ y $f(x^*) \geqslant f(x)+u' \left[ a(x^*)-a(x) \right] \geqslant f(x) \quad \forall x \in P$ luego $x^*$ es solución óptima de (3.2).

El planteamiento central del problema de reducción de la dimensión sería el siguiente:

Considérese el problema de programación no lineal

$$\max \left\{ f(x) : a(x) \leqslant 0, x \in X \right\} \tag{3.3}$$

y supóngase que existe una solución óptima $x^o$ de (3.1) correspondiente a un vector $u^o \geqslant 0$.

Si $a(x^o)=0$, el teorema anterior muestra que $x^o$ es solución óptima de (3.3).

Si $a(x^o) \neq 0$, se plantea la siguiente interrogante: ¿Es posible elegir un nuevo vector $u^1 \geqslant 0$ de tal manera que la solución óptima de (3.1) correspondiente a este vector, proporcione una mejor aproximación del vector $a(x^1)$ a cero?

Los siguientes resultados garantizarán que bajo ciertas condiciones esto es posible.

<u>Teorema 3.1.2</u>. Sean $x^o$ y $x^1$ soluciones óptimas del problema (3.1) que corresponden respectivamente a los multiplicadores de Lagrange $u=u^o \geqslant 0$ y $u=u^1 \geqslant 0$.

Si:

$$a_i(x^o)=a_i(x^1) \qquad \forall i \neq k \tag{3.4}$$

y

$$a_k(x^o) > a_k(x^1) \tag{3.5}$$

entonces

$$u_k^o \leqslant \frac{f(x^o) - f(x^1)}{a_k(x^o)-a_k(x^1)} \leqslant u_k^1 \tag{3.6}$$

<u>Demostración</u>: Puesto que $x^o$ es solución óptima del problema (3.1) que corresponde al multiplicador de Lagrange $u=u^o \geqslant 0$, se tiene que:

$$f(x^o)-(u^o)'a(x^o) \geqslant f(x)-(u^o)' a(x), \forall x \in X \tag{3.7}$$

Esta desigualdad puede escribirse de la forma siguiente:

$$f(x^o)-f(x) \geqslant u_k^o \left[a_k(x^o)-a_k(x)\right] + \tag{3.8}$$

$$+ \sum_{i \neq k} u_i^o \left[a_i(x^o)-a_i(x)\right]$$

Si $x=x^1$ de (3.4) y (3.5) se tiene que:

$$f(x^o)-f(x^1) \geqslant u_k^o \left[a_k(x^o)-a_k(x^1)\right]$$

de donde se obtiene que:

$$u_k^o \leqslant \frac{f(x^o) - f(x^1)}{a_k(x^o) - a_k(x^1)}$$

que es la primera desigualdad de (3.6). Análogamente se deduce la segunda.

<u>Corolario 3.1.1</u>. Considérese las soluciones óptimas $x^o(u^o)$ y $x^o(u^1)$ de (3.1), correspondientes a los multiplicadores de Lagrange $u^o \geqslant 0$, $u^1 \geqslant 0$.

Si $a_i(x^o(u^o)) = a_i(x^o(u^1))$ para $i \neq k$, entonces, se cumple la siguiente implicación:

$$u_k^1 < u_k^o \Longrightarrow a_k(x^o(u^o)) \leqslant a_k(x^o(u^1)).$$

En efecto, identificando las relaciones (3.4) y (3.5) con las letras p y q, respectivamente y con r la relación $u_k^o \leqslant u_k^1$, extraída de (3.6), se tiene en particular que $(p \wedge q) \Longrightarrow r$, lo cual es equivalente a que:

$p \Longrightarrow (\sim r \Longrightarrow \sim q)$.

Transcribiendo esta proposición se obtiene el corolario.

Observación.

En adelante se denotarán con $x^o(u)$ las soluciones del problema (3.3), para cada $u \geq 0$.

Sea $u^o \geq 0$ un multiplicador de Lagrange (M.L.) cuyas componentes se denotarán con $u_i^o$, $1 \leq i \leq m$ y $k \in \{1,2,...,m\}$

Se asignará a cada elemento $u_k^k$ de la semirrecta $[o, \infty)$ una solución del problema (3.1) que se denotará $x^o(u^k)$, cuyo multiplicador asociado estará definido de la siguiente manera:

$$u_i^k = \begin{cases} u_i^o & \text{si} \quad i \neq k \\ \\ u_k^k & \text{si} \quad i = k. \end{cases}$$

En base a los resultados anteriores se describe el proceso de búsqueda del vector u tal que la solución óptima de (3.1) proporcione una mejor aproximación de a(x(u)) a cero y así (x(u)) se aproxime a la solución de (3.3) de la manera siguiente:

1º. Escójase un vector $u^o \geq 0$ y resuélvase por los métodos usuales el problema:

$$\max \left\{ f(x) - (u^o)' a(x) : x \in X \right\} \qquad \text{(a)}$$

Sea $x^o(u^o)$ una solución óptima.

