

Propuestas para la mejora de la interpretación del intervalo de confianza en estudiantes preuniversitarios y universitarios

Rocío Álvarez-Arroyo¹
Antonio Francisco Roldán López de Hierro¹
María del Mar López-Martín²

(¹Universidad de Granada. España)

(²Universidad de Almería. España)

Resumen

La planificación y diseño de tareas es una pieza clave que todo docente debe tomar en cuenta con objeto de garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje significativo. El conocimiento de los errores y dificultades existentes en torno a un objeto matemático facilita esta labor al profesorado, cuyo análisis contribuirá a realizar propuestas de enseñanza que mejoren dicho proceso. En base a ello, el presente trabajo tiene como objetivo el planteamiento de propuestas de enseñanza enfocadas a solventar los errores y dificultades relacionados con los intervalos de confianza (IC) que tienen los estudiantes de bachillerato y universitarios, apoyándose en el uso de las TICs y las representaciones gráficas. Pensamos que esta forma de abordar el tema propicia una mejor comprensión de la finalidad que realmente tiene el uso de los IC.

Palabras clave

Inferencia estadística, intervalos de confianza, TICs, representación gráfica, interpretación, nivel de confianza, conflicto semiótico.

Title

Proposals to improve the interpretation of the confidence interval in pre-university and university students

Abstract

The planning and design of tasks is a key issue that every teacher must take into account in order to guarantee a meaningful teaching and learning process. The knowledge of the errors and difficulties about a mathematical object facilitates this labor for teachers, whose analysis will contribute to making teaching proposals improving this process. The present work shows a teaching proposals focused on solving errors and difficulties related to confidence intervals (CI) made by pre-university and university students, through ICTs and graphical representations. We think this way of approaching the subject allows better understanding concerning confidence intervals purpose.

Keywords

Statistical inference, confidence interval, ICT, graphic representation, interpretation, confidence level, semiotic conflict.

1. Introducción

Una de las herramientas estadísticas ampliamente utilizada en la inferencia es el intervalo de confianza (IC). Diversas instituciones, como la *American Psychological Association* (APA), recomiendan su uso, incluso por encima del contraste de hipótesis por ciertas debilidades de este



(Hoekstra, Johnson y Kiers, 2012; Lecoutre y Poitevineau, 2014). Un gran número de investigaciones han revelado la existencia de diversas dificultades asociadas al estudio y manejo de este estadístico, tanto a nivel académico, como científico (por ejemplo, Belia, Fidler, Williams y Cumming, 2005; Castro, Vanhoof, Noortgatem y Onghena, 2007; Fidler y Cumming, 2005; Olivo, Batanero y Díaz, 2008; Roldán López de Hierro, Batanero y Álvarez-Arroyo, 2020). Sin embargo, en la literatura son escasos los trabajos centrados en proponer formas de actuación ante tales problemas. Entre las alternativas para la mejora en la enseñanza de la inferencia estadística, Espinel, Ramos y Ramos (2007) contemplan el uso de las TICs en niveles preuniversitarios.

En base a lo comentado, y centrándonos en el contexto académico, el objetivo principal de la presente investigación es mostrar un conjunto de propuestas de enseñanza sobre este concepto estadístico que logre mejorar el aprendizaje del alumnado en los aspectos más problemáticos. Las propuestas realizadas van dirigidas a estudiantes que se inician en el estudio de los intervalos de confianza, poniendo el foco de atención en estudiantes de bachillerato (o pre-universitarios) y estudiantes que cursan grados universitarios en los que su formación contempla asignaturas del área de Estadística.

