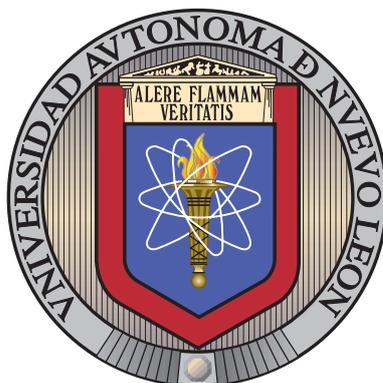


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO DE UNA RED DE TRANSPORTE CON UN  
MODELO BI-OBJETIVO PARA OPTIMIZAR EL  
TIEMPO DE VIAJE Y COSTO DE TRANSBORDOS.

POR

KARLA ISABEL CERVANTES SANMIGUEL

EN OPCIÓN AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS  
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

SEPTIEMBRE 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO DE UNA RED DE TRANSPORTE CON UN  
MODELO BI-OBJETIVO PARA OPTIMIZAR EL  
TIEMPO DE VIAJE Y COSTO DE TRANSBORDOS.

POR

KARLA ISABEL CERVANTES SANMIGUEL

EN OPCIÓN AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS  
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

SEPTIEMBRE 2021

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Diseño de una red de transporte con un modelo bi-objetivo para optimizar el tiempo de viaje y costo de transbordos.”, realizada por la alumna Karla Isabel Cervantes Sanmiguel, con número de matrícula 1620533, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

---

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas  
Director

---

Dra. María Victoria Chávez Hernández  
Co-Directora

---

Dr. José Fernando Camacho Vallejo  
Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas  
Coordinador del Posgrado en Ciencias con  
Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Septiembre 2021

*Para mis padres Isabel y Carlos,  
mis hermanos Jair y Alan,  
a mi inspiración Luis Ángel,  
y a nuestra alegría Kiper.*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planificación de transporte público . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Motivación y justificación . . . . .	3
<b>2. Revisión de Literatura</b>	<b>4</b>
2.1. Nivel de servicio considerando transbordos . . . . .	4
2.2. Enfoques Multi-objetivo . . . . .	7
<b>3. Planteamiento del problema</b>	<b>11</b>
3.1. Descripción del problema . . . . .	11
3.2. Red Extendida . . . . .	13
3.3. Formulación matemática . . . . .	17
<b>4. Metodología de solución</b>	<b>21</b>
4.1. Optimización multi-objetivo . . . . .	21
4.2. Método $\varepsilon$ -constraint . . . . .	22

---

<b>5. Resultados Experimentales</b>	<b>25</b>
5.1. Instancia: Red de Mandl . . . . .	25
5.2. Resultados . . . . .	27
5.2.1. Líneas atractivas para el sistema de transporte. . . . .	29
5.2.2. Frentes de Pareto . . . . .	30
<b>6. Conclusiones y Trabajo a Futuro</b>	<b>36</b>

# AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco principalmente a mis padres Isabel Sanmiguel y Carlos Cervantes, quienes siempre me apoyaron y alentaron a avanzar. Gracias al Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas quien brindó sus conocimientos y apoyo incondicional, además de paciencia y dedicación, para que este trabajo se llevara a cabo. Agradezco a la Dra. María Victoria Chávez Hernández por compartir sus conocimientos, por hacerme ver más allá de lo que estaba frente a mí y ayudarme a ser mejor. Gracias al Dr. José Fernando Camacho Vallejo por los comentarios y observaciones hechos a esta investigación. Agradezco también al M.I. Luis Ángel Alvarado Leal quien estuvo motivándome todo el tiempo y tranquilizándome en momentos de incertidumbre. Gracias a todo el Grupo de Investigación de Transporte, quienes siempre estuvieron acompañándome en este camino y haciéndolo más agradable. Agradezco también a la UANL, a la FCFM y al CICFIM por toda la atención y servicios proporcionados para iniciar y concluir de manera satisfactoria mi maestría. Finalmente, gracias al CONACYT por el apoyo brindado, ya que sin este no hubiera sido sencillo llevar a cabo mis estudios.

# RESUMEN

---

El proceso de planificación de un sistema de transporte público se plantea como una secuencia de problemas de toma de decisiones sistemática que se divide en 5 etapas: 1) diseño de red de líneas; 2) cálculo de frecuencias; 3) diseño de horarios; 4) programación de vehículos; y 5) programación de conductores (Ceder and Wilson, 1986). En este trabajo se aborda la etapa de diseño de red de líneas de transporte tomando en cuenta decisiones sobre las frecuencias de las líneas.

En este estudio, consideramos como dada la infraestructura de una ciudad de paraderos y calles, un conjunto de posibles líneas a implementar, un conjunto de frecuencias factibles para cada una de ellas, e información de la demanda por pares origen-destino. En base a lo anterior, el problema de Diseño de Red de Transporte Bi-Objetivo (**DRTB**) determina el conjunto de líneas a usar y sus frecuencias minimizando el tiempo total de viaje de todos los pasajeros y el costo monetario de transbordos, satisfaciendo restricciones de la demanda, la capacidad de buses y de calles, un máximo número de líneas a implementar y un presupuesto para limitar las frecuencias.

Para formular matemáticamente el problema se diseñó una red extendida de la red de líneas la cual mediante distintos tipos de arcos modela acciones de viaje, espera y transbordo de los pasajeros; de manera similar a la propuesta por Cancela et al., 2015, excepto que no consideramos arcos exclusivos para bajar en un destino. Una vez obtenida la formulación, se implementó un algoritmo  $\varepsilon$ -constraint con CPLEX a la red de Mandl, la cual es usada por diversos estudios para probar los métodos propuestos (Mauttone and Urquhart, 2009, Cancela et al., 2015, etc). Los resultados muestran que resolviendo 200 problemas con el método  $\varepsilon$ -constraint, este es capaz de encontrar buenas aproximaciones del frente de Pareto en tiempo computacional razonable para la red de Mandl para sistemas de transporte con diversos conjuntos de posibles líneas a implementar y distintos valores del máximo número de líneas. Además, analizando las soluciones no dominadas encontradas, es posible identificar las líneas más atractivas para el sistema de transporte mientras se consideran ambos objetivos.

---

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

Una movilidad eficiente por medio del transporte público es un indicador de desarrollo de las zonas urbanas. Trasladarse de un lugar a otro se ha convertido en parte de la vida diaria de la mayoría de las personas. Debido a esto, en muchos lugares el medio de transporte dominante son los autos privados, ya que el transporte público de su ciudad no satisface las necesidades de sus habitantes. Esto se vuelve un problema de contaminación y congestión vial con el crecimiento de la población. Por esta razón, es necesario el diseño bien estructurado del sistema de transporte público, y así sea posible aportar una mejora tanto en el desarrollo urbano como en la experiencia de los usuarios. Además de que invertir en transporte público trae beneficios en los sectores de productividad, ambiental, económico, financiero, equidad y salud (Tumlin, 2012).

## 1.1 PLANIFICACIÓN DE TRANSPORTE PÚBLICO

El proceso de planificación de un sistema de transporte público típicamente se plantea como una secuencia de problemas de toma de decisiones sistemática que se divide en 5 etapas: 1) diseño de red de líneas; 2) cálculo de frecuencias; 3) diseño de horarios; 4) programación de vehículos; y 5) programación de conductores (Ceder and Wilson, 1986). En la Figura 1.1 se observa como estos problemas abordan los tres niveles de decisión: estratégico (largo plazo), táctico (mediano plazo) y operacional (corto plazo) (Desaulniers and Hickman, 2007). Sin embargo, debido a la gran cantidad de información, los distintos tipos de objetivos que se pueden considerar y la diversidad de variables involucradas en todas las etapas, resulta complicado darle solución a todas de manera simultánea. Por este motivo, se suele trabajar con problemas más pequeños que sean posibles de abordar (Ibarra-Rojas et al., 2015).

En el problema de Diseño de Red de Tránsito (**DRT**) se construye un conjunto de líneas a implementarse en un sistema y sus frecuencias, optimizando diversos tipos



Figura 1.1: Proceso de planificación de un sistema de transporte.

de objetivos, y considerando limitantes de capacidad de vehículos, longitud y cantidad máxima de líneas, tamaño de flota, entre otras. Las funciones objetivos que se consideran van desde minimizar distintos elementos de los costos de usuario y/o de operadores, así como también considerar externalidades sociales y ambientales (Iliopoulou et al., 2019a; Montalvo-Martel et al., 2021).

En este estudio se trabaja a un nivel de decisiones estratégicas, consideramos como dada la infraestructura de una ciudad de paraderos y calles, un conjunto de posibles líneas a implementar, un conjunto de frecuencias factibles para cada una de ellas, e información de la demanda por pares origen-destino, para que el problema de Diseño de Red de Transporte Bi-objetivo (**DRTB**) determine el conjunto de líneas a usar y sus frecuencias minimizando el tiempo total de viaje de todos los pasajeros y el costo monetario de transbordos, satisfaciendo restricciones de la demanda, capacidad de autobuses y de calles, un máximo número de líneas a implementar y un presupuesto para limitar las frecuencias.

## 1.2 OBJETIVOS

El objetivo general de este estudio es analizar el conflicto entre la reducción de los tiempos de viaje y disminución de costos monetarios de los pasajeros en un sistema de transporte público usando investigación de operaciones para determinar las líneas de transporte y sus frecuencias.

Los objetivos específicos son:

1. Analizar sistemas de transporte para definir un problema de selección de líneas y cálculo de frecuencias en literatura de un contexto específico.
2. Definir una formulación matemática para el problema que optimice nuestra propuesta de funciones objetivos.
3. Implementar un algoritmo de solución para el problema propuesto y analizar su desempeño.

4. Analizar el conflicto que existe entre los objetivos del problema y así proporcionar recomendaciones al tomador de decisiones.

### 1.3 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El problema **DRT** ha sido ampliamente abordado en literatura debido a la importancia de que un sistema de transporte posea una red de tránsito eficiente. Además, la adaptabilidad del problema a distintos tipos de sistemas, desde los más sencillos a los más complejos, hace que sea atractivo para diseñar estas redes (Iliopoulou et al., 2019a).

Por otra parte, sabemos que las transferencias que realizan los pasajeros son poco deseables, ya que involucran costos en términos de tiempo, y también implican dinero para los sistemas de transporte que no cuentan con una integración tarifaria (como sucede en algunas ciudades en Latinoamérica). Sin embargo, son una parte importante del sistema y no pueden ser eliminadas debido a que sería muy costoso operacionalmente añadir líneas de transporte que cubran de manera directa cada par origen destino que exista. Pero un sistema en donde se tengan que realizar una gran cantidad de transbordos para poder llegar al destino es poco deseable ya que además de las molestias, implican costos monetarios adicionales para los pasajeros. Por otro lado, los tiempos de viaje y de espera también son asociados al nivel de servicio por los usuarios. Debido a lo anterior, decidimos estudiar ambos aspectos importantes para los pasajeros los costos monetarios y los tiempos totales de viaje.

Haciendo una revisión de literatura, encontramos que el análisis del conflicto entre la reducción de los tiempos totales de viaje y disminución de costos monetarios de los pasajeros no es analizado frecuentemente (véase la Sección 2). Lo anterior es de nuestro interés, debido a que estos dos aspectos son importantes para los pasajeros, ya que nos permite estudiar a un nivel de detalle más profundo las líneas que funcionan mejor en un sistema de transporte y haciéndonos capaces de ofrecer un servicio eficiente que sea atractivo y práctico de utilizar.

---

## CAPÍTULO 2

# REVISIÓN DE LITERATURA

---

Como se menciona en el estudio de Cancela et al. (2015) acerca de modelación matemática en sistemas de transporte, incluir todas las siguientes características es complejo en un problema de **DRT**: (i) la construcción de las líneas de transporte, lo cual suele abordarse con enfoques de dos fases que generan primeramente conjuntos de líneas, para después hacer la selección y el cálculo de frecuencias (Jha et al., 2019); (ii) la representación de los eventos de transbordo, que en base a si son limitados o ilimitados, genera diferentes formulaciones y enfoques de solución (Moghaddam et al., 2019); y (iii) el comportamiento de los usuarios que se modela con el problema de asignación de pasajeros, el cual es más complejo en el caso de un sistema capacitado y con congestión (Cancela et al., 2015).

Nuestra revisión de literatura se enfoca en las características de los eventos de transbordo y enfoques multi-objetivo, ya que están directamente relacionados con nuestro problema de interés. Se eligieron los trabajos mayormente a partir del año 2015.

## 2.1 NIVEL DE SERVICIO CONSIDERANDO TRANSBORDOS

Los sistemas de transporte público dependen en gran parte de los transbordos entre líneas y distintos modos de transporte para ofrecer un servicio eficiente. Sin embargo, una mala gestión de estos pueden crear obstáculos para los pasajeros y provocar desaliento en cuanto al uso del sistema de transporte (Vuchic, 2004).

Comunmente, los estudios de literatura asumen una cantidad limitada de  $n$  transbordos a fin de mantener un cierto nivel de servicio y los pasajeros que ocupen más de  $n$  transferencias, se consideran usuarios insatisfechos. Por ejemplo, los estudios de Islam et al. (2019), Buba and Lee (2018), Buba and Lee (2016) y Zhao et al. (2015), se enfocan únicamente en la optimización de los costos de los usuarios, en términos de tiempo total de viaje, número de transbordos, y cantidad de pasajeros no satisfechos, entre otros. En particular, Islam et al. (2019) presentan un heurístico combinado con el enfoque de

la meta-heurística búsqueda de haz estocástico para optimizar el tiempo total de viaje, transferencias y pasajeros no satisfechos para determinar las rutas óptimas. El algoritmo es probado en la instancia de referencia de Mandl y en un caso de estudio para la Ciudad Dhaka, Bangladesh. Los resultados obtenidos muestran que para conjuntos de datos grandes, las soluciones encontradas en menos de un segundo por el heurístico son mejores que las soluciones generadas en dos horas por el algoritmo de Nayeem et al. (2014). Por otra parte, Buba and Lee (2018) proponen un algoritmo con un enfoque de evolución diferencial para determinar simultáneamente el conjunto de líneas y sus frecuencias asociadas mientras se minimiza el costo del pasajero y demanda insatisfecha. Para evaluar el método, fue probado con la red de Mandl donde los resultados mostraron que el algoritmo supera a los enfoques de Baaj and Mahmassani (1991), Asadi Bagloee and Ceder (2011), Mandl (1980), Shih and Mahmassani (1994) y Zhao et al. (2015) excepto a Nikolic and Teodorovic (2014) en términos de tiempo de viaje total mínimo producido para todas las líneas consideradas en el estudio. Más aún, Buba and Lee (2016) presentan un algoritmo para mejorar la calidad de los conjuntos de líneas candidatas iniciales en términos de factibilidad. Además, proponen un algoritmo clásico de evolución diferencial para resolver el problema. Los experimentos computacionales fueron realizados con la red de Mandl donde se observa que el algoritmo de reparación superó significativamente a otros mecanismos (Reparación de terminal, Hacer-Pequeño-Cambio, Inversión de sub-ruta) con el tiempo de CPU más rápido. Mientras que el algoritmo de evolución diferencial muestra ser competitivo con Mandl (1980), Baaj and Mahmassani (1991), entre otros. Por último, Zhao et al. (2015) proponen un algoritmo memético para determinar el conjunto de líneas óptimo y sus frecuencias optimizando los costos de usuario y demanda insatisfecha. El método fue probado en la red de Mandl en donde los resultados muestran que puede mejorar aún más la solución en relación con algoritmos de uso común.