Si $a(x^o(u^o))=0$ el problema (3.3) queda resuelto (por el teorema 3.1.1).

2º. Si $a(x^o(u^o)) \neq 0$ considérese la primera componente $a_k(x^o(u^o))$ distinta de cero y sea $X' = \left\{ x \in X : \forall i \neq k, a_i(x) = a_i(x^o(u^o)) \right\}$

2.a. Si $a_k(x^o(u^o)) < 0$. Defínase el M.L. $u^{k_o}$ como sigue:

$$u_i^{k_o} = \begin{cases} u_i^o, & \text{si} \quad i \neq k \\ \\ u_k^{k_o} & \text{tal que} \quad u_k^{k_o} < u_k^o, \ \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

y resuélvase el problema:

$$\max \left\{ (f(x) - (u^k)' \ a(x) : x \in X' \right\} \qquad \text{(b)}$$

Si $x^o(u^{k_o})$ es una solución del mismo, por el teorema 3.1.1 $x^o(u^{k_o})$ es solución del problema:

$$\max \left\{ f(x) : a(x) \leqslant a(x^o(u^{k_o})), \ x \in X' \right\} \qquad \text{(c)}$$

aplicando el corolario 3.1.1 a los óptimos $x^o(u^o)$ y $x^o(u^{k_o})$ resulta que:

$$a_k(x^o(u^o)) \leqslant a_k(x^o(u^{k_o}))$$

Si $a_k(x^o(u^{k_o})) = 0$ se detiene el cálculo y se pasa a considerar la siguiente componente de $a(x^o(u^o))$ distinta de cero, pero si aún, $a_k(x^o(u^{k_o})) \leqslant 0$, se procede como antes, definiendo un nuevo multiplicador $u^{k_1}$, considerando un $u_k^{k_1}$

tal que $u_k^{k_1} < u_k^{k_o}$ y así sucesivamente.

Si para algún $k_p$ resulta que $a_k(x^o(u^{k_p})) > 0$, considérese un nuevo multiplicador $u_k^{k_{p+1}}$ tal que:

$$u_k^{k_p} < u_k^{k_{p+1}} < u_k^{k_{p-1}}$$

y continúese este proceso hasta obtener el valor deseado $a_k(x^o(u^{k_\lambda}))=0$, $\lambda \geqslant p+1$, o bien una aproximación al mismo.

2.b. Si $a_k(x^o(u^o)) > 0$, defínase un M.L $u^{k_o}$ tal que:

$$u_i^{k_o} = \begin{cases} u_i^o & \text{si} \quad i \neq k \\ \\ u_k^{k_o} & \text{tal que} \quad u_k^{k_o} > u_k^o \quad \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

y resuélvase el problema (b).

Si $u^o(u^{k_o})$ es solución de (b), por el teorema 3.1.1. $x^o(u^{k_o})$ es solución del problema (c).

Aplicando el corolario 3.1.1. a los óptimos $x^o(u^{k_o})$ y $x^o(u^o)$, como $u_k^o < u_k^{k_o}$, entonces:

$$a_k(x^o(u^{k_o})) \leqslant a_k(x^o(u^o))$$

Si $a_k(x^o(u^{k_o})) = 0$ se detiene el proceso con respecto a esta componente y se pasa a la siguiente distinta de cero. Si aún, $a_k(x^o(u^{k_o})) > 0$ se continuará el proceso dual del paso 2.a.

La aplicación reiterada del proceso antes descrito permite aproximar a cero el valor de $a_k(x^o(u))$. Bajo ciertas condiciones es posible obtener como valor de $a_k(x^o(u))$ precisamente al cero, ya sea en un número finito de pasos o generando una sucesión de números reales no negativos $u^k$, $k \geqslant 0$, que representan los valores atribuídos al multiplicador de Lagrange u; es decir, en ciertas condiciones, que dependerán de la naturaleza del problema, el proceso es convergente. (ver [8] pág. 121 y [11] ).

En la siguiente sección se verá a través de un ejemplo cómo se utiliza esta aproximación de la función a(x(u)) a cero en la reducción de la dimensión de un problema de Programación Dinámica.