2. Marco teórico y estado de la cuestión

La propuesta planteada en este trabajo se basa en la existencia de conflictos semióticos que surgen en el alumnado cuando trabajan los intervalos de confianza. Esta idea de *conflicto semiótico* se define como la discrepancia entre dos significados o interpretaciones matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007), lo que en nuestra aula se traduciría como la diferencia entre el significado personal que el alumno otorga al intervalo de confianza y el significado institucional que pretende el docente o la institución de enseñanza. Conjuntamente, dentro del mismo marco teórico del enfoque ontosemiótico (EOS) de Godino y colaboradores, se concibe el *significado* de un objeto matemático como el conjunto de prácticas que realiza un sujeto ante una situación-problema, conllevando el conocimiento y manejo de todos los elementos que componen el objeto (campos de problemas, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos). En consecuencia, en este punto es necesario exponer que el significado institucional tomado en esta propuesta práctica de enseñanza es aquella determinada por la visión *frecuencial* del intervalo de confianza, ya que existen otros enfoques (clásico o bayesiano, remuestreo, etc.) que difieren en el significado de estos elementos (véase Bologna, 2012; Roldán López de Hierro y Álvarez-Arroyo, 2020).

En la inferencia frecuencial el intervalo de confianza se concibe como un rango de valores que estima el valor del parámetro poblacional (θ) mediante un estadístico muestral ($\hat{\theta}$), el cual tendrá éxito en dicha estimación en el $1-\alpha$ % de las muestras tomadas de dicha población ($1-\alpha$ es el nivel de confianza, cuyo valor de α se fija entre 0 y 1 previo a la estimación), existiendo una desviación ($S_{\hat{\theta}}$) del estimador con respecto al parámetro. Esta interpretación hace que el estimador $\hat{\theta}$ sea una variable aleatoria y que los extremos del intervalo ($\hat{\theta} - k_1 S_{\hat{\theta}} ; \hat{\theta} + k_2 S_{\hat{\theta}}$) cambien de una muestra a otra, generando una distribución muestral.

Para poner en contexto y dar sentido a las propuestas de mejora de la enseñanza que exponemos en este trabajo, la Tabla 1 sintetiza los conflictos semióticos sobre intervalos de confianza que han sido detectados por la comunidad científica hasta el día de hoy.

Conflictos semióticos	Referencias
Definición incorrecta de IC	López-Martín, Batanero, y Gea (2019); Olivo (2008)
Considerar el IC sólo como un estadístico descriptivo, obviando su naturaleza inferencial	Fidler y Cumming (2005)
Considerar que el IC está referido al estadístico muestral, y no al parámetro poblacional	López-Martín, Batanero, y Gea (2019); Olivo (2008)
Débil comprensión de la utilidad del IC para estimar valores desconocidos del parámetro	Behar (2001); Roldán López de Hierro et al. (2020)
Considerar fijos los extremos del IC, no aleatorios	Olivo (2008)
Considerar que el IC siempre contiene el valor del parámetro	Olivo (2008); Roldán López de Hierro et al. (2020)
Ideas erróneas sobre la relación entre amplitud del IC y tamaño de la muestra (n)	Behar (2001); Fidler y Cumming (2005); Olivo (2008)
Ideas erróneas sobre la relación entre amplitud del IC y nivel de confianza ($1-\alpha$)	Behar (2001); Olivo (2008)
Ideas erróneas sobre la relación entre amplitud del IC y varianza de la población	Behar (2001)
Ideas erróneas sobre la relación entre amplitud del IC y la media muestral	Roldán López de Hierro et al. (2020)
Interpretación bayesiana del intervalo, asociando confianza con probabilidad	Behar (2001); López-Martín, Batanero, y Gea (2019); Olivo (2008)
Confusión del lenguaje en la asociación de los términos (sinónimos) “precisión” y “amplitud” del IC	Roldán López de Hierro et al. (2020)
Confusión entre distribución estadística, distribución de la variable aleatoria y distribución muestral	Harradine, Batanero y Rossman (2011)
Errores asociados a la construcción del IC (uso incorrecto de las tablas de distribución o de los valores críticos)	Espinell et al. (2007); Roldán López de Hierro et al. (2020)

Tabla 1. Conflictos semióticos sobre intervalos de confianza

3. Propuestas de mejora para la enseñanza de los intervalos de confianza

Tener conocimiento sobre los errores o dificultades más frecuentes del alumnado supone una gran ayuda para el docente, pues le proporciona información de cómo ellos asimilan y resuelven el problema. Apoyándonos en esto, aunque somos conscientes de que siempre es complicado hacer propuestas que sirvan para mejorar de manera efectiva la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, consideramos conveniente realizar las siguientes sugerencias con esta intención, esperando enriquecer la comprensión del alumnado en aquellos aspectos más complejos de los intervalos de confianza.

