КАЧЕСТВЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 517.91 DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2021_3_7

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ 3×3 МАТРИЦ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Л.А. Хвощинская[1], Т.Н. Жоровина[2]

[1] *Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com*

[2] *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, zhorovina@bsu.by*

Аннотация. Получена формула для представления логарифма произведения трех 3×3 матриц группы монодромии проблемы Римана. С помощью метода логарифмирования построены дифференциальные 3×3 матрицы уравнения Фукса с четырьмя особыми точками.

Ключевые слова: проблема Римана, группа монодромии, дифференциальное уравнение класса Фукса, метод логарифмирования.

CONSTRUCTION DIFFERENT 3×3 MATRICES OF THE RIEMANN PROBLEM WITH FOUR SINGULAR POINTS

L.A. Khvostchinskya[1], T.N. Zhorovina[2]

[1] *Belarusian State Agrarian Technical University, Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com*

[2] *Belarusian State University, Republic of Belarudifferential matrices s, Minsk, zhorovina@bsu.by*

Abstract: We obtain a closed formula for a logarithm of a product of three 3×3 matrices for monodromy group of the Riemann problem. Using the logarithmization method we construct differential 3×3 matrices for the Fuchs equation with four singular points.

Keywords: Riemann problem, monodromy group, Fuchs class differential equation, logarithmization method.

Настоящая работа является логическим продолжением работ [1, 2] по решению проблемы Римана для системы трех функций. Дальнейшему продвижению в этом направлении способствовало применение «метода логарифмирования произведения матриц» размерностей 2×2 и 3×3 [3]. Актуальность построения решения проблемы Римана с числом особых точек большим трех и увеличением числа искомых функций обусловлена ее приложениями в гидромеханике, электростатике, теории упругости, теории конформных отображений и др [4].

Цель данной работы — применить «метод логарифмирования» к произведению трех матриц размерности 3×3 и построить дифференциальные матрицы (матрицы-вычеты) проблемы Римана для системы трех функций с четырьмя особыми точками.

Рассмотрим следующую задачу. Найти систему трех функций $Y(z) = (y_1, y_2, y_3)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением четырех точек $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$, при обходе вокруг которых функция $Y(z)$ испытывает линейные преобразования с помощью постоянных невырожденных 3×3 матриц V_1, V_2, V_3, V_4, образующих группу монодромии, $V_1 V_2 V_3 V_4 = E$. Выбераем класс функций, интегрируемых при $z \to a_k, k = 1, 2, 3,$ и почти ограниченных (т.е. допускающих логарифмическую особенность) при $z \to \infty$. В выбранном классе функций задача будет безусловно разрешимой.

Обозначим характеристические числа матриц V_k через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 1, \ldots, 4$, и найдем числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k, \quad \omega_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \gamma_k, \ \operatorname{Re}\rho_k, \operatorname{Re}\sigma_k, \operatorname{Re}\omega_k \in (-1, 0], \ k = 1, \ldots, 4.$$

В качестве $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ выберем из характеристических чисел матрицы V_4, для которых $\operatorname{Re}\rho_4 \le \operatorname{Re}\sigma_4 \le \operatorname{Re}\omega_4$. Обозначим

$$s_k = \rho_k + \sigma_k + \omega_k, \qquad r_k = \rho_k\sigma_k + \sigma_k\omega_k + \rho_k\omega_k, \qquad d_k = \rho_k\sigma_k\omega_k, \qquad k = 1, 2, 3,$$

$\varkappa = -\sum_{k=1}^{4}(\rho_k + \sigma_k + \omega_k)$. Целое число $\varkappa$ называется суммарным индексом задачи, $0 \le \varkappa \le 11$. Порядки столбцов решений задачи на бесконечности характеризуют числа $\rho_\infty = \rho_4 + k_1$, $\sigma_\infty = \sigma_4 + k_2$, $\omega_\infty = \omega_4 + k_3$, где целые числа k_1, k_2, k_3 удовлетворяют соотношению Фукса

$$\rho_1 + \sigma_1 + \omega_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \omega_2 + \rho_3 + \sigma_3 + \omega_3 + \rho_\infty + \sigma_\infty + \omega_\infty = 3,$$