## 3.2.- Un problema de transporte.

En esta sección, se aplicará el método descrito anteriormente, estudiando el problema de organizar el transporte de marcancías que es de gran importancia en la economía matemática. Se analizará el caso en que un solo tipo de mercancía está involucrado.

Se llamarán orígenes a los puntos $1,2,\ldots,m$ donde la mercancía está disponible en cantidades $a_1,a_2,\ldots,a_m$ y destinos a los puntos $1,2,\ldots,n$ donde la mercancía es demandada en cantidades $b_1,b_2,\ldots,b_n$ respectivamente.

Se supone que se satisface la condición:

$$a_1+a_2+\ldots+a_m=b_1+b_2+,\ldots,b_n \tag{3.9}$$

Sean $f_{ij}, i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$ las funciones de costo de transporte, entonces, si del origen i se expide la cantidad $y_{ij}$ al destino j, el costo de transporte será el valor asignado $f_{ij}(y_{ij})$.

Se tiene entonces el siguiente problema de programación:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_{ij}) \tag{3.10}$$

sujeto a las restricciones siguientes:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i \qquad 1\leqslant i\leqslant m \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j \qquad 1\leqslant j\leqslant n \tag{3.12}$$

$$y_{ij} \geqslant 0 \ , \quad i=1,2,\ldots,m \ ; \quad j=1,2,\ldots,n \tag{3.13}$$

Si las $f_{ij}$ son lineales se obtiene el bien conocido problema de transporte, pero en general este es un problema de programación no lineal.

Se procederá ahora a convertir este problema en un problema de Programación Dinámica.

Las variables de decisión serán las $y_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $1 \leqslant j \leqslant n$.

y para cada $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, se considerará el vector:

$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj}) \tag{3.14}$$

Las variables de estado estarán dadas por las relaciones

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{j} y_{ik}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.15}$$

que representan la cantidad transportada desde el origen $i$ a los primeros $j$ destinos y el estado del sistema en el "momento $j$" se indicará por el vector:

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}) \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.16}$$

Por convención el estado inicial será:

$$x_o = \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{\text{m-posiciones}}$$

Obsérvese que:

$$x_j = \left( \sum_{k=1}^{j} y_{1k}, \quad \sum_{k=1}^{j} y_{2k}, \ldots, \sum_{k=1}^{j} y_{mk} \right)$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{j-1} y_{1k}, \quad \sum_{k=1}^{j-1} y_{2k}, \ldots, \sum_{k=1}^{j-1} y_{mk} \right) + (y_{1j}, \ldots, y_{mj})$$

es decir, para cada $1 \leqslant j \leqslant n$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} & x_j = x_{j-1} + y_j & 1 \leqslant j \leqslant n \\ \text{ó} & & \\ & x_{j-1} = x_j - y_j & 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

y de (3.13) resulta que:

$$0 \leqslant y_j \leqslant x_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.18}$$

El estado final $x_n$ al cual se ha de llegar es aquel en que se ha transportado toda la existencia del recurso. O sea, de (3.16) (3.15) y (3.11) resulta:

$$x_n = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \tag{3.19}$$

El conjunto de decisiones que pueden adoptarse en el momento j, si el sistema se encuentra en el estado x, es:

$$Y_j'(x)=\left\{ y=(y_1,y_2,\dots,y_m):\ 0\leqslant y\leqslant x,\ \sum_{i=1}^{m} y_i=b_j \right\} \qquad (3.20)$$

por lo tanto el problema (3.10) - (3.13) es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \min \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f_{ij}(y_{ij}) \\ y_j \in Y_j'(x_j) \\ x_{j-1} = x_j - y_j \qquad 1\leqslant j\leqslant n \end{array}\right\} \qquad (3.21)$$

donde el conjunto de valores accesibles para el estado final $x_n$ es

$$X_n' = \left\{ x\in \mathbb{R}^m:\ x\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i= \sum_{j=1}^{n} b_j \right\} \qquad (3.22)$$

En efecto:

$$y_j \in Y'(x_j) \qquad \text{para} \quad j=1,2,\dots,n$$

equivale a:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\dots,n$$

$$y \quad y_{ij} \geqslant 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n$$

de (3.17) para $j=n$ se obtiene que

$$x_{n-1} = x_n - y_n \qquad \text{ó} \qquad x_{n-1} + y_n = x_n$$

En este caso se han servido todos los destinos y por tanto, comparando coordenada a coordenada en la última igualdad, se obtiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

De esta manera se observa que el problema (3.21)(3.22) tiene las mismas restricciones que el inicial.