3.1. Apoyarse en la representación gráfica de la función de densidad de la distribución muestral del estadístico

Los errores de cálculo cometidos por el alumnado en la construcción de intervalos de confianza es también un aspecto a tener en cuenta en el proceso de instrucción. Aunque son pocos los cálculos que conlleva dicha construcción, sí son numerosos los errores que se encuentran en la determinación de los valores críticos asociados a un cierto nivel de confianza ($Z_{\alpha/2}$ y $Z_{1-\alpha/2}$), bien por la confusión que



genera la notación empleada para el nivel de confianza ($1-\alpha$), o bien por un uso incorrecto de la tabla estadística de distribución. En el primer caso, fijado el valor del nivel de confianza, una parte importante del alumnado se confunde al calcular el valor crítico, pues en algunas situaciones dividen el nivel de confianza entre dos en lugar del nivel de significación, es decir, hallan $(1-\alpha)/2$ en vez de $1-\alpha/2$; y en otras ocasiones consideran $1-\alpha$ como el valor de $Z_{\alpha/2}$. Así mismo, es común olvidar dividir entre dos el nivel de significación, buscando directamente el nivel de confianza en la tabla. En consecuencia, estos errores se trasladan posteriormente en la búsqueda de la probabilidad de dicho valor crítico en la tabla de la distribución. En el segundo caso, el uso adecuado de las tablas estadísticas de distribución adquiere cierta importancia, pues un error en la lectura de la tabla podría suponer la determinación incorrecta del intervalo. Este error puede venir provocado por confundir un punto sobre la recta real con el área que queda encerrada por la distribución y el eje de abscisas, es decir, la probabilidad (Espinel et al., 2007).

Una propuesta para solventar estos posibles errores sería recurrir a la representación gráfica de la distribución, posicionando los valores críticos que permiten determinar una región de área $1-\alpha$, como muestra la Figura 1. Los errores relacionados con la lectura e interpretación de las tablas de las distribuciones muestrales también lo destacan Espinel et al. (2007), recomendando el uso de la representación gráfica de la distribución bajo estudio. Esta forma de proceder puede permitir al alumnado tener una mayor comprensión del desarrollo metodológico de la construcción del intervalo de confianza, pues refleja que los valores críticos corresponden a valores de la recta real, y $\alpha/2$, $1-\alpha$ y $1-\alpha/2$ son áreas de la distribución de probabilidad (véase Figura 1).

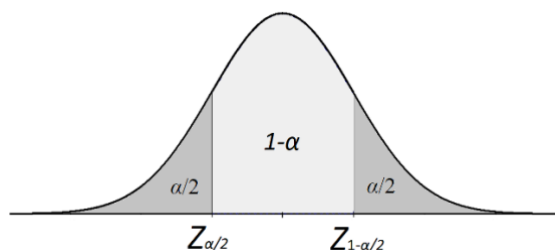


Figura 1. Representación gráfica de una distribución Normal tipificada para el cálculo de los valores críticos $Z_{\alpha/2}$ y $Z_{1-\alpha/2}$ de intervalos de confianza

3.2. Tareas de construcción de intervalos de confianza de diversas muestras extraídas de una misma población con recursos informáticos

Uno de los conflictos semióticos más frecuentes que hemos observado en estudios empíricos previos es el que denominaremos *falacia fundamental de la confianza*, que posiblemente sea el error de significado más extendido en cuanto a la interpretación del intervalo de confianza. Este error consiste en creer (equivocadamente) que, cuando ya se ha determinado de manera efectiva el intervalo de confianza, entonces dicho intervalo debe contener al verdadero valor del parámetro poblacional con una probabilidad igual al nivel de confianza. Sin embargo, una vez que ya se ha determinado el intervalo, la probabilidad de que el parámetro contenga el valor del parámetro es 1, si lo contiene, y 0 si no lo contiene, pues desaparece la aleatoriedad asociada al intervalo.