т.е. $k_1 + k_2 + k_3 = 3 + \varkappa$. Следовательно, $k_j = 1 + [(\varkappa - j)/3]$, $j = 1, 2, 3$, и

$$\rho_\infty = \rho_3 + [(\varkappa + 2)/3], \quad \sigma_\infty = \sigma_3 + [(\varkappa + 1)/3], \quad \omega_\infty = \omega_3 + [\varkappa/3].$$

Для сокращения дальнейших записей обозначим $\rho = -\rho_\infty$, $\sigma = 1 - \sigma_\infty$, $\omega = 2 - \omega_\infty$, т.е.

$$\rho_1 + \sigma_1 + \omega_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \omega_2 + \rho_3 + \sigma_3 + \omega_3 = \rho + \sigma + \omega.$$

Также, как и в случае трех особых точек, строим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет матрица

$$X_0(z) = \begin{pmatrix} y_1 & p(z)y_1' & p^2(z)y_1'' \\ y_2 & p(z)y_2' & p^2(z)y_2'' \\ y_3 & p(z)y_3' & p^2(z)y_3'' \end{pmatrix},$$

столбцы которой также являются решениями задачи:

$$\frac{dX_0}{dz} = X_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_1(z) \\ 1/p & p'/p & \varphi_2(z) \\ 0 & 1/p & \varphi_3(z) \end{pmatrix}, \text{ где } p(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3),$$

а $\varphi_k(z), k = 1, 2, 3$ – некоторые функции. Проводя преобразования уравнения аналогично тому, как это выполнено в случае трех особых точек, устанавливаем, что общее решение проблемы Римана представляет 3×3 матрицу $X(z)$, столбцы которой являются решениями проблемы, а порядок определителя равен сумме порядков столбцов (так называемая «каноническая матрица»). Матрица $X(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Фукса

$$\frac{dX}{dz} = X\left(\frac{U_1}{z - a_1} + \frac{U_2}{z - a_2} + \frac{U_3}{z - a_3}\right), \tag{1}$$

причем дифференциальные матрицы $U_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1, 2, 3$, а для элементов матриц $U_k = \left(u_{ij}^{(k)}\right)$ выполняются равенства $u_{31}^{(k)} = 0$ и $u_{21}^{(k)} = u_{32}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$. Для того, чтобы выразить элементы матриц U_k через элементы матриц монодромии, воспользуемся следующей теоремой.

Теорема1. Пусть V_1, V_2 – постоянные невырожденные 3×3 матрицы с характеристическими числами $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 1, 2$, $V = V_1V_2$ имеет характеристические числа α, β, γ, $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$, $\omega_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\gamma_k$, $k = 1, 2$, $\rho = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha$, $\sigma = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta$, $\omega = \frac{1}{2\pi i}\ln\gamma$, причем $\rho_1 + \sigma_1 + \omega_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \omega_2 = \rho + \sigma + \omega$. Тогда матрица

$$S=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \omega\end{pmatrix} \tag{2}$$

представима в виде суммы двух матриц

$$S=S_1+S_2=\begin{pmatrix}\rho & cs_{12} & c^2s_{13}\\ -1/c & s_{22} & cs_{23}\\ 0 & -1/c & s_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -cs_{12} & -c^2s_{13}\\ 1/c & \sigma-s_{22} & -cs_{23}\\ 0 & 1/c & \omega-s_{33}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
&s_{22}=\left[\rho(s_2-\omega)-\sigma(s_1-\omega)+r_1-r_2\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{33}=\left[\omega(s_2-\sigma)-\rho(s_1-\sigma)-r_1+r_2\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{12}=\left[d_2-(\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)(\rho-\omega_1)\right]/(\sigma-\rho),\\
&s_{13}=s_{12}(\omega-s_{33})-d_2,\quad s_{23}=r_2-s_{12}-(\sigma-s_{22})(\omega-s_{33}),
\end{aligned} \tag{4}$$

c — произвольная постоянная, причем матрицы $S_k\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k=1,2$.