Observación: La consideración de las etapas intermedias es un recurso instrumental que transforma el problema (3.10) (3.15) en el problema (3.21)(3.22) de programación dinámica. En realidad nos interesa considerar la última etapa, $j=n$, ya que en este caso se ha distribuído toda la mercancía, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

que es la condición considerada en el problema original.

Si denotamos con $g_n'(x_n)$ el valor mínimo de la función objetivo del problema (3.21)(3.22), la relación de recurrencia para el caso retrospectivo es: (ver 2.28)

$$g'_n(x_n)=\min \left[\sum_{i=1}^{m} f_{in}(y_{in})+g'_{n-1}(x_n-y_n)\right] \qquad (3.23)$$

Estas relaciones de recurrencia son similares a las obtenidas en 2.3.1 y las dificultades relacionadas con su resolución numérica son considerables.

En efecto, si a cada componente del vector y se le asigna 100 valores distintos para la división en algún esquema de interpolación (ver la observación de pág. 31 ), entonces el vector y tendrá $10^{2m}$ valores distintos; si además se considera que en la manipulación de las ecuaciones de recurrencia (3.23) se trabaja simultáneamente con las $g'_{n-1}, g'_n$ y con la función de decisión óptima correspondiente, se observa fácilmente que la resolución numérica de los problemas de la forma (3.10)-(3.13) resulta técnicamente inabordable aún para valores de m relativamente pequeños.

Las consideraciones anteriores indican la conveniencia de reducir la dimensión del problema, un primer paso es el de observar que las relaciones (3.12) permiten escribir cada componente del vector y, en términos de las m-1 componentes restantes; esto quiere decir que la dimensión de y es m-1.

Si se pone: $y_{mj} = b_j - \sum_{i=1}^{m-1} y_{ij}$,

el problema (3.21) toma la forma siguiente:

$$\min_{y_j \in Y_j'(x_j)} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m-1} f_{ij}(y_{ij}) + f_{mj}\left(b_j - \sum_{i=1}^{m-1} y_{ij}\right)\right) \qquad (3.24)$$

$$x_{i,j-1} = x_{ij} - y_{ij} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1; \quad 1 \leqslant j \leqslant n \qquad (3.25)$$

donde $Y_j'(x_j) = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) : 0 \leqslant y \leqslant x : \sum_{i=j}^{m-1} y_i \leqslant b_j \right\}$ (3.26)

es el conjunto de las decisiones que se pueden adoptar en el momento j, si el sistema se encuentra en el estado $x_j$ y el conjunto de los estados finales es:

$$X_n' = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : x \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m-1} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \right\} \qquad (3.27)$$

El estado final que nos interesa es $x_n = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, entonces el problema (3.24) - (3.25) puede escribirse como sigue:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m-1} f_{ij}\ (y_{ij}) + f_{mj}\left(b_j - \sum_{i=1}^{m-1} y_{ij}\right)\right) \qquad (3.28)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1 \tag{3.29}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} y_{ij} \leqslant b_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.30}$$

$$y_{ij} \geqslant 0 \,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1 \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.31}$$

La dimensión puede reducirse ahora utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange propuesto en la sección 3.1.

Considérese para esto un M.L. $u_{\gamma} \geqslant 0$. El problema (3.28) - (3.31) queda como sigue:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m-1} f_{ij}(y_{ij}) + f_{mj}\left(b_j - \sum_{i=1}^{m-1} y_{ij}\right) - u\, y_{m-1,j} \right) \tag{3.32}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-2 \tag{3.33}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} y_{ij} \leqslant b_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.34}$$

$$y_{ij} \geqslant 0 \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant m-2 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{3.35}$$

Aplicando el esquema de cálculo de la fig. 1, para un valor fijo de $u=u^{o} \geqslant 0$, se obtiene una política óptima $y^{*}_{ij}(u^{o})$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, que es también óptima (por el teorema 3.1.1), para el problema (3.32) - (3.35) con la siguiente restricción adicional:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{m-1,j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} y^{*}_{m-1,j}(u^{o}) \tag{3.36}$$

Si resulta que

$$\sum_{j=1}^{n} y^{*}_{m-j,j}(u^{o}) = a_{m-1} \tag{3.37}$$

la política $y^{*}_{ij}(u^{o})$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, es una solución óptima del problema (3.28) - (3.31), de lo contrario, se procede del modo siguiente:

Si $$\sum_{j=1}^{n} y^{*}_{m-1,j}(u^{o}) < a_{m-1} \tag{3.38}$$

# C O N C L U S I O N E S

se reemplaza $u^o$ por $u^1$ con $u^1 < u^o$, como lo indica el proceso de la sección 3.1 para obtener

$$\sum_{j=1}^{n} y^*_{m-1,j}\ (u^1) > \sum_{j=1}^{n} y^*_{m-1,j}\ (u^o) \tag{3.39}$$

ya que la función $u \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} y^*_{m-1,j}(u)$ es decreciente en el intervalo $[0, \infty)$ (ver corolario 3.1.1).