Este conflicto semiótico está asociado a una interpretación bayesiana del intervalo, donde el parámetro desconocido se concibe como una variable aleatoria en sí misma que se distribuye de una forma conocida a priori dentro de una familia concreta de distribuciones de probabilidad y trata de encontrar su distribución concreta a posteriori.

Este obstáculo al conocimiento está fuertemente reforzado por el hecho de que los ejercicios que usualmente se proponen en el aula conllevan el cálculo del intervalo de confianza de una única muestra, fomentando la idea de que el verdadero valor del parámetro está en dicho intervalo. Dicho de otro modo, el alumnado supone que, fijado un cierto nivel de confianza, solo puede haber un único intervalo de confianza, pues al proporcionarle una única muestra para su cálculo práctico da la falsa sensación de que los datos siempre llevarán al mismo y único intervalo calculado. De hecho, es habitual que los propios docentes utilicemos la expresión “el” intervalo de confianza en lugar de “un” intervalo de confianza, que sería más correcto para ayudar a disipar esta creencia.

Para enriquecer el aprendizaje del alumnado se recomienda, por tanto, plantear tareas en las que el alumnado obtenga los intervalos de confianza de distintas muestras (todas de igual tamaño) extraídas de una misma población para posteriormente proponer cuestiones en base a los distintos resultados obtenidos que fomenten la discusión y reflexión de los mismos. Ejemplo de ello sería:

Si hemos calculado dos o más intervalos de confianza y resulta que estos se solapan, ¿cuál debería ser la probabilidad de que el verdadero parámetro poblacional desconocido se encuentre en la intersección de todos ellos? ¿Debería ser menor del nivel de confianza, ya que el intervalo intersección posee menor amplitud que todos los intervalos que se han determinado asociados a las diferentes muestras? ¿o debería ser mayor que el nivel de confianza, ya que la experimentación práctica ha puesto de manifiesto que todos los intervalos calculados coinciden en ese mismo trozo de la recta real?

Un gran aliado de cara a buscar respuestas a las cuestiones planteadas es el uso de recursos informáticos capaces de generar diversas muestras aleatorias independientes de una variable concreta y determinar (numérica o gráficamente) sus correspondientes intervalos de confianza. De este modo, el alumnado percibirá de una forma tangible y práctica que el intervalo de confianza no es, en absoluto, único, sino que depende de la muestra concreta que lo genera. Es más, no hay un intervalo que destaque entre todos ellos ni existe uno concreto del que se pueda decir que contiene al verdadero valor del parámetro desconocido con una probabilidad igual al nivel de confianza. De hecho, algunos intervalos serán tan distintos que, representados gráficamente, se detecte con facilidad que son disjuntos.

Para comprender mejor esta propuesta, describimos dos recursos informáticos muy sencillos que nos pueden ayudar en esta tarea.

Intervalos de confianza con la hoja de cálculo Excel

A continuación, mostramos un ejemplo de cómo utilizar una sencilla hoja de cálculo para mejorar la interpretación del intervalo de confianza para la proporción. Supongamos que se desea estimar la proporción p de individuos de una población que presentan una cierta característica y para ello empleamos el intervalo de confianza tanto en la versión clásica, expresión (1), como a través de la propuesta de Wilson (1927), expresión (2), a partir de muestras aleatorias que vamos a generar como se observa en la Figura 2.

En esta propuesta el usuario fija tres datos iniciales: (i) la proporción muestral que deseamos estimar; (ii) el tamaño de las muestras que se tomarán; y (iii) el nivel de confianza que utilizaremos (celdas D2, D3 y D4 respectivamente de la Figura 2). Puede pensar el lector que no tiene sentido conocer la proporción poblacional desde el principio pues, en un contexto real, precisamente se utiliza el intervalo de confianza para hacer una estimación del verdadero valor de este parámetro. Indiscutiblemente esto es cierto cuando pretendemos realizar un estudio estadístico inferencial o una



Propuestas para la mejora de la interpretación del intervalo de confianza en estudiantes preuniversitarios y universitarios