A diferencia de estos trabajos, nosotros estamos interesados en la satisfacción total de la demanda y una cantidad de transbordos ilimitados a fin de estudiar en compromiso entre costos monetarios y tiempo de viaje.

Por otro lado, de manera similar, en Pternea et al. (2015) las transferencias son limitadas al momento de asignar la demanda y existen pasajeros que se quedan como demanda insatisfecha. Sin embargo, los objetivos se enfocan en minimizar costos operacionales y de emisiones, además de costos de usuarios y pasajeros no satisfechos. Para resolver el problema, se propone un enfoque iterativo junto con un algoritmo genético que resuelve el modelo el cual es probado en una red de la Ciudad de Heraklion, Grecia. Los resultados muestran ser sensibles a los cambios parámetros, por ejemplo, la velocidad promedio de los autobuses afecta los tiempos de viaje y el tamaño de la flota mientras el porcentaje de demanda cubierta depende de la distancia que los pasajeros estén dispuestos

a caminar, así como la contaminación del aire depende de la velocidad de los autobuses y de la cantidad de estaciones de carga. Por otra parte, también existe en literatura un enfoque en el que los transbordos son limitados, pero se tiene que cubrir la demanda. Lo anterior puede obligar a que se utilice una mayor cantidad de líneas para esa satisfacción de la demanda. Por ejemplo, el estudio de Moghaddam et al. (2019) optimiza costos operacionales y de usuarios mientras simultáneamente se diseñan las líneas y se calculan las frecuencias. Para encontrar soluciones, abordan dos estrategias: la primera es agregar un conjunto de restricciones a los recursos y la segunda es implementar un operador que reduce la aleatoriedad de un algoritmo genético para aumentar la probabilidad de escoger un conjunto de líneas de mejor rendimiento. Las estrategias fueron probadas en la red de Mandl en donde se observó que las soluciones óptimas dependen la generación restringida de líneas candidatas y del método de búsqueda de la región factible.

Por otro lado, para optimizar tanto los costos de los usuarios como de los pasajeros, diversos estudios han optado por dar un enfoque bi-nivel al problema en donde el nivel superior optimiza costos operacionales y el inferior costos de usuarios (Huang et al., 2018) o viceversa (Iliopoulou et al., 2019b). Por ejemplo, en Huang et al. (2018) se aborda el problema con un enfoque multimodal y mediante tres etapas se busca solucionar el problema. En la primera etapa se propone un algoritmo para determinar el número y ubicación de los hubs para una línea de tren; en la segunda etapa la red multimodal es diseñada mediante un heurístico de dos fases; finalmente, en la tercera etapa se propone un modelo bi-nivel para determinar las frecuencias de cada modo de transporte. Para probar el método, se implementa en la instancia de Mandl donde los resultados muestran que las transferencias aumentan debido a los transbordos en los hubs, mientras que los tiempos en vehículo disminuyen significativamente al implementar otro método de transporte. Por otro lado, Iliopoulou et al. (2019b) proponen un modelo bi-nivel para el problema considerando exclusivamente autobuses eléctricos el cual diseña rutas de tránsito eficientes y ubica la infraestructura de carga requerida. El nivel superior del modelo encuentra las rutas mientras minimiza los costos de usuario y para el problema del nivel inferior se minimiza el número de cargas rápidas. Para resolver el problema, se desarrolló un algoritmo de enjambre de partículas multi-objetivo y fue probado en la instancia de referencia de Mumford de 30 nodos y 90 aristas. Los resultados muestran que los costos operacionales pueden ser reducidos si el tiempo promedio de viaje por pasajero aumenta en un 25% (4 min) y además, se producen una variedad de soluciones no dominadas que pueden ser evaluadas por los tomadores de decisiones. Más aún, en Cancela et al. (2015) plantean una formulación bi-nivel en donde la función objetivo del primer nivel modela el interés de los usuarios determinando las rutas y sus frecuencias, mientras que el nivel inferior la función objetivo modela el comportamiento de los pasajeros. Sin embargo, los experimentos se realizan sobre su modelo base agregando restricciones de capacidad de bus y de máximo

número de líneas sobre las instancias de Mandl y de la ciudad de Rivera, Uruguay. Los resultados muestran que se pueden obtener buenas soluciones aplicando el modelo además de analizar el efecto de acotar el número de líneas.

Debido a la importancia de estudiar el compromiso entre los distintos criterios a optimizar, diversos estudios han abordado el problema desde un enfoque multi-objetivo (Mauttone and Urquhart, 2009). En la siguiente Sección se profundiza en estos trabajos.

## 2.2 ENFOQUES MULTI-OBJETIVO

Típicamente los enfoques multi-objetivo estudian el conflicto entre el nivel de servicio y el costo operacional del sistema. Generalmente el nivel de servicio se mide en términos de tiempos de viaje, de espera y transferencias, mientras que el costo operacional se calcula con el tamaño de la flota, el costo de mantenimiento, los salarios de tripulación, los costos de construcción de infraestructura, las emisiones de gases contaminantes, etc. Por ejemplo, en Mauttone and Urquhart (2009) resuelven el problema **DRT** para analizar el conflicto entre la suma de los tiempos en vehículo, de espera, de transbordo contra el tamaño de flota. Proponen un algoritmo basado en la metaheurística GRASP para resolver el problema con la instancia de referencia de la red de Mandl y un caso de estudio para la ciudad Rivera, Uruguay. Sus resultados muestran que el algoritmo propuesto es capaz de encontrar un conjunto diverso de soluciones no dominadas en una sola corrida y de manera más eficiente que con una suma ponderada.

Respecto a estudios con enfoque multi-objetivo que presentan un modelo, se encuentra el trabajo de Owais and Osman (2018), en donde presentan una formulación matemática que no contiene variables sobre la estructura de las líneas, lo cual deciden implementar en un algoritmo genético. El algoritmo fue probado en la red de Mandl y la red de Rivera, Uruguay, y los resultados muestran que el algoritmo oscila alrededor de los mejores valores además de que es capaz de producir un conjunto de soluciones no dominadas. Por otro lado, en Buba and Lee (2019) presentan una formulación matemática que modela la longitud de las líneas, controla las frecuencias y el flujo, el máximo tamaño de la flota y de líneas en el sistema, además de limitar las transferencias. Para resolver el problema, proponen un algoritmo de optimización híbrido de evolución diferencial–enjambre de partículas y al igual que los trabajos anteriores, fue probado en la red de Mandl y la red de Rivera. Los experimentos muestran que mejoran los resultados obtenidos de estudios como Mandl (1980), Baaj and Mahmassani (1991), Shih and Mahmassani (1994), Zhao et al. (2015), Nikolic and Teodorovic (2014), entre otros. Además, Chai and Liang (2020) desarrollan un modelo que considera congestión para los tiempos de viaje. Debido a la

complejidad del modelo, proponen un algoritmo genético multi-poblacional basado en el marco NSGA-II. Su algoritmo de manera integral genera la red, asigna la demanda y calcula la frecuencia. El método es probado para la red de Mandl y una red de la Ciudad de Baotou, Mongolia Interior. Los resultados muestran la alta convergencia del algoritmo y la aplicabilidad para solucionar un caso de estudio de tamaño real. Por otra parte, recientemente en Liu et al. (2020) se aborda el problema **DRT** considerando autobuses eléctricos. En este trabajo presentan una formulación matemática que además de tomar decisiones sobre las líneas y las frecuencias, deciden donde colocar los depósitos de carga. Además, para los costos operacionales consideran detalles relacionadas con los autobuses eléctricos como la construcción y mantenimiento de los depósitos y costos de la energía eléctrica. El enfoque de solución propuesto está basado en un algoritmo de enjambre artificial de peces de Pareto combinado con operadores de cruce y mutación y fue probado en un caso de estudio de una zona urbana en Beijing. Los resultados muestran que el algoritmo es capaz de proporcionar las soluciones óptimas de Pareto para diseñar una red de tránsito de escala relativamente grande. De manera similar, Tong et al. (2021) considera el problema asumiendo que se tienen buses eléctricos y proponen un modelo considerando que los depósitos de carga son predeterminados. Para dar solución al problema, proponen un algoritmo genético de aprendizaje por refuerzo para resolver el modelo para la red de Mandl y un caso de estudio de la ciudad de Zhengzhou, China. Los resultados muestran que se puede mejorar efectivamente la confiabilidad de viaje de la red de tránsito mientras se considera el costo total como restricción.

Por otra parte, existen trabajos que se enfocan en desarrollar un algoritmo de solución sin necesidad de presentar una formulación matemática del problema. Por ejemplo, Jha et al. (2019) propone una meta-heurística que se divide en dos etapas. La primera se enfoca en generar un conjunto de rutas inicial mediante un procedimiento combinado con un algoritmo genético. La segunda etapa asignan las frecuencias a la líneas determinadas minimizando el tiempo de los pasajeros y los costos operacionales, simultáneamente mediante un algoritmo de optimización del enjambre de partículas multi-objetivo con múltiples estrategias de búsqueda y un algoritmo NSAG-II. El método fue probado en la red de Mandl y los resultados muestran que mejoran las soluciones respecto al porcentaje de viajes directos y tiempo de viaje promedio, además de la robustez para satisfacer la demanda, viajes directos, menos transferencias y menos tiempo de viaje promedio. Por otra parte, Duran et al. (2019) aborda el problema considerando una flota heterogénea con buses de distinta tecnología y tamaño mientras optimiza el tiempo total de viaje y las emisiones de  $CO_2$ . Proponen un algoritmo memético bi-objetivo con el cual resuelven la red de Mandl y la instancia de Mumford (Mumford, 2013) variando la cantidad de nodos y aristas. Los resultados obtenidos prueban que el algoritmo propuesto tiene un buen desempeño alcanzando soluciones con calidad comparable a las reportadas en estudios

del estado de arte, con tiempos de cálculo razonables. Finalmente, Arbex and da Cunha (2015) proponen un heurístico basado en un algoritmo genético para resolver eficientemente el problema **DRT**, en donde los objetivos de costos de pasajeros y costos operacionales alternan ciclicamente a lo largo de las generaciones. El algoritmo se implementó en la red de Mandl en donde los resultados muestran que es muy eficiente, mejorando soluciones para ambos objetivos en conflicto en comparación con los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de asignación, utilizado en su heurístico a los conjuntos de rutas resultantes informados por los autores de Mandl (1980), Baaj and Mahmassani (1991), Mumford (2013), entre otros.

En resumen, nuestro trabajo propone un nuevo problema de optimización bi-objetivo de diseño de red de transporte minimizando los tiempos de viaje promedio y el costo monetario de los pasajeros, y considerando un conjunto dado de líneas potenciales, transbordos ilimitados y capacidad en las calles pero sin congestión. También, diseñamos un modelo matemático para representar nuestro problema propuesto. Todas estas características no fueron encontradas en algún otro trabajo de nuestra revisión de literatura, como se evidencia en la Tabla 2.1. En particular, la primer columna presenta la referencia al estudio; la segunda columna indica si el trabajo es un enfoque de optimización multi-objetivo; la tercer columna muestra si se diseña una formulación matemática para el problema; la cuarta columna indica los objetivos a optimizar, donde “gasto tarifario” se refiere a nuestro costo monetario, y el costo de usuario representa las métricas clásicas del nivel de servicio (en términos de los tiempos de viaje y transbordos); finalmente, la última columna indica si no hay límite en el número de transferencias.

En particular, el costo monetario de los pasajeros debido a eventos de transbordos no se considera comúnmente en la literatura debido a que muchos sistemas de transporte cuentan con una integración tarifaria (no es el caso de todas las ciudades en Latinoamérica). En realidad, el único estudio que minimiza tiempos de viaje y número de transbordos fue encontrado en Szeto and Wu (2010) pero no se analiza desde un punto de vista bi-objetivo debido al costo computacional y el poder de equipo de cómputo en la experimentación (se implementó un algoritmo genético en una computadora con 1.73 GHz y 1GB de RAM).

Estudio	Multi-objetivo	Formulación	Objetivos	Transbordos Ilimitados
Iliopoulou et al. (2019b)		✓	Costos totales (de usuario y operacionales)	
Islam et al. (2019)			Tiempo total de viaje, transferencias, pasajeros no satisfechos	
Moghaddam et al. (2019)		✓	Costos totales (de usuario y operacionales)	
Buba and Lee (2018)		✓	Tiempo total de viaje, pasajeros no satisfechos	
Huang et al. (2018)		✓	Costos totales (de usuario y operacionales)	✓
Buba and Lee (2016)			Promedio de tiempo de viaje	
Cancela et al. (2015)		✓	Tiempo de viaje y de espera	
Pternea et al. (2015)		✓	Costos totales (de usuario y operacionales, emisiones) y pasajeros no satisfechos	
Zhao et al. (2015)		✓	Costos de usuario, costo de pasajeros no satisfechos	
Szeto and Wu (2010)		✓	Tiempo total de viaje, transferencias	
Tong et al. (2021)	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fiabilidad de viaje</li> <li>• Costos totales (de usuario y operacionales)</li> </ul>	✓
Chai and Liang (2020)	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Liu et al. (2020)	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	✓
Buba and Lee (2019)	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Owais and Osman (2018)	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Duran et al. (2019)	✓		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Jha et al. (2019)	✓		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Arbex and da Cunha (2015)	✓		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Mauttone and Urquhart (2009)	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos operacionales</li> <li>• Costos de usuarios</li> </ul>	
Nuestro estudio	✓	✓	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costos de usuario</li> <li>• Gastos tarifarios</li> </ul>	✓

Tabla 2.1: Estudios relacionados.