Для того, чтобы построить дифференциальные матрицы проблемы Римана с четырьмя особыми точками и группой монодромии V_1,V_2,V_3,V_4, $V_1V_2V_3V_4=E$, представляем матрицу V_4^{-1} в виде произведений двух матриц $V_4^{-1}=V_1(V_2V_3)$, $V_4^{-1}=V_1(V_2V_3)$, и к каждому из них применим формулу (3).

Обозначим $\alpha_{12},\beta_{12},\gamma_{12}$ и $\alpha_{23},\beta_{23},\gamma_{23}$ — характеристические числа матриц $V_{12}=V_1\cdot V_2$ и $V_{23}=V_2\cdot V_3$, а также найдем числа $\rho_{12}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{12},\sigma_{12}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\beta_{12}$, $\omega_{12}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\gamma_{12}$, $\rho_{23}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{23},\sigma_{23}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\beta_{23},\omega_{23}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\gamma_{23}$, ветви которых выбираются из условий

$$\begin{aligned}
&\rho_{12}+\sigma_{12}+\omega_{12}=\rho_1+\sigma_1+\omega_1+\rho_2+\sigma_2+\omega_2,\\
&\rho_{23}+\sigma_{23}+\omega_{23}=\rho_2+\sigma_2+\omega_2+\rho_3+\sigma_3+\omega_3,\\
&r_{12}=\rho_{12}\sigma_{12}+\sigma_{12}\omega_{12}+\rho_{12}\omega_{12},\ r_{23}=\rho_{23}\sigma_{23}+\sigma_{23}\omega_{23}+\rho_{23}\omega_{23},\ d_{12}=\rho_{12}\sigma_{12}\omega_{12},\ d_{23}=\rho_{23}\sigma_{23}\omega_{23}.
\end{aligned}$$

Представим матрицу (2) в виде сумм трех и двух матриц

$$S=S_1+S_2+S_3=S_1+S_{23}=S_{12}+S_3, \tag{5}$$

где $S_k\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_k,k=1,2,3,$ $S_{12}\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_{12}$, $S_{23}\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_{23}$, используя формулу (8). В результате получим следующие два представления:

$$S=S_1+S_{23}=\begin{pmatrix}\rho & c_1s_{12}^{(1)} & c_1{}^2s_{13}^{(1)}\\ -1/c_1 & s_{22}^{(1)} & c_1s_{23}^{(1)}\\ 0 & -1/c_1 & s_{33}^{(1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -c_1s_{12}^{(1)} & -c_1{}^2s_{13}^{(1)}\\ 1/c_1 & \sigma-s_{22}^{(1)} & -c_1s_{23}^{(1)}\\ 0 & 1/c_1 & \omega-s_{33}^{(1)}\end{pmatrix},$$

$$S=S_{12}+S_3=\begin{pmatrix}\rho & c_2s_{12}^{(3)} & c_2{}^2s_{13}^{(3)}\\ -1/c_2 & \sigma-s_{22}^{(3)} & c_2s_{23}^{(3)}\\ 0 & -1/c_2 & \omega-s_{33}^{(3)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -c_2s_{12}^{(3)} & -c_2{}^2s_{13}^{(3)}\\ 1/c_2 & s_{22}^{(3)} & -c_2s_{23}^{(3)}\\ 0 & 1/c_2 & s_{33}^{(3)}\end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Значения элементов $s_{ij}^{(1)}$ находятся по формулам (4) при замене s_2, r_2, d_2 соответственно на s_2+s_3, r_{23}, d_{23} , а значения $s_{ij}^{(3)}$ – при замене s_1, r_1, ρ_1 на $s_1+s_2, r_{12}, \rho_{12}$ и s_2, r_2, d_2 на s_3, r_3, d_3 с дальнейшими преобразованиями:

$$
\begin{aligned}
&s_{22}^{(1)}=\left[\rho(s_2+s_3-\omega)-\sigma(s_1-\omega)+r_1-r_{23}\right]/(\omega-\sigma)=\left[(\rho+\sigma)(\rho-s_1)+\sigma\omega+r_1-r_{23}\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{33}^{(1)}=\left[-\rho(s_2+s_3-\sigma)+\omega(s_1-\sigma)-r_1+r_{23}\right]/(\omega-\sigma)=\left[(\rho+\omega)(s_1-\rho)-\sigma\omega-r_1+r_{23}\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{12}^{(1)}=\left[d_{23}-(\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)(\rho-\omega_1)\right]/(\sigma-\rho),\\
&s_{13}^{(1)}=s_{12}^{(1)}(\omega-s_{33}^{(1)})-d_{23},\quad s_{23}^{(1)}=r_{23}-s_{12}^{(1)}-(\sigma-s_{22}^{(1)})(\omega-s_{33}^{(1)}),\\
&s_{22}^{(3)}=\left[\sigma(\omega-\sigma)-\rho(s_3-\omega)+\sigma(s_1+s_2-\omega)+r_3-r_{12}\right]/(\omega-\sigma)=\left[(\rho+\sigma)(\omega-s_3)+\rho\sigma\omega+r_3-r_{12}\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{33}^{(3)}=\left[\sigma(\omega-\sigma)+\rho(s_3-\omega)-\omega(s_1+s_2-\sigma)-r_3+r_{12}\right]/(\omega-\sigma)=\left[(\rho+\omega)(s_3-\sigma)-\rho\omega-r_3+r_{12}\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{12}^{(3)}=\left[(\rho-\rho_{12})(\rho-\sigma_{12})(\rho-\omega_{12})-d_3\right]/(\sigma-\rho),\\
&s_{13}^{(3)}=s_{12}^{(3)}(s_{33}^{(3)}-\omega)-d_3,\quad s_{23}^{(3)}=(\sigma-s_{22}^{(3)})(\omega-s_{33}^{(3)})-r_3+s_{12}^{(3)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Из (5) следует, что

$$
S_2=S_{12}-S_1=S_{23}-S_3=\begin{pmatrix} 0 & -c_1 s_{12}^{(1)}+c_2 s_{12}^{(3)} & -c_1{}^2 s_{13}^{(1)}+c_2{}^2 s_{13}^{(3)} \\ 1/c_1-1/c_2 & \sigma-s_{22}^{(1)}-s_{22}^{(3)} & -c_1 s_{23}^{(1)}+c_2 s_{23}^{(3)} \\ 0 & 1/c_1-1/c_2 & \omega-s_{33}^{(1)}-s_{33}^{(3)} \end{pmatrix}.
$$

Поскольку $S_2 \sim \dfrac{1}{2\pi i}\ln V_2$, то сумма диагональных миноров второго порядка матрицы S_2 равна r_2, и мы получаем уравнение, связывающее постоянные c_1 и c_2:

$$\left(1/c_1-1/c_2\right)\left(c_1(s_{23}^{(1)}+s_{12}^{(1)})-c_2(s_{12}^{(3)}+s_{23}^{(3)})\right)+\left(\sigma-s_{22}^{(1)}-s_{22}^{(3)}\right)\left(\omega-s_{33}^{(1)}-s_{33}^{(3)}\right)=r_2, \text{ или}$$

$$\left(1/c_1-1/c_2\right)\left(c_1(s_{23}^{(1)}+s_{12}^{(1)})-c_2(s_{12}^{(3)}+s_{23}^{(3)})\right)+s_{22}^{(2)}s_{33}^{(2)}=r_2, \tag{7}$$