R. Álvarez-Arroyo, A. F. Roldán López de Hierro y M. M. López-Martín

investigación que utilice intervalos de confianza. Sin embargo, en este caso no queremos llevar a cabo ninguna de estas dos tareas: nuestro objetivo es puramente educativo, y nos estamos centrando en mostrar al alumnado posibles contextos para que sea él quien saque sus propias conclusiones y construya su propio conocimiento. Nosotros partiremos del hecho de que conocemos la proporción muestral que usualmente es desconocida porque, entre otras cuestiones, deseamos determinar exactamente qué intervalos de confianza, contruidos con muestras diferentes, contienen a ese verdadero valor. En el caso de estudios estadísticos inferenciales no podremos conocer qué intervalos contienen a este valor desconocido, pero en nuestra situación propuesta sí, y podremos estimar si la proporción de intervalos que contienen al verdadero valor del parámetro p se parece o no al nivel de confianza previamente establecido. Éste es otro de los objetivos que se persiguen al utilizar esta hoja de cálculo.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Seleccione las siguientes opciones										<input checked="" type="checkbox"/>
Proporción poblacional "p"			0,9	Comprobación para 'p'		Valor adecuado para 'p'				Ok
Tamaño muestral "n"			150	Comprobación para 'n'		Valor adecuado para 'n'				
Nivel de confianza (%)			95%	Valor crítico		1,9600				
Número de intervalos calculados								1000		
								Tradicional	Wilson	
Número de muestras que contienen al verdadero valor de "p"								927	953	
Proporción de muestras que contienen al verdadero valor de "p"								92,70%	95,30%	
Datos aleatorios			Intervalo de confianza TRADICIONAL			Intervalo de confianza WILSON				
Nº	Datos	Proporción muestral	Extremo inferior	Extremo Superior	¿Pertenece "p" al IC?	Extremo inferior	Extremo Superior	¿Pertenece "p" al IC?		
1	138	0,920	87,66%	96,34%	Sí	86,54%	95,36%	Sí		
2	136	0,907	86,01%	95,32%	Sí	84,94%	94,36%	Sí		
3	132	0,880	82,80%	93,20%	Sí	81,83%	92,27%	Sí		
4	136	0,907	86,01%	95,32%	Sí	84,94%	94,36%	Sí		
5	134	0,893	84,39%	94,27%	Sí	83,38%	93,33%	Sí		
6	141	0,940	90,20%	97,80%	No	88,99%	96,81%	Sí		
7	136	0,907	86,01%	95,32%	Sí	84,94%	94,36%	Sí		

Figura 2. Hoja de cálculo para la mejora en la interpretación del intervalo de confianza para la proporción

Una vez que hemos fijado el parámetro poblacional p y el tamaño n de las muestras que emplearemos (en el ejemplo de la Figura 2, $p = 0,9$ y $n = 150$), no vamos a generar exactamente las muestras, sino los resultados que se pueden extraer de dichas muestras. En concreto, generaremos 1000 números aleatorios (columna B) siguiendo una distribución binomial $B(n=150; p=0,9)$. La interpretación de cada uno de estos 1000 números es la siguiente: suponemos que hemos tomado 150 individuos al azar dentro de la población ($n = 150$) y analizamos cuántos de estos individuos de la muestra tienen la característica objeto de estudio. Si el primer número generado es 138, entonces estamos suponiendo que este número está asociado a una muestra aleatoria (la primera de ellas) en la que 138 individuos sí presentan la característica estudiada y 12 de ellos no la presentan, es decir, la muestra contiene 138 síes y 12 noes. Si el segundo número fuese 127, entonces estaríamos imaginando que tenemos una segunda muestra aleatoria, independiente de la primera, en la que 127 individuos sí presentan la característica estudiada y 23 de ellos no la presentan. Y así sucesivamente.

Como puede observarse, no hemos construido exactamente las 1000 muestras aleatorias de síes y noes (según presenten o no la característica), pero sí estamos utilizando la información que nos proporcionaría cada una de las muestras, pues en la columna C calculamos la proporción muestral de individuos de cada muestra que presentan la característica estudiada. Realmente, este es el dato que necesitamos para construir el intervalo de confianza asociado a la proporción.

