

ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR- PREY DENGAN ADANYA PREY TERINFEKSI DAN KOMPETISI PADA PREDATOR

Azzatul Hanizah

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : azzatul.17030214039@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini membahas model predator- prey yang terdiri dari dua predator dan satu prey dimana terdapat populasi prey terinfeksi dan kompetisi antara dua populasi predator, baik kompetisi intraspesifik ataupun kompetisi interspesifik, untuk memberikan pemahaman tentang dinamika sistem ekologi yang lebih kompleks secara matematis dengan menggunakan pemodelan sistem persamaan diferensial. Dilakukan analisis perilaku dinamis pada sistem, yang menunjukkan terdapat sembilan titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium kepunahan selalu tidak stabil dan delapan titik ekuilibrium lainnya stabil asimtotik lokal dengan beberapa kondisi. Dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analitik. Diberikan diagram bifurkasi dengan menggunakan MatCont untuk menganalisis kestabilan sistem. Dengan bervariasi parameter tingkat penyebaran penyakit, diperoleh hasil adanya bifurkasi transkritikal pada sistem.

Kata Kunci: model predator- prey, kestabilan lokal, bifurkasi

Abstract

In this paper, we propose predator- prey model consisting of two predator populations and one prey population, in presence of infected prey and competition between two predator populations either intraspecific or interspecific competition to provide an understanding of the dynamics in more complex ecological systems, by using system of differential equations. We analyze the dynamics behavior of the system. it shows that there are nine equilibrium points. The equilibrium point of extinction is always unstable and the other eight equilibrium points are local asymptotically stable with some sufficient conditions and the other eight equilibrium points are local asymptotically stable with some sufficient conditions. Numerical simulation are carried out to support analytic results. We give bifurcation diagram by using MatCont to analyze stability of system. The bifurcation diagram is obtained by varying the parameter of the rate of infection, obtained that transcritical bifurcation occurs in system.

Keywords: predator- prey model, local stability, bifurcation

PENDAHULUAN

Bagian Penggabungan sistem ekologi dan epidemiologi menjadi topik yang menarik baik bagi ahli ekologi maupun matematikawan. Penelitian yang telah dilakukan diantaranya dengan memodelkan adanya populasi prey yang terinfeksi [1-2] dan dengan adanya predator terinfeksi [3]. Berbagai macam penyakit telah dicontohkan salah satunya adanya penyakit disebabkan Virus Patogen Serangga (VPS) dianggap sangat efektif dalam membasmi hama.

Hama dikenal sebagai suatu organisme yang dianggap dapat merugikan manusia. Dalam pertanian, hama dapat merusak tanaman sehingga dapat menyebabkan kerugian dalam pertanian. Maka dari itu pengendalian hama perlu dilakukan, salah satu yang sering dilakukan petani yaitu dengan menggunakan pestisida. Pestisida berasal dari zat kimia yang bisa digunakan dalam mengendalikan hama

namun pestisida dapat mengakibatkan pencemaran lingkungan dan membahayakan kesehatan manusia. Maka dari itu dilakukan penelitian pengendalian hama dengan menggunakan bioinfeksi.

Bioinfeksi oleh virus patogen serangga (VPS) dianggap sangat efektif dalam membasmi hama. VPS bisa bertahan di alam sangat lama dan dapat menularkan baik secara horizontal maupun vertikal [4]. VPS sengaja diberikan pada tanaman yang terserang hama, sehingga hama yang mengkonsumsinya akan terinfeksi dan dapat menularkan melalui kontak secara langsung pada hama rentan. Ilaria dkk [2] memberikan contoh adanya penyakit yang disebabkan Nematoda juga dapat menyerang serangga buah. Hal senada juga telah dibahas Soovoojet dan T.K. Kar[1] dengan mencontohkan penyakit akibat Baculovirus yang menyerang serangga Orchytes Rhinoceros. Serangga buah dan serangga Orchytes

Rhinoceros dianggap sebagai hama bagi buah- buahan/ sayuran dan pohon kelapa sawit.

Selain itu, pengendalian hama secara biologis juga dapat dilakukan dengan menggunakan predator. Nyatanya terdapat predator yang mampu mengendalikan hama tertentu tetapi ia merupakan hama bagi makhluk hidup lainnya. Seperti pada predator semut semai (Tomcat). Semut semai dianggap sebagai predator hama ulat *Helicoverpa Armigera* [5] dimana hama tersebut merupakan hama utama bagi pertanaman kedelai, namun semut semai dapat mengganggu kesehatan manusia.

Termotivasi dari fakta tersebut, pada penelitian ini akan dibahas tentang interaksi prey dan predator dengan adanya populasi prey terinfeksi. Predator memangsa baik populasi prey rentan maupun terinfeksi akan tetapi terdapat efek negatif pada populasi predator akibat predasi prey terinfeksi. Prey dianggap sebagai hama begitu juga predator dianggap sebagai hama bagi makhluk hidup lainnya meskipun predator dianggap dapat membantu mengendalikan populasi prey. Serta pada penelitian ini diasumsikan terdapat dua predator dengan adanya kompetisi baik kompetisi interspesifik ataupun kompetisi intraspesifik. Karena pada kenyataannya, dalam suatu ekosistem ada lebih dari satu pemangsa yang berburu mangsa yang sama. Menurut Aryulina dkk [6] sebuah kompetisi terjadi jika ada beberapa populasi dalam suatu wilayah memiliki kebutuhan hidup yang sama namun ketersediaan kebutuhan tersebut terbatas. Model kompetisi dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan untuk mendapatkan kebutuhan hidupnya diperlukan adanya persaingan individu dalam suatu populasi (kompetisi intraspesifik) dan persaingan antar dua populasi (kompetisi interspesifik) [7]. Penelitian interaksi mangsa- pemangsa dengan adanya kompetisi pada predator juga telah banyak dilakukan [8-9].

Bagian- bagian selanjutnya pada artikel ini meliputi: Pada bagian (2) akan dicantumkan beberapa kajian teori yang digunakan dalam analisis model, pada bagian (3) akan dideskripsikan model mangsa- pemangsa sesuai dengan asumsi- asumsi yang ditentukan dan dilakukan teknik penskalaan model untuk menyederhanakan model. Pada bagian (4) akan dideskripsikan perilaku dinamis pada sistem yang meliputi perhitungan titik ekuilibrium, analisis kestabilan lokal pada setiap titik ekuilibrium dan Pada bagian (5) akan dideskripsikan simulasi numerik dan diskusi. Pada bagian (6) merupakan kesimpulan dan saran.

KAJIAN TEORI

1. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1. (Ross, 1984)

Suatu persamaan yang menyatakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut dengan persamaan diferensial.

2. Sistem Persamaan Diferensial

Kumpulan n dari persamaan diferensial disebut Sistem persamaan diferensial, dengan $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$.

Definisi 2.2 (Conte dan Boor, 1993)

Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ untuk menyatakan turunan pertama terhadap x maka

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1)$$

3. Sistem Dinamik

Suatu sistem jika diberikan suatu kondisi saat ini atau masa yang lalu yang dapat diketahui nilainya pada masa yang akan mendatang disebut sistem dinamik (Nagle dkk, 2012). Sistem dinamik merupakan keadaan yang dipengaruhi waktu (t). Bentuk sistem dinamikanya dapat dinyatakan dengan sistem persamaan diferensial biasa jika t kontinu.