---

## CAPÍTULO 3

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

En este capítulo se presenta la descripción del problema de optimización que aborda esta tesis, así como su formulación matemática. Primero se describen los detalles del problema, y posteriormente para la modelación, se diseñó una red extendida de la red de líneas la cual permite representar las distintas actividades que realizan los usuarios a lo largo de su viaje. El algoritmo para su generación se describe en la Sección 3.2. Una vez visto esto, se presenta la formulación matemática que toma como dato de entrada esta red.

### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Como se mencionó anteriormente en la Sección 1.1, nuestro problema **DRTB**, considera como datos de entrada la infraestructura de una ciudad de paraderos y calles, un conjunto de posibles líneas a implementar, un conjunto de frecuencias factibles para cada una de ellas, e información de la demanda por pares origen-destino. Respecto a las limitantes, se satisfacen restricciones de la demanda, la capacidad de autobuses y de calles, un máximo número de líneas a implementar y un presupuesto para limitar las frecuencias. Todo esto, para determinar el conjunto de líneas a usar y sus frecuencias minimizando el tiempo total de viaje de todos los pasajeros y el costo monetario de transbordos.

Para modelar matemáticamente el problema **DRTB** definimos lo siguiente. Consideremos una red de tránsito por donde pueden circular autobuses  $G^I = (N^S, E)$ , en donde  $N^S$  es el conjunto de nodos  $n \in N^S$  que representan las paradas donde los pasajeros pueden abordar o bajar del vehículo y  $E$  es el conjunto de aristas no dirigidas  $e \in E$  que representan las calles de la infraestructura de una ciudad. Además, sea  $G^L = (N^S, A^L)$  la red de posibles líneas a implementarse sobre la infraestructura del grafo  $G^I$ . En esta red,  $A^L$  es el conjunto de arcos dirigidos por donde pueden transitar los vehículos de las posibles líneas a implementar y  $L$  denota el conjunto que las contiene. Además, definimos  $F_l$  como el conjunto discreto de frecuencias factibles para la línea  $l \in L$ . También, para

cada línea  $l \in L$  tenemos un costo dado  $c_l$  por implementarla en el sistema, y un costo  $\bar{c}_l$  que representa el costo del pasaje que deben pagar los usuarios por utilizarla. Así mismo, suponemos que conocemos los tiempos de viaje  $c_a$  para cada arco  $a \in A^L$ . Para la información de la demanda, definimos  $K$  como el conjunto de pares origen destino  $(o_k, d_k)$  con  $o_k, d_k \in N^S$ , y  $p_k$  (pax/min) como la demanda que se traslada del origen  $o_k$  hacia el destino  $d_k$ ,  $k \in K$ . En cuanto a las limitantes del sistema, definimos a  $q$  como la capacidad de los autobuses (pax/bus). De la misma manera, sea  $s_e$  la capacidad del arco  $e \in E$ , la cual representa la cantidad de autobuses que pueden circular por la calle  $e$  sin causar congestión. Además, definimos  $L^{max}$  como el máximo número de líneas a implementar en el sistema. Finalmente, sea  $P$  un presupuesto disponible que limita las frecuencias, este puede ser por ejemplo, el tamaño máximo de la flota.

En la Figura 3.1a se ilustra un ejemplo pequeño de la infraestructura de una ciudad. Donde los nodos **O** y **D** representan un único par origen destino que a su vez son paraderos junto con los nodos **1**, **2**, **3** y **4**, los cuales se conectan mediante siete calles. En la Figura 3.1b, se muestra gráficamente un conjunto de tres posibles líneas a implementar. Algunas de estas líneas comparten tramos de recorrido, lo que significa que circulan por la misma calle. Para agrupar los arcos que cumplen estas característica, definimos el conjunto  $A(e)$  el cual contiene los arcos de la red de líneas que están asociados a la arista  $e \in E$ . Además, como cada uno de los arcos de la red  $G^L$  son exclusivos de una única línea, definimos el conjunto  $A_l$  como los arcos de la línea  $l \in L$  y  $l(a)$  como la línea asociada al arco  $a \in A^L$ .

Si se resolviera el problema **DRTB** para las redes en la Figura 3.1, se debería de obtener una solución como la que se muestra en la Figura 3.2. En ésta se observa el conjunto de líneas con sus respectivas frecuencias que van a funcionar dentro del sistema, las cuales son capaces de satisfacer a la demanda.

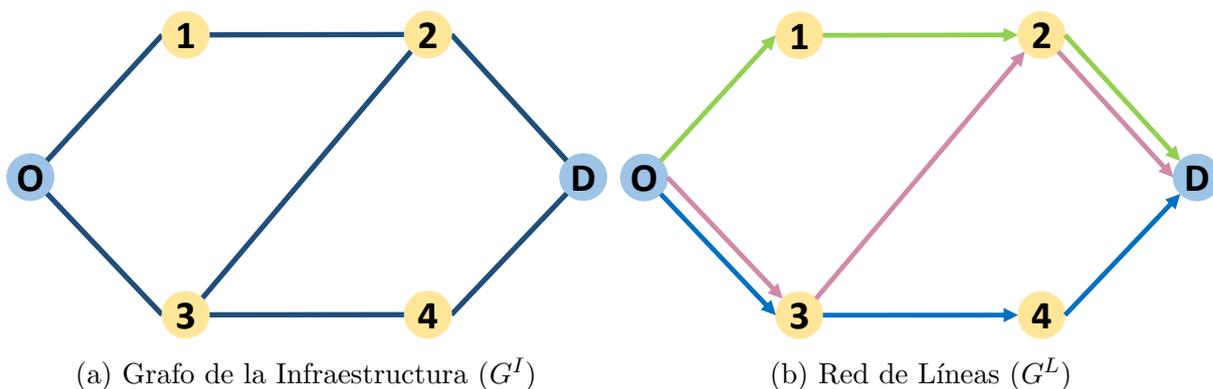
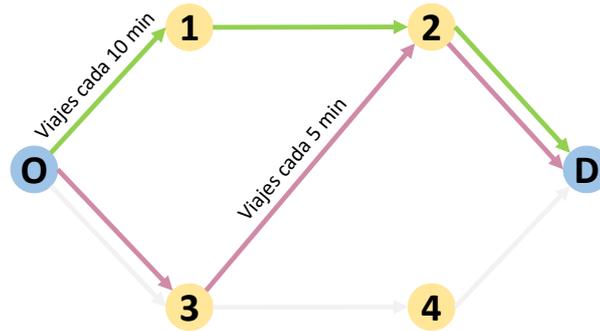


Figura 3.1: Ejemplo de datos de entrada para el problema **DRTB**

Finalmente, las funciones objetivo que se buscan minimizar en este problema son el tiempo total de viaje de los pasajeros considerando tiempo de espera y los costos

Figura 3.2: Ejemplo de una solución del problema **DRTB**

monetarios que implican las transferencias. Para definir matemáticamente las funciones objetivos y restricciones del problema, es necesario contabilizar tiempos de espera y viaje de los usuarios e identificar a los pasajeros que realizan transferencias. Para diferenciar estas acciones, se diseñó una red extendida de la red de líneas que permite modelar el problema completo como un problema de flujo de costo mínimo.

## 3.2 RED EXTENDIDA

Para modelar matemáticamente el problema **DRTB** como un problema de flujo de costo mínimo se diseñó una red extendida  $G = (N, A)$  de la red de líneas, donde  $N$  es el conjunto de nodos  $n \in N$  de la red y  $A$  es el conjunto de arcos  $a \in A$ , con  $G^L \subset G$ . La generación de la red extendida está basada en las ideas de Cancela et al. (2015) para su grafo de trayectorias. Sin embargo, en la red extendida no creamos arcos de destino y no limitamos la cantidad de transferencias que pueden realizar los pasajeros. La red  $G$  modela por medio de distintos tipos de arcos, acciones de espera, transbordo y viaje. Los conjuntos que contienen estos arcos son  $A^W$ ,  $A^T$  y  $A^V$ , respectivamente, y además  $A = A^W \cup A^T \cup A^V$ . Para generarla se realizan dos fases, en la primera se crean nodos artificiales y arcos de espera y en la segunda se crean los arcos de transbordo y de viaje.

La primera fase se resume en el Algoritmo 1. En esta fase, se agregan los nodos de la red  $G^L$  al conjunto  $N$ . Luego, se identifican a los nodos de la red  $G^L$  donde los pasajeros puedan abordar una línea, ya sea porque inician su viaje o realizan un transbordo. Los pasajeros comienzan su viaje en el nodo  $n$  si este es un origen para algún par  $k \in K$ . Por otro lado, los usuarios pueden realizar transbordos en los paraderos  $n$  donde exista en la red  $G^L$  al menos un arco entrante de una línea distinta de una de las líneas salientes. Lo anterior es debido a que en ese paradero pueden arribar pasajeros desde una o varias líneas, y por lo tanto tienen la opción de bajar ahí y esperar una diferente. Una vez

---

**Algoritmo 1:** Fase I: Crear nodos artificiales y arcos de espera.
 

---

**Entrada:**  $G^L$   
**Salida:**  $G$

- 1  $N = N^S$
- 2 **para cada**  $n \in N^S$  **hacer**
- 3     **si** ( $n = o_k$  para algún  $k \in K$ ) o (se pueden realizar transbordos en  $n$ )  
       **entonces**
- 4         **para cada** línea  $l$  saliente de  $n$  **hacer**
- 5             Crear nodo artificial  $n_l$
- 6             Conectar  $n$  con  $n_l$  a través de  $|F_l|$  arcos de espera
- 7             Actualizar  $N$ ,  $A$ ,  $A^W$
- 8         **fin**
- 9     **fin**
- 10 **fin**

---

identificados, en cada uno de estos nodos se determinan las líneas que pueden tomar los pasajeros en ese punto. Para reconocer estas líneas, como ya se mencionó, observamos si existen arcos salientes del nodo  $n$  asociados a cada una de estas. Una vez hecho esto, se crean nodos artificiales  $n_l$  asociados a el nodo  $n$ , uno por cada línea saliente  $l$ , los cuales representan físicamente el mismo paradero, pero permiten diferenciar si los pasajeros suben a alguna línea. Por ejemplo, en la Figura 3.1b del nodo **3** salen dos arcos, entonces hay dos líneas salientes, la rosa y la azul. Entonces, en la red extendida, el nodo **3** tendrá dos nodos artificiales, uno asociado a cada línea. En la Figura 3.3, el nodo **3** tiene los nodos artificiales  $\mathbf{3}_R$  y  $\mathbf{3}_A$ . Luego de que los nodos artificiales son creados, estos se conectan a través de arcos de espera. Estas conexiones se crean con la finalidad de contabilizar el tiempo de espera de los pasajeros. Sin embargo, debido a que la espera de los usuarios depende de la frecuencia de paso de las líneas, los nodos artificiales son conectados con su nodo original por medio de  $|F_l|$  arcos de espera, donde la línea  $l$  es la asociada a cada nodo artificial. En particular, si observamos la Figura 3.3, vemos que el nodo **2** tiene dos nodos artificiales  $\mathbf{2}_V$  y  $\mathbf{2}_R$ , asociados a la línea verde y rosa, respectivamente. El nodo **2** está conectado a  $\mathbf{2}_V$  por medio de dos arcos y a  $\mathbf{2}_R$  por medio de tres. Lo anterior nos indica que la línea verde cuenta con dos elementos en su conjunto de frecuencias factibles, mientras que el de la línea rosa tiene tres elementos. Entonces, cada uno de los arcos  $a \in A^W$  tienen una frecuencia  $f(a)$  la cual permite calcularle un costo  $c_a^w = \frac{1}{f(a)}$ . Este costo es un tiempo de espera promedio de los pasajeros usada por Osuna and Newell (1972) el cual se considera de la siguiente manera:

$$E(w) = \frac{\bar{H}}{2}(1 + C_H^2)$$

donde  $E(w)$  es el tiempo de espera promedio,  $\bar{H}$  el tiempo de cabecera promedio, y  $C_H^2$  el coeficiente de variación en los tiempos de cabecera. Basándonos en esto, calculamos el costo de los arcos de espera, donde por simplicidad suponemos que el tiempo de cabecera es el mismo a lo largo del periodo ( $C_H^2 = 0$ ). Además, se define el costo monetario  $\bar{c}_a^k$  para cada arco  $a \in A^W$  y par origen-destino  $k \in K$ , como el costo  $\bar{c}_{l(a)}$  por utilizar la línea  $l(a)$  si los pasajeros salen de su paradero origen o sólo un porcentaje del costo  $\bar{c}_{l(a)}$ , si los usuarios están realizando un transbordo. Dicho de otra forma, para identificar la tarifa que se cobra nos guiamos con el con el par  $k = (o_k, d_k)$ , para los arcos de espera salientes del nodo  $o_k$  se cobra el pasaje completo ( $\bar{c}_{l(a)}$ ), ya que en ese punto es el primer autobús que toma; para el caso donde los arcos de espera no salgan del nodo  $o_k$ , se cobra un porcentaje de la tarifa (por ejemplo,  $\frac{\bar{c}_{l(a)}}{2}$ ) debido a que se está realizando un transbordo en el paradero de donde sale el arco. En la Figura 3.3, se muestra como se ve la red extendida de la red de líneas de la Figura 3.1b al final de la Fase I.