Una vez que conocemos las proporciones muestrales \hat{p} de los individuos que presentan la característica estudiada en cada una de las 1000 muestras, y habiendo fijado un cierto nivel de confianza, programamos los extremos del intervalo de confianza (columnas E y F) para la proporción siguiendo la fórmula clásica:

$$IC(p) = \left[\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \quad (1)$$

donde $Z_{\alpha/2}$ representa el valor crítico al nivel de confianza $1-\alpha$, es decir, el único número real positivo tal que $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, siendo Z variable aleatoria con distribución Normal $N(0,1)$. Además, sin mayor esfuerzo, también programamos en las columnas I y J los extremos del intervalo de confianza para la proporción siguiendo la fórmula de Wilson (una descripción de este intervalo y algunas de sus propiedades básicas puede encontrarse en Roldán López de Hierro y Batanero (2020):

$$IC_W(p) = \left[\frac{2n\hat{p} + Z_{\alpha/2}^2 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{Z_{\alpha/2}^2 + 4n\hat{p}(1-\hat{p})}}{2(n + Z_{\alpha/2}^2)} \right] \quad (2)$$

Dado que en esta simulación conocemos el valor real del parámetro p , una vez obtenidos los intervalos podemos conocer cuáles de ellos contienen dicho valor (columnas G y K) y obtener el porcentaje de intervalos que contiene a dicho valor (celdas I9 y J9).

Tras llevar a cabo esta experimentación, es muy sencillo aportar ahora una interpretación frecuencial del intervalo de confianza: fijado un cierto nivel de confianza, la expresión del intervalo está pensada para que, si calculamos “muchos” intervalos de confianza (todos ellos asociados a muestras aleatorias independientes de la misma variable objeto de estudio), entonces el verdadero valor del parámetro a estimar estará contenido en un porcentaje de intervalos similar al nivel de confianza que se ha tomado. Podemos, entonces, preguntar al alumnado qué información creen ellos que generalmente no es conocida en un estudio estadístico inferencial y borrar esa información de la hoja de cálculo con objeto de aproximar más la situación a un contexto inferencial real.

Como consecuencia, esta práctica podría contribuir a la mejora de la interpretación de los intervalos de confianza, reduciendo paulatinamente la *falacia fundamental de la confianza*, de tal manera que el alumnado ya no hablaría de la probabilidad de que el parámetro desconocido pertenezca a un cierto intervalo ya calculado y la asocie al nivel de confianza.

Intervalos de confianza con el applet *Seeing Theory*

En la línea de la propuesta anterior, se sugiere una visita a la web *Seeing Theory*, diseñada por Daniel Kunin (Universidad de Brown, Rhode Island, USA) cuyo contenido de probabilidad e inferencia estadística es de libre acceso. Su objetivo principal es facilitar la comprensión de la estadística mediante la visualización de simulaciones y gráficos.

Centrándonos en la sección dedicada a intervalos de confianza desde un enfoque frecuencial, se puede seleccionar la distribución a tratar (Uniforme, Normal, t -Student, Chi-cuadrado, Exponencial, F -Snedecor), el tamaño de las muestras y el nivel de confianza. Al iniciar el muestreo, el *applet* va generando muestras aleatorias de esa distribución con el tamaño muestral seleccionado de forma reiterada, representando los distintos valores muestrales bajo la curva de distribución con puntos naranjas. La Figura 3 ejemplifica la simulación de distintas muestras de tamaño 10 con objeto de



estimar la media poblacional considerando el modelo gaussiano como distribución teórica a un nivel de confianza del 90%. A partir de las muestras generadas se construyen sus respectivos intervalos de confianza (segmentos verdes y rojos en función de si contienen o no el parámetro poblacional), y simultáneamente se representa un diagrama de barras con la proporción de los distintos intervalos construidos. Puede encontrarse un análisis del recurso más detallado en Álvarez-Arroyo y Garzón-Guerrero (2021).