4. Titik Ekuilibrium

Definisi 2.3 (Perko, 2001)

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Titik $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ disebut titik ekuilibrium jika dan hanya jika $f(\tilde{x}) = 0$.

5. Matriks Jacobian

Definisi 2.4(Hale, 1991) diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$$J(f(\tilde{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Maka $J(f(\tilde{x}))$ merupakan matriks Jacobian dari f di titik x .

6. Kestabilan Lokal

Misal A adalah matriks berukuran $n \times n$, nilai eigen λ merupakan nilai karakteristik dari matriks A . Titik ekuilibrium dapat dicari kestabilannya menggunakan nilai eigen pada matriks Jacobiannya.

Misalkan $J(f(x))$ merupakan matriks Jacobian f dari titik x .

Teorema 2.1 (Hale, 1991)

a. Titik ekuilibrium \tilde{x} dari sistem dikatakan stabil asimtotik lokal jika setiap nilai eigen dari $J(f(x))$

merupakan bilangan yang memiliki bagian real negatif.

- b. Titik ekuilibrium \tilde{x} dari sistem tidak stabil Jika terdapat nilai eigen dari $J(f(x))$ merupakan bilangan yang memiliki bagian real tak negatif.

MODEL MATEMATIKA

Model matematika yang digunakan sesuai asumsi-asumsi berikut:

- a. Populasi prey dibagi menjadi dua yaitu populasi prey rentan $S(t)$ dan populasi prey terinfeksi $I(t)$, maka $S(t) + I(t)$ merupakan total populasi prey. Dan diasumsikan populasi predator I $P(t)$ dan populasi predator II $Q(t)$ serta diasumsikan setiap populasi tidak melakukan migrasi.
- b. Diantara dua populasi prey, hanya populasi prey rentan S yang dapat memproduksi mengikuti pertumbuhan logistik dengan tingkat pertumbuhan r dan dipengaruhi oleh faktor daya dukung lingkungan K serta diasumsikan I dapat memberikan tekanan pada populasi S .
- c. Penyakit dapat menyebar pada populasi prey melalui kontak langsung dengan prey terinfeksi, dengan tingkat penyebaran penyakit α . Diasumsikan tidak terdapat kematian alami pada populasi prey, kematian populasi prey hanya disebabkan karena penyakit dengan tingkat kematian σ dan akibat predasi oleh predator serta tingkat kesembuhan diabaikan.
- d. Prey merupakan satu- satunya sumber makanan bagi predator I dan II, dimana predator dapat mengkonsumsi baik prey rentan maupun terinfeksi. Diasumsikan prey terinfeksi lebih mudah dimangsa karena prey terinfeksi dianggap lebih lemah dari pada prey rentan sehingga tingkat predasi populasi prey terinfeksi oleh predator dimodelkan dengan fungsi respon holling tipe I dengan tingkat predasi γ_1 oleh predator I dan γ_2 oleh predator II, sedangkan tingkat predasi populasi prey rentan oleh predator dimodelkan dengan fungsi respon Holling II dengan tingkat predasi β_1 dan konstanta setengah saturasi a_1 oleh predator 1 serta tingkat predasi β_2 dan konstanta setengah saturasi a_2 oleh predator II.
- e. Diasumsikan l_1 dan l_2 merupakan peluang koefisien pemangsa prey rentan oleh predator I dan II serta m dan c merupakan peluang koefisien pemangsa prey terinfeksi oleh predator I dan II, predator I dan II bergantung hanya pada makanannya untuk bertahan hidup. Terdapat efek negatif n akibat predasi prey terinfeksi oleh predator 1 dan efek negatif d akibat predasi prey terinfeksi oleh predator II.
- f. Terdapat kompetisi pada populasi predator baik kompetisi interspesifik maupun kompetisi intraspesifik.

Dengan x dan y merupakan tingkat kompetisi intraspesifik pada predator I dan II serta ϵ_1 dan ϵ_2 merupakan tingkat kompetisi interspesifik pada predator I dan II. Dengan tingkat kematian alami predator I μ_1 dan tingkat kematian alami predator II μ_2 .

Dengan asumsi- asumsi diatas, dapat dikonstruksi sistem pemodelan mangsa- pemangsa sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S+I}{K} \right) - \alpha SI - \frac{\beta_1 SP}{a_1 + S} - \frac{\beta_2 SQ}{a_2 + S}, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \gamma_1 IP - \gamma_2 IQ - \sigma I, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{l_1 \beta_1 SP}{a_1 + S} + (m - n)\gamma_1 IP - \mu_1 P - \epsilon_1 PQ - xP^2, \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{l_2 \beta_2 SQ}{a_2 + S} + (c - d)\gamma_2 IQ - \mu_2 Q - \epsilon_2 PQ - yQ^2, \end{aligned} \tag{4}$$

dengan kondisis awal:

$$S(0) > 0, I(0) > 0, P(0) > 0, Q(0) > 0, \tag{5}$$

dan semua parameter bernilai positif.

Dilakukan teknik penskalaan untuk menyederhanakan sistem (4), dengan

$$s \rightarrow \frac{S}{K}, i \rightarrow \frac{I}{K}, p \rightarrow \frac{P}{K}, q \rightarrow \frac{Q}{K}, \tau \rightarrow r\tau,$$

sehingga sistem tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} &= s(1 - (s + i)) - \vartheta si - \frac{\omega_1 sp}{1 + \varphi_1 s} - \frac{\omega_2 sq}{1 + \varphi_2 s}, \\ \frac{di}{d\tau} &= \vartheta si - \eta_1 ip - \eta_2 iq - \psi i, \\ \frac{dp}{d\tau} &= \frac{\delta_1 sp}{(1 + \varphi_1 s)} + (\phi_1 - \xi_1)ip - \theta_1 p - e_1 pq - \ell p^2, \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{\delta_2 sq}{(1 + \varphi_2 s)} + (\phi_2 - \xi_2)iq - \theta_2 q - e_2 pq - u q^2, \end{aligned} \tag{6}$$

dengan

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\alpha K}{r}, \omega_1 = \frac{\beta_1 K}{r a_1}, \varphi_1 = \frac{K}{a_1}, \omega_2 = \frac{\beta_2 K}{r a_2}, \\ \varphi_2 &= \frac{K}{a_2}, \eta_1 = \frac{\gamma_1 K}{r}, \eta_2 = \frac{\gamma_2 K}{r}, \psi = \frac{\sigma}{r}, \delta_1 = \frac{l_1 \beta_1 K}{r a_1} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{m\gamma_1 K}{r}, \xi_1 = \frac{n\gamma_1 K}{r}, \theta_1 = \frac{\mu_1}{r}, \rho_1 = \frac{\varepsilon_1 K}{r}, \\ \delta_2 &= \frac{l_2 \beta_2 K}{r a_2}, \phi_2 = \frac{c\gamma_2 K}{r}, \xi_2 = \frac{d\gamma_2 K}{r}, \rho_2 \\ &= \frac{\varepsilon_2 K}{r}, \\ \theta_2 &= \frac{\mu_2}{r}, \ell = \frac{Kx}{r}, u = \frac{yK}{r}.\end{aligned}$$

Maka akan dilakukan analisis pada sistem (6) dengan kondisi awal:

$$s(0) > 0, i(0) > 0, p(0) > 0, q(0) > 0, \quad (8)$$

dan semua parameter bernilai positif.