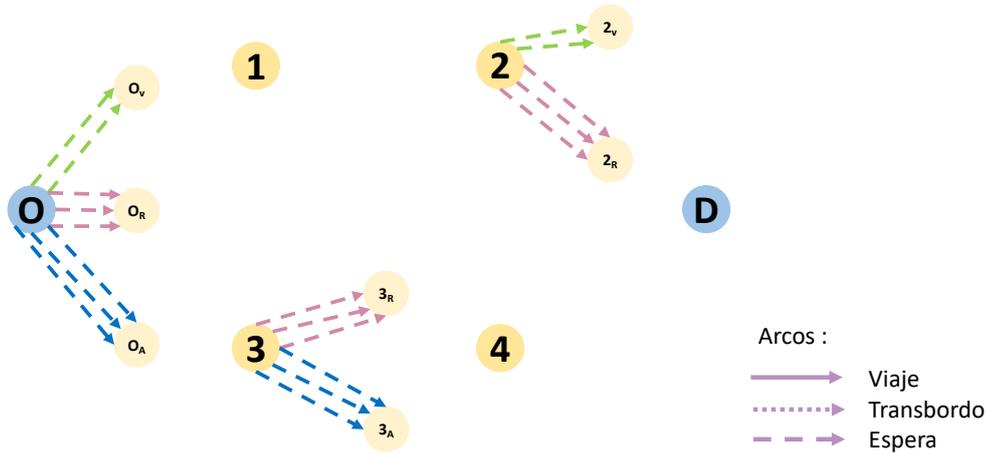


Figura 3.3: Final de la Fase I.

En la segunda fase, se crean los arcos de transbordo y de viaje entre los nodos artificiales agregados anteriormente y los nodos originales. Para esto, definimos  $S_l$  como la secuencia de paraderos del recorrido de la línea  $l \in L$  en la red de líneas  $G^L$  (la cual no contiene nodos artificiales), donde  $n^i$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $S_l$ . Lo que se hace, es tomar cada pareja de nodos  $n^i$  y  $n^{i+1}$  de  $S_l$ , y conectar esos paraderos en la red extendida pero considerando los nodos artificiales  $n_i^i$  y  $n_i^{i+1}$  asociados a dicha línea y que se crearon en la Fase I. Lo anterior mediante los casos que se ilustran en el Algoritmo 2.

Por ejemplo, sea  $l$  la línea rosa con el conjunto  $S_l = \{\mathbf{O}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{D}\}$  de paraderos ordenados. Entonces, entre el par de nodos  $\mathbf{O}$  y  $\mathbf{3}$ , se crean el arco de viaje  $(\mathbf{O}_R, \mathbf{3}_R)$  y el arco de transbordo  $(\mathbf{O}_R, \mathbf{3})$ . Lo que se representa físicamente con ese par de arcos  $(\mathbf{O}_R, \mathbf{3}_R)$  y  $(\mathbf{O}_R, \mathbf{3})$ , es el trayecto del paradero  $\mathbf{O}$  a  $\mathbf{3}$ . Lo anterior con la diferencia de que

**Algoritmo 2:** Fase II: Crear arcos de transbordo y viaje.

---

**Entrada:**  $G^L, G$   
**Salida:**  $G$  Actualizada

```

1 para cada  $l \in L$  hacer
2   para  $i = 0$  hasta  $|S_l| - 1$  hacer
3     si  $n^i$  tiene nodo artificial  $n_l^i$  entonces
4       si  $n^{i+1}$  tiene nodo artificial  $n_l^{i+1}$  entonces
5         Crear arco de viaje de  $(n_l^i, n_l^{i+1})$ 
6         Crear arco de transbordo de  $(n_l^i, n^{i+1})$ 
7       en otro caso
8         Crear arco de viaje de  $(n_l^i, n^{i+1})$ 
9       fin
10    en otro caso
11      si  $n^{i+1}$  tiene nodo artificial  $n_l^{i+1}$  entonces
12        Crear arco de viaje de  $(n^i, n_l^{i+1})$ 
13        Crear arco de transbordo de  $(n^i, n^{i+1})$ 
14      en otro caso
15        Crear arco de viaje de  $(n^i, n^{i+1})$ 
16      fin
17    fin
18  fin
19  Actualizar  $A, A^T, A^V$ 
20 fin

```

---

a través del arco de viaje  $(\mathbf{O}_R, \mathbf{3}_R)$  pasa el flujo de pasajeros que continúa su viaje por la misma línea y por el arco de transbordo  $(\mathbf{O}_R, \mathbf{3})$  se mueven los pasajeros que bajarán en el paradero  $\mathbf{3}$  para tomar una línea distinta. Para este tipo de pares de arcos, se define  $t(a) \in A^T$  como el arco de transbordo que representa el mismo trayecto que el arco de viaje  $a \in A^V$ . Similarmente, para la pareja  $\mathbf{3}, \mathbf{2}$  se crean los arcos  $(\mathbf{3}_R, \mathbf{2}_R)$ , y  $(\mathbf{3}_R, \mathbf{2})$ . Finalmente, para la pareja  $\mathbf{2}, \mathbf{D}$  se crea solo un arco de viaje  $(\mathbf{2}_R, \mathbf{D})$ . En la Figura 3.4, se ilustra la red extendida después de agregar los arcos de viaje y transbordo para la línea rosa.

De forma análoga con el resto de las líneas la red extendida resultante se presenta en la Figura 3.5.

Al finalizar estas dos fases, con la red extendida resultante se puede formular matemáticamente para el problema **DRTB**.

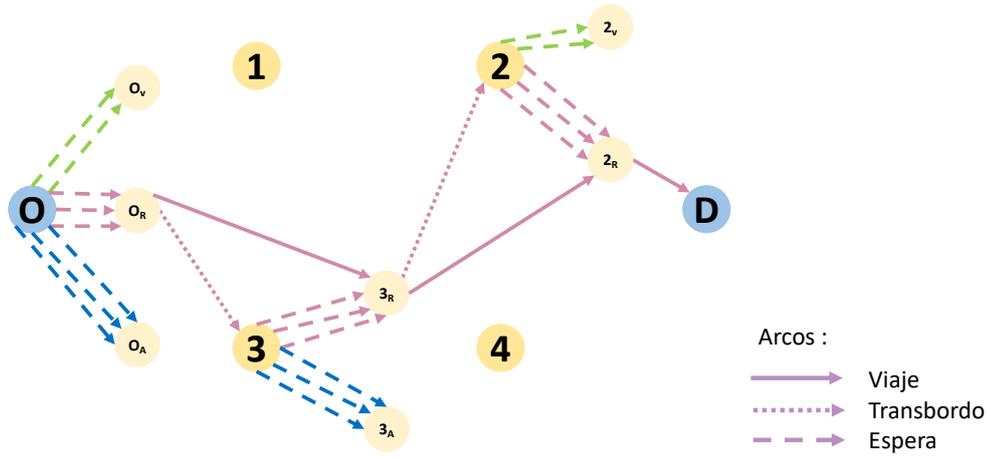


Figura 3.4: Arcos de viaje y transbordo para la línea rosa.

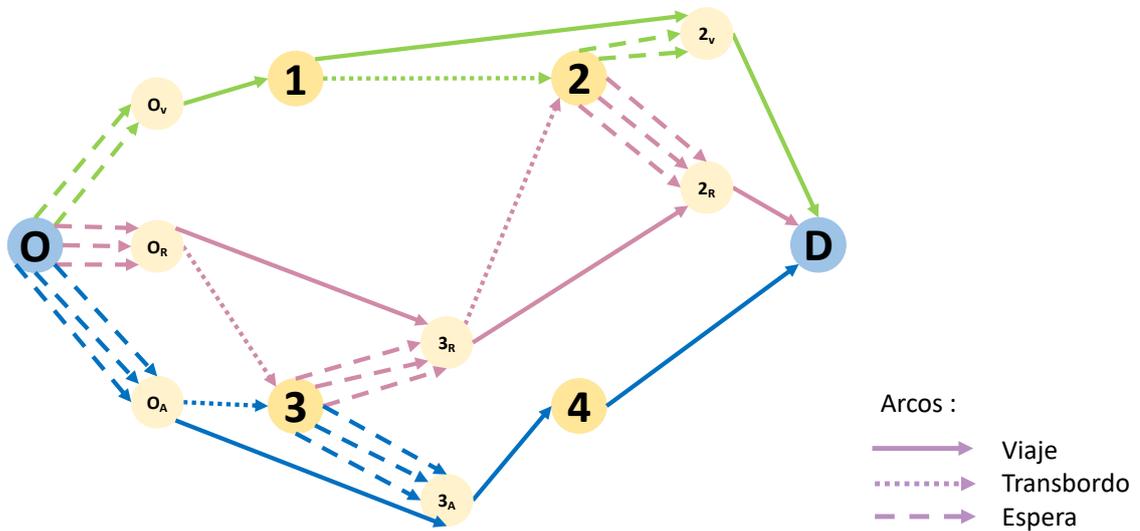


Figura 3.5: Red Extendida de la red en la figura 3.1b.

### 3.3 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

A continuación, se presenta la formulación matemática del problema **DRTB** usando como base a la red extendida. Como las decisiones del problema son identificar cuáles líneas implementar en un sistema de transporte y con qué frecuencia, se definen las siguientes variables de decisión para definir el modelo:

- $\mathbf{v}_a^k$  : flujo de pasajeros por minuto desde el origen  $o_k$  hacia el destino  $d_k$  viajando a través del arco  $a \in A$ . Definimos  $\mathbf{v} := [\mathbf{v}_a^k]$  para representar todas las variables de decisión respecto a el flujo de pasajeros.

- $\mathbf{x}_l$  : variable binaria que toma el valor de 1 si la línea  $l$  es incluida en la solución, 0 en otro caso.
- $\mathbf{y}_{lf}$  : variable binaria que toma el valor de 1 si la línea  $l$  tiene frecuencia  $f \in F_l$ , 0 en otro caso.

Entonces, la función objetivo:

$$F_1(\mathbf{v}) = \sum_{k \in K} \sum_{a \in A^V \cup A^T} c_a \mathbf{v}_a^k + \sum_{k \in K} \sum_{a \in A^W} c_a^w \mathbf{v}_a^k \quad (3.1)$$

representa la suma de los tiempos de viaje y de espera para los pasajeros que viajan a través de los arcos  $a \in A^V \cup A^T$  y  $a \in A^W$ , respectivamente, para todos los pares origen-destino  $k \in K$ . Por otra parte, la función objetivo:

$$F_2(\mathbf{v}) = \sum_{k \in K} \sum_{a \in A^W} \bar{c}_a^k \mathbf{v}_a^k \quad (3.2)$$

modela los costos monetarios de abordar las líneas asociadas a los arcos  $a \in A^W$  que se utilizan en el sistema para todos los pares  $k \in K$ . Además, podemos observar que, si para cada  $k = (o_k, d_k) \in K$ , los arcos de espera salientes de  $o_k$  tienen un costo  $\bar{c}_a^k = 0$  y para los demás  $\bar{c}_a^k = 1$ , la función objetivo  $F_2(\mathbf{v})$  representa las transferencias que realizan todos los usuarios ya que se está contando solamente el flujo que pasa a través de los arcos de transbordo. Entonces, la formulación matemática del problema **DRTB** es la siguiente:

$$\text{mín } [F_1(\mathbf{v}), F_2(\mathbf{v})]$$

sujeto a:

$$\sum_{f \in F_l} \mathbf{y}_{lf} = \mathbf{x}_l \quad \forall l \in L \quad (3.3)$$

$$\sum_{l \in L} \mathbf{x}_l \leq L^{\max} \quad (3.4)$$

$$\sum_{a \in A(e)} \sum_{f \in F_l} f \cdot \mathbf{y}_{l(a)f} \leq s_e \quad \forall e \in E \quad (3.5)$$

$$\sum_{l \in L} c_l \left( \sum_{f \in F_l} f \cdot \mathbf{y}_{lf} \right) \leq P \quad (3.6)$$

$$\sum_{k \in K} (\mathbf{v}_a^k + \mathbf{v}_{t(a)}^k) \leq \left( q \sum_{f \in F_l} f \cdot \mathbf{y}_{l(a),f} \right) \quad \forall a \in A^V \quad (3.7)$$

$$\sum_{k \in K} \mathbf{v}_a^k \leq (q \cdot f(a)) \mathbf{y}_{l(a),f(a)} \quad \forall a \in A^W \quad (3.8)$$

$$\sum_{a \in A_n^+} v_a^k - \sum_{a \in A_n^-} v_a^k = \rho_n^k \quad \forall k \in K, n \in N \quad (3.9)$$

$$v_a^k \geq 0 \quad \forall a \in A, k \in K \quad (3.10)$$

$$x_l \in \{0, 1\} \quad \forall l \in L \quad (3.11)$$

$$y_{lf} \in \{0, 1\} \quad \forall l \in L, f \in F_l \quad (3.12)$$

La restricción (3.3) garantiza escoger solo una frecuencia para cada línea  $l \in L$  incluida en la solución. La desigualdad (3.4) acota la cantidad máxima de líneas a implementar en el sistema. Las restricciones (3.5) satisfacen la capacidad  $s_e$  de calle de la arista  $e \in E$ ; esto es que, el número total de autobuses por minuto, considerando todas las líneas que viajan a través de  $e$ , no excedan el valor del parámetro  $s_e$ . La desigualdad (3.6) asegura que no se sobrepase el presupuesto en términos de frecuencia (note que si  $\bar{c}_l = \sum_{a \in A_l} c_a$ , el presupuesto representa el máximo tamaño de flota). Las restricciones (3.7) acotan el flujo total de pasajeros viajando a través del arco de viaje  $a \in A^V$  y el arco de transbordo  $t(a) \in A^T$  (considerando todos los pares origen-destino), por la capacidad de la línea  $l(a)$ . Las desigualdades (3.8) permiten definir un flujo positivo total  $\sum_{k \in K} v_a^k$  para cada arco  $a \in A^W$  solo cuando la variable  $y_{l(a), f(a)}$  está activa, donde  $q \cdot f(a)$  es una cota superior de  $\sum_{k \in K} v_a^k$ . Finalmente, las ecuaciones (3.9) son restricciones de balance de flujo para cada par origen-destino  $(o_k, d_k)$  y nodo  $n \in N$ . Resaltamos que  $\rho_n^k$  es igual a  $p_k$ ,  $-p_k$ , y 0 para  $n = o_k$ ,  $n = d_k$ , y  $n \notin \{o_k, d_k\}$ , respectivamente. De (3.10)-(3.12) se representa la naturaleza de las variables.

En la Tabla 3.1, se presenta la notación utilizada para el problema y el modelo. Para esta formulación se implementó un método que nos da herramientas para analizar el conflicto entre los objetivos. En el siguiente capítulo se presenta el método de solución aplicado al problema **DRTB**.