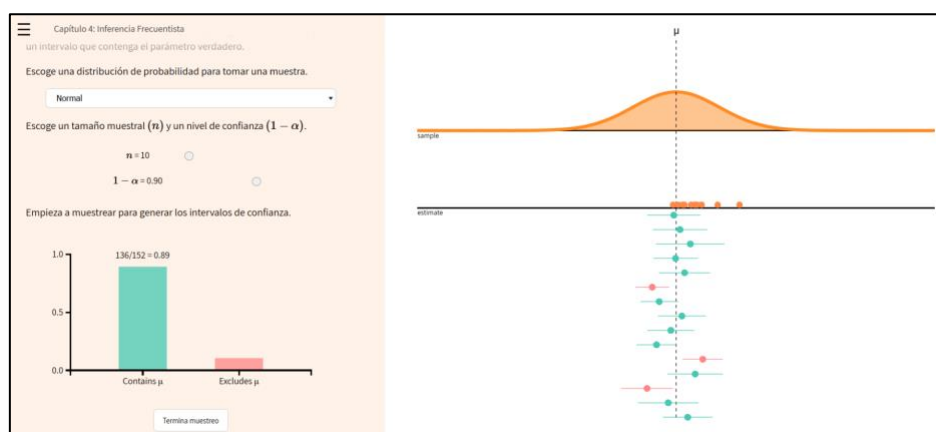


Figura 3. Pantalla de la applet “Seeing Theory” con generación de intervalos de confianza (Kunin, 2020)

A diferencia del uso de la hoja de cálculo *Excel*, que solamente muestra los valores numéricos de los intervalos de confianza, el *applet* permite visualizar gráficamente dichos intervalos, facilitando: (i) examinar la amplitud de cada uno de ellos y observar que ésta no es constante (manteniendo el mismo tamaño muestral y nivel de confianza); (ii) conocer si la media muestral es inferior o superior a la poblacional; (iii) detectar si el parámetro está incluido o no en el intervalo construido; (iv) la existencia de solapamiento entre intervalos y de intervalos disjuntos; y (v) obtener el porcentaje de intervalos que contienen el valor verdadero del parámetro poblacional. Todos estos aspectos pueden permitir al docente disipar en su alumnado gran parte de los conflictos semióticos recogidos en la Tabla 1, consiguiendo desarrollar una comprensión significativa de los intervalos de confianza.

4. Reflexiones finales

La literatura científica pone de manifiesto que la Inferencia Estadística presenta cierta complejidad. Centrando la atención en los intervalos de confianza, la revisión realizada revela la variedad de errores existentes en torno a la interpretación del nivel de confianza y del propio intervalo. El estudio de los errores nos permite, como docentes, adelantarnos a situaciones que pueden generarse en nuestros estudiantes. Una propuesta idónea de tareas, centradas en solventar esos tipos de errores, es una pieza esencial que debe ser considerada para lograr una correcta instrucción y un aprendizaje en el que los alumnos entiendan lo que están aprendiendo. Las representaciones gráficas y las TICs pueden ser elementos fundamentales a tener en cuenta en estas situaciones, ya que una correcta interpretación del intervalo de confianza posibilita al alumnado comprender la información que realmente aporta, y es en estos dos pilares donde hemos apoyado las propuestas de enseñanza planteadas en este trabajo. Dichas propuestas están basadas en los errores observados en el alumnado y teniendo en cuenta la propia experiencia didáctica de los autores, tanto en Bachillerato como en el ámbito universitario.

En la actualidad, existen diversos autores que señalan la importancia de introducir en el aula recursos como las TICs. La repercusión que éstas han adquirido se ha visto reflejado también en las normativas curriculares donde se espera que los estudiantes desarrollen, entre otras, una adecuada competencia digital. Entre los beneficios que tiene el uso de la tecnología, en nuestro campo de estudio destacamos el hecho de que permite obtener un gran número de intervalos de confianza en segundos, favoreciendo la interpretación frecuencial de los mismos y no limitando el estudio a un único intervalo. El presente trabajo es el inicio de futuras investigaciones destinadas a llevar a cabo las propuestas aquí descritas y a diseñar programas de intervención para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de intervalos de confianza, ya que son aún escasos los trabajos de investigación en esta línea.