Análogamente, si:

$$\sum_{j=1}^{n} y^*_{n-1,j}\ (u^o) > a_{m-1} \tag{3.40}$$

se elige $u^1, u^1 > u^o$, para obtener la desigualdad en sentido contrario al de (3.39), etc.

Queda ilustrada así, la utilidad del proceso expuesto en la sección anterior en la reducción de la dimensión en un problema de Programación Dinámica.

El principio de optimalidad de Richard Bellman es el fundamento de los análisis prospectivo y retrospectivo los cuales permiten determinar la política y la trayectoria óptimas, de un problema de la programación dinámica.

Si para un proceso controlable que se desarrolla en etapas la función objetivo admite descomposición prospectiva o retrospectiva, ella puede ser utilizada para calcular política y trayectoria óptimas a través de las ecuaciones de recurrencia 2.28 y 2.41 y los esquemas de cálculo correspondientes. Es claro que existen problemas de optimización que pueden ser resueltos con métodos de programación dinámica aunque en su forma original, no pueden ser concebidos como procesos secuenciales de decisiones (ver 3.2).

En un problema de programación dinámica estacionario las funciones de utilidad, de decisión y paso son las mismas en cada una de las etapas del proceso. En el caso semi-estacionario la función de utilidad puede variar de una etapa a la otra.

El corolario 3.1.1 nos permite aproximar tanto como querramos el valor $a_k(x^o(u_k))$ a cero, proceso este que converge bajo ciertas condiciones que dependen de la naturaleza del problema (ver [8] pag 121 y [11] ). Esto nos pone en condiciones de reducir la dimensión de las variables para facilitar la resolución de un problema de programación dinámica.

# BIBLIOGRAFIA

[1] Bellman, Richard. Dynamic Programming. A Rand Corporation Research Study Published. Princeton University Press London: Oxford University Press. 1957.

[2] Bellman, R.Dreyfus Stuart. Applied Dynamic Programming. Rand Corporation Published Princeton University Press. 1962.

[3] Boldur-Lățescu G. Săcuiu I. Tigănescu E. Cecetare Operațională cu Aplicații în Economie. Editura Didactică și Pedagogică. București. 1979

[4] Fuentes Maya. Determinación de Políticas de Asignación de Agua en Presas y Acuiferos. Curso Taller. Editado por Subsecretaría de Infraestructura Hidráulica. México. D.F. 1985.

[5] Howard, Ronald A. Dynamic Programming and Markov Processes. The Massachusetts Institute of Technology. 1969.

[6] Kaufmann, A. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. II Tomo Compañía Editorial Continental S,A. México D.F. 1980.

[7] Kaufmann, A. Cruon R. La Programmation Dynamique. Paris, Dunod. 1965.

[8] Luenberger, David. Introduction to Linear and Nonlinear Programming. Addison Wesley Publishing Company. 1973.

[9] Nemhauser, George. Introduction to Dynamic Programming. John Wiley and Sons. Inc. 1966.

[10] Popescu H. Chiroiu V. Calculul Structurilor Optimale. Editura Academiei Republicii Socialiste Românîa. 1981.

[11] Popovici, Constantin P. Curs de Teoria Algoritmilor Funcţii Recursive. Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematica. 1976

[12] Prawda, Juan. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Editorial Limusa. México D.F. 1982.

[13] Ştefănescu, Anton. Curs de Cercetări Operaţionale. Universitatea Din Bucureşti. Facultatea de Matematica. 1982.

[14] Thierauf, R. Grosse R. Toma de Decisiones por Medio de Investigación de Operaciones. Editorial Limusa. México D.F. 1982.

[15] Zidăroiu, C. Malita, M. Matematica Organizării. Editura Tehnică. Bucureşti. 1975.

[16] Zidăroiu, Cornelio. Progamare Dinamică Discretă. Editura Tehnică. Bucureşti. 1975.