<b>Notación utilizada para la formulación matemática</b>	
$G^I$ :	Grafo de la infraestructura.
$N^S$ :	Conjunto de nodos paraderos.
$E$ :	Conjunto de aristas no dirigidas (calles).
$G^L$ :	Red de posibles líneas a implementar.
$A^L$ :	Conjunto de arcos dirigidos por donde pueden transitar los vehículos de cada línea.
$L$ :	Conjunto de líneas.
$K$ :	Conjunto de pares Origen-Destino.
$A(e)$ :	Conjunto de arcos de la red de líneas $G^L$ que están asociados a la arista $e \in E$ . $A(e) \subset A$ .
$G$ :	Red extendida.
$N$ :	Conjunto de nodos de la red $G$
$A$ :	Conjunto de arcos de la red $G$ donde $A = A^W \cup A^T \cup A^V$
$A^W$ :	Conjunto de arcos de espera.
$A^T$ :	Conjunto de arcos de transbordo.
$A^V$ :	Conjunto de arcos de viaje.
$S_l$ :	Secuencia de paraderos del recorrido de la línea $l \in L$ .
$A_n^+$ :	Conjunto de arcos salientes de $n$ .
$A_n^-$ :	Conjunto de arcos entrantes de $n$ .
$c_l$ :	Costo por implementar la línea $l \in L$ en el sistema.
$\bar{c}_l$ :	Tarifa para los usuarios por utilizar la línea $l \in L$ .
$c_a$ :	Tiempos de viaje para cada $a \in A^V \cup A^T$ .
$(o_k, d_k)$ :	Par Origen-Destino $k \in K$ , con origen $o_k$ y destino $d_k$ .
$p_k$ :	Demanda (pax/min) del par $k \in K$ .
$q$ :	Capacidad de los autobuses (pax/bus).
$s_e$ :	Capacidad de la arista (calle) $e \in E$ .
$L^{max}$ :	Máximo número de líneas a implementar en el sistema.
$P$ :	Presupuesto para las frecuencias.
$l(a)$ :	Línea asociada al arco $a \in A$ .
$n_l$ :	Nodo artificial asociado a la línea $L \in L$ .
$f(a)$ :	Frecuencia asociada al arco $a \in A^W$ .
$c_a^w$ :	Tiempo de espera del arco $a \in A^W$ .
$\bar{c}_a^k$ :	Costo monetario para cada arco $a \in A^W$ y par origen-destino $k \in K$ .
$n^i$ :	$i$ -ésimo elemento de $S_l$ .
$t(a)$ :	$t(a) \in A^T$ arco de transbordo con el mismo trayecto que el arco de viaje $a \in A^V$ .
$\mathbf{v}_a^k$ :	Flujo de pasajeros por minuto desde el origen $o_k$ hacia el destino $d_k$ viajando a través del arco $a \in A$ .
$\mathbf{x}_l$ :	Variable binaria que toma el valor de 1 si la línea $l$ es incluida en la solución, 0 en otro caso.
$\mathbf{y}_{lf}$ :	Variable binaria que toma el valor de 1 si la línea $l$ tiene frecuencia $f \in F_l$ , 0 en otro caso.

Tabla 3.1: Tabla de notación.

# METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

---

Dado que se está trabajando con un problema multi-objetivo, en este capítulo se presentan conceptos para entender cómo darle solución al problema **DRTB**. Además, se muestra la descripción del método de solución que se implementó. Para el problema, se aplicó el método  $\varepsilon$ -constraint utilizando el solver comercial CPLEX 12.9.

## 4.1 OPTIMIZACIÓN MULTI-OBJETIVO

El proceso que se lleva a cabo cuando se tiene un problema en el que se desea optimizar simultáneamente una colección de funciones objetivos, es llamado Optimización Multi-Objetivo (OMO). Suponga que se tiene el siguiente problema de OMO [**P**]:

$$\text{mín } [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_i(\mathbf{x})]$$

sujeto a:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de variables de decisión,  $\mathbf{X}$  el espacio de soluciones y  $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_i(\mathbf{x})$  las funciones objetivo.

A diferencia de optimizar un solo objetivo, en OMO generalmente no existe una solución que optimice todas las funciones objetivo. En cambio, lo que se encuentra es un conjunto de soluciones llamadas *Pareto óptimas*.

**Definición 4.1.** *Un punto  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ , es **Pareto óptimo** si y sólo si no existe otro punto  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ , tal que  $f_j(\mathbf{x}) \leq f_j(\mathbf{x}^*)$  para toda  $j = 1, \dots, i$  y  $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*)$  para al menos una función  $j$ .*

De manera similar, en el espacio de criterio factible  $\mathbf{Z}$  definido como el conjunto  $\{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_i(\mathbf{x})) | \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$  se definen los puntos *Dominados* y *No-Dominados* (Marler and Arora, 2004).

**Definición 4.2.** *Un vector de valores de las funciones objetivos  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \in \mathbf{Z}$ , es **no-dominado** si y sólo si no existe otro vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{Z}$ , tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$  y  $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*)$  para al menos una función  $j$ . De otra manera, es **dominado**.*

Lo que se busca en OMO es encontrar una buena aproximación al conjunto de puntos no-dominados en  $\mathbf{Z}$ , el cual es llamado *Frente de Pareto*. De esta manera, el tomador de decisiones observará del conflicto que existe entre los distintos objetivos, y en base a su criterio podrá elegir entre las opciones encontradas.

## 4.2 MÉTODO $\varepsilon$ -CONSTRAINT

Existen diversos métodos para aproximar el frente de Pareto (Marler and Arora, 2004). Uno de estos es el método  $\varepsilon$ -constraint, el cual fue introducido por primera vez en Haines (1971). Este consiste en, dado un problema  $[\mathbf{P}]$ , optimizar un sólo objetivo mientras los otros se agregan al problema como restricciones:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f_1(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a:} & \\ & f_2(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_2 \\ & f_3(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_3 \\ & \vdots \\ & f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \end{aligned}$$

Y a través de la variación de los  $\varepsilon_j$ , se puede obtener un conjunto de soluciones Pareto óptimas (Hwang and Masud, 1979).

En este trabajo, implementamos el método  $\varepsilon$ -constraint al problema **DRTB**. Haciendo esto, buscamos obtener una aproximación al frente de Pareto y analizar el conflicto entre tiempos totales de viaje y costos monetarios por transbordos de los pasajeros. De esta manera, los tomadores de decisiones tendrán un panorama más amplio sobre las distintas opciones de sistemas de transporte que se pueden poner en marcha sin dejar de tomar en cuenta ambos objetivos que son importantes para los usuarios.

Con respecto a la implementación del método, primero se decidió cuál de los objetivos agregar como restricción a los problemas y para esto se realizaron pruebas preliminares. En estas se observó que agregar como limitante la función objetivo  $F_2(\mathbf{v})$  de costos monetarios mientras se optimiza  $F_1(\mathbf{v})$ , permitía que los problemas se resolvieran en menos

tiempo. Esto puede deberse a que en el caso de cuando se optimiza  $F_2(\mathbf{v})$  y se tiene como limitante  $F_1(\mathbf{v})$ , existe una cantidad considerable de simetrías o soluciones simétricas que hacen que el esfuerzo computacional de resolver el problema sea mas grande. Lo anterior sucede debido a que, a medida que avanza la búsqueda del algoritmo Branch & Bound (que es implementado por CPLEX), cada solución simétrica puede obtenerse en un nodo separado (Williams, 2013). Entonces, para obtener aproximaciones del frente de Pareto se resolvieron problemas  $[\mathbf{P}_\varepsilon]$  para distintos valores de  $\varepsilon$  del siguiente tipo:

$$\text{mín } F_1(\mathbf{v})$$

sujeto a:

$$F_2(\mathbf{v}) \leq \varepsilon$$

$$(3.3) - (3.12)$$

En este problema se minimiza la función  $F_1(\mathbf{v})$  de tiempos totales de viaje, mientras los costos monetarios de las transbordos están acotados superiormente por  $\varepsilon$ . Por esta razón, para cada valor de  $\varepsilon$  encontramos un valor de  $F_1(\mathbf{v})$ . Estos valores son puntos que pertenecen al frente de Pareto y gráficamente podríamos observar un frente convexo o no convexo, dependiendo de los datos de la instancia, como se muestra en la Figura 4.1.

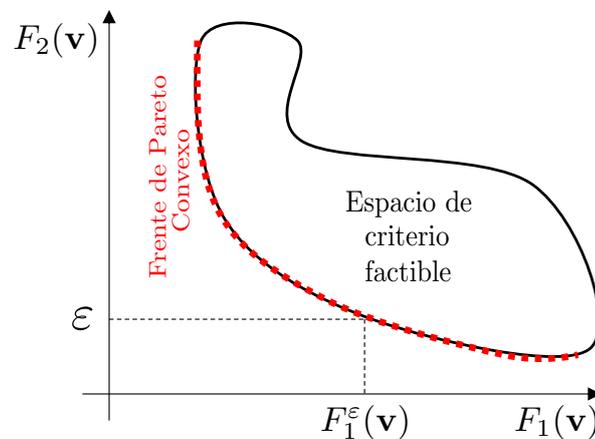


Figura 4.1:  $\varepsilon$ -constraint para el problema DRTB.

Los pasos de nuestro método  $\varepsilon$ -constraint se muestran en el Algoritmo 3. Primero se calculan los extremos del frente, el procedimiento para obtenerlos se presenta en las líneas 2 y 3 en el Algoritmo 3, donde  $\mathbf{v}_1^*$  y  $\mathbf{v}_2^*$  son los flujos óptimos que se encontraron al resolver el problema  $F_1^*$  y  $F_2^*$ , respectivamente. Posteriormente, se utilizan los extremos obtenidos para observar el rango en el que se variará  $\varepsilon$  y en dependencia de cuantos problemas se deseen resolver, se calcula un incremento  $\Delta_\varepsilon$  (ver línea 5) que se utilizará en cada iteración. En cuánto a la cantidad de problemas que se desean resolver, dependerá de que tan amplio

sea el rango en el que se varía  $\varepsilon$  y que tantas soluciones se necesiten para obtener una buena aproximación al frente de Pareto. Una vez que se conoce la variación, se inicia con el valor más pequeño que  $\varepsilon$  pueda tener y en cada iteración se aumenta hasta llegar a su valor máximo mientras se resuelve un problema para cada uno de estos valores (ver líneas 6-11 en Algoritmo 3). Este método fue implementado utilizando el solver comercial CPLEX 12.9 con un lenguaje de programación C++ en una computadora Macpro con 3.5 GHz y 16 GB RAM.

---

**Algoritmo 3:**  $\varepsilon$ -constraint para el problema **DRTB**.

---

**Entrada:** Instancia del problema **DRTB**, *CantProb*: Cantidad de problemas a resolver

**Salida:** *SetPareto*: Aproximación del frente de Pareto

- 1  $SetPareto = \emptyset$
  - 2 Resolver  $F_1^* = \{\text{mín } F_1(\mathbf{v}) \text{ s.a. (3.3) - (3.12)}\}$ ,  $P_2^* = F_2(\mathbf{v}_1^*)$
  - 3 Resolver  $F_2^* = \{\text{mín } F_2(\mathbf{v}) \text{ s.a. (3.3) - (3.12)}\}$ ,  $P_1^* = F_1(\mathbf{v}_2^*)$
  - 4  $SetPareto = SetPareto \cup \{(F_1^*, P_2^*), (P_1^*, F_2^*)\}$
  - 5  $\Delta_\varepsilon = \frac{P_2^* - F_2^*}{CantProb - 1}$
  - 6  $\varepsilon = F_2^*$
  - 7 **mientras**  $\varepsilon \leq P_2^*$  **hacer**
  - 8     Resolver  $F_{1\varepsilon}^* = \{\text{mín } F_1(\mathbf{v}) \text{ s.a. (3.3) - (3.12), } F_2(\mathbf{v}) \leq \varepsilon\}$
  - 9      $SetPareto = SetPareto \cup \{(F_{1\varepsilon}^*, F_2(\mathbf{v}_\varepsilon^*))\}$
  - 10     $\varepsilon = \varepsilon + \Delta_\varepsilon$
  - 11 **fin**
- 

Con el método presentado anteriormente se realizaron experimentos para evaluar su desempeño y se analizaron los datos que es capaz de obtener. En el siguiente capítulo se presentan los detalles de la experimentación y resultados de implementar nuestro algoritmo  $\varepsilon$ -constraint.

---

## CAPÍTULO 5

# RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

En este capítulo se detallan los experimentos realizados con el problema **DRTB**. Inicialmente se presenta una instancia de referencia encontrada en literatura relacionada y los parámetros utilizados. Finalmente se muestran resultados obtenidos de implementar el método de solución.

### 5.1 INSTANCIA: RED DE MANDL

Para probar nuestro método  $\varepsilon$ -constraint utilizamos la red de Mandl, la cual representa carreteras en Suiza y consta de 15 nodos y 21 aristas (Mandl, 1980). Diversos estudios que abordan el problema **DRT** en sus diferentes variantes, implementan sus métodos a esta red (Arbex and da Cunha, 2015, Jha et al., 2019, Mauttone and Urquhart, 2009). En el trabajo de Duran et al. (2019) también realizan pruebas con la red de Mandl y consideran el supuesto de capacidad de calles para sistemas unimodales y bimodales. De este estudio tomamos los parámetros que generaron para el caso unimodal ya que no existen muchos trabajos que presenten los valores numéricos dados a las capacidades de las calles. En la Figura 5.1 se presenta la red de Mandl, además de los tiempos de viaje en minutos y la capacidad de cada una de las calles en buses/hora (representado como (Tiempo de viaje, Capacidad)). Asimismo la información de la demanda por pares origen-destino se muestra en la Tabla 5.1.