PERILAKU DINAMIS PADA SISTEM

a. Titik Ekuilibrium

Sistem (6) memiliki sembilan titik ekuilibrium

1. Titik ekuilibrium kepunahan (E_0)

$$E_0 = (s_0, i_0, p_0, q_0) = (0, 0, 0, 0).$$

2. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan kepunahan predator I dan II (E_1)

$$E_1 = (s_1, i_1, p_1, q_1) = (1, 0, 0, 0).$$

3. Titik ekuilibrium kepunahan predator (E_2)

$$E_2 = (s_2, i_2, p_2, q_2) = (s_2, i_2, 0, 0) = \left(\frac{\psi}{\vartheta}, \frac{\vartheta - \psi}{\vartheta(1 + \vartheta)}, 0, 0\right).$$

4. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan kepunahan predator I (E_3)

$$E_3 = (s_3, i_3, p_3, q_3) = (s_3, 0, 0, q_3),$$

dimana:

$$q_3 = \frac{\delta_2 s_3 - \theta_2(1 + \varphi_2 s_3)}{u(1 + \varphi_2 s_3)},$$

s_3 merupakan solusi positif dari:

$$a_1 s_3^3 + a_2 s_3^2 + a_3 s_3 + a_4 = 0 \quad (9)$$

dengan:

$$a_1 = -u\varphi_2^2,$$

$$a_2 = u\varphi_2^2 - 2u\varphi_2,$$

$$a_3 = 2u\varphi_2 + \omega_2 \theta_2 \varphi_2 - (u + \omega_2 \delta_2),$$

$$a_4 = u + \omega_2 \theta_2.$$

5. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan kepunahan predator II (E_4)

$$E_4 = (s_4, i_4, p_4, q_4) = (s_4, 0, p_4, 0),$$

dimana:

$$p_4 = \frac{\delta_1 s_4 - \theta_1(1 + \varphi_1 s_4)}{\ell(1 + \varphi_1 s_4)},$$

s_4 merupakan akar positif dari:

$$b_1 s_4^3 + b_2 s_4^2 + b_3 s_4 + b_4 = 0, \quad (10)$$

dengan :

$$b_1 = -\ell\varphi_1^2,$$

$$b_2 = \ell\varphi_1^2 - 2\ell\varphi_1,$$

$$b_3 = 2\ell\varphi_1 + \omega_1 \theta_1 \varphi_1 - \omega_1 \delta_1 - \ell,$$

$$b_4 = \omega_1 \theta_1 + \ell.$$

6. Titik ekuilibrium kepunahan predator I (E_5)

$$E_5 = (s_5, i_5, p_5, q_5) = (s_5, i_5, 0, q_5),$$

dimana

$$\begin{aligned}q_5 &= \frac{\delta_2 s_5}{(1 + \varphi_2 s_5)u} + \frac{(\phi_2 - \xi_2)i_5}{u} - \frac{\theta_2}{u}, \\ i_5 &= \frac{(1 + \varphi_2 s_5)(u\vartheta s_5 + \eta_2 \theta_2 - \psi u) - \eta_2 \delta_2 s_5}{\eta_2(\phi_2 - \xi_2)(1 + \varphi_2 s_5)},\end{aligned}$$

s_5 merupakan akar positif dari:

$$c_1 s_5^3 + c_2 s_5^2 + c_3 s_5 + c_4 = 0, \quad (11)$$

dengan :

$$c_1 = -\varphi_2 u(1 + \vartheta)u\vartheta\varphi_2 - \varphi_2^2 \eta_2 u(\phi_2 - \xi_2),$$

$$\begin{aligned}c_2 &= (\phi_2 - \xi_2)((\eta_2 u\varphi_2(\varphi_2 - 2) - u\vartheta\varphi_2 \omega_2) \\ &\quad + u\varphi_2(1 + \vartheta)(u(-2\vartheta + \varphi_2 \psi) \\ &\quad + \varphi_2 \eta_2(-\delta_2 + \theta_2 \varphi_2)),\end{aligned}$$

$$c_3 = (\phi_2 - \xi_2)(\eta_2 u(2\varphi_2 - 1) + \omega_2 u(-\vartheta + \psi\varphi_2)) + (u(1 + \vartheta))(-u\vartheta + \eta_2 \delta_2)$$

$$c_4 = (\omega_2 \psi u + \eta_2 u)(\phi_2 - \xi_2) + u(1 + \vartheta)(-\eta_2 \theta_2 + \psi u).$$

7. Titik ekuilibrium kepunahan predator II (E_6)

$$E_6 = (s_6, i_6, p_6, q_6) = (s_6, i_6, p_6, 0),$$

dimana:

$$p_6 = \frac{\delta_1 s_6}{(1 + \varphi_1 s_6)\ell} + \frac{(\phi_2 - \xi_2)i_5}{\ell} - \frac{\theta_2}{\ell},$$

$$i_6 = \frac{(1 + \varphi_1 s_6)(\ell\vartheta s_6 + \eta_1 \theta_1 - \psi\ell) - \eta_1 \delta_1 s_6}{\eta_1(\phi_1 - \xi_1)(1 + \varphi_1 s_6)},$$

s_6 merupakan akar positif dari:

$$d_1 s_6^3 + d_2 s_6^2 + d_3 s_6 + d_4 = 0, \quad (12)$$

dengan :

$$d_1 = -\varphi_1 \ell(1 + \vartheta)\ell\vartheta\varphi_1 - \varphi_1^2 \eta_1 \ell(\phi_1 - \xi_1),$$

$$\begin{aligned}d_2 &= (\phi_1 - \xi_1)((\eta_1 \ell\varphi_1(\varphi_1 - 2) - \ell\vartheta\varphi_1 \omega_1) \\ &\quad + \ell\varphi_1(1 + \vartheta)(\ell(-2\vartheta + \varphi_1 \psi) \\ &\quad + \varphi_1 \eta_1(-\delta_1 + \theta_1 \varphi_1)),\end{aligned}$$

$$d_3 = (\phi_1 - \xi_1)(\eta_1 \ell(2\varphi_1 - 1) + \omega_1 u(-\vartheta + \psi\varphi_1)) + (\ell(1 + \vartheta))(-\ell\vartheta + \eta_1 \delta_1),$$

$$d_4 = (\omega_1 \psi \ell + \eta_1 \ell)(\phi_1 - \xi_1) + \ell(1 + \vartheta)(-\eta_1 \theta_1 + \psi \ell).$$