где

$$
\begin{aligned}
&s_{22}^{(2)}=\sigma-s_{22}^{(1)}-s_{22}^{(3)}=\left[(\rho+\sigma)(\omega-s_2)+\rho\sigma+r_2-r_{13}\right]/(\omega-\sigma),\\
&s_{33}^{(2)}=\omega-s_{33}^{(1)}-s_{33}^{(3)}=\left[(\rho+\omega)(s_2-\sigma)-\sigma\omega-r_1+r_{23}\right]/(\omega-\sigma),\\
&r_{12}+r_{13}+r_{23}-r_1-r_2-r_3=\rho\sigma+\rho\omega+\sigma\omega.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Введем обозначения

$$\gamma_1=s_{12}^{(1)}+s_{23}^{(1)}=r_1-s_{22}^{(1)}s_{33}^{(1)}-\rho(s_{22}^{(1)}+s_{33}^{(1)}),\quad \gamma_2=r_2-s_{22}^{(2)}s_{33}^{(2)},\quad \gamma_3=s_{12}^{(3)}+s_{23}^{(3)}=r_3-s_{22}^{(3)}s_{33}^{(3)}$$

и перепишем уравнение (7) в виде

$$\left(1/c_1-1/c_2\right)\left(c_1\gamma_1-c_2\gamma_3\right)=\gamma_2, \text{ или } \gamma_1-\frac{c_1}{c_2}\gamma_1-\frac{c_2}{c_1}\gamma_3+\gamma_3=\gamma_2.$$

Обозначив $\tau=c_1/c_2$, приходим к квадратному уравнению относительно τ:

$$\gamma_1\tau^2+\left(\gamma_2-\gamma_1-\gamma_3\right)\tau+\gamma_3=0. \tag{9}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Каноническая матрица $X(z)$ проблемы Римана с 3×3 матрицами монодромии и четырьмя особыми точками $a_1, a_2, a_3, a_4=\infty$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) с дифференциальными матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} \rho & cs_{12}^{(1)} & c^2 s_{13}^{(1)} \\ -1/c & s_{22}^{(1)} & cs_{23}^{(1)} \\ 0 & -1/c & s_{33}^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -c\left(s_{12}^{(1)} + 1/\tau\, s_{12}^{(3)}\right) & -c^2\left(s_{13}^{(1)} + 1/\tau^2\, s_{13}^{(3)}\right) \\ -(1+\tau)/c & s_{22}^{(2)} & -c\left(s_{23}^{(1)} + \tau s_{23}^{(3)}\right) \\ 0 & -(1+\tau)/c & s_{33}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & c/\tau\, s_{12}^{(3)} & c^2/\tau^2\, s_{13}^{(3)} \\ \tau/c & s_{22}^{(3)} & c/\tau\, s_{23}^{(3)} \\ 0 & \tau/c & s_{33}^{(3)} \end{pmatrix},$$

элементы которых находятся по формулам (6), (7), (9), c – произвольная постоянная.

Библиографический список

1. Хвощинская Л. А. Построение дифференциального уравнения с группой монодромии третьего порядка и тремя особыми точками // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXXII Междунар.науч. конф.: в 12 т. Т. 12: в 3 ч. Ч. 3. под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2019. С. 3–6.
2. Хвощинская Л. А., Жоровина Т.Н. Метод логарифмирования произведения матриц группы монодромии третьего порядка Проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXXIII Междунар.науч. конф.: в 12 т. Т. 9. под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2020. С.3–6.
3. Khvostchinskaya L., Rogosin S. On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018. M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds. Cambridge Scientific Publishers. 2020. pp. 79–112.
4. Еругин Н. П. Проблема Римана. Мн.: Наука и техника. 1982. 336 с.