Con respecto a las posibles líneas a implementar en el sistema, en Buba and Lee (2018) se presentan las mejores encontradas por su algoritmo para implementar en la red de Mandl, las cuales decidimos considerar como nuestro conjunto de líneas candidatas bidireccionales para nuestra instancia. Esto se realizó basándonos en que sus objetivos son similares a los nuestros ya que buscan minimizar el tiempo total de viaje y la demanda que se satisface con más de una transferencia. La lista de los detalles de las líneas como el

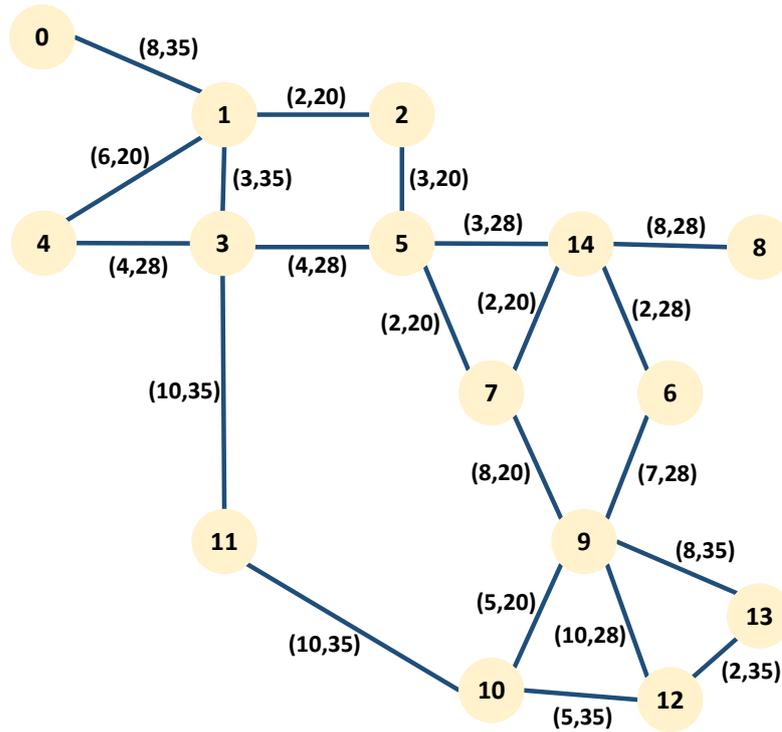


Figura 5.1: Red de Mandl con la información (Tiempo de viaje, Capacidad) para cada arista.

tiempo de recorrido (TR), la cantidad y secuencia de paraderos de cada una se presentan en la Tabla 5.2.

En cuanto a los conjuntos de frecuencias factibles se consideró  $F_l = \{0,02, 0,03, 0,08, 0,20\}$  para  $l = 0, \dots, 36$ , al igual que Cancela et al. (2015). Como costo de asignar una línea  $l$  al sistema, consideramos  $c_l = \sum_{a \in A_l} c_a$ , lo cual nos permite que se maneje el presupuesto como un máximo tamaño de flota, el cual consideramos limitado con  $P = 99$  autobuses. En cuanto a los costos monetarios considerados, tomamos los siguientes valores:

$$\bar{c}_a^k = \begin{cases} 12 & \text{si es el primer autobus que toman,} \\ 6 & \text{si hacen transferencia,} \end{cases}$$

esto se hizo siguiendo un esquema de pago como el que se tiene en la Ciudad de Monterrey, Nuevo León, México. Finalmente, con respecto a la capacidad de buses, al igual que en el estudio de Duran et al. (2019), se consideró  $q = 50$ .

O/D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	400	200	60	80	150	75	75	30	160	30	25	35	0	0
1	400	0	50	120	20	180	90	90	15	130	20	10	10	5	0
2	200	50	0	40	60	180	90	90	15	45	20	10	10	5	0
3	60	120	40	0	50	100	50	50	15	240	40	25	10	5	0
4	80	20	60	50	0	50	25	25	10	120	20	15	5	0	0
5	150	180	180	100	50	0	100	100	30	880	60	15	15	10	0
6	75	90	90	50	25	100	0	50	15	440	35	10	10	5	0
7	75	90	90	50	25	100	50	0	15	440	35	10	10	5	0
8	30	15	15	15	10	30	15	15	0	140	20	5	0	0	0
9	160	130	45	240	120	880	440	440	140	0	600	250	500	200	0
10	30	20	20	40	20	60	35	35	20	600	0	75	95	15	0
11	25	10	10	25	15	15	10	10	5	250	75	0	70	0	0
12	35	10	10	10	5	15	10	10	0	500	95	70	0	45	0
13	0	5	5	5	0	10	5	5	0	200	15	0	45	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.1: Pares Origen-Destino (viajes/24hrs)

## 5.2 RESULTADOS

Para realizar los experimentos variamos los parámetros  $|L|$  y  $L^{max}$ , los cuales representan el tamaño del conjunto de posibles líneas a implementar y la cantidad máxima de líneas que se pueden agregar al sistema de transporte, respectivamente. Esto se hizo con la finalidad de analizar que tanto tiempo toma considerar conjuntos de líneas potenciales de distintos tamaños, así como que tan grande o pequeño se puede armar un sistema de transporte con nuestro modelo. Como se mencionó en la sección 5.1, el conjunto  $L$  se tomó del trabajo Buba and Lee, 2018; de la misma manera, tomamos de referencia los valores para el parámetro  $L^{max}$ . Los valores que se consideraron para cada uno son  $|L| = \{20, 37\}$  y  $L^{max} = \{4, 6, 8, 12\}$ , y se experimentó con todas las combinaciones entre estos. En cuanto al conjunto  $L$ , cuando se consideró  $|L| = 20$ , las líneas contenidas en el conjunto  $L$  son de la línea 0 a la línea 19 de la Tabla 5.2, y de manera similar, para cuando  $|L| = 37$ , las líneas incluidas fueron de la línea 0 a la línea 36.

Entonces, para obtener los frentes de Pareto para cada combinación de parámetros, se resolvieron 200 problemas ya que la distancia entre los extremos de los frentes es pequeña. En la Tabla 5.3, se presentan la cantidad de soluciones no dominadas encontradas (S-ND) y el tiempo computacional en horas que tomó hallarlas, esto para cada una de las combinaciones entre  $|L|$  y  $L^{max}$ . En esta podemos observar que casi duplicando el tamaño del conjunto de líneas potenciales y considerando los mismos pares origen-destino, el tiempo computacional aumenta alrededor de 10 veces. En cuanto a las soluciones encontradas, vemos que para  $|L| = 20$  el método es capaz de encontrar una solución no dominada por cada problema del  $\varepsilon$ -constraint resuelto, mientras que para  $|L| = 37$  esto ya no se

#Línea	T.R.	#Paraderos	Secuencia de paraderos
0	92	15	0-1-3-11-10-9-13-12-13-9-10-11-3-1-0
1	64	15	1-2-5-14-6-9-10-11-10-9-6-14-5-2-1
2	66	13	4-3-5-7-9-10-11-10-9-7-5-3-4
3	52	11	8-14-7-5-3-11-3-5-7-14-8
4	64	11	11-3-5-7-9-13-9-7-5-3-11
5	92	15	0-1-3-11-10-9-13-12-13-9-10-11-3-1-0
6	64	13	10-12-13-9-6-14-8-14-6-9-13-12-10
7	76	15	0-1-2-5-7-9-12-10-12-9-7-5-2-1-0
8	48	11	0-1-2-5-14-8-14-5-2-1-0
9	66	15	0-1-2-5-14-6-9-7-9-6-14-5-2-1-0
10	86	15	8-14-7-9-13-12-10-11-10-12-13-9-7-14-8
11	108	15	13-9-12-10-11-3-1-0-1-3-11-10-12-9-13
12	52	13	8-14-7-5-3-4-1-4-3-5-7-14-8
13	62	13	8-14-6-9-7-5-3-5-7-9-6-14-8
14	76	15	0-1-2-5-7-9-10-11-10-9-7-5-2-1-0
15	76	11	0-1-4-3-11-10-11-3-4-1-0
16	106	15	0-1-4-3-11-10-12-9-12-10-11-3-4-1-0
17	36	7	0-1-4-3-4-1-0
18	42	11	4-3-5-2-1-0-1-2-5-3-4
19	80	15	0-1-4-3-5-7-9-13-9-7-5-3-4-1-0
20	52	15	0-1-2-5-7-14-6-9-6-14-7-5-2-1-0
21	66	15	0-1-2-5-7-9-13-12-13-9-7-5-2-1-0
22	66	13	5-2-1-3-11-10-9-10-11-3-1-2-5
23	88	15	9-12-10-11-3-5-2-1-2-5-3-11-10-12-9
24	54	11	8-14-6-9-7-5-7-9-6-14-8
25	84	15	11-10-12-13-9-6-14-8-14-6-9-13-12-10-11
26	70	15	0-1-2-5-14-6-9-12-9-6-14-5-2-1-0
27	66	15	0-1-2-5-7-9-13-12-13-9-7-5-2-1-0
28	94	15	4-3-11-10-12-13-9-7-9-13-12-10-11-3-4
29	42	7	0-1-3-11-3-1-0
30	78	15	11-10-9-7-5-3-4-1-4-3-5-7-9-10-11
31	64	15	8-14-6-9-7-5-2-1-2-5-7-9-6-14-8
32	70	15	0-1-2-5-14-6-9-12-9-6-14-5-2-1-0
33	70	15	8-14-6-9-7-5-3-4-3-5-7-9-6-14-8
34	86	13	12-10-11-3-4-1-0-1-4-3-11-10-12
35	16	5	4-1-2-1-4
36	48	9	3-5-7-9-12-9-7-5-3

Tabla 5.2: Conjunto de posibles líneas a implementar en la Red de Mandl.

$ L $	$L^{max}$	S-ND	Tiempo (Hrs)
20	4	200	10.357
20	6	200	11.430
20	8	200	7.804
20	12	200	7.184
37	4	187	103.340
37	6	141	104.230
37	8	147	102.497
37	12	163	86.653

Tabla 5.3: Cantidad de soluciones no dominadas encontradas y tiempo computacional.

cumple. Por otra parte, podemos notar que para los valores más grandes de  $L^{max}$ , el tiempo computacional que toma obtener la aproximación del frente es menor que cuando los valores de  $L^{max}$  son pequeños.

### 5.2.1 LÍNEAS ATRACTIVAS PARA EL SISTEMA DE TRANSPORTE.

Analizando a detalle cada una de las soluciones no dominadas, podemos observar el porcentaje de **aparición** de cada línea en las soluciones. Esto nos permite identificar las líneas que son más atractivas para el sistema de transporte considerando ambos objetivos. Por ejemplo, en la Figura 5.2, podemos observar para  $|L| = 20$  y los distintos valores de  $L^{max}$ , las líneas 2, 6, 9 y 11 aparecen en más del 75 % de las soluciones no-dominadas. Esta información puede resultar muy útil para los tomadores de decisiones, ya que indica que si se inclinan por algún objetivo o no e independientemente del tamaño del sistema del transporte, estas deberían incluirse. Además de esto, se visualiza que entre más líneas se puedan añadir el sistema, la elección de líneas es más variada, mientras que cuando no se pueden incluir tantas, el modelo opta por elegir algunas unas en particular sin tanta variación.

Sin embargo, los resultados muestran que cuando se aumenta el valor de  $|L|$  se dificulta la obtención de este tipo de patrones. Esto sucede debido a que hay más opciones para elegir y pueden existir más combinaciones que convengan a cada uno de los objetivos. Debido a esto, es menos probable que se presente un patrón en el porcentaje de aparición de líneas en soluciones no dominadas. Por ejemplo, en la Figura 5.3, podemos notar que para  $|L| = 37$ , solamente la línea 11 aparece en más del 60 % de las soluciones no dominadas para todos los valores de  $L^{max}$ . Mientras que las líneas 6, 20 y 35 aparecen en más del 50 % para  $L^{max} = 6, 8, \text{ y } 12$ , pero no cuando  $L^{max} = 4$ .

No obstante, la obtención de esta información mediante el análisis del conflicto entre tiempos totales de viaje y costos monetarios de transbordo, resulta muy importante para

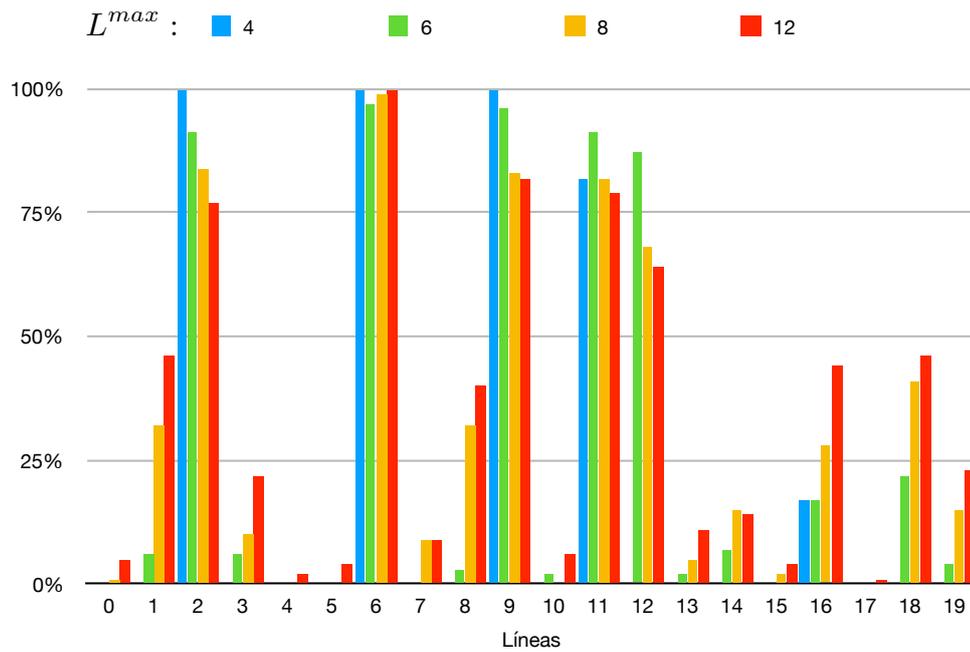


Figura 5.2: Porcentaje de aparición de líneas en soluciones no dominadas (con  $|L| = 20$ ).