8. Titik ekuilibrium bebas penyakit prey (E_7)

$$E_7 = (s_7, i_7, p_7, q_7) = (s_7, 0, p_7, q_7),$$

dimana:

$$p_7 = \frac{1}{(u\ell - \rho_2 \rho_1)} \left(\frac{u\delta_1 s_7}{(1 + \varphi_1 s_7)} + \rho_1 \theta_2 - \frac{\rho_1 \delta_2 s_7}{(1 + \varphi_2 s_7)} - u\theta_1 \right),$$

$$q_7 = \frac{1}{(u\ell - \rho_2 \rho_1)} \left(\frac{\ell\delta_2 s_7}{(1 + \varphi_2 s_7)} + \rho_2 \theta_1 - \frac{\rho_2 \delta_1 s_7}{(1 + \varphi_1 s_7)} - \ell\theta_2 \right),$$

s_7 merupakan akar positif dari:

$$f_1 s_7^5 + f_2 s_7^4 + f_3 s_7^3 + f_4 s_7^2 + f_5 s_7 + f_6 = 0, \quad (13)$$

dengan:

$$f_1 = (u\ell - \rho_2 \rho_1)\varphi_1^2 \varphi_2^2,$$

$$f_2 = (u\ell - \rho_2 \rho_1)(\varphi_1^2 \varphi_2^2 - 2\varphi_2 \varphi_1^2 - 2\varphi_1 \varphi_2^2)$$

$$f_3 = (u\ell - \varrho_2\varrho_1)(\varphi_1^2(2\varphi_2 + 1) + \varphi_2^2(2\varphi_1 - 1) - 4\varphi_1\varphi_2) + \varphi_2^2(\varrho_1\delta_2\omega_1 + \varrho_2\delta_1\omega_2 - \omega_1u\delta_1) + \varphi_1\varphi_2(\omega_1\varphi_2(u\theta_1 - \varrho_1\theta_2) + \omega_2\varphi_1(\ell\theta_2 - \varrho_2\theta_1)) - \omega_2\ell\delta_2\varphi_1^2,$$

$$f_4 = (u\ell - \varrho_2\varrho_1)(\varphi_2^2 + \varphi_1^2 + 4\varphi_1\varphi_2 - 2(\varphi_2 + \varphi_1)) + 2\varphi_2(\varrho_1\delta_2\omega_1 + \varrho_2\delta_1\omega_2 - \omega_1u\delta_1) + \omega_1(-\varrho_1\theta_2 + u\theta_1)(\varphi_2^2 + 2\varphi_2\varphi_1) - 2\varphi_1\omega_2\ell\delta_2 + \omega_2(\ell\theta_2 - \varrho_2\theta_1)(\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2),$$

$$f_5 = (u\ell - \varrho_2\varrho_1)(2\varphi_2 + 2\varphi_1 - 1) - \omega_1u\delta_1 + (\varphi_1 + \varphi_2) + (\varrho_1\delta_2\omega_1 + \varrho_2\delta_1\omega_2) + \omega_1(-\varrho_1\theta_2 + u\theta_1)(\varphi_1 + 2\varphi_2) - \omega_2\ell\delta_2 + \omega_2(\ell\theta_2 - \varrho_2\theta_1)(\varphi_2 + 2\varphi_1),$$

$$x_6 = u\ell - \varrho_2\varrho_1 + \omega_1(u\theta_1 - \varrho_1\theta_2) + \omega_2(\ell\theta_2 - \varrho_2\theta_1).$$

9. Titik setimbang koeksistensi $E_8 = (s_8, i_8, p_8, q_8)$ dimana :

$$i_8 = \frac{\overline{Z}_1 s_8^3 + \overline{Z}_2 s_8^2 + \overline{Z}_3 s_8 + \overline{Z}_4}{\mathbf{E}(1 + \varphi_1 s_8)(1 + \varphi_2 s_8)},$$

$$p_8 = \frac{(u\delta_1 - \delta_2)s_8 + (u\delta_1\varphi_2 - \varphi_1\delta_2)s_8^2}{(1 + \varphi_1 s_8)(1 + \varphi_2 s_8)\mathcal{B}} + \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{B}} i_8 + \frac{\mathfrak{K}_1}{\mathcal{B}},$$

$$q_8 = \frac{(\ell\delta_2 - \varrho_2\delta_1)s_8 + (\varphi_1\ell\delta_2 - \varrho_2\varphi_2\delta_1)s_8^2}{(1 + \varphi_2 s_8)(1 + \varphi_1 s_8)\mathcal{B}} + \frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{B}} i_8 + \frac{\mathfrak{K}_2}{\mathcal{B}},$$

s_8 merupakan akar positif dari:

$$g_1 s_8^5 + g_2 s_8^4 + g_3 s_8^3 + g_4 s_8^2 + g_5 s_8 + g_6 = 0, \quad (14)$$

dengan :

$$g_1 = \mathbf{E}\mathcal{B}\varphi_2^2\varphi_1^2 + (1 + \vartheta)(-\overline{Z}_1\varphi_1\varphi_2)\mathcal{B}$$

$$g_2 = ((\varphi_2^2\varphi_1^2 - 2\varphi_2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2^2)\mathbf{E} + (1 + \vartheta)(-\overline{Z}_1(\varphi_2 + \varphi_1) - \varphi_1\varphi_2\overline{Z}_2))\mathcal{B} + (-\omega_1\mathcal{M}_1\varphi_2\overline{Z}_1 - \omega_2\mathcal{M}_2\varphi_1\overline{Z}_1),$$

$$g_3 = (\mathbf{E}(2\varphi_2\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_2^2 - \varphi_1^2 - 4\varphi_1\varphi_2) + (1 + \vartheta)(-\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2(\varphi_2 + \varphi_1) - \overline{Z}_3\varphi_1\varphi_2))\mathcal{B} + (-\omega_1(\mathbf{E}\varphi_2(b_1 + \mathfrak{K}_1\varphi_1\varphi_2 + b_2) + \mathcal{M}_1(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\varphi_2)) - \omega_2(\mathcal{M}_2(\overline{Z}_1 + \varphi_1\overline{Z}_2) + \mathfrak{K}_2\mathbf{E}\varphi_2\varphi_1^2)),$$

$$g_4 = ((\varphi_2^2 + \varphi_1^2 + 4\varphi_1\varphi_2 - 2(\varphi_2 + \varphi_1))\mathbf{E} + (-\overline{Z}_2 - \overline{Z}_3(\varphi_2 + \varphi_1) - \overline{Z}_4\varphi_1\varphi_2)(1 + \vartheta))\mathcal{B} + (-\omega_1(\mathbf{E}(b_1 + a_1\varphi_2 + \mathfrak{K}_1(\varphi_2^2 + 2\varphi_2\varphi_1)) + \mathcal{M}_1(\overline{Z}_2 + \varphi_2\overline{Z}_3) - \omega_2((b_2 + a_2\varphi_1)\mathbf{E} + \mathcal{M}_2(\overline{Z}_2 + \varphi_1\overline{Z}_3) + \mathfrak{K}_2\mathbf{E}(\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2))),$$