Agradecimiento

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Bibliografía

- Álvarez-Arroyo, R. y Garzón-Guerrero, J. A. (2021). Uso de un recurso tecnológico para mejora de la comprensión del intervalo de confianza en la inferencia frecuentista. En *Indagatio Didactica*, en prensa.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Belia, S., Fidler, F., Williams, J. y Cumming, G. (2005). Researchers misunderstand confidence intervals and standard error bars. *Psychological Methods*, 10(4), 389-396. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.10.4.389>.
- Bologna, E. (2012). Tendencias en el análisis estadístico: Límites de la inferencia frecuencial y posibilidades del enfoque bayesiano. *Revista Evaluar*, 11, 59-84. <http://doi.org/10.35670/1667-4545.v11.n1.2842>
- Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W. y Onghena, P. (2007). Student's misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistical education. *Educational Research Review*, 2(2), 98-113. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2007.04.001>.
- Espinel, M. C., Ramos, R. M. y Ramos, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en Secundaria. *Números*, 67, 15-23.
- Fidler, F. y Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: problems and potential solutions. Trabajo presentado en la 55th Session of the International Statistical Institute. Sydney.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246). Springer, Netherlands.
- Hoekstra, R., Johnson, A. y Kiers, H. A. L. (2012). Confidence intervals make a difference: effects of showing confidence intervals on inferential reasoning. *Educational and Psychological Measurement*, 72(6), 1039-1052. <http://doi.org/10.1177/0013164412450297>.
- Kunin, D. (2020). *Seeing theory*. Material didáctico. Recuperado el 10 de septiembre de 2020, de <https://seeing-theory.brown.edu/index.html>.
- Lecoutre, B. y Poitevineau, J. (2014). *The significance test controversy revisited*. Berlín; Springer.
- López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). Prospective high school teachers'



- interpretation of hypothesis tests and confidence intervals. Trabajo presentado en el *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*. Utrecht.
- Olivo, E., Batanero, C. y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 20(3), 5-32.
- Roldán López de Hierro, A. F. y Álvarez-Arroyo, R. (2020). Interpretación de intervalos de confianza: estudio exploratorio con alumnado preuniversitario. En C. R. Campos, A. P. Perin, y S. Samá (Eds.), *Investigações Hispano-Brasileiras em Educação Estatística*. Taubaté, SP, Brasil: Akademy.
- Roldán López de Hierro, A. F. y Batanero, C. (2020). ¿Podemos confiar en el nivel de confianza del intervalo de confianza para la proporción? *Suma*, en prensa.
- Roldán López de Hierro, A. F., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2020). Comprensión del intervalo de confianza: un estudio comparado con estudiantes universitarios y preuniversitarios. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, en prensa.
- Wilson, E.B. (1927). Probable inference, the law of succession, and statistical inference, *Journal of the American Statistical Association*, 22, 209-212.

Rocío Álvarez-Arroyo. Profesora Ayudante Doctora adscrita al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España). Ingeniero Químico, Ingeniero Técnico Industrial y Doctora por la Universidad de Granada. Actualmente desarrolla su investigación en Didáctica de la Estadística en el grupo FQM126 en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, donde ejerce como profesora. Email: rocioaarroyo@ugr.es

Antonio Francisco Roldán López de Hierro. Profesor titular adscrito al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada. Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada (2003) y doctor en Ciencias por la Universidad de Jaén (2012). Es autor de más de 90 artículos de investigación en revistas internacionales de impacto. Temas de interés: números difusos, ranking, toma de decisiones en ambientes de incertidumbre, didáctica de la estadística. Email: aroldan@ugr.es

María del Mar López-Martín. Profesora Titular de Universidad en el Área de Didáctica de la Matemática adscrita al Departamento de Educación de la Universidad de Almería, España. Licenciada en Matemáticas y Doctora por la Universidad de Granada. Actualmente desarrolla su investigación en Didáctica de la Estadística en el grupo FQM126 en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Email: mdm.lopez@ual.es