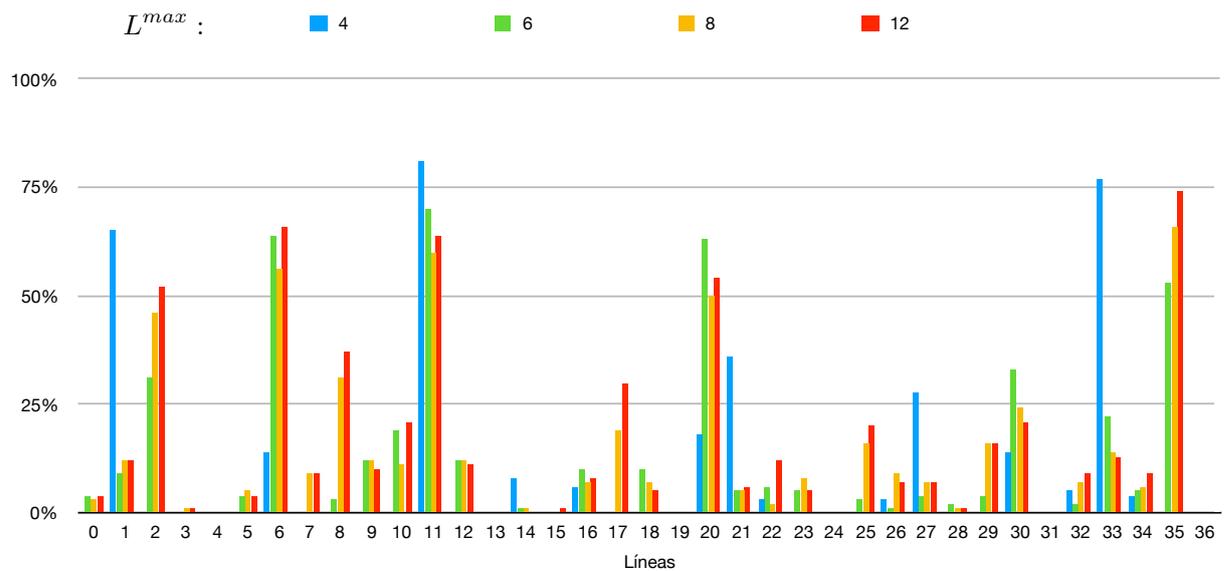


Figura 5.3: Porcentaje de aparición de líneas en soluciones no dominadas (con  $|L| = 37$ ).

los tomadores de decisiones debido a que les muestra un panorama más amplio de las opciones que pueden considerar.

### 5.2.2 FRENTE DE PARETO

Como se mencionó anteriormente, cada solución representa un sistema de transporte distinto. En la Figura 5.4, se muestra el frente de Pareto obtenido con el método  $\varepsilon$ -

constraint con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 4$ . En donde, los puntos de color azul, representan cada solución no dominada obtenida, y los puntos verde y amarillo, indican el conjunto de líneas que se agregaron en cada solución. También podemos observar que el frente de Pareto se divide en dos, en donde notamos que en la parte izquierda del frente siempre se elige el conjunto de líneas  $\{2, 6, 9, 11\}$ , mientras que en la derecha se elige el conjunto  $\{2, 6, 9, 16\}$ . Con esto, podemos decir que la línea 16 funciona para prevenir transbordos, sin embargo, se observa que hace que aumenten los tiempos de viaje de los pasajeros sin disminuir considerablemente los costos monetarios. Por otra parte, la línea 11 disminuye los tiempos de viaje, mientras que también funciona para disminuir los costos monetarios, ya que en la gráfica se observa que se puede lograr a tener hasta un valor de 134 para los costos monetarios por minuto. De manera análoga, se tiene la Figura 5.5 para  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 6$ . En donde podemos observar los conjuntos de líneas que se eligen para 2 soluciones o más.

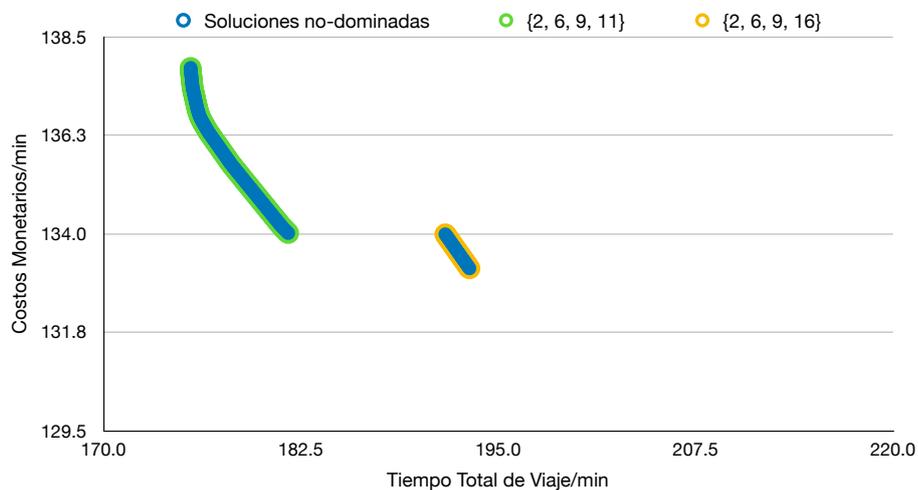


Figura 5.4: Frente de Pareto con el conjunto de líneas para cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 4$ ).

Para visualizar mejor en cuales soluciones no dominadas se agregaron las líneas atractivas que se mencionaron en la subsección 5.2.1, se presenta la Figura 5.6 para  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 6$ . Esta nos permite identificar de manera rápida en donde se agregan todas o algunas de estas líneas. Por ejemplo, se observa que las líneas 2, 6, 9 y 11 se agregan al mismo tiempo en las soluciones cuando se tienen valores bajos para tiempos totales de viaje y costos monetarios. Sin embargo, la Figura 5.5 nos ayuda a observar las diferencias que existen entre estas soluciones. Observando ambas, notamos que las líneas que minimizan el tiempo total de viaje son 2, 6, 9, 11 y 12, y agregar solamente la línea 18 a este sistema podemos bajar considerablemente los costos monetarios de los pasajeros. Sin embargo, al hacer esto observamos también que los tiempos de viaje aumentan, debido

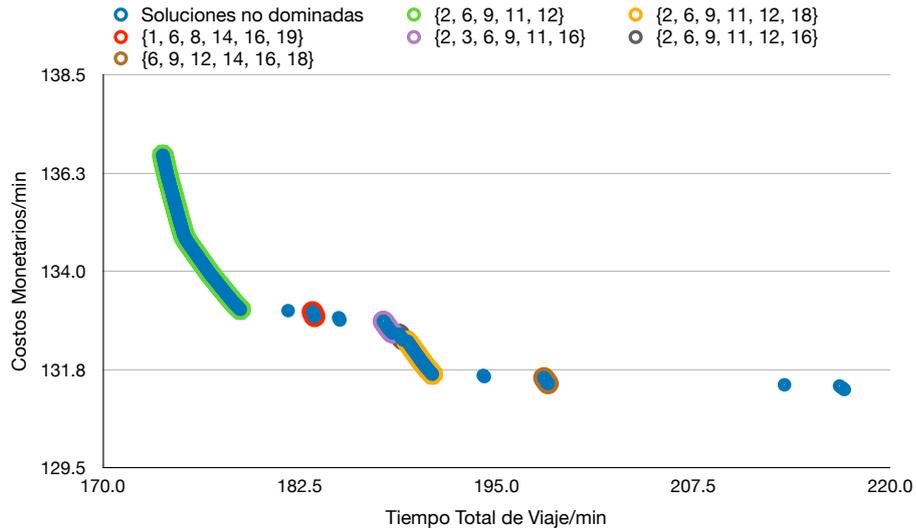


Figura 5.5: Frente de Pareto con el conjunto de líneas para cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 6$  ).

a que hay más vehículos en el sistema (aunque cuidamos la capacidad de las calles), esto hace que se reduzcan las frecuencias de paso para evitar la congestión.

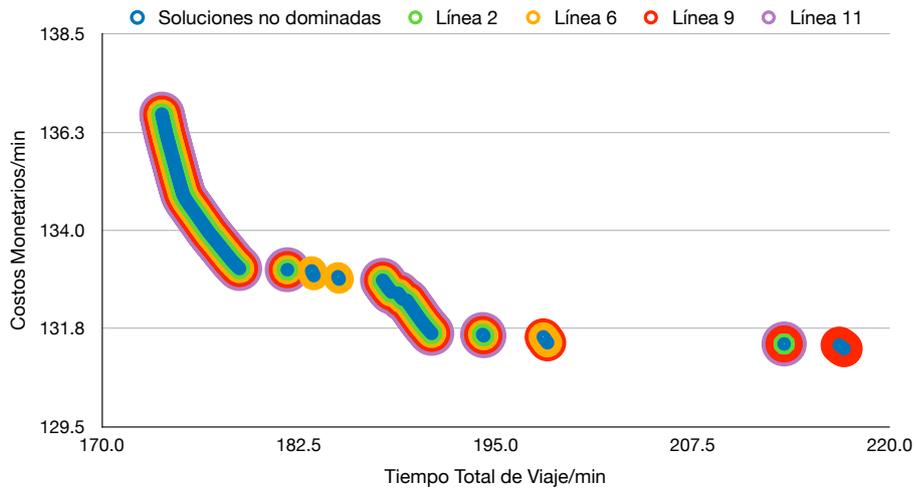


Figura 5.6: Frente de Pareto con líneas atractivas de cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 6$  ).

A continuación, se presentan los frentes de Pareto identificando los conjuntos de líneas y las líneas atractivas para cuando se tiene  $|L| = 20$  con  $L^{max} = 8$  y  $|L| = 20$  con  $L^{max} = 12$ . Algo que podemos observar, es que como se pueden añadir más líneas al sistema, se agregan más líneas a las soluciones y así cubrir más pares origen-destino y obtener valores bajos de los costos monetarios. Mientras que cuando se minimiza el tiempo de viaje, no es necesario añadir hasta  $L^{max}$  líneas en el sistema de transporte.

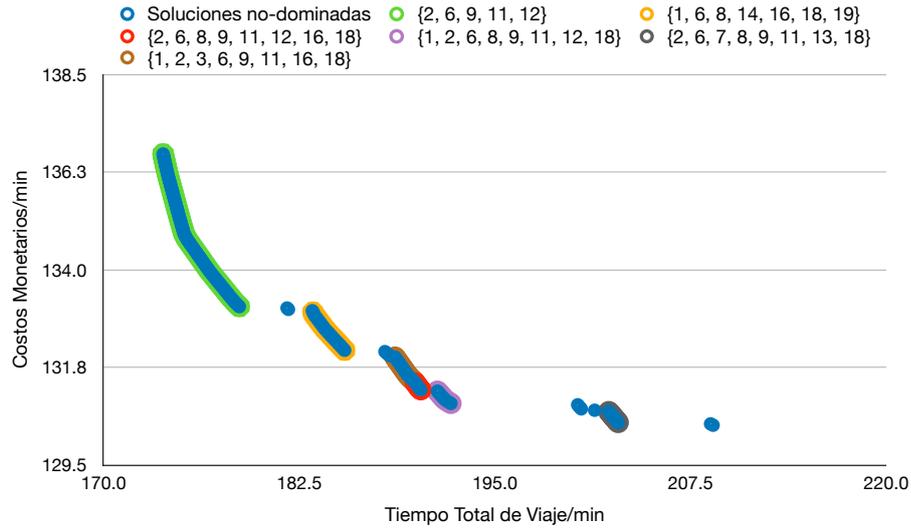


Figura 5.7: Frente de Pareto con el conjunto de líneas para cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 8$  ).

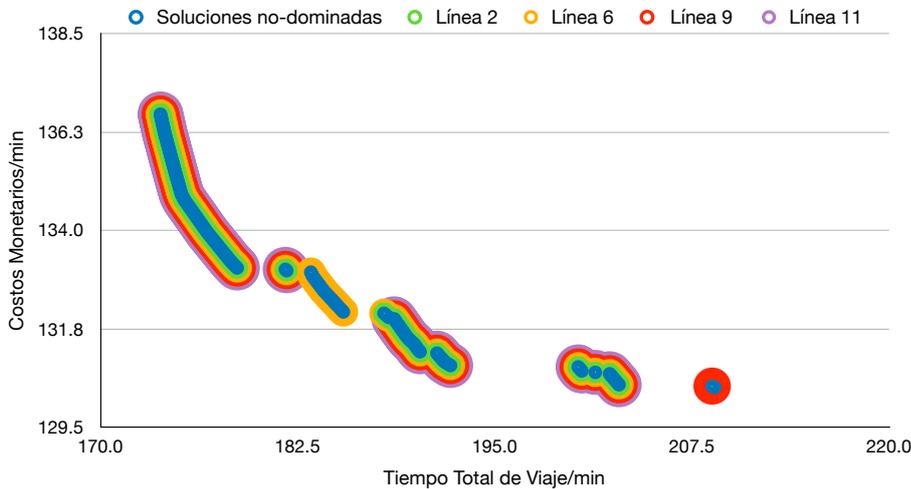


Figura 5.8: Frente de Pareto con líneas atractivas de cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 8$  ).

De manera similar, se obtuvieron los frentes de Pareto cuando  $|L| = 37$  con  $L^{max} = 4, 6, 8, 12$ . Sin embargo, el análisis de los frentes es análogo a lo presentado para  $|L| = 20$  con los distintos valores de  $L^{max}$ . En las aproximaciones de los frentes presentados en las Figuras 5.7 y 5.9 podemos observar la tendencia de conforme cuanto más a la izquierda tomemos una solución, más líneas se incluyen. Esto debido a que, como se mencionó anteriormente, entre más líneas en el sistema, menos transferencias realizan los pasajeros lo que implica que gastan menos en sus pasajes. Además, analizando los frentes de las Figuras 5.8 y 5.10 vemos que las líneas atractivas se implementan tanto para valores bajos del tiempo total de viaje así como de costos monetarios. Finalmente, los tomadores de

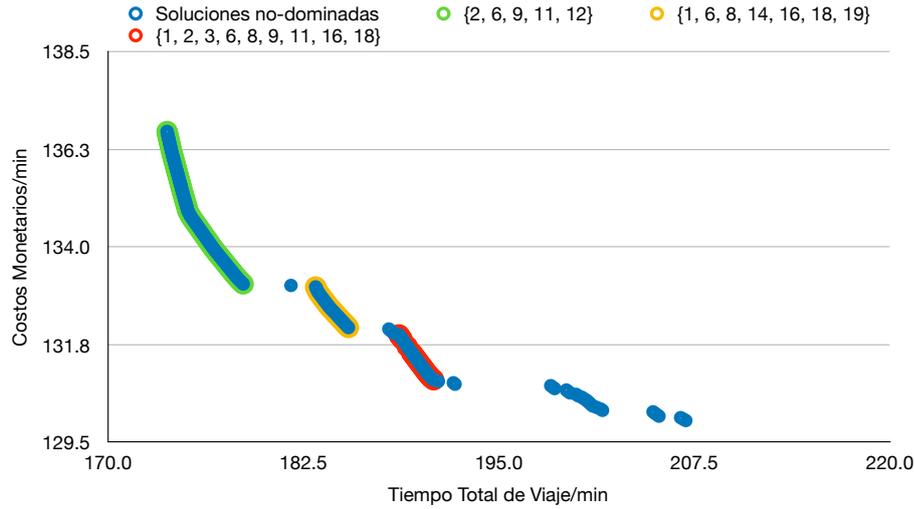


Figura 5.9: Frente de Pareto con el conjunto de líneas para cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 12$ ).