$$g_5 = (2\mathbf{E}(\varphi_2 + \varphi_1) - \mathbf{E} + (1 + \vartheta)(-\overline{Z}_3 + (-\overline{Z}_4(\varphi_2 + \varphi_1)))\mathcal{B} - \omega_1(\mathbf{E}(a_1 + \mathfrak{K}_1 2(2\varphi_2 + \varphi_1)) + \mathcal{M}_1(\overline{Z}_2 + \overline{Z}_4\varphi_2)) - \omega_2(a_2\mathbf{E} + \mathcal{M}_2(\overline{Z}_3 + \varphi_1\overline{Z}_4 + (2\varphi_1 + \varphi_2))),$$

$$g_6 = \mathbf{E}\mathcal{B} + \overline{Z}_4(-\omega_1(\mathcal{M}_1 + \mathfrak{K}_1\mathbf{E}) - \omega_2(\mathcal{M}_2 + \mathfrak{K}_2\mathbf{E}) - (1 + \vartheta)).$$

dengan:

$$\overline{Z}_1 = \vartheta\mathcal{B}\varphi_1\varphi_2, \overline{Z}_4 = -(\mathfrak{K}_1\eta_1 + \eta_2\mathfrak{K}_2) - \psi\mathcal{B},$$

$$\overline{Z}_2 = \vartheta\mathcal{B}(\varphi_2 + \varphi_1) - (b_1\eta_1 + b_2\eta_2) - (\mathfrak{K}_1\eta_1 + \eta_2\mathfrak{K}_2 + \psi)\varphi_1\varphi_2\mathcal{B},$$

$$\overline{Z}_3 = \vartheta\mathcal{B} - (a_1\eta_1 + a_2\eta_2) - (\mathfrak{K}_1\eta_1 + \eta_2\mathfrak{K}_2 + \psi\mathcal{B})(\varphi_2 + \varphi_1),$$

$$\mathcal{B} = u\ell - \varrho_1\varrho_2, \mathbf{E} = \mathcal{M}_1\eta_1 + \eta_2\mathcal{M}_2,$$

$$\mathcal{M}_2 = (\phi_2 - \xi_2)\ell - \varrho_2(\phi_1 - \xi_1), \mathfrak{K}_2 = -\theta_2\ell + \varrho_2\theta_1$$

$$\mathcal{M}_1 = (\phi_1 - \xi_1)u - \varrho_1(\phi_2 - \xi_2), \mathfrak{K}_1 = -\theta_1u + \theta_2.$$

b. Kestabilan Lokal

Kestabilan asimtotik lokal pada setiap titik ekuilibrium dianalisis dengan menentukan matriks Jacobian dan menghitung nilai eigen pada setiap titik ekuilibrium. Sistem dikatakan stabil asimtotik lokal jika bagian real pada setiap nilai eigennya dari matriks Jacobian bernilai negatif

1. Kesatabilan titik ekuilibrium kepunahan ($E_0 = (0,0,0,0)$)

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_0)$ adalah

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\psi, \lambda_3 = -\theta_1, \lambda_4 = -\theta_2.$$

Titik ekuilibrium kepunahan selalu tidak stabil karena terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_0)$ yang bernilai nonnegatif yaitu $\lambda_1 = 1$.

2. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit, kepunahan predator I dan II ($E_1 = (1,0,0,0)$)

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_1)$ adalah

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \vartheta - \psi,$$

$$\lambda_3 = \frac{\delta_1}{(1+\varphi_1)} - \theta_1, \lambda_4 = \frac{\delta_2}{(1+\varphi_2)} - \theta_2.$$

jika setiap nilai eigen dari $J(E_1)$ memiliki bilangan real negatif maka E_1 stabil asimtotik lokal.

3. Kestabilan titik ekuilibrium kepunahan predator I dan predator II ($E_2 = (\frac{\psi}{\vartheta}, \frac{\vartheta - \psi}{\vartheta(1+\vartheta)}, 0, 0)$)

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_2)$ adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\delta_2 \psi}{(\vartheta + \varphi_2 \psi)} + (\phi_2 - \xi_2) \frac{\vartheta - \psi}{\vartheta(1 + \vartheta)} < \theta_2, \\ \lambda_2 &= \frac{\delta_1 \psi}{(\vartheta + \varphi_1 \psi)} + (\phi_1 - \xi_1) \left(\frac{\vartheta - \psi}{\vartheta(1 + \vartheta)} \right) - \theta_1, \\ \lambda_3, \lambda_4 &\text{ merupakan akar- akar dari} \\ \lambda^2 + \lambda \frac{\psi}{\vartheta} + \psi \left(1 + \frac{\psi}{\vartheta} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_2)$ memiliki bilangan real negative maka E_2 stabil asimtotik lokal.

4. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan kepunahan predator I $\left(E_3 = \left(s_3, 0, 0, \frac{\delta_2 s_3}{u(1 + \varphi_2 s_3)} - \frac{\theta_2}{u} \right) \right)$

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_3)$ adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\delta_1 s_3}{(1 + \varphi_1 s_3)} - \theta_1 - \varrho_1 q_3, \\ \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\text{ merupakan akar- akar dari persamaan karakteristik:} \\ \lambda^3 + h_1 \lambda^2 + h_2 \lambda + h_3 &= 0,\end{aligned}\quad (16)$$

dimana :

$$\begin{aligned}h_1 &= u q_3 - 1 + 2s_3 + \frac{\omega_2 q_3}{(1 + \varphi_2 s_3)^2} \\ &\quad + (-\vartheta s_3 + \eta_2 q_3 + \psi), \\ h_2 &= \left(-1 + 2s_3 + \frac{\omega_2 q_3}{(1 + \varphi_2 s_3)^2} \right) u q_3 + \\ &\quad \frac{\delta_2 q_3}{(1 + \varphi_2 s_3)^2} \left(\frac{\omega_2 s_3}{1 + \varphi_2 s_3} \right) + (-\vartheta s_3 + \eta_2 q_3 + \psi) \left(u q_3 - 1 + \right. \\ &\quad \left. 2s_3 + \frac{\omega_2 q_3}{(1 + \varphi_2 s_3)^2} \right), \\ h_3 &= (-\vartheta s_3 + \eta_2 q_3 + \psi) \left(\left(-1 + 2s_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\omega_2 q_3}{(1 + \varphi_2 s_3)^2} \right) u q_3 + \frac{\delta_2 q_3}{(1 + \varphi_2 s_3)^2} \left(\frac{\omega_2 s_3}{1 + \varphi_2 s_3} \right) \right).\end{aligned}$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_3)$ memiliki bilangan real negatif maka E_3 stabil asimtotik lokal.

5. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan kepunahan predator II

$$\left(E_4 = \left(s_4, 0, \frac{\delta_1 s_4}{\ell(1 + \varphi_1 s_4)} - \frac{\theta_1}{\ell}, 0 \right) \right)$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_4)$ adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\delta_2 s_4}{(1 + \varphi_2 s_4)} - \theta_2 - \varrho_2 p_4, \\ \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\text{ merupakan akar- akar dari persamaan karakteristik:} \\ \lambda^3 + e_1 \lambda^2 + e_2 \lambda + e_3 &= 0,\end{aligned}\quad (17)$$

dimana:

$$\begin{aligned}e_1 &= \ell p_4 - 1 + 2s_4 + \frac{\omega_1 p_4}{(1 + \varphi_1 s_4)^2} - \vartheta s_4 + \eta_1 p_4 \\ &\quad + \psi, \\ e_2 &= \left(-1 + 2s_4 + \frac{\omega_1 p_4}{(1 + \varphi_1 s_4)^2} \right) \ell p_4 + \frac{\delta_1 p_4 \omega_1 s_4}{(1 + \varphi_1 s_4)^3} + \\ &\quad \left(-\vartheta s_4 + \eta_1 p_4 + \psi \right) \left(\ell p_4 - 1 + 2s_4 + \frac{\omega_1 p_4}{(1 + \varphi_1 s_4)^2} \right),\end{aligned}$$

$$e_3 = (-\vartheta s_4 + \eta_1 p_4 + \psi) \left(\left(-1 + 2s_4 + \frac{\omega_1 p_4}{(1 + \varphi_1 s_4)^2} \right) \ell p_4 + \frac{\delta_1 p_4 \omega_1 s_4}{(1 + \varphi_1 s_4)^3} \right).$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_4)$ memiliki bilangan real negatif maka E_4 stabil asimtotik lokal.

6. Kestabilan titik ekuilibrium kepunahan predator I $(E_5 = (s_5, i_5, 0, q_5))$

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_5)$ adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\delta_1 s_5}{(1 + \varphi_1 s_5)} + (\phi_1 - \xi_1) i_5 - \theta_1 - \varrho_1 q_5, \\ \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\text{ merupakan akar- akar dari persamaan karakteristik:} \\ \lambda^3 + u_1 \lambda^2 + u_2 \lambda + u_3 &= 0,\end{aligned}\quad (18)$$

Diengan :

$$\begin{aligned}u_1 &= u q_5 - 1 + 2s_5 + (1 + \vartheta) i_5 + \frac{\omega_2 q_5}{(1 + \varphi_2 s_5)^2}, \\ u_2 &= \left(-1 + 2s_5 + (1 + \vartheta) i_5 + \frac{\omega_2 q_5}{(1 + \varphi_2 s_5)^2} \right) u q_5 + \\ &\quad (\phi_2 - \xi_2) q_5 \eta_2 i_5 + \vartheta i_5 s_5 (1 + \vartheta) + \frac{\delta_2 q_5 \omega_2 s_5}{(1 + \varphi_2 s_5)^3}, \\ u_3 &= \left(-1 + 2s_5 + (1 + \vartheta) i_5 + \frac{\omega_2 q_5}{(1 + \varphi_2 s_5)^2} \right) (\phi_2 - \\ &\quad \xi_2) q_5 \eta_2 i_5 + i_5 q_5 \left(s_5 (1 + \vartheta) \left(\vartheta u - \frac{\delta_2 \eta_2}{(1 + \varphi_2 s_5)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. (\phi_2 - \xi_2) \vartheta \left(\frac{\omega_2 s_5}{1 + \varphi_2 s_5} \right) \right).\end{aligned}$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_5)$ memiliki bilangan real negatif maka E_5 stabil asimtotik lokal

7. Kestabilan titik ekuilibrium kepunahan predator II $(E_6 = (s_6, i_6, p_6, 0))$

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_6)$ adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\delta_2 s_6}{(1 + \varphi_2 s_6)} + (\phi_2 - \xi_2) i_6 - \theta_2 - \varrho_1 p_6, \\ \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\text{ merupakan akar- akar dari persamaan karakteristik} \\ \lambda^3 + r_1 \lambda^2 + r_2 \lambda + r_3 &= 0,\end{aligned}\quad (19)$$

dengan :

$$\begin{aligned}r_1 &= \ell p_3 - 1 + 2s_6 + (1 + \vartheta) i_6 + \frac{\omega_1 p_6}{(1 + \varphi_1 s_6)^2}, \\ r_2 &= \left(-1 + 2s_6 + (1 + \vartheta) i_6 + \frac{\omega_1 p_6}{(1 + \varphi_1 s_6)^2} \right) \ell p_3 \\ &\quad + (\phi_1 - \xi_1) p_6 \eta_1 i_6 \\ &\quad + \vartheta i_6 (s_6 + \vartheta s_6) + \frac{\delta_1 p_6 \omega_1 s_6}{(1 + \varphi_1 s_6)^3}, \\ r_3 &= \left(-1 + 2s_6 + (1 + \vartheta) i_6 + \frac{\omega_1 p_6}{(1 + \varphi_1 s_6)^2} \right) (\phi_1 - \\ &\quad \xi_1) p_6 \eta_1 i_6 + i_6 p_6 \left((s_6 + \vartheta s_6) \left(\vartheta u - \frac{\delta_1 \eta_1}{(1 + \varphi_1 s_6)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. (\phi_1 - \xi_1) \vartheta \left(\frac{\omega_1 s_6}{1 + \varphi_1 s_6} \right) \right).\end{aligned}$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_6)$ memiliki bilangan real negatif maka E_6 stabil asimtotik lokal.

8. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit ($E_7 = (s_7, 0, p_7, q_7)$)

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_7)$ adalah

$$\lambda_1 = \vartheta s_7 - \eta_1 p_7 - \eta_2 q_7 - \psi,$$

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ merupakan akar- akar dari persamaan karakteristik:

$$\lambda^3 + x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda + x_3 = 0, \quad (20)$$

dengan ;

$$x_1 = (\omega q_7 + \ell p_7) + \left(-1 + 2s_7 + \frac{\omega_1 p_7}{(1+\varphi_1 s_7)^2} + \frac{\omega_2 q_7}{(1+\varphi_2 s_7)^2}\right),$$

$$x_2 = (\ell p_7 \omega q_7 - \varrho_1 \varrho_2 p_7 q_7) + \left(-1 + 2s_7 + \frac{\omega_1 p_7}{(1+\varphi_1 s_7)^2} + \frac{\omega_2 q_7}{(1+\varphi_2 s_7)^2}\right) (\omega q_7 + \ell p_7) +$$

$$\left(\frac{\omega_1 s_7}{1+\varphi_1 s_7}\right) \left(\frac{\delta_1 p_7}{(1+\varphi_1 s_7)^2}\right) + \left(\frac{\omega_2 s_7}{1+\varphi_2 s_7}\right) \left(\frac{\delta_2 q_7}{(1+\varphi_2 s_7)^2}\right),$$

$$x_3 = (\ell p_7 \omega q_7 - \varrho_1 \varrho_2 p_7 q_7) \left(-1 + 2s_7 + \frac{\omega_1 p_7}{(1+\varphi_1 s_7)^2} +$$

$$\frac{\omega_2 q_7}{(1+\varphi_2 s_7)^2}\right) + \left(\frac{\omega_1 s_7 p_7}{1+\varphi_1 s_7}\right) \left(\frac{\delta_1 \omega q_7}{(1+\varphi_1 s_7)^2} - \frac{\varrho_1 \delta_2 p_7}{(1+\varphi_2 s_7)^2}\right) +$$

$$\left(\frac{\omega_2 q_7 s_7}{1+\varphi_2 s_7}\right) \left(-\frac{\delta_1 \varrho_2 q_7}{(1+\varphi_1 s_7)^2} + \frac{\delta_2 \ell p_7}{(1+\varphi_2 s_7)^2}\right).$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_7)$ memiliki bilangan real negatif maka E_7 stabil asimtotik lokal.

9. Kestabilan titik ekuilibrium koeksistensi ($E_8 = (s_8, i_8, p_8, q_8)$)

Nilai eigen dari matriks Jacobian $J(E_8)$ merupakan akar- akar dari persamaan karakteristik:

$$\lambda^4 + w_1 \lambda^3 + w_2 \lambda^2 + w_3 \lambda + w_4 = 0, \quad (21)$$

dengan:

$$w_1 = A_{44} + A_{33} + A_{11},$$

$$w_2 = (A_{33}A_{44} - A_{43}A_{34}) + A_{23}A_{32} + A_{24}A_{42} + A_{11}(A_{44} + A_{33}),$$

$$w_3 = A_{23}(A_{32}A_{44} - A_{42}A_{34}) + A_{24}(A_{42}A_{33} - A_{32}A_{43}) + A_{11}((A_{33}A_{44} - A_{43}A_{34}) + A_{23}A_{32} + A_{24}A_{42}) + (A_{12}(A_{21}A_{44} - A_{23}A_{31}) + A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{24}A_{41}) + A_{13}A_{21}A_{32} + A_{14}A_{21}A_{42} + (A_{31}(A_{44}A_{13} - A_{14}A_{43}) + A_{41}(A_{14}A_{33} - A_{13}A_{34})),$$

$$w_4 = A_{11}(A_{33}A_{44} - A_{43}A_{34}) + (A_{23}(A_{32}A_{44} - A_{42}A_{34}) + A_{24}(A_{42}A_{33} - A_{32}A_{43}) + A_{23}(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) + A_{24}(A_{11}A_{42} - A_{12}A_{41}) + A_{12}A_{21}A_{44} + A_{12}A_{21}A_{33} + A_{13}A_{21}A_{32} + A_{31}(A_{13}A_{44} - A_{14}A_{43}) + A_{14}A_{21}A_{42} + A_{41}(A_{14}A_{33} - A_{13}A_{34})).$$

dimana :

$$A_{11} = -1 + 2s_8 + (1 + \vartheta)i_8 + \frac{\omega_1 p_8}{(1 + \varphi_1 s_8)^2} + \frac{\omega_2 q_8}{(1 + \varphi_2 s_8)^2},$$

$$A_{12} = s_8 + \vartheta s_8, A_{13} = \frac{\omega_1 s_8}{1 + \varphi_1 s_8}, A_{14} = \frac{\omega_2 s_8}{1 + \varphi_2 s_8},$$

$$A_{21} = \vartheta i_8, A_{22} = 0, A_{23} = \eta_1 i_8, A_{24} = \eta_2 i_8,$$

$$A_{31} = \frac{\delta_1 p_8}{(1 + \varphi_1 s_8)^2}, A_{32} = (\phi_1 - \xi_1)p_8,$$

$$A_{33} = \ell p_8, A_{34} = \varrho_1 p_8, A_{41} = \frac{\delta_2 q_8}{(1 + \varphi_2 s_8)^2},$$

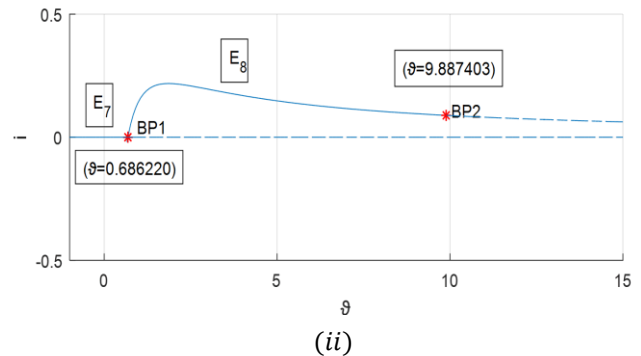
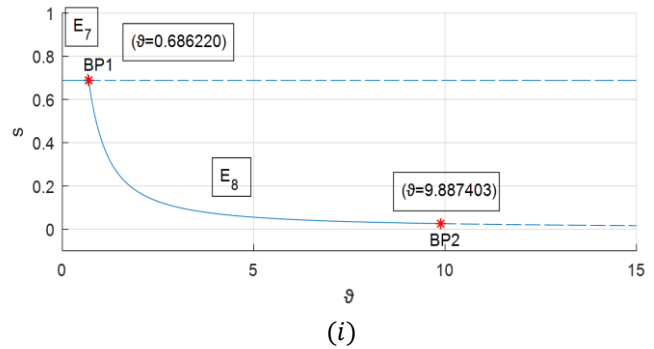
$$A_{42} = (\phi_2 - \xi_2)q_8, A_{43} = \varrho_2 q_8, A_{44} = \omega q_8.$$

Jika setiap nilai eigen dari $J(E_8)$ memiliki bilangan real negatif maka E_8 stabil asimtotik lokal.

SIMULASI NUMERIK DAN DISKUSI

Pada bagian ini akan diberikan beberapa hasil simulasi numerik. Diasumsikan nilai- nilai parameter sebagai berikut: $\omega_1 = 0.42, \omega_2 = 0.4, \varphi_1 = 0.9, \varphi_2 = 0.95, \eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.15, \psi = 0.25, \delta_1 = 0.35, \delta_2 = 0.32, \phi_1 = 0.15, \xi_1 = 0.07, \phi_2 = 0.11, \xi_2 = 0.05, \theta_1 = 0.013, \theta_2 = 0.024, \varrho_1 = 0.05, \varrho_2 = 0.07, \ell = 0.15, u = 0.14$. (22)

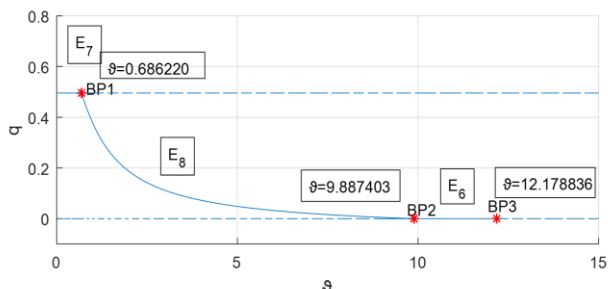
Pada penelitian ini, adanya penyakit dianggap sangat berperan penting dalam mengendalikan laju pertumbuhan kedua populasi baik populasi prey ataupun predator, sehingga akan difokuskan pada parameter ϑ .