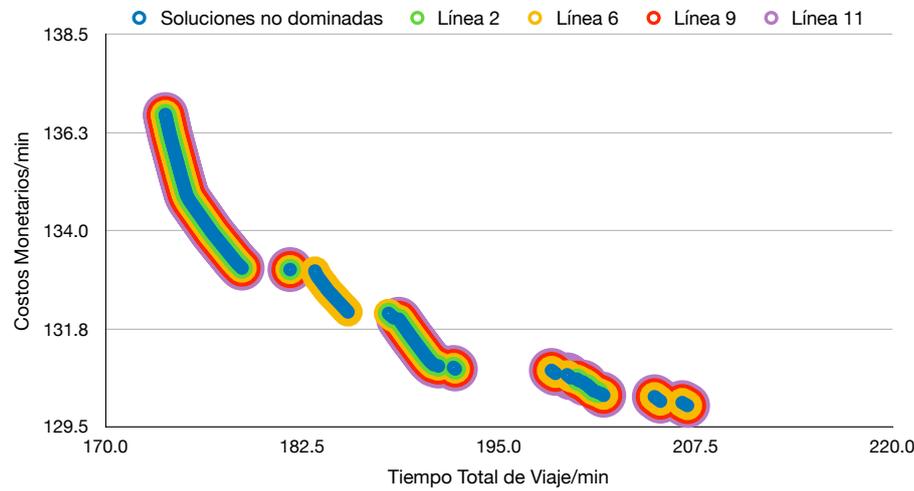


Figura 5.10: Frente de Pareto con líneas atractivas de cada solución (con  $|L| = 20$  y  $L^{max} = 12$ ).

decisiones tienen que preguntarse si tienen alguna inclinación por algún objetivo para elegir cuales otras líneas (además de las atractivas) implementar en el sistema.

Por otra parte, de manera muy similar a como se obtuvo el porcentaje de aparición de líneas, se puede obtener análogamente, el porcentaje de asignación de frecuencia a las líneas atractivas en soluciones no dominadas. Esto puede ser una guía de referencia para la asignación de frecuencias. Por ejemplo, en la Figura 5.11 se analiza este porcentaje solo para las líneas más atractivas de las que se habló en la subsección 5.2.1. Con esto se puede observar que para el caso cuando  $|L| = 20$ , para todos los valores de  $L^{max}$ , hay una tendencia de asignar una frecuencia de 0.08 buses/minuto a las líneas 2, 6, y 9 y de 0,2

buses/minuto a la línea 11. Lo cual nos indica que a pesar de ser líneas que se agregan a la mayoría de las soluciones, no operan a su máxima frecuencia, a excepción la línea 11.

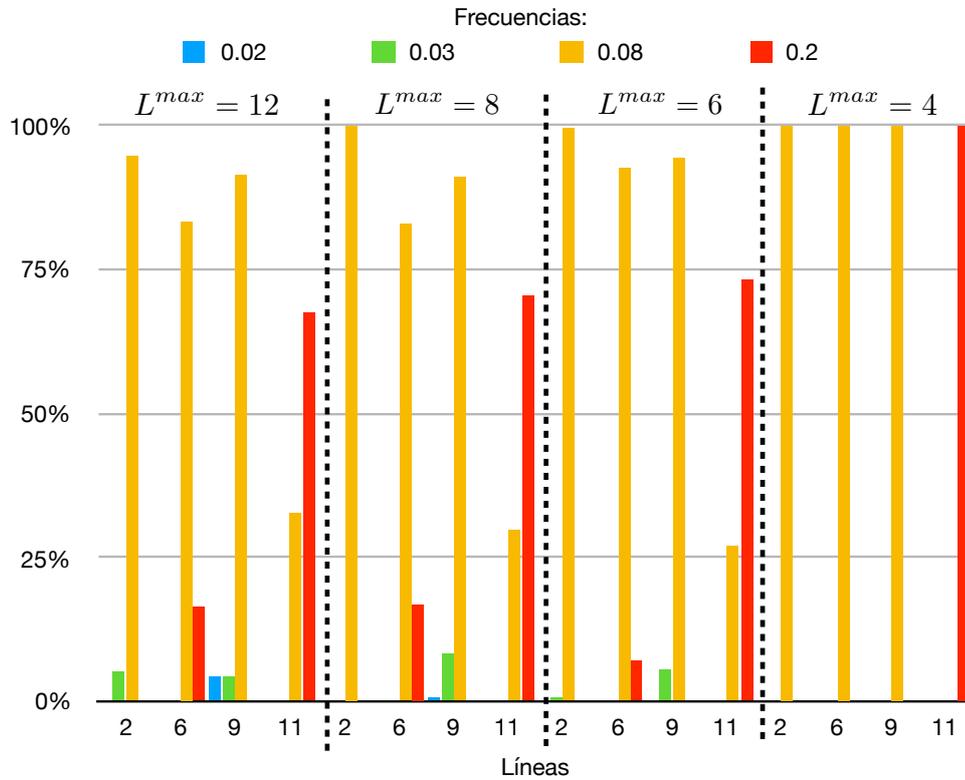


Figura 5.11: Porcentaje de asignación de frecuencia a las líneas atractivas en soluciones no dominadas (con  $|L| = 20$ ).

Es claro que se puede abstraer información de distinta índole mediante el análisis de las soluciones del frente de Pareto. Este no se reduce a solo analizar gráficamente los valores de las funciones objetivo, si no también a observar como se comportan las variables de decisión en cada una de las soluciones.

---

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

---

En este trabajo se aborda el problema de Diseño de Red de Transporte Bi-objetivo para determinar el conjunto de líneas y sus frecuencias mientras se optimizan los tiempos de viajes totales y los costos monetarios de las transferencias. Para analizar el conflicto entre los objetivos, se implementó un algoritmo  $\varepsilon$ -constraint a la instancia de referencia de Mandl encontrada en literatura relacionada. Para realizar experimentos, se realizó una variación de los parámetros  $|L|$  y  $L^{max}$ , es decir, el tamaño del conjunto de líneas potenciales y la cantidad máxima de líneas permitidas en el sistema. Los resultados obtenidos permiten observar que es posible encontrar con el método buenas aproximaciones a las fronteras de Pareto para las distintas combinaciones de los parámetros en tiempos razonables. Además, analizando el conflicto de los objetivos, observamos de manera gráfica que existen líneas atractivas en general para el sistema que facilitan a los tomadores de decisiones escoger el conjunto que se adapte más a los intereses.

Como trabajo a futuro, probar el  $\varepsilon$ -constraint en la instancia de Rivera, Uruguay, la cual es de mayor tamaño que la de Mandl, permitiría estudiar el desempeño del método ante cambios al tamaño de la red. Además, otra opción para resolver el problema, es implementar algoritmos meta-heurísticos o heurísticos que abran la posibilidad a mejorar los tiempos en que se encuentran las aproximaciones. Por otra parte, agregar supuestos como congestión y considerar un modelo de asignación de la demanda diferente, podrían hacer el modelo más realista. Finalmente, para complementar el estudio, se puede diseñar nuestro propio algoritmo de construcción de líneas en vez de tomar los obtenidos por otro trabajo.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- Arbex, R. O. and da Cunha, C. B. (2015). Efficient transit network design and frequencies setting multi-objective optimization by alternating objective genetic algorithm. *Transportation Research Part B: Methodological*, 81:355–376.
- Asadi Bagloee, S. and Ceder, A. A. (2011). Transit-network design methodology for actual-size road networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(10):1787–1804.
- Baaj, M. H. and Mahmassani, H. S. (1991). An ai-based approach for transit route system planning and design. *Journal of Advanced Transportation*, 25(2):187–209.
- Buba, A. T. and Lee, L. S. (2016). Differential evolution for urban transit routing problem. *Journal of Computer and Communications*, 4(14):11–25.
- Buba, A. T. and Lee, L. S. (2018). A differential evolution for simultaneous transit network design and frequency setting problem. *Expert Systems with Applications*, 106:277–289.
- Buba, A. T. and Lee, L. S. (2019). Hybrid differential evolution-particle swarm optimization algorithm for multiobjective urban transit network design problem with homogeneous buses. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019.
- Cancela, H., Mauttone, A., and Urquhart, M. E. (2015). Mathematical programming formulations for transit network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 77:17 – 37.
- Ceder, A. and Wilson, N. H. (1986). Bus network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 20(4):331 – 344.
- Chai, S. and Liang, Q. (2020). An improved nsga-ii algorithm for transit network design and frequency setting problem. *Journal of Advanced Transportation*, 2020:2895320.
- Desaulniers, G. and Hickman, M. D. (2007). Chapter 2: Public Transit. In Barnhart, C. and Laporte, G., editors, *Transportation*, volume 14 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 69–127. Elsevier.

- Duran, J., Pradenas, L., and Parada, V. (2019). Transit network design with pollution minimization. *Public Transport*, 11(1):189–210.
- Haimes, Y. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1(3):296–297.
- Huang, D., Liu, Z., Fu, X., and Blythe, P. T. (2018). Multimodal transit network design in a hub-and-spoke network framework. *Transportmetrica A: Transport Science*, 14(8):706–735.
- Hwang, C. L. and Masud, A. (1979). *Multiple Objective Decision Making-Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Ibarra-Rojas, O., Delgado, F., Giesen, R., and Munoz, J. (2015). Planning, operation, and control of bus transport systems: A literature review. *Transportation Research Part B: Methodological*, 77:38–75.
- Iliopoulou, C., Kepaptsoglou, K., and Vlahogianni, E. (2019a). Metaheuristics for the transit route network design problem: a review and comparative analysis. *Public Transport*, 11(3):487–521.
- Iliopoulou, C., Tassopoulos, I., Kepaptsoglou, K., and Beligiannis, G. (2019b). Electric transit route network design problem: Model and application. *Transportation Research Record*, 2673(8):264–274.
- Islam, K. A., Moosa, I. M., Mobin, J., Nayeem, M. A., and Rahman, M. S. (2019). A heuristic aided stochastic beam search algorithm for solving the transit network design problem. *Swarm and Evolutionary Computation*, 46:154 – 170.
- Jha, S. B., Jha, J., and Tiwari, M. K. (2019). A multi-objective meta-heuristic approach for transit network design and frequency setting problem in a bus transit system. *Computers & Industrial Engineering*, 130:166 – 186.
- Liu, Y., Feng, X., Zhang, L., Hua, W., and Li, K. (2020). A pareto artificial fish swarm algorithm for solving a multi-objective electric transit network design problem. *Transportmetrica A: Transport Science*, 16(3):1648–1670.
- Mandl, C. E. (1980). Evaluation and optimization of urban public transportation networks. *European Journal of Operational Research*, 5(6):396–404.
- Marler, R. T. and Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(6):369–395.

- Mauttone, A. and Urquhart, M. E. (2009). A multi-objective metaheuristic approach for the transit network design problem. *Public Transport*, 1(4):253–273.
- Moghaddam, S. M. H. M., Rao, K. R., Tiwari, G., and Biyani, P. (2019). Simultaneous bus transit route network and frequency setting search algorithm. *Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems*, 145(4):04019011.
- Montalvo-Martel, M., Ochoa-Zezzatti, A., Carrum, E., and Barzaga, D. (2021). *Design of an Urban Transport Network for the Optimal Location of Bus Stops in a Smart City Based on a Big Data Model and Spider Monkey Optimization Algorithm*, pages 167–201. Springer International Publishing.
- Mumford, C. L. (2013). New heuristic and evolutionary operators for the multi-objective urban transit routing problem. In *2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 939–946.
- Nayeem, M. A., Rahman, M. K., and Rahman, M. S. (2014). Transit network design by genetic algorithm with elitism. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 46:30–45.
- Nikolic, M. and Teodorovic, D. (2014). A simultaneous transit network design and frequency setting: Computing with bees. *Expert Systems with Applications*, 41(16):7200–7209.
- Osuna, E. E. and Newell, G. F. (1972). Control strategies for an idealized public transportation system. *Transportation Science*, 6(1):52–72.
- Owais, M. and Osman, M. K. (2018). Complete hierarchical multi-objective genetic algorithm for transit network design problem. *Expert Systems with Applications*, 114:143–154.
- Pternea, M., Kepaptsoglou, K., and Karlaftis, M. G. (2015). Sustainable urban transit network design. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 77:276–291.
- Shih, M. C. and Mahmassani, H. S. (1994). A design methodology for bus transit networks with coordinated operations. *Austin: Center for Transportation Research, University of Texas Tech. Rep. SWUTC/94/60016-1*.
- Szeto, W. and Wu, Y. (2010). A simultaneous bus route design and frequency setting problem for tin shui wai, hong kong. *European Journal of Operational Research*, 209(2):141–155.

- 
- Tong, P., Yan, Y., Wang, D., and Qu, X. (2021). Optimal route design of electric transit networks considering travel reliability. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, n/a(n/a).
- Tumlin, J. (2012). *Sustainable transportation planning: Tools for creating vibrant, healthy, and resilient communities. Chapter 8: Transit*, volume 16, pages 105–136. John Wiley and Sons.
- Vuchic, V. R. (2004). Chapter 4: Transit lines and networks. In *Urban Transit: Operations, planning and economics*, pages 215–223. John Wiley and Sons.
- Williams, H. P. (2013). *Model Building in Mathematical Programming, 5th Edition*. John Wiley and Sons.
- Zhao, H., Xu, W. A., and Jiang, R. (2015). The memetic algorithm for the optimization of urban transit network. *Expert Systems with Applications*, 42(7):3760–3773.