Gambar 1. Diagram bifurkasi (i) pada permukaan $\vartheta - s$, (ii) pada permukaan $\vartheta - i$, dengan menggunakan nilai parameter (22)

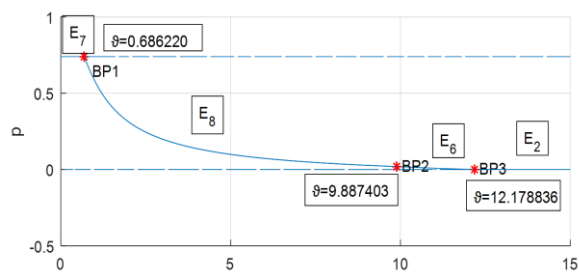
Pada interval $0.686220 < \vartheta < 9.887403$, sistem (6) stabil pada titik ekuilibrium koeksistensi (E_8) dimana setiap populasi hidup berdampingan dalam suatu ekosistem (ditunjukkan dengan adanya garis solid yang menghubungkan titik $BP1$ dan $BP2$). Titik $BP1$ dimana $i = 0$, berkorespondensi dengan titik ekuilibrium bebas penyakit ($E_7 = (s_7, 0, p_7, q_7)$). Dengan mengkontinu E_7 pada ≤ 0.686220 , menunjukkan hasil yang stabil dimana terjadi kepunahan pada populasi prey terinfeksi

dengan ketiga populasi lainnya hidup berdampingan dalam suatu ekosistem (ditunjukkan dengan garis solid disebelah kiri titik BP1). Dan sebaliknya dengan mengkontinu ($E_7 = (s_7, 0, p_7, q_7)$) pada $\vartheta > 0.686220$ memperoleh hasil yang tidak stabil (ditunjukkan dengan garis putus-putus disebelah kanan titik BP1).



Gambar 2. Diagram bifurkasi pada permukaan $\vartheta - q$, dengan menggunakan nilai parameter (22)

Titik BP2 dimana $q = 0$ berkorespondensi dengan titik ekuilibrium kepunahan predator II ($E_6 = (s_6, i_6, p_6, 0)$). Dengan melakukan kontinu E_6 pada $9.887403 \leq \vartheta < 12.178836$ memperoleh hasil yang stabil yaitu suatu keadaan dimana terjadi kepunahan pada populasi predator II dan ketiga populasi hidup berdampingan dalam suatu ekosistem (ditunjukkan dengan garis solid yang menghubungkan titik BP2 dan BP3). Sedangkan dengan melakukan kontinu E_6 pada $\vartheta \geq 12.178836$ dan $\vartheta < 9.887403$ memperoleh hasil yang tidak stabil (ditunjukkan dengan garis putus-putus disebelah kiri BP2 dan kanan BP3).



Gambar 4. Diagram bifurkasi pada permukaan $\vartheta - p$, dengan menggunakan nilai parameter (22)

Titik BP3 dimana $p = 0$ dan $q = 0$ berkorespondensi dengan titik ekuilibrium kepunahan predator I dan II ($E_2 = (s_7, i_7, 0, 0)$). Dengan mengkontinu E_2 pada $\vartheta \geq 12.178836$ memperoleh hasil yang stabil dimana terjadi kepunahan pada populasi predator baik predator I dan predator II dengan populasi prey bertahan dalam suatu ekosistem (ditunjukkan garis solid disebelah kanan BP3). Dan sebaliknya dengan mengkontinu E_2 pada $\vartheta < 12.178836$ memperoleh hasil yang tidak stabil (ditunjukkan dengan garis putus-putus disebelah kiri BP3). Dari penjelasan diatas juga dapat diketahui

dengan mengambil nilai- nilai parameter (22) maka E_1, E_3, E_4, E_5 tidak stabil.

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada penelitian ini membahas tentang model predator- prey, dengan menganggap prey dan predator sebagai hama. Pengendalian hama dilakukan dengan bioinsektisida oleh Virus Patogen Serangga (VPS) yang dapat menyebar pada populasi prey dan memberikan efek negatif pada kedua populasi predator akibat predasi prey yang terinfeksi. Sehingga topik utama pada penelitian ini untuk mengetahui pengaruh penyakit terhadap setiap populasi baik populasi prey maupun populasi kedua predator yang saling berkompetisi untuk mendapatkan prey.

Model ini terdiri dari sembilan titik ekuilibrium. Dilakukan analisis kestabilan lokal pada setiap titik ekuilibrium yang diperoleh E_0 selalu tidak stabil, sedangkan titik ekuilibrium lainnya stabil asimtotik lokal dengan beberapa kondisi..

Diberikan simulasi numerik dengan memfokuskan pada tingkat penyebaran penyakit. Dengan menggunakan MatCont diperoleh diagram bifurkasi yang menunjukkan dengan nilai- nilai parameter yang telah ditentukan sistem memungkinkan stabil pada E_8, E_7, E_6, E_2 dan tidak stabil pada titik ekuilibrium lainnya. Sehingga dapat diketahui bahwa tingkat penyebaran penyakit sangat berpengaruh pada sistem.

Pada penelitian selanjutnya, dapat dilakukan dengan melakukan analisis kestabilan global pada setiap ekuilibrium dan menggunakan fungsi respon tipe holling III.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Soovoojet, T.K. Kar. (2013). "A Mathematical Study of Prey Predator Model in Relevance to Pest Control": *Nonlinear Dynamics*, 74, 667-683.
- [2] Ilaria U., Cristina P. & Ezio V.. (2016). "An Ecogenetic Disease- Affected Predator- Prey Model": *Cogent Mathematics*, 3:1, 1195716, DOI:10.1080/23311835.2016.1195716.
- [3] Mainul. (2010). "A Predator – Prey Model with Disease in the Predator Species Only": *Nonlinear Analysis*, Vol 11, Issue 4, 2224-2236.
- [4] Samsudin. (2016). "Proses Pengembangan Bioinsektisida NPV untuk pengendalian Hama Tanaman Perkebunan di Indonesia": *Indonesian Research Institute*, Vol. 15, No. 12, 18-30.
- [5] Winasa, I Wayan, Dadan & Sugeng. (2007). *Jelajah Paederus Fuscipes (Coleoptera: Staphylinidae) terhadap Telur dan Larva Helicoverpa Armigera pada Pertanian*

- Kedelai*. Bogor: Universitas IPB.
- [6] Aryulina, D., dkk. (2004). *Biologi 2 SMA dan MA untuk Kelas XI*. Jakarta : Esis.
- [7] Kapur JN. (2000). “Mathematical Models in Biology and Medicine”. Affiliated east- West Press Private Limited: New Delhi.
- [8] Ikbal, Muhammad. (2017). “Kestabilan Model Mangsa- Dua Pemangsa dengan Pemanenan Optimal pada Pemangsa”. Tesis .Universitas Hasanuddin Makassar
- [9] D. Savitri, A.Suryanto, Kusumawinahyu & Abadi. (2019). “A Dynamics Behaviour of Two Predators and One Prey Interaction with Competition Between Predators”. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 546 (5), 052069.
- [10] Ross, Shepley L. (1984). *Differential Equations: Third Edition*. New York: John Wiley and Sons.
- [11] Conte, S.D., Boor C.D,. (1980). *Elementary Numerical Analysis*. Erlangga: Jakarta.
- [12] Nagle, R.K., Saff, E. B., & Sinder, A.D.. (2012). *Fundamentals of Differential Equatons and Boundary Value Problems*. USA: Pearson Education, inc.
- [13] Perko, Lawrence. (2001) . *Differential Equations and Dynamical System: Third.Edition*. New York:Springer-Verlag, New York.
- [14] Hale, J.K, & Kocak, H.. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Spinger-Verlag Inc